0

[*1*] [C]1 [] *1*

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN -

****

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Systèmes Dynamiques et Applications

Principe d'entropie relative généralisée et application à la dynamique des populations structurées

Présenté par :

M **BAHLOULI YASSINE**

Soutenu le : 25/09/2012 devant la commission d'examen :

M **Abdellaoui B**	MC A à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Président**
M **Senouci Brikci G**	MC A à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Examinateur**
M **Miri E. S.**	MA A à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Examinateur**
M **TOUAOULA M T**	MC A à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Encadreur**

Année universitaire : 2011 − 2012

Remerciements

Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Mes profonds remerciements à mes parents qui m'ont encouragé, qui m'ont appris à travailler honnêtement, et m'ont réalisé tous les moyens afin d'apprendre.

J'aimerais n'oublier personne mais comme rien ne peut être parfait, il existe une certaine probabilité pour que j'en oublie. Je voudrais donc m'excuser par avance de tous qui ne sont pas cités là et je les remercies pour leurs compréhension.
J'exprime ma gratitude et ma reconnaissance à mes professeurs :

-M Touaoula mon encadreur pour son soutien incessant, pour ses conseils, sa patience, et surtout pour tout ce qui m'a appris. Sans oublier de le remercier pour son côté humanitaires.

- M Abdellaoui et M Senouci Brekci pour leurs efforts énormes, et leurs supports paternel le long des deux années de master.

- M Miri pour son soutien inoubliable et ses indications. Vraiment je souhaite si je possède un peu de son esprit de l'humour. Vous êtes la personne qui j'ai choisi un modèle pour moi.

Un grand merci à tous mes collègues de l'option master Systemes Dynamiques.

Dedicace

Je dédie ce mémoire à
Mes trés chers parents.
Mes frères.
Toute ma famille.
Toutes mes amis surtout : Mostafa, Sofiane et Zaky,
Abdellatif, abdelkader et Yahia.
Mes collegues :
Toutes mes connaissances.
Tous mes enseignants.

Table des matières

Introduction

Un modèle mathématique est une représentation d'une situation réelle donnée à l'aide d'objets mathématiques. Il nécessite de faire des hypothèses au préalable afin d'avoir un modèle traduisible de façon simple en termes mathématiques et d'utiliser des outils mathématiques permettant de décrire la réalité. Il permet ainsi de rendre intelligible un phénomène réel en donnant une description la plus fidèle possible.

Les problèmes de dynamique des populations consistent à modéliser et à prédire l'évolution de certaines populations, animales, végétales ou cellulaires. Les applications sont multiples, que ce soit en écologie, en médecine ou en démographie...etc

les premiers pas du modélisation sont basés sur les équations différentielles dont on étudie l'évolution d'une population au cours du temps ; on parle des modèles de Malthus (croissance exponentielle), de Verhulst(logistique)... Pour une seule population, et celui du Lotka-Volterra (proie-prédateur), de Kermack- Mackendrick (SIR)... Pour des populations en intéractions.

Cependant, pour mieux modéliser les problèmes de dynamique de populations, il est souvent nécessaire de faire intervenir la structure de ces populations, que ce soit une structure en âge, en taille, ou une répartition spatiale. Les individus ne vont en effet pas intéragir de la même façon avec leur environnement selon leurs caractéristiques. Dans ce cas on modélise par des équations aux dérivées partielles. Ces modèles ont été principalement introduits par McKendrick en 1926 et redécouvert en 1959 par Von Foerster en démographie humaine, le modèle de McKendrick-Von Foerster reposant sur l'équation de renouvellement de Lotka.

Dans ce mémoire on étudie un principe d'entropie introduit par Michel, Mischler et Perthame (2005). Plus précisément il s'agit d'entropie relative, qui s'éxprime en fonction de solution du modèle est celles des problèmes de valeur propre et son dual. Cette quantité décroit au cours du temps et à partir de cette quantité on tire des informations sur le comportement asymptotique et la convergence et de plus on connait des quantités conservées et plusieurs inégalités utile dans les démonstrations mathématiques notamment les estimations a priori.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

1.1 Initiation à la modélisation mathématiques

1.1.1 Modèle de Malthus (exponentielle)

Le premier modèle de croissance de population fut fourni par MALTHUS en 1798, qui repose sur l'idée d'une croissance géométrique de la population, tandis que les ressources sont illimités. On définit $x(t)$ comme étant l'effectif de la population à l'instant t. Soit n et m les taux de natalité et mortalité par unité de temps et par individu respectivement. Ces dits taux sont supposés constants. Malthus a proposé le modèle linéaire suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = nx(t) - mx(t) := rx(t), \tag{1.1}$$

avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Où $r = n - m$ est le taux de croissance (taux de Malthus) de la population. Son signe détermine si la population est en croissance ($r > 0$) ou en décroissance ($r < 0$). Le cas $r = 0$ correspond à une population dont la taille reste constante et égale à sa valeur

initiale.
Ce modèle n'est évidemment pas réaliste, puisque les effets de surpopulation ne sont pas pris en compte.

1.1.2 Modèle de Verhulst (logistique)

Une hypothèse plus réaliste consiste à supposer que les taux de natalité et de mortalité ne sont pas constants. Lorsque le nombre d'individus d'une population augmente, les ressources étant limitées, on peut penser que la natalité va diminuer (par exemple : $n(x) = \alpha - \beta x$) et la mortalité va augmenter (par exemple : $m(x) = \gamma + \delta x$), où α, β, γ et δ sont des constantes positives.
En remplaçant n et m dans (**??**), on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)(1 - \frac{x(t)}{K}). \tag{1.2}$$

avec $r = \alpha - \gamma > 0$, qui est le taux de croissance intrinsèque de la population.
$K = \frac{\alpha-\gamma}{\beta+\delta}$: s'appelle la capacité limite du milieu.

1.1.3 Modèle de Lotka-Volterra

Le modèle concerne deux populations dont les effectifs au temps t sont respectivement notés $x(t)$ et $y(t)$, la seconde (les prédateurs) se nourissant de la première (les proies). On fait les hypothèses suivantes (inévitablement simplificatrices !) :
Les proies $x(t)$ disposent de nouriture en quantité illimitée, seuls les prédateurs $y(t)$ s'opposent à leur croissance et en l'absence de prédateurs la population des proies a une croissance exponentielle (modèle Malthusien).
Le nombre de prédateurs est limité par la quantité de proies dont ils disposent pour se nourir et en l'absence de proies, la population des prédateurs a une décroissance exponentielle (modèle Malthusien).

Le taux de disparition des proies ainsi que le taux de croissance des prédateurs dues à ces rencontres sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de rencontres entres les deux populations (loi d'action de masse).
Ceci conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t). \\ \\ \frac{dy(t)}{dt} = -dy(t) + cx(t)y(t). \end{cases} \tag{1.3}$$

où $a > 0$ est le taux de natalité (naturel) des proies, $d > 0$ le taux de mortalité (naturel) des prédateurs, $b > 0$ et $c > 0$ des coefficients d'intéraction entre les deux populations.

1.2 Outils mathématiques

1.2.1 Rappels d'analyse

Définition 1.2.1

*Soit Ω un intervalle de $I\!R$. Une fonction $f : \Omega \to I\!R$ est dite **convexe** si*
$(\forall\, x, y \in \Omega),\ (\forall\, \lambda \in]0,1[),\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Jensen)

Soit (Ω, A, μ) un espace mesuré. On suppose que $\mu(\Omega) = 1$, soit $\phi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $f : \Omega \longrightarrow]a,b[$ une fonction mesurable alors :

$$\phi(\int_\Omega f d\mu) \leq \int_\Omega \phi(f) d\mu.$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'un point fixe dans un espace métrique complet.

Théorème 1.2.2 (du point fixe métrique (Picard))

[] Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$ c-à-d

$\varphi(a) = a$. *De plus, pour tout point initial* $x_0 \in E$, *la suite itérée* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *avec :*

$$\begin{cases} x_{p+1} := \varphi(x_p) \\ x_0 \in E \qquad quelconque \end{cases}$$

converge vers a.

Lemme de Gronwall :

Le lemme de Gronwall est plus un principe qu'un résultat précis, il se présente sous plusieurs formes. Ici, nous en proposons une trés simple version.

Lemme 1.2.1

Soit $\varphi \in C(0,T)$ *positive et soit une constante* c *strictement positive, et une fonction positive* m *intégrable sur* $[0,T]$, *telles que*

$$\varphi(t) \leq \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + c,$$

alors,

$$\varphi(t) \leq ce^{(\int_0^t m(s)ds)}.$$

1.2.2 Les espaces fonctionnels

Cette section est largement inspirée des résultats donnés dans [**?**].

Les espaces $L^p(\Omega)$:

Définition 1.2.2 (Espaces L^p)

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *muni de la mesure de Lebesgue, et soit* p *un entier tel que* $1 \leq p < +\infty$. *On définit :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow I\!\!R \text{ mesurable telle que} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \ \} \ .$$

La norme de cet espace est :

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \quad .$$

On pose,

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow I\!R : f \ mesurable \ et \ \exists C \ tels \ que \ |f(x)| \leq C \ p.p \ sur \ \Omega\}.$$

On note,

$$\|f\|_\infty = inf\{C; |f(x)| \leq C \ p.p \ sur \ \Omega\}$$

En fait $L^p(\Omega)$ est un ensemble de classes d'equivalences de fonctions égales presque partout et on identifie deux fonctions de $L^p(\Omega)$ qui coïncident sur un ensemble de mesure nulle.

Proposition 1.2.1

L'espace $L^p(\Omega)$ est :

- *de* **Banach** *pour* $1 \leq p \leq \infty$.
- **Réflexif** *pour* $1 < p < \infty$.
- **Séparable** *pour* $1 \leq p < \infty$.

-Les grands théorèmes des espaces L^p

Théorème 1.2.3 (Fubini)

Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Alors $x \mapsto f(x, y)$ (respectivement $y \mapsto f(x, y)$) est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y (respectivement pour presque tout x). De plus, les fonctions

$$x \mapsto \int_\mathbb{R} f(x, y) \, dy \ \ et \ y \mapsto \int_\mathbb{R} f(x, y) \, dx$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_\mathbb{R} \left[\int_\mathbb{R} f(x, y) \, dx\right] dy = \int_\mathbb{R} \left[\int_\mathbb{R} f(x, y) \, dy\right] dx \ .$$

Théorème 1.2.4 (de convergence monotone ou de Beppo-Levi)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telles que* $\sup_n \int_\Omega f_n(x)\,dx < +\infty$. *Alors* $f_n(x)$ *converge presque partout vers une limite finie notée* $f(x)$.
De plus $f \in L^1(\Omega)$, $\|f - f_n\|_1 \to 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$.

Lemme 1.2.2 (Lemme de Fatou)

Soit (Ω, A, μ) *un espace mesuré et* $f_n \colon \Omega \to [0,\infty]$ *une suite de fonctions mesurables. Alors la fonction* $f(x) = \liminf f_n(x)$ *est mesurable et :*

$$\int_\Omega \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_\Omega f d\mu.$$

Théorème 1.2.5 (de convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que*
i. $f_n(x) \to f(x)$ *p.p. sur* Ω.
ii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω.
Alors $f \in L^1(\Omega)$, $\|f - f_n\|_1 \to 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$.

On note $C_0^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

Définition 1.2.3

On dit d'un sous-espace vectoriel A *de* E *qu'il est* **dense** *dans* E *si pour tout élément* f *de* E, *il existe une suite* $\phi_n \in A$ *telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \phi_n\|_E = 0$$

Théorème 1.2.6

L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < \infty$

Lemme 1.2.3

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Si* $\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$
alors $f(x) = 0$ *p.p dans* Ω.

Théorème 1.2.7 (Inégalité de Hölder)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, \infty[$, p' définit par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors on a $fg \in L^1(\Omega)$, et :

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ de Sobolev :

Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$, $1 \leq p \leq +\infty$.

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \textit{tels que} \quad u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \Big\},$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$,on note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ et $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$.

$W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

ou de la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad si \quad 1 \leq p < \infty.$$

On note : $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$

Proposition 1.2.2

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :

- *de* **Banach** *pour :$1 \leq p \leq \infty$.*
- **Réflexif** *pour :$1 < p < \infty$.*
- **Séparable** *pour :$1 \leq p < \infty$.*

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2.8 (Dérivation d'un produit de composition)
Soit $G \in C(I\!R)$ *tel que* $G(0) = 0$ *et soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *Alors :*

$$(G \circ u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

et

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Chapitre 2

Modèles Mathématiques pour des populations structurées en âge

2.1 Interprétation et construction du modèle

Le modèle de McKendrick-VanFoerster est un modèle linéaire de base, c'est une extension du modèle de Malthus dans lequel on structure la population suivant son âge. Il est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a) = -D(a) n(t,a), \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ n(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a) n(t,a) da, \\ \\ n(0,a) = n_0(a), \end{cases} \tag{2.1}$$

où ;

- $n(t,a)$ est la densité de la population qui à l'âge a à l'instant t.
- $B(a)$ est le taux de fertilité (de naissance) à l'âge a, i.e le nombre moyen de naissances provenant d'un individu d'âge a.
- $D(a)$ est le taux de mortalité d'individus d'âge a ; i.e le nombre moyen de décés à

l'âge a par unité de population de même âge.

Soit $\int_{a1}^{a2} n(t;a)da$, le nombre d'individu dans la population ayant un âge compris entre $a1$ et $a2$ à l'instant t et $N(t) = \int_0^{+\infty} n(t;a)da$, est la population totale à l'instant t (ou bien $N(t) = \int_0^{a_M} n(t;a)da$, a_M étant l'âge maximum s'il est connu).
La construction du modèle comprend trois parties :

- Premier principe : La loi d'équilibre pour $a > 0$

  La variation totale ∇ n(t, a) de population d'âge $a > 0$ à l'instant t est dûe à la perte par mortalité :

$$\nabla n(t,a) = -D(a)n(t,a),$$

  où ∇ désigne la variation totale qui peut être aussi vue comme l'accroissement de la population entre t et $t+\Delta t$. En utilisant le fait que la population d'âge a à l'instant t est d'âge $a+\Delta t$ à l'instant $t+\Delta t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla n(t,a) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{n(t+\Delta t, a+\Delta a) - n(t,a)}{\Delta t}, \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{n(t+\Delta t, a+\Delta a) - n(t,a+\Delta a)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{n(t,a+\Delta a) - n(t,a)}{\Delta t}, \\
&= \tfrac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \tfrac{\partial}{\partial a} n(t,a).
\end{aligned}$$

- Deuxième principe : La loi des naissances

  le nombre moyen de naissances provenant d'un individu d'âge a entre $a1$ et $a2$ à l'instant t est : $\int_{a1}^{a2} B(a)n(t;a)da$.

- Troisième principe : Condition initiale

La distribution initiale de lâge est supposée connue : $n(0,a) = n_0(a)$.

2.2 Résolution le long des caractéristiques

On suppose que les données du probléme B, D et n_0 sont des fonctions continues par morceaux, positives, B et D bornées, $\int_0^{+\infty} D(a)da = +\infty$ (i.e. La probabilité de survivre jusqu'a l'infinie est nulle) et que $n_0 \in L^1(I\!R^+)$. La technique des caractéristiques (ici on a des demi-droites de pente $+1$) réduit la première équation du système sur chacune de ces caractéristiques à une équation différentielle ordinaire dont la résolution est simple. Soit $(t_0; a_0) \in [0; +\infty[\times[0; +\infty[$, Posons le changement de variables suivant :

$$\tilde{n}(h) = n(t_0 + h; a_0 + h),$$

alors :

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dh}\tilde{n}(h) &= \tfrac{\partial}{\partial t}\tilde{n}(h)\tfrac{dt}{dh} + \tfrac{\partial}{\partial a}\tilde{n}(h)\tfrac{da}{dh}, \\
&= -D(a_0 + h)n(t_0 + h, a_0 + h), \\
&= -\tilde{D}(h)\tilde{n}(h).
\end{aligned}$$

Cette équation différentielle a pour solution,

$$\tilde{n}(h) = \tilde{n}(0)e^{-\int_0^h \tilde{D}(s)ds}.$$

En revenant à n, on trouve ;

$$n(t_0 + h; a_0 + h) = n(t_0; a_0)e^{-\int_0^h D(a_0+s)ds}. \tag{2.2}$$

Si $a \geq t$, on pose

$$(t_0; a_0) = (0; a-t) \qquad et \qquad h = t$$

d'où l'équation (**??**) devient :

$$n(t;a) = n(0; a-t)e^{-\int_0^t D(a-t+s)ds}$$

Si $a \leq t$, on pose

$$(t_0; a_0) = (t-a; 0) \qquad et \qquad h = a.$$

L'équation (**??**) devient :

$$n(t;a) = n(t-a; 0)e^{-\int_0^a D(s)ds},$$

par conséquent

$$n(t;a) = \begin{cases} n_0(a-t)e^{-\int_0^t D(a-t+s)ds} & si \quad t \leq a \\ \\ n(t-a;0)e^{-\int_0^a D(s)ds} & si \quad t \geq a \end{cases} \tag{2.3}$$

2.3 L'équation de renouvellement

Le modèle (**??**) prend aussi le nom : modèle de renouvellement car il peut s'écrire sous la forme d'une équation intégrale de Volterra :

$$f(t) = F(t) + \int_0^t L(a)f(t-a)da,$$

en effet ; soit :

$\pi(a) = e^{-\int_0^a D(s)ds}$ la probabilité de survie jusqu'à l'âge a.

L'équation des naissances à l'instant t peut être écrite comme suit,

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \int_0^{+\infty} B(a)n(t;a)da, \\
&= \int_0^t B(a)n(t;a)da + \int_t^{+\infty} B(a)n(t;a)da, \\
&= \int_0^t B(a)\beta(t-a)\pi(a)da + \int_t^{+\infty} B(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}n_0(a-t)da,
\end{aligned}$$

ou bien,

$$\beta(t) = F(t) + \int_0^t L(a)\beta(t-a)da,$$

avec,

- $L(a) = B(a)\pi(a)$.
- $F(t) = \int_t^{+\infty} B(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}n_0(a-t)da$.

Après le changement de variables $s = t - a$, on aboutit a :

$$\beta(t) = F(t) + \int_0^t L(t-a)B(a)da.$$

2.4 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, on s'intérèsse à l'existence et l'unicité de la solution du modèle de McKendrick-VonFoerster,

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}n(t,a) + D(a)n(t,a) = 0, \qquad t \geq 0, \quad a \geq 0, \\
n(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a)n(t,a)da, \\
n(0,a) = n_0(a),
\end{cases} \tag{2.4}$$

Lorsqu'il n'y a plus de condition de régularité sur la condition initiale $n_0(a)$, $(n_0 \in L^1)$ on ne peut plus dériver au sens classique et il n'y a plus de solution classique de (**??**). On cherche alors des solutions au sens des distributions (sens faible).

Définition 2.4.1
*On dit que n est solution de (**??**) au sens des distributions si elle vérifie l'équation :*

$$-\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} n(t,a)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,a)dadt - \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} n(t,a)\frac{\partial}{\partial a}\varphi(t,a)dadt \tag{2.5}$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} D(a)n(t,a)\varphi(t,a)dadt + \int_0^{+\infty} n(t,0)\varphi(t,0)dt \tag{2.6}$$

$$+ \int_0^{+\infty} n(0,a)\varphi(0,a)da = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I\!R^+ \times I\!R^+)$$

(2.7)

En intégrant par parties, on montre directement qu'une solution forte de (**??**) est une solution au sens de distribution. De plus, s'il existe une solution régulière C^1 de (**??**), alors c'est aussi une solution forte de (**??**) (voir [**?**]).

Pour pouvoir prouver l'existence et l'unicité de la solution, on a besoin de définir quelques problèmes et faire quelques hypotheses. En effet, on considère les problèmes suivants (voir aussi la section suivante)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a}N(a) + (\lambda + D(a))N(a) = 0, \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ N(0) = \int_0^{+\infty} B(a)N(a)da, \\ \\ \int_0^{+\infty} N(a)da = 1. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial a}\phi(a) + (\lambda + D(a)\phi(a) = B(a)\phi(0), \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ N(+\infty)\phi(+\infty) = 0, \\ \\ \int_0^{+\infty} N(a)\phi(a)da = 1. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité du triplet (λ, N, ϕ) est traité dans la section suivante. Supposons que

$$\int_0^{\infty} B(a)e^{-\int_0^a D(s)ds}da > 1. \tag{2.8}$$

Alors on a

Théorème 2.4.1
*Sous l'hypothèse (**??**) et pour une condition initiale satisfaisant $n_0(x) \leq CN(x)$ anec C une constante positive. Il existe une solution unique au sens de distribution $n \in C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+; \phi(a)da))$ du problème (**??**). En plus on a*

$$(i) \;\; |n(t,a)| \leq CN(a), \;\; \forall a \geq 0,$$

$$(ii) \;\; n_1^0 \leq n_2^0 \Rightarrow n_1(t,a) \leq n_2(t,a),$$

$$(iii) \;\; \int_0^{\infty} n(t,a)\phi(a)da = \int_0^{\infty} n^0(a)\phi(a)da, \tag{2.9}$$

$$(iv) \;\; \int_0^{\infty} |n(t,a)|\phi(a)da \leq \int_0^{\infty} |n^0(a)|\phi(a)da. \tag{2.10}$$

Preuve.
Soit l'espace $E := C(I\!R^+; L^1(I\!R^+))$ muni de la norme :

$$\| u \|_E = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^{+\infty} | u(t;x) | dx.$$

On définit l'operateur A comme étant

$$\begin{array}{rcl} A : E & \to & E \\ m & \mapsto & Am = n \quad \text{tel que :} \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}n(t,a) + Dn(t;a) = 0, \qquad t \geq 0, \quad a \geq 0, \\ \\ n(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a)m(t,a)da, \\ \\ n(0,a) = n_0(a), \end{cases} \tag{2.11}$$

On cherche à montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (**??**) par le théorème du point fixe de Picard c.à.d :

$$\exists! n \in E \quad tel\ que \quad An = n$$

pour cela il suffit que A soit contractant i.e :
$(\exists k < 1) \parallel Am_1 - Am_2 \parallel_E \quad \leq k \parallel m_1 - m_2 \parallel_E$.
Tout d'abord notons que notre opérateur A est lineaire.
On définit (m_1, n_1), (m_2, n_2) tels que $Am_1 = n_1$ et $Am_2 = n_2$. En posant $m = m_1 - m_2$, la fonction n, où $n = n_1 - n_2$ vérifie le problème suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}n(t,a) + Dn(t;a) = 0, \qquad t \geq 0, \quad a \geq 0, \\ \\ n(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a)m(t,a)da, \\ \\ n(0,a) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

La fonction suivante est une approximation régulière de la valeur absolue.

$$s_\delta(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2\delta} \quad si \quad \mid n \mid \leq \delta \\ \\ |n| - \frac{\delta}{2} \quad si \quad \mid n \mid \geq \delta \end{cases}$$

D'après le Théorème de convergence monotone de Lebesgue, on a :

$$\|s_\delta(n) - |n|\|_{L^1(I\!R^+)} \to 0.$$

Multiplions l'équation (**??**) par $s'_\delta(n)$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}s_\delta(n) + \frac{\partial}{\partial a}s_\delta(n) + Ds'_\delta(n)n = 0,$$

ou bien,

$$\frac{\partial}{\partial t}s_\delta(n) + \frac{\partial}{\partial a}s_\delta(n) + D(s'_\delta(n)n - s_\delta(n)) + Ds_\delta(n) = 0.$$

Il suffit de montrer que $|s'_\delta(n)n - s_\delta(n)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$.
En effet, par un calcul direct on a,

$$|s'_\delta(n)n - s_\delta(n)| = \begin{cases} \frac{n^2}{2\delta} \quad si \quad |n| \leq \delta \\ \\ \frac{\delta}{2} \quad si \quad |n| > \delta \end{cases}$$

par conséquent,

$$|s'_\delta(n)n - s_\delta(n)| \leq \frac{\delta}{2} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'après ce qui précède on déduit (au sens faible) :

$$\frac{\partial}{\partial t}|n(t,a)| + \frac{\partial}{\partial a}|n(t,a)| + D\,|n(t;a)| = 0,$$

Intégrons maintenant cette dernière équation par rapport à a entre 0 et $+\infty$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty}|n(t,a)|\,da - |n(t,0)| + \int_0^{+\infty} D(a)\,|n(t,a)|\,da = 0.$$

En réintégrant par rapport au temps entre 0 et t , on trouve :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^{+\infty}|n(t,a)|\,da &\leq \textstyle\int_0^t |n(s,0)|\,ds, \\ &\leq B_M \textstyle\int_0^t \left|\int_0^{+\infty} m(s,a)da\right| ds, \\ &\leq B_M \textstyle\int_0^T \sup\left|\int_0^{+\infty} m(s,a)da\right| ds, \end{aligned}$$

ou $B(a) \leq B_M$ finalement on a

$$\|n\|_E^2 \leq B_M T\,\|m\|_E^2\,.$$

Il suffit de supposer que $B_M T \leq \frac{1}{2}$ pour conclure que A est contractant.

Remarque 2.4.1
Pour construire une solution globale on suivra la même procédure entre kT *et* $(k+1)T$ *avec la condition initiale* $n(0,x) = n(kT,x) \qquad k = 0,1,2,...$ *et on pose à chaque fois la même condition i.e* $B_M T \leq \frac{1}{2}$*. Enfin on recolle toutes les solutions obtenues sur chaque intervalle et on aurra une solution globale, d'où le résultat du théorème.*

Supposons maintenant que nous avons deux conditions initiales satisfaisant $n_1^0 \leq n_2^0$. On définit comme précédemment deux opérateurs A_1 et A_2 associés aux deux conditions initiales. Alors, pour tout m on a $A_1(m) \leq A_2(m)$ et par conséquent les points fixes vérifient $n_1 \leq n_2$. d'ou (ii). La relation (i) devient une conséquence directe de (ii). On considère à présent $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^+; \phi(a)da)$. Par densité (on montrera plus tard que ϕ est bornée.) on peut trouver $n_k^0 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $n_k^0 \to n^0$ dans $L^1(\mathbb{R}^+; \phi(a)da)$. On note n_k la solution correspondante du problème (**??**). Nous allons prouver que n_k est une suite de Cauchy dans $C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+); \phi(a)da)$. En effet, posons $n = n_k - n_p$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(n(t,a)\phi(a)) + \frac{\partial}{\partial a}(n(t,a)\phi(a) + (\lambda + D(a))n(t,a) = 0, \tag{2.13}$$

Après intégration en a et en t, en déduit que

$$\int |n_k - n_p|\phi da \leq \int |n_k^0 - n_p^0|\phi da,$$

aisi n_k est une suite de Cauchy. Notons aussi que $n_k(t,a) \leq CN(a)$. Par conclusion, la suite n_k converge dans $C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+; \phi(a)da))$, et faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ vers une solution du problème (**??**). L'unicité peut être prouver, en utilisant la relation de contraction (**??**). On déduit aussi de (**??**) et après intégration la relation de la conservation de lois (**??**).

Chapitre 3

Entropie Relative Généralisée

Ce chapitre est consacré à étudier le comportement asymptotique de la solution du modèle McKendrick-VanFoerster. A cet effet, nous allons présenter une méthode dite Entropie relative généralisée. Celle ci est basée sur la résolution des problèmes aux valeurs propres.
Supposons pour simplifier que $D(a) = 0$, le modèle devient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a) = 0, \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ n(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a) n(t,a) da, \\ n(0,a) = n_0(a), \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Le problème aux valeurs propres

Le but de ce pargraphe est d'introduire le problème à valeur propre associé au modèle (**??**) et de prouver l'existence de sa solution. Soit le système suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} N(a) + \lambda N(a) = 0, \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ N(0) = \int_0^{+\infty} B(a) N(a) da, \\ \int_0^{+\infty} N(a) da = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

existe -t- il un (λ, N) solution du problème (**??**) ?

La solution de l'équation différentielle

$$N' + \lambda N = 0,$$

est donnée par

$$N(a) = N(0)e^{-\lambda a}. \tag{3.3}$$

Après intégration on a,

$$N(0) = \lambda$$

il suit que

$$N(a) = \lambda e^{-\lambda a}.$$

En multiplyant l'équation (**??**) par $B(a)$ et en intégrant, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} B(a)e^{-\lambda a}da = 1. \tag{3.4}$$

Le problème revient à prouver l'existence d'un λ satisfaisant (**??**) ; pour cela on pose :

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} B(a)e^{-\lambda a}da,$$

sa dérivée vaut,

$$f'(\lambda) = -a\int_0^{+\infty} B(a)e^{-\lambda a}da,$$

i.e f est décroissante, de plus :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = 0.$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = +\infty.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique λ strictement positif tel que (**??**)(i.e(**??**)) soit vérifié.
si $f(0) < 1$ alors $\lambda < 0$ et vice versa.
Par conséquent si $\int_0^{+\infty} B(a)da > 1$ le problème (**??**) admet une solution unique positive (λ, N).

3.2 Le problème dual

Le problème dual (adjoint) du modèle (**??**) est donné par :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial a}\phi(a) + \lambda\phi(a) = B(a)\phi(0), \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ N(+\infty)\phi(+\infty) = 0, \\ \\ \int_0^{+\infty} N(a)\phi(a)da = 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème (??).
Soit :

$$Q(a) = \frac{N(a)\phi(a)}{N(0)\phi(0)},$$

par un simple calcul on trouve,

$$Q'(a) = \frac{-B(a)N(a)}{N(0)}, \tag{3.6}$$

En intégrant l'équation (??) entre $(0, \infty)$ on obtient,

$Q(+\infty) = Q(0) - \frac{1}{N(0)} \int_0^{+\infty} N(a)B(a)da = 0,$

par conclusion, on a, $N(+\infty)\phi(+\infty) = 0$.

D'autre part, en intégrant encore une fois la première équation du problème (??) on obtient

$$Q(a) = Q(0) - \int_0^a \frac{B(\sigma)N(\sigma)}{N(0)} d\sigma,$$

En remplaçant N par sa formule, on déduit,

$$Q(a) = 1 - \frac{1}{N(0)} \int_0^a B(\sigma)\lambda e^{-\lambda\sigma} d\sigma \geq 0.$$

La positivité de Q provient du fait que

$$\int_0^a B(\sigma)e^{-\lambda\sigma} d\sigma \leq \int_0^{+\infty} B(\sigma)e^{-\lambda\sigma} d\sigma = 1.$$

Par conséquent $\phi(a)$ a le même signe que $\phi(0)$ pour tous a positif. Concernant la troisième équation du problème (??). Notons que

$$Q(a) = \int_a^{+\infty} B(x)e^{-x} dx,$$

intégrons cette équation entre $(0, \infty)$ et mulitiplyons par $N(0)\phi(0)$, on obtient,

$$N(0)\phi(0) \int_0^{+\infty} Q(a)da = N(0)\phi(0) \int_0^{+\infty} \int_a^{+\infty} B(x)e^{-x} dx da,$$

En utilisant le Theorème de Fubini, on a

$$N(0)\phi(0) \int_0^{+\infty} Q(a)da = N(0)\phi(0) \int_0^{+\infty} xB(x)e^{-x} dx.$$

Afin que $\phi(0)N(0)\int_0^{+\infty} Q(a)da = 1$ (i.e $\int_0^{+\infty} N(a)\phi(a)da = 1$) il suffit de choisir un $\phi(0)$ vérifiant,

$$\phi(0) = \frac{1}{N(0)\int_0^{+\infty} xB(x)e^{-x}dx} > 0.$$

3.3 Comportement Asymptotique

La notion d'entropie relative se réfère à des fonctionnelles dépendant des valeurs initiales des paramètres du système, et décroissant au cours du temps, dans le cas d'un sysètme conservatif. Ici, on l'applique à un système non conservatif, d'où la notion d'entropie relative généralisée (ERG).

Définition 3.3.1

On appelle **entropie relative généralisée** *la quantité*

$$I := \int_0^{+\infty} N(a)\phi(a)H(\frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)})da,$$

où H est une fonction positive convexe.

Théorème 3.3.1 (Inégalité entropique)
*Soit $H : I\!R^+ \to I\!R^+$ une fonction convexe telle que $H(0) = 0$. Soit n la solution du problème (**??**).*
Alors

$$\frac{dI}{dt} = \phi(0)N(0)\big(-\int_0^{+\infty} H(\frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)})d\mu(a) + H(\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)})d\mu(a)\big) \leq 0,$$

avec $\tilde{n}(t,a) = n(t,a)e^{-\lambda t}$ *et* $d\mu(a) = \frac{B(a)N(a)}{N(0)}da.$

Remarque 3.3.1

Le deuxième membre de l'équation s'appelle dissipation d'entropie.

Preuve.
Il est clair qu'on a,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{n} + \frac{\partial}{\partial a}\tilde{n} + \lambda\tilde{n} = 0,$$

il suit que,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\tilde{n}}{N}) + \frac{\partial}{\partial a}(\frac{\tilde{n}}{N}) = 0.$$

Multiplions cette dernière equation par $N\phi H'(\frac{\tilde{n}}{N})$, on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t}N\phi H(\frac{\tilde{n}}{N}) + N\phi\frac{\partial}{\partial a}H(\frac{\tilde{n}}{N}) = 0.$$

Après intgration entre $(0, \infty)$,

$$\frac{dI}{dt} = -\int_0^{+\infty} N\phi\frac{\partial}{\partial a}H(\frac{\tilde{n}}{N}),$$

une intégration par parties nous ramène a,

$$\frac{dI}{dt} = N(0)\phi(0)[H(\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{n}(t,a)}{N}d\mu(a)) - \int_0^{+\infty} H(\frac{\tilde{n}}{N})d\mu(a)].$$

D'après l'inégalité de Jensen nous permet d'obtenir le resultat suivant

$$\frac{dI}{dt} \leq 0.$$

Par conséquent $t \mapsto \int_0^{+\infty} N\phi H(\frac{\tilde{n}}{N})da$ est décroissante i.e

$$(\forall t \geq 0) \quad \int_0^{+\infty} N\phi H(\frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)})da \leq \int_0^{+\infty} N\phi H(\frac{\tilde{n}(0,a)}{N(a)})da. \tag{3.7}$$

Corollaire 3.3.1 (Quelques inégalités)

*Soit n la solution du problème (**??**) alors :*

1. $\int_0^{+\infty} \tilde{n}(t,a)\phi(a)da = \int_0^{+\infty} n_0(a)\phi(a)da.$

2. $\int_0^{+\infty} |\tilde{n}(t,a)|\,\phi(a)da \leq \int_0^{+\infty} |n_0(a)|\,\phi(a)da.$

   Cette inégalité s'appelle principe de contraction.

3. *Si*

   $$\int_0^{+\infty}\frac{n_0^2(a)}{N(a)}\phi(a)da < +\infty,$$

   alors

   $$\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{n}^2(t,a)}{N(a)}\phi(a)da < +\infty.$$

4. *S'il existe une constante $c > 0$ tel que*

   $$n_0(a) \leq cN(a),$$

   alors,

   $$\tilde{n}(t,a) \leq cN(a).$$

Preuve.

Tous ces resultats se déduisent du théorème précédent, en remplaçant la fonction convexe dans (**??**) respectivement par :

1. $H(a) = a$.

2. $H(a) = |a|$.

3. $H(a) = a^2$.

4. $H(a) = (a - c)_+$, d'où l'équation (**??**) devient :
$$\int_0^{+\infty} N\phi(\frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)} - c)_+ da \leq \int_0^{+\infty} N\phi(\frac{n_0(a)}{N(a)} - c)_+ da,$$
Si
$$n_0(a) \leq cN(a),$$
alors
$$(\frac{n_0(a)}{N(a)} - c)_+ = 0,$$
ceci implique
$$\int_0^{+\infty} N\phi(\frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)} - c)_+ da = 0.$$
Donc
$$(\frac{\tilde{n}(t,a)}{N(a)} - c)_+ = 0,$$
et par suite
$$\tilde{n}(t,a) \leq cN(a).$$

Lemme 3.3.1
Supposons que $|n_0(a)| \leq cN(a)$, $|n_0'(a)| \leq cN(a)$ *et* $n_0(0) = \int_0^{+\infty} B(a)n_0(a)da$ *(pour la compatibilité), alors la solution* n *du problème (**??**) vérifie,*

i/ $\left|\frac{\partial n(t,a)}{\partial t}\right| \leq cN.$

ii/ $\left|\frac{\partial n(t,a)}{\partial a}\right| \leq cN.$

preuve.

i/ Posons $q(t,a) = \frac{\partial n(t,a)}{\partial t}$ donc q est une solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}q(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}q(t,a) = 0, \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ q(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a)q(t,a)da, \\ \\ q(0,a) = -n_0'(a), \end{cases} \tag{3.8}$$

D'aprés la troisième équation ona $|q(0,a)| \leq cN(a)$

il suit que $|q(t,a)| \leq cN(a)$ d'aprés dernière inégalité du corollaire.

ii/ $\frac{\partial}{\partial t}n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}n(t,a) = 0, \Rightarrow \left|\frac{\partial}{\partial t}n(t,a)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial a}n(t,a)\right| \leq cN(a)$ c.q.f.d

Théorème 3.3.2
*Supposons que $|n_0(a)| \leq cN(a)$, et $B \in L^\infty(I\!R^+)$ verifiant $\int_0^{+\infty} B(a)da > 1$. Alors la solution de (**??**) vérifie,*

$\int_0^{+\infty} |\tilde{n}(t,a) - \gamma N(a)|\, \phi(a)da \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

où :
$\gamma = \int_0^{+\infty} n_0(a)\phi(a)da.$

Preuve.

Puisque $n_0 \in L^1(I\!R^+)$ alors $\exists n_0^\epsilon$ régulière telle que $n_0^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} n_0$, dans $L^1(I\!R^+)$
Soit n^ϵ la solution du problème (**??**) associée à la condition initiale n_0^ϵ.
Puisque le problème est linéaire alors $\bar{n} = n^\epsilon - n$ est aussi une solution avec $\bar{n}_0 = n_0^\epsilon - n_0$.
Par le principe de contraction on a,
$\int_0^{+\infty} |n^\epsilon - n|\, \phi da \leq \int_0^{+\infty} |n_0^\epsilon - n_0|\, \phi da \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$
$|\gamma^\epsilon - \gamma| = \left|\int_0^{+\infty} n_0^\epsilon\phi - \int_0^{+\infty} n_0\phi\right|$
$|\gamma^\epsilon - \gamma| = \left|\int_0^{+\infty} (n_0^\epsilon - n_0)\phi\right|$
$|\gamma^\epsilon - \gamma| \leq \int_0^{+\infty} |n_0^\epsilon - n_0|\, \phi \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$
Notons à présent que $\int_0^{+\infty} |n - \gamma N|\, \phi da \leq \int_0^{+\infty} |n - n^\epsilon|\, \phi da + \int_0^{+\infty} |n^\epsilon - \gamma^\epsilon N^\epsilon|\, \phi da + \int_0^{+\infty} |\gamma^\epsilon - \gamma|\, N\phi da$

Cette dernière inégalité nous permet de conclure qu'il suffit de travailler avec les fonctions régulière. Par suite, nous allons établir la preuve pour des fonctions régulières.

Posons $h(t,a) = \tilde{n}(t,a) - \gamma N(a)$, qui est une solution du problème suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}h(t,a) + \lambda h(t,a) = 0, \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ h(t,0) = \int_0^{+\infty} B(a)h(t,a)da, \\ \\ h(0,a) = h_0(a) := n_0(a) - \gamma N(a). \end{cases} \tag{3.9}$$

Comme h vérifie l'égalité entropique définie dans le Théorème **??**, alors il existe $l \geq 0$ tel que $\int_0^{+\infty} |h(t,a)| \phi(a)da \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$ car
$\int_0^{+\infty} |h(t,a)| \phi(a)da$ est décroissante en t est minorée par 0.

Remarque 3.3.2
$\int_0^{+\infty} h(t,a)\phi(a)da = \int_0^{+\infty} \tilde{n}(t,a)\phi(a)da - \gamma \int_0^{+\infty} N(a)da$
Par définition de γ et dû à la loi de concervation on a,

$\int_0^{+\infty} h(t,a)\phi(a)da = \int_0^{+\infty} \tilde{n}_0(t,a)\phi(a)da - \int_0^{+\infty} \tilde{n}_0(t,a)\phi(a)da = 0.$

Posons à présent $h_k(t,a) = h(t+k,a)$; d'après le Lemme **??** et la régularité des conditions initiales on a,
$|h_k(t,a)| \leq cN(a)$

$\left|\frac{\partial}{\partial t}h_k(t,a)\right| \leq cN(a),$
$\left|\frac{\partial}{\partial a}h_k(t,a)\right| \leq cN(a),$

par conséquent, $h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans $C([0,T] \times \mathbb{R}^+)$
D'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\int_0^{+\infty} |h_k|\, da \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} |g|\, da := L.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} H(\frac{h_0}{N})N\phi da < +\infty$$

et

$$\int_0^{+\infty} H(\frac{h(t,a)}{N})N\phi da,$$

est décroissante en t alors,

$$(\exists C > 0)(\forall t \in [0,T]) : \int_0^{+\infty} H(\frac{h_(t,a)}{N})N\phi da \leq C.$$

D'une part on a,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} H(\frac{h}{N})N\phi da = N(0)\phi(0)[H(\int_0^{+\infty}\frac{h}{N}d\mu(a)) - \int_0^{+\infty} H(\frac{h}{N})d\mu(a)].$$

En intégrant entre t et $+\infty$ on déduit,

$$\int_t^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{h}{N}d\mu(a)) + \int_0^{+\infty} H(\frac{h}{N})d\mu(a)] \leq \frac{1}{N(0)\phi(0)}\int_0^{+\infty} H(\frac{h}{N})N\phi da,$$

et par conséquent,

$$\int_0^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{h_k(t,a)}{N(a)}d\mu(a)) + \int_0^{+\infty} H(\frac{h_k(t,a)}{N(a)})d\mu(a)]ds \leq C.$$

D'après le critère de Cauchy pour les intégrales, on a :

$$\int_k^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{h(t,a)}{N(a)}d\mu(a)) + \int_0^{+\infty} H(\frac{h}{N})d\mu(a)]dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par un changement de variables on aboutit a,

$$\int_0^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{h_k}{N}d\mu(a)) + \int_0^{+\infty} H(\frac{h_k}{N})d\mu(a)]dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, en utilisant les résultats de régularité concernant la fonction h, on peut montrer que,

$$h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} g \ p.p,$$

d'où,

$$H(\frac{h_k}{N}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} H(\frac{g}{N}),$$

Puisque H est continue et $H(\frac{h_k}{N}) \leq C$, on applique le théorème de convergence dominée :

$\int_0^{+\infty} H(\frac{h_k}{N}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} H(\frac{g}{N})$.

En employant les mêmes arguments on a,
$H(\int_0^{+\infty}\frac{h_k}{N}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} H(\int_0^{+\infty}\frac{g}{N})$,

d'où :

$\int_0^{+\infty} H(\frac{h_k}{N}) - H(\int_0^{+\infty}\frac{h_k}{N}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} H(\frac{g}{N}) - H(\int_0^{+\infty}\frac{g}{N})$,

et $\quad \int_0^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{h_k}{N}) + \int_0^{+\infty} H(\frac{h_k}{N})]dt \leq C$.

On conclut en utilisant le lemme de Fatou que :

$\int_0^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{g}{N})+\int_0^{+\infty}H(\frac{g}{N})]dt \leq \liminf_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{h_k}{N})+\int_0^{+\infty}H(\frac{h_k}{N})]dt = 0.$

Par l'inégalité de Jensen,

$$\int_0^{+\infty}[-H(\int_0^{+\infty}\frac{g}{N})+\int_0^{+\infty}H(\frac{g}{N})]dt \geq 0.$$

Par conclusion elle est nulle $i.e$:

$\int_0^{+\infty}H(\int_0^{+\infty}\frac{g}{N}d\mu(a))dt = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}H(\frac{g}{N})d\mu(a)dt.$

Si H est strictement convexe alors :

$$\frac{g(t,a)}{N(a)} = c(t), \tag{3.10}$$

on a aussi,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{h_k}{N}) + \frac{\partial}{\partial a}(\frac{h_k}{N}) = 0,$$

en passant à la limite

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{g}{N}) + \frac{\partial}{\partial a}(\frac{g}{N}) = 0,$$

d'où

$$c'(t) = 0,$$

i.e

$$c(t) = constante,$$

on remplaçant dans l'équation (**??**) on trouve

$$g(t,a) = cN(a),$$

par conséquent on a,

$$0 = \int_0^{+\infty}g(t,a)da = c\int_0^{+\infty}N(a)da = c.$$

Donc

$$g(t,a) = 0,$$

et

$$l = 0.$$

C.Q.F.D.

Théorème 3.3.3 (Vitesse de convergence)
Sous les hypothèses du Théorème **??**. *S'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$B(a) \geq \delta \frac{\phi(a)}{\phi(0)}$, *alors on a*

$$\int_0^{+\infty} |\tilde{n} - \gamma N| \, \phi da \leq e^{-\delta t} \int_0^{+\infty} |n_0 - \gamma N| \, da,$$

où :
$\gamma = \int_0^{+\infty} n_0(a)\phi(a)da.$

Preuve.
On pose $h = \tilde{n} - \gamma N$; alors $h\phi$ vérifie le problème suivant,

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(h(t,a)\phi(a)) + \frac{\partial}{\partial a}(h(t,a)\phi(a)) = -\phi(0)\beta(a)h(t,a), & t > 0, \quad a > 0, \\ \phi(0)h(t,0) = \phi(0) \int_0^{+\infty} B(a)h(t,a)da. \end{cases}$$

Multiplions par le signe de $h\phi$ et intégrons,
$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} |h| \, \phi da = -\phi(0) \int_0^{+\infty} \beta \, |h| \, da + \phi(0) \left| \int_0^{+\infty} \beta h da \right|.$

On sait que : $\delta \int_0^{+\infty} h\phi da = 0$ (par loi de concervation)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} |h| \, \phi da &= -\phi(0) \int_0^{+\infty} \beta \, |h| \, da + \left| \int_0^{+\infty} (\beta\phi(0) - \delta\phi) h da \right|, \\ &\leq -\phi(0) \int_0^{+\infty} \beta \, |h| \, da + \int_0^{+\infty} |h| \, (\beta\phi(0) - \delta\phi) da, \\ &\leq -\delta \int_0^{+\infty} |h| \, \phi da, \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient,
$\int_0^{+\infty} |h\phi| \, da \leq e^{-\delta t} \int_0^{+\infty} |n_0 - \gamma N| \, da.$

Chapitre 4

Analyse numérique et simulation

Le présent chapitre est consacré à l'analyse numérique d'un modèle de McKendrick-VanFoerster avec une croissance initiale qui peut être controlée. Dans un premier temps, on va écrire le schéma numérique utilisé. Puis tester sur des exemples la méthode numérique, en attribuant des valeurs convenables à nos paramètres.

On considère le modèle suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}n(t,a) = 0, \qquad t > 0, \quad a > 0, \\ \\ n(t,0) = f(\int_0^{+\infty} B(a)n(t,a)da)), \\ \\ n(0,a) = n_0(a), \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans ce chapitre nous allons faire l'hypothèse suivante

$$\int_0^{+\infty} B(a)da = \alpha < +\infty. \tag{4.2}$$

On introduit une fonction $\phi \geq 0$ non identiquement nulle, définit comme suit

$$\phi(x) = \frac{\phi(0)}{\alpha} \int_x^{+\infty} B(y)dy. \tag{4.3}$$

Proposition 4.0.1
Supposons que (??) est satisfaite. Si $f(x) < \frac{x}{\alpha}$ on a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} n(t,y)\phi(y)dy = 0. \tag{4.4}$$

Preuve

Multiplions et intégrons la première équation du système (**??**) par ϕ

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} n(t,y)\phi(y)dy = \phi(0)f(\int_0^{+\infty} B(y)n(t,y)dy) - \int_0^{+\infty} n(t,a)\phi'(a)da. \tag{4.5}$$

En remplaçant ϕ par sa formule on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} n(t,y)\phi(y)dy \leq 0. \tag{4.6}$$

Par conséquent

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} n(t,y)\phi(y)dy := L. \tag{4.7}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème **??** on démontrera que $L = 0$.

4.1 Simulation numérique

Pour calculer une solution approchée on se donne une discrétisation en temp et en âge, cette dernière consiste à donner un ensemble de point $(t_n)_{n=0...N}$ de $[0,T]$ et un ensemble de point $(a_i)_{i=0...M}$ de $[0,A]$ avec A et T sont trés grands.
Pour simplifier on considère des pas constants $k = \frac{T}{N}$, et $h = \frac{A}{M}$.

On pose alors

$$\begin{cases} t_n = nk, & \text{n=0...N,} \\ a_i = ih, & \text{i=0...M.} \end{cases}$$

On considère le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0 \\ u_0^n = f(\sum_{i=1}^{M} \beta(a_i)u_i^n h) \quad , \; n = 1...N \\ u_i^0 \; donnée. \end{cases} \tag{4.8}$$

dont on a utiliser la méthode des différences finies pour la première équation, et la méthode de trapèzes généralisées pour approximer l'intégrale.

Proposition 4.1.1
*Le schéma (**??**) est consistant d'ordre* 1 *, en plus il est stable sous la condition de Courant-Friedrichs-Lavy (CFL) $k \leq h$.*

Remarque 4.1.1
La simulation numérique de ce mémoire a été éffectué sous C++ et Matlab.

Maintenant, on donne deux exemples concernant la variation de la population n au cours du temps.

4.1.1 Premier exemple

Dans cet exemple, on associe aux paramètres du modèle (**??**) les valeurs suivantes :

$u(0,a) = \frac{12}{1+a^2}, \qquad B(a) = \exp(-a) \qquad \text{et} \qquad f(x) = 0.9x,$

$N = 2000, \qquad k = 0.05, \qquad M = 50, \qquad \text{et} \qquad h = 0.2$

on obtient alors, la figure suivante :

Figure 4.1 – La variation de la population au cours du temps

Figure 4.2 – La variation de la population au cours du temps

4.1.2 Deuxième exemple

Dans cet exemple, on associe aux paramètres du modèle (**??**) les valeurs suivantes :

$u(0,a) = \frac{12}{1+a^2}$, $\qquad B(a) = \exp(-a) \qquad$ et $\qquad f(x) = \sqrt{x}$,

$N = 2000$, $\qquad k = 0.05$, $\qquad M = 50$, $\qquad$ et $\qquad h = 0.2$

on obtient alors, la figure suivante :

Le deuxième exemple montre clairement, que sous certaine condition sur f (f admet un point fixe non trivial) la solution du problème (**??**) converge vers un état stationnaire nontriviale.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté le principe d'entropie relative généralisée, qui est une méthode générale qui permet de caractériser le comportement des solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires. Ces EDP linéaire apparaissent naturellement quand il s'agit de modéliser des situations biologiques. On peut ainsi trouver des invariants, et étudier le comportement asymptotique des solutions normalisées. Un des problèmes actuels est d'étendre ces méthodes à des classes de systèmes non-linéaires, problème toujours ouvert.

Bibliographie

[1] B.Abdellaoui, T.M.Touaoula, **Decay solution for the renwal equation with diffusion**,Nonlinear Differ.Equ.Appl.(NODEA)vol.17,2010,271-288.

[2] P.Auger ,C.Lett ,J.C.Poggiale, **Modélisation mathématique en écologie**, Dunod, Paris, 2010

[3] M.Bouizem, **Modèles mathématiques pour des populations structurées en âge**, mémoire de Magister, U.A.B.Tlemcen (2012)

[4] H.Brezis, **Analyse Fonctionnelle théorie et applictions**,1987,Masson .

[5] J-P. Demailly, **Analyse numérique et équations différentielles** ; collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996),

[6] R.Dautray,J.L.Lions, **Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology**. Springer 1990.

[7] P.Michel, S.Mischler et B.Perthame, **General relative entropy inequality : an illustration on growth models**

[8] P.Michel, S.Mischler et B.Perthame, **The entropy structure of models of structured population dynamics**.(2004)

[9] Mischler S., Perthame B. and Ryzhik, **Stability in a Nonlinear Population Maturation Model**, Math. Models Meth. Appl. Sci., Vol. 12, No. 12 (2002) 17511772.

[10] J.D. Murray, **Mathematical Biology : I. An Introduction**. Third Edition, 2001, Springer

[11] B.Perthame, **Transport Equations in Biology**, Birkhauser, Berlin (2007)