
Un élément fini mixte pour le calcul du taux de restitution d'énergie du coudage (Kinking) d'une fissure

Hamoudi Bouzerd^{1*}, Nouredine Boulares¹, Abdelhamid Bouchair²

¹ Université du 20 août 1955 – Route d'El-Hadaiek, B.P. 26 – 21000 Skikda, Algérie

² Clermont Université, Université Blaise Pascal, LaMI, Polytech, BP 206, F-63000 Clermont-Ferrand, France

*bib_ham@yahoo.fr, bouchair@cust.univ-bpclermont.fr

RÉSUMÉ. Un élément fini mixte spécial de forme quadrilatère est utilisé en association à la technique d'extension virtuelle de fissure (TEVF) pour évaluer le taux de restitution d'énergie pour les fissures susceptibles de subir une extension inclinée par rapport à leur direction initiale : coudage. Cet élément et la technique qui lui est associée (TEVF) permet l'analyse du coudage des fissures en un seul passage éléments finis. L'efficacité du modèle a été étudiée sur un exemple de coudage des fissures dans un milieu homogène.

ABSTRACT. A special quadrilateral mixed finite element is used in association with the virtual crack extension technique (VCET) to evaluate the energy release rate for the cracks with propensity to have a slant extension relatively to their initial direction : kinking. This element with the associated technique (VCET) allows to analyze the kinking of cracks with only one finite element computation. The efficiency of the model has been tested with an example with kinking cracks in a homogeneous material.

MOTS-CLÉS : élément fini mixte, fissure, coudage, taux de restitution d'énergie, extension virtuelle de fissure.

KEYWORDS: mixed finite element, crack, kinking, energy release rate, virtual extension of crack.

1. Introduction

La problématique de calcul du taux de restitution d'énergie d'une fissure associée à une extension avec coudage (kinking), a été étudiée par plusieurs chercheurs (Anderson, 1969 ; Cotterell et Rice, 1980 ; Maiti, 1986). Ils ont développé des solutions analytiques principalement pour les matériaux isotropes. Ces études ont été étendues aux matériaux orthotropes (Maiti, 1986) et les bi-matériaux (Zak and

Williams, 1963). Des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis ont fait aussi l'objet de plusieurs travaux.

L'étude d'une fissure existante et de sa stabilité est d'une grande importance. En réalité, la propagation d'une fissure peut mener à la rupture d'un composant qui favoriserait la ruine totale de la structure. La mécanique de la rupture est l'outil adéquat pour analyser ce genre de situation en se basant sur les caractéristiques intrinsèques de rupture du matériau qui sont le facteur d'intensité de contrainte critique (Kc) ou le taux de restitution d'énergie critique (Gc) appelé aussi ténacité.

Les structures utilisées dans l'ingénierie présentent souvent des configurations géométriques complexes et un environnement de chargement variable. Ceci rend la résolution analytique des problèmes de mécanique de la rupture impossibles d'où le recours aux approches numériques telles que la méthode des éléments finis. Les modélisations numériques s'appuient sur les résultats expérimentaux pour obtenir certains paramètres d'entrée des modèles et valider les résultats de calcul.

Le coudage (kinking) survient soit à cause de la configuration géométrique (non symétrique) ou du fait du chargement quelconque ou encore à cause de l'anisotropie du matériau. La microstructure du matériau et les défauts initiaux peuvent être aussi des causes, mais ils restent difficiles à cerner. Le coudage se développe en mode mixte qui correspond au couplage du mode I (ouverture de fissure) et du mode II (glissement dans le plan des lèvres).

La détermination de la direction du coudage revêt une grande importance et plusieurs auteurs ont élaboré des méthodes pour prévoir l'angle de coudage par rapport à la direction initiale de la fissure (De Xie et al., 2004 ; Azdhari and Nemat-Nasser, 1996).

Dans ce papier, on présente une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie G , dans le cas du coudage des fissures, en utilisant un élément fini mixte spécial auquel est associée la technique d'extension virtuelle (TEVF) de fissure permettant ainsi dans le cas du comportement élastique fragile d'évaluer G en une seule discrétisation, Ce qui permet un gain de temps appréciable.

L'élément fini utilisé est un élément mixte plan spécial pour interface cohérente ou fissurée. Développé par Bouzerd (Bouzerd, 1992) et baptisé RMQ-7, il est de forme quadrilatère et constitué de sept nœuds avec quatorze degrés de liberté.

Cette méthode est utilisée dans un premier temps dans l'étude du coudage dans le cas des matériaux homogènes isotropes. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la solution analytique développée pour le cas d'une plaque en état plan de contrainte muni d'une fissure centrale et chargée uniformément à ses extrémités perpendiculairement à la direction de la fissure.

2. Approche proposée pour l'étude du coudage

2.1. Revue des différentes approches

Les études théoriques développées dans le cadre des structures fissurées ne concernent que des cas simples (plaques infinies ...) où les champs des contraintes et des déplacements à la pointe de fissure sont complètement caractérisés et de ce fait le taux de restitution d'énergie peut être déterminé analytiquement.

Vu leur complexité, les structures réelles ne peuvent pas être traitées analytiquement, ce qui a amené les ingénieurs et les chercheurs à recourir aux méthodes numériques pour approcher la solution exacte.

Les méthodes numériques utilisées actuellement se divisent en deux grandes familles : les méthodes locales et les méthodes globales.

2.1.1. Méthodes locales

Dans les méthodes locales, il existe deux approches, l'une dite cinématique et la seconde dite statique. La méthode cinématique permet de calculer les facteurs d'intensité de contraintes à partir des déplacements des lèvres de fissure, et la méthode statique utilise le champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure pour évaluer ces mêmes facteurs. Une fois les facteurs d'intensité de contraintes déterminés le taux de restitution d'énergie est calculé par des relations qui les lient.

2.1.2. Méthodes globales

Les méthodes globales sont basées sur des considérations énergétiques de la structure entière. Parmi ces méthodes se placent la méthode de l'intégrale J et la méthode d'extension virtuelle de fissure.

La méthode de l'intégrale J est basée sur la formulation de Rice (Rice, 1968) du paramètre J, intégrale de contour indépendante de celui-ci. Cette approche consiste à évaluer l'énergie à la pointe de fissure sur un contour contenant la fissure.

D'autres méthodes dérivant de celle-ci sont aussi utilisées telle que la méthode de l'intégrale M (Chen and Shield, 1977).

La méthode d'extension virtuelle de fissure fournit directement le taux de restitution d'énergie en considérant une évolution de la fissure d'un incrément δa conduisant à une libération d'une quantité d'énergie $\delta \pi$.

La technique de la fermeture virtuelle de fissure (Rybicki and Kanninen, 1977) est aussi une des méthodes utilisées pour le calcul directe du taux de restitution d'énergie.

2.2. Proposition de la méthode

2.2.1. Elément utilisé : RMQ-7

L'élément fini en question est du type mixte. Développé pour la modélisation des interfaces fissurées (Bouzerd, 1992), il se présente sous forme d'un quadrilatère avec sept (7) nœuds et quatorze (14) degrés de liberté tel que représenté sur la figure 1. Cinq de ses nœuds sont du type déplacement et les deux autres sont du type contrainte. Quatre des nœuds déplacement sont placés aux coins du quadrilatère et le cinquième est placé au milieu du côté spécial interface. Ce nœud coïncide avec la pointe de fissure dans la modélisation des structures fissurées.

Les nœuds contraintes sont placés au milieu des demi-segments du côté spécial interface. Les variables nodales de ces deux nœuds (σ_{12} et σ_{22}) permettent d'assurer la continuité du vecteur contrainte sur les parties cohérentes et l'effet de bord libre sur les lèvres de la fissure.

Cet élément, développé initialement dans la base des coordonnées réelles, a été reformulé sous sa forme isoparamétrique par Bouziane (Bouziane, 2009) permettant ainsi de modéliser les interfaces inclinées et voire courbe.

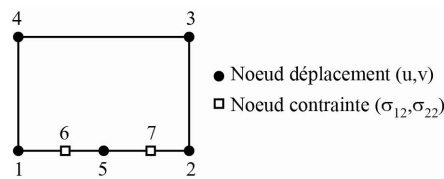


Figure 1. Configuration de l'élément RMQ-7

2.2.2. Technique d'extension virtuelle de fissure

Cette technique utilisée par Parks (Parks, 1974) et Hellen (Hellen, 1975) qui ont proposé une méthode pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie. Dans un premier calcul l'énergie de déformation $\pi(a)$ est évaluée dans la configuration initiale de la fissure, elle est quantifiée une seconde fois dans la configuration « $a + \delta a$ » où δa est un déplacement infinitésimal de la pointe de fissure. L'énergie libérée est :

$$\delta\pi = \pi(a) - \pi(a + \delta a) \quad [1]$$

Le taux de restitution d'énergie G est obtenu par la relation suivante :

$$G = \delta\pi / \delta a \quad [2]$$

2.2.3. Evaluation du taux de restitution d'énergie

La méthode d'extension virtuelle associée à l'élément RMQ-7 est utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie G dans le cas du coudage.

Dans le cas d'une extension colinéaire à la fissure, Bouzerd a montré qu'une seule discrétisation suffit pour calculer le taux de restitution d'énergie (Bouzerd, 1992) et (Bouzerd et Courtade, 1992). Dans ce travail, la même démarche est adoptée tout en apportant quelques modifications pour tenir compte du fait de l'extension est non colinéaire avec la fissure (figure 2).

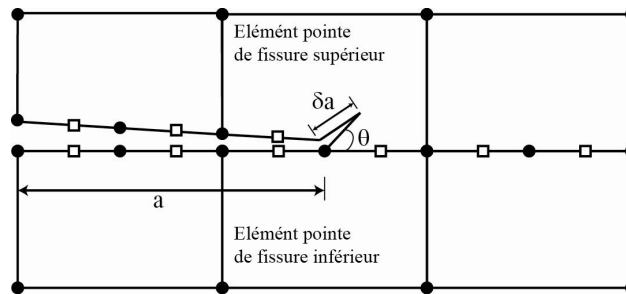


Figure 2. Extension infinitésimale inclinée de la fissure δa

En considérant une extension δa de la fissure suivant une direction faisant un angle θ avec la direction initiale (figure 2), la nouvelle situation peut être représentée par un segment oblique prenant naissance au nœud 1 de l'élément pointe de fissure supérieur et passant par la nouvelle position de la pointe de fissure après extension comme indiquée sur la figure 3.

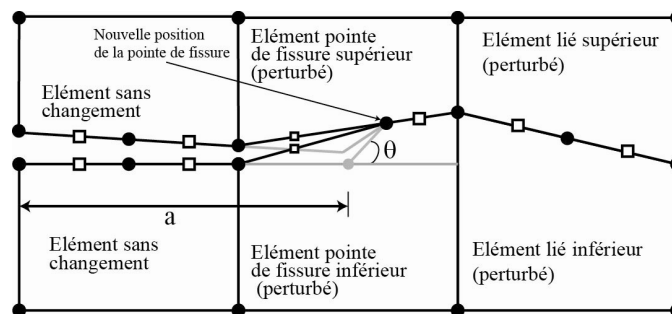


Figure 3. Réorganisation du maillage autour de la nouvelle pointe de fissure

Cette approximation est d'autant plus acceptable que δa est petite. C'est ainsi que le choix de δa joue un rôle important dans cette analyse. Théoriquement, la valeur de δa doit être choisie aussi petite que possible afin de bien représenter numériquement les relations [1] et [2].

Cette approximation géométrique exige un réarrangement du maillage autour de la pointe de fissure ne touchant que quatre (4) éléments : les deux éléments (supérieur et inférieur) contenant la pointe de fissure et les deux éléments immédiatement liés à eux dans le sens de l'évolution de la fissuration, le reste du maillage reste inchangé tel que le montre la figure 3.

Le taux de restitution d'énergie G est calculé par la méthode préconisée par Bouzard (Bouzard, 1992). Il est évalué à partir de l'analyse de la configuration « $a + \delta a$ » avec inclinaison (coudage). Dans cette analyse la configuration « a » est implicitement calculée dans un premier traitement en annulant δa et en stockant les matrices élémentaires correspondantes des éléments concernés.

En effet, avec les hypothèses du comportement élastique linéaire en petits déplacements, les solutions $v(a)$ et $v(a+\delta a)$ obtenues avec une longueur de fissure "a" et dans la même structure avec une longueur de fissure $a+\delta a$ sont d'autant plus proches que la perturbation δa est petite par rapport aux dimensions de l'élément de fissure. Nous pouvons donc écrire avec une bonne approximation :

$$v(a) = v(a+\delta a) \quad [3]$$

Si nous considérons que le chargement extérieur ne varie pas au cours de l'accroissement δa , le taux de restitution d'énergie se calcule comme suit :

$$G = - \frac{\pi(a+\delta a) - \pi(a)}{\delta a} \quad [4]$$

Où $\pi(a+\delta a)$ et $\pi(a)$ représentent respectivement l'énergie de déformation de la structure fissurée dans les configurations « $a+\delta a$ » et « a ». Sous sa forme discrétisée l'énergie de déformation s'écrit :

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \{v\}_i^t [K]_i \{v\}_i \quad [5]$$

avec : n_e = nombre total d'éléments dans la structure discrétisée,

$\{v\}_i$ = vecteur colonne contenant les valeurs nodales de l'élément i ,

$[K]_i$ = matrice de l'élément i , et l'exposant t indique la transposition.

Par substitution de [5] dans [4], et en tenant compte de [3], l'expression du taux de restitution d'énergie G est donnée par la relation :

$$G = \frac{1}{2\delta a} \sum_{f=1}^{nf} \{v(a + \delta a)\}_f^t [K(a + \delta a)]_f - [K(a)]_f \{v(a + \delta a)\}_f \quad [6]$$

où nf indique le nombre des éléments concernés par la perturbation δa dû à l'extension inclinée de la fissure. Selon la figure 3, $nf = 4$.

3. Validation de la méthode

Le modèle développé précédemment est validé sur un cas réel qui consiste à étudier le cou dage d'une fissure centrale dans une plaque carrée pour laquelle une solution analytique a été établie ainsi qu'un traitement numérique.

3.1. Présentation de l'exemple de validation

Il s'agit d'une plaque carrée muni d'une fissure centrale soumise à une tension normale $\sigma = 10$ MPa, (figure 4). Les dimensions géométriques de la plaque sont :

- longueur de côté $2w = 200$ mm
- Longueur de la fissure $2a = 40$ mm

La plaque est constituée d'un matériau homogène isotrope dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- Module d'élasticité $E = 1000$ MPa
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.25$

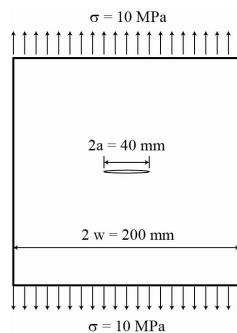


Figure 4. *Plaque étudiée.*

Elément fini mixte pour le calcul du cou dage.

Le taux de restitution d'énergie G dans ce cas a été évalué analytiquement par la relation (Anderson, 1991) :

$$G = [C_{11}(\theta) + C_{21}(\theta)] \frac{[Y \sigma \sqrt{\pi a}]^2}{E} \quad [7]$$

Où Y est le facteur géométrique défini par la relation : $Y = \sqrt{\frac{2w}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2w}\right)}$ [8]

$C_{11}(\theta)$ et $C_{21}(\theta)$ sont définis comme suit :

$$C_{11}(\theta) = \frac{1}{4} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \text{ et } C_{21}(\theta) = \frac{1}{4} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad [9]$$

Les valeurs analytiques de G ont été calculées pour les différents angles θ à l'aide d'un programme élaboré sous Matlab sur la base de la solution exacte développée par Anderson (Anderson, 1991) et reprise par De Xie (De Xie et al, 2004).

3.1. Résultats et discussions

3.1.1. Maillage de la structure

Vu la symétrie de la structure, seule la moitié de la structure a été discrétisée en utilisant l'élément RMQ-7. Après une étude de convergence le maillage constitué de 4900 éléments et 12441 nœuds a été retenu.

3.1.2. Résultats

Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux suivants :

θ (°)	G (N/mm)	G analytique (N/mm)	Erreur (%)
0	6.448	6.498	-0.77
10	6.336	6.400	-1.00
20	6.087	6.112	-0.41
30	5.630	5.657	-0.48
40	4.984	5.067	-1.64
50	4.366	4.384	-0.41
60	3.612	3.655	-1.18
70	2.738	2.926	-6.43
80	2.134	2.238	-4.65
90	1.650	1.625	+1.54

Tableau 1. Valeurs du taux de restitution d'énergie G pour différents angles.

Pour le cas $\theta = 0^\circ$, les résultats obtenus à partir du code ABAQUS en utilisant la méthode de l'intégrale J où la discrétisation a nécessité 27000 nœuds et la méthode « Two-step approach » basée sur la technique de la fermeture virtuelle de fissure (De xie and al, 2004) sont reproduit dans le tableau suivant.

Analytique	Two-step approach	Erreur (%)	ABAQUS (Intégrale J)	Erreur (%)
6.498	6.612	+1.75	6.507	+1.39

Tableau 2. Valeurs du taux de restitution d'énergie G pour $\theta = 0^\circ$.

3.1.2. Discussions

Les résultats donnés par l'approche proposée sont proches de ceux de la solution analytique. Ces résultats sont obtenus pour les différents angles de coudage (de 0° à 90°) avec un rapport $\delta a/a$ variant entre 1/50 à 1/750. Théoriquement plus ce rapport est petit, plus la rigueur du modèle est établie, mais s'il est trop petit des problèmes numériques peuvent survenir en faussant les résultats. Le tableau 2 montre que l'écart par rapport à la solution exacte est resté borné entre -1.64% et +1.54% sauf dans les cas où $\theta = 70^\circ$ et $\theta = 80^\circ$ pour les quels les écarts sont de -6.43 et -4.65 respectivement.

Pour le cas $\theta = 0^\circ$, les valeurs obtenus par le présent modèle sont plus proches que celles obtenues par l'approche « two-step » et ABAQUS et ce avec un nombre de nœuds, donc de degrés de liberté, beaucoup plus réduit (12441 contre 27000 pour ABAQUS) et avec une seule discrétisation.

4. Conclusion

La méthode proposée pour le calcul du taux de restitution d'énergie dans le cas des fissures avec coudage (kinking) en utilisant l'élément RMQ-7 associé à la technique d'extension virtuelle de fissure a été vérifiée sur un cas dont la solution analytique est établie. Le taux de restitution d'énergie est évalué par une seule analyse éléments finis et ses résultats sont en bon accord avec ceux de la solution exacte. Comparés (dans le cas $\theta = 0^\circ$) avec d'autres outils numériques, les résultats de la présente approche fournit des valeurs favorablement comparables et montrent son efficacité dans le traitement des problèmes de coudage.

Cette approche est à compléter par une extension au cas du bimatériau. Il est aussi intéressant d'étudier l'influence du rapport $\delta a/a$ et de trouver un critère objectif pour son choix.

5. Bibliographie

- Anderson H., «Stress-Intensity factor at the tips of Star-Shaped contour in infinite tensile sheet», *Journal of the Mechanics and physics of solids*, 17 (1969), p. 405-417.
- Anderson T. L., *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1991.
- Azhdari A. and Nemat-Nasser S., «Energy-release rate and crack kink in anisotropic brittle solids », *Journal of the Mechanics and physics of solids*, 44 (1996), p. 929-951.
- Bouzerd H. and Courtade R. M., «Un élément fini mixte pour la modélisation numérique de la rupture fragile », *Comptes-rendus des 8^e Journées Nationales sur les Composites (JNC-8)*, Palaiseau (AMAC, Paris), 16-18 novembre 1992.
- Bouzerd H., Elément fini mixte pour interface cohérente ou fissurée, Thèse de doctorat en Génie Civil, Université Claude Bernard Lyon I, France 1992.
- Bouziane S., Elément fini mixte pour les interfaces fissurées des bimatériaux anisotropes, Thèse de doctorat en Génie Civil, Université du 8 Mai 1945 Guelma, Algérie, 2009.
- Chen F. H. K., Shield R. T., «Conservation laws in elasticity of the J-Integral Type», *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 28, n°. 1, 1977, p. 1-22.
- Cotterell B. and Rice J. R., «Slightly Curved or Kinked Cracks», *International Journal of Fracture*, 16 (1980), pp. 155-169.
- De Xie, Waas A. M., Shahwan K.W., Schroedre J. A., Boeman R. G., «Computation of Energy Release Rates for kinking cracks based on virtual Crack Closure Technique», *CMES, Vol. 6*, n°. 6 (2004), p. 515-524.
- Hellen T. K., «On the method of virtual crack extensions», *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 9, n°. 1, 1975, p. 187-208.
- Maiti S. K., «An approximate method for calculation of strain energy release rate associated with kinking of a mode I crack located initially in an orthotropic direction», *International Journal of Fracture*, vol. 32 (1986), p.R33-R36.
- Parks D. M., «A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors», *International Journal of Fracture*, vol. 10, n°.4, December 1974, p. 487-502.
- Rice R. C., «A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks», *J. Appl. Mech.* , Vol. 35, 1968.
- Rybicki E. F., Kanninen M. F., «A finite element calculation of stress intensity factors by modified crack closure integral», *Engineering Fracture Mechanics*, 9, 1977, p. 931-938.
- Zak A. R. and Williams M. L., « Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface», *Journal of Applied Mechanics*, 30 (1963), p.142-143.