REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire
pour obtenir le diplôme de
Master

Option : Perturbation, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Thème

Analyse mathématique d’un modèle proie-prédateur

Présentée par
GHERMAOUI Rabiaâ

Soutenu le : 19 septembre 2013

Composition du jury:

Président: Mr. K. Yadi. M.C.A. Université de Tlemcen.
Examinateur: Mr. B. Abdelloui. Prof. Université de Tlemcen.
Encadreur: Mr. A. Moussaoui. M.C.A Université de Tlemcen.

Année universitaire : 2012 - 2013

Remerciements

Avant tout, je remercie mon dieu, qui m'a aidé et m'a donné la santé et la patience pour finir ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur A. MOUSSAOUI, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. Sa confiance a été pour moi un grand honneur.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur K. YADI, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées; aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur B. ABDELLAOUI, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger et d'évaluer mon travail.

J'exprime également ma gratitude à tous les Enseignants et l'administration du département qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à chaque personne qui m'a soutenu durant mes études, notamment : à la source de ma vie et le plus beau cadeau de mon dieu, mes chers parents sans qui tout ceci n'aurait pas été possible, pour leur confiance qu'ils ont toujours eue en moi, et qui ont m'appris comment patienter pour atteindre un tel objectif.

Ainsi à mes grands parents (Djeddi et Hbébé) et les défuntes mes grands mères.

Sans oublier mes chères sœurs et mon cher frère que je les aime beaucoup et à toute la famille GHERMAOUI et BEKKOUCHE.

Mes amis et collègues du département, avec qui les bons souvenirs sont toujours présents.

Analyse mathématique d'un modèle proie-prédateur

Ghermaoui Rabiaa

2012-2013

Table des Matières

Chapître 0

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude d'un modèle mathématique en dynamique de populations, plus précisement nous examinons de près un modèles proie-prédateur à coefficients périodique avec un fonction réponses ratio-dépendant, nous montrons en utilisant le théorème de Mawhin l'existence d'une solution périodique et positive pour ce système.

Des simulations numériques sont présentées pour valider nos résultats théoriques.

Chapître 1

Rappels et Notions fondamentaux

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et théorèmes fondamentales qui seront utilisées pour la suite.

1.1 Projection

Soit X un espase vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si pour tout $x \in X$ on a:

$$P\left[P(x)\right] = P^2(x) = P(x).$$

Proposition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue.*

Proposition 1.1.2 *Si P est une projection dans X Alors*

$$\ker P = \operatorname{Im}(I - P) \quad et \quad \operatorname{Im} P = \ker(I - P).$$

1.2 Application compacte

Définition 1.2.1 *Soit X et Y des espaces de Banach. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit compact si pour tout sous-ensemble borné $\Omega \in X$, son image $T(\Omega)$ est un sous-ensemble relativement compact de Y, c'est-à-dire que l'adhérence de $T(\Omega)$ est compacte dans Y.*
L'ensemble des opérateurs compacts de X vers Y est noté $K(X, Y)$. Si $X = Y$, on note simplement $K(X)$.

Théorème 1 *(Ascoli-Arzela) [1]*

Soit E un espace métrique compact, F un espace métrique complet. On désigne par $C(E,F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F. Un sous ensemble $M \subset C(E,F)$ est relativement compact, si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes:

1. *M est équicontinue (i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $d_F(x(t_1), x(t_2)) < \varepsilon$, pour tout $x(.) \in M$ et tout $(t_1, t_2) \in E \times E$ vérifiant $d_E(t_1, t_2) < (\delta(\varepsilon))$.*
2. *Pour tout $t \in E$, l'ensemble $M(t) = \{x(t), x(.) \in M\}$ est relativement compact dans F.*

1.3 Opérateur de Fredholm

Définition 1.3.1 *Soit X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire normé $T : X \to Y$ est appelé un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont satisfaites:*

(1) $\operatorname{Im} T$ *est fermé dans Y.*

(2) $\dim(\ker T)$ *est finie.*

(3) $\dim(Y - \operatorname{Im} T) = co \dim(\operatorname{Im} T)$.

1.3.2 Indice d'un opératur de Fredholm

L'indice d'un opérateur de Frdholm est la fonction à valeur entière suivante:

$$\begin{array}{rcl} ind & : & F(X,Y) \to \mathbb{Z}, \\ T & \to & ind(T) = \dim(\ker T) - co\dim(\operatorname{Im} T). \end{array}$$

On dit qu'un opérateur de Fredholm est d'indice zéro si $ind(T) = 0$, par suite $\dim(\ker T) = co \dim(\operatorname{Im} T)$.

1.4 Opérateur L-compact

Définition 1.4.1 *Si L un opérateur de Fredholm d'indice 0 et soit deux projections $P : X \to X$ et $Q : Z \to Z$ telles que $\operatorname{Im} P = \ker L$, $\operatorname{Im} L = \ker Q = \operatorname{Im}(I - Q)$, alors $L : (I - P)X \to \operatorname{Im} L$ est inversible, on note K_p son inverse. Si Ω un sous ensemble ouvert borné de X, l'application N est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné et $K_p\,(I - Q)\,N : \overline{\Omega} \to X$ est compact. Comme $\operatorname{Im} Q$ est isomorphe à $\ker L$ il existe un isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \to \ker L$.*

1.5 Degré topologique de Brouwer

Définition 1.5.1 *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Notons par $J_f(x_0)$ la Jacobienne de f en un point x_0 de Ω. Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$.*

On désigne par $Sf(\Omega)$ l'ensemble des points critiques. C'est à dire

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

Définition 1.5.2 *Un élement $y \in \mathbb{R}^n$ est dit point régulier de f si $f^{-1}\{y\} \cap S_f(\Omega) = 0$. Dans le cas contraire y est dit point singulier.*

Définition 1.5.3 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1et $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$ une valeur réguliére de f. On appelle degré topologique de f par rapport à Ω et à y , qu'on note $\deg(f, \Omega, y)$, le nombre entièr :*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn J_f(x),$$

Ce degré est aussi appelé degré de Brouwer.

1.5.4 Propriétés fondamentales du degré topologique

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition ci-dessus.

Théorème 2 *Soit $N \geq 1$ et A l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue telle que $f(x) \neq y$ $\forall x \in \partial\Omega$. Alors il existe une et une seule application* $\deg : A \to \mathbb{Z}$ *qui vérifie les propriétés suivantes:*

* ***Additivité:*** *si Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω telles que $f(x) \neq y$, $\forall x \in \Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, alors*

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y).$$

* ***Invariance par homotopie:*** *si Ω est un ouvert borné $\mathbb{R}^N$, soit*

$$\begin{array}{rcl} h\ \overline{\Omega} \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^N \\ (x, \lambda) & \to & h_\lambda(x) \end{array} \quad \textit{est continue et} \quad \begin{array}{rl} q : & [0,1] \to \mathbb{R}^N \\ & \lambda \to q_\lambda \end{array}$$

telles que $h_\lambda(x) \neq q_\lambda, \forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in [0,1]$. Alors $\deg(h_\lambda, \Omega, q_\lambda) =$Constante $\forall \lambda$.

* ***Normalisation:*** *si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \Omega$ alors $\deg(Id, \Omega, y) = 1$.*

1.5.5 Conséquences

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continue, on a les résultats suivants:

a. $\deg(f, \varnothing, y) = 0$.

b. Si Ω_0 est un ouvert inclu dans Ω tel que $f(x) \neq y, \forall x \in \overline{\Omega} \backslash \Omega_0$, alors $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_0, y)$.

c. Si $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.

1.6 Théorème de continuation de Mawhin

Soit X et Z deux espaces de Banach. Considérons l'équation opérationnelle

$$Lx = \lambda Nx,\ \ \lambda \in (0, 1),$$

où $L : Dom\ L \cap X \to Z$ est un opérateur linéaire et λ est un paramètre.
Soit P et Q deux projections tels que $P : X \cap Dom\ L \to \ker L$ et
$Q : Z \to Z \backslash \operatorname{Im} L$.
Nous avons le résultat suivant de Mawhin:

Lemme 1.6.1 *Théorème de continuation de Mawhin [2]*

Soit X et Z deux espaces de Banach et L opérateur de Fredholm d'indice zéro. Supposons que $N : \overline{\Omega} \to Z$ est L-compacte sur $\overline{\Omega}$ avec Ω est un ouvert borné dans X. De plus, supposons que :

a) Pour tout $\lambda \in (0, 1)$, $x \in \partial\Omega \cap Dom\ L$, $Lx \neq \lambda Nx$.

b) Pour tout $x \in \partial\Omega \cap \ker L$, $QNx \neq 0$

c) $\deg \{QNx, \Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0$.

Alors l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution dans $\overline{\Omega} \cap Dom\ L$.

Chapître 2

Etude d'un système proie-prédateur avec une fonction réponse ratio-dépendante

Un modèle proie-prédateur avec une fonction réponse ratio-dépendante est donné par le système suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = H\left(r_1 - b_1 H\right) - f(H)P, \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = \left(r_2 - a_2 \dfrac{P}{H}\right) P, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $H(t)$ et $P(t)$ représentent les densités des proies et prédateurs respectivement, $r_1$est le taux de croissance de la population des proies et $\dfrac{r_1}{b_1}$ la capacité limite. Le taux de prédation total est $f(H)P$, la population prédatrice croît logistiquement avec un taux de croissance r_2 et la capacité limite $\dfrac{H}{a_2}$.

Le système (2.1) a été étudié largement par plusieurs mathématiciens (voir par exemple [4] et les références citées dans cet article). Wang et Fan [9] ont étudié la version non-autonome du système (2.1), ils ont étudié le modèle:

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = H(t)\left(r_1(t) - b_1(t)H(t)\right) - f(t,H)P(t), \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = \left(r_2(t) - a_2(t)\dfrac{P(t)}{H(t)}\right) P(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

où r_i, $i = 1, 2$, $a_2(t)$, $b_1(t)$ dépendent du temps t.

2.1 Existence de solutions positives périodiques

Théorème 3 *[9]*
Supposons que:

(A1) $r_i(t)$ $i = 1, 2$, $a_2(t)$, $b_1(t)$ *sont des fonctions continues dans* $\mathbb{R}$ *est sont bornées.*

(A2) $f(t, H)$ *est continue par rapport à la première variable et est différentiable par rapport à la seconde variable et* $f(t, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial H}(t, H) > 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *et aussi* $\dfrac{\partial f}{\partial H}(t, H)$ *bornée par rapport à* t.

(A3) Il existe une constante $C_0 > 0$ *telle que* $f(t, H) \leq C_0 H$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $H > 0$.

(A4) Les paramètres de système (2.2) *sont* ω*-périodiques par rapport à* t.

Alors, si

$$\frac{C_0 \overline{r_2}}{\overline{b_1} \overline{a_2}} \exp\left[2(\overline{r_1} + \overline{r_2})\omega\right] < 1, \tag{2.3}$$

le système(2.2) *admet au moins une solution positive* ω*-périodique.*

En particulier, si $f(t, H) = a_1(t)H(t)$ le système(2.2) devient:

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = (r_1(t) - a_1(t)P(t) - b_1(t)H(t))H(t), \\[2ex] \dfrac{dP}{dt} = \left(r_2(t) - a_2(t)\dfrac{P(t)}{H(t)}\right)P(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Ce système est connu sous le nom modèle proie-prédateur de Leslie-Gower [6, 4].

Théorème 4 *[4]*
Supposons que:

(B1) $r_i(t)$, $a_i(t)$ $i = 1, 2$, $b_1(t)$ *sont des fonctions continues dans* $\mathbb{R}$ *est sont bornées.*

(B2) *Les paramètres du système* (2.4) *sont* ω*-périodiques par rapport à* t.

Alors, si

$$r_2(t) > a_2(t), \tag{2.5}$$

le système (2.4) *admet au moins une solution positive ω-périodique.*

Théorème 5 *[5] Si (A1), (A2) et (A4)sont vérifiées, alors le système* (2.2) *admet au moins une solution positive périodique de période ω.*

Démonstration : Il est clair que la solution du système (2.2) si elle est existe est positive en effet, le système (2.2) peut être écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt}(t) = \left(r_1(t) - b_1(t)H(t) - f(t,H)\dfrac{P(t)}{H(t)}\right)H(t), \\ \\ \dfrac{dP}{dt}(t) = \left(r_2(t) - a_2(t)\dfrac{P(t)}{H(t)}\right)P(t), \end{cases} \tag{2.6}$$

d'où

$$\begin{cases} H(t) = H(0)\exp\left[\displaystyle\int_0^t \left(r_1(s) - f(s,H)\frac{P(s)}{H(s)} - b_1(s)H(s)\right)ds\right], \\ \\ P(t) = P(0)\exp\left[\displaystyle\int_0^t \left(r_2(s) - a_2(s)\frac{P(s)}{H(s)}\right)ds\right], \end{cases} \tag{2.7}$$

ainsi si $H(0) > 0$ et $P(0) > 0$ la solution reste toujours positive.
Ceci, nous permet de faire le changement de variable suivant:

$$\begin{cases} H(t) = e^{x_1(t)}, \\ \\ P(t) = e^{x_2(t)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

En utilisant ce changement de variable, le système (2.6) devient:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}(t) = r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)})\dfrac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} - b_1(t)e^{x_1(t)}, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt}(t) = r_2(t) - a_2(t)\dfrac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ainsi, il suffit de montrer que le système (2.9) admet au moins une solution ω-périodique pour conclure que notre système admet au moins une solution positive ω-périodique.
Pour cela on se place dans le cadre du lemme 1.6.1.

Prenons $X = Z = \left\{ x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : x(t+\omega) = x(t) \right\}$ et on utilise la notation $\|x\| = \left\| (x_1(t), x_2(t))^T \right\| = \max\limits_{t\in[0,\omega]} |x_1(t)| + \max\limits_{t\in[0,\omega]} |x_2(t)|$. On démontre que X et Z munis de la norme $\|.\|$ sont deux espaces de Banach.

Soit

$$Nx = \begin{pmatrix} r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)}) \dfrac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} - b_1(t) e^{x_1(t)} \\ \\ r_2(t) - a_2(t) \dfrac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \end{pmatrix}$$

et $Lx = \dot{x}$, $Px = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega x(t)dt$, $x \in X$, $Qz = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega z(t)dt$, $z \in Z$.

* **Montrons que L est un opérateur de Fredholm d'indice 0.**

$$\begin{aligned} \ker L &= \{x/x \in X, Lx = 0\}, \\ &= \{x/x \in X, \dot{x} = 0\}, \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Donc $\dim(\ker L) = 2$ et par suite $\dim(\ker L)$ est finie.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L &= \{z/z \in Z, \exists x \in X, z = Lx\}, \\ &= \left\{ z/z \in Z, \int_0^\omega z(t)dt = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Im} L$ est fermé car l'image d'un fermé par une application continue est un fermé.

On a $X = \ker L \oplus \operatorname{Im} L$ donc $co\dim(\operatorname{Im} L) = 2$ et par suite $\dim(\ker L) = co\dim(\operatorname{Im} L) = 2$.

L est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

* **Calculons l'inverse généralisé de** L.

$$K_p : \operatorname{Im} L \to Dom\ L.$$

On pose

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= z(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = z(t), \\ &\Rightarrow \int_0^t \dot{x}(s)ds = \int_0^t z(s)ds, \\ &\Rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t z(s)ds, \\ &\Rightarrow x(t) = \int_0^t z(s)ds + x(0). \end{aligned}$$

Puisque $x \in \ker P$

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega x(t)dt &= \int_0^\omega \left[\int_0^t z(s)ds + x(0)\right] dt, \\
0 &= \int_0^\omega \int_0^t z(s)dsdt + \omega x(0), \\
x(0) &= -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t z(s)dsdt.
\end{aligned}$$

Par suite

$$x(t) = \int_0^t z(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t z(s)dsdt.$$

L'inverse généralisé de L est

$$K_p(t) = \int_0^t z(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t z(s)dsdt.$$

Ainsi

$$QNx = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega \left[r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)})\frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} - b_1(t)e^{x_1(t)}\right] dt \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega \left[r_2(t) - a_2(t)\frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}}\right] dt \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
K_p(I-Q)N &= K_p(N - QN), \\
&= \int_0^t (Nx - QNx)(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t (Nx - QNx)(s)dsdt, \\
&= \int_0^t (Nx)(s)ds - \int_0^t (QNx)(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t (Nx)(s)dsdt \\
&\quad + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t (QNx)(s)dsdt, \\
&= \int_0^t (Nx)(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t (Nx)(s)dsdt - \frac{1}{\omega}\int_0^t \int_0^\omega (Nx)(t)dtds \\
&\quad + \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega \int_0^t \int_0^\omega (Nx)(t)dtdsdt,
\end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{\omega}\int_0^t\int_0^\omega (Nx)(t)dtds + \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega\int_0^t\int_0^\omega (Nx)(t)dtdsdt \\
&= -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega (Nx)(t)dt\int_0^t ds + \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega (Nx)(t)dt\int_0^\omega\int_0^t dsdt \\
&= -\frac{t}{\omega}\int_0^\omega (Nx)(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^\omega (Nx)(t)dt \\
&= -(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^\omega (Nx)(t)dt
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
K_p(I-Q)N &= \int_0^t (Nx)(s)ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t (Nx)(s)dsdt - (\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^\omega (Nx)(t)dt, \\
&= \begin{pmatrix} \int_0^t \left(r_1(s) - f(s, e^{x_1(s)})\frac{e^{x_2(s)}}{e^{x_1(s)}} - b_1(s)e^{x_1(s)}\right) ds \\ \int_0^t \left(r_2(s) - a_2(s)\frac{e^{x_2(s)}}{e^{x_1(s)}}\right) ds \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t \left(r_1(s) - f(s, e^{x_1(s)})\frac{e^{x_2(s)}}{e^{x_1(s)}} - b_1(s)e^{x_1(s)}\right) dsdt \\ \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t \left(r_2(s) - a_2(s)\frac{e^{x_2(s)}}{e^{x_1(s)}}\right) dsdt \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} (\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^\omega \left(r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)})\frac{e^{x_2(s)}}{e^{x_1(s)}} - b_1(t)e^{x_1(t)}\right) dt \\ (\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^\omega \left(r_2(t) - a_2(t)\frac{e^{x_2(s)}}{e^{x_1(s)}}\right) dt \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

QN et $K_p(I-Q)N$ sont continues et, de plus $QN\left(\overline{\Omega}\right)$, $K_p(I-Q)N\left(\overline{\Omega}\right)$ sont relativement compacts pour tout $\Omega \in X$. D'où, N est L-compact dans $\overline{\Omega}$.

Pour appliquer le lemme 1.6.1 on a besoin de chercher un sous ensemble ouvert borné Ω.

Considérons l'équation suivante $Lx = \lambda Nx$, $\lambda \in (0,1)$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda \left(r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)}) \dfrac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} - b_1(t) e^{x_1(t)} \right), \\ \\ \dot{x}_2(t) = \lambda \left(r_2(t) - a_2(t) \dfrac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \right). \end{cases} \tag{2.10}$$

Supposons que $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in X$ est une solution de système (2.10). En intégrant sur $[0, \omega]$.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\omega \dot{x}_1(t)dt = \lambda \int_0^\omega \left(r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)}) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} - b_1(t) e^{x_1(t)} \right) dt, \\ \\ \displaystyle\int_0^\omega \dot{x}_2(t)dt = \lambda \int_0^\omega \left(r_2(t) - a_2(t) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \right) dt, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\omega \left(r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)}) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} - b_1(t) e^{x_1(t)} \right) dt = 0, \\ \\ \displaystyle\int_0^\omega \left(r_2(t) - a_2(t) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \right) dt = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\omega \left(f(t, e^{x_1(t)}) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} + b_1(t) e^{x_1(t)} \right) dt = \int_0^\omega r_1(t)dt, \\ \\ \displaystyle\int_0^\omega a_2(t) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} dt = \int_0^\omega r_2(t)dt, \end{cases}$$

d'où

$$\int_0^\omega \left(f(t, e^{x_1(t)}) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} + b_1(t) e^{x_1(t)} \right) dt = \omega \overline{r}_1, \tag{2.11}$$

et

$$\int_0^\omega a_2(t) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} dt = \omega \overline{r}_2, \tag{2.12}$$

d'après (2.10), (2.11) et (2.12) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |\dot{x}_1(t)|\, dt &= \lambda \int_0^\omega \left| r_1(t) - f(t, e^{x_1(t)}) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} + b_1(t) e^{x_1(t)} \right| dt, \\ &< \int_0^\omega |r_1(t)|\, dt + \int_0^\omega \left| f(t, e^{x_1(t)}) \frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} + b_1(t) e^{x_1(t)} \right| dt \\ &< 2\overline{r}_1 \omega, \end{aligned} \tag{2.13}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega |\dot{x}_2(t)|\,dt &= \lambda \int_0^\omega \left| r_2(t) - a_2(t)\frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \right| dt, \\
&< \int_0^\omega |r_2(t)|\,dt + \int_0^\omega \left| a_2(t)\frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \right| dt, \\
&< 2\overline{r}_2\omega. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Comme $(x_1(t), x_2(t))^T \in X$, alors il existe ξ_i, $\eta_i \in [0,\omega]$, $i = 1,2$, telles que

$$x_i(\xi_i) = \min_{t\in[0,\omega]} x_i(t),\ x_i(\eta_i) = \max_{t\in[0,\omega]} x_i(t), i = 1,2. \qquad (2.15)$$

D'après (2.11) et (2.15) on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{r}_1\omega &\geqslant \int_0^\omega b_1(t)e^{x_1(t)}dt, \\
&\geqslant e^{x_1(\xi_1)} \int_0^\omega b_1(t)dt, \\
&\geqslant e^{x_1(\xi_1)}\omega\bar{b}_1,
\end{aligned}$$

d'où

$$x_1(\xi_1) \leq \ln\left(\frac{\overline{r}_1}{\bar{b}_1}\right),$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \dot{x}_1(t)dt &= x_1(t) - x_1(0), \\
x_1(t) - x_1(\xi_1) &\leq x_1(t) - x_1(0) \leq \int_0^\omega \dot{x}_1(t)dt \qquad \forall t \in [0,\omega], \\
|x_1(t)| &\leq |x_1(\xi_1)| + \int_0^\omega |\dot{x}_1(t)|\,dt,
\end{aligned}$$

d'après (2.13) on obtient

$$x_1(t) \leq \ln\left(\frac{\overline{r}_1}{\bar{b}_1}\right) + 2\overline{r}_1\omega. \qquad (2.16)$$

On pose $t = \xi_2$ et on remplace dans $\int_0^\omega \left(r_2(t) - a_2(t)\frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}} \right) dt = 0$ ce qui donne:

$$r_2(\xi_2) - a_2(\xi_2)\frac{e^{x_2(\xi_2)}}{e^{x_1(\xi_2)}} = 0.$$

A partir de $x_2(t) > 0$ et (2.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} r_2(\xi_2) - a_2(\xi_2)\frac{1}{e^{x_1(\xi_2)}} &\geq 0, \\ &\Rightarrow r_2(\xi_2) - a_2(\xi_2)\frac{1}{e^{x_1(\eta_1)}} \geq 0, \\ &\Rightarrow x_1(\eta_1) \geq \ln\left(\frac{a_2(\xi_2)}{r_2(\xi_2)}\right), \end{aligned}$$

et

$$x_1(\eta_1) \geq \min_{t\in[0,\infty]} \left\{ \ln\left(\frac{a_2(t)}{r_2(t)}\right) \right\}, \tag{2.17}$$

ainsi

$$x_1(t) \geq x_1(\eta_1) - \int_0^\omega |\dot{x}(t)|\, dt \geq \min_{t\in[0,\infty]} \left\{ \ln\left(\frac{a_2(t)}{r_2(t)}\right) \right\} - 2\overline{r}_2\omega. \tag{2.18}$$

D'après (2.16) et (2.18) , on obtient

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,\omega]} |x_1(t)| &\leq \max\left\{ \left| \ln\left(\frac{\overline{r}_1}{\overline{b}_1}\right) + 2\overline{r}_1\omega \right|, \left| \min_{t\in[0,\infty]} \left\{ \ln\left(\frac{a_2(t)}{r_2(t)}\right) \right\} - 2\overline{r}_2\omega \right| \right\}, \\ &\leq M_1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

A partir de (2.12) et (2.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{r}_2\omega &= \int_0^\omega a_2(t)\frac{e^{x_2(t)}}{e^{x_1(t)}}dt, \\ &\leq \int_0^\omega a_2(t)e^{x_2(t)}dt, \\ &\leq e^{x_2(\eta_2)}\int_0^\omega a_2(t)dt, \\ &\leq e^{x_2(\eta_2)}\overline{a}_2\omega. \end{aligned}$$

Par suite

$$x_2(\eta_2) \geq \ln\left(\frac{\overline{r}2}{\overline{a}_2}\right),$$

ainsi

$$\begin{aligned} x_2(t) &\geq x_2(\eta_2) - \int_0^\omega |\dot{x}_2(t)|\, dt, \\ &\geq \ln\left(\frac{\overline{r}2}{\overline{a}_2}\right) - 2\overline{r}_2\omega. \end{aligned} \tag{2.20}$$

D'après (2.11), (2.16) et (2.15) , on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{r}_1\omega &\geq \int_0^\omega \frac{f\left(t, e^{x_1(t)}\right)}{e^{x_1(t)}} e^{x_2(t)} dt, \\
&\geq \int_0^\omega \frac{f\left(t, 1\right)}{e^{x_1(t)}} e^{x_2(t)} dt, \\
&\geq \frac{e^{x_2(\xi_2)}}{e^{\{M_1\}}} \int_0^\omega f(t,1) dt, \\
&\geq \frac{e^{x_2(\xi_2)}}{e^{\{M_1\}}} \overline{f(t,1)},
\end{aligned}$$

et

$$x_2(\xi_2) \leq \ln\left(\frac{\overline{r}_1 e^{\{M_1\}}}{\overline{f(t,1)}}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_2(t) &\leq x_2(\xi_2) + \int_0^\omega |\dot{x}_2(t)|\, dt, \\
&< \ln\left(\frac{\overline{r}_1 e^{\{M_1\}}}{\overline{f(t,1)}}\right) + 2\overline{r}_1\omega. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Il découle de (2.20) et (2.21) que

$$\begin{aligned}
\max_{t\in[0,\omega]} |x_2(t)| &\leq \max\left\{\left|\ln\left(\frac{\overline{r}2}{\overline{a}_2}\right) - 2\overline{r}_2\omega\right|, \left|\ln\left(\frac{\overline{r}_1 e^{\{M_1\}}}{\overline{f(t,1)}}\right) + 2\overline{r}_1\omega\right|\right\}, \\
&\leq M_2.
\end{aligned}$$

Il est clair que M_i, $i = 1, 2$, sont indépendants de λ. Par hypothèse $(A2)$, considérons le système des équations algèbriques

$$\begin{cases}
\overline{r}_1 - \overline{f}(v_1)\dfrac{v_2}{v_1} - \overline{b}_1 v_1 = 0, \\
\\
\overline{r}_2 - \overline{a}_2\dfrac{v_2}{v_1} = 0,
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\overline{r}_1 - \overline{f}(v_1)\dfrac{\overline{r}_2}{\overline{a}_2} - \overline{b}_1 v_1 = 0, \\
\\
\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{\overline{r}_2}{\overline{a}_2}.
\end{cases}$$

On pose $g(v_1) = \overline{r}_1 - \overline{f}(v_1)\dfrac{\overline{r}_2}{\overline{a}_2} - \overline{b}_1$, $g(0) = \overline{r}_1 > 0$, $\lim\limits_{v_1\to+\infty} g(v_1) = -\infty$. Donc $\exists v_1^* \in int\ \mathbb{R}$ telle que $g(v_1) = 0$, par suite $v_2^* = \dfrac{\overline{r}_2}{\overline{a}_2}$. Alors le système admet

une solution unique $(v_1^*, v_2^*)^T \in int\ \mathbb{R}_+^2$ avec $v_i^* > 0$, $i = 1, 2$.
Utilisons la notation $M = M_1 + M_2 + M_3$ avec $M_3 > 0$ choisi assez grand telle que $\|(\ln(v_1^*), \ln(v_2^*))\| = |\ln(v_1^*| + |\ln(v_2^*)| < M$.

On choisit $\Omega = \{x(t) \in X : \|x\| < M\}$ un ouvert borné.

Il est clair que Ω satisfait la condition (a) du lemme 1.6.1

b) si

$$x = (x_1, x_2)^T \in \partial\Omega \cap \ker L = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^2.$$

x est un vecteur constant dans $\mathbb{R}^2$ avec $\|x\| = M$. Alors

$$\begin{aligned} QNx &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega \left(r_1(t) - f(e^{x_1})\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} - b_1(t)e^{x_1}\right) dt \\ \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega \left(r_2(t) - a_2(t)\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}\right) dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}\left(\displaystyle\int_0^\omega r_1(t)dt - f(e^{x_1})\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}\int_0^\omega dt - e^{x_1}\int_0^\omega b_1(t)\right) dt \\ \\ \dfrac{1}{\omega}\left(\displaystyle\int_0^\omega r_2(t)dt - \dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}\int_0^\omega a_2(t)dt\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{r}_1 - \overline{f}(e^{x_1})\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} - \overline{b}_1 e^{x_1} \\ \\ \overline{r}_2 - \overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \ker L. \end{aligned}$$

c) Considérons l'homotopie suivante

$$K_\lambda(t) = \lambda QNx + (1-\lambda)G(x),$$

avec

$$G(x) = \begin{pmatrix} \overline{r}_1 - \overline{b}_1 e^{x_1} \\ \\ \overline{r}_2 - \overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} \end{pmatrix}$$

donc

$$k_\lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda\left(\overline{r}_1 - \overline{f}(e^{x_1})\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} - \overline{b}_1 e^{x_1}\right) - (1-\lambda)\left(\overline{r}_1 - \overline{b}_1 e^{x_1}\right) \\ \\ \lambda\left(\overline{r}_2 - \overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}\right) - (1-\lambda)\left(\overline{r}_2 - \overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{r}_1 - \lambda\bar{f}(e^{x_1})\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} - \overline{b}_1 e^{x_1} \\ \\ \overline{r}_2 - \overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\deg\{K_1, \Omega \cap \ker L, 0\} = \deg\{K_0, \Omega \cap \ker L, 0\},$$

donc

$$\deg\{QNx, \Omega \cap \ker L, 0\} = \deg\{G, \Omega \cap \ker L, 0\}.$$

Pour calculer le degré de la matice $G(x)$

$$\begin{aligned} \det(jac\,(G(x))) &= \begin{vmatrix} -\overline{b}_1 e^{x_1} & 0 \\ \\ \overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} & -\overline{a}_2\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}} \end{vmatrix} \\ &= \overline{b}_1\overline{a}_2 e^{x_2}, \end{aligned}$$

donc

$$\deg\{G, \Omega \cap \ker L, 0\} = 1,$$

et par suite

$$\deg\{QNx, \Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0.$$

Maintenant, nous savons que Ω vérifie toutes les conditions du lemme 1.6.1 et donc le système (2.9) possède au moins une solution ω-périodique. Par suite le système (2.2) possède au moins une solution ω-périodique positive. ■

2.2 Applications numériques

Considérons le système proie prédateur de Leslie-Gower(2.4)

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = (r_1(t) - a_1(t)P(t) - b_1(t)H(t))H(t), \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = \left(r_2(t) - a_2(t)\dfrac{P(t)}{H(t)}\right)P. \end{cases}$$

Prenons:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= 4 - 0.03\cos(4t), \;\; a_1(t) = 1.01 + \cos(t), \\ b_1(t) &= 1 - 0.09\sin(t), \qquad r_2(t) = 1.8 - 0.09\sin(2t), \\ a_2(t) &= 1.9 - 0.5\cos(t). \end{aligned}$$

qui sont des fonctions postives et périodique de période $\omega = 2\pi$.

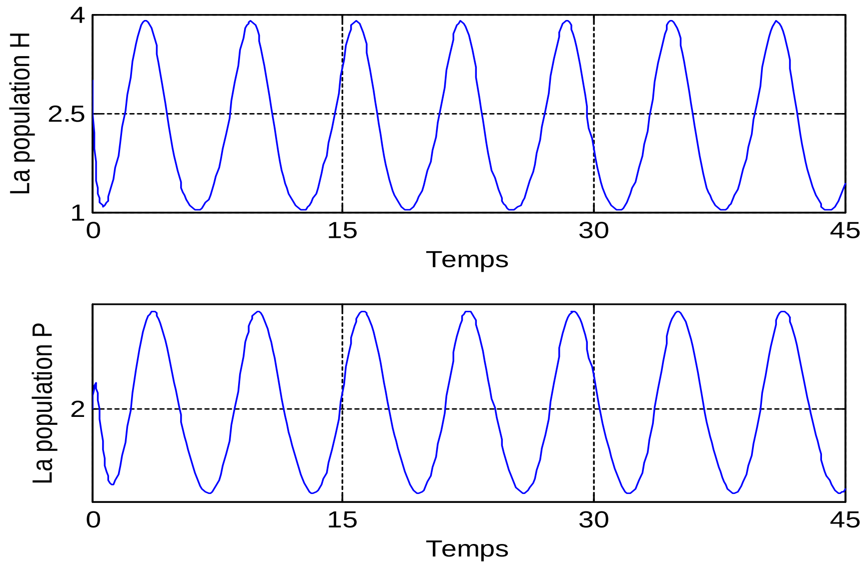

fig1: La solution de systeme(2.4) $H(t)$ et $P(t)$ en fonction de temps.

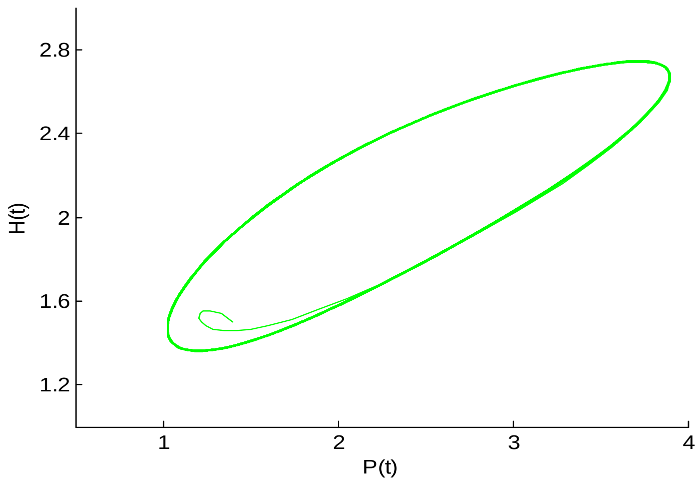

fig. 2: Plan de phase.

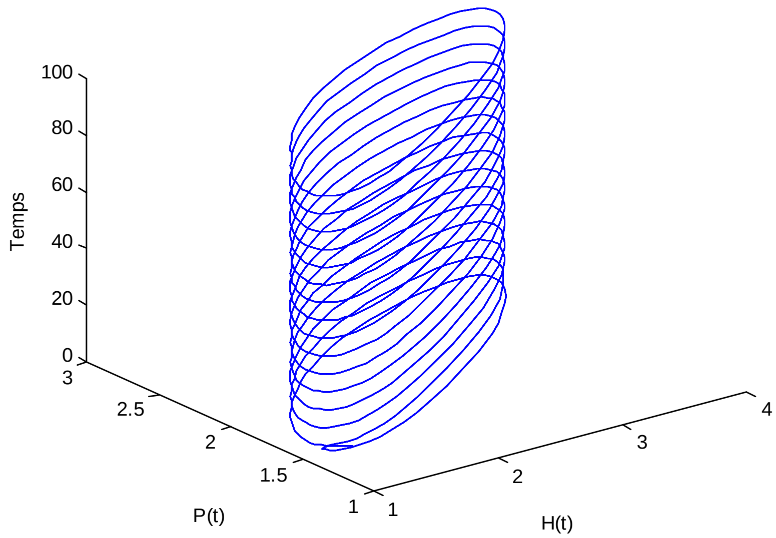

fig. 3: La solution sur le plan (H, P, t) .

Bibliographie

[1] H.Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation,(1983).

[2] R.E. Gaines, J.L. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Springer, Berlin, 1977.

[3] S. B. Hsu, T. W. Huwang, Global Stability For A Class Of Predator-Prey systems, SIAM J. Appl. Math., 55(3) (1995), 763-783.

[4] H.F. Huo,W.T. Li, Periodic solutions of delayed Leslie–Gower predator–prey models, Appl. Math. Comput. 155 (2004) 591–605.

[5] Periodic solutions for a semi-ratio-dependent predator–prey system with functional responses, Appl. Math. 18 (2005) 313–320.

[6] P.H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, Biometrika 35 (1948) 213–245.

[7] P.H. Leslie, A stochastic model for studying the properties of certain biological systems by numerical methods, Biometrika 45 (1958) 16–31.

[8] E.C. Pielou, Mathematical Ecology, John & Sons, New York, 1977.

[9] Q. Wang, M. Fan, K. Wang, Dynamics of a class of nonautonomous semi-ratio-dependent predator–prey system with functional responses, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003) 443–471.