
Stabilité et vibrations libres des plaques en matériaux composites sur fondations élastiques

S. Ait Yahia^{1*}, H. Ait Atmane^{1,2}, A. Tounsi², E.A Adda Bedia²

¹ Département de génie civil, faculté des sciences et sciences de l'ingénieur, Université Hassiba Benbouali de Chlef, Chlef

² Laboratoire des matériaux & Hydrologie, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès

* aityahiasiham@yahoo.fr

RÉSUMÉ. L'analyse de la vibration libre et la stabilité des plaques épaisses symétriques et antisymétriques en matériau composite, sur une fondation élastique sont examinées par un nouveau modèle de déplacement, dans ce travail. La nouvelle fonction de forme, suivant l'épaisseur de la plaque, représente la distribution des contraintes de cisaillement transversales qui sont nulles à la surface supérieure et inférieure de la plaque. La fondation est modélisée comme un système de ressort à deux paramètres Winkler et Pasternak. L'équation de mouvement pour des plaques épaisses stratifiées reposant sur une fondation élastique et soumises aux charges en plan est obtenue par le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues, en utilisant la technique de Navier et ensuite les charges du flambement et les fréquences fondamentales sont trouvées, en résolvant un système d'équation des valeurs propres. Les résultats numériques obtenus pour la vibration libre et la stabilité des plaques stratifiées sur la fondation élastique sont présentées et comparées avec ceux disponibles dans la littérature.

ABSTRACT. Analysis of free vibration and stability of symmetric and antisymmetric thick composite plates on an elastic foundation are examined by a new displacement model, in this work. The new shape function depending on the thickness of the plate shows that the distribution of transverse shear stresses is zero at the top and bottom surface of the plate. The foundation is modeled as a spring system with two parameters Winkler and Pasternak. The equation of motion for thick laminated plates resting on an elastic foundation and subjected to inplane loads is obtained by Hamilton principle. The solutions are obtained using the technique of Navier and then buckling loads and fundamental frequencies are found by solving an eigenvalue system. The numerical results obtained for free vibration and stability of laminated plates on elastic foundation are presented and compared with those available in the literature.

MOTS-CLÉS : fondation élastique, stratifiées, contraintes du cisaillement, stabilité, vibration libre.

KEYWORDS: elastic foundation, laminated, shear stress, stability, free vibration.

1. Introduction

Les déformations du cisaillement transversal sont l'un des intérêts principaux des plaques stratifiées épaisses composites. Il existe plusieurs théories des plaques stratifiées qui incluent des contraintes de cisaillement transversales ; une des théories bien connues est le modèle de (Reissner, 1945), qui est connue comme la théorie des ordres première de déformation de cisaillement.

Il y a eu un nombre considérable d'études (Phan,1985), sur les plaques reposant sur des fondations élastiques ; dans certaines des analyses, un paramètre simple k_0 est utilisé pour décrire le comportement de fondation (Utku, 2000). La fondation est modélisée par des ressorts verticaux discrets et ne prend pas en compte les déformations de cisaillement transversal. Certains chercheurs ont modélisé la fondation à deux paramètres différents ; un de ces modèles est le modèle type Pasternak. Ce deuxième paramètre prend en compte l'effet de l'interaction entre les points de cisaillement dans la fondation (Omurtag et al., 1998).

L'objectif de ce travail est d'analyser un nouveau modèle de déplacement pour des plaques stratifiées composites sur fondation élastique. Les solutions analytiques sont présentées en utilisant la présente théorie. L'utilisation du principe d'Hamilton tire les équations gouvernantes. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres. Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions trouvés dans d'autres modèles de la littérature, pour être dans le bon accord.

2. Equations constitutives

Considérons une plaque rectangulaire stratifiée, composée de N couches élastique orthotrope, de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur uniforme totale h figure 1.

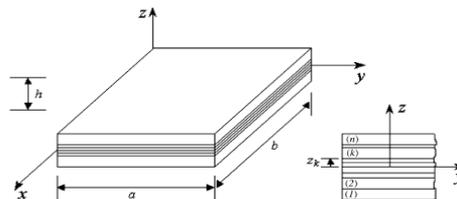


Figure 1. Description de la plaque stratifiée

Le système de coordonnées (x, y, z) , est choisi et placé au milieu de la plaque, Les équations constitutives de kième couche de la plaque stratifiée peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad [1]$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ sont les contraintes et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$

les composants de déformations dans le repère global ;et Q_{ij} sont les constantes de transformées matériel

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}.$$

Sur la base de la théorie des plaques épaisses, le champ de déplacement supposé peut être exprimé dans unifiée formulaire comme suit :

$$\begin{cases} u = u_0(x, y) - z w_{,x} + f(z) \theta_x \\ v = v_0(x, y) - z w_{,y} + f(z) \theta_y \\ w = w_0(x, y) \end{cases} \quad [2]$$

Où u, v, w sont les déplacements dans les directions x, y, z ; u_0, v_0 et w_0 sont les déplacement au plan moyen, θ_x et θ_y sont les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes y et x , respectivement, $f(z)$ est la fonction de cisaillement transversal,est choisie comme suit:

$$f(z) = \frac{3}{13} \left(\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot z}{h} \right) + 1 \right) + \frac{10}{13} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{16z^4}{5h^4} \right) \quad [3]$$

La fonction proposée (3), permet de satisfaire le cisaillement transversal nul à la surface supérieure et inférieure de la plaque. La distribution à ordre élevé des contraintes du cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque est prise en compte .Les composantes normales et déformations transversale sont comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = u_{0,x} - zw_{,xx} + f(z)\theta_{x,x} ; \varepsilon_{yy} = v_{0,x} - zw_{,yy} + f(z)\theta_{y,y} ;$$

$$\gamma_{xy} = u_{0,y} + v_{0,x} - 2zw_{,xy} + f(z)(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) ; \gamma_{yz} = f'(z)\theta_y ; \gamma_{zx} = f'(z)\theta_x \quad [4]$$

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad [5]$$

3. Équations gouvernantes

En utilisant le principe d'énergie de Hamilton ; l'équation de mouvement pour une plaque stratifiée composite s'écrit comme suit:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - K - W) dt = 0 \quad [6]$$

Où U est l'énergie de déformation et K est l'énergie cinétique de la plaque, U_F est l'énergie de déformation de la fondation et W est le travail des forces externes.

Employant le minimum du principe d'énergie totale qui conduit à une équation générale du mouvement et aux conditions limites.

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \int_V [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - \rho(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w)] dv + \int_A [f_e \delta w + \overline{N_x} w_{,xx} \delta w + \overline{N_y} w_{,yy} \delta w] dA \right] dt = 0 \quad [7]$$

f_e : est la densité de force de réaction de la fondation. si la fondation est modélisée comme une fondation linéaire Winkler, le coefficient k_1 de l'équation (8) est égal à zéro.

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w. \quad [8]$$

En utilisant les équations (4) , l'équation (7) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left\{ \delta u N_{x,x} + \delta v N_{y,y} + \delta u N_{xy,y} + \delta v N_{xy,x} + \delta w M_{x,xx} + \delta w M_{y,yy} + 2 \delta w M_{xy,xy} \right. \\
 & + \delta \theta_x P_{x,x} + \delta \theta_y P_{y,y} + \delta \theta_x P_{xy,y} + \delta \theta_y P_{xy,x} + \delta \theta_y (-R_y) + \delta \theta_x (-R_x) \left. \right\} dA \\
 & + \int_A f_e \delta w dA - \int_A \left\{ \delta u (I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{,x} + I_4 \ddot{\theta}_x) + \delta v (I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{,y} + I_4 \ddot{\theta}_y) \right. \\
 & + \delta w (I_1 \ddot{w} + I_2 \ddot{u}_{,x} - I_3 \ddot{w}_{,xx} + I_5 \ddot{\theta}_{x,x} + I_2 \ddot{v}_{,y} - I_3 \ddot{w}_{,yy} + I_5 \ddot{\theta}_{y,y}) + \delta \theta_x (I_4 \ddot{u} - I_5 \ddot{w}_{,x} + I_6 \ddot{\theta}_x) \\
 & \left. + \delta \theta_y (I_4 \ddot{v} - I_5 \ddot{w}_{,y} + I_6 \ddot{\theta}_y) \right\} - \int_A \left\{ N_{xw,xx} + N_{yw,yy} \right\} \delta w dA \Bigg] dt = 0
 \end{aligned} \quad [9]$$

Où les contraintes et les moments résultants sont définis comme suit:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & C_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ C_{ij} & E_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ k_\theta \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 \{R\} &= [R_{ij}] \{\theta\} \quad (i, j = 4, 5)
 \end{aligned} \quad [10]$$

Dans laquelle:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} \quad k = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad k_\theta = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \theta = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad [11]$$

4. Solution de Navier et problème aux valeurs propres d'une plaque sur appuis simple

Les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée peuvent être obtenues en tant que:

$$N_x = v = w = M_x = P_x = \theta_y = 0 \quad \text{pour } x = 0, a$$

$$N_y = u = w = M_y = P_y = \theta_x = 0 \quad \text{pour } y = 0, b \quad [12]$$

Pour la solution analytique des équations (13), la méthode de Navier est utilisée dans des conditions limites spécifiées. Le déplacement des fonctions qui satisfont les conditions aux limites (12) sont choisies comme la série suivante de Fourier:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
 v(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
 w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
 \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
 \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$1) \text{ problème de vibration libre ; } ([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \tag{14}$$

$$2) \text{ problème de flambement : } ([K] - \omega [N])\{\Delta\} = \{0\} \tag{15}$$

Pour les solutions non-triviales, le déterminant des équations (14) et (15) doit être égal à zéro:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \tag{16}$$

$$|[K] - \omega [N]| = 0 \tag{17}$$

5. Exemples numériques et comparaisons

Dans cette étude, l'analyse des vibrations libres et le flambement, pour les plaques stratifiées symétrique et antisymétrique composites sur fondation élastique par la nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques stratifiées est proposée pour la recherche.

Les solutions de Navier pour les vibrations libres et analyse du flambage des plaques stratifiées composites sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres. Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont résolus. Il est supposé que l'épaisseur et les propriétés des matériaux pour tous les stratifiés sont les mêmes. Dans l'analyse, les propriétés élastiques du stratifié sont supposées être:

$$\frac{E_1}{E_2} = 40, \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6, \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25. \quad [18]$$

Les relations suivantes sont utilisées pour la présentation de la fréquence fondamentale, la charge de flambement, les paramètres de fondation de Winkler et Pasternak sans dimension.

$$\varpi = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}, \quad \lambda = \overline{N_x} \frac{a^2}{E_2 H^3}, \quad k_0 = \frac{K_0 L^4}{E_2 h^3}, \quad k_1 = \frac{K_1 L^2}{E_2 H^3}. \quad [19]$$

6. Validation des résultats

6.1. vibrations libres

Les fréquences fondamentales du système sont calculées par l'équation de la vibration libre (16) comme problème de valeurs propres.

Le tableau 1, représente les fréquences fondamentales sans dimension des plaques stratifiées symétrique et antisymétrique simplement appuyée pour différentes rapports d'orthotropes. en comparaison avec différent théories de déformation de cisaillement.

Degré d'orth	E1/E2		(a /h=5)				K1=0; k0=0	
	Théories	3	10	20	30	40		
(0/90) ₁	(Akavci ,2009)	6.2181114	6.9939429	7.8327017	8.5234537	9.112452		
	(Aydogdu,2005)	6.2223905	7.0065837	7.8584205	8.5629545	9.166098		
	(Reddy,1984)	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871		
	présent	6.2205507	7.0019432	7.8493697	8.5491787	9.147387		
(0/90) ₂	(Akavci,2009)	6.5009210	8.1932717	9.6215782	10.528229	11.16424		
	(Aydogdu,2005)	6.5034282	8.1939070	9.6200819	10.526116	11.16282		
	(Reddy,1984)	6.5008	8.1954	9.6265	10.534	11.171		
	présent	6.5018895	8.1912325	9.6153377	10.518817	11.15262		

Tableau 1. Les fréquences fondamentales $\varpi = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapports d'orthotropes

On voit sur les figures 2 (a) et (b) que l'augmentation du degré d'orthotrope produit une augmentation des valeurs de fréquence fondamentale.

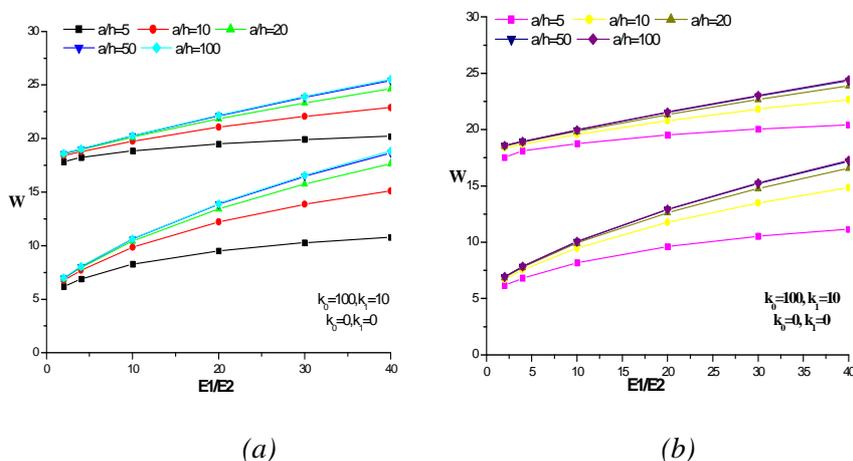


Figure 2. Effet de $E1/E2$ sur les fréquences fondamentales sans dimension d'une plaque stratifiée sur appuis élastique (a) $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et (b) $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$.

6.2. Analyse de la stabilité

Les facteurs de charge de flambement du système sont calculés par l'équation de la stabilité (17). Les différents facteurs des charges de flambage pour les plaques stratifiées sont présentés ici pour évaluer l'exactitude de la nouvelle théorie de déformation du cisaillement.

Dans le tableau 2, les facteurs des charges du flambement sans dimension d'une plaque stratifiée symétrique $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ sont indiqués par rapport à différentes théories de déformation de cisaillement pour différents degré d'orthotrope.

Théories	$k_0=0; k_1=0$				
	3	10	20	30	40
(Aydogdu, 2009)	5.39457616	9.94802732	15.3220529	19.7173565	23.4026641
(Akavci, 2009)	5.39327694	9.94117607	15.3015399	19.6806789	23.3495613
(Phan, 1985)	5.1143	9.7740	15.298	19.957	23.340
Présent	5.39398442	9.94545424	15.3143703	19.7030511	23.3809228

Tableau 2. Les facteurs des charges du flambement uniaxial sans dimension d'une plaque stratifiées symétrique $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ avec $(a/h = 10)$

Le tableau 2 montre que les résultats de la théorie actuelle sont également en bon accord avec d'autres théories de déformation de cisaillement dans la présence de la fondation élastique.

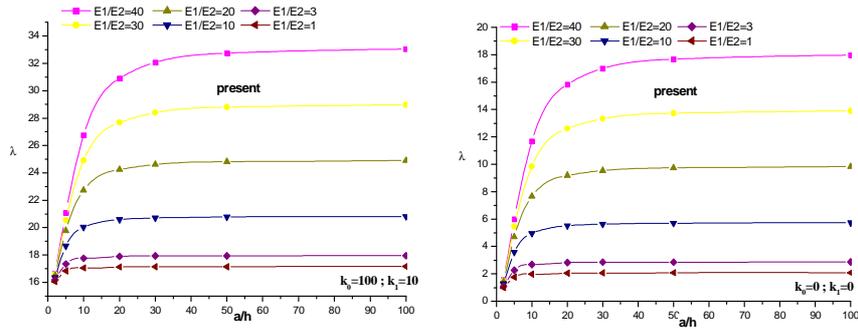


Figure 3. L'effet d'a/h sur le flambement bi axial $\lambda = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée symétrique (0°/90°/90°/0°).

On remarque sur la figure 3 que la fondation élastique a un effet significatif sur la charge de flambage de la plaque. Pour différents degrés d'orthotrope. L'effet de la rigidité de la fondation et le rapport d'orthotrope sur le flambage des plaques épaisses stratifiées est montré dans les figures 4a et b. On voit selon les figures que l'augmentation des valeurs de la rigidité de la fondation et du rapport orthotrope augmente la charge de flambage de la plaque.

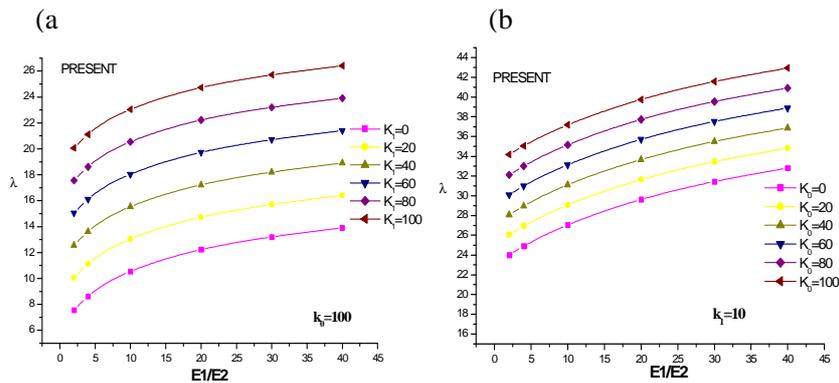


Figure 4. L'effet de E1/E2 sur le flambement uniaxial $\lambda = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique (0°/90°/0°/90°) et a/h=5.

7. Conclusion

Dans l'étude présente, les solutions de la vibration libre et flambement des plaques orthotrope stratifiées, sont développées en supposant que les déplacements de cisaillement transversal sont variables dans l'épaisseur de la plaque.

Pour les plaques rectangulaires stratifiées, les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les résultats sont comparés avec différentes théories d'ordre élevé ; et trouvés pour être dans le bon accord. On peut constater d'après les figures que la présence de la fondation augmente la charge du flambage et les fréquences de stratifiés.

Il est conclu, à travers les exemples numériques, que la théorie présente peut fournir des résultats précis pour les fréquences fondamentales et des charges de flambage pour les plaques symétrique et antisymétrique stratifiées composites sur une fondation élastique.

8. Références

- Akavci S.S., « Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric and Antisymmetric Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation », *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2009.
- Aydogdu M., « Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method », *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005.
- Aydogdu M., « A new shear deformation theory for laminated composite plates ». *Composite Structures*, vol. 89, 2009, p. 94–101.
- Omurtag M.H ., Kadioglu, F., « Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Resting on Pasternak Foundation by Mixed Finite Element Formulation », *Computers and Structures*, vol. 67, 1998, p. 253–265.
- Phan N.D., « Analysis of Laminated Composite Plates using a Higher-order Shear Deformation Theory », *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, p. 2201–2219, 1985.
- Reissner E., « The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates », *J. Appl. Mech.*, vol. 12, 1945, p. 69–77.
- Utku M., « Circular Plates on Elastic Foundations Modelled with Annular Plates, *Computers and Structures*, vol. 78, 2000, p. 365–374.