

---

# Etude de la stabilité matérielle d'une fondation isolée par le critère de Hill

**Brahim Lafifi<sup>1\*</sup>, Felix Darve<sup>2</sup>, M/Salah Nouaouria<sup>1</sup>, Mohamed Guenfoud<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique, Université de Guelma  
B.P 401 24000 Guelma Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire 3SR, B.P 53 38041 Grenoble Cedex , France

\* blafifi@gmx.fr

---

*RESUME. Les risques naturels restent, en grande partie, inexpliqués dans le cadre des méthodes classiques. C'est le cas par exemple, des glissements de terrain apparaissant sous faible pente, qui contredisent les analyses de stabilité traditionnelles. De nouvelles approches sont nécessaires pour rendre compte de ces modes de rupture particuliers. Pratiquement, le critère de stabilité de Hill, basée sur le signe du travail du second ordre pourrait permettre une analyse des instabilités au niveau local ou global. Ce présent travail est basé sur ce critère, l'approche de Hill est plus particulièrement présentée, ensuite cette approche est introduite dans le logiciel de calcul par éléments finis Plaxis. Dans le second, une étude du problème de bifurcation et d'instabilité dans les ouvrages géotechniques, en se basant sur l'analyse du travail du second ordre local et global sera présentée. Nous proposons la modélisation d'une fondation superficielle au bord d'un talus excavé dans un sol pulvérulent (sable d'Hostun) avec le modèle HSM, ce qui nous permettra de mettre en évidence la formation d'une surface de glissement au bord du talus.*

*ABSTRACT. The natural risks remain, still badly explained within the framework of the traditional methods. It is the case of landslides occurring on slopes that are not too steep and difficult to be modeled using traditional method. Therefore, new approaches are necessary to take into account these particular failure modes. For this reason, we use the Hill's criterion which is based on the sign of the second order work. The Hill's criterion can efficiently allow a finer instability analysis in both local and global levels. This approach is incorporated in the finite element code (Plaxis). In the second, a study of instability problem in the works geotechnics, based on the analysis of the local and global second order work will be presented. We propose the modeling of a shallow foundation at the edge of an excavated slope in a non-cohesive soil (sand of Hostun) with HSM model, which will enable us to highlight the formation of a slip surface at the edge of the slope.*

*MOTS-CLES : Instabilité – critère de Hill – éléments finis – Plaxis – fondation.*

*KEY WORDS: Instability – Hill's criterion – finite elements - Plaxis – foundation.*

---

## 1. Introduction

Les risques naturels font l'objet d'importantes recherches, devenues très actives récemment. Les glissements de terrain, les boues torrentielles et les éboulements rocheux sont les manifestations les plus classiques des risques naturels d'origine gravitaire. Afin d'assurer la sécurité des personnes et des biens, il est indispensable d'analyser ces phénomènes de façon exhaustive, c'est à dire à des échelles très variables en terme d'espace et de temps et en prenant en compte tous les modes de rupture possibles. En ce qui concerne les glissements de terrains catastrophiques, les approches mécaniques et numériques traditionnelles sont aujourd'hui de portée limitée. D'un point de vue mécanique, les problèmes de stabilité de pente et de glissement de terrain ont longtemps été étudiés dans le cadre de la théorie de la plasticité (Hill, 1958; Mandel, 1966 ; Rice, 1976 ,...). Historiquement, les premières approches faisaient l'hypothèse de l'associativité du comportement des géomatériaux, c'est-à-dire que la limite élastique était supposée confondue avec la règle d'écoulement, ce qui implique que les lignes de glissement statiques et cinématiques sont confondues. (Darve and Louafa, 2000). Dans ce cas, la rupture survient lorsque l'angle de la pente est égal à l'angle de frottement au repos du matériau. L'instabilité des pentes a été décrite numériquement à l'aide de deux approches : la théorie de la plasticité d'une part (Duncan, 1996) et la théorie de la localisation de la déformation plastique (bifurcation par formation de bandes de cisaillement, Rice, 1976) d'autre part.

De nouvelles approches sont nécessaires pour rendre compte de ces modes particuliers de rupture sous faible pente. Pratiquement, la condition suffisante de stabilité de Hill, (1958) basée sur le signe du travail du second ordre est un critère opératoire pour permettre une analyse des instabilités au niveau local ainsi qu'au niveau global (Louafa and Darve, 2002). Ainsi, l'instabilité d'un sol peut apparaître non seulement sous un mode localisé, mais aussi sous un mode diffus où la rupture se traduit par une zone de déplacements chaotiques non organisés. Ce mode de rupture diffus peut se manifester avant le mode localisé. Expérimentalement, les travaux de Georgopoulos, (2006) après ceux de Chu et Leong (2003) ont visé à caractériser la rupture diffuse sur des sables lâches par des essais triaxiaux non drainés en compression, les résultats obtenus montrent que l'instabilité induite par une petite force axiale supplémentaire appliquée au pic de la contrainte déviatoire conduite à la rupture diffuse de l'échantillon sans bande de localisation (Servant *et al.*, 2004; Khoa *et al.*, 2005). Les études des instabilités matérielles pour les sables lâche et dense en déformation plane, réalisées par Khoa (2005) ont déterminé ainsi des domaines de rupture diffuse potentielle qui sont également au sens physique des domaines de bifurcation. Cette classe de rupture peut être décrite par le critère de stabilité s'appuyant sur le signe du travail du second ordre (Hill, 1958), qui est présenté maintenant.

## 2. Travail du second ordre local

D'après les travaux de Hill, un état de contrainte - déformation est instable s'il existe une direction de chargement pouvant être poursuivie de manière infinitésimale sans apport d'énergie de l'extérieur. La condition de stabilité matérielle est exprimée selon Hill comme suit :

$$\forall d\sigma \neq 0 \ \& \ d\varepsilon \neq 0 \quad d^2W = d\sigma : d\varepsilon > 0 \quad [1]$$

Les calculs du travail du second ordre dans le code Plaxis sont effectués pour tous les points d'intégration (points de gauss) du milieu continu et entre deux pas d'équilibre successifs. Pour que les représentations du travail du second ordre local  $d^2W$  soient plus "lisibles", nous allons normaliser  $d^2W$  par rapport aux normes des incréments de contrainte  $\|d\sigma\|$  et de déformation  $\|d\varepsilon\|$  :

$$d^2W = \frac{d\sigma : d\varepsilon}{\|d\sigma\| \|d\varepsilon\|} \quad [2]$$

## 3. Travail du second ordre global

Hill, (1958) a proposé une condition suffisante de stabilité pour les problèmes aux limites où la géométrie, les équations d'équilibre, les conditions initiales et aux limites sont prises en compte. Cette condition de stabilité globale s'exprime de la façon suivante :

$$D^2W = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \, d\Omega \quad [3]$$

L'expression du travail du second ordre valable dans une discrétisation par éléments finis est obtenue, en transformant la forme intégrale rappelée ci-dessus en une somme discrète sur l'ensemble des éléments du maillage, nous écrivons alors :

$$D^2W = \sum_{pi=1}^{N_{pi}} d\sigma_{pi} : d\varepsilon_{pi} \cdot w_{pi} \cdot J_{pi} \quad [4]$$

avec :

$N_{pi}$  : nombre total de points d'intégration,

$J_{pi}$  : déterminant de la matrice jacobienne au point d'intégration  $pi$ ,

$w_{pi}$  : poids du point d'intégration  $pi$ .

Finalement, le travail du second ordre global normalisé est calculé de la manière suivante :

$$D^2W_{normalisé} = \frac{\sum_{pi=1}^{N_{pi}} D^2W_{pi}}{\sum_{pi} w_{pi} \cdot J_{pi} \sum_{pi} \|d\sigma\|_{pi} \|d\varepsilon\|_{pi}} \quad [5]$$

Notant que le calcul du travail du second ordre local  $d^2W$  et global  $D^2W$  est réalisé une fois que le calcul par Plaxis est fini et en post-traitement.

#### 4. Modélisation de la stabilité d'une fondation au bord d'un talus

Les fondations superficielles isolées, posées sur un massif de sol homogène à surface horizontale, constituent des exemples simples pour la validation des résultats de calcul par éléments finis. En effet, on dispose de solutions exactes concernant la charge limite ou de bornes inférieures et supérieures pour quelques problèmes particuliers. Dans le cadre de cet exemple (cas d'un problème bidimensionnel), nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité matérielle de la fondation, en se basant sur l'analyse du travail du second ordre local et global. Donc, ce paragraphe est consacré à la modélisation de la stabilité d'une fondation au bord d'un talus

excavé, constitué d'un sol pulvérulent, la profondeur finale de l'excavation est de 4 m. Notons que l'angle de la pente étudiée ( $27^\circ$ ) est inférieur à l'angle de frottement interne du sable d'Hostun lache ( $34^\circ$ ).

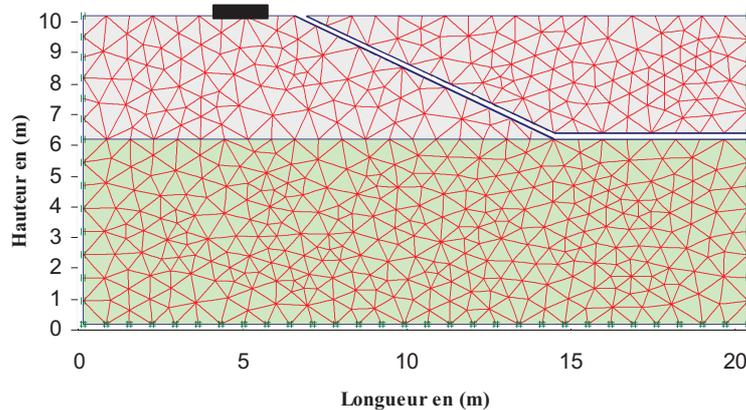


Figure 1. Maillage et conditions aux limites.

#### 4.1 Etapes de calcul

Les seules forces extérieures appliquées sont la force de pesanteur et la charge de la fondation. L'analyse se fait en trois étapes :

- Calcul des conditions initiales ;
- Calcul de l'excavation ;
- Calcul de chargement jusqu'à la rupture.

La fondation est supposée rigide, le déplacement imposé ( $u_{\text{imposé}}$ ) est uniformément réparti en surface. Nous utilisons ici la procédure de niveau final ("*Ultimate level*") comme une méthode d'application du chargement. Cette procédure pour laquelle la taille des pas de calcul est choisie automatiquement nous permet de préciser la charge totale (i.e. le déplacement imposé sur la fondation) à appliquer en assurant un bon compromis entre la robustesse et la précision du calcul.

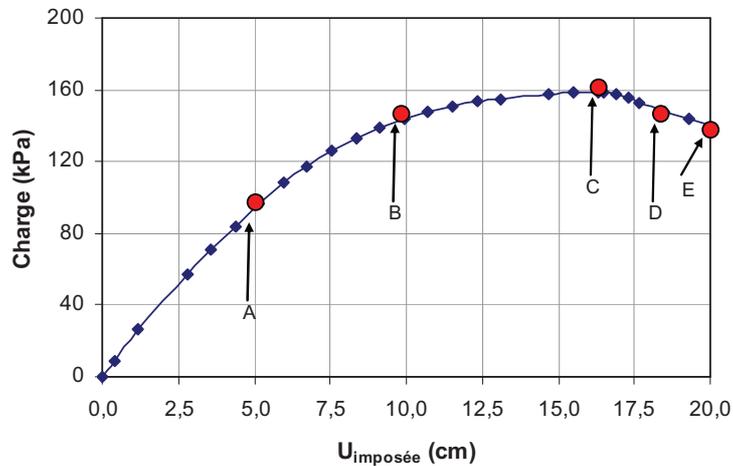
#### 5. Résultats

La figure 2 montre la courbe de la force portante en fonction du déplacement imposé sur la fondation circulaire. Afin d'analyser le comportement et la stabilité de la fondation, nous choisissons cinq étapes de chargement : avant, pendant et après la valeur maximale de la force axiale. Cependant, la forme de la courbe force - déplacement obtenue n'est révélatrice que de l'état du sol. Elle n'est pas, spécifique

d'un mode de rupture. En effet, la diminution de la force portante au-delà d'un pic s'observe aussi bien pour les ruptures diffuses que pour les ruptures localisées. Les analyses du travail du second ordre local et global dans les paragraphes suivants permettront donc une mise en évidence des modes de rupture. Comme le mode de sollicitation est en déplacement, il nous permet d'étudier la stabilité au niveau local et global de la fondation superficielle même si la valeur maximale de la force portante de cette fondation est dépassée.

### 5.1. Analyse de la stabilité matérielle en terme du travail local

La figure 3 (a) présente, pour trois étapes de chargement les incréments de déformation déviatorique permettant de détecter les zones de déformations localisées. Nous observons clairement les zones où ces incréments sont plus importants. Les déformations déviatoriques sont importantes au début du chargement sous la fondation, et commencent à augmenter et se propager vers la surface libre du talus. Après le pic de la capacité portante (point E), on obtient une rupture progressive localisée. Les résultats en terme d'isovaleurs du travail du second ordre local pour trois étapes de chargement sont présentées sur la figure 3 (b). Ces tracés nous permettent d'étudier, de manière plus claire, la stabilité de la fondation.



**Figure 2.** Force portante de la fondation en fonction du déplacement imposé.

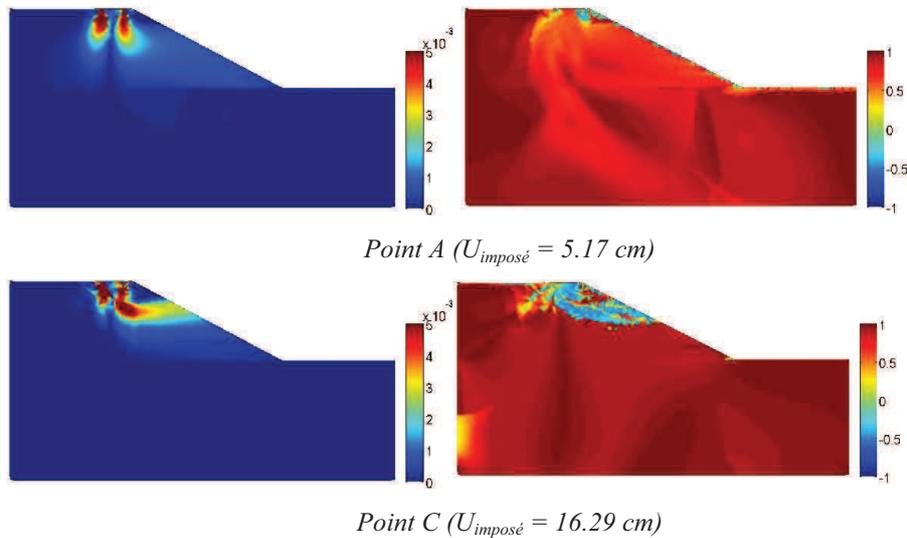
Nous observons, une bonne corrélation entre les zones de forts incréments de déformation déviatorique et de valeurs négatives du travail du second ordre

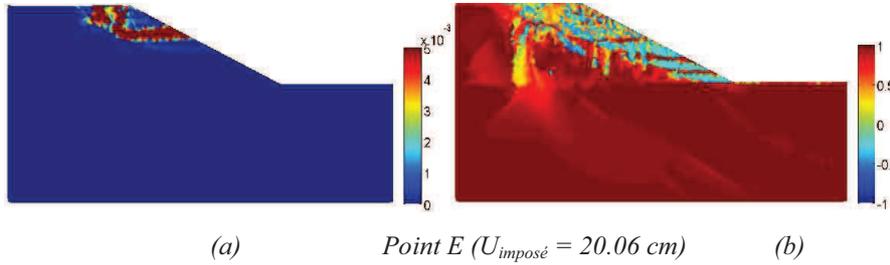
local. Nous remarquons aussi, que les valeurs du travail du second ordre local en point C préfigurent les valeurs du déviateur de déformation en point E. Nous pouvons constater que plus le déplacement imposé augmente, plus la zone de  $d^2W$  négatif s'étend au niveau de la surface libre du talus. Cette jonction ressemble à un mode de rupture diffuse.

## 5.2. Analyse de la stabilité matérielle en terme du travail global

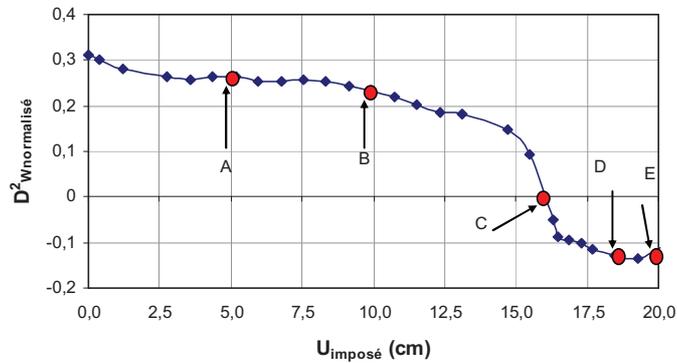
La figure 4 présente l'évolution du travail du second ordre global normalisé en fonction du déplacement imposé. Tant que la courbe force - déplacement augmente linéairement, le travail du second ordre global normalisé reste quasiment constant, l'ouvrage se trouve donc dans un état quasiment stable dès lors que le travail est positif.

A l'approche de la valeur de la capacité portante ultime, une forte diminution de  $D^2W$  normalisé se produit et il s'annule au point C qui correspond au pic de la capacité portante, ce qui confirme les interprétations précédentes quant à l'état de stabilité du massif. En poursuivant le chargement (point E), le travail global normalisé devient négatif. Ainsi le massif est en état d'instabilité manifesté, selon la condition de Hill, (1958).





**Figure 3.** Présentation des isovaleurs des incréments de déformation déviatorique (a), des isovaleurs du travail du second ordre local (b), pour trois incréments de chargement.



**Figure 4.** Travail du second ordre global normalisé au cours du chargement.

## 6. Conclusion

La modélisation proposée concerne l'analyse de la stabilité d'une fondation superficielle au bord d'un talus formé par un processus d'excavation, constitué d'un sol pulvérulent. Cette modélisation a mis en évidence la capacité du critère de Hill à décrire les instabilités dans le massif. Pendant le chargement de la fondation, on a constaté la formation d'une surface de glissement sous la fondation qui s'étend vers le bord du talus. Le mode de rupture pour la fondation est localisé et le travail du second ordre fournit les bandes de cisaillement, tandis que le mode de rupture pour le talus est diffus et le travail du second ordre fournit la zone instable. Le tracé du travail du second ordre global normalisé a montré des valeurs négatives en fin de chargement et par conséquent, le talus devient moins stable.

## 7. Bibliographie

XXIX<sup>e</sup> Rencontres Universitaires de Génie Civil. Tlemcen, 29 AU 31 Mai 2011.

- Bigoni D., Hueckel T. «Uniqueness and localization- I. Associative and nonassociative elastoplasticity», *Int. J. Solids Structures*, 28(2):197–213, 1991.
- Chu J., Leong W.K. «Recent progress in experimental studies on instability of granular soil», In *Labuz & Drescher, editor, Int. Workshop on Bifurcations and Instabilities in Geomechanics*, pages 175–192. Swets & Zeitlinger, 2003.
- Darve F., Laouafa F. «Instabilities in granular materials and application to landslides», *Mech. Cohes. Frict. Mater.*, 5(8):627–652, 2000.
- Duncan JM., «State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slope», *Journal Of Geotechnical Engineering*, 1996; 122(7):577-96.
- Georgopoulos I.O., «Mechanisms of liquefaction of granular materials and the role of fabric anisotropy», PhD thesis, N.T.U.A., (2006).
- Hill R. «A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids», *J. of the Mech. and Phys. of Solids*, 6:239–249, 1958.
- Khoa H.D.V., Georgopoulos I.O., Darve F., Laouafa F., «Diffuse failure in geomaterials: experiments and modelling», *Computers and Geotechnics*, 2005.
- Khoa H.D.V., «Modélisations des glissements de terrain comme un problème de bifurcation», PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.
- Louafa F., Darve F., «Modelling of slope failure by material instability mechanism». *Computer and Geotechnics*, 29(4), 301-325, 2002.
- Mróz Z., «Non-associated flow laws in plasticity», *Journal de Mécanique*, 2(1):21–42, 1963.
- Rice J.R., «The localization of plastic deformation», *Theoretical and applied mechanics*, W.T. Koiter ed, North-Holland publishing Company: 207–220, 1976.
- Servant G., Darve F., Desrues J. and Georgopoulos I.O., «Diffuse modes of failure in geomaterials», In *Di Benedetto, editor, Deformation characteristics of geomaterials*. Swets & Zeitlinger, 2004.