Problèmes elliptiques semilinéaires de type Brezis-Nirenberg contenant l'exposant critique de Sobolev

BENIBRIR Fatiha

juillet 2013

Table des Matières

Introduction

Dans ce mémoire on s'interesse à l'étude d'un problème elliptique contenant l'exposant critique de Sobolev. En particulier, le célèbre problème introduit dans le papier de Brézis-Nirenberg [8].

Ce dernier a été une source d'inspiration pour l'étude des problèmes à exposant critique.

Historiquement, le point de départ est le problème de Yamabe en géométrie différentielle. Le problème est de trouver une solution satisfaisante

$$\begin{cases} -4\frac{N-1}{N-2}\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} - R(x)\,u & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M. \end{cases}$$

où M est une variété Riemanniènne de dimension N et $R(x)$ est la courbure scalaire, pour plus de détails voir Aubin [5] et [4].

Brézis et Nirenberg [8] ont considéré le même type de problème pour Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Le problème étudié est sous la forme:

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\,u + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $p = 2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et λ est un paramètre réel.

La présence de l'exposant critique de Sobolev implique que la fonctionnelle d'énergie associée au problème ne satisfait pas la condition de Palais-Smale globale car l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte. Par conséquent, les techniques variationnelles standards ne sont pas applicables.

En se basant sur les travaux de Aubin, ils ont montré que la condition de Palais-Smale peut être satisfaite pour un certain niveau d'énergie en faisant intervenir la meilleure contante de Sobolev d'où la notion de Palais-Smale locale.

Dans ce mémoire nous détaillons les principaux résultats concernant le problème (P_λ).

Notre travail se présente comme suit:

- Dans le chapitre 1, on rappelle les principaux outils utilisés dans ce mémoire.

- Dans le chapitre 2, on démontre l'existence et la non existence de solutions positives pour le problème (P_λ) en se basant sur le travail de Brézis-Nirenberg [8].

- Quant au chapitre 3, on donne les différents résultats d'existence et de multiplicité obtenus pour le problème (P_λ) tels que les travaux de Capozzi et al [9], Cerami et al [11].

Chapitre 1

Outils de base

Dans ce chapitre nous rappellons quelques notions de l'analyse fonctionnelle utilisées dans le mémoire.

1.1 Les espaces de Sobolev

Définition 1.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.* ***L'espace de Sobolev*** $W^{1,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \Big/ \begin{array}{l} \exists\ g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ \text{ tels que} \\ \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \ \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ 1 \leq p < \infty.$$

est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
L'espace $H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2};$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Définition 1.1.2 *Soient* $m \geqslant 2$ *un entier et soit* p *un réel avec* $1 \leq p \leq \infty$. *On définit par récurrence*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1...N \right\}.$$

II revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \Big/ \begin{array}{l} \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad \text{tel que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

est un espace de Banach.
On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Définition 1.1.3 *Soit* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *On note*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}$*muni de la norme induite par rapport* $W^{1,p}$ *est un espace de Banach réflexif si* $1 < p < \infty$.
H_0^1 *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* H^1.

Proposition 1.1.4 *$W^{1,p}$ est un espace réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Corollaire 1.1.5 *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On a*

$$\begin{array}{lll} si\ 1 \leq\ p < N & alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), & où\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ si\ p = N & alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), & \forall q \in [p, +\infty[, \\ si\ p > N & alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega), & \end{array}$$

avec injections continues.

Théorème 1.1.6 [6] (***Rellich-Kondrachov***)
Soit Ω un domaine borné de classe C^1. On a

$$\begin{array}{lll} si\ p < N & alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), & \forall q \in [1, p^*[\ \ où\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ si\ p = N & alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), & \forall q \in [1, +\infty[, \\ si\ p > N & alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right), & \end{array}$$

avec injections compactes.

Remarque 1.1.7
$$H^1\left(\mathbb{R}^N\right) = H_0^1\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Lemme 1.1.8 *Soit $u_n \in H_0^1(\Omega)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega |\nabla (u_n - u)|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + o(1).$$

Proposition 1.1.9 [6] (***L'inégalité de Poincaré***)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$
$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p. \tag{1.1}$$
L'inégalité (1.1) reste vraie si on suppose que Ω est seulement de mesure finie.

Lemme 1.1.10 (***lemme de Brézis-Lieb***)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u_n \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Si u_n est bornée dans L^p et $u_n \to u$ presque partout dans Ω, alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p \right) = \|u\|_p^p.$$

1.2 Résultats généraux

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach, une suite $(u_n)_n$ de X converge faiblement vers u si $\forall f \in X'$ (le dual de X), $f(u_n) \to f(u)$. On note $u_n \rightharpoonup u$.*

Définition 1.2.2 *Soit X un espace de Banach et soit J l'injection canonique de X dans X''. on dit que X est réflexif si $J(X) = X''$.*
Lorsque X est réflexif on identifie implicitement X et X''.

Théorème 1.2.3 [17] (***Eberlein-Shmulyan***)
Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si de toute suite bornée $(u_n)_n$ de X contient une sous-suite qui converge faiblement dans X.

Théorème 1.2.4 [6] *Si $u_n \to u$, alors $\|u_n\|$ est bornée et*

$$\|u\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\| .$$

Théorème 1.2.5 [6] *Soient $(u_n)_n$ une suite de L^p et $u \in L^p$, tels que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Alors il existe une sous-suite extraite $(u_{n_k})_k$ telle que*

$$\begin{array}{ll} u_{n_k}(x) \to u(x) & p.p.\ sur\ \Omega \\ |u_{n_k}| \leq h(x) & \forall k\ et\ p.p.\ sur\ \Omega,\ avec\ h \in L^p. \end{array}$$

Définition 1.2.6 *Soit u une fonction de classe C^1 au voisinage de $\partial\Omega$, la dérivée normale de u en $\sigma \in \partial\Omega$ est définie par*

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(\sigma) := \nabla u(\sigma) . \upsilon(\sigma) = \langle \nabla u(\sigma), \upsilon(\sigma) \rangle ,$$

où υ est la normale extérieure.

Définition 1.2.7 (*Suites de Palais-Smale*)
Soit F une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle F si

$$\begin{array}{ll} |F(u_n)| \leq C & \forall n \in \mathbb{N}\ où\ C \in \mathbb{R}^+ \\ \|F'(u_n)\| \to 0 & quand\ n \to +\infty. \end{array}$$

Définition 1.2.8 (*Condition de Palais-Smale*)
On dit qu'une fonctionnelle F définie sur un espace de Banach X vérifie la condition de Palais-Smale si de toute suite de Palais-Smale on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans X.

Définition 1.2.9 $\left(\textit{Condition } (P.S)_\beta\right)$
Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On dit que F vérifie la condition de Palais-Smale au niveau β $\Big($et on écrit en abrégé F vérifie $(P.S)_\beta\Big)$, si pour toute suite $(u_n)_n$ telle que

$$\begin{aligned} &F(u_n) \to \beta \\ &F'(u_n) \to 0, \end{aligned}$$

on peut extraire une sous-suite convergente dans X.

Théorème 1.2.10 [6] *Soit Ω un ouvert borné. Il existe une base Hilhertienne $(e_n)_n$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ de réels avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \to \infty$ tels que*

$$\begin{aligned} &e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \\ &-\Delta e_n = \lambda_n e_n \qquad\qquad \textit{sur } \Omega. \end{aligned}$$

On dit que $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ sont les valeurs propres du $-\Delta$ (avec condition de Dirichlet) et que les $(e_n)_n$ sont les fonctions propres associées.

Théorème 1.2.11 [15] (***Principe du maximum fort***)
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ vérifie $-\Delta u \leq 0$ et u atteint un maximum positif ou nul à l'interieur de Ω, alors u est une constante sur Ω.

Théorème 1.2.12 [15] (***Principe du maximum de Hopf***)
Soit Ω un domaine borné de classe C^1. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

qui vérifie $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = 0$, alors u est une constante sur Ω.

Théorème 1.2.13 [14] (***Gidas-Ni-Nirenberg***)
Soit B la boule unité dans $\mathbb{R}^N$. Supposons que $g \in C^1(B)$ et $u \in C^2\left(\bar{B}\right)$ satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \textit{dans } B, \\ u > 0 & \textit{dans } B, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial B. \end{cases}$$

Alors u est une solution radiale et $u'(r)$ est négative.

Définition 1.2.14 *Un domaine Ω est dit étoilé par rapport à un point x_0, si pour tout x dans Ω, le seguement joingnant x_0 à x est contenu dans Ω i.e*

$$\forall x \in \Omega \qquad (1-t)\, x_0 + tx \in \Omega \text{ pour tout } t \in [0,1]\,.$$

Théorème 1.2.15 [9]
Soient H un espace de Hilbert réel et ϕ une fonctionnelle de classe $C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaisant les hypothèses suivantes:

(F_1) $\phi(u) = \phi(-u)$, $\phi(0) = 0$ *pour tout* $u \in H$,

(F_2) *Il existe* $\beta > 0$ *tel que* ϕ *vérifie* $(P.S)$ *dans* $]0,\beta[$,

(F_3) *Ils existent deux espaces fermés* $V, W \hookrightarrow H$ *et deux constantes positives* ρ, δ *tels que*

- *i.* $\phi(u) < \beta$ *pour tout* $u \in W$
- *ii.* $\phi(u) \geqslant \delta$ *pour tout* $u \in V, \|u\| = \rho$
- *iii.* $co\dim V < +\infty$.

Alors il existe au moins m paires de points critiques, avec

$$m = \dim(V \cap W) - co\dim(V + W)\,.$$

1.3 Multiplicateurs de Lagrange

Définition 1.3.1 *Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X,\mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes*

$$S := \{v \in X \ \ / F(v) = 0\}\,.$$

On suppose que pour tout $u \in S$, on a $F'(u) \neq 0$. Si $J \in C^1(X,R)$ (ou bien de classe C^1sur un voisinage de S).
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(u) = c$ et $J'(u) = \lambda F'(u)$. Le point u est un point critique de J sur S et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c (ou le point critique u).

Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = \lambda F'(u)$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par le point critique u sur la contrainte S.

Proposition 1.3.2 *Sous les hypothèses et notations de la définition* 1.3.1, *on suppose que* $u_0 \in S$ *est tel que* $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. *Alors il existe* $\lambda \in S$ *tel que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Chapitre 2

Solutions positives pour un problème elliptique contenant l'exposant critique de Sobolev

Dans ce chapitre on s'interesse à l'existence de solutions positives du problème suivant:

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = u^{p-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$, $p = 2^*$ est l'exposant critique de Sobolev et λ un paramètre réel.

Le travail de Brézis-Nirenberg [8] constitue un des articles les plus importants, pour l'étude des problèmes elliptiques non compacts, ils ont démontré que l'existence de solutions positives dépendent du paramètres λ et la dimension N. Dans ce chapitre nous essayons de donner les principaux résultats concernant ce type de problèmes.

Des resultats d'existence et de non existence sont établis:

Résultats de non existence:

Théorème 2.1 *Le problème (P_λ) n'admet pas de solutions pour $\lambda \geqslant \lambda_1$, où λ_1 est la première valeur propre du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.*

Théorème 2.2 *Si Ω est un domaine étoilé, alors le problème (P_λ) n'admet pas de solutions pour tout $\lambda \leqslant 0$.*

Théorème 2.3 *Lorsque $N = 3$, et Ω une boule alors le problème (P_λ) n'admet pas de solutions pour $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$.*

Résultats d'existence:

Les résultats d'existence dépendent de la dimension. On distingue deux cas $N \geqslant 4$ et $N = 3$.

Théorème 2.4 *Si $N \geqslant 4$, le problème (P_λ) possède une solution pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1)$.*

Théorème 2.5 *Si $N = 3$, et Ω est une boule, le problème (P_λ) possède une solution pour tout $\lambda \in \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$.*

2.1 Preuve des résultats de non existence

Preuve du théorème 2.1 :
Raisonnons par l'absurde. Supposons que le problème (P_λ) admet une solution u, soit φ_1 la fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1$du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Multiplions l'équation (P_λ) par φ_1 et intégrons sur Ω,

$$\int_\Omega (-\Delta u)\ \varphi_1\ dx = \int_\Omega u^{p-1}\ \varphi_1\ dx + \lambda \int_\Omega u\ \varphi_1\ dx \quad > \lambda \int_\Omega u\ \varphi_1\ dx \quad (2.1)$$

car u et $\varphi_1$sont strictement positives dans Ω.
D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\Delta u)\ \varphi_1\ dx &= -\int_\Omega u\ \Delta\varphi_1\ dx - \int_{\partial\Omega} \left(\varphi_1 \frac{\partial u}{\partial \upsilon} - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial \upsilon}\right) d\sigma \quad (2.2) \\ &= \lambda_1 \int_\Omega u\ \varphi_1\ dx. \end{aligned}$$

où υ est la normale exterieure à $\partial\Omega$.
D'aprés (2.1) et (2.2), on obtient que $\lambda < \lambda_1$ ce qui est absurde. ■

La preuve du Théorème 2.2 est basée sur l'identité de Pohozaev.

Lemme 2.1.1 ***(Identité de Pohozaev)***
Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, supposons que u est une solution régulière du problème suivant:

$$(\tilde{P}) \begin{cases} -\Delta u = g(u), \\ u = 0. \end{cases}$$

où g est une fonction continue, alors

$$\frac{2-N}{2} \int_\Omega g(u)\, u dx + N \int_\Omega G(u)\, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x.\upsilon) \left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2 d\sigma,$$

où

$$G(u) = \int_0^u g(t)\ dt,$$

et v *est la normale exterieure à* $\partial\Omega$.

Preuve :
Multiplions l'équation $(\tilde{P})$ par $x.\nabla u$ et intégrons sur Ω,

$$\int_\Omega (-\Delta u)\ x.\nabla u dx = \int_\Omega g(u)\ x.\nabla u dx$$

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j^2}\ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)\ dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(g(u)\ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)\ dx. \tag{2.3}$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)\ dx, \\ &= \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right\} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx, \end{aligned}$$

D'après (2.3), on a

$$A = -\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(g(u)\ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx. \tag{2.4}$$

Posons

$$\begin{aligned} B &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right)\ dx, \\ &= \frac{N}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right)\ dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right)\ dx - \frac{N}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx.$$

Par la formule de divergence, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^N x_i \left|\nabla u\right|^2 .\upsilon_i \, d\sigma - \frac{N}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left|\nabla u\right|^2 x.\upsilon \, d\sigma - \frac{N}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 \, dx \qquad (2.5)\end{aligned}$$

et

$$A = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \upsilon_j\right) \, d\sigma.$$

Comme u est nulle sur $\partial\Omega$, alors

$$\nabla u = \langle \nabla u, \upsilon \rangle \, \upsilon = \frac{\partial u}{\partial \upsilon} \upsilon \;\; \text{sur } \partial\Omega.$$

A s'écrit

$$A = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \upsilon_j\right) \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2 x.\upsilon \, d\sigma. \qquad (2.6)$$

D'après (2.5) et (2.6), (2.4) devient

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2 x.\upsilon \, d\sigma &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(g\left(u\right) \; x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left|\nabla u\right|^2 x.\upsilon \, d\sigma \\ &\quad -\frac{N}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 \, dx + \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2 x.\upsilon \, d\sigma &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(g\left(u\right) \; x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \\ &\quad + \frac{2-N}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 \, dx. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_i G\left(u\right)\right) \, dx = \int_\Omega N \; G(u) \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(g(u) x_i \, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \, dx.$$

En utilisant la formule de divergence, alors

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \ (x_i G\,(u)) \ dx = \int_{\partial\Omega} G(u) \ x.\upsilon \ d\sigma,$$

puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $G(u) = 0$, par conséquent

$$\int_{\Omega} N \ G(u) \ dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left(\ g(u) x_i \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \ dx.$$

(2.7) devient

$$\int_{\Omega} N \ G(u) \ dx = \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \ dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right|^2 x.\upsilon \ d\sigma.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme puisque

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \ dx = \int_{\Omega} g\,(u) \ u.$$

■

Preuve du théorème 2.2 :
Raisonnons par l'absurde. Supposons que u est solution de (P_λ). Appliquons l'identité de Pohozaev avec $g(u) = u^{p-1} + \lambda u$, alors

$$G(u) = \int_o^u g(t) dt = \frac{u^p}{p} + \lambda \frac{u^2}{2},$$

ce qui donne

$$\frac{2-N}{2} \int_{\Omega} (u^{p-1} + \lambda u) \ u \ dx + N \int_{\Omega} \left(\frac{u^p}{p} + \lambda \frac{u^2}{2} \right) \ dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right|^2 x.\upsilon \ d\sigma,$$

donc

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right|^2 x.\upsilon \ d\sigma, \qquad (2.8)$$

comme Ω est étoilé par rapport à l'origine, alors $x.\upsilon > 0$ pour presque tout $x \in \partial\Omega$.
On distingue deux cas:
Si $\lambda < 0$ on a $u \equiv 0$ ce qui est absurde.
Si $\lambda = 0$ on a $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = 0$ sur $\partial\Omega$. D'après le Théorème 1.2.12 (principe du

maximum de Hopf) on a que u est une constante sur Ω.
Donc

$$0 = \int_{\Omega} -\Delta u = \int_{\Omega} u^{p-1} dx,$$

alors $u \equiv 0$ dans Ω, ce qui est absurde. ■

Remarque 2.1.2 *1. La situation est differente quand Ω n'est pas étoilé. Kazdan et Warner [18] ont démontré l'existence de solutions radiales pour tout $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ et Ω un anneau.*

2. Pour $\lambda = 0$, Coron [12] a démontré l'existence d'au moins une solution pour Ω un domaine borné avec une certaine condition géométrique.

3. Brézis-Nirenberg [8] on démontré l'existence d'une solution, pour $\lambda = a(x)$ où $a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ telle que $a(x) \geqslant \delta$ dans un sous-ensembe de Ω et δ une constante > 0.

Preuve du théorème 2.3 :
Pour simplifier on prend Ω est la boule unité. Raisonnons par l'absurde. Supposons que u est une solution de (P_λ) et $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$. Le Théorème 1.2.13 (de Gidas-Ni-Niremberg) assure que u est une fonction radiale i.e

$$u(x) = u(\mid x \mid) = u(r).$$

Le problème (P_λ) s'écrit donc

$$(P_1) \begin{cases} -u'' - \frac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u & \text{sur } [0,1], \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Soit $\psi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ telle que $\psi(0) = 0$.
Multiplions l'équation (P_1) par $r^2\psi u'$ et intégrons sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 (-u" - \frac{2}{r}u')\ r^2\psi u'\ dr = \int_0^1 (u^5 + \lambda u)\ r^2\psi u'\ dr. \tag{2.9}$$

Posons

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^1 (u'' + \frac{2}{r}u')r^2\psi u' dr \\ &= -2\int_0^1 (u')^2 r\ \psi\ dr - \int_0^1 u'u''r^2\psi\ dr \\ &= -2\int_0^1 (u')^2 r\ \psi\ dr - \left[\frac{(u')^2}{2} r^2\ \psi\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(u')^2}{2}(2\ r\ \psi + r^2\psi')\ dr \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (u')^2 (\frac{r^2\psi'}{2} - r\ \psi)\ dr - \frac{1}{2}(u'(1))^2\psi(1),$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (u^5 + \lambda u)\ r^2\psi u'\ dr \\ &= \int_0^1 u^5 r^2 \psi u' dr + \lambda \int_0^1 u\ r^2\psi u'\ dr \\ &= \left[\frac{u^6}{6} r^2\psi\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')dr + \lambda \left[\frac{u^2}{2} r^2\psi\right]_0^1 \\ &\quad -\lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')dr, \end{aligned}$$

comme $u(1) = 0$ alors

$$I_2 = -\int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')dr - \lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')dr.$$

Ainsi (2.9) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (u')^2 (\frac{1}{2} r^2\psi' - r\ \psi)\ dr - \frac{1}{2}(u'(1))^2\psi(1) \\ = &\ -\int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')dr - \lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')dr. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Multiplions l'équation (P_1) par $(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)u$ et intégrons sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 (-u'' - \frac{2}{r}u')\ (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)u\ dr = \int_0^1 (u^5 + \lambda u)\ (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)u\ dr. \tag{2.11}$$

Posons

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 (-u'' - \frac{2}{r}u')\ (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)u\ dr \\ &= \int_0^1 [-u''u\ (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi) - 2u'u(\frac{1}{2}r\psi' - \psi)]\ dr \\ &= -2\int_0^1 u'u(\frac{1}{2}r\psi' - \psi)\ dr - \left[u'u(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)\right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 u'(\frac{1}{2}u'r^2\psi' - u'r\psi + \frac{1}{2}ur^2\psi'' + ur\psi' - u\psi - ur\psi')\ dr, \end{aligned}$$

comme $u(1) = 0$ alors

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\ \psi\right)\ dr + \int_0^1 u'u\ \left(-r\psi' + 2\psi + \frac{1}{2}r^2\psi'' - \psi\right)\ dr \\
&= \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\ \psi\right)\ dr + \int_0^1 u'u\ \left(\psi - r\psi' + \frac{1}{2}r^2\psi''\right)\ dr \\
&= \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\ \psi\right)\ dr + \left[\frac{u^2}{2}(\psi - r\psi' + \frac{1}{2}r^2\psi''\right]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{u^2}{2}\left[\psi' + r\psi'' + \frac{r^2}{2}\psi''' - \psi' - r\psi''\right]\ dr \\
&= \int_0^1 (u')^2 \left[\frac{1}{2}r^2\psi' - r\ \psi\right]\ dr - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi''' dr,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 (u^5 + \lambda u)\ \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) u\ dr \\
&= \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\ dr + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\ dr.
\end{aligned}
$$

Ainsi, (2.11) devient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\ \psi\right) dr - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi''' dr \\
= &\int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\ \right) dr. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Soustrayons (2.10) à (2.12), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(u'(1))^2\psi\,(1) - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi''' dr \\
= &\int_0^1 u^6 \left[\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi + \frac{1}{6}\left(r^2\psi' + 2r\psi\right)\right] dr \\
&+\lambda \int_0^1 u^2 \left[\frac{1}{2}r^2\psi' - r\ \psi + \frac{1}{2}\left(r^2\psi' + 2r\psi\right)\right]\ dr.
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne

$$
\frac{1}{2}(u'(1))^2\psi\,(1) + \frac{2}{3}\int_0^1 u^6 \left(r\psi - r^2\psi'\right)\ dr = \int_0^1 u^2 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) r^2 dr.
$$

Prenons

$$\psi(r) = \sin\left(\sqrt{4\lambda} r\right),$$

tel que

$$\psi(1) \geqslant 0, \quad \lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi''' = 0$$

et

$$r\psi - r^2\psi' = r\sin\left(\sqrt{4\lambda} r\right) - r^2\sqrt{4\lambda}\cos\left(\sqrt{4\lambda} r\right) > 0 \text{ sur } (0,1]$$

car

$$\sin\theta - \theta\cos\theta > 0 \text{ pour } \theta \in (0,\pi]$$

ce qui contredit $\psi(1) \geqslant 0$. ■

2.2 Preuve des résultats d'existence

Posons

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_p=1}} \left\{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2\right\}$$

et

$$S = S_0 = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_p=1}} \left\{\|\nabla u\|_2^2\right\} \tag{2.13}$$

S est appelée la meilleure constante de Sobolev pour l'injection

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Propriétés fondamentales de S

Lemme 2.2.1 *S est indépendante de Ω, et ne dépend que de N.*

Preuve :
Montrons que S ne dépend pas de Ω. Ceci revient à démonter que

$$S(\Omega) = S\left(\mathbb{R}^N\right),$$

puisque $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, alors $S(\Omega) \geqslant S\left(\mathbb{R}^N\right)$.
On a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_p^2} = S(\Omega) + \varepsilon.$$

On pose

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

et

$$u_k(x) = \tilde{u}(kx),$$

on remarque que $u_k \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^N) &\leq \frac{\|\nabla u_k\|_2^2}{\|u_k\|_p^2} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}(kx)|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}(kx)|^p\right)^{\frac{2}{p}}} \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla u(kx)|^2}{\left(\int_\Omega |u(kx)|^p\right)^{\frac{2}{p}}}. \end{aligned}$$

En posant $y = kx$, on obtient

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^N) &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u(y)|^2 k^2 k^{-N} dy}{\left(\int_\Omega |u(y)|^p k^{-N} dy\right)^{\frac{2}{p}}} \\ &= \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_p} = S(\Omega) + \varepsilon. \end{aligned}$$

comme ε est arbitraire, on obtient

$$S(\Omega) = S(\mathbb{R}^N).$$

■

Lemme 2.2.2 *S n'est j'amais attient quand Ω est un domaine borné.*

Preuve :
Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour un domaine borné Ω, S est atteint par $u \in H_0^1(\Omega)$. Prenons que $u \geqslant 0$ si ce n'est pas le cas on remplace u par $|u|$.

Soit $\tilde{\Omega}$ une boule qui contient Ω et posons

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{dans } \tilde{\Omega} \backslash \Omega. \end{cases}$$

On remarque que S est aussi attient dans $\tilde{\Omega}$ par $\tilde{u}$. Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange (on suit les mêmes calculs de la peuve du théorème 2.4) $\tilde{u}$ satisfait $-\Delta \tilde{u} = \mu \tilde{u}$ pour μ constante > 0.
Ce qui contredit le Théorème 1.2.11 (principe du maximum fort) car $\tilde{u}$ ne s'annule pas seullement sur $\partial \tilde{\Omega}$. ■

Lemme 2.2.3 *Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors S est atteint par la fonction extrémale*

$$U(x) = C\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}.$$

Pour la démonstration voir Th. Aubin [3], G. Talenti [23] et E. Lieb [20].
Par la suite on prend $N \geqslant 4$.
La preuve du Théorème 2.4 est basée sur les deux lemmes suivants:

Lemme 2.2.4 *On a $S_\lambda < S$ pour tout $\lambda > 0$.*

Preuve :
Supposons sans perte de généralité que $0 \in \Omega$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction positive telle que $\varphi(x) \equiv 1$ dans un voisinage de 0.
Estimons le quotient suivant:

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_p^2},$$

où

$$u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

1. Commençons par calculer $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$:

$$\nabla u_\varepsilon = \frac{\nabla\varphi(x)}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{(N-2)\varphi(x)\,x}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N}{2}}}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-2}}dx + (N-2)^2\int_\Omega \frac{\varphi^2(x)\,|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N}}dx \\ &\quad -2(N-2)\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|\ \varphi(x)\ |x|}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-1}}dx,\end{aligned}$$

$\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0 donc $\nabla\varphi \equiv 0$, par suite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-2}}dx \leq C_1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|\ \varphi(x)\ |x|}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-1}}dx \leq C_2$$

C_1 et C_1sont des constantes positives indépendantes de ε. Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx &= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)\,|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N} dx + O(1)\\ &= (N-2)^2\left[\int_\Omega \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N} dx + \int_\Omega \frac{\left(\varphi^2(x)-1\right)|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}\right] + O(1)\end{aligned}$$

Puisque $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ au $V(0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx &= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N} dx + O(1)\\ &= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N} dx\\ &\quad -(N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N} dx + O(1).\end{aligned}$$

Comme $0 \notin \mathbb{R}^N\setminus\Omega$, ainsi

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N} dx + O(1).$$

Posons $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx &= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon\ |y|^2\ \varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^N\left(1+|y|^2\right)^N} dy + O(1)\\ &= \frac{(N-2)^2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{\left(1+|y|^2\right)^N} dy + O(1)\\ &= \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1),\end{aligned}$$

où

$$K_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{\left(1+|y|^2\right)^N} dy = \|\nabla U\|_2^2,$$

$$U(x) = \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} \text{ et } \nabla U = -\frac{(N-2)\,x}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{N}{2}}}.$$

2. Calculons $\|u_\varepsilon\|_p^2$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^p\,dx &= \int_\Omega \frac{\varphi^p(x)}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx\\ &= \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx+\int_\Omega \frac{\varphi^p(x)-1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx.\end{aligned}$$

Puisque $\varphi^p-1\equiv 0$ au $V(0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^p\,dx &= \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx+O(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx+O(1),\end{aligned}$$

comme $0\notin\Omega$, alors

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^p\,dx=\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^N}dx+O(1).$$

En posant $y=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^N\left(1+|x|^2\right)^N}dx+O(1)\\ &= \frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}+O(1),\end{aligned}$$

où

$$K_2'=\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^N}dx=\|U\|_p^p,$$

ce qui donne

$$\|u_\varepsilon\|_p^2=\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}+O(\varepsilon)$$

où

$$K_2=\left(K_2'\right)^{\frac{2}{p}}.$$

En effet, appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$g(x) = x^{\frac{2}{p}},$$

on trouve que

$$\left(\frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} + O\left(1\right)\right)^{\frac{2}{p}} = \left(\frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}\right)^{\frac{2}{p}} + O\left(1\right)\left(b_\varepsilon\right)^{\frac{2}{p}-1},$$

où

$$\begin{aligned} \left|b_\varepsilon\right|^{\frac{2}{p}-1} &\leq \left(\frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} + O\left(1\right)\right)^{\frac{2}{p}-1} \\ &\leq \left(O\left(\varepsilon^{-\frac{N}{2}}\right)\right)^{\frac{-2}{N}}, \\ &\leq O\left(\varepsilon\right). \end{aligned}$$

3. Calculons $\left\|u_\varepsilon\right\|_2^2$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|u_\varepsilon\right|^2 dx &= \int_\Omega \frac{\varphi^2\left(x\right)}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx \\ &= \int_\Omega \frac{\varphi^2\left(x\right) - 1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx + \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx, \end{aligned}$$

puisque $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ au $V\left(0\right)$, on obtient

$$\int_\Omega \left|u_\varepsilon\right|^2 dx = \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx + O\left(1\right).$$

En étudiant la convergence de $\displaystyle\int_\Omega \frac{r^{N-1}}{r^{2(N-2)}} dr$, on distingue deux cas: $N = 4$ et $N \geqslant 5$.

Pour $N \geqslant 5$, on a

$$\int_\Omega \left|u_\varepsilon\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx + O\left(1\right),$$

comme $0 \notin \mathbb{R}^N \backslash \Omega$, on a

$$\int_\Omega \left|u_\varepsilon\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{N-2}} dx + O\left(1\right).$$

On pose $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, on obtient

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^{N-2} \left(1 + |y|^2\right)^{N-2}} dy + O\left(1\right).$$

Alors

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O\left(1\right),$$

où

$$K_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(1 + |y|^2\right)^{N-2}} dy.$$

Pour $N = 4$,

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2} dx + O\left(1\right),$$

puisque Ω est un ouvert borné contenant 0, il s'en suit qu'il existe deux constantes $0 < R_1 < R_2$ telles que

$$B\left(0, R_1\right) \subset \Omega \subset B\left(0, R_2\right),$$

ce qui donne

$$\int_{B(0,R_1)} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2} dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2} dx \leq \int_{B(0,R_2)} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2} dx$$

Commençons par calculer $\displaystyle\int_{B(0,R)} \frac{dx}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \frac{dx}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2} &= w \int_0^R \frac{r^3}{\left(\varepsilon + r^2\right)^2} dr \\
&= w \left[\frac{1}{4} \int_0^R \frac{4r^3 + 4r\varepsilon}{r^4 + 2\varepsilon r^2 + \varepsilon^2} dr - \int_0^R \frac{\varepsilon r}{\left(\varepsilon + r^2\right)^2} dr \right] \\
&= w \left[\left[\frac{1}{4} \log\left(\varepsilon + r^2\right)^2 \right]_0^R + \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\varepsilon + r^2} \right]_0^R \right] \\
&= \left[\frac{1}{4} \log\left(\varepsilon + R^2\right)^2 - \frac{1}{4} \log\left(\epsilon^2\right) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\varepsilon + R^2} - \frac{1}{2} \right] \\
&= -\frac{w}{4} \log\left(\epsilon^2\right) = \frac{w}{2} \left|\log \epsilon\right| + O\left(1\right).
\end{aligned}$$

Alors
$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = K_3 |\log \varepsilon| + O(1),$$

avec
$$K_3 = \frac{w}{2}.$$

Donc
$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \dfrac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O(1) & \text{si } N \geqslant 5, \\ K_3 |\log \varepsilon| + O(1) & \text{si } N = 4. \end{cases}$$

K_1,K_2 et K_3 sont des constantes positives qui dépendent seulement de N tel que $\dfrac{K_1}{K_2} = S$.
D'après ce qui précède on obtient

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{K_1 - \lambda K_3 \varepsilon |\log \epsilon| + O(\varepsilon)}{K_2 + O(\varepsilon)} & \text{si } N = 4, \\ \dfrac{K_1 - \lambda K_3 \varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)}{K_2 + O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)} & \text{si } N \geqslant 5. \end{cases}$$

Par le théorème des accroissements finis, on peut démontrer que
$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + y\, C,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \begin{cases} \dfrac{K_1}{K_2} - \lambda \dfrac{K_3}{K_2} \epsilon |\log \varepsilon| + O(\epsilon) & \text{si } N = 4 \\ \dfrac{K_1}{K_2} - \lambda \dfrac{K_3}{K_2} \epsilon + O\left(\epsilon^{\frac{N}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} S - \lambda \dfrac{K_3}{K_2} \epsilon |\log \varepsilon| + O(\epsilon) & \text{si } N = 4, \\ S - \lambda \dfrac{K_3}{K_2} \epsilon + O\left(\epsilon^{\frac{N}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour ε assez petit, on a $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ d'où le résultat. ■

Lemme 2.2.5 *Si $S_\lambda < S$, l'infimum S_λ est atteint.*

Preuve :
Soit $(u_n)_n$ une suite minimisante pour S_λ i.e,

$$\|u_n\|_p = 1, \tag{2.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|\nabla u_n\|_2^2 - \|u_n\|_2^2\right) = S_\lambda. \tag{2.15}$$

La suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, par le l'inégalité de Poincaré (Proposition 1.1.9), on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 \leq S_\lambda + O(1).$$

Par conséquent

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 \leqslant S_\lambda + O(1).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace réflexif alors il existe une sous-suite notée (u_n) satisfaisant

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ u_n &\to u_0 \text{ presque partout dans } \Omega. \end{aligned}$$

Posons $v_n = u_n - u_0$, alors

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ v_n &\to 0 \text{ presque partout dans } \Omega. \end{aligned}$$

De (2.13) et (2.14), on obtient

$$S \leqslant \|\nabla u_n\|_2^2,$$

(2.15) nous donne,

$$S - S_\lambda \leq \lambda \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_2^2 = \lambda \|u_0\|_2^2,$$

car $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $L^2(\Omega)$.
Comme $S - S_\lambda > 0$, alors $u_0 \neq 0$.
Puisque $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ par le Lemme 1.1.8, on a

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla v_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty}\|\nabla u_n\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2. \tag{2.16}$$

En remplaçant (2.16) dans (2.15), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2 = S_\lambda. \tag{2.17}$$

Par le Lemme 1.1.10 (Lemme de Brézis-Lieb) et le fait que u_n est bornée dans $L^p(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|v_n\|_p^p \right) = \|u_0\|_p^p,$$

or

$$\|u_n\|_p = 1,$$

donc

$$1 = \|u_0\|_p^p + \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_p^p.$$

Comme $2 < p$, alors

$$\|u_0\|_p^2 > \|u_0\|_p^p,$$

et

$$\|v_n\|_p^2 > \|v_n\|_p^p,$$

car $\|u_0\|_p$ et $\|v_n\|_p \in [0,1]$
Ainsi

$$1 \leq \|u_0\|_p^2 + \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_p^2.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\|v_n\|_p^2 \leq \frac{1}{S} \|\nabla v_n\|_2^2,$$

il s'en suit que

$$1 \leq \|u_0\|_p^2 + \frac{1}{S} \lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_2^2. \tag{2.18}$$

Il nous reste à monter que $u_0 \neq 0$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\|\nabla u_0\|_2^2 - \lambda \|u_0\|_2^2 \leq S_\lambda \|u_0\|_p^2. \tag{2.19}$$

On distingue deux cas:
1. Soit $S_\lambda > 0$.
Multiplions (2.18) par S_λ,

$$S_\lambda \leq S_\lambda \left\|u_0\right\|_p^2 + \frac{S_\lambda}{S} \lim_{n\to\infty} \left\|\nabla v_n\right\|_p^2,$$

or $S_\lambda < S$ donc

$$S_\lambda \leq S_\lambda \left\|u_0\right\|_p^2 + \lim_{n\to\infty} \left\|\nabla v_n\right\|_2^2.$$

(2.17) devient

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\nabla v_n\right\|_2^2 + \left\|\nabla u_0\right\|_2^2 - \lambda \left\|u_0\right\|_2^2 \leq S_\lambda \left\|u_0\right\|_p^2 + \lim_{n\to\infty} \left\|\nabla v_n\right\|_2^2.$$

Ce qui implique

$$\left\|\nabla u_0\right\|_2^2 - \lambda \left\|u_0\right\|_2^2 \leq S_\lambda \left\|u_0\right\|_p^2,$$

d'où (2.19)
2. Soit $S_\lambda \leq 0$
On sait que $\left\|u_0\right\|_p^2 \leq 1$, alors

$$S_\lambda \left\|u_0\right\|_p^2 \geqslant S_\lambda. \tag{2.20}$$

En remplaçant (2.20) dans (2.17), on obtient

$$\left\|\nabla u_0\right\|_2^2 - \lambda \left\|u_0\right\|_2^2 \leq \left\|\nabla u_0\right\|_2^2 + \lim_{n\to\infty} \left\|\nabla v_n\right\|_2^2 - \lambda \left\|u_0\right\|_2^2 \leq S_\lambda \left\|u_0\right\|_p^2,$$

on obtient (2.19). ∎
Preuve du théorème 2.4 :
Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (donnée dans le Lemme 2.2.5) telle que

$$\left\|u_0\right\|_p = 1 \text{ et } \left\|\nabla u_0\right\|_2^2 - \lambda \left\|u_0\right\|_2^2 = S_\lambda.$$

Supposons que $u_0 \geqslant 0$ dans Ω, si ce n'est pas le cas on remplace u_0 par $|u_0|$.
Appliquons le théorème des multiplicateurs de Lagrange.
Posons

$$F(u) = \left\|u\right\|_p - 1,$$

$$J(u) = \left\|\nabla u\right\|_2^2 - \lambda \left\|u\right\|_2^2,$$

$$\begin{aligned} A &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \ / \ F(u) = 0\right\} \\ &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \ / \ \|u\|_p = 1\right\}. \end{aligned}$$

Calculons la différentielle de J et de F

$$\begin{aligned} \langle J'(u_0), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\int_\Omega |\nabla(u_0+tv)|^2 dx - \lambda\int_\Omega |u_0+tv|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx}{t}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda\int_\Omega |u_0|^2 dx}{t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2t\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx + t^2\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2\lambda t\int_\Omega u_0 v dx}{t}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda t^2\int_\Omega |v|^2 dx}{t}\right), \\ &= 2\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx - 2\lambda\int_\Omega u_0 v dx. \\ \langle F'(u_0), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega |u_0+tv|^p dx - \int_\Omega |u_0|^p dx}{t}, \end{aligned}$$

La formule de Taylor appliquée à la fonction $g(x) = |x|^p$ donne

$$|u_0+tv|^p = |u_0|^p + (p)\, t u_0 v\, |u_0|^{p-2} + O\left(t^2\right),$$

donc

$$\langle F'(u_0), v\rangle = p\int_\Omega |u_0|^{p-2} u_0 v dx,$$

de la

$$\langle F'(u_0), u_0\rangle = p\int_\Omega |u_0|^p dx = p \neq 0.$$

Alors par le théorème de multiplicateurs de Lagrange, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle J'(u_0), v\rangle = \beta\langle F'(u_0), v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$2\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx - 2\lambda\int_\Omega u_0 v dx = \beta\ p\int_\Omega u_0 |u_0|^{p-2} v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.21}$$

pour $v = u_0$

$$2\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - 2\lambda\int_\Omega |u_0|^2 dx = \beta(p),$$

$$2S_\lambda = \beta(p),$$

de la, (2.21) devient

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx - \lambda \int_\Omega u_0 v dx = S_\lambda \int_\Omega u_0 |u_0|^{p-2} v dx \; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

donc $\beta = S_\lambda > 0$ puisque $\lambda < \lambda_1$. En posant $u = S_\lambda^{\frac{1}{p-2}} u_0$, on obtient

$$S_\lambda^{-\frac{1}{p-2}} \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda S_\lambda^{-\frac{1}{p-2}} \int_\Omega u v dx = S_\lambda S_\lambda^{-\frac{1}{p-2}} S_\lambda^{-1} \int_\Omega u |u|^{p-2} v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega u v dx = \int_\Omega u |u|^{p-2} v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci représente la forme variationnelle du problème (P_λ). alors u est une solution de l'EDP $-\Delta u = \lambda u + u^{p-1}$. ■

Pour la preuve du Théorème 2.5 nous avons besoin du lemme suivant
Le problème (P_λ) dans le cas $N = 3$ s'écrit

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour simplifier on prend

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / |x| < 1 \right\}.$$

Ainsi la première valeur propre du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ est $\lambda_1 = \pi^2$ et la fonction propre associée à λ_1 est $\varphi_1(x) = \dfrac{\sin(\pi |x|)}{|x|}$.

Lemme 2.2.6 *On a $S_\lambda < S$ pour tout $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$.*

Preuve :
Comme précédemment, on estime le quotient

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_6^2}$$

avec

$$u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r = |x|, \quad \varepsilon > 0$$

où $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0) = 0$.
Calculons $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$:

$$u'_\varepsilon(r) = \frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dr &= w\int_0^1 \left|\frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{3}{2}}}\right|^2 r^2 dr \\
&= w\int_0^1 \left[\frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon + r^2)} + \frac{r^2(\varphi(r))^2}{(\varepsilon + r^2)^3} - \frac{2r\varphi(r)\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^2}\right] r^2 dr.
\end{aligned}$$

En integrant par parties le troisième terme, on obtient

$$\begin{aligned}
-2\int_0^1 \frac{r\varphi(r)\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^2} dr &= -\left[\frac{r^3(\varphi(r))^2}{(\varepsilon + r^2)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 (\varphi(r))^2 \left[\frac{3r^2(\varepsilon + r^2)^2}{(\varepsilon + r^2)^4}\right. \\
&\quad \left. - \frac{4r^4(\varepsilon + r^2)}{(\varepsilon + r^2)^4}\right] dr.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi(1) = 0$, alors

$$-2\int_0^1 \frac{r\varphi(r)\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^2} dr = \int_0^1 (\varphi(r))^2 \left[\frac{3r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\right] dr$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= w\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2 dr + w\int_0^1 (\varphi(r))^2 \left[\frac{3r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\right] dr \\
&= w\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2 dr + 3w\varepsilon \int_0^1 \frac{(\varphi(r))^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2 dr &= \int_0^1 (\varphi'(r))^2 dr + \int_0^1 (\varphi'(r))^2 \left[\frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)} - 1\right] dr \\
&= \int_0^1 (\varphi'(r))^2 dr - \varepsilon \int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon + r^2)} dr.
\end{aligned}$$

Appliquons le théorème des accroissemant finis à φ', $\exists\ z \in]0, r[$ tel que

$$\varphi'(r) - \varphi'(0) = \varphi''(z)\, r.$$

Comme $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ alors il existe $A > 0$ tel que

$$\varphi'(r) \leq Ar,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2 dr &\leq \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr - \varepsilon A \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr \\ &= \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \frac{(\varphi(r))^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + \int_0^1 \frac{\left((\varphi(r))^2 - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr. \tag{2.23}$$

En utilisant le développement de Taylor à φ^2, $\exists\ z \in]0, r[$ tel que

$$\varphi^2(r) = \varphi^2(0) + 2r\ \varphi(0)\,\varphi'(0) + r^2 \left((\varphi'(z))^2 + \varphi''(z)\,\varphi(z)\right).$$

or $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$, alors

$$\varphi^2(r) - 1 = r^2 \left((\varphi'(z))^2 + \varphi''(z)\,\varphi(z)\right).$$

En utilisant le précédent argument, il existe $B > 0$ tel que

$$\varphi^2(r) - 1 \leq Br^2,$$

ce qui implique

$$\int_0^1 \frac{\left((\varphi(r))^2 - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr \leq B \int_0^1 \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr$$

En posant $s = \dfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\left((\varphi(r))^2 - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr &\leq B \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon^2 s^4}{\varepsilon^3 (1+s^2)^3} \varepsilon^{\frac{1}{2}} ds \\
&= B\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{s^4}{(1+s^2)^3} ds \\
&= B\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{s^4}{(1+s^2)^3} ds - B\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} \frac{s^4}{(1+s^2)^3} ds \\
&\leq O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) + B\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{s}\right]_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{\left((\varphi(r))^2 - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr &= \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon s^2}{\varepsilon^3 (1+s^2)^3} \varepsilon^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds \\
&= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds - \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds,
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds &\leq \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} \frac{s^2}{s^6} ds \\
&\leq \frac{-\varepsilon^{-\frac{3}{2}}}{3} \left[\frac{1}{s^3}\right]_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} = O(1).
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds + O(1). \tag{2.25}$$

Remplaçons (2.24) et (2.25) dans (2.23), nous obtenons

$$\int_0^1 \frac{(\varphi(r))^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds + O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Ainsi, (2.22) devient

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= w\int_0^1 \left(\varphi'(r)\right)^2 dr + O(\varepsilon) + 3w\varepsilon^{-\frac12}\int_0^{+\infty}\frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}ds + O\left(\varepsilon^{\frac12}\right)\\
&= \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac12}} + w\int_0^1 \left(\varphi'(r)\right)^2 dr + O\left(\varepsilon^{\frac12}\right), \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

où

$$K_1 = 3w\int_0^{+\infty}\frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}ds.$$

Notons que

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2\, dx.$$

Calculons $\|u_\varepsilon\|_6^2$:

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_6^2 &= w\int_0^1 \frac{\varphi^6(r)}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} r^2 dr\\
&= w\int_0^1 \frac{\varphi^6(r)-1}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} r^2 dr + w\int_0^1 \frac{r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dr.
\end{aligned}$$

Appliquons le développement de Taylor à φ^6, $\exists\ z\in\,]0,r[$ tel que

$$\varphi^6(r) = \varphi^6(0) + 6r\ \varphi^5(0)\,\varphi'(0) + \frac{r^2}{2}\left(30\left(\varphi'(z)\right)^2\varphi^4(z) + 6\varphi''(z)\,\varphi^5(z)\right),$$

ce qui donne

$$\varphi^6(r) - 1 \le Cr^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\varphi^6(r)-1}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} r^2 dr &\le C\int_0^1 \frac{r^4}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dr\\
&= C\varepsilon^{-\frac12}\int_0^{\varepsilon^{-\frac12}} \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}ds\\
&= C\varepsilon^{-\frac12}\int_0^{+\infty} \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}ds - C\varepsilon^{-\frac12}\int_{\varepsilon^{-\frac12}}^{+\infty} \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}ds\\
&\le C\ O\left(\varepsilon^{-\frac12}\right) - C\varepsilon^{-\frac12}\int_{\varepsilon^{-\frac12}}^{+\infty}\frac{s^4}{s^6}ds = O\left(\varepsilon^{-\frac12}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$w\int_0^1 \frac{r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dr=\varepsilon^{-\frac{3}{2}}w\int_0^{+\infty}\frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}ds+O\left(1\right).$$

Alors

$$\|u_\varepsilon\|_6^2=\varepsilon^{-\frac{3}{2}}w\int_0^{+\infty}\frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}ds+\ O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Par le même calcul que précédemment, on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_6^2=\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+\ O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.27}$$

Calculons $\|u_\varepsilon\|_2^2$:

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_2^2 &= w\int_0^1 \frac{\varphi^2\left(r\right)r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)}dr\\ &= w\int_0^1 \varphi^2\left(r\right)dr-w\int_0^1\frac{\varepsilon\varphi^2\left(r\right)}{\varepsilon+r^2}dr.\end{aligned}$$

Le fait que $\varphi\in C_c^\infty\left(\Omega\right)$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\varepsilon\varphi^2\left(r\right)}{\varepsilon+r^2}dr &\leq C\int_0^1\frac{\varepsilon}{\varepsilon+r^2}dr\\ &= C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{dt}{1+t^2}\\ &= C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\arctan t\right]_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\\ &= C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\arctan\varepsilon^{-\frac{1}{2}}=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|u_\varepsilon\|_2^2=w\int_0^1\varphi^2\left(r\right)dr+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.28}$$

D'aprés (2.26), (2.27) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned}Q_\lambda\left(u_\varepsilon\right) &= \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2-\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_6^2}\\ &= \frac{\frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+w\int_0^1\left(\varphi'\left(r\right)\right)^2dr+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)-\lambda w\int_0^1\varphi^2\left(r\right)dr+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{K_1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} w \int_0^1 (\varphi'(r))^2 \, dr - \lambda \epsilon^{\frac{1}{2}} w \int_0^1 \varphi^2(r) \, dr + O(\varepsilon)}{K_2 + O(\varepsilon)}$$
$$= S + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{w}{K_2} \left\{ \int_0^1 (\varphi'(r))^2 \, dr - \lambda \int_0^1 \varphi^2(r) \, dr \right\} + O(\varepsilon).$$

On prend

$$\varphi(r) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi r\right),$$

on trouve que

$$\int_0^1 (\varphi'(r))^2 \, dr = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \varphi^2(r) \, dr.$$

Ainsi

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = S - \left(\lambda - \frac{\pi^2}{4}\right) C \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon),$$

avec

$$C = w \int_0^1 \varphi^2(r) \, dr.$$

Puisque $\lambda_1 = \pi^2$, alors on a bien pour ε assez petit $Q_\lambda(u_\epsilon) < S$. ■

Preuve du théorème 2.5 :

Puisque $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$ alors $S_\lambda < S$ et par le même calcul de la preuve du lemme 2.2.5 on démontre que S_λ est atteinte par $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, supposons que $u_0 \geqslant 0$ dans Ω (si ce n'est pas le cas, on remlaçe u_0 par $|u_0|$), $\|u_0\|_6 = 1$, alors par le théorème des multiplicateurs de Lagrange (on suit les mêmes calculs du théorème précédent), on a

$$-\Delta u_0 - \lambda u_0 = S_\lambda u_0^5,$$

de plus $\lambda < \lambda_1$, alors $S_\lambda > 0$, et en pasant $u = S_\lambda^{\frac{1}{4}} u_0$, on obtient une solution du problème. ■

Chapitre 3

Résultats d'existence et de multiplicité pour le problème de Brézis-Nirenberg

Dans ce chapitre, on s'interesse à l'existence de solutions non triviales du problème suivant:

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u\,|u|^{p-2} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$, λ est un paramètre réel et $p = 2^*$ où 2^* est l'exposant critique de Sobolev, Brézis et Nirenberg [8] ont démontré que l'existence de solutions positives dépend de la dimension et de la position de λ par rapport à la première valeur propre du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Capozzi, Fortunato et Palmieri [9] ont établi l'existence de solutions non triviales pour tout $\lambda > 0$ et $N \geqslant 4$.

Cerami, Fortunato et Struwe [11] ont démontré des résultats de multiplicité de solutions pour le problème (P_λ).

Dans ce chapitre nous détaillons les résultats obtenus dans [9] et [11].

Les principaux résultats sont les suivants:

Théorème 3.1 *Si $N \geqslant 4$, le problème (P_λ) admet au moins une solution non triviale pour tout $\lambda > 0$.*

Théorème 3.2 *Pour tout $\lambda > 0$, si*

$$\lambda^+ - \lambda < S\ \ |\Omega|^{\frac{-2}{N}},$$

alors le problème (P_λ) admet au moins m paires de solutions non triviales

$$\{u_k(\lambda), -u_k(\lambda)\} \quad k = 1...m,$$

telles que

$$\|\nabla u_k(\lambda)\|_2 \to 0 \text{ quand } \lambda \to \lambda^+,$$

où m est la multiplicité de λ^+.

3.1 Résultats préliminaires

Commençons par donner quelques notations et résultats anterieurs.

Pour $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$\lambda^+ = \min\{\lambda_n / \lambda < \lambda_n\}$$

où λ_n est la n ème valeur propre du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

$$\begin{aligned} H_1 &= \overline{\oplus_{\lambda_n \geqslant \lambda^+} M(\lambda_n)} \\ H_2 &= \oplus_{\lambda_n < \lambda^+} M(\lambda_n), \end{aligned}$$

$M(\lambda_n)$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ_n.

On pose

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \max\{\lambda_n / \lambda > \lambda_n\} \\ \overline{W}(\varepsilon) &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) / u = u^- + t u_\varepsilon,\ u^- \in H_2,\ t \in \mathbb{R}\right\} \\ \overline{\overline{W}}(\varepsilon) &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) / u = u^- + t \tilde{u}_\varepsilon,\ u^- \in H_2,\ t \in \mathbb{R}\right\} \\ u_\varepsilon(x) &= \varphi(x) U_\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(x) = 1$ dans $V(0)$

et

$$U_\varepsilon(x) = \frac{|N(N-2)\varepsilon|^{\frac{N-2}{4}}}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}},$$

avec

$$U(x) = \frac{|N(N-2)|^{\frac{N-2}{4}}}{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Lemme 3.1.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_p^2} = \begin{cases} S - C\varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5, \\ S - C\varepsilon \log \varepsilon + O(\varepsilon) & \text{si } N = 4, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}, \tag{3.2}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} \leq K_4 \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}. \tag{3.3}$$

Preuve :
1. En procédant de la même manière que le chapitre 2, nous obtenons les estimations suivantes:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = S^{\frac{N}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \tag{3.4}$$

$$\|u_\varepsilon\|_p^2 = S^{\frac{N-2}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \tag{3.5}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \varepsilon K_3 + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5, \\ \\ \varepsilon K_3 \left|\log \varepsilon\right| + O\left(\varepsilon\right) & \text{si } N = 4, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$K_3 = \begin{cases} \|U\|_2^2 & \text{si } N \geqslant 5, \\ 4w & \text{si } N = 4. \end{cases}$$

D'après $(3.4), (3.5)$ et (3.6), on obtient

$$\frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_p^2} = \begin{cases} S - \lambda \varepsilon C + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5, \\ S - \lambda\left(\varepsilon C \left|\log \varepsilon\right| + O\left(\varepsilon\right)\right) & \text{si } N = 4. \end{cases}$$

2. Calcul de $\|u_\varepsilon\|_1$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\varepsilon|\, dx &= \left(N\left(N-2\right)\varepsilon\right)^{\frac{N-2}{4}} \int_\Omega \frac{|\varphi\left(x\right)|}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx \\ &= \left(N\left(N-2\right)\varepsilon\right)^{\frac{N-2}{4}} \left\{ \int_\Omega \frac{\varphi\left(x\right) - 1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx + \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx \right\}, \end{aligned}$$

puisque $\varphi\left(x\right) - 1 = 0$ au $V\left(0\right)$, nous obtenons

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|\, dx \leq \left(N\left(N-2\right)\varepsilon\right)^{\frac{N-2}{4}} \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx.$$

Puisque Ω est un borné alors il existe $R > 0$ tel que $\Omega \subset B\left(0, \dfrac{R}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.
Posons $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, (avec $\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}} < R$) alors

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq \left(N\left(N-2\right)\varepsilon\right)^{\frac{N-2}{4}} \int_{B\left(0, \frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \left(1 + |y|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dy.$$

passons aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_1 &\leq (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} \varepsilon^{\frac{N+2}{4}} \int_{B\left(0,\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\frac{N-2}{2}}} dr \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{N+2}{4}} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} r\ dr \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{N+2}{4}-1} = C\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}.
\end{aligned}$$

3. Calcul de $\|u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1}$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p-1} dx &= (N(N-2)\varepsilon)^{\frac{N-2}{4}\cdot\frac{N+2}{N-2}} \int_\Omega \frac{|\varphi(x)|^{p-1}}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}\cdot\frac{N+2}{N-2}}} dx \\
&= (N(N-2)\varepsilon)^{\frac{N+2}{4}} \int_\Omega \frac{|\varphi(x)|^{p-1}}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N+2}{2}}} dx \\
&\leq (N(N-2)\varepsilon)^{\frac{N+2}{4}} \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N+2}{2}}} dx \\
&\leq (N(N-2)\varepsilon)^{\frac{N+2}{4}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{N+2}{2}}} dx \\
&\leq (N(N-2)\varepsilon)^{\frac{N+2}{4}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{N+2}{2}}} dx \\
&\leq \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} K_5,
\end{aligned}$$

où

$$K_5 = \|U\|_{p-1}^{p-1}.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Lemme 3.1.2 *Si $u \in \overline{W}(\varepsilon)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\|u\|_p^p \geqslant \|tu_\varepsilon\|_p^p + \frac{1}{2}\left\|u^-\right\|_p^p - C\ t^p \varepsilon^{\frac{N(N-2)}{2N+4}} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Preuve :
Par définition, on a

$$\|u\|_p^p = p\int_\Omega dx \int_0^u |s|^{p-2}\, s\ ds. \tag{3.8}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\|u^- + tu_\varepsilon\right\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p &= p\int_\Omega dx \int_0^{u^-+tu_\varepsilon} |s|^{p-2}\, s\ ds \\ &\quad -p\int_\Omega dx \int_0^{tu_\varepsilon} |s|^{p-2}\, s\ ds \\ &\quad -p\int_\Omega dx \int_0^{u^-} |s|^{p-2}\, s\ ds \\ &= p\int_\Omega dx \int_{tu_\varepsilon}^{u^-+tu_\varepsilon} |s|^{p-2}\, s\ ds \\ &\quad -p\int_\Omega dx \int_0^{u^-} |s|^{p-2}\, s\ ds.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\tau = \dfrac{s - tu_\varepsilon}{u^-}$ pour la première intégrale et $\tau = \dfrac{s}{u^-}$ pour la deuxième, on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p &= p\int_\Omega dx \int_0^1 \left|\tau u^- + tu_\varepsilon\right|^{p-2} \left(\tau u^- + tu_\varepsilon\right)\ u^- d\tau \\ &\quad -p\int_\Omega dx \int_0^1 \left|\tau u^-\right|^{p-2} \left(\tau u^-\right)\ u^- d\tau.\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini, nous donne

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p &= p\int_0^1 d\tau \int_\Omega \Big\{ \left|\tau u^- + tu_\varepsilon\right|^{p-2} \left(\tau u^- + tu_\varepsilon\right) \\ &\quad - \left|\tau u^-\right|^{p-2} \left(\tau u^-\right) \Big\}\, u^- dx.\end{aligned}$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $g(x) = x^{p-1}$, on a

$$\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p = (p-1)\, p\int_0^1 d\tau \int_\Omega \left|\tau u^- + tu_\varepsilon \theta\right|^{p-2} tu_\varepsilon u^- dx,$$

avec $\theta = \theta(x)$ est une fonction mesurable telle que $0 < \theta(x) < 1$.
Ainsi,

$$\left| \|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p \right| \leq (p-1)\, p\int_0^1 d\tau \int_\Omega \left|\tau u^- + tu_\varepsilon \theta\right|^{p-2} |tu_\varepsilon| \left|u^-\right| dx.$$

Par conséquent,

$$\left|\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p\right| \leq C \int_0^1 d\tau \int_\Omega \left\{|tu_\varepsilon|^{p-1} \quad \left|u^-\right| + \tau^{p-2}\,|tu_\varepsilon| \quad \left|u^-\right|^{p-1}\right\} dx.$$

En effet, pour $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a

$$(a+b)^{p-2} \leq \begin{cases} 2^{p-2} b^{p-2} & \text{si } a \leq b, \\ 2^{p-2} a^{p-2} & \text{si } a > b. \end{cases} \tag{3.9}$$

Donc

$$(a+b)^{p-2} \leq 2^{p-2}\left(a^{p-2} + b^{p-2}\right).$$

Comme $u^- \in H_2$, alors

$$\begin{aligned} \left|\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p\right| &\leq C\left\{ \left\|u^-\right\|_\infty \|tu_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} + \left\|u^-\right\|_\infty^{p-1} \|tu_\varepsilon\|_1\right\} \\ &\leq C\left\{ \left\|u^-\right\|_2 \|tu_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} + \left\|u^-\right\|_p^{p-1} \|tu_\varepsilon\|_1\right\}. \end{aligned}$$

D'après (3.2) et (3.3), on a

$$\left|\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p\right| \leq C\left\{ \left\|u^-\right\|_2 t^{p-1}\varepsilon^{\frac{N-2}{4}} + \left\|u^-\right\|_p^{p-1} t\, \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}\right\}.$$

Appliquons l'inégalité de Young,

$$ab \leq \mu a^q + \frac{1}{c(\mu)} b^q \quad \text{avec } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

on obtient

$$\left\|u^-\right\|_2 t^{p-1}\varepsilon^{\frac{N-2}{4}} \leq \mu \left\|u^-\right\|_2^p + \frac{1}{c(\mu)} t^p \varepsilon^{\frac{N}{2}}.$$

Ainsi, pour $\mu = \dfrac{1}{4C}$, on obtient

$$\left|\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p\right| \leq \frac{1}{4}\left\|u^-\right\|_2^p + Ct^p\varepsilon^{\frac{N}{2}} + \left\|u^-\right\|_p^{p-1} t\, \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}. \tag{3.10}$$

De même

$$\left\|u^-\right\|_p^{p-1} t\, \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} \leq \mu \left\|u^-\right\|_p^p + \frac{1}{c(\mu)} t^p \varepsilon^{\frac{N(N-2)}{2N+4}}.$$

Alors

$$\left|\|u\|_p^p - \|tu_\varepsilon\|_p^p - \left\|u^-\right\|_p^p\right| \leq \frac{1}{2}\left\|u^-\right\|_p^p Ct^p\varepsilon^{\frac{N(N-2)}{2N+4}},$$

d'où le résultat. ∎

Remarque 3.1.3 *Supposons que* $\lambda = \lambda_n$, *avec* $\lambda_n \in \sigma(-\Delta)$ *et notons par* P_n *la projection sur* $M(\lambda_n)$.
Posons

$$\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - P_n u_\varepsilon$$

Soit $\{v_k\}$ *une famille orthonormale qui engendre* $M(\lambda_n)$. *Par définition*

$$\begin{aligned}
\|P_n u_\varepsilon\|_2^2 &= \sum_k \left(\int_\Omega u_\varepsilon v_k dx \right)^2 \\
&\leq \sum_k \|v_k\|_\infty^2 \|u_\varepsilon\|_1^2 \\
&\leq C \|u_\varepsilon\|_1^2,
\end{aligned}$$

par (3.2), *on a*

$$\|P_n u_\varepsilon\|_2 \leq C\ \varepsilon^{\frac{N-2}{4}},$$

il s'en suit que

$$\|P_n u_\varepsilon\|_\infty \leq C\ \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}. \tag{3.11}$$

En utilisant (3.8), *on obtient*

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_\varepsilon\|_p^p - \|u_\varepsilon\|_p^p &= p \int_\Omega dx \int_0^{u_\varepsilon - P_n u_\varepsilon} |s|^{p-2} s\ ds - p \int_\Omega dx \int_0^{u_\varepsilon} |s|^{p-2} s\ ds \\
&= p \int_\Omega dx \int_{u_\varepsilon}^{u_\varepsilon - P_n u_\varepsilon} |s|^{p-2} s\ ds.
\end{aligned}$$

En posant $\tau = \dfrac{u_\varepsilon - s}{P_n u_\varepsilon}$, *on déduit que*

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_p^p - \|u_\varepsilon\|_p^p = -p \int_\Omega dx \int_0^1 |u_\varepsilon - \tau P_n u_\varepsilon|^{p-2} (u_\varepsilon - \tau P_n u_\varepsilon) P_n u_\varepsilon\ d\tau.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_p^p - \|u_\varepsilon\|_p^p = p \int_0^1 d\tau \int_\Omega |u_\varepsilon - \tau P_n u_\varepsilon|^{p-2} (u_\varepsilon - \tau P_n u_\varepsilon) P_n u_\varepsilon\ dx,$$

d'où

$$\left| \|\tilde{u}_\varepsilon\|_p^p - \|u_\varepsilon\|_p^p \right| \leq p \int_0^1 d\tau \int_\Omega |u_\varepsilon - \tau P_n u_\varepsilon|^{p-1} |P_n u_\varepsilon\ | dx,$$

puisque la fonction $g(x) = x^{p-1}$ *est convexe, alors*

$$\begin{aligned}
\left| \|\tilde{u}_\varepsilon\|_p^p - \|u_\varepsilon\|_p^p \right| &\leq 2^{p-2} p \int_0^1 d\tau \int_\Omega \left\{ |u_\varepsilon|^{p-1} + \tau^{p-1} |P_n u_\varepsilon|^{p-1} \right\} |P_n u_\varepsilon| \ dx \\
&\leq 2^{p-2} p \left\{ \|u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} \|P_n u_\varepsilon\|_\infty + \|P_n u_\varepsilon\|_p^p \right\} \\
&\leq C \left\{ \|u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} \|P_n u_\varepsilon\|_\infty + \|P_n u_\varepsilon\|_2^p \right\}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

D'après (3.3) *et* (3.11), *on obtient*

$$\begin{aligned}
\left| \|\tilde{u}_\varepsilon\|_p^p - \|u_\varepsilon\|_p^p \right| &\leq C \left\{ \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} + \varepsilon^{\frac{N-2}{4} \cdot p} \right\} \\
&\leq C \left\{ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} + \varepsilon^{\frac{N}{2}} \right\} \\
&\leq C \ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Par le même argument, on a

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} &= \|u_\varepsilon - P_n u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} \\
&\leq C \left\{ \|u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} + \|P_n u_\varepsilon\|_{p-1}^{p-1} \right\} \\
&\leq C \left\{ \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} + \varepsilon^{\frac{N-2}{4} \cdot p-1} \right\} \\
&\leq C \left\{ \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} + \varepsilon^{\frac{N-2}{4} \cdot \frac{N+2}{N-2}} \right\} \\
&\leq C \ \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 &\leq \|u_\varepsilon\|_1 + \|P_n u_\varepsilon\|_1 \\
&\leq C \left\{ \varepsilon^{\frac{n-2}{4}} + \varepsilon^{\frac{n-2}{4}} \right\} \\
&\leq C \ \varepsilon^{\frac{n-2}{4}}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant u_ε *par* $\tilde{u}_\varepsilon$ *et* $\overline{W}(\varepsilon)$ *par* $\overline{\overline{W}}(\varepsilon)$ *dans le Lemme* 3.1.2, *on trouve l'inégalité* (3.7).
Montrons que $\widetilde{u}_\epsilon$ *vérifie* (3.1):
Calcul de $\|\nabla \widetilde{u}_\epsilon\|_2^2$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla \widetilde{u}_\epsilon\|_2^2 &= \|\nabla (u_\varepsilon - P_n u_\varepsilon)\|_2^2 \\
&= \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 + \|\nabla P_n u_\varepsilon\|_2^2 - 2 \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla P_n u_\varepsilon dx,
\end{aligned}$$

Par la formule de Green, on a

$$\begin{aligned}\|\nabla\widetilde{u}_\epsilon\|_2^2 &= \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2+\|\nabla P_n u_\varepsilon\|_2^2+2\int_\Omega \Delta P_n u_\varepsilon\,(u_\varepsilon)\,dx\\ &= \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2+C\,\|P_n u_\varepsilon\|_2^2+2C\int_\Omega u_\varepsilon P_n u_\varepsilon dx\\ &= S^{\frac{N}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Calcul de $\|\widetilde{u}_\epsilon\|_p^2$*:*
D'après (3.13)*, on a*

$$\|\widetilde{u}_\epsilon\|_p^p\le\|\widetilde{u}_\epsilon\|_p^p+C\varepsilon^{\frac{N-2}{2}},$$

théorème des accroissements finis, nous donne

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_\epsilon\|_p^2 &\le \|\widetilde{u}_\epsilon\|_p^2+C\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\\ &\le S^{\frac{N-2}{2}}+O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Calcul de $\|\widetilde{u}_\epsilon\|_2^2$*:*

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_\epsilon\|_2^2 &= \|u_\epsilon-P_n u_\varepsilon\|_2^2 \qquad (3.18)\\ &\le C\left(\|u_\varepsilon\|_2^2+\|P_n u_\varepsilon\|_2^2\right)\\ &\le \begin{cases} C\varepsilon+O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & si\ N\geqslant 5.\\ C\varepsilon\log\varepsilon+O\left(\varepsilon\right) & si\ N=4.\end{cases}\end{aligned}$$

En combinant (3.16), (3.17) *et* (3.18)*, on trouve que*

$$\frac{\|\nabla\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2-\lambda\,\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2}{\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_p^2}=\begin{cases} S-C\varepsilon+O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & si\ N\geqslant 5.\\ S-C\varepsilon\log\varepsilon+O\left(\varepsilon\right) & si\ N=4.\end{cases}$$

3.2 Preuve du théorème 3.1

Les solutions du problème (P_λ) sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie suivante:

$$f_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u|^2\,dx-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\,dx.$$

La preuve du Théorème 3.1 nécessite les deux lemmes suivants:

Lemme 3.2.1 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonctionnelle f_λ vérifie la condition de Palais-Smale pour tout $c < \frac{1}{N} S^{\frac{1}{N}}$.*

Preuve :
Soit $(u_n)_n$ une suite de $(\mathrm{PS})_c$ i.e

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p\,dx = c + o(1), \tag{3.19}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^2\,dx - \int_\Omega |u_n|^p\,dx = o(1) \tag{3.20}$$

$$f_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\langle f'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |u_n|^p\,dx \leq c + o(1).$$

Par conséquent, on conclut que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
Puisque l'espace $H_0^1(\Omega)$ est réflexif, on peut extraire une sous-suite notée $(u_n)_n$ telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), & (3.21)\\ u_n &\to u \text{ fortement dans } L^q(\Omega) \text{ pour tout } q \in [1, p[. & (3.22)\end{aligned}$$

u est une solution de (P_λ). En effet, soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, de (3.20), (3.21) et (3.22) on conclut que

$$\langle f'_\lambda(u), \varphi\rangle = \langle f'_\lambda(u_n), \varphi\rangle + o(1) = o(1).$$

Par les résultats de régularité (section 3.4) , on a

$$u \in L^\infty(\Omega), \tag{3.23}$$

donc u est une solution classique régulière de (P_λ).
Il reste à montrer que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.
Posons

$$v_n = u_n - u$$

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle f'_\lambda(u_n), v_n\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda\int_\Omega u_n v_n dx - \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n v_n dx \\ &= \int_\Omega \left[\nabla u \nabla v_n + |\nabla v_n|^2 - \lambda(u + v_n)v_n \right. & (3.24)\\ &\quad \left. - |u + v_n|^{p-2}(u + v_n)v_n\right] dx. \end{aligned}$$

Par (3.21) et (3.22), on a

$$\int_{\Omega} \left(\nabla u \nabla v_n - \lambda \left(u + v_n \right) v_n \right) dx = o\left(1\right). \tag{3.25}$$

De (3.24) et (3.25), on a

$$\left\| \nabla v_n \right\|_2^2 = \int_{\Omega} \left| u + v_n \right|^{p-2} \left(u + v_n \right) v_n dx + o\left(1\right). \tag{3.26}$$

Montrons que

$$\left\| \nabla v_n \right\|_2^2 = \left\| v_n \right\|_p^p + o\left(1\right). \tag{3.27}$$

D'après (3.22) et (3.23), on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \left| u + v_n \right|^{p-2} \left(u + v_n \right) v_n dx - \int_{\Omega} \left| v_n \right|^p \right| \\ = & \left| \int_{\Omega} \int_0^u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left| \xi + v_n \right|^{p-2} \left(\xi + v_n \right) v_n \right) d\xi dx \right|. \end{aligned}$$

En posant $t = \dfrac{\xi}{u}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \left| u + v_n \right|^{p-2} \left(u + v_n \right) v_n dx - \int_{\Omega} \left| v_n \right|^p dx \right| \\ = & \left| (p-1) \int_{\Omega} \int_0^1 \left| tu + v_n \right|^{p-2} v_n u \ dtdx \ \right|. \end{aligned}$$

En utilisant (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left| u + v_n \right|^{p-2} \left(u + v_n \right) v_n dx - \int_{\Omega} \left| v_n \right|^p \right| & \leq C \int_{\Omega} \int_0^1 \Big| \left| v_n \right|^{p-1} u \\ & \quad + \left| v_n \right| t^{p-2} \left| u \right|^{p-1} \Big| \, dtdx \\ & \leq C \int_{\Omega} \left[\left| v_n \right|^{p-1} u + \left| v_n \right| \ \left| u \right|^{p-1} \right] dx \\ & = o\left(1\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

D'après (3.26) et (3.28), l'identité (3.27) est vérifiée.
Puisque

$$\left\langle f_{\lambda}' \left(u_n \right), u_n \right\rangle = o\left(1\right),$$

alors

$$\left\| u_n \right\|_p^p = \int_{\Omega} \left(\left| \nabla u_n \right|^2 - \lambda \left| u_n \right|^2 \right) dx + o\left(1\right).$$

En remplaçant ceci dans l'expresion de $f_\lambda(u_n)$ et en utilisant (3.25), on obtient

$$\begin{aligned} f_\lambda(u_n) &= \frac{1}{N}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - \lambda |u_n|^2\right) dx + o(1) \\ &= \frac{1}{N}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2\right) dx + \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 + o(1), \quad (3.29) \end{aligned}$$

de plus u est une solution de (P_λ), i.e

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2\right) dx - \int_\Omega |u|^p\, dx = \langle f'_\lambda(u), u\rangle = 0,$$

ce qui implique

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2\right) dx \geqslant 0, \quad (3.30)$$

par (3.29) et (3.30) on a

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \leq N f_\lambda(u_n) + o(1).$$

Alors, par (3.19) pour n suffisament grand on obtient

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \leq Nc < S^{\frac{N}{2}}.$$

Par (3.27) et la définition de S on a

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \leq S^{-\frac{p}{2}} \|\nabla v_n\|_2^p + o(1).$$

Ce qui implique

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \left(S^{-\frac{p}{2}} - \|\nabla v_n\|_2^{p-2}\right) \leq o(1).$$

On conclut que $v_n \to 0$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. ■

Lemme 3.2.2 *Pour ε suffisamment petit, on a*

$$\sup_W f_\lambda(u) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}, \quad (3.31)$$

où $W = \overline{W}(\varepsilon)$ (respectivement $\overline{\overline{W}}(\varepsilon)$) si $\lambda \notin \sigma(-\Delta)$ (respectivement $\lambda \in \sigma(-\Delta)$).

Preuve :
Fixons $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$
Posons
$$g(t) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \frac{t^2}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx - \frac{t^p}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$
La fonction g atteint son maximum au point
$$t_0 = \left(\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \right)^{\frac{N-2}{4}}.$$
On déduit que
$$\max_{t>0} f_\lambda(tu) = \frac{1}{N} \left(\frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} \right)^{\frac{N}{2}}.$$
Pour montrer (3.31), il faut évaluer
$$\sup_{\substack{u \in W(\varepsilon) \\ \|u\|_p = 1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\}.$$
Pour cela, on distingue deux cas:
1. $\lambda \notin \sigma(-\Delta)$ (i.e $u \in \overline{W}(\varepsilon)$). Soit
$$u = u^- + tu_\varepsilon \text{ avec } \|u\|_p = 1,$$
si ε est petit alors t est borné. En effet, par (3.5) et (3.7) on a
$$\begin{aligned} 1 &= \|u\|_p^p \geqslant \|tu_\varepsilon\|_p^p + \frac{1}{2} \left\|u^-\right\|_p^p - C\ t^p \varepsilon^{\frac{N(N-2)}{2N+4}} \\ &\geqslant t^p \left(S^{\frac{n}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right) + \frac{1}{2} \left\|u^-\right\|_p^p. \end{aligned} \tag{3.32}$$
D'après (3.2), on a
$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 &= \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla tu_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|tu_\varepsilon\|_2^2 \\ &\quad +2 \left\{ \int_\Omega \left[\left|\nabla u^-\right| \ |\nabla tu_\varepsilon| - \lambda \left|u^-\right| \ |tu_\varepsilon| \right] dx \right\}. \end{aligned}$$
La formule de Green, nous donne
$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 &= \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla tu_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|tu_\varepsilon\|_2^2 \\ &\quad -2 \left\{ \int_\Omega \left[\left|\Delta u^-\right| \ |tu_\varepsilon| + \lambda \left|u^-\right| \ |tu_\varepsilon| \right] dx \right\}. \end{aligned}$$

Comme $u^- \in H_2$ et t est borné, alors

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 &\leq \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t u_\varepsilon\|_2^2 \\
&\quad + C\left\{\left\|\Delta u^-\right\|_\infty \|t u_\varepsilon\|_1 + \left\|u^-\right\|_\infty \|t u_\varepsilon\|_1\right\} \\
&\leq \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t u_\varepsilon\|_2^2 \\
&\quad + C\left\{\left\|\Delta u^-\right\|_2 \|t u_\varepsilon\|_1 + \left\|u^-\right\|_2 \|t u_\varepsilon\|_1\right\} \\
&\leq \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t u_\varepsilon\|_2^2 \\
&\quad + C\left\|u^-\right\|_2 \|u_\varepsilon\|_1 \\
&\leq \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t u_\varepsilon\|_2^2 \\
&\quad + C\left\|u^-\right\|_2 \varepsilon^{\frac{N-2}{4}} \\
&\leq \left(\bar{\lambda} - \lambda\right) \left\|u^-\right\|_2^2 + \frac{\|\nabla t u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t u_\varepsilon\|_2^2}{\|t u_\varepsilon\|_p^2} \|t u_\varepsilon\|_p^2 \\
&\quad + C\left\|u^-\right\|_2 \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}.
\end{aligned}$$

Posons

$$A\left(u^-, \varepsilon, C\right) = \left(\bar{\lambda} - \lambda\right) \left\|u^-\right\|_2^2 + C\left\|u^-\right\|_2 \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}.$$

La fonction $h(x) = \left(\bar{\lambda} - \lambda\right) x^2 + C\varepsilon^{\frac{N-2}{4}} x$ est négative ou nulle, alors

$$A\left(u^-, \varepsilon, C\right) \leq 0 \,. \tag{3.33}$$

On distingue deux cas:
a. Si $\|u^-\|_p^p \leq 2C\varepsilon^{\frac{N(N-2)}{2N+4}}$, alors par (3.10) on a

$$\|t u_\varepsilon\|_p^2 \leq \left(1 - \frac{3}{4}\left\|u^-\right\|_p^p + C\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}\left\|u^-\right\|_2 + C\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{p}},$$

l'étude de la fonction $h(x) = \left(1 - \frac{3}{4}x + b\right)^{\frac{2}{p}}$donne que $h(x) \leq (1+b)^{\frac{2}{p}}$, donc

$$\|t u_\varepsilon\|_p^2 \leq \left(1 + C\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}\left\|u^-\right\|_2 + C\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Par le théorème des accroissement finis, on obtient

$$\|t u_\varepsilon\|_p^2 \leq 1 + C\varepsilon^{\frac{N-2}{4}}\left\|u^-\right\|_2 + C\varepsilon^{\frac{N}{2}}.$$

D'après (3.1) et (3.33), on a

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \leq \begin{cases} \left(S - C\varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)\right)\left(1 + C\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5, \\ \left(S - C\varepsilon\log\varepsilon + O(\varepsilon)\right)\left(1 + C\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) & \text{si } N = 4, \end{cases}$$

b. Si $\|u^-\|_p^p > 2C\varepsilon^{\frac{N(N-2)}{2N+4}}$, alors par (3.32) on a

$$\|tu_\varepsilon\|_p^2 \leq 1.$$

D'après (3.1) et (3.33), on a

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \leq \begin{cases} S - C\varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si } N \geqslant 5, \\ S - C\varepsilon \log \varepsilon + O(\varepsilon) & \text{si } N = 4. \end{cases}$$

2. $\lambda = \lambda_{\bar{n}} \in \sigma(-\Delta)$ (i.e $u \in \overline{\overline{\overline{W}}}(\varepsilon)$)
Soit $u = u^- + t\tilde{u}_\varepsilon$ avec $\|u\|_p = 1$.
Alors

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda_{\bar{n}} \|u\|_2^2 &= \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 \\ &\quad +2\left\{\int_\Omega \left[\left|\nabla u^-\right| \ |\nabla t\widetilde{u}_\varepsilon| - \lambda \left|u^-\right| \ |t\widetilde{u}_\varepsilon|\right] dx\right\} \\ &= \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 \\ &\quad -2\left\{\int_\Omega \left[\left|\nabla u^-\right| \ |\nabla t\widetilde{u}_\varepsilon| + \lambda \left|u^-\right| \ |t\widetilde{u}_\varepsilon|\right] dx\right\} \\ &= \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 \\ &\quad +C \left\|u^-\right\|_2^2 \|\widetilde{u}_\varepsilon\|_1. \end{aligned}$$

Par (3.15), on a

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 &= = \left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - \lambda \left\|u^-\right\|_2^2 + \|\nabla t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|t\widetilde{u}_\varepsilon\|_2^2 \\ &\quad +C \left\|u^-\right\|_2^2 \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}. \end{aligned}$$

En suit les mêmes calculs du 1 er cas, on conclut la preuve. ■

Preuve du théorème 3.1 :
Pour la preuve vérifions les conditions du Théorème 1.2.15.
Pour cela on distingue deux cas:
1. Si $\lambda \notin \sigma(-\Delta)\,(\lambda > 0)$
On pose $V = H_1$ et $W = \overline{W}(\epsilon)$, on voit que les conditions (F_1) et $(F_3).iii$ sont vérifiées par construction. De plus la condition (F_2) (respectivement $(F_3).i$) est vérifiée par le Lemme 3.2.1 (respectivement le Lemme 3.2.2). Reste à démontrer $(F_3).ii$.
Soit $u \in H_1$, alors

$$\begin{aligned} f_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^+}\right) \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

En utilisant les injections de Sobolev, on obtient

$$f_\lambda(u) \geqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^+}\right)\|\nabla u\|_2^2 - C\|\nabla u\|_2^p \geqslant \delta > 0.$$

pour $\|\nabla u\|_2 = \rho$ avec ρ assez petit.
Puisque $\dim H_1 \cap \overline{\overline{W}} = 1$ et $H_1 + \overline{W} = H_0^1(\Omega)$, alors le problème (P_λ) admet au moins une solution non triviale.
2. $\lambda \in \sigma(-\Delta)$
La même démonstration en posant $W = \overline{\overline{\overline{W}}}(\varepsilon)$. ■

3.3 Preuve du théorème 3.2

La preuve du Théorème 3.2 nécessite le lemme suivant:

Lemme 3.3.1 *Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\beta_\lambda := \sup_{u\in H_2} f_\lambda(u) \leq \left(\lambda^+ - \lambda\right)^{\frac{N}{2}} \frac{|\Omega|}{N}.$$

De plus, ils existent deux constantes $\rho_\lambda > 0$ et $\delta_\lambda \in (0, \beta_\lambda)$ tel que

$$f_\lambda(u) \geqslant \delta_\lambda \quad \textit{pour tout } u \in H_1, \|\nabla u\|_2^2 = \rho_\lambda.$$

Preuve : Pour tout $u \in H_2$, on a

$$\begin{aligned} f_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\lambda^+ - \lambda\right)\int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Holder, on obtient

$$f_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\left(\lambda^+ - \lambda\right)|\Omega|^{\frac{2}{N}}\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx.$$

Soit

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\lambda^+ - \lambda\right)|\Omega|^{\frac{2}{N}} x^2 - \frac{1}{p}x^p.$$

Alors

$$\sup_{u\in H_2} f_\lambda(u) \leq \sup_{x>0} g(x) = \frac{1}{N}\left(\lambda^+ - \lambda\right)^{\frac{N}{2}}|\Omega|.$$

Soit $u \in H_1$ telle que $\|\nabla u\|_2^2 = \rho_\lambda$, alors

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx \geqslant \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^+}\right) \|\nabla u\|_2^2 .$$

Par la définition de S on a

$$f_\lambda(u) \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^+}\right) \|\nabla u\|_2^2 - C \|\nabla u\|_2^p \geqslant \delta_\lambda.$$

■

Preuve du théorème 3.2 :
D'après les Lemmes 3.3.1 et 3.2.1, les hypothèses du Théorème 1.2.15 sont satisfaites en posant $V = H_1$ et $W = H_2$, alors le problème (P_λ) admet m paires de solutions non triviales. ■

3.4 Régularité des solutions

La solution u de (P_λ) donnée dans le théorème 2.4 (respectivement le théorème 2.5) qui est dans $H_0^1(\Omega)$. En fait $u \in L^\infty(\Omega)$. Ceci est démontré par Trudinger [24] pour le problème de Yamabe.

Lemme 3.4.1 *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie*

$$-\Delta u = au,$$

où $a(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ et $N \geqslant 3$. Alors $u \in L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$.

On utilise ce lemme avec $a = \lambda + u^{p-2} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ (puisque $u \in L^p(\Omega)$). Alternativement, on a un résultat de Brézis et Kato [7].

Théorème 3.4.2 (*Brézis-Kato*)
Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que

$$|g(x,s)| \leq K |s|^{p-1} + c(x),$$

où $p = 2^*$, K est une constante et $c(x) \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u \in L^q(\Omega)$ pour un $q > \dfrac{2N}{N-2}$.

3.5 Autres résultats

1. **H. Brézis et L. Nirenberg [8]** ont aussi démontré que le problème:
$$(I)\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
où $f(x,0) = 0$ et $f(x,u)$ est une perturbation d'ordre inferieur de u^{2^*}, i.e
$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u^{2^*}} = 0.$$
En supposant que
$$f(x,u) = a(x)\,u + g(x,u)\,,$$
avec
$$\begin{array}{ll} a(x) \in L^\infty(\Omega)\,, & \\ g(x,u) = o(u) & \text{quand } u \to 0^+, \text{ uniformément en } x, \\ g(x,u) = o\left(u^{2^*}\right) & \text{quand } u \to +\infty, \text{ uniformément en } x, \end{array}$$
admet au moins une solution non triviale.

2. **A. Ambrosetti, H. Brezis et G. Cerami** [1] ont considéré le problème suivant:
$$(I_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u^q & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
avec $0 < q < 1 < p$, $\lambda > 0$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$.
Les résultats obtenus sont:
- Pour tout $0 < q < 1 < p$, il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (0,\Lambda)$ le problème (P_λ) a une solution minimale u_λ telle que l'énergie est négative.
- Pour tout $0 < q < 1 < p \leq 2^* - 1$. Alors pour tout $\lambda \in (0,\Lambda)$ le problème (P_λ) a une seconde solution $v_\lambda > u_\lambda$.

3. A partir des résultats de Brézis-Nirenberg [8] plusieurs problèmes ont été étudié en introduisant par exemple un poids de Hardy, nous citons par exemple les travaux de Jannelli [16] et celui de Ferrero-Gazzola [13].

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical points theory and applications. J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[3] Th. Aubin, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. Diff. Geom. 11 (1976), 573-598.

[4] Th. Aubin, Equations diffèrentielles non lineaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 269-293.

[5] Th. Aubin, Best Constants in the Sobolev Imbedding Theorem: The Yamabe Problem. In seminar on differential Geometry. Princeton univ. Press. Princeton, N. J., (1982), 173-184.

[6] H. Brézis, Analyse fonctionnelle - théorie et applications, Masson, (1983).

[7] H. Brézis, Kato, T., Remarks on the Schrodinger operator with singular complex potential, J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 137-151.

[8] H. Brézis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Comm. Pure Appl. Math. 36(1983), 437-477.

[9] A. Capozzi, D. Fortunato, G. Palmieri, An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent, Anal. 6 (1985), 463-470.

[10] A. Capozzi, G. Palmieri, Multiplicity results for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 103 (1986), 275–285.

[11] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe, Bifurcation and multiplicity results for non linear elliptic problems involving critical Sobolev exponents, Anal. de l'I. H. P. 5 (1985), 341-350.

[12] J.M. Coron, Topologie et cas limite des injections de Sobolev, C.R. Acad. Sc. Paris 299 (1984) , 209-212.

[13] A. Ferrero, F. Gazzola, Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations, J. Differential Equations 177 (2001), 494-522.

[14] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm. Math. Phys. 68 (1979).

[15] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, (1977).

[16] E. Jannelli, The role played by space dimension in elliptic critical problems, J. Differential Equations 156 (1999) 407-426.

[17] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Mathématiques et applications (Springer-Verlag), (1989).

[18] Kazdan, J., Warner, F., Remarks on some quasilinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 567-597.

[19] E. Lieb, Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation, Studies in Appl. Math. 57 (1977), 93-105.

[20] E. Lieb, Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality and related inequalities, in Annals of Math. 118 (1983), 349-374.

[21] S. I. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $Au + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady 6 (1965), 1408-1411.

[22] M. Struwe, Variational methods applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems, Springer Verlag (1999).

[23] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality, Annali di Mat. 110 (1976), 353-372.

[24] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 265-274.