1 Introduction

Dans plusieurs branches de la science ont utilisé la "randomisation" comme un outil de modélisation des systèmes à grande échelle. De l'étude des populations à l'étude des interactions atomiques, la randomisation a été utilisée à chaque fois que la taille et la complexité du problème rendent une approche systématique et déterministe pratiquement impossible.

L'étude des matrices aléatoires a émergé à la fin des années 1920 (avec la publication de Wishart en 1928) et 1930 (Hsu [26]). Ils ont crée un domaine croissant de recherches, avec en colaboration avec la physique nucléaire [15, 20, 58], les statistiques multivariées [10, 29, 45], l'algèbre combinatoire numérative [12, 22, 24], les algorithmes [52], et la théorie des graphes aléatoires [41], l'analyse numérique [1, 11, 17] , la biologie computationnelle, la génomique [18], et les communications sans fil [57, 61].

Beaucoup de progrès ont été faits sur l'étude des espacements des zéros de la fonction ζ par Montgomery [44], et leur lien avec les matrices aléatoires hermitiennes GUE. Odlyzko [47] a fourni suffisamment de preuves numériques pour renforcer la conjecture de Montgomery, Ce phénomène est maintenant connu comme la loi de Montgomery-Odlyzko.

Un autre point de confluence des différents domaines de la théorie des matrices aléatoires est donné par Baik-Deift-Johansson [4] en étudiant un problème important en combinatoire: la distribution de la plus longue séquence croissante d'une permutation aléatoire de longueur n est le même que la distribution de la plus grande valeur propre d'une matrice hermitienne $n \times n$ (GUE). Cette distribution asymptotique est également connue comme la loi de Tracy-Widom pour GUE, Tracy et Widom ont été les premiers à la calculer [55] et depuis, elle a été identifiée comme une distribution limite pour d'autres problèmes de combinatoire.

Parmi les nombreuses lois que les éléments d'une matrice aléatoire pourrait avoir: est la distribution normale. Elle posède deux proprietés importantes: l'invariance par rapport aux transformations orthogonales et un théorème central limite .

Il ya deux approches pour la symétrisation de la matrice de lois indépendantes normales. En physique, la partie symétrique de la matrice $(A + A^T)/2$ est extraite, et la matrice symétrique aléatoire résultante est liée à un ensemble de Gauss.

Dans les statistiques, la matrice est symétrisée en multipliant par la transposition: (AA^T). L'ensemble résultant des matrices positives est nommé : ensemble de Wishart.

Plus tard, les statisticiens définissent un autre type de matrices aléatoires positives précises, qui code pour l'essentiel deux matrices de Wishart indépendantes, A et B, est nommé matrice de Jacobi: $(C \equiv A^{1/2} B A^{1/2})$.

La première loi normale considérée pour les entrées de la matrice aléatoire est la loi normale.Peu après, la loi normale complexe a été étudiée. **Dyson** [15] étudie la classification des ensembles de matrice et fait valoireet le modèle de matrices aléatoires et leur compatibilité avec le modèle physique, trois types de variables normales: réelles, complexes ou quaternioniques.

Plus tard, Zirnbauer [62] et Ivanov [27] étendue la classification de Dyson en étudiant les espaces symétriques. Leur taxonomies comprennent certains cas de Laguerre et Jacobi, et aussi des ensembles circulaires Dyson [14], mais tous et chacun de ces cas n'est pas en dehors de la «triple voie" royaume, car ils ne tiennent pas compte des valeurs β les autres (ils ont toujours travaille avec les entrées réelles, complexes ou des quaternions).

Le travail de Dyson a été publié en 1963 et La communauté des physiciens s'est intéressé aux trois ensembles de Gauss: ensembles Guaussien orthogonale (GOE), unitaire (GUE) et symplectique (GSE). Ceux-ci correspondent à un choix d'un paramètre β dans la loi de la valeur propre (β peut être considéré comme le nombre de gaussiennes réelles dans chaque entrée, qui est, 1 pour les variables aléatoires réelles, 2 pour les variables aléatoires complexes, et 4 pour les variables aléatoires quaternions). De trvaux statistiques ont soigneusement étudiés ces ensembles. Les fonctions de commençant (également connues comme densité de niveau , espacement du plus proche voisin), les déterminants et les valeurs propres extrémales. Les approches ont été quelque peu différentes pour chacun des trois cas.

De l'autre côté, les statisticiens ont été très intéressés par le modèle Wishart et JACOBI de réel et complexe, mais moins par les quaternions. Des statistiques similaires comme dans le cas des ensembles gaussiens ont été étudiées, parfois avec plus de succès, car il semble que les ensembles Wishart et JACOBI sont plus maniables. Les méthodes utilisées sont pratiquement les mêmes dans tous les cas, ce qui a permis une approche plus homogène avec des progrès plus rapides dans les statistiques des valeurs propres.

De nombreuses études d'intégrales sur ces ensembles (avec β générale) ont porté sur la connexion avec les polynômes de Jack. Nous notons celles inspirées par le travail de Selberg, comme Aomoto [2], Kadell[34], Kaneko [35] et d'autres. Les deux derniers auteurs ont également travaillé avec des polynômes de Jacobi à plusieurs variables.

Une autre source de motivation est venue dans le cadre de la théorie des opérateurs de Schrödinger avec un paramètre β arbitraire (température inverse), en particulier pour les valeurs et fonctions propres de ces opérateurs.

Enfin, on peut signalier le lien de ces ensembles(β arbitraire) avec la géométrie algébrique, où le lien avec les matrices aléatoires est sans doute le plus surprenant avec des intégrales de matrices aléatoires pour le comptage de cartes sur certaines surfaces [22].

Dans ce mémoir, nous présentons une étude sur les matrices aléatoires en abordant prisipalement les trois ensembles gaussiens de matrices GOE, GUE et GSE. Nous développons les resultats chap 2 et 3 du livre de Mehta[42] portant sur les densités de probabilité de matrices et les densités des valeures propres dans chacun des ensembles gaussiens et les chap 2, 3, 4, 5, et 7 de Dimitriu[27].

Dans le chapitre 1, nous rappelons les trois ensembles gaussiens de matrices et la forme générale de la densité de probabilité dans chacun de ces trois ensembles[27].

Dans le chapitre 2, nous développons les calculs donnant la densité de probabilité d'un élément de l'un des trois ensembles (le théorème de Porter, Rosenzweig). Par la suite nous développons les calculs donnant la densité des valeures propres.

Dans le chapitre 3, nous développons les calculs de la densité des vecteurs propres de matrices tri-diagonale dans les trois ensembles, en suivant la thèse de Dimitriu[27].

2 Chapitre

2.1 Ensembles gaussiens de matrices

2.1.1 Introduction

Les ensembles gaussiens ont été introduits par Wigner dans les années 1950 où il a commencé avec un modèle simple pour une matrice aléatoire: les entrées ont une loi uniforme sur {-1, 1}([58]). Wigner a également donné la loi conjointe des valeurs propres pour les ensembles de Gauss.

La densités de niveaux limites pour chacun des trois ensembles sont connus(Gaudin [20] et Mehta [43]); de même pour les densités de niveaux asymptotiques (BASOR, Tracy et Widom [6]).

Enfin, la loi des valeurs propres asymptotique extrémales ont été calculés par Tracy et Widom [55].

Les trois ensembles gaussiens ont en commun la forme de la densité conjointe des valeurs propres .

Nous introduisons les ensembles gaussien de matrices.

Avant d'introduire les ensembles des matrices aléatoires nous presentons les notions d'inversion des temps et leur conséquances

2.1.2 Inversion du temps et invariance

On commence par donner les notions de base du renversement du temps invariant à partir des considérations physiques. L'opérateur de renversement du temps est antiunitaire (Wigner, 1959) et peut être exprimé sous la forme:

$$T = KC \tag{1.1}$$

où K est un opérateur unitaire fixé et l'opérateur C est un conjugué complexe. Ainsi, un état par renversement du temps se transforme en:

$$\psi^R = T\psi = K\psi^* \tag{1.2}$$

ψ^* étant le conjugué complexe de ψ. A partir de la condition:

$$(\phi, A\psi) = \left(\psi^R, A^R\phi^R\right)$$

pour touts les paires d'états (ψ, ϕ) et (1.2)), on en déduit que par renversement du temps, un opérateur A se transforme en:

$$A^R = KA^TK^{-1} \tag{1.3}$$

où A^T est la transposée de A. A est dit auto-dual si $A^R = A$. Un système physique est invariant par renversement du temps si son hamiltonien est auto-dual, est comme suit:

$$H^R = H \tag{1.4}$$

Lorsque la représentation des états est transformée par une transformation unitaire, $\psi \longrightarrow U\psi$, T est transformé selon l'application suivante:

$$T \longrightarrow UTU^{-1} = UTU^{\dagger} \tag{1.5}$$

et K transformé selon l'application suivante:

$$K \longrightarrow UKU^T \tag{1.6}$$

Parce que l'exploitation à deux reprises avec T devrait laisser le système physique inchangé. Nous avons:

$$T^2 = \alpha.1, \qquad |\alpha| = \mathbf{1} \tag{1.7}$$

où **1** est l'opérateur unité :

$$T^2 = KCKC = KK^*CC = KK^* = \alpha.1 \tag{1.8}$$

Et où K est unitaire:

$$K^*K^T = 1$$

De ces deux équations nous obtenons:

$$K = \alpha K^T = \alpha\left(\alpha K^T\right)^T = \alpha^2 K.$$

Par conséquent:

$$\alpha^2 = 1 \text{ ou } \quad \alpha = \pm 1 \tag{1.9}$$

de sorte que la matrice unitaire K soit symétrique ou antisymétrique. Autrement dit: soit

$$KK^* = 1 \tag{1.10}$$

ou

$$KK^* = -1 \tag{1.11}$$

Ces alternatives correspondent, respectivement, à une intégrale ou une demi-intégrante impair du mouvement angulaire total du système mesuré en unités de h (Wigner, 1959) pour l'opérateur moment angulaire total $J = (J_1, J_2, J_3)$ doit se transformer en

$$J_i^R = -J_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.12}$$

Par souci de concision, nous appelons les deux possibilités le cas paires-spin et impaire-spin respectivement .

2.1.3 Ensemble Orthogonal Gaussien GOE

Supposons maintenant que le cas paires-spin et (1.10) sont valables. Ilexiste un opérateur unitaire U telle que

$$K = UU^T \tag{1.13}$$

Par (1.6) une transformation $\psi \longrightarrow \psi\ U^{-1}$ éffectués sur les états ψ met K à l'unité.

Ainsi, dans le cas paire-spin la représentation des états peut toujours être choisi de sorte que

$$K = 1 \tag{1.14}$$

Après une telle représentation est trouvé, d'autres transformations $\psi \longrightarrow R\psi$ sont autorisés uniquement avec R une matrice réelle orthogonale de sorte que (1.14) reste valable. La conséquence de (1.14) est que les matrices auto-duales sont symétriques. Dans le cas spin-paire, chaque système invariant par renversement du temps sera associée à une matrice symétrique réelle H , si la représentation des états est choisie convenablement. Pour les systèmes spin-pair par renversement du temps sont invariance de l'ensemble gaussien orthogonal Λ_{1G} des matrices symétriques réelles.

Définition: *L'ensemble gaussien orthogonal GOE est un sous ensemble de l'espace Λ_{1G} des matrices symetriques réelles vérifiant les deux conditions:*

1. L'ensemble est invariant par les transformations T_W

$$H \longrightarrow W^t HW \tag{1.15}$$

de Λ_{1G} sur lui meme, ou W est une matrice réelle orthogonale ie $T_W(H) \in \Lambda_{1G}$

2. Les éléments $H_{ij}, i \leq j$ de la matrice H sont des v.a indépendantes.

Ces conditions, exprimées sous la forme d'equations, comme suit:

1- La probabilité $P(H)dH$ qu'un élément H de GOE appartenant à l'élément de volume $dH = \prod_{i\leq j} dH_{ij}$ est invariante sous les transformations orthogonales réelles:

$$P(H \in dH) = p(H)dH \ = p(H')dH' \tag{1.16}$$

avec

$$H' = W^t HW \tag{1.17}$$

et

$$W^t W = WW^t = 1 \tag{1.18}$$

2- La densité de probabilité $p(H)$ est un produit de fonctions, dont chacune dépend seulement de H_{ij} variable:

$$dH = \prod_{i \leq j} f_{ij}\left(H_{ij}\right) \tag{1.19}$$

Pour un système de l'espace invariant par les rotations, le spin peut être pair ou impair. Le hamiltonien de H représente le système commute avec toutes les composantes de J. Si nous utilisons la représentation standard des matrices J avec J_1 , $J\ _3$ réel et J_2 imaginaire pur, (1.12) peut être satisfaite par le choix habituel (Wigner, 1959)

$$K = e^{i\pi j_2} \tag{1.20}$$

Avec ce choix de K, H et commutent K et H^R se réduit à H^T. Ainsi, après une rotation, les invariants du système sont représentés par une matrice symétrique réelle H, l'ensemble de Λ_{1G} est bien approprié.

-Dans l'ensemble gaussien orthogonal GOE, un élément H est une varéable aléatoire de loi une mesure gaussienne de densité:

$$C_{_{GOE}} e^{-\frac{n}{4} trH^2} \tag{1.21}$$

Sur l'espace des matrices carées réelles symétriques $H = (H_{i,j}^n)_{i,j=1}^n$, la distribution est invariante par conjugaison orthogonale. Ce sont des modèles hamiltoniens avec la symétrie du renversement du temps.

Autrement dit,GOE est l'ensemble des matrices M où M est une matrice symétrique $n \times n$ obtenue en $(A + A^T)/2$ où A est une matrice de $G(n, n)$. Les éléments diagonaux de la matrice A sont i.i.d. avec une distribution $N(0, 1)$, et les entrées hors diagonale sont iid avec une distribution $N(0, 1/2)$.

2.1.4 Ensemble gaussien unitaire GUE

Définition: *L'ensemble unitaire gaussien GUE est un sous ensemble de l'espace Λ_{2G} de matrices hermetiennes vérifiant par les deux proprietés suivantes:1. la probabilité q'un élément $H = (H_{ij})$ de Λ_{2G} appartient à l'élément de volume dH*

$$dH = \prod_{i \leq j} dH_{ij}^{(0)} \prod_{i<j} dH_{ij}^{(1)} \tag{1.22}$$

où $H_{ij}^{(0)}$ et $H_{ij}^{(1)}$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de H_{ij} est:

$$P(H \in dH) = P_H(dH) = p(H)dH = p(H) \prod_{i \leq j} dH_{ij}^{(0)} \prod_{i<j} dH_{ij}^{(1)}$$

La loi P_H est invariante sous les automorphismesT_U de Λ_{2G} sur lui même $(T_U(H) \in \Lambda_{2G})$ définis par :

$$H \to U^{-1}HU \tag{1.23}$$

où U qui est une matrice unitaire .

2. Les différentes combinaisons linéaires des éléments de H sont indépendantes.

Nous remarquons que nous intèrprétons ces conditions par :

1.

$$P_H = T_U P_H = P_H T_U^{-1} \tag{1.24}$$

$$P_H(dH) = P(H \in dH) = P_{H'}(dH) = P(H' \in dH) \tag{1.25}$$

Par ce que on a: $P_H(dH) = P_{H'}(dH)$ (car p est invariant par transformation T_U) et

$P(H' \in dH) = P(U^{-1}HU \in dH) = P(H \in dH') = P_H(dH') = P_{H'}(dH')$ (p est invariant par transformation)

Donc

$$P_H(dH) = P_{H'}(dH')$$

où

$$H' = U^{-1}HU = T_U(H) \tag{1.26}$$

et U une matrice unitaire et H, H' deux éléments de Λ_{2G}.

2. La densité $p(H)$ est un produit de fonctions dépendant seulement d'une variable:

$$p(H) = \prod_{i \le j} f_{ij}^{(0)} \left(H_{ij}^{(0)} \right) \prod_{i<j} f_{ij}^{(1)} \left(H_{ij}^{(1)} \right) \tag{1.27}$$

Dans l'ensemble gaussien unitaire GUE, une matrice est une varéable aléatoire de loi gaussienne admettant la densité (cf**,** Théorème de Porter et Rosenzweig chap 2)

$$p(H) = \quad C_{_{GUE}} e^{-\frac{n}{2} trH^2} \tag{1.28}$$

Sur l'ensemble GUE des matrices hermétiennes carées, la constante C_{GUE} est la constante de normalisation choisie pour que l'intégrale de la densité soit égal à un. Le terme unitaire signifie que la loi est invariante par transformation unitaire.

2.1.5 Remarque:

L'ensemble GUE peut être vu comme l'ensemble des matrices M hermitiennes $n \times n$, $M = (AA^H)/2$ où A est une matrice de $G_2(n, n)$ et A^H est la transposée hermitienne d'une matrice complexe A. Les éléments diagonaux de A sont i.i.d avec une distribution $N(0, 1)$, tandis que les entrées hors diagonale sont iid (sous réserve d'être hermitienne) avec partie réelle et partie imaginaire de loi $N(0, 1/2).A^H = A^T = \overline{A}$.

Cet ensemble GUE s'applique aux systèmes non invariants par renversement du temps. Ces systèmes sont faciles à créer, en mettant un atome ordinaire ou le noyau, par exemple, dans un champ magnétique généré extérieurement. Le champ externe n'est pas affectée par l'opération renversement du temps. Toutefois, pour que l'ensemble unitaire soit applicable, le fractionnement des niveaux par le champ magnétique doit être au moins aussi grand que l'espacement niveau moyen en l'absence de champ magnétique. Le champ magnétique doit être fort, qu'il doit "mélanger" complètement la structure des niveaux parrapport à celle qui existerait qvec un champ nul. Cet état de choses ne pourrait jamais se produire en la physique nucléaire.

Un système sans renversement du temps invariant a un hamiltonien qui peut être une matrice hermitienne arbitraire aui ne se limite pas à être réelle ou auto-duale.

2.1.6 Ensemble Gaussien symplectique GSE

Definition: *L'ensemble gaussien symplectique GSE est défini dans l'éspace Λ_{4G} de matrices auto-duales hermétiennes par les proprietés suivantes:*

1-L'ensemble est invariant sous tous les automorphismes T_W ci définis:

$$H \longrightarrow H' = W^R H W \tag{1.29}$$

de Λ_{4G} sur lui meme et W est une matrice symplectique.

(1) -la probabilité $p(H)dH$ qu'un élément H de GSE appartenant au volume.

$$dH = \prod_{i\leq j} dH_{ij}^{(0)} \prod_{\alpha=1}^{3} \prod_{i<j} dH_{ij}^{(\alpha)} \tag{1.30}$$

est invariante par les différentes transformationts symplectiques:

$$p(H')dH' = p(H)dH \tag{1.31}$$

si

$$H \longrightarrow H' = W^R H W \tag{1.32}$$

avec

$$W^R W = 1 \text{ ou } \quad WZW^T = Z \tag{1.33}$$

(2) La densité de probabilité $p(H)$ est un produit de fonctions dépendent d'une seule variable:

$$p(H) = \prod_{i\leq j} f_{ij}^{(0)}\left(H_{ij}^{(0)}\right) \prod_{\alpha=1}^{3} \prod_{i<j} f_{ij}^{(\alpha)}\left(H_{ij}^{(\alpha)}\right) \tag{1.34}$$

-Dans l'ensemble gaussien symplectique GSE, l'élément est une variable aléatoire de loi qui est la mesure gaussienne admettant la densité

$$C_{GSE} e^{-ntrH^2} \tag{1.35}$$

Sur l'espace des matrices car$\acute{e}$es hermitiennes quaternions $H = (H_{ij}^n)_{i,j=1}^n$,la distribution est invariante par conjugaison du groupe symplectique et est lemodèle hamiltonien avec la symetrie de renversement du temps sans aucune symetrie de rotation.

Autrement dit,GSE est l'ensemble des matrice M où M est une matrice auto-dual $n \times n$ obtenue par $(AA^D)/2$ dont A est $G_4(n,n)$ et D désigne le transposé "dual "d'une matrice de quaternion. Les éléments diagonaux de A sont iid avec une distribution $N(0,1)$, tandis que les entrées hors diagonale sont iid (sous réserve d'être auto-dual) avec les quatres variables de chaque entrée suivent une loi $N(0,1/2)$.

Nous discutons un système impairs-spin, invariante par renversement du temps, mais n'ayant pas une symétrie de rotation. Dans ce cas (1.11), K ne peut pas être diagonalisable par une transformation de la forme (1.6).

Chaque opérateur antisymétrique unitaire peut être réduit par une transformation (1.6) à la forme standard canonique. Par definition on écrit Z sous la forme suivante:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + ... \tag{1.36}$$

qui se compose de blocs (2×2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ le long de la diagonale principale, tous les autres éléments de Z sont nuls. Nous supposons que la représentation des états est choisi de sorte que K est réduite à ce forme. Le nombre de lignes et de colonnes de toutes les matrices doivent maintenant être encore, car, autrement, serait singulière K en contradiction avec (1.11). Il est commode de désigner l'ordre des matrices par $2N$ au lieu de N. Après une telle représentation, pour laquelle $K = Z$, d'autres transformations $\psi \longrightarrow B\psi$ sont posible, uniquement avec B une matrice unitaire $(2N \times 2N)$ pour lequel la matrice

$$Z = BZB^T \tag{1.37}$$

Ces B des matrices forment précisément le groupe N-dimensionnel symplectique (Weyl, 1946), généralement désigné par $S_p(N)$.

On sait bien que l'algèbre du groupe symplectique peut être exprimé en termes de quaternions (Chevalley, 1946; Dieudonné, 1955). Nous avons donc introduit la notation standard pour les quaternions des matrices (2×2),

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

avec le tableu de multiplication usuel :

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -\mathbf{1} \tag{1.39}$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, \qquad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, \qquad e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2 \tag{1.40}$$

Notez que dans (1.38), ainsi que dans le reste de cette thèse, i est l'unité imaginaire ordinaires et non pas une unité de quaternion. Les matrices e_1, e_2 et e_3, avec la matrice unité (2×2)

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment un ensemble complet et toute matrice (2×2) avec des éléments complexes peuvant être exprimées linéairement avec ces termes avec des coefficients complexes:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+b)\mathbf{1} - \frac{i}{2}(a-d)e_1 + \frac{1}{2}(b+c)e_2 - \frac{1}{2}(b+c)e_3 \tag{1.41}$$

Toutes les matrices $(2N \times 2N)$ seront considérées de N^2 coupé en blocs de (2×2) et chaque bloc (2×2) exprimé en termes de quaternions.

En général, une matrice $(2N \times 2N)$ avec des éléments complexes devient ainsi une matrice $(N \times N)$ avec des éléments quaternions complexes.

En particulier la matrice Z est maintenant de la forme

$$Z = e_2 I \tag{1.42}$$

où I est la matrice unité $(N \times N)$, qui peut être vérifiée par les règles de la multiplication des matrices.

Ajoutons quelques définitions.

Nous appelons un quaternion "vrai" si elle est de la forme

$$q = q^{(0)} + \mathbf{q}.\mathbf{e} \equiv q^{(0)} + q^{(1)}e_1 + q^{(2)}e_2 + q^{(3)}e_3 \tag{1.43}$$

à coéfficients réels $q^{(0)}$, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ et $q^{(3)}$, ainsi un quaternion réel ne correspond pas à une matrice (2×2) avec des éléments réels. Tout quaternion complexe dispose d'un "quaternion conjugué"

$$\overline{q} = q^{(0)} - \mathbf{q}.\mathbf{e} \tag{1.44}$$

qui est distinct de son "complexe conjugué"

$$q^* = q^{(0)*} + \mathbf{q}^*.\mathbf{e} \tag{1.45}$$

Un quaternion avec $q^* = q$ est réel, l'une avec $q^* = -q$ est imaginaire pur. En appliquant ces deux types de conjugaison, on obtient le «conjugué hermitien»

$$q^\dagger = \overline{q}^* = q^{(0)*} - \mathbf{q}^*.\mathbf{e} \tag{1.46}$$

Un quaternion avec $q\dagger = q$ est hermitien et correspond à la notion ordinaire d'une matrice hermitienne (2×2), l'un avec $q\dagger = -q$ est anti-hermitien. Le conjugué d'un produit de quaternions (conjugué hermitien) est le produit de leurs conjugués (conjugués hermitiens) prises dans l'ordre inverse:

$$\overline{q_1 q_2 ... q_n} = \overline{q_n} ... \overline{q_2} . \overline{q_1} \tag{1.48}$$

$$(q_1 q_2 ... q_n)^\dagger = q_n^\dagger ... q_2^\dagger q_1^\dagger \tag{1.49}$$

Considérons maintenant la matrice A $(2N \times 2N)$ qui doit être écrite comme une matrice Q $(N \times N)$ avec des éléments de quaternion q_{kj} $\;k, j = 1, 2, ..., N$. Les opérations sur la matrice standard A est ensuite reflétés sur Q de la façon suivante:

la transposition:

$$\left(Q^T\right)_{kj} = -e_2 \overline{q}_{_{jk}} e_2 \tag{1.50}$$

conjugaison hermitienne:

$$\left(Q^\dagger\right)_{kj} = q_{jk}^\dagger \tag{1.51}$$

renversement du temps:

$$\left(Q^R\right)_{kj} = e_2 \left(Q^T\right)_{kj} e_2^{-1} = \overline{q}_{_{jk}} \tag{1.52}$$

La matrice Q^R est appelé le "dual" de la matrice Q. Une matrice "auto-dual" est l'une avec $Q^R = Q$.

Soit $q_{jk} = \begin{pmatrix} a_{jk} & b_{jk} \\ c_{jk} & d_{jk} \end{pmatrix}$, alors $Q = [q_{jk}]$ est auto-dual si

$$a_{jk} = d_{kj}, \qquad b_{jk} = -b_{kj} \;\text{ et }\; c_{jk} = -c_{kj} \tag{1.53}$$

L'utilité de l'algèbre des quaternions est une conséquence de la simplicité de (1.51) et (1.52). En particulier, il est à noter que les opérateurs K renversement du temps n'apparaît pas explicitement dans (1.52) comme dans (1.3). Par (1.51) et (1.52)la condition

$$Q^R = Q^\dagger \tag{1.54}$$

est nécessaire et suffisante pour les éléments de Q pour être quaternions réels. Lorsque (1.54) détient, que nous appelons Q " quaternion réel" .

Une matrice unitaire B qui satisfait (1.37) est automatiquement un vrai quaternion. En fait, elle remplit les conditions

$$B^R = B^\dagger = B^{-1} \tag{1.55}$$

qui définissent le groupe symplectique. Les matrices H qui représentent les opérateurs d'énergie pour des systèmes physique sont hermitiennes ainsi que l'auto-adjoint:

$$H^R = H \quad \text{ et } \quad H^\dagger = H \tag{1.56}$$

donc elles sont également quaternions réels. A partir de (1.51) et (1.52), nous voyons que les éléments d'une matrice hermitienne de quaternion auto-adjointe doit satisfaire

$$q^{\dagger}_{jk} = \overline{q}_{jk} = q_{kj} \tag{1.57}$$

ou $q^{(0)}_{jk}$ doit former une matrice symétrique réelle, alors que $q^{(1)}_{jk}$, $q^{(2)}_{jk}$, et $q^{(3)}_{jk}$ doit former des matrices anti-symétriques réelles . Ainsi, le nombre de paramètres réels indépendants qui définissent une matrice hermitienne $(2N \times 2N)$ auto-dual est

$$\frac{1}{2}N(N+1) + \frac{1}{2}N(N-1).3 = N(2N-1)$$

Avec ces notation, le systèmes spin-impairs, invariance par renversement du temps mais pas par des rotations symétriques , doit être représenté par Hamiltoniens hermitiennes auto-adjoints. Par conséquent l'ensemble gaussien symplectique, tel que défini ci-dessous, devrait être adaptés à leur description.

2.1.7 Définitions et Notations

L'une des lois la plus utilisée en statistiques et théorie des matrices aléatoires est la distribution normale (ou gaussienne) $N(\mu, \sigma^2)$. Cette distribution a une version complexe que nous désignons par $N^2(\mu, \sigma^2)$: les entrées d'une matrice sont de la forme $x+iy$, où x et y sont des variables aléatoires réelles i.i.d avec une distribution $N(\mu, \sigma^2)$. De même, on peut definir la version quaternion complexe $N^4(\mu, \sigma^2)$, avec la forme $x + iy + jz + kw$, où x, y, z et w sont des variables aléatoires réelles i.i.d avec la distribution $N(\mu, \sigma^2)$.

une matrice aléatoire est une matrice dont les éléments (Les entrées) sont des variables aléatoires.

Les matrices Wishart sont des matrices aléatoires $n \times n$ de la forme $H = XX^*$,où X est une matrice aléatoir $n \times n$ avec des entrées independentes,et X^*est la matrice conjugué de X. Un cas special consideré par Wishart où les entrées de X sont des variables aléatoires Gaussiennes i.i.d (soit réelles ou complexes).

. $G(m, n)$ c'est l'ensemble des matrices $m \times n$ réelles gaussiennes indépendantes standards (Les entrées sont i.i.d avec une loi $N(0, 1)$).

. $G^2(m, n)$ c'est l'ensemble des matrices $m \times n$ complexes gaussiennes indépendantes standards (Les entrées sont i.i.d avec partie réelle et imaginaires indépendantes de loi $N(0, 1)$).

. $G^4(m, n)$ c'est l'ensemble des matrices $m \times n$ quaternions gaussiennes indépendantes standards (Les entrées sont i.i.d avec une distribution $N(0, 1)$).

Une propriété limportante de la loi gaussienne multivariée (soit réelle, complexe ou quaternions) est l'invariance orthogonales.

Ensemble de matrices de Wishart Nous introduisons les trois ensembles de Wishart suivants:

Definition 1: *L'ensemble des matrices réelles de Wishart ($W(m,n), m \leq n$) est formé de matrices symétriques W $m \times m$ obtenues comme $W = AA^T$ où A est une matrice dans l'ensemble $G(m,n)$.*

Definition 2: *L'ensemble des matrices complexes de Wishart ($W^2(m,n), m \leq n$) est formé de matricess hermitiennes $m \times m$ obtenues comme $W = AA^T$ où A est une matrice dans l'ensemble $G_2(m,n)$.*

Definition 3: *L'ensemble des matrices quaternions de Wishart ($W^4(m,n), m \leq n$)* où W est *une matrice auto-duale $m \times m$ qui peut être obtenue par AA^T et $A \in G_4(m,n)$.*

Ensembles d'Hermite La densité conjointe des valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1}^n$ d'une matrice d'Hermite pour les trois ensembles Gaussiens est (cf [27], chap 1):

$$f_\beta(\lambda) = C_H^\beta \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i^2/2} \tag{1.58}$$

où

$$C_H^\beta = (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+\beta/2)}{\Gamma(1+j\beta/2)} \tag{1.59}$$

Dans les années 80, ce sujet a été étudié par des physiciens et ensuit un ensemble de travaux sur le sujet à l'aide de l'algébre combinatorialists. Des problèmes en combinatoire ont été liés à la théorie des matrices aléatoires (pour les statistiques du Groupe d'experts et GUE). Il s'agit notamment de la plus longue séquence de plus en plus une permutation aléatoire (Baik, Deift, Johansson [4], Okounkov [48]), les partitions planes (Borodin et Olshanski [8]), les carrés magiques (Diaconis et Gamburd [19]), les modèles de croissance (Gravner, Tracy et Widom [23]), et le comptage des cartes de sur les surfaces conformes (Goulden et Jackson [22]).

Ensembles de Laguerre (Wishart) et Jaccobi Les ensembles de Wishart ont été introduits par les statisticiens. A partir de 1928 [59], a proposé un modèle de matrices aléatoires connu comme le modèle de Wishart réel.

L'étude des modèles de Wishart ont progressés vers la fin des années 1960 et 1970, en prenant une direction différente de celle de l'étude des ensembles gaussiens. La découverte des densités de limitation de niveau est venu dans le document de Marcenko et Pastur [40], dans un contexte encore plus large que les modèles de Wishart.

Un travail de A.T James [29], sur les lois de Wishart réelles, décrite par les polynômes zonal, donne une étude statistiques des valeurs propres en termes de fonctions spéciales. Constantin [10] a généralisé les fonctions hypergéométriques univariées à l'aide des polynômes zonaux. Finalement. Ils sont maintenant connus comme sous les polynômes de Jack [28].

Une partie importante des statistiques des valeurs propres en termes de fonctions spéciales a été faite par Muirhead [46] et Chikuse [9]. Muirhead [45] est un ouvrage de référence pour l'étude des ensembles Wishart réels et complexes.

Dans l'étude des valeurs propres asymtotiques des ensembles de Wishart, nous signalons les travaux de Krishnaiah et Chang [36], Silverstein [51], et Edelman [16]. Récemment, Johnstone [33] et Johansson [32] ont donné un lien très intéressant entre les ensembles gaussiens et de Wishart: la distribution de la plus grande valeur propre dans les deux cas est donnée par la loi de Tracy-Widom (F_1 pour le cas réel, F_2 des complexe, voir [53, 54, 55]).

La densité conjointe aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1}^n$ d'une matrice de Laguerre $A = X^*X$ (ie modèle des matrices Wishart $m \times n$) où X est une matrice $m \times n$,et X^* la transposé de X, est donné par suit:

Ensembles d'Hermite

$$f_\beta(\lambda) = C_L^{\beta,a} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{a-p} e^{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2/2} \tag{1.60}$$

avec $a = \frac{\beta}{2}n$ et $p = 1 + \frac{\beta}{2}(m-1)$.aussi,$\beta = 1$ pour le cas reel,$\beta = 2$ cas complex et $\beta = 4$ cas quaternions.

Le constant $C_L^{\beta,a}$ est definie comme suit:

$$C_L^{\beta,a} = 2^{-ma} \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(1+\beta/2)}{\Gamma(1+j\beta/2)\Gamma(a-\beta(m-j)/2)} \tag{1.61}$$

Nous mentionnons ici les ensembles $\beta-$Jacobi. Ils sont mieux connus dans la littérature comme des ensembles de Jacobi pour une matrice $A = X^*X/(X^*X + Y^*Y)$, ou X et Y sont des matrices $m \times n_1$, $m \times n_2$ respéctivement, X^* est la matrice conjuguée de X.

La fonction de densite joint aux valeurs propres est donné comme suit.

Ensemble de Jacobi

$$f_\beta(\lambda) = C_J^{\beta,a,b} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{a-p} (1-\lambda_i)^{b-p} \tag{1.62}$$

avec $a = \frac{\beta}{2}n_1$,$b = \frac{\beta}{2}n_2$ et $p = 1 + \frac{\beta}{2}(m-1)$,aussi, $\beta = 1$ pour le cas reel, $\beta = 2$ cas complex et $\beta = 4$ cas quaternions.

La constante $C_J^{\beta,a,b}$ est definie comme suite;

$$C_J^{\beta,a,b} = \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(1+\beta/2)\Gamma(a+b-\frac{\beta}{2}(m-j))}{\Gamma(1+j\beta/2)\Gamma(a-\frac{\beta}{2}(m-j))\Gamma(b-\frac{\beta}{2}(m-j))} \tag{1.63}$$

Les cas JACOBI réel et complexe (ie $\beta = 1$ et 2) ont été étudiés par les statisticiens pour $\beta = 1$ et $\beta = 2$, voir [45]). Pour des raisons similaires à celles décrites à la section (1), tout au long de cette mémoire, nous nous référerons à des ensembles Wishart (pour β général ou particulier) comme des ensembles de Laguerre.

2.2 β -ensembles et leurs distributions

L'un des premiers chercheurs à considérer les valeurs générales comme la puissance du facteur de répulsion $\prod_{I \neq J} |\lambda_i - \lambda_j|$ est Selberg [50]. Un de ses plus importantes contributions à la théorie des matrices aléatoires est de calculer les constantes de normalisation pour la distribution de β-Jacobi. De ce calcul, on peut obtenir beaucoup d'autres resultats par changements de variables et des limites (voir [42]). Dans le début des années 80, Askey et Richards [3] sont simplifiés la preuve, et quelques années plus tard, Aomoto a généralisé l'intégrale de Selberg [2]. Les premiers qui ont consédiré les polynômes de Jacobi multivariés comme polynômes de fonctions propres (formes de Jacobi de l'opérateur de Schrödinger) sont Beerends et Opdam [7]. Lasalle [37, 38, 39] a poussé l'étude aux polynômes orthogonaux à plusieurs variables et les fonctions propres des opérateurs de Schrödinger, en définissant et en décrivant les polynômes de Laguerre Hermite multivariée comme limite du cas de Jacobi. Yan [60] a généralisé les polynômes de Laguerre pour β et n (le nombre de variables) égal à 2. Par la suite Forrester et Baker [5] ont prouvé l'orthogonalité des polynômes d'Hermite et de Laguerre multivariées avec des distributions générales .

Enfin, deux résultats importants ont été prouvés par Johansson pour β général. Il a montré que les valeurs propres des ensembles $\beta-$Hermite [31] et $\beta-$Jacobi [30] obéissent à un théorème central limite .

Le tableau suivant résume les lois des éléments d'une matrice dans chacun des deux ensembles.

Matrice d'Hermite $n \in \mathbb{N}$	$H_\beta \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-2)\beta} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \chi_{2\beta} & N(0,2) & \chi_\beta \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_\beta & N(0,2) \end{pmatrix}$
Matrice de Laguerre $n \in \mathbb{N}$ $a > \beta(m-1)$	$L_\beta = B_\beta B_\beta^T$ avec $B_\beta \sim \begin{pmatrix} \chi_{2a} & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_{\beta(m-1)} & \chi_{2a-\beta} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \chi_\beta & \chi_{2a-\beta(m-1)} \end{pmatrix}$

Tableau 1.1: Lois des éléments des matrices aléatoires.

Nous soulignons que dans cette mémoire nous avons systématiquement traité $\beta = 1,\ 2,\ 4$ dans un cas unique, en offrant des formules qui dépendent de β, plutôt que d'énumérer trois cas différents.

2.2.1 Remarque:

Cette propriété, comme nous le verrons plus loin, est la clé de l'analyse des matrices aléatoires qui sont construites en utilisant la distribution gaussienne.

La distribution χ_r est connue comme la racine carrée de la distribution χ_r^2. Si le paramètre r est un entier positif, une seule définition de χ_n est donnée par $||G(n,1)||^2$, en d'autres termes, le 2-norme d'un vecteur d'indépendance normales standard. La fonction de densité de probabilité de χ_r est:

$$f_r(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}-1}\Gamma(r/2)} x^{r-1} e^{-x^2/2} \tag{1.64}$$

où r est un nombre réel (le nombre de «degrés de liberté»). Il n'est pas difficile de voir qu'une variable aléatoire x avec distribution χ_r a une moyenne:

$$\mu = \sqrt{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(r+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}r)} \tag{1.65}$$

et variance:

$$\sigma^2 = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2}r)\Gamma(\frac{1}{2}r+1) - \Gamma^2(\frac{1}{2}(r+1))}{\Gamma^2(\frac{1}{2}r)} \tag{1.66}$$

3 Chapitre

3.1 Loi de matrice aléatoire et des valeurs propres

3.1.1 Densité de matrice aléatoire

Il s'agit de donner la densité $p(H)$ d'une matrice H de l'ensemble GUE. Nous allons voir que les deux axiomes d'invariance et de l'indépendance cités ci-dessus déterminent de manière unique la forme de la densite $p(H)$.

La condition d'invarianc implique que $p(H)$ dépend d'un nombre fini des puissances de traces de H.

Le lemme suivant de Weyl (1946) montre ce fait .

Lemme 2.1 ([42], p 59): *Tous les invariants d'une matrice* H, $(N \times N)$ *sous les transformations de similarité unitaire suivantes*

$$H \longrightarrow H' = AHA^{-1} \tag{2.1}$$

où A est une matrice unitaire *peut être exprimée en termes de N premières puissances de traces de* H.

En fait, la trace de la j-eme puissance de H est la somme des puissances j de ses valeurs propres λ_k, $k = 1, 2, ..., N$,de H.

$$trH^j = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^j \equiv p_j \tag{2.2}$$

Ce fait est bien connu: tout opérateur symétrique de valeurs propres $(\lambda_k)_{k=1}^{N}$ peut être exprimé en fonction de N premiers termes

de p_j, $j = 1, ..., N$ (voir Macdonald 1979) ou (Mehta 1989).

Comme invariant d'une matrice H, $(N \times N)$ sous les transformations T_U on peut citer la loi de H.

Nous allons remarquer que par le Lemme suivant et la condition d'indépendance impliquent qu'on ne conserve que les traces des deux premières puissances.

Lemme 2.2 ([42], p 60): *Si trois fonctions* $f_k(x), k = 1, 2, 3$ *sont continues et dérivables et satisfont à l'équation*

$$f_1(xy) = f_2(x) + f_3(y) \tag{2.3}$$

alors ils sont nécessairement de la forme $a \ln x + b_k, k = 1, 2, 3$ *avec* $b_1 = b_2 + b_3$.

Preuve: En différenciant (2.3) par rapport à x, nous avons:

$$yf_1'(xy) = f_2'(x)$$

Par intégration par rapport à y ceci donne:

$$\frac{1}{x}f_1(xy) = f_2'(x)\ln y + \frac{1}{x}g(x) \tag{2.4}$$

où $g(x)$ est une fonction arbitraire. En remplaçant $f_1(xy)$ de (2.4) en (2.3),on obtient:

$$xf_2'(x)\ln y + g(x) - f_2(x) = f_3(y) \tag{2.5}$$

Donc le côté gauche de (2.5) doit être indépendant de x. Ce qui est possible uniquement si:

$$xf_2'(x) = a \quad \text{et} \quad g(x) - f_2(x) = b_3$$

c'est uniquement si:

$$f_2(x) = a\ln x + b_2 = g(x) - b_3$$

où a, b_2 et b_3 sont des constantes arbitraires.
Maintenant (2.5) donne:

$$f_3(y) = a\ln y + b_3$$

Enfin (2.3) donne :

$$f_1(xy) = a\ln(xy) + b_2 + b_3$$

□

Nous allons montrer le théorème suivant qui donne la forme de la densité $p(H)$ de l ensemble GUE.

Théoreme *2.1(Porter et Rosenzweig [42], p 63):* *Dans les trois ensembles de matrices aléatoires , la densité $p(H)$ admet l'expression suivante*

$$p(H) = exp(-atrH^2 + btrH + c) \tag{2.6}$$

où *a est un réel positif ,b et c sont des réels quelconques.*

Preuve: Nous examinons d'abord les conséquences de l'indépendance des différentes composantes de H.

Considérons un exemple de transformation particulière T_U définie par :

$$H \longmapsto T_U(H) = H' = UHU^{-1} \tag{2.7}$$

où U est une matrice dependant d'un paramètre θ donné par

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Dans l'éxemple des quaternions, U est donnée par (avec N pair),

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta + e_2 \sin\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Dans les deux cas la matrice U est orthogonale, symplectique et unitaire.

La différenciation de (2.7) avec $H' = UHU^{-1} = UHU^T$, par rapport à θ donne:

$$\frac{\partial H'}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} HU^T + UH \frac{\partial U^T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} U^T H' + H'U \frac{\partial U^T}{\partial \theta} \tag{2.10}$$

Nous déduisons :

$$\frac{\partial H'}{\partial \theta} = A^T H' + H'A \quad = \; H'A \; - AH' \tag{2.11}$$

ou $A := U\frac{\partial U^T}{\partial \theta}$ et $A^T = -A$

Nous obtenons de (2.8) ou (2.9) nous obtenons

$$A = U\frac{\partial U^T}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Dans le cas des quaternions, A est diagonale et elle vaut

$$A = \begin{bmatrix} -e_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Soit $H=(H_{ij})$ une matrice aléatoire de l'éspace Λ_{2G} de fonction de densité

$$p\left(H\right)=\prod_{(\alpha)}\prod_{j\leq k} f_{kj}^{(\alpha)}\left(H_{kj}^{(\alpha)}\right)=p(H\prime) \quad = \quad \prod_{(\alpha)}\prod_{j\leq k} f_{kj}^{(\alpha)}\left(H_{kj}^{'(\alpha)}\right) \tag{2.14}$$

car nous savons qu'elle est invariante sous la transformation T_U pour toute U matrice unitaire. La dérivée de $log\ p(H)$ par rapport à θ est nulle car H ne dependant pas de θ . C'est a dire :

$$\sum_{(\alpha),j\leq k}\frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}}\frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{\prime(\alpha)}}\frac{\partial H_{kj}^{\prime(\alpha)}}{\partial\theta}=0 \tag{2.15}$$

Ecrivons cette équation explicitement pour le cas unitaire. Les équations (2.11) et (2.15) donnent:

$$\sum_{(\alpha),j\leq k}\frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}}\frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{\prime(\alpha)}}\left(-AH'+H'A\ \right)_{kj}^{(\alpha)}=0$$

$$-\sum_{(\alpha),j\leq k}\frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}}\frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{\prime(\alpha)}}\left(AH'\right)_{kj}^{(\alpha)}+\sum_{(\alpha),j\leq k}\frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}}\frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{\prime(\alpha)}}\left(H'A\right)_{kj}^{(\alpha)}=0$$

Par (2.11) on a $\frac{\partial H_{kj}^{\prime(\alpha)}}{\partial\theta}=\left(H'A\ -AH'\right)_{kj}^{(\alpha)}$
Calculons

$$\begin{aligned} AU &= \begin{bmatrix} -e_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e_2\cos\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et encore

$$UA = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e_2\cos\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

remarquons que $AU = UA$

du fait que $tr(AH') = tr(AUHU^T) = tr(UAHU^T) = tr(AH)$

car pour toutes matrices X et U, avec U une matrice unitaire on a $tr(UXU^T) = tr(X)$

Donc $p(AH) = p(AH\prime)$ ce qui donne.

$$-\sum_{(\alpha),j\leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{(\alpha)}} (AH)_{kj}^{(\alpha)} + \sum_{(\alpha),j\leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{(\alpha)}} (HA)_{kj}^{(\alpha)} = 0$$

ce qui implique

$$\sum_{(\alpha),j\leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{(\alpha)}} (HA - AH)_{kj}^{(\alpha)} = 0$$

$$HA = \begin{pmatrix} H_{12} & -H_{11} & 0 & 0 \\ H_{22} & H_{21} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N2} & (-1)^{N} H_{N1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AH = \begin{pmatrix} -H_{21} & -H_{22} & \cdots & -H_{2N} \\ H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$HA - AH = \begin{pmatrix} 2H_{12} & -H_{11} + H_{22} & H_{23} & \cdots & H_{2N} \\ -H_{11} + H_{22} & -2H_{12} & -H_{13} & \cdots & -H_{1N} \\ H_{32} & H_{31} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N2} & (-1)^N H_{N1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} := G_{jk}$$

Comme H est hermétiènne; alor H'est aussi hermetiènne; ce qui donne G_{jk} matrice hermetiènne symétrique

Pour $j \leq k$,nous obtenons la matrice particulière :

$$G_{jk}^{(\alpha)} := \begin{pmatrix} 2H_{12}^{(0)} & -H_{11}^{(0)} + H_{22}^{(0)} & H_{23}^{(\alpha)} & \cdots & H_{2N}^{(\alpha)} \\ 0 & 2H_{12}^{(0)} & H_{13}^{(\alpha)} & \cdots & H_{1N}^{(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

D'ou de (2.15) nous obtenons

$$\sum_{(\alpha),j\leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}'^{(\alpha)}} G_{jk}^{(\alpha)} = 0$$

Remarquons que $G_{jk}^{(\alpha)} = 0$ pour $j \geq 3$, par suite :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{f_{11}^{(0)}} \frac{\partial f_{11}^{(0)}}{\partial H_{11}^{(0)}} - \frac{1}{f_{22}^{(0)}} \frac{\partial f_{22}^{(0)}}{\partial H_{22}^{(0)}} \right) (2H_{12}'^{(0)}) - \frac{1}{f_{12}^{(0)}} \frac{\partial f_{12}^{(0)}}{\partial H_{12}^{(0)}} (H_{11}^{(0)} - H_{22}^{(0)}) \right] \\ & + \sum_{k=3}^{N} \left(\frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}} H_{2k}^{(0)} - \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}} H_{1k}^{(0)} \right) \\ & \sum_{k=3}^{N} \left(\frac{1}{f_{1k}^{(1)}} \frac{\partial f_{1k}^{(1)}}{\partial H_{1k}^{(1)}} H_{2k}^{(1)} - \frac{1}{f_{2k}^{(1)}} \frac{\partial f_{2k}^{(1)}}{\partial H_{2k}^{(1)}} H_{1k}^{(1)} \right) \\ = \quad & 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

où le premier terme correspond aux éléments diagonaux, le second et le troisième corespondent aux éléments parties réelles et parties imaginaires des éléments hors diagonaux. Les accolades du côté gauche de l'équation (2.16) dépendent de variables aléatoires appartenant à des ensembles disjoints et sont mutuellement

independantes et leur somme est égale à zéro. Donc chacun terme doit être une constante. En effet pour simplifier si on prend $Z_1, Z_2, ...Z_m$ des variables

aléatoires independantes noncentrées telles que $Z_1 + Z_2 + .. + Z_m = 0$ alors on

a $Z_1 = c_1, Z_2 = c_2, ...\mathrm{Z}_m = c_m$ (Montrons cela par récurrence : pour $m = 2$,

$Z_1 + Z_2 = 0$ alors $Z_1 = -Z_2$ comme elles sont independantes donc $Z_1 = c_1, Z_2 = -c_1$. On suppose que cela est vrai pour k : Pour $Z_1 + Z_2 + .. + Z_k = 0$ implique

$Z_1 = c_1, Z_2 = c_2, ...Z_k = c_k$.

Pour $k + 1$ on a : $Z_1 + Z_2 + .. + Z_{k+1} = 0 = U_1 + Z_{k+1} = 0$ avec U_1 et Z_{k+1}

des variables aléatoires independantes. Par suite $U_1 = k_1 et\ Z_{k+1} = -k_1$. D 'où le resultat.

Ainsi

$$\frac{1}{H_{1k}^{(0)}}\frac{1}{f_{1k}^{(0)}}\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}} = \frac{1}{H_{2k}^{(0)}}\frac{1}{f_{2k}^{(0)}}\frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}} = cst$$

$$\frac{1}{H_{1k}^{(1)}}\frac{1}{f_{1k}^{(1)}}\frac{\partial f_{1k}^{(1)}}{\partial H_{1k}^{(1)}} = \frac{1}{H_{2k}^{(1)}}\frac{1}{f_{2k}^{(1)}}\frac{\partial f_{2k}^{(1)}}{\partial H_{2k}^{(1)}} = cst$$

Par exemple

$$\frac{1}{f_{1k}^{(0)}}\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}}H_{2k}^{(0)} - \frac{1}{f_{2k}^{(0)}}\frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}}H_{1k}^{(0)} = C_k^{(0)} \qquad (2.17)$$

En divisant les deux côtés de (2.17) par $H_{1k}^{(0)}H_{2k}^{(0)}$, nous obtenons

$$\frac{1}{H_{1k}^{(0)}}\frac{1}{f_{1k}^{(0)}}\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}} - \frac{1}{H_{2k}^{(0)}}\frac{1}{f_{2k}^{(0)}}\frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}} = \frac{C_k^{(0)}}{H_{1k}^{(0)}H_{2k}^{(0)}}$$

On définit les trois fonctions suivantes $f_1(x) = C_k^{(0)}x, f_2(x) = -\frac{1}{f_{1k}^{(0)}}\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}}x, f_3(x) = \frac{1}{f_{2k}^{(0)}}\frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}}x.$

Donc

$$f_1(\frac{1}{H_{1k}^{(0)}}\frac{1}{H_{2k}^{(0)}}) = \frac{C_k^{(0)}}{H_{1k}^{(0)}H_{2k}^{(0)}},$$

$$f_2(\frac{1}{H_{1k}^{(0)}}) = \frac{1}{H_{1k}^{(0)}}\frac{1}{f_{1k}^{(0)}}\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}}$$

et

$$f_3(\frac{1}{H_{2k}^{(0)}}) = -\frac{1}{H_{2k}^{(0)}}\frac{1}{f_{2k}^{(0)}}\frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}}$$

Comme les v.a. $H_{1k}^{(0)}$ et $H_{2k}^{(0)}$ sont réelles gaussiennes on déduit de la relation précédente : $\forall x, y\ ,\ f\ _1(xy) = f_2\,(x) + f_3\,(y)$. Par le lemme 4.2 on conclut que $f_k(x) = \alpha \ln x + b_k, k = 1, 2, 3.$

Mais $f_1(x) = C_k^{(0)}x = \alpha \ln x + b_1,\ f_2(x) = \beta x = \alpha \ln x + b_2$

et $f_3(x) = \gamma x = \alpha \ln x + b_3$.Donc necéssairement $C_k^{(0)} = \alpha = b_1 = 0$ et aussi du lemme on a $b_1 = b_2 + b_3 = 0$ et donc $b_2 = -b_3$. Par suite

$$b_2 + b_3 = -\frac{1}{H_{1k}^{(0)}}\frac{1}{f_{1k}^{(0)}}\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}} + \frac{1}{H_{2k}^{(0)}}\frac{1}{f_{2k}^{(0)}}\frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}} = 0$$

ou encore en choisissant $b_2 > 0$

$$-b_2 = b_3 = \frac{1}{H_{1k}^{(0)}} \frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial H_{1k}^{(0)}} = \frac{1}{H_{2k}^{(0)}} \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial H_{2k}^{(0)}} = cste =: -2a$$

ou a est une constante positive avec $a = b_2/2$.
D'où

$$\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{f_{1k}^{(0)}} = -2aH_{1k}^{(0)} \partial H_{1k}^{(0)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{f_{2k}^{(0)}} = -2aH_{2k}^{(0)} \partial H_{2k}^{(0)} \tag{2.18}$$

Ce qui donne par intégration par raport à $H_{1k}^{(0)}$ de la première equation :

$$f_{1k}^{(0)}\left(H_{1k}^{(0)}\right) = \exp\left[-a\left(H_{1k}^{(0)}\right)^2\right] \tag{2.19}$$

Pour les deux autres crochets de (2.16), leur resolutions donnent des solutions similaires. Maintenant, les éléments hors diagonaux s'expriment comme des carrés dans l'exponentielle et vu que les invariants s'expriment en tèrmes de traces des puissances de H (Lemme 4.1). La densité $p(H)$ est une exponentielle contenant des traces de H au plus de puissance deux car :

$$\begin{aligned}
p(H) &= \prod_{i\leq j} \exp\left[-a\left(H_{ij}^{(0)}\right)^2\right] \prod_{i<j} \exp\left[-a\left(H_{ij}^{(1)}\right)^2\right] \\
p(H) &= \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-a\left(H_{ii}^{(0)}\right)^2\right] \prod_{i<j} \exp\left[-a\left(H_{ij}^{(0)}\right)^2\right] \prod_{i<j} \exp\left[-a\left(H_{ij}^{(1)}\right)^2\right] \\
p(H) &= \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-a\left(H_{ii}^{(0)}\right)^2\right] \prod_{i<j} \exp\left[-a\left[\left(H_{ij}^{(0)}\right)^2 + \left(H_{ij}^{(1)}\right)^2\right]\right]
\end{aligned}$$

Comme $p(H)$ est un invariant par des transformations plus générales que celles que nous avons considéré ici, on pourrait penser que la forme de $p(H)$ donnee ici est plus limitée. Non cela suffit d'avoir jusqu'a trH^2 car la densité obtenue s'exprime comme produit de fonctions des tous les éléments de la matrice :

$$\begin{aligned}
p(H) &= e^c \prod_{j=1}^{N} \exp\left(bH_{jj}^{(0)}\right) \prod_{j\leq k} \exp\left[\left(-aH_{jk}^{(0)}\right)^2\right] \prod_{\alpha=0}^{1} \prod_{j<k} \exp\left[\left(-aH_{jk}^{(\alpha)}\right)^2\right] \\
&= exp(-atrH^2 + btrH + c)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Par ailleurs, nous avons besoin que la densité $p(H)$ doit être normalisable. Le coéfficient a est un réel positif et b et c sont des réels. □

Remarque: 1. Dans la discussion qui précède nous avons insisté sur la condition d'indépendance des différentes composantes de H. Cette indépendance est importante car elle donne une forme de $p(H)$ assez simple donnée dans le théoreme 4.3. Donc elle permet des calculs analytiques ulterieurs plus simples.

2. Si nous gardons que la première condition: $p(H)$ est invariante par la transformation $H \longrightarrow UHU^{-l}$, alors $p(H)$ peut être n'importe quelle fonction des traces des puissances de H. Nous étudions particuliermment le cas lorsque $p(H) = \exp(-trV(H))$, où $V(x)$ est un polynôme de degré pair avec le coefficient du plus haut degre positif.

Dans les trois ensemles de matrices aléatoires précédents , on peut remarquer d'après le théorème 4.3 que:

$$p(H) = C_{n,\beta} e^{-\frac{\beta n}{4} trH^2}$$

avec $\beta = 1$ $\left(C_{n,1} = C_{GOE(n)}\right)$ pour l'ensemble GOE, $\beta = 2$ $\left(C_{n,2} = C_{GUE(n)}\right)$ pour l'ensemble GUE et $\beta = 4$ $\left(C_{n,4} = C_{GSE(n)}\right)$ pour 'ensemble GSE.

3.1.2 Densité des valeurs propres

Introduction: Dans cette section, nous donnons les formules des densités conjointes des valeurs propres de matrices dans les trois ensembles gaussiens (GOE, GUE, GSE) que nous avons énumérés dans la section précédente (voir [42], [45]) en particulier les densités des valeurs propres des deux types d'ensembles (Hermite " gaussien" et Laguerre " Wishart") .

Avant nous aurons besoin de définir la fonction Gamma multivariée pour β arbitraire.

$$\Gamma_n^{\beta}(x) := \pi^{n(n-1)\beta/4} \prod_{i=1}^{n} \Gamma(x + \frac{\beta}{2}(i-1))$$

De même que la fonction Gamma univariée se généralise en multivariée, le "décalé" factoriel ou symbole de Pochhammer defini par : $(x)_k := \Gamma(x+k)$, se généralise en multivarié le décalé factoriel en :.

$$(x)_k^{\beta} := \prod_{i=1}^{k} \Gamma(x - \frac{\beta}{2}(i-1)) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma(x - \frac{\beta}{2}(i-1) + ki)}{\Gamma(x - \frac{\beta}{2}(i-1))}$$

Dans cette section, nous allons donner la densité conjointe des valeurs propres d'une matrice H où de chacun des trois ensembles GOE, GUE, GSE.

Notre clairsemée (bi-diagonales, tri-diagonale) modèles de matrices sont définis plus loin dans cette thèse à l'utilisation de la distribution χ. Toutefois, nous avons seulement besoin de la gaussienne pour définir les deux listes suivantes qui captent les deux types de matrices aléatoires complètes, nous allons utiliser, à partir de maintenant; à titre de construction, tous les ensembles de la matrice ci-dessous sont orthogonalement invariants.

3.1.3 Ensemble orthogonal gaussien (GOE)

Soit $H = (H_{ij})_{i,j=1}^{N}$ une matrice aléatoire réelle symétrique de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_N$ distinctes.

Pour des matrices réelles symétriques $(N \times N)$, le nombre des variables aléatoires réelles indépendantes déterminées par les éléments H'_{ij} $\{i, j = 1, 2, ..., N\}$ est $N(N+1)/2$ (que nous trouvons avec des H_{ij} où $i \leq j$)

Le nombre η de paramètres hors diagonale est calculé par :

$$\eta = \frac{1}{2}N(N+1) - N = \frac{1}{2}N(N-1) \tag{2.21}$$

La densité de probabilité des valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_N$ est obtenue à l'aide de la formule (2.6) en utilisant l'expression des différents éléments de H' en fonction des N valeures propres $(\lambda_i)_{i=1}^{N}$ situées sur la diagonale et à l'aide d'autres variables indépendentes $(\theta_j)_{j=1}^{\eta}$ qui complètent avec les $\{\lambda_i; i = 1, 2, ..., N\}$ la forme de H'.

Nous utilisons la transformation suivante:

$$\begin{array}{rcl} T_W & : & \Lambda_{1G} \longrightarrow \Lambda_{1G} \\ H & \mapsto & T_W(H) = H' = WHW^t \end{array}$$

où W est une matrice réelle orthogonale. La diagonale de H' est composée des valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_N$ et les éléments hors diagonale sont les variables aléatoires $\theta_j, (j = 1, ..., \eta)$ .Les variables aléatoires $(\lambda_i)_{i=1}^{N}$ et $(\theta_j)_{j=1}^{\eta}$ sont mutuellement independantes

D'autre part, on utilise une autre transformation S definie comme suit:

$$S : \Lambda_{1G} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+\eta}$$

$$H' \longmapsto (\lambda_1, ..., \lambda_N, \theta_1, ..., \theta_\eta)$$

Par ailleurs on a

$$trH^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \quad \text{et} \quad trH = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tag{2.22}$$

La proposition suivante donne la densité conjointe des valeurs propres.

Proposition ([42], p66): *La densité conjointe des valeurs propres ($\lambda_1, ..., \lambda_N$) d'une matrice dans l'ensemble GOE est donnée par :*

$$p(\lambda_1, .., \lambda_N) = \prod_{i<j} |\lambda_j - \lambda_i| \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} (a\lambda_i^2 - b\lambda_i - c) \right]$$

ou encore

$$p(x_1,..,x_N) = C_{N,1}\prod_{i<j}|x_j - x_i|\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right]$$

Preuve: La densité conjointe du vecteur aléatoire ($\lambda_1, ..., \lambda_N$, $\theta_1, ..., \theta_\eta$) se déduit de (2.6) comme suit:

$$\begin{aligned} p(H) &= p(H') \\ &= \exp(-atrH^{'2} + btrH' + c) \\ &= \exp(-a\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 + b\sum_{i=1}^{N}\lambda_i + c)\,|J(\lambda,\theta)| \\ &= p(\lambda_1, ..., \lambda_N, \theta_1, ..., \theta_\eta) \end{aligned} \tag{2.23}$$

où $J(\lambda, \theta)$ est la matrice Jacobienne suivante

$$J(\lambda,\theta) = \left(\frac{\partial(H'_{11}, H'_{12}, ..., H'_{NN})}{\partial(\lambda_1, ..., \lambda_N, \theta_1, ..., \theta_\eta)}\right) \tag{2.24}$$

Ainsi la densité conjointe des valeurs propres $\lambda_i\{i = 1, 2, ..., N\}$ peut être obtenue en intégrant (2.23) sur les parametres $\theta_1, ..., \theta_\eta$. Il est généralement possible de choisir ces parametres afin que le jacobien (2.24) devienne un produit d'une fonction des $\{\lambda_i, i = 1, 2, ..., N\}$ et une fonction des $\{\theta_j, j = 1, ..., \eta\}$.

Si c'est le cas, l'intégration donne la densité conjointe comme un produit avec l'exponentielle (2.23). La fonction f de λ_i est une constante. La constante peut être absorbée par c dans l'exponentiel.

Pour définir les parametres θ_j (voir Wigner 1965), nous rappelons que toute matrice symétrique réelle H est diagonalisable par une matrice orthogonale U :

$$H' = UQU^{-1} = \quad UQU^T \tag{2.25}$$

(La décomposition spéctrale de la matrice H')

où Q est une matrice diagonale ($\lambda_1, ..., \lambda_N$) disposés dans un ordre croissant: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..... \leq \lambda_N$.et U est une matrice orthogonale réelle

$$UU^T = U^TU = 1 \tag{2.26}$$

Les colonnes de U sont les vecteurs propres normalisés de H'. Ces vecteurs propres sont choisis orthogonaux. Pour définir complètement U , nous devons exiger des vecteurs propres que la première composante non nulle soit positive. Ainsi, U dépend de $N(N-l)/2$ paramètres réels . Si H' a des valeurs propres multiples, des conditions supplémentaires sont nécessaires pour fixer$U$ complètement (Il n'est pas nécessaire de les préciser, car elles ne s'appliquent que dans les "regions de faible dimension" qui sont sans rapport avec la densité de probabilité). En tout cas ces conditions appropriées sont appliquées à U de sorte qu'elles soient particulierement caracterisées par les $N(N-l)/2$ parametres (θ_j). Une fois cela fait, la matrice H' détermine completement les matrices

Q et U . Elle determine également les λ_i et les θ_j de facon unique par les mêmes conditions précedentes. Inversement, λ_i et θ_j sont determinés completement par les matrices U et Q, donc par (2.25) tous les éléments de la matrice H' sont définis.

En différenciant $U^T U = 1$ par-raport à θ_j, nous obtenons

$$\frac{\partial U^T}{\partial \theta_j} U + U^T \frac{\partial U}{\partial \theta_j} = 0 \tag{2.27}$$

Remarquons que les deux tèrmes de (2.27) sont des conjuguées hermitiens .
Posons

$$S^{(j)} := U^T \frac{\partial U}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial U^T}{\partial \theta_j} U \ = -\left(U^T \frac{\partial U}{\partial \theta_j} \right)^T \tag{2.28}$$

cette matrice est antisymetrique.
De plus, a partir de (2.25) on a :

$$\frac{\partial H'}{\partial \theta_j} = \frac{\partial U}{\partial \theta_j} Q U^T + U Q \frac{\partial U^T}{\partial \theta_j} \tag{2.29}$$

puisque $Q = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$ et donc

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_j} = 0$$

En multipliant à gauche (2.29) par U^T ensuite à droite par U , nous obtienons:

$$U^T \frac{\partial H}{\partial \theta_j} U = S^{(j)} Q - Q S^{(j)} \tag{2.30}$$

Concernant l'élément (α, β) de la matrice de (2.30) il s'écrit :

$$\sum_{i,k} U_{i\alpha} \frac{\partial H_{ik}}{\partial \theta_j} U_{k\beta} = S^{(j)}_{\alpha\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha) \tag{2.31}$$

De la même manière, en dérivant (2.25) par-rapport à λ_γ ($\gamma = 1, ..., N$) ,nous obtenons:

$$\frac{\partial H'}{\partial \lambda_\gamma} = U \frac{\partial Q}{\partial \lambda_\gamma} U^T$$

En multipliant cette équation par U^T à gauche et par U à droite, nous obtenons:

$$U^T \frac{\partial H'}{\partial \lambda_\gamma} U = \frac{\partial Q}{\partial \lambda_\gamma}$$

Concernant l'élément (α, β) de cette matrice est:

$$\sum_{i,k} U_{i\alpha} \frac{\partial H'_{ik}}{\partial \lambda_\gamma} U_{k\beta} = \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_\gamma} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} \tag{2.32}$$

car Q est diagonale .

La matrice jacobiènne de (2.24) peut etre partitionnée sous la forme suivante $:H' = (H'_{ik}),\ i,j = 1,..,N$

$$J(\lambda,\theta) = \left(\frac{\partial H'}{\partial(\lambda_1,....,\lambda_N,\theta_1,....,\theta_\eta)} \right) = \begin{pmatrix} (\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \lambda_\gamma}) & (\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \lambda_\gamma}) \\ (\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \theta_j}) & (\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \theta_j}) \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

où la matrice $\left(\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \lambda_\gamma}\right)_{i,\gamma}$($N \times N$) est définie par :

$$\left(\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \lambda_\gamma}\right)_{i,\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H'_{11}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{11}}{\partial \lambda_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H'_{NN}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{NN}}{\partial \lambda_N} \end{pmatrix}$$

et la matrice $\left(\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \theta_j}\right)_{j,i}$$(N\,(N-1)\,/2 \times N)$ est définie par

$$\left(\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \theta_j}\right)_{j,i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H'_{11}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{NN}}{\partial \theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H'_{11}}{\partial \theta_\eta} & \cdots & \frac{\partial H'_{NN}}{\partial \theta_\eta} \end{pmatrix}$$

et la matrice $\left(\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \lambda_\gamma}\right)_{\gamma,i=1,..,N-1,k=i+1,..N}$ $(N \times N\,(N-1)\,/2)$ est définie par

$$\left(\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \lambda_\gamma}\right)_{\gamma,i=1,..,N-1,k=i+1,..N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H'_{12}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{1N}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial H'_{23}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{2N}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{(N-1),N}}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial H'_{12}}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial H'_{1N}}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial H'_{23}}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial H'_{2N}}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial H'_{(N-1),N}}{\partial \lambda_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial H'_{12}}{\partial \lambda_N} & \cdots & \frac{\partial H'_{1N}}{\partial \lambda_N} & \frac{\partial H'_{23}}{\partial \lambda_N} & \cdots & \frac{\partial H'_{2N}}{\partial \lambda_N} & \cdots & \frac{\partial H'_{(N-1),N}}{\partial \lambda_N} \end{pmatrix}$$

et la matrice $\left(\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \theta_\gamma}\right)_{\gamma,i=1,..,N-1,k=i+1,..N}$$(N\,(N-1)\,/2 \times N\,(N-1)\,/2)$ est définie par

$$\left(\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \theta_j}\right)_{\substack{j,i=1,..,N-1 \\ k=i+1,..N}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H'_{12}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{1N}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial H'_{23}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{2N}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial H'_{(N-1),N}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial H'_{12}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial H'_{1N}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial H'_{23}}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial H'_{2N}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial H'_{(N-1),N}}{\partial \theta_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial H'_{12}}{\partial \theta_\eta} & \cdots & \frac{\partial H'_{1N}}{\partial \theta_\eta} & \frac{\partial H'_{23}}{\partial \theta_\eta} & \cdots & \frac{\partial H'_{2N}}{\partial \theta_\eta} & \cdots & \frac{\partial H'_{(N-1),N}}{\partial \theta_\eta} \end{pmatrix}$$

est une matrice $N\,(N-1)\,/2 \times N\,(N-1)\,/2$.

Nous deduisons que les deux colonnes de (2.33) correspondent à N et $N(N-l)/2$ colonnes réelles réspectivement. Les deux lignes de (2.33) correspondent de nouveau à N et $N(N-l)/2$ lignes réelles ou $1 \leq i < k \leq N$, $(\gamma = 1, 2, ..., N)$ et $(j = 1, 2, ..., N(N-l)/2)$.

Si nous multiplions $J(\lambda, \theta)$ en (2.33) a droite par la matrice carré V $(N(N+l)/2 \times N(N+l)/2)$ suivante :

$$V = \begin{bmatrix} (U_{i\alpha}U_{i\beta}) \\ (U_{i\alpha}U_{k\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

où la matrice $V_1 = (U_{i\alpha}U_{i\beta})$, $(N \times N\,(N+1)\,/2\,)$ avec $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq \alpha \leq \beta \leq N$ est définie par

$$V_1 = (U_{i\alpha}U_{i\beta})_{i,\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} U_{11}^2 & \cdots & U_{11}U_{1N} & U_{12}^2 & \cdots & U_{12}U_{1N} & \cdots & U_{1N}^2 \\ U_{21}^2 & \cdots & U_{21}U_{2N} & U_{22}^2 & \cdots & U_{22}U_{2N} & \cdots & U_{2N}^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_{N1}^2 & \cdots & U_{N1}U_{NN} & U_{N2}^2 & \cdots & U_{N2}U_{NN} & \cdots & U_{NN}^2 \end{pmatrix}$$

et la matrice $V_2 = (U_{i\alpha}U_{k\beta})$, $(\,N(N-1)/2 \times N\,(N+1)\,/2)$ avec $1 \leq i < k \leq N$ et $1 \leq \alpha \leq \beta \leq N$ est définie par

$$V_2 \quad : \quad = (U_{i\alpha}U_{k\beta})_{i,k,\alpha,\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{11}U_{21} & \cdots & U_{11}U_{2N} & U_{12}U_{22} & \cdots & U_{12}U_{2N} & \cdots & U_{1N}U_{2N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_{11}U_{N1} & \cdots & U_{11}U_{NN} & U_{12}U_{N2} & \cdots & U_{12}U_{NN} & \cdots & U_{1N}U_{NN} \\ U_{21}U_{31} & \cdots & U_{21}U_{3N} & U_{22}U_{32} & \cdots & U_{22}U_{3N} & \cdots & U_{2N}U_{3N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_{21}U_{N1} & \cdots & U_{21}U_{NN} & U_{22}U_{N2} & \cdots & U_{22}U_{NN} & \cdots & U_{2N}U_{NN} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_{(N-1)1}U_{N1} & \cdots & U_{(N-1)1}U_{NN} & U_{(N-1)2}U_{N2} & \cdots & U_{(N-1)2}U_{NN} & \cdots & U_{(N-1)N}U_{NN} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons en utilisant (3.11) et (3.12) :

$$J(\lambda, \theta)V = \begin{bmatrix} (\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \lambda_\gamma}) & (\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \lambda_\gamma}) \\ (\frac{\partial H'_{ii}}{\partial \theta_j}) & (\frac{\partial H'_{ik}}{\partial \theta_j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma}) \\ (S_{\alpha\beta}^{(j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

(2.35)

Donc $J(\lambda, \theta)V$ est une matrice à deux lignes et une colonne. Les deux lignes correspondent à des matrices à N lignes et $N(N-l)/2$ lignes respectivement et la colonne correspondant à une matrice $N(N+1)/2$ colonnes.

En prenant le déterminant des deux cotés de (2.35), nous obtenons :

$$\det J(\lambda,\theta)\det V = |J(\lambda,\theta)|\,|V| = \prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta-\lambda_\alpha)\det\begin{bmatrix}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma})\\ S^{(j)}_{\alpha\beta}\end{bmatrix}$$

ou encore

$$|J(\lambda,\theta)| = \prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta-\lambda_\alpha)f(\theta) \tag{2.36}$$

ou $f(\theta)$ ne dépend pas des λ_i et dépend uniquement de parametres θ_j.

En inserant ce resultat dans (2.23) et en integrant sur les variables θ_j nous obtenons la densité conjointe des valeurs propres d une matrice d'un ensemble orthogonal :

$$p(\lambda_1,..,\lambda_N) = \prod_{i<j}|\lambda_j-\lambda_i|\exp\left[-\sum_{i=1}^{N}(a\lambda_i^2-b\lambda_i-c)\right] \tag{2.37}$$

où c est une nouvelle constante.

En outre, si nous faisons le changement de variables suivant $\lambda_i=(1/\sqrt{2a})x_i+b/2a$, (changement d' origine à $b/2a$ et on modifie l'echelle de l'energie par un facteur constant $\sqrt{2a}$), (2.37) prend la forme suivante :

$$p(x_1,..,x_N) = C_{N,1}\prod_{i<j}|x_j-x_i|\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right] \tag{2.38}$$

où $C_{N,1}$ est une constante ou l indice 1 pour rappeler la puissance du produit de différences.

3.1.4 Ensemble unitaire gaussien (GUE)

Soit $H=(H_{ij})_{i,j=1}^{N}$ une matrice aléatoire hermitienne de valeures propres $\lambda_1,....,\lambda_N$ distinctes.

La proposition suivante donne la densité conjointe des valeurs propres d'une matrice $H=(H_{ij})_{i,j=1}^{N}$de l'ensemble GUE.

Proposition ([42], p72): *La densité conjointe des valeurs propres ($\lambda_1,....,\lambda_N$) d'une matrice $H=(H_{ij})_{i,j=1}^{N}$de l'ensemble GUE est donnee par:*

$$p(\lambda_1,..,\lambda_N) = \prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)^2\exp\left[-a\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2+b\sum_{i=1}^{N}\lambda_i+c\right] \tag{2.39}$$

ou encore

$$p(x_1,..,x_N) = C_{N,2}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^2\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right] \tag{2.40}$$

Preuve: Dans une matrice H =(H_{ik}) hermitienne arbitraire , chaque élément H_{ik} s'ecrit $H_{ik} = H_{ik}^{(0)} + iH_{ik}^{(1)}$. A partir de la transformation S dans (2.22) , en plus des valeurs propres réelles, le nombre de parametres indépendants réels θ_j nécéssaires pour spécifier la matrice est $\eta = N(N-1)$ (en comptant les parties reelles et parties imaginaires). Les équations (2.22) et (2.23) restent inchangées, mais (2.24) est remplacée par

En séparant les parties réelles et imaginaires, on peut écrire ces équations en notation matricielle partitionnée suivante :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} (\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}) & (\frac{\partial H_{ik}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}) & (\frac{\partial H_{ik}^{(1)}}{\partial \lambda_\gamma}) \\ (\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \theta_j}) & (\frac{\partial H_{ik}^{(0)}}{\partial \theta_j}) & (\frac{\partial H_{ik}^{(1)}}{\partial \theta_j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ A^{(0)} & B^{(0)} \\ A^{(1)} & B^{(1)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\rho_{\gamma,\alpha}) & (\sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(0)}) & (\sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(1)}) \\ (\varepsilon_\alpha^{(j)}) & (S_{\alpha\beta}^{(0j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)) & (S_{\alpha\beta}^{(1j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)) \end{bmatrix} \\
\text{où } 1 &\le i < k \le N, \qquad 1 \le \alpha < \beta \le N, \\
1 &\le j \le N(N-1) \quad et \quad 1 \le \gamma \le N
\end{aligned} \tag{2.42}$$

et $S_{\alpha\beta}^{(0j)}$ et $S_{\alpha\beta}^{(1j)}$ sont respectivement la partie réelle et imaginaire de $S_{\alpha\beta}^{(j)}$. Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}\right)$, V_1 et $\rho = (\rho_{\gamma,\alpha})$ sont $(N \times N)$.Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ik}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}\right)$, $\left(\frac{\partial H_{ik}^{(1)}}{\partial \lambda_\gamma}\right)$, $\left(\sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(0)}\right)$ et $\left(\sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(1)}\right)$sont $(N \times N(N-1)/2)$.Les matrices $A^{(0)}, A^{(1)}$ sont $(N(N-1)/2 \times N)$.Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \theta_j}\right)$ et $\left(\varepsilon_\alpha^{(j)}\right)$ sont $(N(N-1) \times N)$.Les matrices $B^{(0)}$et $B^{(1)}$ sont $(N(N-1)/2 \times N(N-1))$.Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ik}^{(0)}}{\partial \theta_j}\right)$, $\left(\frac{\partial H_{ik}^{(1)}}{\partial \theta_j}\right)$, $\left(S_{\alpha\beta}^{(0j)}\right)$ et $\left(S_{\alpha\beta}^{(1j)}\right)$ sont $(N(N-1) \times N(N-1)/2)$ et la matrice V_2 est $(N \times N(N-1))$.

Le calcul explicite des éléments des matrices $V_1, V_2, A^{(0)}, A^{(1)}, \rho, \varepsilon$,$\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}$,etc...est plus simple et sont obtenus à partir des composantes

de U et de la differenciation de Q par rapport à λ_i et par conséquent, ils ne dépendent pas des valeurs propres λ_i.

De meme $S_{\alpha\beta}^{(j)}$ ne dépend pas de λ_i. Un calcul montre que $\sigma^{(0)}$ et $\sigma^{(1)}$ sont des matrices nulles. Ainsi, en prenant les determinants des deux cotés de **??** et en supprimant les facteurs $(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)$, nous avons:

$$J(\lambda, \theta) = \prod_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^2 f(\theta) \tag{2.43}$$

où $f(\theta)$ est une certaine fonction de θ_j.

En insérant (2.43) en (2.23) et en intégrant par rapport aux θ_j , nous obtenons la densite conjointe des valeurs propres d'une matrice dans l'ensemble unitaire :

$$p(\lambda_1, .., \lambda_N) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \exp\left[-a\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} \lambda_i + c\right] \tag{2.44}$$

Comme précédemment, par un choix de l'origine et l échelle de l'energie nous avons:

$$p(x_1, .., x_N) = C_{N,2} \prod_{i<j} (x_j - x_i)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right] \tag{2.45}$$

où $C_{N,2}$ est une constante ou l'indice 2 est pour rappeler la puissance dans les produits de différences. □

3.1.5 Ensemble symplectique gaussien (GSE)

Comme nous l'avons remarqué précedemment les calculs sont pratiquement identiques dans les deux cas des ensembles GOE et GUE Dans les sections 5.1 et 5.2 nous avons indiqué brievement les modifications nécessaires pour arriver aux densités conjointes dans l'autre cas.

Concernant l'ensemble des matrices simplectiques gaussiennes GSE où une matrice $H = (H_{ij})_{i,j=1}^{N}$ simplectique est définie par :

Pour chaque élément H_{ik}, $H_{ik}= H_{ik}^{(0)}+iH_{ik}^{(1)}+jH_{ik}^{(2)}+kH_{ik}^{(3)}$, où $H_{ik}^{(0)}, H_{ik}^{(1)}, H_{ik}^{(2)}$ et $H_{ik}^{(3)}$ sont des variables aléatoires réelles i.i.d avec la distribution $N(\mu, \sigma^2)$.

Nous avons besoin du résultat suivant qui donne pour une matrice symétrique réelle sa diagonalisation par une matrice orthogonale:

Proposition: *Soit H une matrice réelle quaternion autoadjointe. Alors il existe une matrice symplectique U telle que*

$$H = UQU^{-1} = UQU^{R} \tag{2.46}$$

où Q est une matrice diagonale réelle et scalaire.

Une matrice Q est scalaire si elle est composé sur la diagonale de blocs de N matrices (2×2) sous la forme:

$$Q = \left[\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}\right]_{1\le i\le N} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1\end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{matrix}\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{matrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{matrix}\lambda_N & 0 \\ 0 & \lambda_N\end{matrix} \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Ainsi la diagonale est formée des valeurs propres de H en N couples égaux.

La proposition suivante donne la densité conjointe des valeurs propres d'une matrice $H = (H_{ij})_{i,j=1}^{N}$de l'ensemble GSE.

Proposition ([42], chap3 p70) *La densité conjointe des valeurs propres* ($\lambda_1, ..., \lambda_N$) *d'une matrice de l'ensemble GSE est donnee par :*

$$p(\lambda_1, .., \lambda_N) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^4 \exp\left[-2a\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{N} \lambda_i + c\right]$$

ou encore :

$$p(x_1, .., x_N) = C_{N,4} \prod_{i<j} (x_j - x_i)^4 \exp\left[-2\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right]$$

Preuve: En déhors des N valeurs propres $\lambda_i (i = 1, ..., N)$, le nombre necéssaire de paramètres réels indépendants θ_j pour caractériser une matrice réelle H quaternion autoadjointe $N \times N$ est :

$$\eta = 4 \times \frac{1}{2} \times N(N-1) = 2N(N-1) \tag{2.48}$$

Les équations (2.22) et (2.23) sont remplacées respectivement par:

$$trH^2 = 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \quad et \quad trH = 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tag{2.49}$$

et

$$p(\lambda_1, ..., \lambda_N, \theta_1, ..., \theta_\eta) = J(\lambda, \theta) \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} (2a\lambda_i^2 - 2b\lambda_i - c)\right] \tag{2.50}$$

où $J(\lambda, \theta)$ est donnée par:

$$J(\lambda, \theta) = \frac{\partial(H_{11}^{(0)}, ..., H_{NN}^{(0)}, H_{12}^{(0)}, ..., H_{12}^{(3)}, ..., H_{N-1,N}^{(0)}, ..., H_{N-1,N}^{(3)})}{\partial(\lambda_1, ..., \lambda_N, \theta_1, ..., \theta_\eta)} \tag{2.51}$$

L'équation (2.25) est remplacée par (2.46). Les équations (2.26),...(2.30) sont valables si U^T est remplacée par U^R (voir proposition (5.3.1)). Nous notons que ces équations sont dans le language des quaternions. Nous avons besoin de séparer les quatres parties du quaternion . Pour chaque élement H_{ik} et $S_{\alpha\beta}^{(j)}$ nous posons:

$$H_{ik} = H_{ik}^{(0)}\mathbf{1} + H_{ik}^{(1)} e_1 + H_{ik}^{(2)} e_2 + H_{ik}^{(3)} e_3 \tag{2.52}$$

$$S_{\alpha\beta}^{(j)} = S_{\alpha\beta}^{(0j)}\mathbf{1} + S_{\alpha\beta}^{(1j)} e_1 + S_{\alpha\beta}^{(2j)} e_2 + S_{\alpha\beta}^{(3j)} e_3 \tag{2.53}$$

où

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

avec le tableu des multiplications usuel:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -\mathbf{1}.$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, \qquad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, \qquad e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2.$$

On écrit (2.30)(1.30) et (2.32) sous la forme de matrices partitionnées suivantes

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}\right) & \left(\frac{\partial H_{ik}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}\right) & \left(\frac{\partial H_{ik}^{(1)}}{\partial \lambda_\gamma}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial H_{ik}^{(3)}}{\partial \lambda_\gamma}\right) \\ \left(\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \theta_j}\right) & \left(\frac{\partial H_{ik}^{(0)}}{\partial \theta_j}\right) & \left(\frac{\partial H_{ik}^{(1)}}{\partial \theta_j}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial H_{ik}^{(3)}}{\partial \theta_j}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ A^{(0)} & B^{(0)} \\ \vdots & \vdots \\ A^{(3)} & B^{(3)} \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho_{\gamma,\alpha} & (\sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(0)}) & \cdots & \sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(3)} \\ \varepsilon_\alpha^{(j)} & S_{\alpha\beta}^{(0j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) & \cdots & S_{\alpha\beta}^{(3j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) \end{bmatrix}$$

où $1 \leq i < k \leq N, \qquad 1 \leq \alpha < \beta \leq N$

$1 \leq j \leq 2N(N-1) \quad et \quad 1 \leq \gamma \leq N$

où les matrices $\left(\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \lambda_\gamma}\right)$, V_1 et ρ sont $(N \times N\ )$. Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ik}^{(\mu)}}{\partial \lambda_\gamma}\right)$ et $\left(\sigma_{\gamma,\alpha\beta}^{(\mu)}\right)$ avec $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont $(N \times N(N-1)/2)$. Les matrices $A^{(\mu)}$ avec $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont $(N(N-1)/2 \times N)$. Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ii}^{(0)}}{\partial \theta_j}\right)$et $\left(\varepsilon_\alpha^{(j)}\right)$ sont $(2N(N-1) \times N)$. Les matrices $\left(\frac{\partial H_{ik}^{(\mu)}}{\partial \theta_j}\right)$ et $\left(S_{\alpha\beta}^{(\mu j)}\right)$avec $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont $(2N(N-1) \times N(N-1)/2)$. La matrice V_2 est $(N \times 2N(N-1))$ et les matrices $B^{(\mu)}$ avec $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont $(N(N-1)/2 \times 2N(N-1)/2)$.

Les matrices ρ et σ apparaissent quand nous séparons le resultat de la différenciation de (2.46) par rapport à λ_γ dans les composantes quaternions. Comme Q est diagonale et scalaire alors les matrices $\sigma^{(\mu)}$ sont toutes nulles . En outre, la matrice ρ ne dépend pas de λ_γ implique que Q dépend linéairement des λ_γ??. Les calculs des matrices, V_1, V_2 , $A^{(\mu)}$ et $B^{(\mu)}$ sont simples mais nous avons besoin de constater qu'elles sont formées des differentes composantes de U, et donc elles ne dependent pas de λ_γ.

Maintenant, en prenant le déterminant des deux cotés de (2.54) on remarque que le determinant de la premiere matrice à gauche est le Jacobien (251), parce que les $\sigma^{(\mu)}$ sont touts nuls et le determinant du coté droit est un produit de deux determinants comme suit:

$$\det[(\rho_{\gamma,\alpha})].\det[S_{\alpha\beta}^{(\mu j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)] \tag{2.55}$$

le premier $\det[(\rho_{\gamma,\alpha})]$ étant indépendant de λ_γ, tandis que le second $\det[S_{\alpha\beta}^{(\mu j)}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)]$ est comme suit:

$$\prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta-\lambda_\alpha)^4 \det[S^{(\mu j)}_{\alpha\beta}] \tag{2.56}$$

Ainsi

$$J(\lambda,\theta)=\prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta-\lambda_\alpha)^4 f(\theta) \tag{2.57}$$

En insérant (2.57) dans (2.50) et en intégrant sur les paramètres, on obtient la densité de probabilité conjointe:

$$p(\lambda_1,..,\lambda_N)=\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)^4\exp\left[-2a\sum_{i=1}^N\lambda_i^2+2b\sum_{i=1}^N\lambda_i+c\right] \tag{2.58}$$

Comme précédemment, on peut changer l'origine en mettant $b=0$ et changer l'echelle de l'energie en mettant $a=1$. Ainsi, la fonction de densité conjointe des valeurs propres des matrices dans l'ensemble symplectique est sous forme simple :

$$p(x_1,..,x_N)=C_{N,4}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^4\exp\left[-2\sum_{i=1}^N x_i^2\right] \tag{2.59}$$

où $C_{N,4}$ est une constante. (indice 4 est de rappeler la puissance du produit des differences.). $\square$

Nous pouvons résumer les resulats (2.38), (2.45) et (2.59) correspondant respectivement à chaque ensemble $\beta=1$ (pour l'ensemble orthogonal), $\beta=2$ (unitaire) et $\beta=4$ (symplectique) sous la forme suivante.

Théoreme ([42],p74): *La densite conjointe des valeurs propres d'une matrice aléatoire appartenant à l'un des ensembles gaussien G0E ,GUE et GSE est donnée par:*

$$p_{N,\beta}(x_1,..,x_N)=C_{N,\beta}\prod_{i<j}|x_j-x_i|^\beta\exp\left[-\frac{1}{2}\beta\sum_{i=1}^N x_i^2\right] \tag{2.60}$$

où $\beta=1$ pour l'ensemble G0E , $\beta=2$ pour GUE et $\beta=4$ pour GSE.

La constante $C_{N,\beta}$ est choisie de telle sorte que la densité $p_{N,\beta}$ soit normalisée à l'unité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}....\int_{-\infty}^{+\infty}p_{N,\beta}(x_1,..,x_N)dx_1...dx_N=1$$

La constante de normalisation $C_{N,\beta}$ est donnée par ,

$$C_{N,\beta}^{-1}=(2\pi)^{N/2}\beta^{-\frac{N}{2}-\frac{\beta N(N-1)}{4}}[\Gamma(1+\frac{\beta}{2})]^{-N}\prod_{j=1}^N\Gamma(1+j\frac{\beta}{2})$$

Remarque: La dimension de l'espace Λ_{1G} est $N(N+l)/2$, alors que la dimension de Λ'_{1G} forme de matrices de Λ_{1G} ayant deux valeurs propres égales est $N(N+l)/2-2$. En raison de la restriction unique, la dimension des ensembles de matrices ayant deux valeurs propres égales devrait normalement diminuée de un. Comme elle est diminuée deux, c'est ce qu'indique le facteur lineaire $(X_j - X_i)$ dans l'équation (2.60). De meme, lorsque $\beta = 2$, la dimension de Λ_{2G} est N^2, alors que celle de Λ'_{2G} est $N^2 - 3$. Lorsque $\beta = 4$, la dimension de Λ_{4G} est $N(2N-1)$, alors que celle de Λ'_{4G} est $N(2N-1)-5$.

Resumé: Dans les tableaux suivamts **2.1** et **2.2** on donne les densités des matrices aléatoires et de leurs valeurs propres pour les trois ensembles Gaussiens étudiés. Les constantes de normalisation correspondent à celles que nous avons choisies.

Nous rappelons la propriété d'invariance des ensembles orthogonaux qui est facile à vérifier pour les densités car les matrices sont symétriques.

Ensembles Gaussiens	Orthogonal Unitaire Symplectique	$\beta = 1$ $\beta = 2$ $\beta = 4$	$p_{n,\beta}(H) = 2^{-n/2}\pi^{-\frac{2n+\beta n(n-1)}{4}} e^{\left[-tr(H)^2/2\right]}$

Tableau 2.1 Densité conjointe des éléments d'une matrice H, $n\times\ n$ des trois ensembles Gaussiens.

Ci-dessous nous noterons Λ la matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, et nous utilisons la notation $\Delta(\Lambda) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$.

Ensembles Gaussiens	Orthogonal Unitaire Symplectique	$\beta = 1$ $\beta = 2$ $\beta = 4$	$p(\lambda_1, .., \lambda_n) = \tau^G_{n,\beta} \left|\Delta(\Lambda)\right|^\beta e^{-trA^2/2}$

où

$$\tau^G_{n,\beta} = \frac{\pi^{\frac{\beta n(n-1)}{4}}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{(\Gamma(1+\frac{\beta}{2}))^n}{\Gamma^\beta_n(1+\frac{\beta}{2})}$$

Tableau 2.2 Densité conjointe des valeurs propres $\lambda :=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ de matrice $n \times n$ des trois ensembles Gaussiens.

Les tableaux (**2.3**) et (**2.4**) donnent des densités des éléments et valeurs propres de matrice$W$, $(n \times n)$ dans les ensembles de Wishart.

Ensembles de Wishart	Orthogonal Unitaire Symplectique	$\beta = 1$ $\beta = 2$ $\beta = 4$	$\frac{2^{-mn\beta/2}}{\Gamma_m^\beta(n\frac{\beta}{2})} \left\|\Delta(\Lambda)\right\|^\beta (\det W)^{\frac{\beta(n-m+1)}{2}-1} e^{-tr(W)/2}$

Tableau 2.3: Densité conjointe des éléments d'une matrice de Wishart$W$ $(m \times n\ )$.

Enfin, nous présentons les densités des valeurs propres d'une matrice W $(m \times n\ )$ pour les deux modèles tri-diagonale (β-Hermite et β-Laguerre decrités dans le Tableau (**2.1**))

Ensembles de Wishart	Orthogonal Unitaire Symplectique	$\beta = 1$ $\beta = 2$ $\beta = 4$	$p(\boldsymbol{\lambda}) = \tau^W_{n,\beta} \left\|\Delta(\Lambda)\right\|^\beta (\det W)^{\frac{\beta(n-m+1)}{2}-1} e^{-tr(W)/2}$

où

$$\tau^W_{n,\beta} = \frac{\pi^{m(m-1)\beta/2}}{2^{mn\beta/2}} \frac{(\Gamma(1+\frac{\beta}{2}))^m}{\Gamma^\beta_m(1+\frac{\beta}{2})\Gamma^\beta_m((n-m+1)\frac{\beta}{2})}$$

Tableau 2.4: Densité conjointe des valeurs propres $\boldsymbol{\lambda}$:=$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ d'une matrice d'ensembles de Wishart $m \times n$

4 Chapitre

4.1 Densités des vecteurs propres de Matrices tri-diagonales

4.1.1 Introduction:

Soit $M_n(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ sur le corps $\mathbb{k}$. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ de éléments a_{ij}, est dite tri-diagonale si: $a_{ij} = 0$ pour tous (i,j) tel que $\mid i-j \mid > 1$.

.On dit aussi que c'est une matrice de Heisenberg à la fois superieure et inférieure.

Afin de définir ces dernières, nous utilisons la notation suivante : $[a : -t : a-kt]$ pour indiquer une progression arithmétique décroissante de longueur $k+1$ de valeur initiale a et de raison $-t$.

4.1.2 Ensemble $\beta-$Hermite

Definition : *Soit $\beta > 0$ .L'ensemble $\beta-$Hermite est l'ensemble des matrices symétriques $H_\beta(n)$ où $H_\beta(n)$ est une matrice tri-diagonale avec une diagonale de loi $N(0,1)$ et une sub-diagonale de loi $\sqrt{2}\chi$ $[(n-1)\beta : -\beta : \beta]$.Les éléments sont indépendants et verifient la condition de symétrie (cf [27]) .*

4.1.3 Ensemble $\beta-$Laguerre

Definition *: L'ensemble $\beta-$Laguerre de paramètre a est l'ensemble des matrices $L_{\beta,a}(n)$ symétriques $(n \times n)$ obtenues par $B_\beta B_\beta^T$ où B_β est une matrice $G_{\beta,a}(m)$ avec $(\beta > 0, a > \beta(m-1)/2)$. Les éléments sont indépendants et verifient la condition de symétrie.*

Rappellons une propriété.

Propriété (cf [17]): *Soit A une matrice réelle tri-diagonale vérifie $a_{i,i+1} \times a_{i,i-1} > 0$ pour $i = 1, ...,n$ (c'est-a-dire les coéfficients symétriques sont de même signe) . Alors elle est semblable à une matrice hermitienne, et donc toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Remarque: Cette dernière propriété est consèrvée si on considère plutot la condition $a_{i,i+1} \times a_{i,i-1} \geq 0$.

Nous complétons la liste des ensembles de matrices aléatoires présentées ci-dessous par les matrices dites (bi-diagonales ou tri-diagonale) construites pour un parametre β général.

On note $G_{\beta,a}(m)$ une matrice $m \times m$ bi-diagonale inférieure avec les éléments diagonaux de loi $\chi[2a : -\beta : 2a-(m-1)\beta]$ et les éléments sub-diagonaux de loi χ $[(m-1)\beta : -\beta : \beta]$.

Les éléments sont indépendants. Par conséquent, on peut definir les ensembles $\beta-$Hermite et $\beta-$Laguerre comme suit:

. L'ensemble des matrices tri-diagonales $n \times n$ est un espace vectoriel de dimension $(3n-2)$.

. Nous utilisons la notation suivante pour une matrice tri-diagonale symétrique :

$$L = \begin{pmatrix} b_n & c_{n-1} & & 0 \\ c_{n-1} & b_{n-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_1 \\ 0 & & c_1 & b_1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

et pour une matrice bi-diagonale

$$B = \begin{pmatrix} x_n & 0 & & 0 \\ y_{n-1} & x_{n-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & y_1 & x_1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Par conséquent, du fait que $L = BB^T$, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_n &= x_n^2 \\ b_{n-i} &= x_{n-i}^2 + y_{n-i}^2, \text{ pour } i \in \{1, ..., (n-1)\} \\ c_{n-i} &= x_{n-i} y_{n-1}, \text{ pour } i \in \{1, ..., (n-1)\} \end{aligned}$$

4.2 Ensemble $\beta-$Hermite

Rappellons qu'une matrice aléatoire H_β réelle symétrique, tri-diagonale est representée par :

$$H_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-2)\beta} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \chi_{2\beta} & N(0,2) & \chi_\beta \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_\beta & N(0,2) \end{pmatrix}$$

Les n éléments diagonaux et les $(n-1)$ éléments sous- diagonaux sont indépendants de loi $N(0,1)$ sur la diagonale, et $\frac{1}{2}\chi_{k\beta}$ $(k = 1, ..., (n-1))$ sur les sous-diagonales.

Le théoreme suivant donne la densité des valeurs propres d'une matrice aléatoire H_β.

Théorème 5.2.1([27], p 51): *Soit $H_\beta = Q_\beta \Lambda_\beta Q_\beta^T$ la décomposition spectrale de H_β. Notons* $\mathbf{q}$ *la premiere ligne de la matrice Q_β, nous fixons le signe de* $\mathbf{q}$ *positif et ordonnons les valeurs propres en ordre décroissant, alors* $\mathbf{q}$ *et* $\boldsymbol{\lambda} = diag\ \Lambda_\beta = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *sont indépendants. De plus la densité des valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est:*

$$\begin{aligned} f_{n,\beta}(\lambda_1, ..., \lambda_n) &= C_H^\beta \exp(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2/2) \prod_{1\le i<j\le n} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta && (3.3) \\ &= C_H^\beta\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}\ |\Delta(\Lambda)|^{\ \beta} && (3.4) \end{aligned}$$

et $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ *est distribuée sous forme normalisée à unité de longueur $(\chi_\beta, ..., \chi_\beta)$. C_H^β est donnée par* (2.2.2).

Pour la preuve du théoreme 5.2.1 en utilise les lemmes suivants. Pour T une matrice tri-diagonale de diagonale $a = (a_n, ..., a_1)$ et sous-diagonale $b = (b_{n-1}, ..., b_1)$, avec b_i est positif pour tout $i = 1, ..., n$ on pose $T = Q\Lambda Q^T$ *sa décomposition spectrale* et $\mathbf{q}$ la première ligne de Q et $\lambda = diag(\Lambda) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Lemme 4.2.1([27], p 43:) *Sous les hypothèses ci-dessus, à partir de* $\mathbf{q}$ *et* $\boldsymbol{\lambda}$*, on peut reconstruire de façon unique Q et T.*

On admet ce lemme et un cas particulier d'un résultat plus général (cf Théorème 7.2.1, Parlett [49]).

Le résultat suivant établit une formule pour le déterminant de Vandermonde des valeurs propres d'une matrice tri-diagonale (notée $\Delta(\Lambda) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$.

Lemme 4.2.2 ([27], p 44): *Le déterminant de Vandermonde d'une matrice symétrique T tri-diagonale avec une sub-diagonal positifs $b = (b_{n-1}, ..., b_1)$ est donnée par:*

$$\Delta(\Lambda) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^{n} q_i} \qquad (3.5)$$

où $\mathbf{q}$ $=(q_1, ..., q_n)$ *est la première ligne de la matrice des vecteurs propres Q et les valeurs propres sont ordonnées en decroissant.*

Preuve Soit T une matrice symétrique tri-diagonale $n \times n$. Posons $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, ..., k$ les valeurs propres de la sous-matrice $k \times k$ du coin inférieur droit de T. Notons $P_k(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i^{(k)})$ le polynôme caractéristique associé à cette sous-matrice.

Pour $k = 1, ..., n$, nous avons la récurrence à trois termes

$$P_k(x) = (x - a_k)P_{k-1}(x) - b_{k-1}^2 P_{k-2}(x) \tag{3.6}$$

Comme

$$|P_k(x)| = \prod_{i=1}^{k} \left| x - \lambda_i^{(k)} \right|$$

Alors

$$\left| P_k(\lambda_j^{(k-1)}) \right| = \prod_{i=1}^{k} \left| \lambda_j^{(k-1)} - \lambda_i^{(k)} \right|$$

ce qui Implique

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left| P_k(\lambda_j^{(k-1)}) \right| = \prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k-1}} \left| \lambda_j^{(k-1)} - \lambda_i^{(k)} \right|$$

D'autre part

$$|P_{k-1}(x)| = \prod_{j=1}^{k-1} \left| x - \lambda_j^{(k-1)} \right|$$

et donc

$$\left| P_{k-1}(\lambda_i^{(k)}) \right| = \prod_{j=1}^{k-1} \left| \lambda_j^{(k-1)} - \lambda_i^{(k)} \right|$$

implique

$$\prod_{i=1}^{k} \left| P_k(\lambda_i^{(k)}) \right| = \prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k-1}} \left| \lambda_j^{(k-1)} - \lambda_i^{(k)} \right|$$

Par conséquent

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k-1}} \left| \lambda_i^{(k)} - \lambda_j^{(k-1)} \right| = \prod_{i=1}^{k} \left| P_k(\lambda_i^{(k)}) \right| = \prod_{j=1}^{k-1} \left| P_{k-1}(\lambda_j^{(k-1)}) \right| \tag{3.7}$$

De (3.6) nous obtenons

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left| P_k(\lambda_j^{(k-1)}) \right| = b_{(k-1)}^{2(k-1)} \prod_{j=1}^{k-1} P_{k-2}(\lambda_j^{(k-1)}) \tag{3.8}$$

Par une application répétée de (3.6) et (3.7) nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n-1}\left|P_n(\lambda_j^{(n-1)})\right| &= b_{(n-1)}^{2(n-1)}\prod_{j=1}^{n-2}\left|P_{n-1}(\lambda_j^{(n-2)})\right| \\
&= b_{(n-1)}^{2(n-1)}\ b_{(n-2)}^{2(n-2)}\prod_{j=1}^{n-3}\left|P_{n-2}(\lambda_j^{(n-3)})\right| \\
&= .... \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} b_j^{2j} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Enfin, nous utilisons la formule suivante (cf [49] le théorème 7.9.2):

$$q_j^2 = \left|\frac{P_{n-1}(\lambda_j)}{P_n'(\lambda_j)}\right| = \left|\frac{P_{n-1}(\lambda_j^n)}{P_n'(\lambda_j^n)}\right|$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} q_j^2 &= \frac{\prod_{j=1}^{n}|P_{n-1}(\lambda_j^n)|}{\Delta(\Lambda)^2} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} b_j^{2j}}{\Delta(\Lambda)^2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \Delta(\Lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} b_j^{j}}{\prod_{j=1}^{n} q_j}
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

4.2.1 Formule Jacobien de la transformation H = QΛQ*/* 4.3

Nous présenton une formule de la jacobienne de la transformation suivante J definie sur l ensemble GOE : A→ $H = Q\Lambda Q'$, où H est une matrice tri-diagonale symétrique. La formule fait le lien entre les formes tri-diagonale et diagonale d'une matrice GOE , comme il est illustré à la figure 4-1. Dans cette section, nous allons utiliser les notations données dans (3.1).

Lemme 4.3.1 *Le jacobien J de la transformation de la matrice tri-diagonale $H = Q\Lambda Q\prime$ peut être écrite comme suit:*

$$J = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i} \qquad (3.10)$$

Remarque: Pour montrer le lemme 4.3.1, nous allons étudier une transformation de l'ensemble GOE vers l ensemble 1- Hermite (voir figure 4-1).

$$\underset{(GOE)}{A = Q\Lambda Q^T} \xrightarrow{\text{réduction tri-diagonale}} H \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \text{Tri-diagonal} \\ \text{d'ensemble} \\ \text{1-Hermite} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(GOE)}{A = Q\Lambda Q^T} \xrightarrow{\text{v.p et la } 1^{er} \text{ ligne de Q}} (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{q}] \\ \text{du théoreme 4.3.1} \end{bmatrix}$$

D'autre part:

$$H \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \text{Tri-diagonal} \\ \text{d'ensemble} \\ \text{1-Hermite} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{bijection}} (\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{q}] \\ \text{du théoreme 4.3.1} \end{bmatrix}$$

Figure 4-1: A est une matrice symétrique, transformée en H tri-diagonale (côté gauche) ou diagonaliser $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})$ (côté droit).

Preuve: Soit H une matrice 1-Hermite (ie de loi (2.1) avec $\beta = 1$). Les

valeurs propres de H ont la loi des valeurs propres d'une matrice symétrique A de l'ensemble GOE qui est transformee en H par réduction tri-diagonale (pour la preuve voir [13]).

Nous rappelons les notations de (3.3): on note par $a = (a_n, ..., a_1)$ la diagonale de H, et par $b = (b_{n-1}, ..., b_1)$ la sub-diagonale de H. La densité des éléments de A est donné par suit:

Nous donnons les lois en commençant par celle de $A \in$ GOE.

La loi de la matricetri-diagonale H est (cf th 5.2.1) :

$$\mu(a,b) = C_{a,b} \prod_{i=1}^{n} b_i^{i-1} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2) \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right], \qquad \text{avec} \qquad C_{a,b} = \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\frac{i}{2})}$$

Posons:

$$da = \bigwedge_{i=1}^{n} da_i, \qquad db = \bigwedge_{i=1}^{n-1} db_i, \qquad d\lambda = \bigwedge_{i=1}^{n} d\lambda_i \tag{3.11}$$

Si dq est l'élément de surface de la sphère à dimensions n , posons: $\mu(a(q,\lambda), b(q,\lambda))$ qui est l'expression de $\mu(a,b)$ avec les nouvelles variables q, λ. Nous avons

$$\mu(a,b)dadb = \mu(a(q,\lambda), b(q,\lambda))Jdqd\lambda \equiv \upsilon(q,\lambda)dqd\lambda \tag{3.12}$$

Or les matrices de GOE possèdent les propriétés suivantes (admises):

pour une matrice H de GOE de valeurs propres ordonnées $(\lambda_i)_{i=1}^n$ et décomposition spéctrale$Q\Lambda Q^T$ on a:

Propriete 1 (ref [42])**:** *La densité des valeurs propres est donnée par*

$$C_H^1 \left|\Delta(\Lambda)\right| \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right]$$

Propriete 2 (ref [42]) : *La première ligne* $\mathbf{q}$ *de la matrice des vecteurs propres* Q *a une loi uniforme sur la sphère et elle est indépendante du vecteur des valeurs propres* $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Preuve: Nous combinons les deux propriétés 1 et 2 pour obtenir la dansité $\upsilon(q, \lambda)$ conjointe les valeurs propres et de la première ligne $\mathbf{q}$ d une matrice de GOE **:**

$$\upsilon(q,\lambda)dqd\lambda = n!C_H^1 \frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}} \Delta(\Lambda)\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right] dqd\lambda \tag{3.13}$$

Nous avons introduit le $n!$ et supprimé la valeur absolue du déterminant de Vandermonde, parce que les valeurs propres sont ordonnées.

Nous avons également inclus la loi de $\mathbf{q}$ (loi uniforme Propriété **2**) mais uniquement sur la partie 2^{-n}ième positive de la sphère en raison de la condition $q_i \geq 0$). Comme les transformations orthogonales ne changent pas la norme de Frobenius $\|A\|_F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ d'une matrice carée $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, à partir de (3.13), il en résulte que de (4.7) :

$$J = \frac{\upsilon(q,\lambda)}{\mu(a,b)} = \frac{n!C_H^1 \frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}}{C_{a,b}} \frac{\Delta(\Lambda)}{\prod_{i=1}^{n} b_i^{i-1}} \tag{3.14}$$

Toutes les constantes se simplifient et par le Lemme 7.2 nous obtenons

$$J = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}$$

D'où le lemme 4.3.1.

Remarquons que nous n'avons pas exprimé $\mu(a, b)$ en termes de $\mathbf{q}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ au dessus et ainsi obtenu l'expression de la jacobienne sans les variables $\mathbf{q}$ et $\boldsymbol{\lambda}$, mais uniquement a et b. La raison est que on a eu des simplifications.

Preuve du théoreme 5.2.1 Soient H_β une matrice tri-diagonale de l'ensemble $\beta-$Hermite et *soit* $H_\beta = Q_\beta \Lambda_\beta Q_\beta^T$ sa décomposition spectrale .

Posons $a = (a_n, ..., a_1)$ la diagonale de H_β, $b = (b_{n-1}, ..., b_1)$ sa sous-diagonale et $\mathbf{q}$ la première ligne de la matrice Q_β . Les différentielles $da, db, dq, d\lambda$ sont definies comme suit:

$da = \bigwedge_{i=1}^{n} da_i, \;\; db = \bigwedge_{i=1}^{n-1} db_i, \quad dq = \bigwedge_{i=1}^{n} dq_i, \quad d\lambda = \bigwedge_{i=1}^{n} d\lambda_i.$

Pour une matrice H_β sa densité de probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} dH_\beta &= \mu(a,b) da db \\ &= C_{a,b} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{\beta i - 1} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2) da db \\ &= C_{a,b} J \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{\beta i - 1} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2) dq d\lambda \end{aligned}$$

où

$$C_{a,b} = \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(\frac{\beta i}{2})}$$

Avec l'aide des lemmes 4.2.1 et 4.3.1 cette identité devient

$$dH_\beta = C_{a,b} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{\beta i - 1} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2) dq d\lambda \tag{3.15}$$

$$dH_\beta = C_{a,b} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{\beta i}}{\prod_{i=1}^{n} q_i^{\beta}} \prod_{i=1}^{n-1} q_i^{\beta - 1} e^{-\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2} dq d\lambda \tag{3.16}$$

Ainsi

$$dH_\beta = \left(C_q^\beta \prod_{i=1}^{n-1} q_i^{\beta-1} dq \right) \left(n! C_H^\beta \; \Delta(\Lambda)^\beta \;\; e^{-\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2} d\lambda \right)$$

La densité conjointe de $\mathbf{q}$ et de $\boldsymbol{\lambda}$ se sépare par suite $\mathbf{q}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ sont indépendantes. Par ailleurs, quand nous imposons l'ordre sur les valeurs propres, il s'ensuit que la densité conjointe des valeurs propres de la matriceH_β est

$$C_H^\beta \quad |\Delta(\Lambda)|^{\;\beta} \; e^{-\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2}$$

Comme $\mathbf{q}$ est distribué comme $(\chi_\beta$,...,$\chi_\beta)$ normalisée à 1 unité de longueur (cf de (5.2)), de (5.2), il s'ensuit aussi que

$$C_q^\beta = \frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{\beta}{2}n)}{\left[\Gamma(\frac{\beta}{2})\right]^n} \tag{3.17}$$

D'où le théorème

4.2.2 Ensemble $\beta-$Laguerre (Wishart)

Soit B_β une matrice definie par **:**

$$B_\beta \sim \begin{pmatrix} \chi_{2a} & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_{\beta(m-1)} & \chi_{2a-\beta} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \chi_\beta & \chi_{2a-\beta(m-1)} \end{pmatrix}$$

où les$(2m-1)$ éléments de la diagonale et sub-diagonale sont indépendants de loi χ.

L'ensemble des matrices $L_\beta = B_\beta B_\beta^T$ tri-diagonales est dit ensemble $\beta-$Laguerre .

Le théoreme suivant donne la densité des valeurs propres d'une matrice aléatoire L_β.

Théorème 5.3.1([27], p53) *Soit $L_\beta = Q_\beta \Lambda_\beta Q_\beta^T$ la décomposition spectrale de L_β. Notons $\boldsymbol{q}$ la premiere ligne de la matrice Q_β,* nous *fixons le signe de $\boldsymbol{q}$ positif et ordonnons les valeurs propres en ordre decroissant. Alors $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{\lambda} =$ diag $\Lambda_\beta = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont independants. En outre, la densite des valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est:*

$$f_\beta(\lambda_1, ..., \lambda_n) = C_L^{\beta,a} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{i=1}^m \lambda_i^{a-p} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2/2} \tag{3.18}$$

ou $a = \frac{\beta}{2}n$ et $p = 1 + \frac{\beta}{2}(m-1)$ et $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ *est distribuée sous forme normalisée à unité de longueur* $(\chi_\beta, ..., \chi_\beta)$

Le constant $C_L^{\beta,a}$ est donne par (2.4).

Preuve Nous allons utiliser les résultats du lemme 4.2.1, Lemme 4.3.1 et (4.2), qui restent valables dans le contexte des matrices symétriques tri-diagonales à entrées positives . Nous allons utiliser les notations de Lemme 4.3.1 (4.2), et (4,6) pour les différentielles $da, db, dq, d\lambda, dx$, et dy.

Nous définissons dB_β à la loi des éléments communs sur B_β

$$dB_\beta = \mu(x,y)dxdy = C_{x,y} \prod_{i=1}^{m-1} x_{m-i}^{a-\beta i-1} e^{-x_i^2/2} \prod_{i=1}^{m-1} y_i^{\beta i-1} e^{-y_i^2/2}$$

Par le (4.2), la loi des éléments de L_β est:

$$dL_\beta \equiv J^{-1}_{B\longrightarrow T}\mu(x,y)dxdy \qquad (5.4) \qquad (3.19)$$

$$= 2^{-m}x_1^{2a-\beta(m-1)-2}e^{-x_1^2/2}C_{x,y}\prod_{i=1}^{m-2}x_{m-i}^{a-\beta i-3}e^{-x_i^2/2}\prod_{i=1}^{m-1}y_i^{\beta i-1}e^{-y_i^2/2}dxdy \qquad (3.20)$$

où

$$C_{x,y} = \frac{\prod_{i=1}^{m-1}\Gamma(i\frac{\beta}{2})\prod_{i=1}^{m}\Gamma(a-\frac{\beta}{2}(i-1))}{2^{2m-1}}$$

Nous récrivons (5.5) en termes de x, y, λ, et q:

$$dL_\beta = 2^{-m}C_{x,y}\prod_{i=1}^{m}e^{-x_i^2/2}\prod_{i=1}^{m-1}e^{-y_i^2/2}\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}y_i)}{\prod_{i=1}^{m}q_i}x_1^{2a-\beta(m-1)-2}\prod_{i=1}^{m-2}x_{m-i}^{a-\beta i-3}\prod_{i=1}^{m-1}y_i^{\beta i-1}dqd\lambda$$

$$= 2^{-m}C_{x,y}e^{-\sum_{i=1}^{m}x_i^2/2}e^{-\sum_{i=1}^{m-1}y_i^2/2}\frac{\prod_{i=1}^{m-1}x_{m-i}^{a-\beta i-2}\prod_{i=1}^{m-1}y_i^{\beta i}}{\prod_{i=1}^{m}q_i}.$$

Comme le détèrminant de Vandermonde peut être écrit par rapport à **b** et **q** et les valeurs propres λ ordonnée par:

$$\Delta(\Lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{m-1}b_i^i}{\prod_{i=1}^{m}q_i}$$

il erésulten que:

$$\Delta(\Lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}y_i)^i}{\prod_{i=1}^{m}q_i}$$

Par suite :

$$dL_\beta = 2^{-m}C_{x,y}e^{-\sum_{i=1}^{m}x_i^2/2}e^{-\sum_{i=1}^{m-1}y_i^2/2}\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}y_i)^{\beta i}}{\prod_{i=1}^{m}q_i^\beta}\prod_{i=1}^{m-1}q_i^{\beta-1}\prod_{i=1}^{m-1}x_{m-i}^{2a-\beta(m-1)-2}dqd\lambda$$

$$= 2^{-m} C_{x,y} e^{-\sum_{i=1}^{m} x_i^2/2} e^{-\sum_{i=1}^{m-1} y_i^2/2} \Delta(\Lambda)^{\beta} \prod_{i=1}^{m-1} q_i^{\beta-1} \left(\prod_{i=1}^{m-1} x_{m-i}\right)^{2a-\beta(m-1)-2} dq d\lambda$$

La trace et le determinant sont invariants par les transformations orthogonales, donc tr $(L_\beta) = tr(\Lambda)$ et $det(L_\beta) = det(\Lambda)$. Ceci qui donne

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_{m-i}^2 + \sum_{i=1}^{m-1} y_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2,$$

$$\prod_{i=1}^{m-1} x_{m-i}^2 = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Par remplacement de p par $1 + \frac{\beta}{2}(m-1)$, nous obtenons:

$$dL_\beta = \left(C_q^\beta \prod_{i=1}^{n-1} q_i^{\beta-1} dq\right) \left(m! C_{L,a}^\beta e^{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2/2} \Delta(\Lambda)^\beta \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{a-p} d\lambda\right)$$

où C_q^β est donné dans (5,3).

De ce qui précède on voit que $\mathbf{q}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ sont indépendants, et si on ordonne pas on obtient la densité conjointe des valeurs propres pour l'ensemble $\beta-$Laguerre de paramètre a, et alors q est distribué comme un vecteur normalisé de loi χ_β.

Ceci qui termine la preuve du théorème 5.3.1.

□

4.2.3 Resumé

Dans les Tableaux (**3.5**) et (**3.6**) nous résumons les densités des éléments et des valeurs propres d'une matrice dans les ensembles $\beta-$Hermite et $\beta-$Laguerre .

Ensemble $\beta-$Hermite	$\beta > 0$	$p(H_\beta) = \alpha_{n,\beta}^1 \prod_{i=1}^{n-1} c_i^{i\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2/2} e^{\sum_{i=1}^{n-1} c_i^2}$
Ensemble $\beta-$Laguerre $(L_{\beta,a}(m))$	$\beta > 0$ $a > \beta(m-1)/2$	$p(L_\beta) = \xi_{n,\beta}^1 x_1^{2(a-1)-\beta(m-1)} e^{-x_1^2/2}$ $\times \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{2a-3-(m-1)\beta} e^{-x_i^2/2} \prod_{i=1}^{n-1} y_i^{i\beta-1} e^{-y_i^2/2}$

où

$$\alpha_{n,\beta}^1 = \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \pi^{(n-1)(n-2)\beta/4-n/2}}{\Gamma_{m-1}^\beta(\frac{\beta}{2})}$$

et

$$\xi^1_{n,\beta} = \frac{2^{2(m-1)}\pi^{(m-1)^2\beta/2}}{\Gamma^{\beta}_{m-1}(\frac{\beta}{2})\Gamma^{\beta}_{m}((a-(m-1))\frac{\beta}{2})}$$

Tableau (3.5) Densité des éléments de matrice $\beta-$Hermite et $\beta-$Laguerre.

Ensemble $\beta-$Hermite$(H_\beta(n))$	$\beta > 0$	$p_{_H}(\lambda_1, .., \lambda_n) = \alpha^2_{n,\beta} \left\|\Delta(\Lambda)\right\|^\beta e^{-\frac{1}{2}tr(A)}$
Ensemble $\beta-$Laguerre $(L_{\beta,a}(m))$	$\beta > 0$ $a > \beta(m-1)/2$	$p_{_L}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \xi^2_{n,\beta}$ $\times \left\|\Delta(\Lambda)\right\|^\beta (\det\Lambda)^{\frac{a-\beta(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}tr(\Lambda)}$

où

$$\alpha^2_{n,\beta} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ \pi^{n(n-1)\beta/4}\frac{(\Gamma(1+\frac{\beta}{2}))^n}{\Gamma^{\beta}_{n}(1+\frac{\beta}{2})}$$

et

$$\xi^2_{n,\beta} = \frac{\pi^{m(m-1)\beta/2}}{2^{am}}\frac{(\Gamma(1+\frac{\beta}{2}))^m}{\Gamma^{\beta}_{m}(1+\frac{\beta}{2})\Gamma^{\beta}_{m}((a-(m-1))\frac{\beta}{2})}$$

Tableau (3.6): Densité de valeurs propres de matrice $\beta-$Hermite et $\beta-$Laguerre.

4.2.4 Ensembles de matrices $\beta-$Hermite (gaussien) et $\beta-$Laguerre (Wishart)

Dans ceparagraphe, nous présentons deux nouveaux ensembles de matrices aléatoires et nous donnons la loi des valeurs propres. Nous utilisons les lemmes de la section 4. Nous commençons avec une motivation pour les modèles tri-diagonales. La Bi-diagonalisation et la tri-diagonalisation interviennentt dans la plupart des algorithmes qui calculent les valeurs propres de matrice symétrique ou des valeurs singulières de matrice rectangulaire général. Dans une première étape appellée "sparsification" de la matrice dans le cas symétrique où consiste à la réduction de la matrice pour former une matrice symétrique tri-diagonale ("tri-diagonalisation"). Dans le cas de la matrice rectangulaire, elle implique la réduction en une matrice bi-diagonale ("bi-diagonalisation"). Cette etape est réalisable en un temps fini. La deuxième étape consiste à utiliser une méthode itérative pour calculer les valeurs propres / les valeurs singulières de la matrice: elle permet des approximations infiniment bonne, mais sans réponse exacte. La méthode bi-diagonalisation est due à Golub et Kahan [21], tandis que la méthode tri-diagonalisation est due à Householder [25].

En raison de la propriété d'invariance orthogonale de la loi gaussienne multivariée, ces deux algorithmes d'algèbre linéaire peuvent être appliqués stochastiquement, et il n'est pas très difficile de calculer les lois des matrices résultante tri-diagonale / bi-diagonales. Les deux théorèmes suivants illustrent cela que nous énonçons :

Théorème 5.1.1 ([27], p50): *Soit A une matrice $n \times n$ de l'ensemble GOE ($\beta = 1$), GUE ($\beta = 2$) ou GSE ($\beta = 4$) . Alors la réduction de A à la forme tri-diagonale H_β appartenant à l'ensemble $\beta-$Hermite (voir ci-dessous) a une densité conjointe des valeurs propres données par (3.3) avec $\beta = 1, 2, 4$.*

4.2.5 Remarque

Nous rappelons qu une matrice H_β des ensembles $\beta-$Hermite pour $\beta = 1$, 2 et 4 a pour loi de ses éléments (tri-diagonale, symétrique et réelle):

$$H_\beta \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-2)\beta} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \chi_{2\beta} & N(0,2) & \chi_\beta \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_\beta & N(0,2) \end{pmatrix}$$

Puisque la réduction tri-diagonale est obtenue par multiplication orthogonale symétrique par une suite de matrices orthogonales de Householder dont chacune dépend uniquement de la première colonne courante, les éléments supdiagonaux ont la loi des normes de loi Gaussiennes multivariées (réel, complexe , quaternion).

4.2.6 Théorème 5.1.2

*Soit W une matrice de l ensemble $G(m,n)(\beta = 1), G^2(m,n)(\beta = 2)$ ou $G^4(m,n)(\beta = 4)$.*Alors *la réduction de W à la matrice bi-diagonales B_β de loi $G_{\beta,a}(m)$, de paramètre $a = n\beta/2$ a pour valeurs singulières de loi donnée par (3.18) avec $\beta = 1, 2, 4$ et $a = n\beta/2$.*

4.2.7 Remarque 5.1.3

On peut voir que les ensembles Wishart réels, complexes et quaternions ont des valeurs propres qui ont les mêmes lois que celles des ensembles $\beta-$Laguerre de paramètre $a = n\beta/2$.Les références pour les cas réels, complexes et quaternions sont [51] et [56].

5 Annexe

5.1 Théorème de Selberg

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*,On pose* $dx = dx_1 \times dx_2 \times ..... \times dx_n$,

$$\triangle(x) \equiv \Delta(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \qquad \text{si } n > 1.$$

$$\triangle(x) = 1 \qquad \text{si} \quad n = 1 \tag{4.1}$$

et

$$\psi(x) \equiv \psi(x_1, ..., x_n) = |\triangle(x)|^{2\gamma} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha-1}(1 - x_k)^{\beta-1} \tag{4.2}$$

Alors

$$I(\alpha, \beta, \gamma, n) = \int_0^1 .... \int_0^1 \psi(x)dx = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(1 + \gamma + k\gamma)\Gamma(\alpha + k\gamma)\Gamma(\beta + k\gamma)}{\Gamma(1 + \gamma)\Gamma(\alpha + \beta + (n + k - 1)\gamma)} \tag{4.3}$$

Et pour $1 \le m \le n$

$$\underbrace{\int_0^1 .... \int_0^1} x_1 x_2 .... x_m \psi(x)dx = \prod_{k=1}^{m} \frac{\alpha + (n - k)\gamma}{\alpha + \beta + (2n - k - 1)\gamma} \underbrace{\int_0^1 .... \int_0^1} \psi(x)dx$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \frac{\alpha + (n - k)\gamma}{\alpha + \beta + (2n - k - 1)\gamma} I(\alpha, \beta, \gamma, m) \qquad (S.4) \tag{4.4}$$

où le naturel n et les complèxes α, β, γ vérifient

$$Re(\alpha) > 0,\ Re(\beta) > 0 \quad \text{et} \quad Re(\gamma) > -min(\frac{1}{n}, \frac{Re(\alpha)}{n-1}, \frac{Re(\beta)}{n-1})$$

L'équation (4.3) est la partie intégrant de Selberg et (4.4) est l'extension du Aomoto de lui.

L'équation (4.4) a des facteurs extra $x_1, ..., x_m$, par apport à l'équation (4.3). Peut-on introduire des facteurs supplémentaires $(1 - x_j)$ ainsi? Quand il n'y a pas de chevauchement dans les deux catégories de facteurs, le résultat est:

$$B(m_1, m_2) = \int_0^1 .... \int_0^1 \prod_{i_1=1}^{m_1} x_{i_1} \prod_{i_2=m_1+1}^{m_1+m_2} (1 - x_{i_2}) \psi(x)dx \tag{4.1.5}$$

$$= \frac{\prod_{i_1=1}^{m_1} (\alpha + (n - i_1)\gamma) \prod_{i_2=1}^{m_2} (\beta + (n - i_2)\gamma)}{\prod_{i=1}^{m_1+m_2} (\alpha + \beta + (2n - i - 1)\gamma)} I(\alpha, \beta, \gamma, n) \tag{4.6}$$

$m_1, m_2 \geq 0, \qquad m_1 + m_2 \geq n$
et quand il y a chevauchement

$$C(m_1, m_2, m_3) := \int_0^1 .... \int_0^1 \prod_{i_1=1}^{m_1} x_{i_1} \prod_{i_2=m_1+1-m_3}^{m_1+m_2} (1 - x_{i_2}) \psi(x) dx$$

$$= \prod_{i=1}^{m_3} \frac{(\alpha + \beta + (n - i - 1)\gamma)}{(\alpha + \beta + 1 + (2n - i - 1)\gamma)} B(m_1, m_2) \tag{4.7}$$

$m_1, m_2, m_3 \geq 0, \quad m_1 + m_2 - m_3 \geq n$
L'équation (4.6) est déduite de l'équation (4.4); On vérifie que les deux côtés satisfont à relation de récurrence suivante

$$B(m_1, m_2) = B(m_1, m_2 - 1) + B(m_1 + 1, m_2 - 1) \tag{4.8}$$

et la condition initiale $B(m, 0)$ redonne l'équation (4.4). Pour déduire l'équation (4.7) c'est un peu plus long (voir Andrews et al.1993).

5.2 Quelques applications immédiates

Nous présentons ici une preuve rapide pour les formes d'Hermite et de Laguerre de l'intégrale de Selberg [42], en utilisant les ensembles $\beta-$Hermite, $\beta-$Laguerre respectivement.

Soit H une matrice de l'ensemble $\beta-$Hermite, et $(\lambda_i)_{i=1}^n$ ses valeures propres.
Soit intégrale de Hermite-Selberg:

$$I_H(\beta, n) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta(\Lambda)|^\beta e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2/2} d\lambda \tag{4.9}$$

Nous avons cela:

$$I_H(\beta, n) = n! \left(\int_{0 \leq \lambda \leq ...... \leq \lambda_n < \infty} \Delta(\Lambda)^\beta e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2/2} d\lambda \right) \left(C_q^\beta \int_{S_+^{n-1}} \prod_{i=1}^n q_i^{\beta-1} dq \right) \tag{4.10}$$

où C_q^β est comme dans (3,17). Nous introduisons la $n!$ car dans la première intégrale, nous avons ordonné les valeurs propres; S_{n-1} signifie que tous les q_i sont positifs.

on remarque que C_q^β peut être facilement calculée indépendamment des ensembles $\beta-$Hermite.

En utilisant la formule de Vandermonde donnée par le lemme 4.2.2, la formule du jacobien J donné en Lemme 4.3.1 , et le fait que la norme de Frobenius d'une matrice tri-diagonale d'ensemble $1-$Hermite est la même que la norme de Frobenius de ses valeurs propres, on obtient:

$$\begin{aligned}
I_H(\beta,n) &= n!C_q^\beta \int_{\mathbb{R}^n\times[0,+\infty]^{n-1}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n-1} q_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{\beta i}}{\prod_{i=1}^{n} q_i^\beta} \prod_{i=1}^{n-1} q_i^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2} \right) dadb \\
&= n!C_q^\beta (2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n-1} \int_{[0,+\infty]} b_i^{\beta i-1} e^{-b_i^2} db_i \\
&= n! \frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{\beta}{2}n)}{\left[\Gamma(\frac{\beta}{2})\right]^n} (2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2}i)}{2} = \frac{1}{C_H^\beta} \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne la formule de l'intégrale de Laguerre-Selberg.

$$I_L^{\beta,a,n} = \frac{1}{C_L^{\beta,a}}. \qquad (4.2.4)$$

6 Conclusion

Dans ce mémoire, en suivant les resultats devloppées dans le livre de M^{m} Lel Mehta, nous avons étudié les lois de probabilités de matrices aléatoires dans les trois ensembles G.O.E, G.U.E, G.S.E. Dans chaque cas nous avons expliciter les formules des densités de matrices et des valeurs propres. Dans la deuxième partie, nous avons devloppé les resultats de Dimitriu. Dans le cas de matrices aléatoires par blocs en donnant la densité des valeurs propres.

7 Bibliographie

[1] Alan L. Andrew. Choosing test matrices for numerical software. In W.L. Hogarth and B.J. Nege, editors, Computational Techniques and Applications Conference: CTAC-89, pages 561-567, 1990.

[2] K. Aomoto. Jacobi polynomials associated with Selberg integrals. SIAM J. Math. Anal., 18:545-549, 1987.

[3] Richard Askey and Donald Richards. Selberg's second beta integral and an integral of Mehta. In T.W. Anderson et al., editor, Probability, Statistics, and Mathematics: Papers in Honor of Samuel Karlin, pages 27-39. Academic Press, New York, 1989.

[4] Jinho Baik, Percy A. Deift, and Kurt Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. J. Amer. Math. Soc., 12(4):1119-1178, 1999.

[5] T. Baker and Peter Forrester. The Calogero-Sutherland model and generalized classical polynomials. Commun.Math.Phys., 188:175-216, 1997.

[6] Estelle L. Basor, Craig A. Tracy, and Harold Widom. Asymptotics of levelspacing distributions for random matrices. Phys. Rev. Letters, 69:5-8, 1992.

[7] R.J. Beerends and M.Opdam. Certain hypergeometric series related to the root system BC. Trans. Amer. Math. Soc, 339:581-609, 1993.

[8] Alexei Borodin and Grigori Olshanski. Z-measures on partitions and their scaling limits. Technical Report math-ph/0210048.

[9] Yasuko Chikuse. Properties of Hermite and Laguerre polynomials in matrix argument and their applications. Lin. Alg. Appl,176:237-260, 1992.

[10] A.G. Constantine. Some noncentral distribution problems in multivariate analysis. Ann. Math. Statist., 34:1270-1285, 1963.

[11] James Demmel. The probability that a numerical analysis problem is di cult. Math. of Comp., 50:449-480, 1988.

[12] Persi Diaconis. Group Representations in Probability and Statistics. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1998.

[13] Ioana Dumitriu and Alan Edelman. Matrix models for beta-ensembles. J. Math. Phys., 43:5830-5847, 2002.

[14] Freeman J. Dyson. Statistical theory of energy levels of complex systems, i, ii, and iii. J. Math. Phys., 3:140-156, 157-165, 166-175, 1962.

[15] Freeman J. Dyson. The threefold way. Algebraic structures of symmetry groups and ensembles in Quantum Mechanics. J. Math. Phys., 3:1199-1215, 1963.

[16] Alan Edelman. Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1989.

[17] Alan Edelman. On the distribution of a scaled condition number. Mathematics of Computation, 58:185-190, 1992.

[18] M.B. Eisen, P.T. Spellman, P.O Brown, and D. Botstein. Cluster analysis and display of genome-wide expression patterns. Proc. Natl. Acad. Sci., 95:14863-14868, 1998.

[19] Alex Gamburd and Persi Diaconis. Magic squares, 2003. Preprint.

[20] Michel Gaudin. Sur la loi limite de l' espacement des valeurs propres d'une matrice al eatoire. Nucl. Phys., 25:447-458, 1961.

[21] Gene Golub and William Kahan. Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix. SIAM J. Num. Anal., 2:205-224, 1965.

[22] I. Goulden and David M. Jackson. Maps in locally orientable surfaces and integrals over real symmetric matrices. Canadian J. Math., 49:865-882, 1997.

[23] J. Gravner, Craig A. Tracy, and Harold Widom. A growth model in a random environment. Ann. Probab., 30:1340-1368, 2002.

[24] Philip J. Hanlon, Richard P. Stanley, and John R. Stembridge. Some combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices. Contemp. Math., 138:151-174, 1992.

[25] A. S. Householder. Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. Journal of the Association of Computing Machinery, 5:339-342, 1958.

[26] P.L. Hsu. On the distribution of the roots of certain determinantal questions. Ann. Eugenics, 9:250-258, 1939.

[27] Dmitriu A. Ivanov. Random-matrix ensembles in p-wave vortices. In Proceedings of the Dresden workshop "Vortices in unconventional superconductors and superfluids". Springer, Heidelberg, 2002. [e-print cond-mat/0103089].

[28] Henry Jack. A class of symmetric polynomials with a parameter. Proc. R. Soc. Edinburgh, 69:1{18, 1970. 158}

[29] Alan T. James. Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples. Ann. Math. Stat., 35:475-501, 1964.

[30] Kurt Johansson. On random matrices from the compact classical groups. Ann. of Math., 145(3):519-545, 1997.

[31] Kurt Johansson. On fluctuations of random hermitian matrices. Duke Math. J., 91:151-203, 1998.

[32] Kurt Johansson. Shape fluctuations and random matrices. Commun. Math. Phys., 209:437-476, 2000.

[33] Iain M. Johnstone. On the distribution of the largest principal component. Ann. of Stat., 29(2):295-327, 2001.

[34] K. Kadell. The Selberg-Jack polynomials. Advances in Mathematics, 130:33-102, 1997.

[35] Joichi Kaneko. Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials. SIAM J. Math. Anal., 24:1086-1110, 1993.

[36] P.R. Krishnaiah and T.C. Chang. On the exact distribution of the smallest root of the Wishart matrix using zonal polynomials. Ann. I. Math. Stat.,23:293-295,1971.

[37] M. Lasalle. Polynômes de hermite généralisés. C.R. Acad. Sci. Paris, Séries I, 313:579-582, 1991.

[38] M. Lasalle. Polynômes de jacobi généralisés. C.R. Acad. Sci. Paris, Séries I, 312:425-428, 1991.

[39] M. Lasalle. Polynômes de laguerre généralisés. C.R. Acad. Sci. Paris, Séries I, 312:725-728, 1991.

[40] V.A. Mar cenko and L.A. Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. Math USSR Sbornik, 1:457-483, 1967.

[41] Brendan D. McKay. The expected eigenvalue distribution of a large regular graph. Lin. Alg. Appl., 40:203-216, 1981.

[42] Madan Lal Mehta. Random Matrices. Academic Press, Boston, second edition, 1991.

[43] Madan Lal Mehta and Michel Gaudin. On the density of eigenvalues of a random matrix. Nucl. Phys., 4:420-427, 1960.

[44] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. In Analytic Number Theory, Proceedings of the 1972 St. Louis Symposium, pages 181-193. American Mathematical Society, 1973.

[45] Robb J. Muirhead. Aspects of Multivariate Statistical Theory. John Wiley & Sons, New York, 1982.

[46] Robb J. Muirhead and Yasuko Chikuse. Asymptotic expansions for the joint and marginal distributions of the latent roots of the covariance matrix. Ann. of Stat., 3:1011-1017, 1975.

[47] A.M. Odlyzko. On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. In M. van Frankenhuysen and M. L. Lapidus, editors, Dynamical, Spectral and Arithmetic Zeta-Functions, Contemporary Mathematics Series, volume 290, pages 139-144. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[48] Andrei Okounkov. Random matrices and random permutations. Internat. Math. Res. Notices, 20:1043-1095, 2000.

[49] Beresford N. Parlett. The Symmetric Eigenvalue Problem. SIAM Classics in Applied Mathematics, 1998.

[50] A. Selberg. Bemerkninger om et multiplet integral. Norsk Matematisk Tiddskrift, 26:71-78, 1944.

[51] Jack W. Silverstein. The smallest eigenvalue of a large dimensional Wishart matrix. Ann. of Probab., 13:1364-1368, 1985.

[52] Steve Smale. On the efficiency of algorithms of analysis. Bulletin of the American Math. Soc., 13:87-121, 1985.

[53] Craig A. Tracy and Harold Widom. On orthogonal and symplectic matrix ensembles. J. Stat. Phys., 92:809-835, 1996.

[54] Craig A. Tracy and Harold Widom. Universality of the distribution functions of random matrix theory. In Statistical Physics on the Eve of the 21st Century: In 162 Honour of J.B.McGuire on the Occasion of His 65th Birthday, pages 230-239. World Scienti c Pub, 1999.

[55] Craig A. Tracy and Harold Widom. The distribution of the largest eigenvalue in the Gaussian ensembles. In Calogero-Moser-Sutherland Models, CRM Series in Mathematical Physics, volume 4, pages 461-472. Springer-Verlag, 2000.

[56] Hale F. Trotter. Eigenvalue distributions of large hermitian matrices; Wigner's semi-circle law and a theorem of Kac, Murdock, and Szego. Advances in Mathematics, 54:67-82, 1984.

[57] P. Viswanath, D. Tse, and V. Anantharam. Asymptotically optimal waterfilling in vector multiple access channels. IEEE Transactions on Information

Theory, 47(1):241-267, 2001.

[58] Eugene P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. Ann. of Math., 62:548-564, 1955.

[59] J. Wishart. The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population. Biometrika A, 20:32-43, 1928.

[60] Z. Yan. Generalized hypergeometric functions and Laguerre polynomials in two variables. Contemp. Math., 138:239-259, 1992.

[61] L. Zheng and D. Tse. Diversity and multiplexing: A fundamental trade-off in multiple antenna channels. IEEE Trans. Inf. Th., 2002.

[62] M. Zirnbauer. Riemannian symmetric superspaces and their origin in random matrix theory. J. Math. Phys., 37:4986-5018, 1996.