

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE Abou Bekr Belkaid, Tlemcen
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE**



MAGISTER EN AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE-INFORMATIQUE

Option : AUTOMATIQUE

Par

HAMIDOU Abderrahim

Thème

***ANALYSE ET CONTROLE DES SYSTEMES
CHAOTIQUES***

Membres du jury :

Mr B.CHERKI	MC	Université de Tlemcen	Président
Mr N.BOUKLI-HACENE	MC	Université de Tlemcen	Examineur
Mm A.CHOUKCHOU-BRAHAM	MC	Université de Tlemcen	Examineur
Mm F.BENMASOUR	MC	Université de Tlemcen	Invitée
Mr A.MEGHABER	MC	Université de Tlemcen	Encadreur
Mm S.BENSGHIR	MC	Université de Tlemcen	Co-Encadreur

Année universitaire : 2010/2011

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes remerciements et ma gratitude envers mes encadreurs; Monsieur A.MEGHABER et Madame S.BENSGHIR, qui par leurs conseils précieux et encouragement incessant, mais aussi pour leur rigueur sur le plan scientifique et humain m'a donné le gout du travail et l'envie de découvrir.

Mes remerciements vont également à Monsieur B.CHERKI pour avoir Accepter d'être le président du jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur N.BOUKLI-HACEN, Madame A.CHOUKCHOU-BRAHAM et Madame F.BELMANSOUR pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

Je tiens aussi à remercier Monsieur A.BELBACHIR et Monsieur B.BENYAHIA pour leurs soutiens indéfectibles.

Dédicaces

A ceux qui je leurs doit tous : mes très chers parents

A toutes la famille (frères et sœurs, neveux, nièces...)

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1	
1/Systèmes dynamiques.....	3
1.1/Introduction	3
1.2/ Représentation des systèmes dynamiques.....	4
1.3/ Notions de Base.....	5
1.4/ Nature et dimension du système	6
2/ Systemes non linéaires	7
2.1/ Motivation	7
2.2/ Caractéristiques des systèmes non linéaires	7
2.2.1/Explosion en temps finis	7
2.2.2/ Non unicité de la solution	8
2.2.3/ Points d'équilibre multiples.....	9
2.2.4/ Solutions periodiques	10
2.2.5/ Sous-harmoniques et sur-harmoniques	11
2.2.5/ Solutions quasiperiodiques : le Tore.....	13
2.2.7/ Bifurcation	13
2.2.8/ Chaos : solution apériodique	16
3/ L'analyse approximatifs	19
3.1/ Méthodes analytiques	19
3.1.1/ Méthode de collocation	20
3.1.2 / Méthode de la moyenne	21
3.1.3/ Balance harmonique	24

3.1.4 / Méthode de l'espace de phase	26
4/ méthodes numériques : les méthodes de discrétisation	27
5/ Conclusion	28
Chapitre 2	
1/ Aspects sur l'analyse des systèmes non linéaires	29
2/ Notion de stabilité	29
2.1/ Stabilité au sens de Lyapunov	30
2.2/ Stabilité asymptotique	31
3/ Stabilité des points d'équilibres	31
3.1/ Théoreme	33
3.2/ théoreme de Hartman-Grobman	35
4/ Stabilité des orbites périodiques	35
4.1/ Section de Poincaré	35
4.2/ Stabilité linéaire des orbites periodiques (cycle limite)	37
5/ Exposants de Lyapunov	38
6/ Analyse des Bifurcations	40
6.1/Bifurcation locale d'un point d'équilibre	40
6.1.1/Bifurcation transcritique	41
6.1.2/ Bifufrcation fourche	42
6.1.3/ Bifurcation selle-nœud	43
6.1.4/ Bifurcation de Hopf	44
6.2/ Bifurcation locale d'un cycle limite	47
6.2.1 / Doublement de période (flip bifurcation)	48
7/ Diagramme de bifurcation	49
8/Analyse fréquentielle des bifurcations	50

8.1/ Représentation du système dans le domaine fréquentielle	51
8.2/La bifurcation selle nœud	54
8.3/La bifurcation transcritique	56
8.3.4/Bifurcation fourche.....	57
9/ Conclusion	59
Chapitre 3	
1/Introduction	61
2/ Balance Harmonique : Méthodologie.....	62
3/ Balance harmonique pour le contrôle	66
3.1 / Représentation du système	66
3.2/ Prédiction des points d'équilibre et des cycles limites	68
3.3/ analyse de la Stabilité du CLP via la BH (stabilité des auto-oscillations)	71
3.4 / Analyse d'une bifurcation à doublement de période par la BH	74
3.4.1/ Prédiction d'une bifurcation à doublement de période par la BH	74
3.4.2/ Analyse de la stabilité d'un doublement de période	78
3.4.2.1/ Test de stabilité basique d'un DPP	79
3.4.2.2/ Evaluation de m_2	80
4/ Application	85
4.1/ Présentation d'un système à secousse.....	85
4.2/ Applications : approche BH pour le contrôle (conditions analytiques)	86
4.3/ Application : approche numérique pour la BH	90
5/ Conclusion	94
Chapitre 4	
1/ Introduction.....	96
2/Contrôle des bifurcations	97

2.1/Formulation du problème...	97
2.2/Synthèse du contrôleur	99
3/ <i>Contrôle linéaire est non linéaire du chaos</i>	101
3.1/ méthode de contrôle linéaire (synthèse par linéarisation approximative)...	101
3.2/ linéarisation par bouclage (linéarisation exacte)	101
3.2.1/ Concept intuitive.....	101
3.2.2/ Linéarisation entrée état (input state linearization)...	103
3.2.3/ Linéarisation entrée-sortie (input-output linearization)	104
3.3/ Linéarisation entrée-états pour les systemes mono-entrée mono-sortie	105
3.3.1/ Définition.....	105
3.3.2/lemme : relation entre la linéarisation entrée-état et entrée-sortie	106
3.3.3/ Condition pour la linéarisation entrée-état	107
3.3.4/ approche générale de construction d'une linéarisation entrée-état	107
4/ <i>Application du contrôle du chaos</i>	107
4.1/ Contrôle du chaos par la balance harmonique	107
4.2/ contrôle linéaire et non linéaire du chaos	109
5/ Conclusion	112
Conclusion et perspectives.....	114
Annexe.....	116

Bibliographie

Liste des abréviations :

MBH : Méthode de la Balance harmonique

BHk : Balance harmonique d'ordre K

CLP : Cycle Limite Prédic

DPP : Doublement de période prédic

Introduction générale

Introduction générale :

Depuis la nuit des temps, le chaos, syndrome de désordre et de confusion devait être évité car il s'opposait à l'ordre et à la méthode. La science était canalisée par le déterminisme et la prévisibilité. La vision du déterminisme qui était celle de Newton (1624-1727) ou de Laplace (1749-1827), reposait sur le fait que l'univers serait régi par des lois immuables et qu'il serait possible de connaître l'avenir et le passé à partir du simple présent.

Poincaré (1854_1912) fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos, il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers l'interaction des trois corps célestes ; elle correspond au fait que de petites causes entraînent de grands effets. Plus tard, Lorenz (1960) a mis en évidence ce phénomène grâce notamment à l'arrivée des ordinateurs.[20][5]

Depuis, des chercheurs d'horizons différents (biologie, chimie, mathématique, physique, ingénierie..) ont commencé à s'intéresser aux dynamiques non linéaires imprédictibles et regroupés sous la dénomination du chaos, qui jusqu'alors étaient sans solution. Ils ont cherché à répondre à des questions telles que, comment se forment les nuages? Comment les phénomènes tels que l'arythmie cardiaque et la variation d'une population peuvent-ils s'expliquer.....etc.[39]

Ainsi, plusieurs avancées ont été faites dans le domaine et qui ont permis de développer plusieurs méthodes et techniques d'analyse et de contrôle des systèmes non linéaires bifurquant et des dynamiques liées (chaos, quasi périodicité, doublement de période...). Ainsi, le chaos qui été aperçu dans les domaines de l'ingénierie plus particulièrement l'automatique, l'électronique et l'électrotechnique comme un problème majeur, est aujourd'hui synonyme de versatilité et de souplesse grâce à ces nouvelles méthodes.

Nous nous intéressons dans ce mémoire au problème d'analyse et de contrôle des systèmes chaotiques, et cela en comparant une approche temporelle qui s'articule sur des

Introduction générale

méthodes telles que la linéarisation approximative et exacte avec une approche fréquentielle basée sur la méthode de l'équilibrage harmonique.

Nous focalisons plus notre étude sur l'approche fréquentielle pour l'analyse et le contrôle des bifurcations; où celle-ci utilise le principe de la balance harmonique qui permet de formuler des conditions analytiques approximatives sur la prédiction des bifurcations; et comment cela va avoir une implication directe dans le contrôle du chaos ; on s'intéressera plus particulièrement à la bifurcation à doublement de période ; motivée par le fait que celle-ci est un scénario probable d'une route vers le chaos.

Le travail développé dans ce mémoire entre dans ce cadre et il est organisé de la façon suivante :

- **le chapitre 1** présente les concepts de base nécessaires à la compréhension des systèmes non linéaires avec les différents phénomènes intéressants qu'ils peuvent dévoiler.
- **le chapitre 2** développe la notion relative à la bifurcation et ses dynamiques liées (chaos, doublement de période..) tout en présentant quelques outils d'analyse des systèmes bifurquants.
- **Le chapitre 3** fera l'objet d'étude des bifurcations plus particulièrement le doublement de période, et cela en se basant sur une méthode analytique dite Balance harmonique basée sur une approche fréquentielle avec une application sur un système à secousse afin de tester la validité de la méthode
- **Le chapitre 4** abordera la question relative au contrôle du chaos plus particulièrement le retardement d'une bifurcation à doublement de période via la balance harmonique. Nous complétons ainsi l'application présentée dans le chapitre-3 par la synthèse d'une loi de commande.

1/Systèmes dynamiques :

1.1/Introduction :[20][5][39]

Nous sommes souvent amenés à décrire le simple quotidien vécu de notre vie, tel que la naissance et la mort, ou les réalisations technologiques actuelles les plus complexes telles que les satellites et les fusées et même des phénomènes cosmiques ou microscopiques par le terme « système ».

En effet, un système est une combinaison de composants ou d'éléments qui sont aperçus comme étant une seule entité. Ces éléments sont liés les uns aux autres grâce à un ensemble particulier de variables appelées les états du système, ceux-ci vont nous permettre de décrire le comportement du système à un temps donné.

Un système dynamique est un système dont les états changent avec le temps, et dont l'évolution future ne dépend que des conditions initiales et des lois d'évolution. Il pourra alors venir à l'esprit de n'importe quel personne, qu'elle soit scientifique ou non de poser à sa façon des réflexions telles que :

- Pour un état particulier du système, est-ce que la solution existe ?
- Quelles sont les propriétés asymptotiques des solutions de ce système ?
- Comment le système va dépendre de ses paramètres ?
- Comment le système va dépendre de ses conditions initiales ?
- Est-ce qu'il existe une loi de commande pour un système physique ?

Autant de questions et d'autres qui peuvent être posées, mais la réponse à toutes ces questions va dépendre de l'étude du système, ou d'une manière plus exacte du modèle mathématique de ce système, cela qu'il soit issu des lois de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie....etc. Cela représente d'une manière générale le champ de travail ou d'étude de ce qu'on appelle la théorie des systèmes dynamiques.

1.2/ Représentation des systèmes dynamiques :[43]

Il existe deux principaux types de systèmes dynamiques, ceux qui sont régis par des équations différentielles et ceux qui sont régis par des équations aux différences.

Les équations différentielles décrivent l'évolution du système en temps continu alors que les équations aux différences décrivent l'évolution du système en temps discret ; ces deux modèles mathématiques représentent un outil puissant dans les différentes disciplines de l'ingénierie.

Nous nous limitons dans notre travail à l'étude des systèmes dynamiques qui sont décrits par des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire impliquant seulement des dérivées par rapport au temps.

Une forme de représentation de ces équations différentielles ordinaires est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = f_1(X_1, \dot{X}_2, \dots, X_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{X}_n = f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Ou :

\dot{X}_i représentent les dérivées par rapport au temps, avec ($i=1 \dots n$)

$$\text{C'est à dire } \dot{X}_i = \frac{dX_i}{dt} \quad f : R^n \rightarrow R^n$$

Les variables X_i sont appelées les variables d'états ; elles peuvent être la position et la vitesse d'une planète dans un système solaire, les populations de différentes espèces dans un écosystème, ou la tension et le courant dans un circuit électronique.

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Le système (1.1) peut être linéaire si toutes les variables X_i de la partie à droite de ce système apparaissent seulement comme une puissance de un, sinon le système est dit non linéaire.

Les non linéarités typiques sont souvent des termes de la forme produit, puissance, ou fonction tels que : $x_1 x_2$, x_1^3 ou $\cos x_1$

1.3/ Notions de Base:[43][[30][40]

Soit l'équation d'un pendule :

$$\ddot{X} + \frac{g}{l} \sin X = 0$$

Où « X » représente l'angle du pendule vis-à-vis de la verticale, « g » est la gravité et « l » la longueur du pendule.

En posant $X_1 = X$, et $X_2 = \dot{X}$, la forme d'état du système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -\frac{g}{l} \sin X_1 \end{cases} \quad (1.2)$$

La présence de la non linéarité rend la résolution analytique difficile d'où l'utilisation de ce qu'on appelle l'approximation, celle-ci peut se ramener dans notre exemple à la considération suivante :

$$\sin X = X \quad \text{pour } X \ll 1$$

Cela va nous permettre de passer de la forme non linéaire à la forme linéaire.

Il est maintenant possible de résoudre le problème pour trouver une solution analytique appelée parfois la solution approximative.

Cependant, on peut aussi résoudre le problème au moyen de méthode géométrique.

Considérons pour cela, la solution du système comme étant une paire de fonctions $X_1(t)$ et $X_2(t)$ représentant respectivement la position et la vitesse du pendule.

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Si on construit un espace abstrait de coordonnées (X_1, X_2) , alors la solution est la correspondance à un point se déplaçant le long d'une courbe ; cette forme sera dite la solution qualitative du problème. La figure-1.1- en montre le principe.

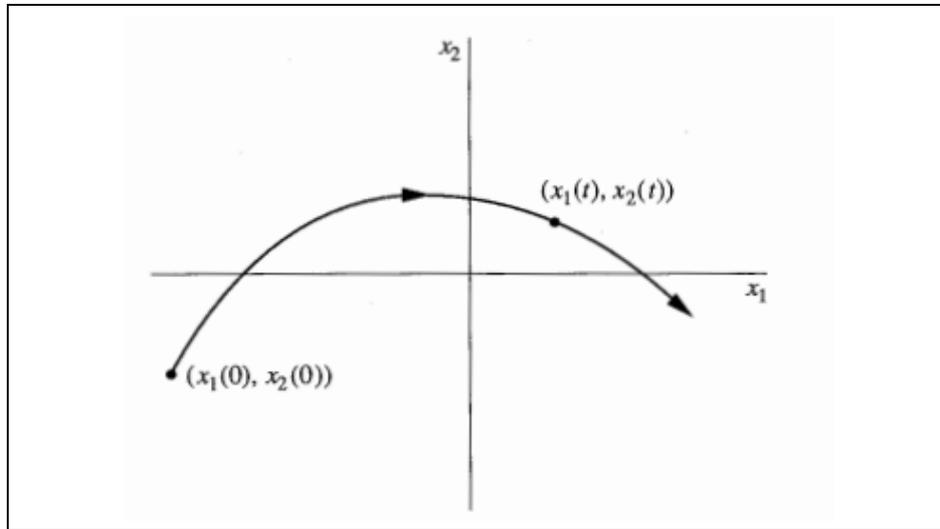


Figure-1.1- solution qualitative

La courbe est appelée trajectoire de phase et l'espace est appelé l'espace de phase.

Pour n'importe quel point d'état donné (x_1, x_2) , \dot{x}_1 définit comment x_1 change avec le temps et \dot{x}_2 donne l'évolution de x_2 en fonction du temps. Donc $[\dot{x}_1, \dot{x}_2]$ est le champ de vecteurs de cet espace (f).

Un système d'équation tel qu'il est représenté dans (1.1) ou (1.2) est souvent appelé un flot. Donc la compréhension du comportement dynamique du système va passer par l'analyse des caractéristiques de la solution, qui, en général, est impossible à obtenir sous forme analytique, d'où l'importance de l'étude approximative.

1.4/ Nature et dimension du système :

Un système dynamique peut être autonome ou non, dans le premier cas le système ne va pas dépendre de manière explicite du temps, si on déplace l'origine des temps de t à $t-a$, cela

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

ne changera en rien l'équation d'état, on dira alors que le système est autonome à temps invariant, sinon le système est autonome à temps variant. Si le système dépend de manière explicite du temps il est dit non autonome.

Revenons maintenant au système décrit par (1.1), celui-ci possède n coordonnées $(X_i, i=1, \dots, n)$, on dit que le système est de dimension n ou du $n^{\text{ième}}$ ordre.

2/ Systèmes non linéaires :

2.1/ Motivation :[39]

Nous avons vu dans l'exemple précédant, que l'utilisation de l'approximation pouvait ramener un système non linéaire à un système linéaire, cela dans objectif de trouver une solution ; et donc pourquoi avons-nous besoin de la théorie des systèmes non linéaires et pourquoi l'étude qualitative des systèmes non linéaires est très importante ?

Après tout, beaucoup de modèles sont disponibles sous forme linéaire et donc il n'est pas naïf de poser ces questions, surtout qu'on a les outils nécessaires pour étudier les systèmes linéaires.

2.2/ Caractéristiques des systèmes non linéaires :

2.2.1/Explosion en temps fini :[30][34]

Nous savons qu'un système linéaire ou plus exactement, l'état d'un système linéaire tend vers l'infini quand le temps tend vers l'infini, cela n'est pas toujours le cas pour les systèmes non linéaires.

Prenons par exemple l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Ce système admet pour solution : $x(t) = \frac{1}{1-t}$

Le graphe de la solution est donné par la figure-1.2-. Nous remarquons que la solution tend vers l'infini quand t tend vers 1. On parle alors de l'explosion en temps fini ; la solution existe seulement entre $0 \leq t < 1$.

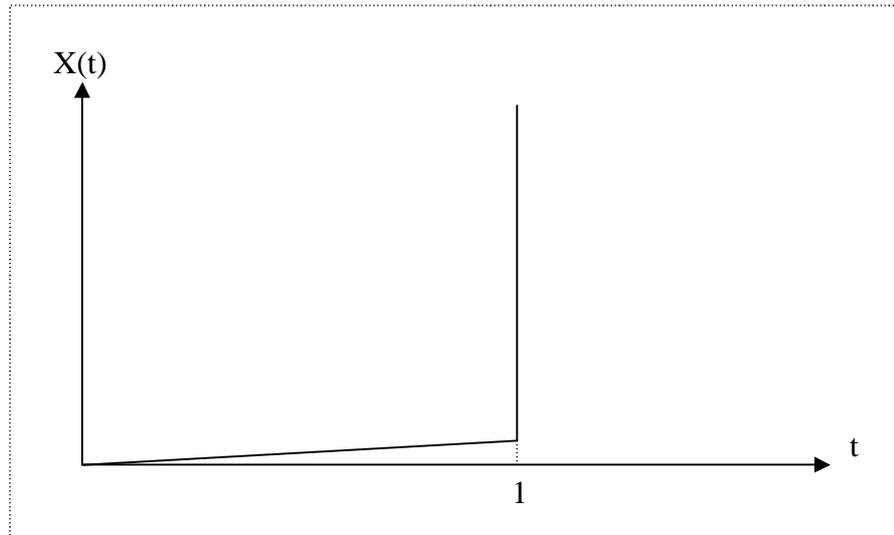


Figure-1.2- Explosion en temps fini

2.2.2/ Non unicité de la solution :[30][34]

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

La solution est de la forme :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq t \leq a \\ (t-a)^2 & \text{Si } t > a \end{cases}$$

Le graphe de la solution est donné par la figure-1.3-

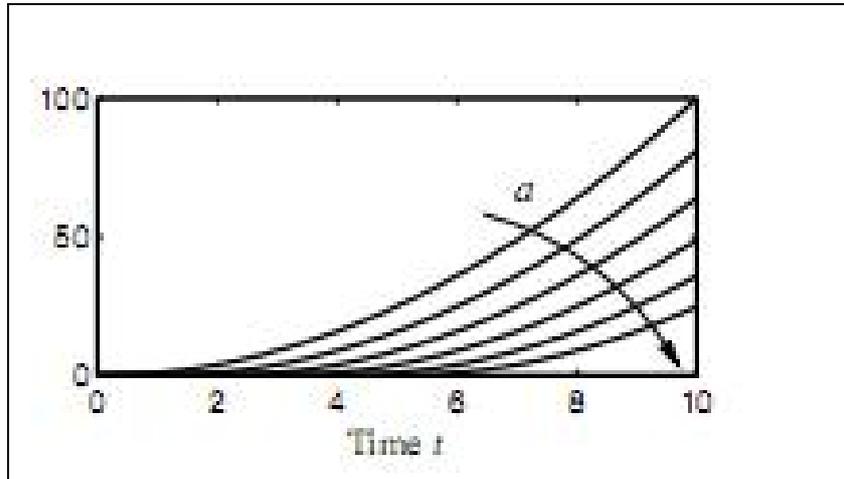


Figure-1.3- Non unicité de la solution

On remarque que pour chaque valeur de a , nous avons différentes solutions

Problème de la valeur initiale :

Considérons le problème de Cauchy, dit aussi le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution est garantie par la propriété que f soit continument lipschitzienne c'est-à-dire pour un paramètre fixe $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $c > 0$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|$$

2.2.3/ Points d'équilibre multiples :[6]

Un point x^* est un point d'équilibre (ou état stationnaire) du système (1.1) si $x(t)=x^*$ est une solution ($f(x^*)=0$).

A la différence d'un système linéaire qui ne peut avoir qu'un unique point d'équilibre, un système non linéaire peut admettre plusieurs points d'équilibre selon les conditions initiales.

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Si les trajectoires du système convergent vers l'un de ces points, on parle alors de *points attracteurs*.

C'est là une notion fondamentale qui se généralise immédiatement à toute variété géométrique (point, courbe, surface.....).[9]

Considérons comme exemple le système suivant :[47]

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y - 2xy \end{cases}$$

Le système admet alors deux points d'équilibre qui ont pour coordonnées : (0,0) ; (1,1)

(Fig 1-4).

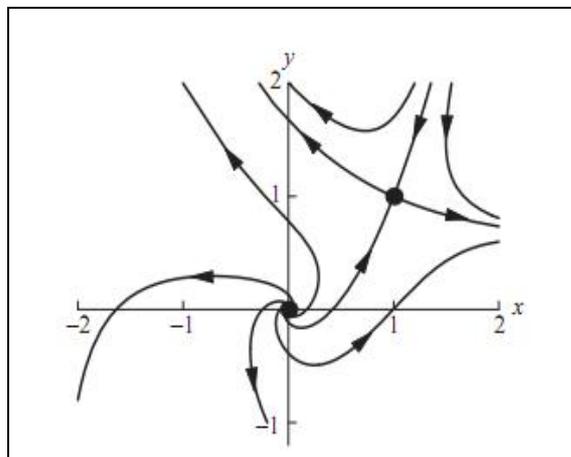


Figure-1.4-représentation dans un plan de phase

2.2.4/ Solutions périodiques (cycles limites) :

Pour qu'un système linéaire oscille, il faut qu'il y ait deux valeurs propres sur l'axe imaginaire, ceci est très difficile à obtenir vu les perturbations.[47]

Par contre dans un système non linéaire, le phénomène oscillatoire est naturel car l'oscillation peut survenir indépendamment des conditions initiales et des excitations extérieures. Le système possède alors une fréquence et une amplitude. D'où l'importance cruciale des systèmes non linéaires dans la pratique.

Considérons pour plus de compréhension l'équation de Van Der Pol :

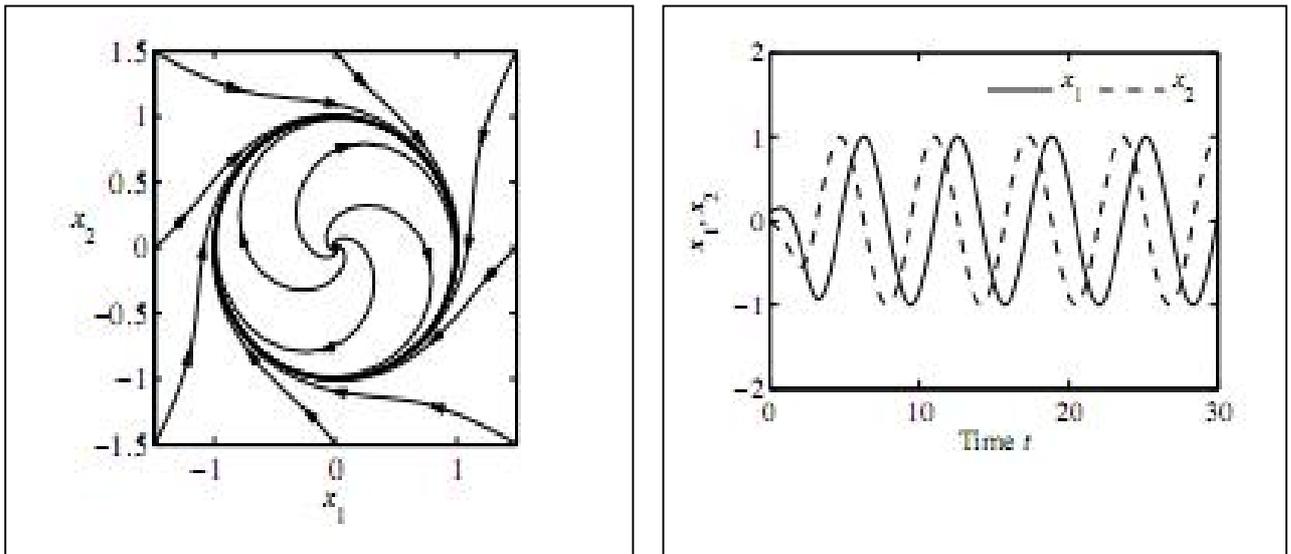
Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

$$\ddot{x} + 0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

La forme d'état de ce système est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.2(x_1^2 - 1) - x_1 \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par la figure-1.5- :



« a »

« b »

Figure-1.5- « a » portrait de phase et « b » réponse temporelle

Nous observons à partir de la figure 1.5-a que toutes les trajectoires tendent vers une orbite fermée qui est appelée « cycle limite », celui-ci possède une amplitude et une fréquence. Leurs solutions sont de la forme $x(t+T)=x(t)$ où T représente la période d'oscillation.

2.2.5/ Sous-harmoniques et sur-harmoniques :[9]

Pour qu'un système oscille, il doit avoir une amplitude et une fréquence, cependant le signal périodique obtenu peut contenir aussi des fréquences qui sont des multiples ou des divisions de la fréquence fondamentale, en d'autres termes, si le système possède une fréquence w , alors on peut avoir des $w_h=m.w$ et des $w_h=w/m$, où m est un entier supérieur à 1.

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

La figure-1.6-« a »,« b » et « c » donne un représentation de ces signaux.

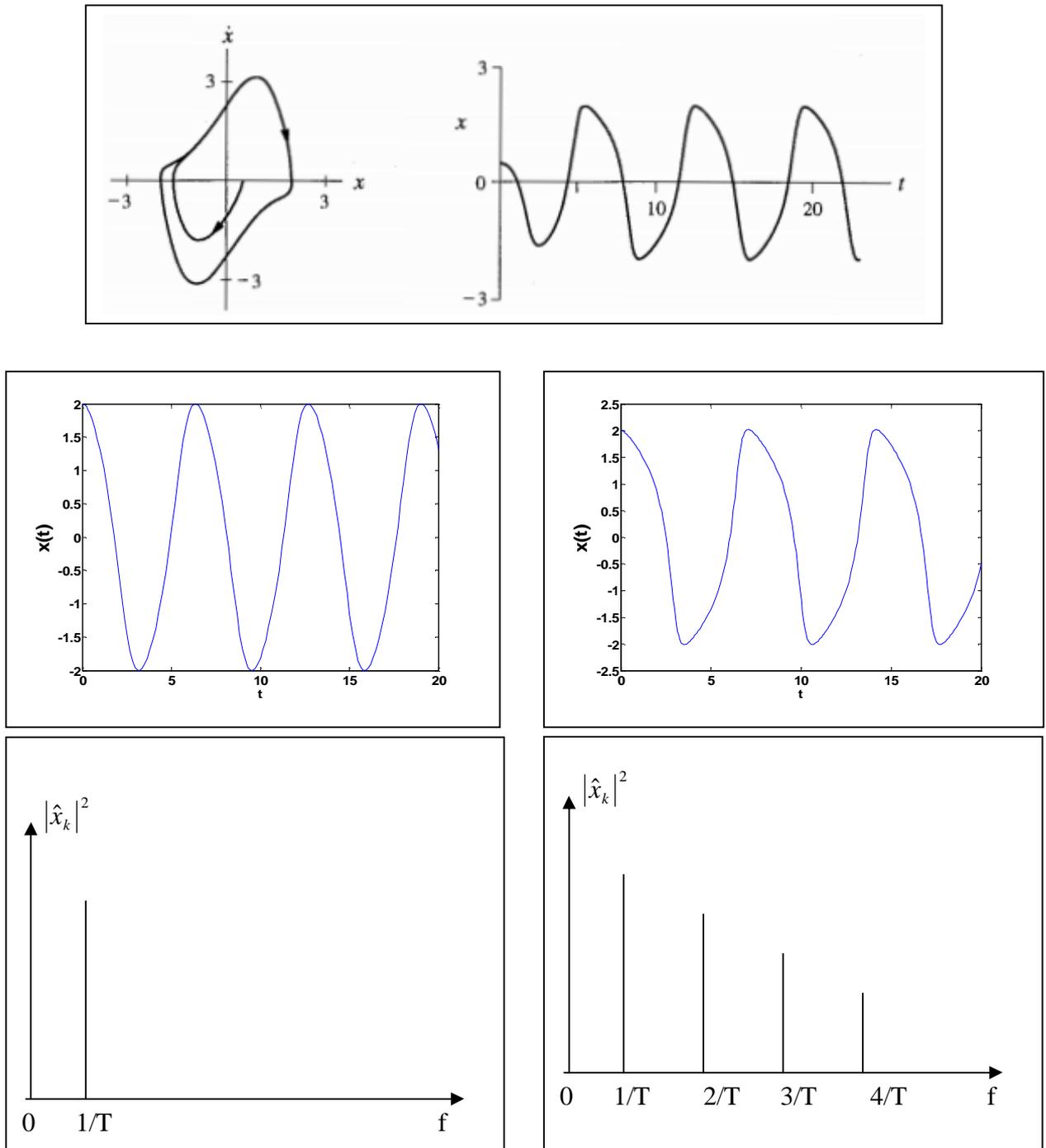
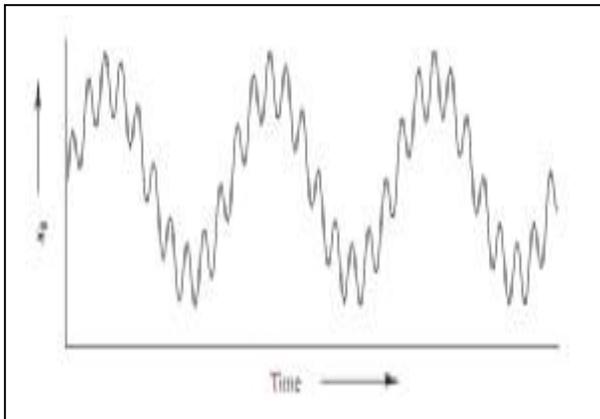


Figure-1.6-« a » « b » et « c » Fonctions périodiques et leurs spectres de Fourier

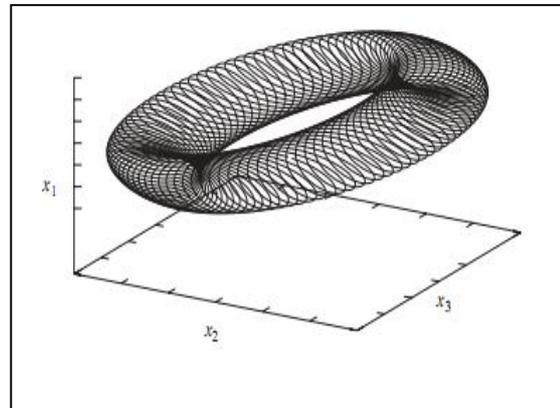
2.2.5/ Solutions quasi périodiques : le Tore[47]

Dans les systèmes non linéaires, un autre type de comportement asymptotique peut se produire, où une périodicité peut se superposer à une autre. Nous connaissons tous que la rotation de la terre autour du soleil est de nature périodique, nous connaissons aussi que la rotation de la lune autour de la terre est périodique. Mais que peut t-il être de la rotation de la lune autour du soleil ? Il est évident que l'orbite de celle-ci serait une combinaison de deux périodicités.

D'une autre manière, pour qu'un signal soit périodique, il faut que le rapport entre ses fréquences soit rationnel, s'il est irrationnel nous dirons que le signal est quasi-périodique, c'est-à-dire w_1/w_2 est irrationnel. La figure-1.7-a et b donne une représentation de cette forme du signal :



-a-



-b-

Figure-1.7-a :Signal quasi périodique ;b : allure d'un tore dans un espace de phase

2.2.7/ Bifurcation : [35] [31] [9]

Le terme bifurcation a été utilisé pour la première fois par le célèbre mathématicien français « Henri Poincaré » pour désigner le changement qualitatif du comportement du

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

système tel que le nombre ou le type de solution, et cela au cours de l'évolution d'un ou plusieurs paramètres du système.

Considérons le système suivant

$$\dot{x} = f(x, m) \quad \dot{x} \in R^n, x \in R \text{ et } m \in R^n$$

La bifurcation admet deux types, l'une s'appelle bifurcation locale et l'autre bifurcation globale. La bifurcation locale est une modification du comportement du système au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une solution périodique ; tout autre changement qualitatif sera désigné par le terme de bifurcation globale.

Notre travail sera consacré aux bifurcations locales où le paramètre $m \in R$; celles-ci peuvent être de différentes natures. On cite comme exemple la bifurcation selle-nœud, et la bifurcation à doublement de période...etc.

Pour les problèmes de bifurcations, on considère généralement l'espace formé des variables d'états (x_1, \dots, x_n) ainsi que le paramètre de contrôle. Dans cet espace dit espace de contrôle d'état, le point où se produit la bifurcation est appelé point de bifurcation ou encore point critique. La figure-1.8- montre le principe de cet espace :

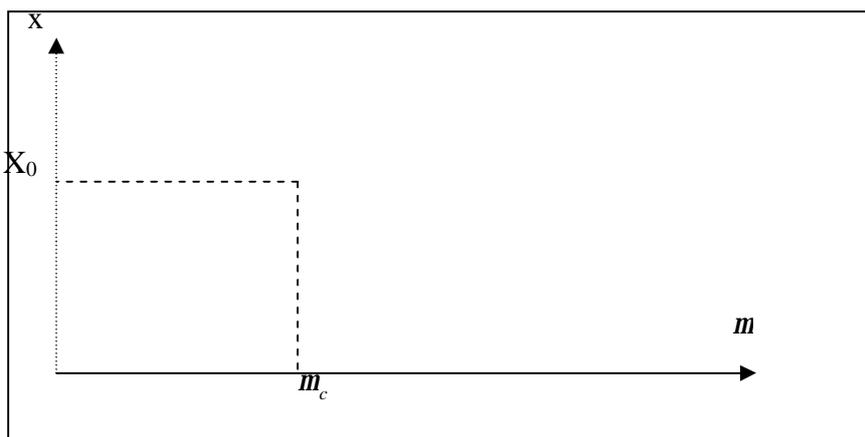


Figure-1.8- Espace de contrôle d'état

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

La représentation des branches des états stationnaires dans cet espace afin de localiser les bifurcations permet d'établir ce qu'on appelle le diagramme de bifurcation.

Le nombre des paramètres m_i nécessaires à l'apparition d'une bifurcation s'appelle la Co-dimension de la bifurcation.

La forme normale d'une bifurcation est un système d'équations simplifié qui approche les dynamiques des systèmes au voisinage du point de bifurcation.

Considérons maintenant l'exemple de Van der Pol pour exploiter la notion de bifurcation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 \cdot (1 - x_1^2) - x_1 \end{cases}$$

L'intégration temporelle de ce système dans matlab en se basant sur l'algorithme de Runge kutta nous donne les solutions de la figure-1.9- :

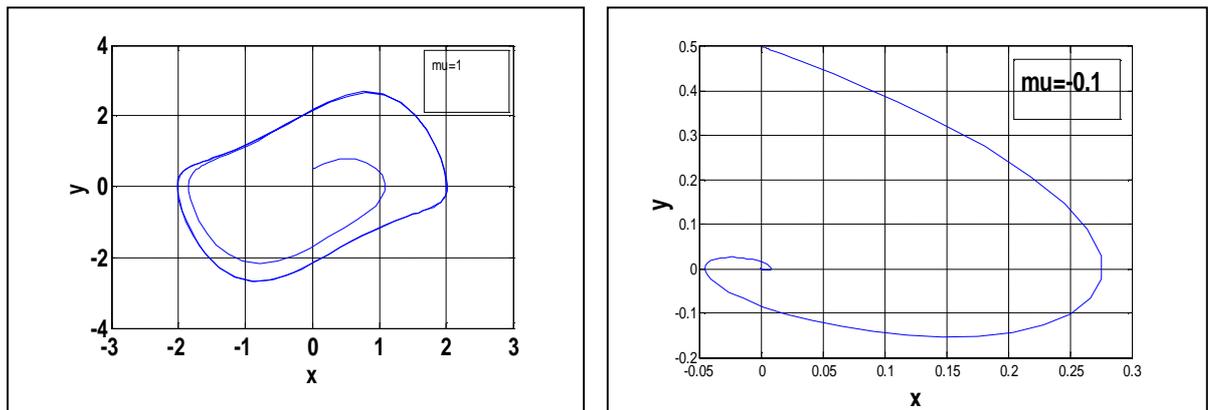


Figure-1.9-Portrait de phase du système de Van der Pol pour μ différent

On remarque d'après la figure-1.9- que nous avons deux comportements asymptotiques différents et cela pour la même condition initiale. Pour un paramètre de contrôle μ positif, on a un cycle limite alors que pour μ négatif, on a un point d'équilibre.

2.2.8/ Chaos : solution apériodique :[34][9][47][35][42][38]

Le chaos est un terme souvent utilisé pour décrire apparemment un comportement complexe, celui-ci peut survenir d'une manière soudaine et dramatique dans les systèmes non linéaires possédant au moins trois variables d'état (pour les systèmes autonomes). La forme de son signal est apériodique avec une perception aléatoire ou bruitée. On peut dire aussi que le signal chaotique est de forme irrégulière, imprévisible avec une géométrie complexe.

Considérons pour cela le système suivant :

$$\ddot{x} + 0.1x + x^5 = 6 \sin t$$

Deux trajectoires de ce système sont représentées, l'une correspondant à la condition initiale $x_0=(0.1,0.2)$ et l'autre à $x_0=(0.105,0.2)$. La réponse temporelle de ce système est donnée par la figure-1.10-

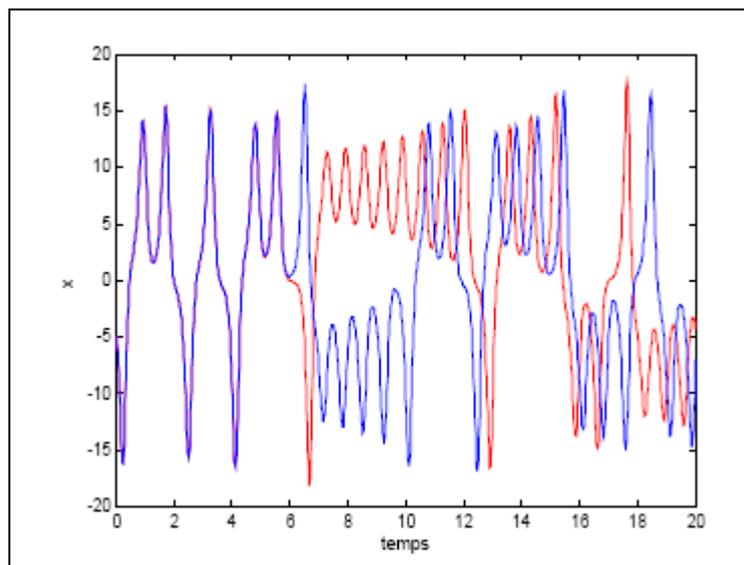


Figure-1.10-Hypersensibilité aux conditions initiales

On constate à partir de cette figure que même les trajectoires initialement très proches vont rapidement devenir divergentes sans pour autant devenir non bornées (les valeurs de la position demeurent dans un intervalle fermé et borné).

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Cette hypersensibilité aux conditions initiales et l'aspect presque imprévisible du résultat donné donne l'impression que le système est soumis à des perturbations aléatoires, mais il n'en est rien. Le système est parfaitement déterministe et un tel comportement est appelé « le chaos ».

Comme exemple supplémentaire, considérons le modèle de la convection atmosphérique plus connu sous le nom du modèle de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - zx \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

Où $x, y,$ et z représentent les variables du système, et r, b et σ sont les paramètres de contrôle.

Ce système admet pour solution ce qu'on appelle une orbite chaotique ou plus couramment un attracteur étrange, celui-ci a une forme fractale. La figure-1.11- montre cela :

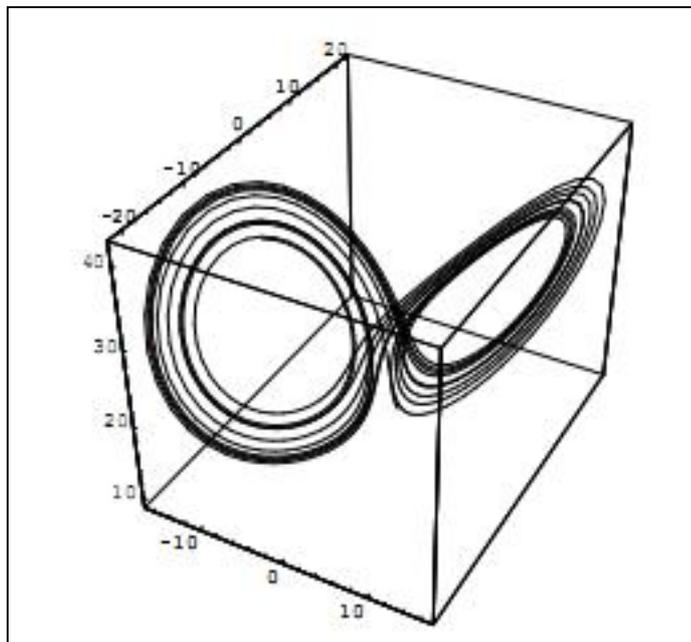


Figure-1.11-attracteur étrange $\sigma =10, b=8/3$ et $r=28$

On peut constater plusieurs phénomènes intéressants :

- Une trajectoire ne repasse jamais par le même point.

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

- Il n'y a pas de solution périodique.
- Il existe des voisinages tels que pour toute condition initiale comprise dans ce voisinage, la solution repasse une infinité de fois dans ce voisinage.
- La solution demeure dans un cube, un ensemble fermé et borné.
- Pour deux conditions initiales arbitrairement proches, les solutions respectives finissent par diverger l'une de l'autre pour finalement ne plus se ressembler du tout.

Nous donnons aussi dans le tableau suivant une comparaison entre un mouvement régulier et un mouvement chaotique:

Mouvement régulier	Mouvement chaotique
Se répète	irrégulier
prévisible	imprévisible
Géométrie simple	Géométrie complexe

Routes vers le chaos :[48,31]

Le concept d'attracteurs étranges a bouleversé de fond en comble et rénové en profondeur la compréhension du chaos, les innombrables travaux consacrés à ce sujet en apportent l'irréfutable témoignage. Mais ce concept n'épuise pas à lui seul le problème car une question surgit immédiatement :

Quelles sont les origines d'un attracteur étrange ? ou si l'on préfère, par quelles voies un régime chaotique parvient-il à s'instaurer ? En bref, quelles sont les origines ou routes qui mènent un système dynamique d'un comportement régulier vers le chaos ?

Parmi les multiples scénarios, on peut citer :

- **Doublement de période :**

Plusieurs systèmes non linéaires peuvent avoir une bifurcation à doublement de période quand certains paramètres changent ou varient, c'est-à-dire un cycle limite bifurque et

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

aura une période deux. Ce doublement de période continue à se produire quand le même paramètre continue de changer, jusqu'à ce que le système devient chaotique.

Remarquons aussi que le doublement de période est une des routes les plus répandues des systèmes chaotiques. La figure-1.12- montre le principe :

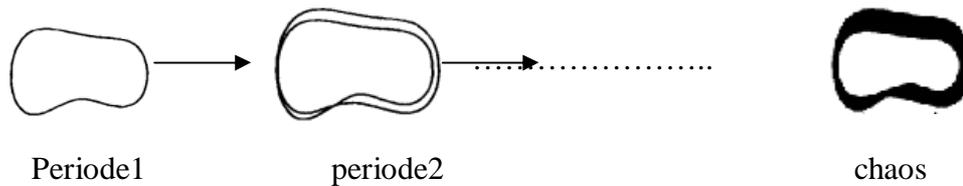


figure-1.12-principe d'une cascade à doublement de periode

- **Intermittence :**

Plusieurs systèmes non linéaires peuvent montrer un comportement chaotique de façons intermittentes séparé d'intervalles de comportements périodiques, sous la variation de certains paramètres. Le comportement chaotique deviendra progressivement établi.

3/ L'analyse approximative : [30,40,35,21,50]

Il est souvent impossible de trouver une solution exacte pour une équation différentielle, et donc une solution approximative doit être trouvée.

L'analyse approximative des équations différentielles (systèmes dynamiques) englobe une multitude de méthodes. Selon le mode de résolution, ces méthodes peuvent être appliquées dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Nous allons présenter les principes de bases de quelques méthodes de l'analyse approximative :

3.1/ Méthodes analytiques :

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes, leurs utilisations se différencient de l'objectif visé, qui peut être la nature de la solution, le type de non linéarité ...etc. Certaines de ces méthodes peuvent être directement utilisées pour synthétiser des lois de commande comme nous le verrons en chapitre-4-

3.1.1/ Méthode de collocation :

C'est une méthode applicable aux EDO (équations différentielles ordinaires) et aux EDP (équations à dérivées partielles), l'objectif est de trouver une approximation d'une solution valide dans un intervalle.

Idee : une solution approximative avec quelques paramètres libres est proposée. Ces paramètres libres sont déterminés par le forçage de la solution approximative qui doit satisfaire la solution exacte à un ensemble de points.

Procédure :

Supposons une équation différentielle :

$$N[y] = 0 \quad (1.3)$$

Pour $y(x)$ dans une région de R , avec une condition de limite

$$B[y] = 0 \quad \dots\dots\dots(1.4)$$

Sur quelques portions de la limite de R , nous choisirons une approximation de R qui possède plusieurs paramètres dans la portion ; $y(x) \approx w(x, \mathbf{a})$ ou \mathbf{a} est un vecteur de paramètres.

Cette approximation est choisie de manière à ce qu'elle vérifie la condition de limite dans l'équation (1.4). Les paramètres inconnus sont déterminés par la nécessité que l'approximation satisfait l'équation (1.3) à quelques points de collocation.

Exemple :

$$\text{Soit } N[y] = y'' + y + x = 0$$

$$\text{Avec } y(0) = 0, y(1) = 0 \quad \dots\dots\dots(1.5)$$

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Soit $w(x)$ une solution approximative de la solution exacte donnée par :

$$y(x) \approx w(x) = -a_1 x(1-x) + a_2 x(1-x^2)$$

Notons que $w(x)$ satisfait la condition au limite pour $y(x)$; nous utilisons cette approximation et nous trouvons : $N[w(x)] = -a_1(2-x+x^2) - a_2(5x+x^3) + x$

Maintenant, nous devons choisir les points de collocation. Nous choisirons alors deux points $x=(1/3)$ et $x=(2/3)$. En se basant sur le fait que $N[w(x)]$ doit être nulle à ces deux points, nous aurons les équations suivantes :

$$-\frac{48}{27}a_1 - \frac{46}{27}a_2 - \frac{1}{3} = 0$$

$$-\frac{48}{27}a_1 - \frac{98}{27}a_2 - \frac{2}{3} = 0$$

La solution de ces équations est $a_1 = \frac{9}{416}$ et $a_2 = \frac{9}{52}$ alors notre solution approximative de

l'équation (1.5) est : $y(x) \approx \frac{9}{416}x(1-x) + \frac{9}{25}x(1-x^2)$

Notons enfin que c'est une méthode implémentable numériquement, aussi, il existe plusieurs choix de la forme de l'approximation.

3.1.2 / Méthode de la moyenne :

C'est une des méthodes dites de perturbation ; elle est applicable à des équations différentielles non linéaires ayant une solution périodique et un petit paramètre. L'objectif est de pouvoir trouver une solution valide sur une période.

L'idée est d'écrire la solution de l'équation différentielle donnée comme une fonction avec des parties qui varient lentement. La moyenne de ces parties se fera sur une période complète.

Nous illustrons la procédure de la méthode sur un oscillateur harmonique.

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Supposons qu'on a une équation de la forme :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \epsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \quad (1.6)$$

Si $\epsilon = 0$: $y(t) = A \cos(t + \mathbf{q})$ où A et \mathbf{q} sont des constantes

Si ϵ est très petit, nous pourrions nous attendre à une solution « recherchée similaire »

Nous supposons maintenant que la solution de (1.6) est donnée par :

$$y(t) = a \cos(t + \mathbf{q}) \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

Où $a(t)$ et $\mathbf{q}(t)$ « varient lentement »

La différentiation de l'équation (1.7) par rapport à t donne :

$$\frac{dy}{dt} = -a \sin(t + \mathbf{q}) + \frac{da}{dt} \cos(t + \mathbf{q}) - a \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cos(t + \mathbf{q}) \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

Si a et \mathbf{q} varient lentement, alors $\frac{da}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$ seront « petits » par rapport à « a ». On

aura alors :

$$\frac{dy}{dt} = -a \sin(t + \mathbf{q}) \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

Comparons l'équation (1.8) à l'équation (1.9), il est clair que nous avons fait l'hypothèse que :

$$\frac{da}{dt} \cos(t + \mathbf{q}) - a \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cos(t + \mathbf{q}) = 0 \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

Celle-ci nous donne une équation reliant les deux inconnus $a(t)$ et $\mathbf{q}(t)$. En dérivant l'équation (1.9) et en utilisant l'équation (1.9) et (1.6) nous obtenons le résultat :

$$-\frac{da}{dt} \sin(t + \mathbf{q}) - a \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cos(t + \mathbf{q}) = \epsilon f(a \cos(t + \mathbf{q}), -a \sin(t + \mathbf{q})) \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

Les deux équations (1.10) et (1.11) peuvent être résolues par les relations :

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= e f(a \cos(t+q), -a \sin(t+q)) \sin(t+q) \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{e}{a} f(a \cos(t+q), -a \sin(t+q)) \cos(t+q) \end{aligned} \dots\dots\dots(1.12)$$

Les relations dans les équations (1.7) et (1.12) sont toujours exactes. Le changement des variables (y, y') par (a, q) , en utilisant les équations (1.1) et (1.10) à été réalisé sans aucune approximation faite. L'hypothèse a été faite par la motivation que e est petit.

Utilisons maintenant le « changement lent » caractéristique de a et q pour fabriquer l'approximation nécessaire. Si a et q « varient lentement » alors la valeur de $\frac{da}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ ne changera pas pour une période. Alors en remplaçant la partie gauche de l'équation (1.12) par la moyenne sur une période, la solution de $a(t)$ et $q(t)$ ne devra pas changer ; ce qui nous permet d'approcher (1.12) par la solution :

$$\frac{da}{dt} = eF(a) \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{e}{a} G(a) \quad \dots\dots\dots(1.13)$$

Ou

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(a \cos(t+q), -a \sin(t+q)) \sin(t+q) dq \\ G(a) &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(a \cos(t+q), -a \sin(t+q)) \cos(t+q) dq \end{aligned} \dots\dots\dots(1.14)$$

Les prescriptions est d'évaluer l'équation (1.14) et donc de résoudre (1.13). Connaissant $a(t)$ et $q(t)$, on peut évaluer (1.7) et ainsi trouver l'approximation de $y(t)$

Exemple :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + e y^3 = 0$$

On identifie $f(y, y') = y^3$. Evaluer l'équation (1.14) avec la fonction f nous donne :

$$F(a) = 0 \quad \text{et} \quad G(a) = \frac{3}{4} a^3 ;$$

Nous obtenons alors : $a(t) = a_0$ et $q(t) = q_0 + \frac{3}{8} a_0^2 t$

3.1.3/ La Balance harmonique :

C'est une méthode applicable à des équations différentielles ordinaires ayant des non linéarités fortes.

L'idée de la balance harmonique est d'une certaine manière de considérer la solution dans un système non linéaire comme une série de Fourier tronquée ; un cas particulier de cette méthode est celui lié aux problèmes de contrôle connus sous le nom de la *méthode du premier harmonique* ou *méthode de la fonction de description*. Nous illustrons le principe de cette méthode par l'exemple suivant :

Analyse par la méthode du premier harmonique :

Considérons l'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} + a(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Le problème est alors de déterminer une solution périodique. Supposons pour cela que le système admet une solution de la forme :

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

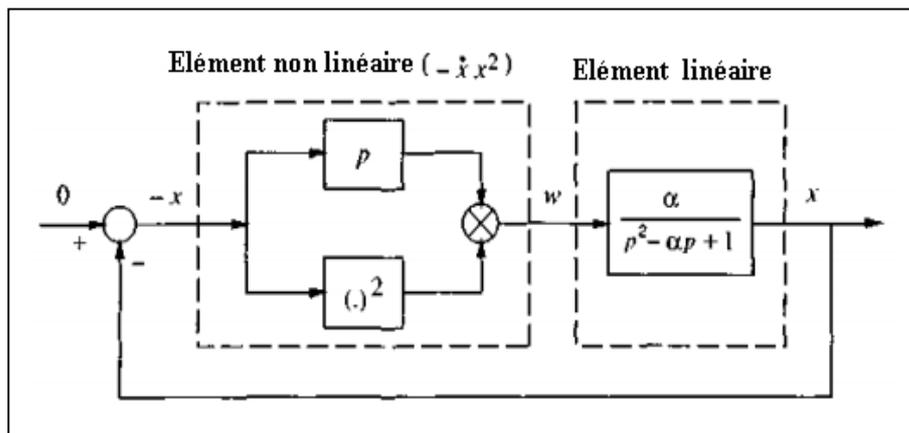


Figure-1.13- boucle fermée de l'oscillateur de Van der pol

Où A est l'amplitude du cycle et w sa fréquence

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

La sortie du bloc non linéaire est :

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -x^2 = A \sin^2(\omega t) A \omega \cos(\omega t) \\
 &= -\frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\omega t) = -\frac{A^3 \omega}{4} (\cos(\omega t) - \cos(3\omega t))
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le bloc linéaire se comporte comme un filtre passe bas, donc le terme harmonique supérieur sera atténué, ce qui signifie que w peut être approché par :

$$w = -\frac{A^3 \omega}{4} \cos(\omega t) = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} [-A \sin(\omega t)]$$

Ainsi le bloc non linéaire sera approché par un équivalent « quasi linéaire » donné par la figure suivante :

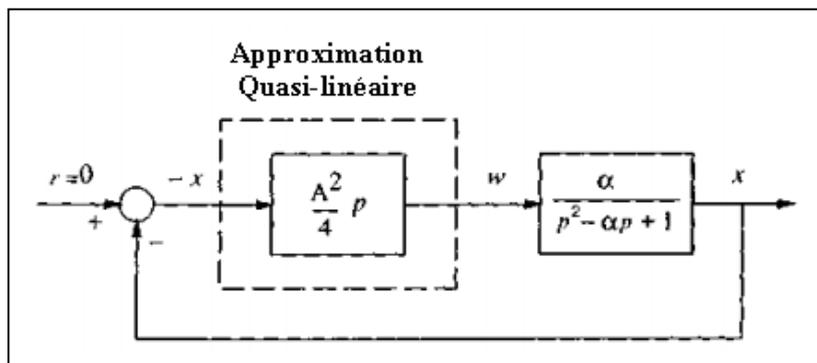


Figure-1.14- approximation quasi linéaire de l'oscillateur de Van der pol

Ceci correspond à :

$$w = N(A, w)(-x)$$

Où $N(A, w) = \frac{A^2}{4} (j\omega)$ est dite fonction de description

$$\text{Donc : } x \approx A \sin(\omega t) = G(j\omega)w = G(j\omega)N(A, w)(-x)$$

G est la fonction de transfert linéaire

$$\text{D'où } 1 + \frac{A^2}{4} \frac{a}{(j\omega)^2 - a(j\omega) + 1} = 0$$

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

Ce qui implique que : $A = 2$ et $w = 1$

L'amplitude et la fréquence du cycle limite peuvent aussi être déterminées à partir de l'équation :

$$1 + G(jw)N(A, w) \Rightarrow G(jw) = -\frac{1}{N(A, w)}$$

Ceci correspond graphiquement à l'intersection du lieu de transfert et du lieu critique :

On suppose que $N(A, w) = N(A)$, on aura :

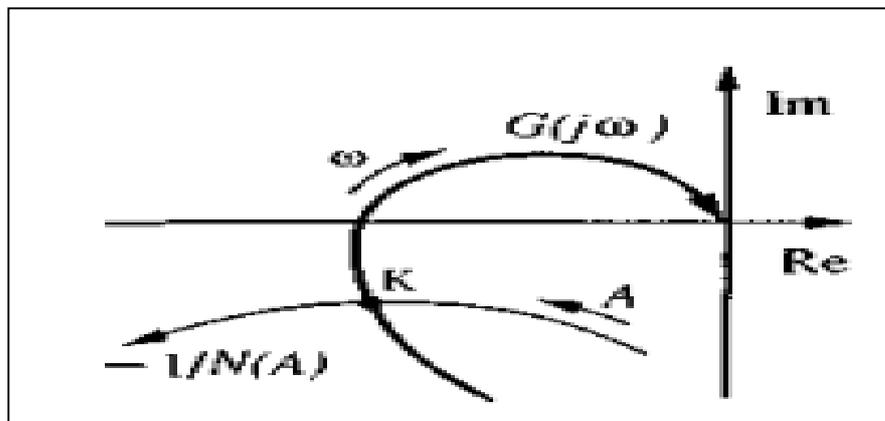


Figure-1.15- détection graphique du cycle limite

L'amplitude du cycle est A_k (K point d'intersection du lieu critique avec le lieu de transfert) la valeur de A correspond au point K sur le lieu $-1/N(A)$, la fréquence du cycle limite est w_K , la valeur de w correspond au point K sur le lieu $G(jw)$

La stabilité du cycle limite pourra être vérifiée grâce au critère géométrique de « Loeb »

Critère de Loeb :

Soit une oscillation limite obtenue comme intersection du lieu de transfert avec le lieu critique, possédant une fréquence et une amplitude ; cette oscillation est stable si l'intersection est telle qu'en parcourant le lieu $G(jw)$ dans le sens des fréquences croissantes, on laisse à gauche la direction des A croissants sur le lieu critique.

3.1.4 / Méthode de l'espace de phase :

Soit le système dynamique autonome décrit par l'équation différentielle :

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes non linéaires

$$\frac{dX}{dt} = X(x) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0 \dots\dots\dots(1.15)$$

x étant un vecteur réel de dimension n ; l'espace considéré de dimension n est l'espace de phase ; dans cet espace $x(t_0)$ est un point initial M_0 par lequel passe une trajectoire de phase, dont l'équation paramétrique $x = x(t, x_0) \dots\dots\dots(1.16)$

est la solution de (1.15).

L'étude de (1.16) dans l'espace de phase correspond à une étude qualitative.

Pour $n=2$, nous dirons que la méthode est celle du plan de phase.

Il existe des méthodes pour obtenir la solution de (1.16), telle que les méthodes des isoclines ou de Lenard ; cependant ces méthodes sont devenues obsolètes face aux méthodes d'intégration numériques liées au développement des ordinateurs.

4/ méthodes numériques : les méthodes de discrétisation [32,50]

Soit un système dynamique décrit par une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

La condition initiale donnant l'existence et l'unicité de la solution. La simulation numérique de cette solution conduit à discrétiser le temps dans un intervalle

$$t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad t_n = t_0 + nh, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$T = Nh$ (h : pas de discrétisation), et à remplacer l'équation différentielle par une relation de récurrence liant $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ à $x(t_n) = x_n$

Il existe plusieurs méthodes numériques pour résoudre une EDO, cependant on va présenter une méthode de base dite d'Euler

La méthode d'Euler consiste à remplacer dx , et dt par des pas finis $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, $\Delta t = h$ et

l'EDO par la récurrence : $x_{n+1} = x_n + hX(x_n, t_n)$, $x(t_0) = x_0$

5/ Conclusion :

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire des notions de bases relatives à la compréhension des systèmes non linéaires y compris chaotiques; nous avons présenté quelques méthodes d'analyses approximatives et selon les résultats obtenus, on parle soit de méthodes (solutions) qualitatives ou quantitatives.

Le but ultime est bien entendu de comprendre la genèse et les caractéristiques d'un système chaotique. Nous avons montré que le comportement chaotique défini par un attracteur étrange n'est en fait qu'une suite de bifurcations.

Nous avons introduit ce que c'est un point attracteur, qui reflète une solution indépendante du temps c'est à dire un état stationnaire ; nous avons aussi montré qu'un comportement périodique dans le temps est associé à un cycle limite, qui se caractérise par son amplitude et sa période. La solution correspondante du flot peut toujours s'exprimer à l'aide d'une série de Fourier : connaissant l'état du système à un instant déterminé, on est par conséquent en mesure de prévoir son état à tout instant ; cela est un résultat important qui va être à la base du développement du chapitre trois.

Reste à savoir comment on peut investir encore plus dans l'analyse des systèmes non linéaires bifurquant. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

1/ Aspects sur l'analyse des systèmes non linéaires :[20][43][21][32]

Les systèmes dynamiques non linéaires sont très difficiles à analyser, car il n'existe pas de méthodes uniques et générales pour les étudier.

De multiples approches sont disponibles dans la littérature, on peut citer par exemple les techniques de linéarisation, méthode de stabilité entrée sortie, méthode de Popov...etc. Ces approches d'analyses dépendent en général de la nature de la solution étudiée, du type de phénomènes envisagés, de la classe des systèmes non linéaires étudiés...etc.

Cette difficulté d'analyse des systèmes non linéaires est encore plus sentie quand il s'agit des systèmes chaotiques, car généralement on n'est incapable de définir un système chaotique, cependant grâce à l'outil numérique, on peut trancher sur la nature chaotique du système.

On connaît déjà les méthodes de l'espace de phase et la réponse temporelle pour analyser les systèmes non linéaires bifurquant et chaotique ; cependant l'objectif de ce chapitre est de cadrer au mieux les systèmes chaotiques (systèmes non linéaires bifurquant), et cela en introduisant de nouveaux outils d'analyse qui vont nous permettre de détecter le chaos mais aussi de le prédire.

Nous allons aussi montrer comment la théorie des bifurcations joue un rôle essentiel pour expliquer et interpréter le fait qu'un système non linéaire initialement dans un état stationnaire représenté par un point singulier peut transiter vers le chaos, ou en d'autres mots, donner une base mathématique pour expliquer les mécanismes par lesquels un système non linéaire aura un comportement chaotique ; tout en présentant quelques types de bifurcations par approche temporelle et introduisant la notion d'analyse fréquentielle.

2/ Notion de stabilité :[15][12]

L'étude de la stabilité d'un système non linéaire est d'une importance cruciale, que sa soit dans un objectif d'analyse ou de contrôle.

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

C'est l'étude même du problème de la stabilité du système soleil-terre-lune plus connus dans la littérature sous le nom du problème des trois corps qui a donné naissance à la théorie des bifurcations et du chaos.

Cependant selon les auteurs le concept de « stabilité » prend des sens bien différents. Dire qu'un système, ou qu'une solution d'une équation dynamique est stable n'a pas une grande signification si le sens utilisé n'est pas précisé.

Il existe plusieurs notions de la stabilité, on peut citer la stabilité au sens de Lyapunov, au sens de Poincaré....etc.

Nous allons nous contenter de présenter quelque type de stabilité.

2.1/ Stabilité au sens de Lyapunov :[12]

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0 \in R^n\end{aligned}$$

Le système est dit stable au sens de Lyapunov pour l'équilibre $x^*=0$, si pour n'importe quel $\epsilon > 0$ et pour n'importe quel temps initial $t_0 \geq 0$, il existe une constante $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel

que : $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$

La signification géométrique de cette stabilité est illustré par la figure-2.1-

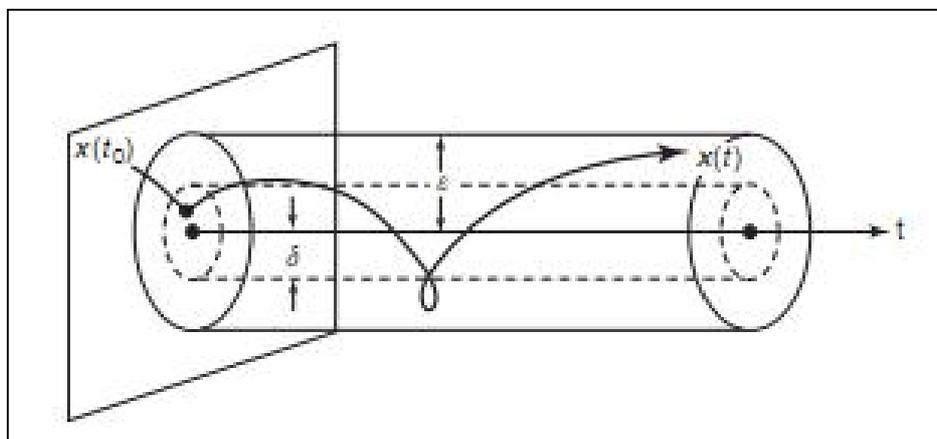


Figure-2.1-signification géométrique au sens de Lyapunov

2.2/ Stabilité asymptotique :[12]

Le système décrit précédemment est dit asymptotiquement stable par rapport à son point d'équilibre $x^*=0$, s'il est stable dans le sens de Lyapunov et aussi, il existe une constante

$$d = d(t_0) \neq 0 \quad \text{tel que :}$$

$$\|x(t_0)\| \leq d \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

La signification géométrique de cette stabilité est représentée par la figure-2.2-

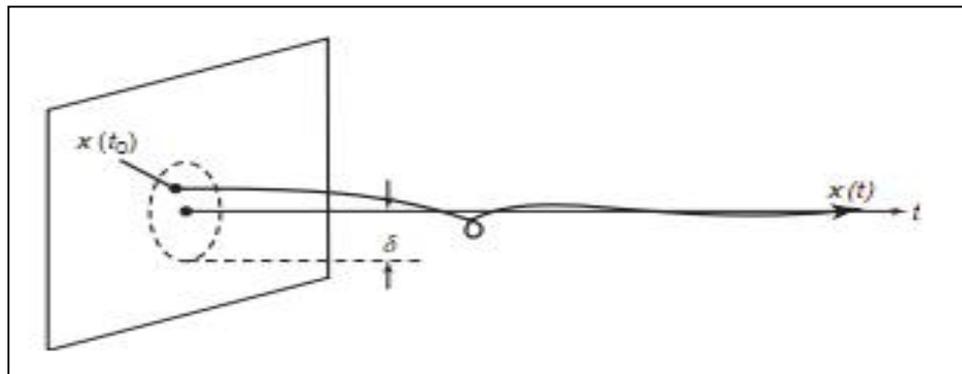


Figure-2.2-Signification géométrique de la stabilité asymptotique

3/ Stabilité des points d'équilibres :[39][35][2]

Nous allons maintenant aborder l'outil qui nous permet d'étudier la stabilité au sens de Lyapunov, il existe deux méthodes, nous allons nous contenter d'étudier simplement la première méthode dite la méthode indirecte de Lyapunov ou la méthode de linéarisation.

Considérant pour cela le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Le caractère stable ou instable d'une solution peut être déterminé en étudiant l'évolution au cours du temps d'une perturbation appliquée à cette solution

Prenant l'exemple d'un point d'équilibre x_e , celui-ci vérifie :

$$\dot{x}|_{x_e} = f(x_e) = 0 \quad (2.2)$$

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Posons : $x(t) = x_e + dx(t)$

Où $dx(t)$ est une perturbation infiniment petite.

En remplaçant dans (2.1) et en développons en série de Taylor, on a :

$$\frac{d dx(t)}{dt} = f(x_e + dx(t)) = f(x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_e} dx(t) + o(dx(t)^2)$$

On négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, on a :

$$\frac{d dx(t)}{dt} = J dx(t) \quad (2.3)$$

J est appelée la matrice Jacabienne du système, elle est défini par :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Le système (2.3) correspond au système (2.1) linéarisé au point d'équilibre $x=x_e$

La solution du système s'obtient aisément et s'écrit :

$$x(t) = x_0 e^{Jt} \quad (2.4)$$

En supposant que la matrice J soit diagonalisable, de valeurs propres I_i la solution (2.4) peut s'écrire sous la forme :

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

$$x(t) = x_0 P \begin{pmatrix} e^{I_1 t} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & e^{I_n t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Où P est une matrice des vecteurs propres.

On pourra dire que la stabilité de la solution du système va dépendre des valeurs propres de la matrice jacobienne, le théorème suivant va nous permettre de conclure :

3.1/ Théorème :

Si toutes les valeurs propres I_i de la matrice jacobienne sont à parties réelles strictement négative, le système admet x_e comme point d'équilibre stable.

Si une des I_i est à partie réelle strictement positive le système admet x_e comme point d'équilibre instable.

Remarque :

Un point d'équilibre est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres $I_i (i = 1, \dots, n)$ n'ont pas de partie réelle nulle. En revanche si l'une des valeurs propres à une partie réelle nulle, le point d'équilibre est dit non hyperbolique.

Nous récapitulons maintenant les types des points d'équilibre qu'on peut rencontrer pour un système linéarisé, tout cela dans la figure-2.3- suivante :

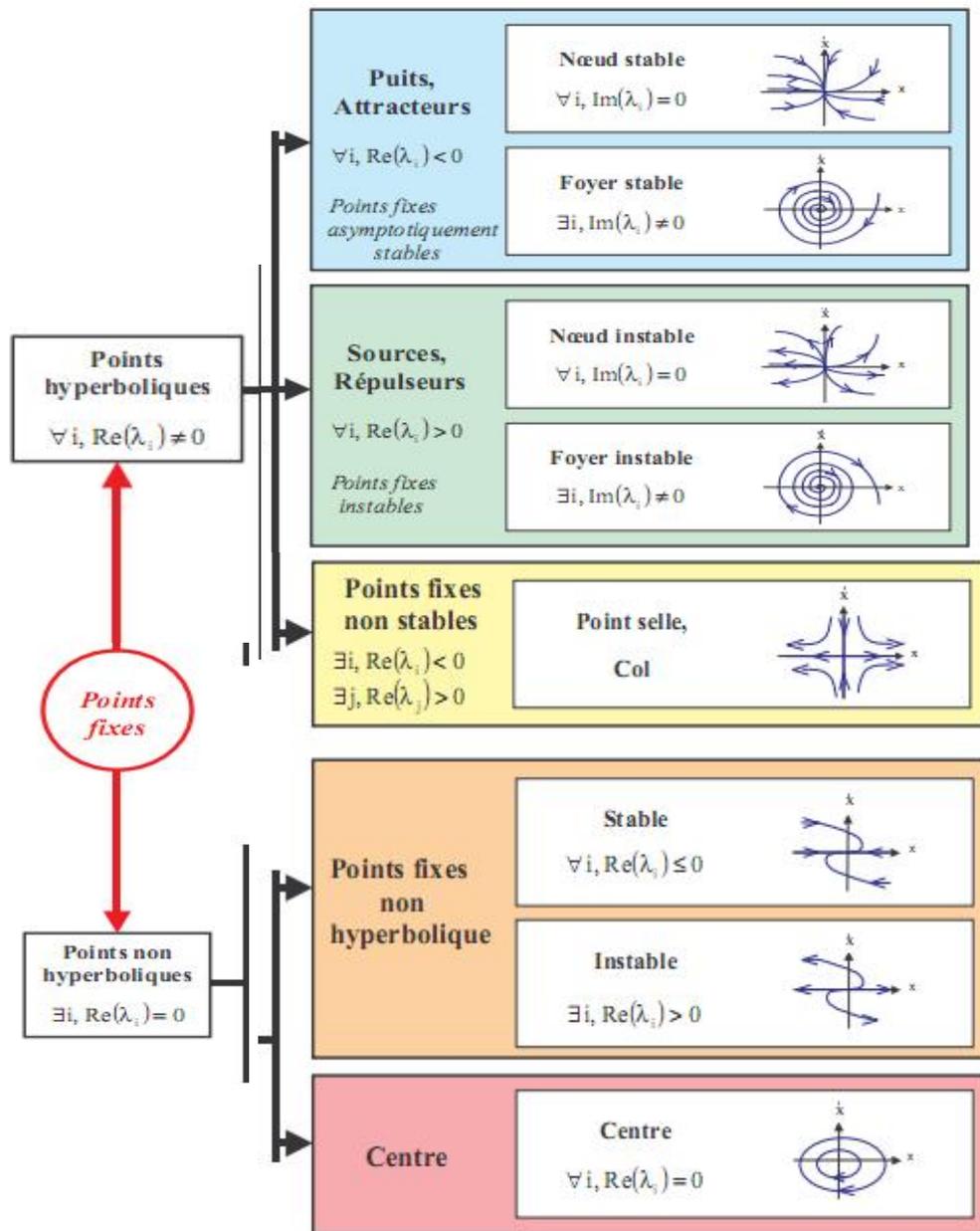


Figure-2.3-Différents types d'états d'équilibre

Reste maintenant une question fondamentale, qui peut être posée comme suite :

Est-ce que le comportement du système linéarisé est équivalent à celui du système non linéaires ?

La réponse à cette question va se faire grâce au théorème de Hartman-Grobman.

3.2/ théorème de Hartman-Grobman :

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Si les valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé sont hyperbolique, alors le comportement du système linéarisé et du système non linéaire son topologiquement équivalent.

4/ Stabilité des orbites périodiques :

4.1/ Section de Poincaré :[43]

Nous allons introduire maintenant un outil très utilisé pour l'analyse des systèmes non linéaires et chaotiques.

Considérons un système autonome décrit par : $\dot{x} = f(x)$

Soit S une surface ou section de dimension $n-1$ ou n est la dimension du système autonome

La section de Poincaré est une application de S dans S , qui est obtenus en suivant les intersections de la trajectoire à partir de la première intersection avec S à l'intersection suivante, voir figure-2.4-

Si $X_k \in S$ est la K^{eme} intersection, alors l'application de Poincaré est définie par :

$$X_{k+1} = P(X_k)$$

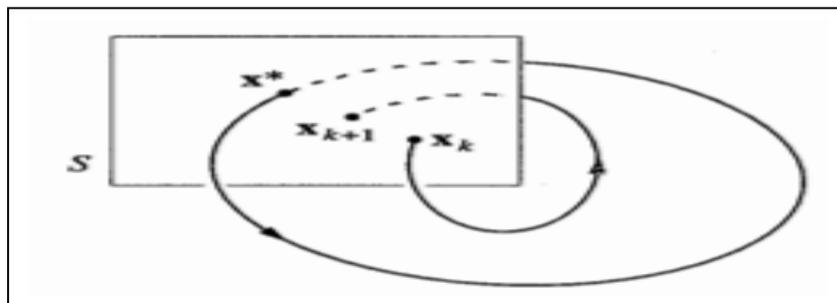


Figure-2.4- Section de Poincaré

Supposons maintenant que x^* est un point fixe de P , c'est-à-dire $P(x^*)=x^*$

Alors la trajectoire commençant par x^* va revenir à x^* après un temps T et sa signifie que la trajectoire est une orbite fermée (cycle limite) du système d'origine $\dot{x} = f(x)$.

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Il est maintenant évident qu'on peut déceler le comportement de P proche de ce point fixe, on peut donc déterminer la stabilité du cycle limite.

Avant de commencer l'analyse de la stabilité d'un cycle limite, nous allons donner les différentes formes d'intersection des attracteurs (cycle limite, tore attracteur étrange) avec la section de Poincaré ; cela est récapitulé dans le tableau suivant : [21][9]

Solutions	Cycle limite	Tore	Attracteur étrange
Surface (section de Poincaré)	point	Courbe fermée	Points distincts

la figure-2.5- a et b schématise le principe :

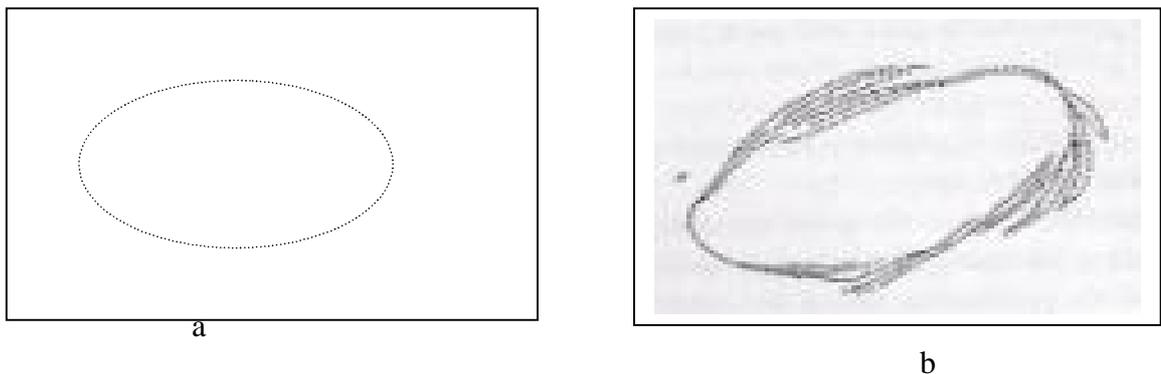


Figure-2.5- a et b tore et chaos respectivement

4.2/ Stabilité linéaire des orbites périodiques (cycle limite) : [43][35]

Considérons toujours le cas général d'un système autonome :

$$\dot{x} = f(x)$$

Définissant comme solution une orbite périodique.

Comment conclure sur la stabilité ou l'instabilité de cette solution, ou d'une autre manière on se pose la question suivante :

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Quand le point fixe x^* de la section de Poincare est-il stable ?

Soit V_0 une perturbation infinitésimale tel que : x^*+v_0 est cela dans la section S, alors après un premier retour de S, on a :

$$\begin{aligned}x^* + v_1 &= P(x^* + v_0) \\ &= P(x^*) + [DP(x^*)]v_0 + o(\|v_0\|^2)\end{aligned}$$

Ou $DP(x^*)$ est une matrice de dimension $(n-1)(n-1)$, appelée la section de Poincaré linéarisé au point x^* .

Puisque $x^*=P(x)$, nous avons :

$$v_1 = [DP(x^*)]v_0$$

Et cela en négligeant le terme $o(\|v_0\|^2)$

Le critère suivant peut être formulé :

Critère :

l'orbite périodique est linéairement stable si est seulement si le module des valeurs propres I_j ($j=1\dots n-1$) de la matrice $DP(x^*)$ sont inférieur à 1 (cercle unité) , si une des valeurs propres est de module supérieur à 1 l'orbite périodique est instable., la figure-2.6- montre cela :

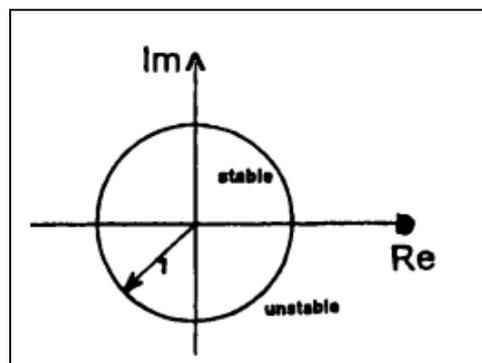


Figure-2.6-cercle unité du plan complexe

Remarques :

Les I_j sont appelées les caractéristiques ou les multiplicateurs de Floquet.

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Le point fixe est dit hyperbolique si tous les multiplicateurs de Floquet sont à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité à l'exception d'un, si deux ou plusieurs multiplicateurs coupe le cercle unité le point fixe est dit non hyperbolique.

Le théorème de Hartman –Grobman est toujours applicable dans le cas d'un point fixe.

5/ Exposants de Lyapunov :[25,51]

Dans le cas des points d'équilibres et des orbites périodiques, on s'est intéressé à des solutions stationnaires et régulières. Il est également possible de caractériser les propriétés de stabilité d'une trajectoire quelconque.

Donc il existe une autre manière pour évaluer la stabilité d'une trajectoire, celle-ci est évaluer grâce aux exposants de Lyapunov, nous allons donner le principe de base.

Les exposants de lyapunov caractérisent la divergence exponentielle des trajectoires dont les conditions initiales différent de celle étudiée à partir d'une petite perturbation, on dit alors qu'on quantifie le taux de divergence et donc on quantifie la solution chaotique.

Soit $x(t)$ une trajectoire référence, et considérant une trajectoire proche $y(t)$ ou :

$y(0) = x(0) + \Delta x(0)$ quand $t \rightarrow \infty$ les deux trajectoires divergent de manière exponentielle :

$$\Delta x(t) = y(t) - x(t) \approx \Delta x(0)e^{\lambda t}$$

La figure-2.7-schématise le principe :

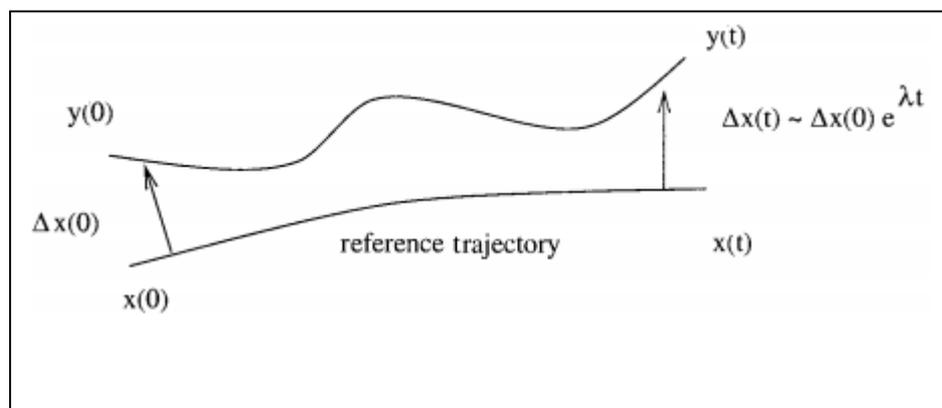


Figure-2.7-Divergences exponentielles de trajectoires proches

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Si $L > 0$, les trajectoires convergent

Si $L < 0$, les trajectoires divergent

D'une manière formelle nous définissons les exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$L = \lim_{\substack{\|\Delta x\| \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \log \frac{\|\Delta x(t)\|}{\|\Delta x(0)\|}$$

On pourra répertorier les différents types d'attracteurs selon le signe des exposants de Lyapunov, pour un système du troisième ordre on a :

(-, -, -) point fixe ; (0, -, -) cycle limite ; (0, 0, -) tore ; (+, 0, -) attracteur étrange.

La détermination numérique des exposants de Lyapunov a été rendu possible grâce à l'élaboration d'un algorithme conçu au milieu des années quatre vingt par A.Wolf, J.B.Swift, H.L Swinney et J.A Vastano.

Une version de matlab pour déterminer les exposants de Lyapunov a été élaboré par Steve SIU et nommée LET (Lyapunov Exponent Toolbox).[51]

Prenons comme exemple le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -sx + sy \\ \dot{y} = rx - y - zx \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

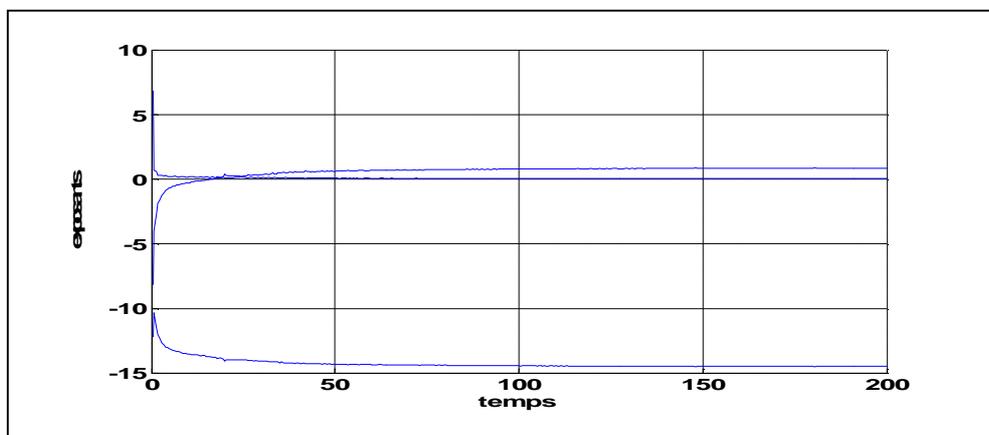


Figure-2.8-exposants de lyapunov

Pour $\sigma=10$, $b=8/3$ et $r=28$, nous avons une solution chaotique, comme le montre la figure ci dessus.

6/ Analyse des Bifurcations :[11][35][47] [2]

Nous avons vu au chapitre -1- que le comportement ou la dynamique d'un système d'un système pouvait changer, si le paramètre dit de contrôle change, nous avons appelé ces phénomènes « bifurcation ».

Nous allons maintenant présenter quelques types de bifurcation dite locale pour pouvoir comprendre comment le chaos se génère.

6.1/Bifurcation locale d'un point d'équilibre :

On considère pour cela le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x, m) \quad x \in R^n, m \in R \quad f : R^n \times R \rightarrow R^n$$

Avec $D_x F$ comme matrice Jacobienne associée à ce système, dont ces valeurs propres λ_i dépendent du paramètre de contrôle m .

La variation de ce paramètre de contrôle peut engendrer l'instabilité d'un point d'équilibre que l'on considère initialement à un état d'équilibre stable.

On pourra alors avoir les bifurcations suivantes :

- Bifurcation selle-nœud.
- Bifurcation fourche(sous-critique et sur-critique).
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation de Hopf(sous-critique et sur-critique).

Les trois premiers types de bifurcations correspondent à des bifurcations statiques ou le point de bifurcation sépare des branches de points d'équilibre.

Les bifurcation de Hopf sont des bifurcations dynamiques ou le point critique délimite dans l'espace de contrôle d'état des branches de points fixes et un cycle limite.

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

On considère les bifurcations statiques, ou sous la variation du paramètre de contrôle m , on observe une bifurcation statique d'un point d'équilibre au point (x_e, m_e) si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$- F(x_e, m_e) = 0 \quad (\text{le point } (x_e, m_e) \text{ est un point d'équilibre})$$

- $D_x F$ à une valeur propre nulle et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de (x_e, m_e) (ce point d'équilibre est non hyperbolique).

6.1.1/Bifurcation transcritique :

On considère la forme normale suivante :

$$\dot{x} = f(x, m) = mx - x^2 \quad x, m \in \mathbb{R}$$

Cette équation admet deux points d'équilibres $x_1 = 0$ et $x_2 = m$

La stabilité de ces deux points d'équilibres peut être investie grâce à la méthode indirecte de Lyapunov et on aura :

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x = mx$$

Le point $x=0$ est stable pour une valeur du paramètre $m > 0$ et instable pour une valeur du paramètre $m < 0$

Sinon : $\dot{y} = -my$ avec $y = x - m$

On conclut que le point x_2 est stable pour une valeur du paramètre $m < 0$ et devient instable pour $m > 0$. Ce qui démontre qu'au point $m=0$ il ya un échange de stabilité entre les points $x_1 = 0$ et $x_2 = m$. Cet échange est appelé « Bifurcation transcritique ». la figure-2.9- donne son diagramme de bifurcation.

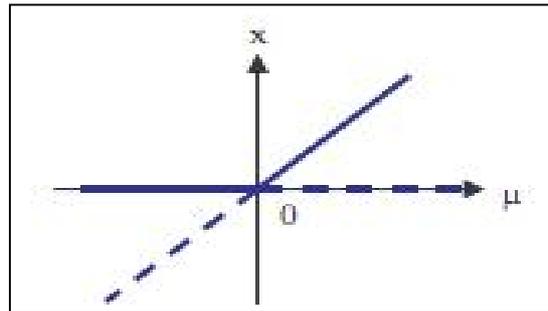


Figure-2.9-bifurcation transcritique (-- branche instable,-branche stable

6.1.2/ Bifurcation fourche :

- **Cas supercritique :**

Considérant la forme normale suivante :

$$\dot{x} = mx - x^3 \quad x, m \in \mathbb{R}$$

Ce système admet pour points d'équilibres

$$x = 0 \quad x = +\sqrt{m} \quad x = -\sqrt{m}$$

Stabilité pour $x=0$

Ce point d'équilibre est stable pour $m > 0$ et instable pour $m < 0$

Stabilité pour $x = \pm\sqrt{m}$

La linéarisation autour de ces points donne l'équation suivante :

$$\dot{y} = -2my \quad \text{avec } y = x - \sqrt{m}$$

On peut constater que les deux points d'équilibre $x = \pm\sqrt{m}$ sont stable pour $m > 0$

Par conséquent l'instabilité du point fixe $x=0$ donne naissance à deux nouveaux points stables créant ainsi un branchement au point $\mu=0$ sous forme d'une fourche , la figure-2.10- donne le principe :

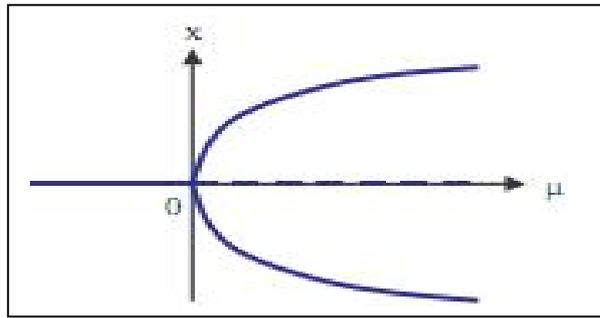


Figure-2.10-bifurcation fourche sur-critique(-branche stable, --branche instable)

6.1.3/ Bifurcation selle-nœud :

La forme normale de ce type de bifurcation à pour équation

$$\dot{x} = m - x^2 \quad x, m \in \mathbb{R}$$

Ce système admet deux points d'équilibres pour $m > 0$

$$x_1 = \sqrt{m} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{m}$$

La linéarisation autour de x_1 donne :

$$\dot{y} = -2\sqrt{m}y \quad \text{avec} \quad y = x - \sqrt{m}$$

Et pour x_2 , on a :

$$\dot{y} = 2\sqrt{m}y \quad \text{avec} \quad y = x + \sqrt{m}$$

On pourra alors dire que le système admet deux points d'équilibre l'un stable et l'autre instable.

Au point de bifurcation $\mu=0$, ces deux points se confondent et disparaissent d'où le nom de la bifurcation selle-nœud, la figure -2.11- donne le diagramme représentatif :

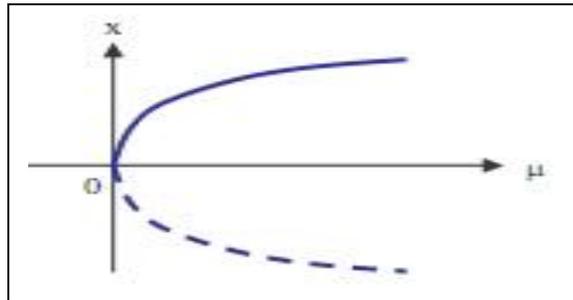


Figure-2.11- Bifurcation selle-nœud(-branche stable,--branche instable)

6.1.4/ Bifurcation de Hopf :

Considérant le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, m) \quad \text{avec } x \in R^n \text{ et } m \in R$$

On observe une bifurcation de Hopf , lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- $F(x_c, m_c) = 0$
- $D_x F$ à une paire de valeurs propres conjuguées purement imaginaire ($\pm iw$) et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de (x_c, μ_c) , (le point d'équilibre est non hyperbolique).
- Pour $\mu = \mu_c$, soit $\bar{I} \pm iw$ la valeur analytique de la paire de valeurs propres conjuguées telles que pour $\mu = \mu_c$, on ait $\bar{I} = 0$ et $w = w_0$ alors $\left(\frac{d\bar{I}}{dm} \right) \neq 0$

Pour $\mu = \mu_c$ (Condition de franchissement).

Quand ces trois conditions sont satisfaites, une solution périodique de période $2p / w_0$ est engendré au point (x_c, μ_c) .

On peut aussi distinguer deux types de bifurcation de Hopf :

- Bifurcation de Hopf super critique ou l'équilibre subit un changement de la stabilité vers l'instabilité.

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

- Bifurcation de Hopf sous critique ou l'équilibre subit un changement de l'instabilité vers la stabilité.

La figure-2.12- donne une représentation :

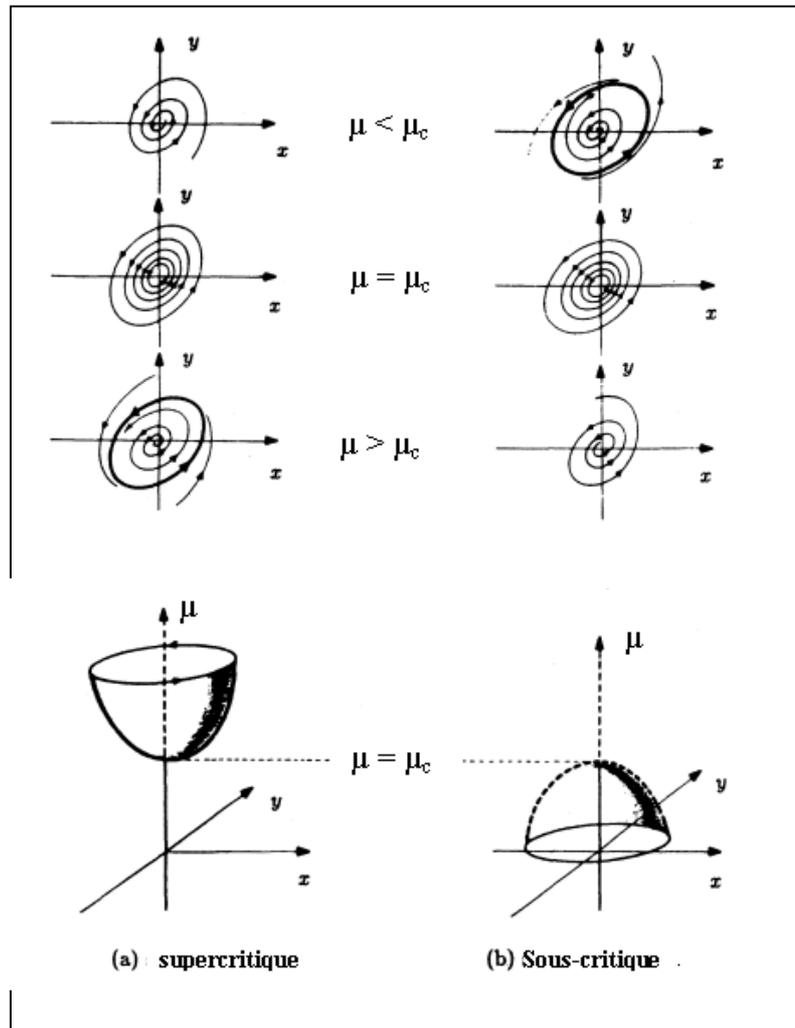


Figure-2.12- bifurcation de Hopf dans un plan de phase

Exemple :

Considérant le système suivant :

$$\dot{x} = mx - wy + (ax - by)(x^2 + y^2) \dots \dots \dots (a)$$

$$\dot{y} = wx + my + (bx + ay)(x^2 + y^2) \dots \dots \dots (b)$$

Où x et y sont les états du système et μ le paramètre de contrôle.

Le point d'équilibre $(0,0)$ est une solution de (a) et (b) pour toutes les valeurs de μ .

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Les valeurs de la matrice jacobienne correspondante sont :

$$I_1 = m - iw \quad \text{et} \quad I_2 = m + iw$$

Nous remarquons à partir de ces valeurs propres que le point (0,0) et un point d'équilibre non hyperbolique pour (a) et (b) quand $\mu=0$, ainsi quand $(x, y, \mu)=(0, 0, 0)$, on a :

$$\frac{dI_1}{dm} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dI_2}{dm} = 1$$

Ainsi les trois conditions pour qu'il y est bifurcation de Hopf sont satisfaites, est une bifurcation de Hopf au point (0, 0) de (a) et (b) se produit à $\mu=0$.

La période de la solution périodique au point (0,0,0) est $2\pi / w$.

En utilisant la transformation suivante :

$$\begin{aligned} x &= r \cos q \\ y &= r \sin q \end{aligned}$$

On transforme le système de départ à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= mr + ar^3 \dots\dots\dots(c) \\ \dot{q} &= w + br^2 \dots\dots\dots(d) \end{aligned}$$

Le point d'équilibre de (c) correspond au point d'équilibre (0,0) de (a) et (b) et l'autre point d'équilibre (c'est-à-dire $r \neq 0$) correspond à la solution périodique de (a) et (b).

Dans le dernier cas r est l'amplitude et \dot{q} est la fréquence de la solution périodique qui à été créer à partir de la bifurcation de hopf.

Le point d'équilibre stable de (c) correspond à une solution périodique stable de (a) et (b) aussi le point d'équilibre instable de (c) correspond à une solution périodique instable de (a) et (b).

On note que (c) est identique à $m\mu + a\mu^3$, ainsi la bifurcation de Hopf au point (0,0,0) dans l'espace (x,y,μ) est équivalente à une bifurcation fourche au point(0,0) dans l'espace (r,μ) .

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Quand $\alpha = -1$, nous avons une bifurcation fourche supercritique dans l'espace (r,μ) . Et on a une bifurcation de Hopf super critique dans l'espace (x,y,μ) . Quand $\alpha = 1$ nous avons une bifurcation fourche sous critique dans l'espace (r,μ) . Et une bifurcation de Hopf sous critique dans l'espace (x,y,μ) .

6.2/ Bifurcation locale d'un cycle limite :

A partir de l'étude faite dans la section (4) de ce chapitre (section de Poincaré), on sait que la matrice de monodromy et ses multiplicateurs de Floquet dépendent du paramètre de contrôle.

Supposons maintenant que lors de la variation du paramètre de contrôle, la solution périodique devient non hyperbolique dans une certaine location dans l'espace d'état. Alors si l'espace de contrôle d'état est qualitativement différent avant et après cette location, alors cette location est appelée un point de bifurcation et le changement qualitative accompagner est appelé bifurcation.

Si nous commençons avec un paramètre de contrôle correspondant à une solution périodique stable d'un système à temps continu et on variant ce paramètre de contrôle, alors la solution périodique perd sa stabilité.

La solution résultante dépend de la manière pour lesquels les multiplicateurs de Floquet quitte le cercle unité.

Il existe alors trois scénarios possibles qui sont récapitulé dans la figure-2.13- suivante :

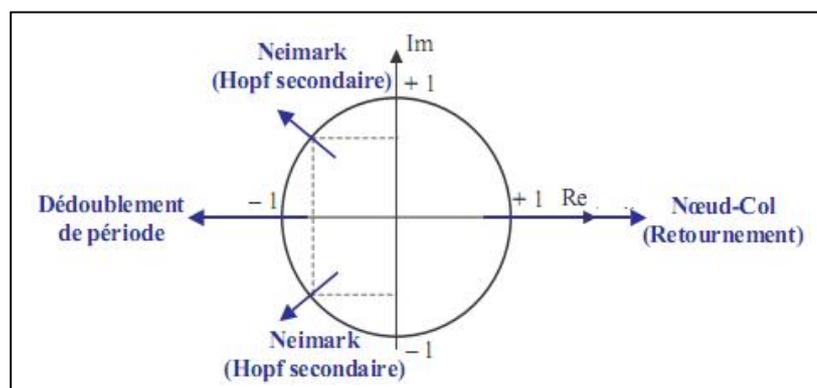


Figure-2.13-Scénario possible d'une bifurcation d'un cycle limite

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Nous allons nous contenter dans notre mémoire du scénario d'un doublement de période :

6.2.1 / Doublement de période (flip bifurcation) :

Quand les multiplicateurs de Floquet quitte le cercle unité à travers (-1) voir figure-16- une bifurcation de type doublement de période prend place est une branche solution périodique stable avant la bifurcation continue comme branche solution périodique instable après bifurcation (au point de bifurcation). Une branche d'une solution stable à doublement de période est créer si la bifurcation est **supercritique**, alors qu'une branche qu'une branche d'une solution instable à doublement de période est détruite si la bifurcation est **sous-critique**.

Quand le système subit une bifurcation à doublement de période sous-critique l'état local du système dynamique sera un attracteur de type cycle limite pour $\mu < \mu_c$.

Cependant pour $\mu > \mu_c$ l'état post bifurcation du système ne peut pas être déterminé, il peut être un point d'équilibre, une solution périodique, quasi périodique ou chaotique.

Dans la figure-2.14-a, nous montrons une orbite périodique d'un système à temps continus et ses intersections avec une section de Poincaré.

Le scénario après que cette orbite périodique subisse une bifurcation à doublement de période est montrée en figure-2.14-b.

L'orbite périodique fait une intersection avec la section de Poincaré en deux temps , une fois au point labélisé 1 et une autre fois dans un point labélisé 2.

Durant cette course d'évolution sur l'orbite périodique, il ya successivement un flip entre le point 1et 2sur la section ; d'où la raison que la bifurcation à doublement de période est aussi appelée bifurcation flip.

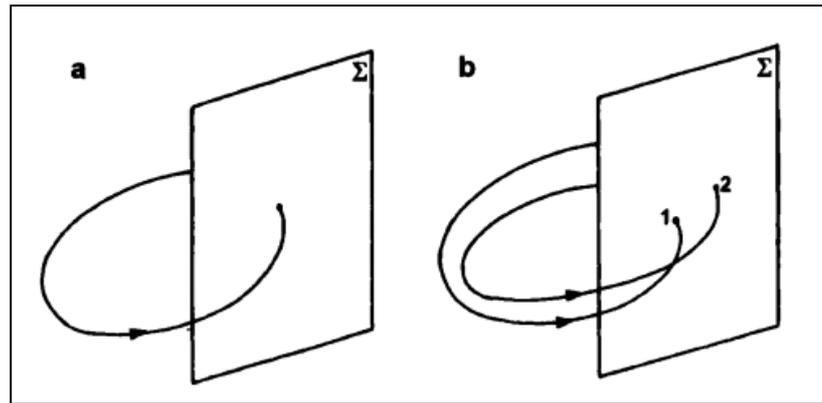


Figure-2.14-orbite périodique est sa section de Poincaré associé
 (a) avant bifurcation à doublement de période (b) après bifurcation à doublement de période

7/ Diagramme de bifurcation :[2][14][36][35]

Les diagrammes des phases, la réponse temporelle, section de Poincaré...etc. fournissent des informations sur la dynamique d'un système pour des valeurs spécifiques du paramètre de contrôle, cependant on est en général intéresser pour voir la dynamique globale du système et cela en faisant varier le paramètre de contrôle ; cela comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre1 correspond à ce qu'on appel le diagramme de bifurcation.

Considérant pour cela l'exemple d'un pendule décrit sous sa forme d'état:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{w}{q} - \sin q + g \cos f$$

$$\frac{dq}{dt} = w$$

$$\frac{df}{dt} = w_d$$

Où on considère g comme étant le paramètre de contrôle

Son diagramme de bifurcation est donné comme suite dans la figure-2.16-

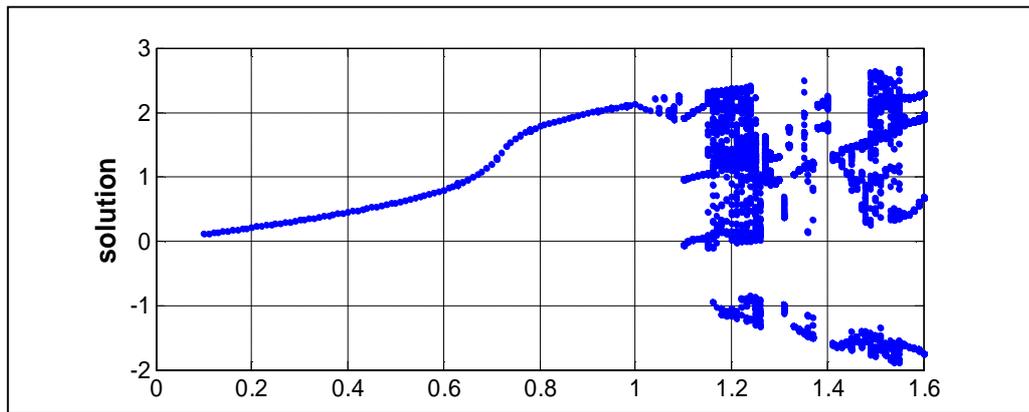


Figure-2.15- diagramme de bifurcation du pendule

On constate que le système exhibe un régime chaotique pour $g=1.2$.

On peut considérer un autre exemple d'un système donné par la figure -2.16-

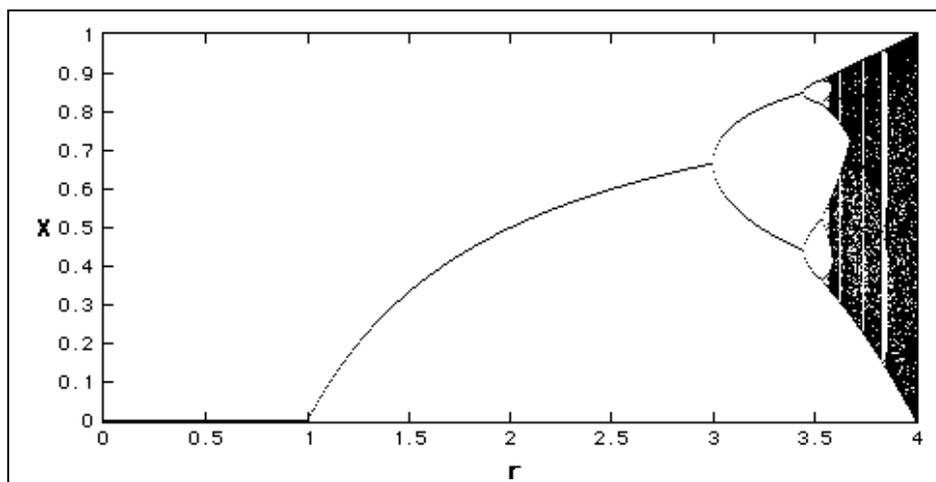


Figure-2.16- Diagramme de bifurcation

On peut remarquer que le système subit une cascade de bifurcation jusqu'à arrivé au chaos.

8/Analyse fréquentielle des bifurcations : [33,45]

Comme nous l'avons mentionné en début de chapitre, il n'existe pas de méthodes standard pour analyser un système non linéaire, chaque système peut avoir une méthode d'analyse particulière; nous introduisons maintenant la notion d'analyse des bifurcations dans le domaine fréquentiel qui se base sur une forme particulière du système. Cette partie se réfère

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

aux travaux de de Chen et Moiola qui est connus en littérature comme étant le critère de Hopf graphique.

8.1/ Représentation du système dans le domaine fréquentille :

considérons le système non linéaire de dimension n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système sous forme d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BDy + B[g(y) - Dy] \\ y = -Cx \end{cases} \quad (2.6)$$

Ou $x \in R^n$, $y \in R^n$, A,B,C et D sont des matrices $n \times n, n \times p, m \times n, p \times m$ et y la sortie

En utilisant une commande $u=g(y)-Dy$ par retour d'état, nous obtenons un système linéaire à retour d'état non linéaire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + Dy) \\ y = -Cx \\ u = \bar{g}(e, \mathbf{m}) = g(y) - Dy \end{cases} \quad (2.7)$$

Ou $g(\cdot) : R^n \rightarrow R$ est une fonction non linéaire

Le schéma fonctionnel de ce système à retour d'état est donné dans la figure suivante et cela en considérant la transformée de Laplace $L(\cdot)$ de système (2.7), nous obtenant :

$$\begin{aligned} L\{x\} &= [sI - A]^{-1} BL\{g(y) - Dy\} \\ \text{et } L\{y\} &= -CL\{x\} = -C[sI - A]^{-1} BL\{g(y) - Dy\} = -G(s)L\{g(y) - Dy\} \\ \text{avec } G(s) &= C[sI - (A + BCD)]^{-1} B \end{aligned}$$

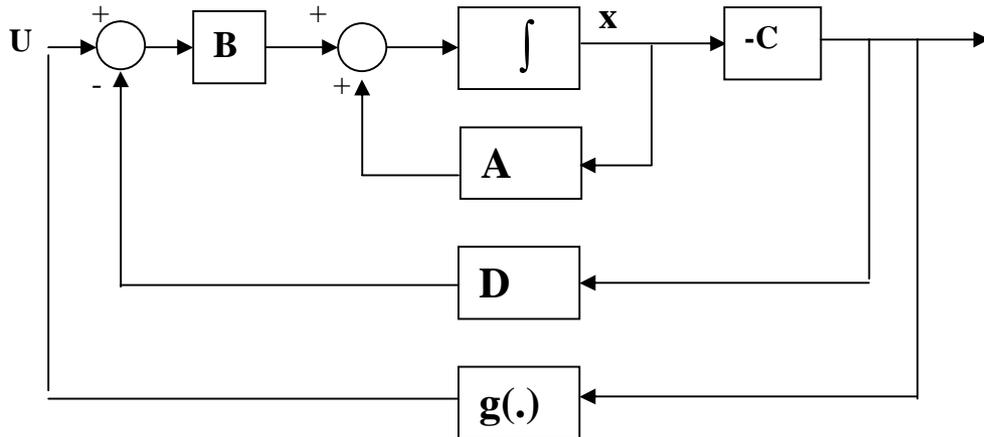


Figure-2.17-commande par retour d'état linéaire

On ajoute maintenant le paramètre m au système avec m est un paramètre réel variable

$$\begin{cases} \dot{x} = A(m)x + B(m)(u - Dy) \\ y = -C(m)x \\ u = \bar{g}(y, m) = g(y, m) - D(m)y \end{cases} \quad (2.8)$$

Avec $L\{y\} = -G(s, m)L\{g(y, m) - D(m)y\}$

De l'équation (2.8) nous pouvons seulement traiter le $y(t, \mu)$ dans le domaine fréquentiel, sans considérer directement le $x(t, \mu)$. Nous observons d'abord si $x_0(t, \mu)$ est une solution d'équilibre de la première équation du système (2.7) alors : $\hat{y}(t, m) = -C\hat{x}(t, m)$

On considère comme solution d'équilibre correspondante au domaine fréquentiel la solution d'équilibre \hat{y} , par dualité, de la transformée de Laplace inverse de l'équation (2.8) notamment .

$$\hat{y}(t, m) = -G(0, m)g\{\hat{y}(t, m) - D(m)\hat{y}, m\} \quad (2.9)$$

Par définition :

$$-G(0, m) = C(m)[sI - (A(m) + B(m)D(m)C(m))]^{-1} B(m)$$

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Dans ce cas $[A(m) + B(m)D(m)C(m)]^{-1}$ à été choisie pour être inversible pour toutes les valeurs de μ , $m < n$ dans le système à retour d'état.

Maintenant si nous linéarisons le système montré dans la figure (2.17) au tour du point d'équilibre $\hat{y}(t, m)$

Alors nous obtenons le système de la figure (2.18) dont la jacobienne au point d'équilibre \hat{y} est donné par :

$$J(m) = \left. \frac{\partial(g - Dy)}{\partial y} \right|_{y=\hat{y}}$$

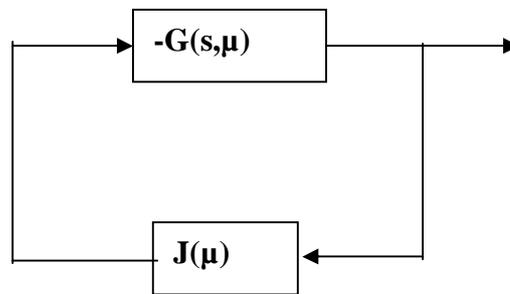


Figure-2.18-Système linéarisé par une commande à retour d'état

Lemme : si les valeurs propres du système non linéaire (2.8) correspondant à la jacobienne dans le domaine temporel, sont purement imaginaire $\pm iw_0$ pour une valeur particulière $\mu = \mu_0$, donc dans le domaine fréquentiel la valeur propre correspondant à la matrice de constantes $[G(iw_0, m_0)J(m_0)]$ est donné par la valeur $-1+i0$ à $\mu = \mu_0$.

Les valeurs propres de $[G(iw_0, m_0)J(m_0)]$:

$$h(I, s, m) = \det[II - GJ] = I^p + a_{p-1}(s, m)I^{p-1} + \dots + a(s, m) = 0$$

La condition de bifurcation :

Si une valeur propre croise au dessus de l'axe imaginaire , la fonction $h(I, s, m)$ à une racine simple à $\lambda = -1$ donc la condition de bifurcation est :

$\hat{I} = \hat{I}(iw, m)$ est la valeur propre de la matrice $[G(iw, m)J(m)]$ qui satisfait :

$$\hat{I}(iw_0, m_0) = -1 + 0i$$

En faisant varier ω pour certaines valeurs de μ , la trajectoire de la fonction $\hat{I} = (w, m)$ appelé le « lieu de gain caractéristique » ou « eigenlocus ». Ce \hat{I} est tracé pour la fréquence $w_0 \neq 0$ c'est l'état de bifurcation dynamique ou Hopf. Pour $w_0 = 0$ nous obtenant la condition pour la bifurcation statique

On sépare $h(-1, i\omega, \mu)$ en deux parties une partie réelle est une autre imaginaire :

$$\text{Re}[h(-1, iw, m)] = F_1(w, m)$$

$$\text{Im}[h(-1, iw, m)] = F_2(w, m)$$

Remarquons en fin que la solution periodique approximé se base sur la balance harmonique Et la stabilité se base sur le critere de Nyquist [27]

Application :

8.2/La bifurcation selle nœud :

Considérant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = m + x_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1 \\ \dot{x}_2 = (m + x_2^2 + x_2) - x_2 \end{array} \right. \quad \text{avec } y = -x$$

En écrivent sous la forme de la représentation d'état de l'équation (2.8)

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0 \text{ avec } g(y, m) = \begin{bmatrix} y_1/2 \\ -y_2 + m + y_2^2 \end{bmatrix}$$

Donc la partie linéarisé est donné par $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

Les points d'équilibres \hat{y} de la matrice $\hat{y} = -G(0, m)g(\hat{y}(t, m), m)$ sont :

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

$$\hat{y}_1 = -\hat{y}_1 \Rightarrow \hat{y} = 0$$

$$-\hat{y}_2 + m + \hat{y}_2 = -\hat{y}_2 = \pm\sqrt{m}$$

La matrice jacobien au point \hat{y} est $J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1+2\hat{y}_2 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice GJ sont donnée par :

$$\det|II - GJ| = \left(I - \frac{1/2}{s+1/2} \right) \left(I - \frac{-1+2\hat{y}_2}{s+1} \right)$$

On a donc deux valeurs propres $\left(I_1 = \frac{1/2}{s+1/2} \right)$ et $\left(I_2 = \frac{-1+2\hat{y}_2}{s+1} \right)$ le premier ne passe jamais

par le point critique $(-1+i0)$ mais le deuxième gain caractéristique peut passer pour certaines valeurs du paramètre μ la condition nécessaire de bifurcation statique à surgit quand $s=0$ et $\lambda_2=-1$ avec $\mu=0$. la stabilité du chemin de la solution d'équilibre est déterminé par une application directe du critère de stabilité de Nyquist comme suit :

1/ pour $\hat{y}_2 \mathbf{f} 0, x_2 \mathbf{p} 0, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ est stable car $I_2(0) \mathbf{f} -1$ n'encercle pas le point $-1+i0$.

2/pour $\hat{y}_2 \mathbf{p} 0, x_2 \mathbf{f} 0, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ est instable car $I_2(0) \mathbf{p} -1$ encercle une fois dans le sens des aiguilles d'une montre le point $(-1+i0)$.

Ce diagramme des bifurcations est montré dans la figure (2.19) dans laquelle comme nous avons précisé la branche supérieure des solutions d'équilibres dans les lignes à tiret est instable alors que l'inférieur dans les pleines lignes est stable.

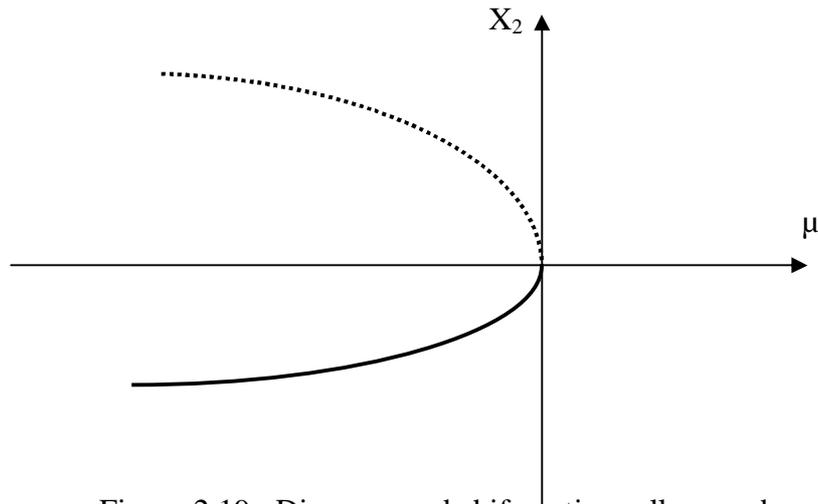


Figure-2.19 : Diagramme de bifurcation selle noeud

8.3/La bifurcation transcritique :

Considérant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = mx_2 + x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1 \\ \dot{x}_2 = (mx_2 + x_2^2 + x_2) - x_2 \end{cases}$$

En suivant la meme procédure que auparavant :

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0 \text{ avec } g(y, m) = \begin{bmatrix} y_1/2 \\ -(m+1)y_2 + y_2^2 \end{bmatrix}$$

Donc la partie linéaire est donné par :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Les points d'équilibres \hat{y} de la matrice $\hat{y} = -G(0, m)g(\hat{y}(t, m), m)$ sont :

$$\hat{y}_1 = -\hat{y}_1 \Rightarrow \hat{y}_1 = 0$$

$$-(m+1)\hat{y}_2 + \hat{y}_2^2 \Rightarrow (\hat{y}_2 - m)\hat{y}_2 = 0$$

La matrice jacobienne au point \hat{y} est $J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -m-1+2\hat{y}_2 \end{bmatrix}$

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Les valeurs propres de la matrice GJ sont donnée par :

$$\det|II - GJ| = \left(I - \frac{1/2}{s+1/2} \right) \left(I - \frac{-(m+1) + 2\hat{y}_2}{s+1} \right)$$

Donc on a deux valeurs propres $\left(I_1 = \frac{1/2}{s+1/2} \right) \left(I_2 = \frac{-(m+1) + 2\hat{y}_2}{s+1} \right)$, on a deux cas :

1/ la paire des valeurs propres $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0,0) \Rightarrow I_2 = -\frac{m+1}{s+1}$

Pour $m \neq 0, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ est instable car $I_2(0) < -1$

Pour $m = 0, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ est stable car $I_2(0) > -1$

2/ la paire des valeurs propres $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0, m) \Rightarrow I_2 = \frac{m-1}{s+1}$

Pour $m > 0, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ est instable car $I_2(0) < -1$ avec $\hat{y}_2 > 0, x_2 < 0$

Pour $m < 0, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ est stable car $I_2(0) > -1$ avec $\hat{y}_2 < 0, x_2 > 0$

Le diagramme de bifurcation correspondant à une bifurcation transcritique avec l'analyse de stabilité sur chaque branche de solution est le suivant :

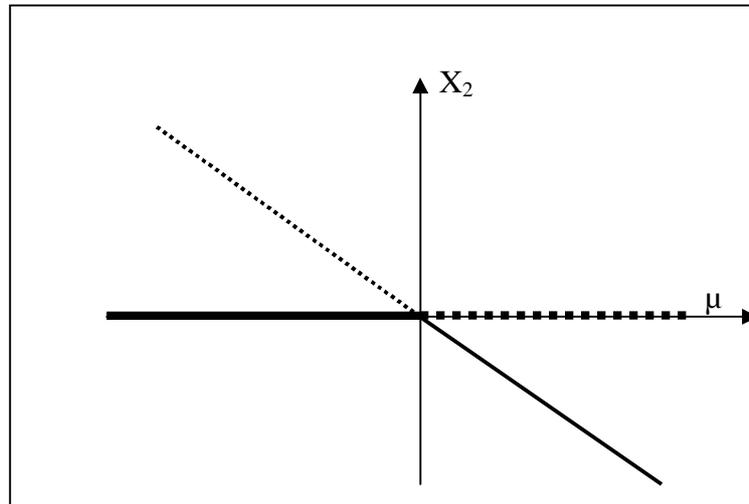


Figure-2.20-Diagramme de bifurcation transcritique

8.4/Bifurcation fourche :

Soit le système suivant :

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = mx_2 - x_2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1 \\ \dot{x}_2 = (mx_2 - x_2^3 + x_2) - x_2 \end{cases}$$

En transforme le système en configuration de système à retour d'état non linéaire avec

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g(y, m) = \begin{bmatrix} y_1/2 \\ -(m+1)y_2 + y_2^3 \end{bmatrix}$$

Les points d'équilibres \hat{y} de la matrice $\hat{y} = -G(0, m)g(\hat{y}(t, m), m)$ sont :

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 = -\hat{y}_1 &\Rightarrow \hat{y}_1 = 0 \\ -(m+1)\hat{y}_2 + \hat{y}_2^3 = -\hat{y}_2 &\Rightarrow (\hat{y}_2^2 - m)\hat{y}_2 = 0 \end{aligned}$$

La matrice jacobienne au point \hat{y} est $J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -m-1+3\hat{y}_2^2 \end{bmatrix}$

Donc on a deux valeurs propres $\left(I_1 = \frac{1/2}{s+1/2} \right)$ et $\left(I_2 = \frac{-(m+1)+3\hat{y}_2^2}{s+1} \right)$

On a trois paires de valeurs propres $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0,0)$, $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0, \sqrt{m})$
et $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0, -\sqrt{m})$

Le gain caractéristique $\left(I_1 = \frac{1/2}{s+1/2} \right)$ et $\left(I_2 = \frac{-(m+1)+3\hat{y}_2^2}{s+1} \right)$

Pour analyser les branches de solutions d'équilibre résultant pour l'état statique de bifurcation ($\lambda_2=-1$, et $s=0$ et $\mu=0$) , nous considérons deux cas :

1/ la paire des valeurs propres $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0,0) \Rightarrow I_2 = \frac{-(m+1)}{s+1}$

Pour $m \neq 0$, (\hat{y}_1, \hat{y}_2) est instable

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

Pour $m > 0$, (\hat{y}_1, \hat{y}_2) est stable

Car $\lambda_2(0)$ n'encercle pas le point critique $(-1+i0)$ par critère de Nyquist

2/ la paire des valeurs propres

$$(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0, \sqrt{m}) \text{ et } (\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0, -\sqrt{m}) \Rightarrow I_2 = \frac{-(m+1) + 3m}{s+1} = \frac{2m-1}{s+1}$$

Alors pour $m > 0$ les deux (\hat{y}_1, \hat{y}_2) est stable

On peut résumer le tout par la figure suivante :

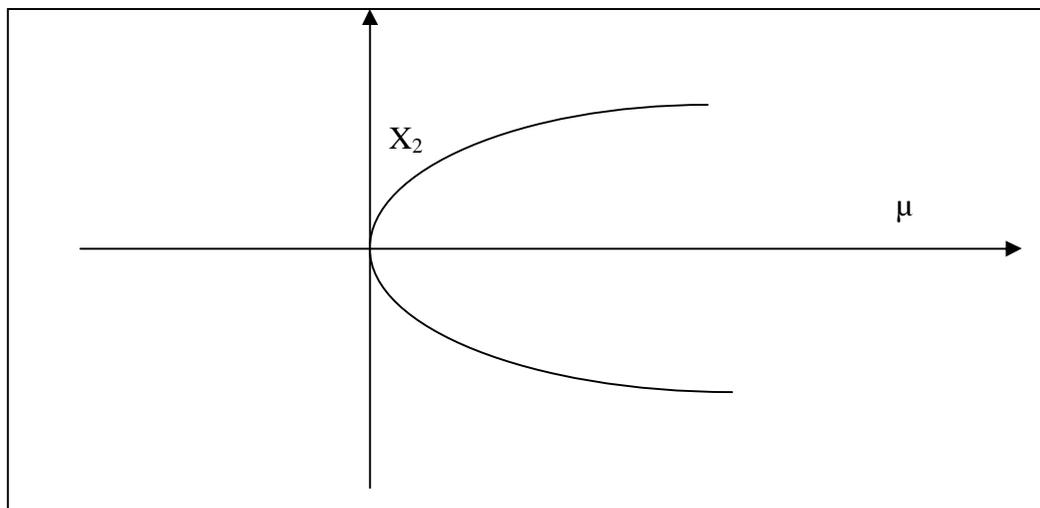


Figure-2.21- diagramme de bifurcation fourche

9/ Conclusion :

Nous avons abordé au cours de ce chapitre des notions essentielles telles que la stabilité, les bifurcations, nécessaires pour comprendre et interpréter des comportements dynamiques.

Nous avons aussi présenté un état de l'art sur les outils d'analyse des systèmes non linéaires y compris bifurquant et chaotique.

Ces outils sont basés sur l'aspect qualitatif de la solution qui est déterminée grâce au moyen de méthode numérique tel que l'intégrateur temporel de Runge-Kutta, d'où l'appellation de méthodes temporels.

Aussi nous avons montré comment l'approche fréquentielle peut être utilisée pour étudier les bifurcations stationnaires. Le chapitre suivant fera l'objet d'une étude « analytique » de la

Chapitre 2 : Analyse des systèmes bifurquant et chaotiques

solution d'un système non linéaire, nous allons montrer comment à partir d'une approche fréquentielle, on peut faire de l'analyse du chaos.

1/ Introduction :

Dans ces dernières années, beaucoup de travaux ont été orientés vers l'analyse des systèmes ayant un comportement complexe, c'est-à-dire des systèmes montrant plusieurs attracteurs et phénomènes de bifurcation : en effet ces systèmes complexes sont utiles pour la modélisation de large variété de phénomènes se produisant dans le domaine de la physique, la chimie, biologie écologie..etc.[3,4]

Ces comportements peuvent être étudiés à travers diverses techniques, qui peuvent être soit qualitatives ou analytiques (quantitatives).[44][7]

Ces deux approches d'études sont complémentaires par ce que l'approche analytique donne une image du comportement du système ; alors que l'approche qualitative confirme la précision du résultat.[27]

Il existe dans la littérature plusieurs approches analytiques, on peut citer la méthode de la moyenne, la méthode à échelle multiples, la méthode de perturbation régulière ...souvent appelées les méthodes de perturbation, aussi on a les méthodes vibrationnelles et la méthode de la balance harmonique (MBH) ou équilibrage harmonique.[50][24]

Nous nous intéressons dans notre mémoire à la méthode de la balance harmonique (MBH) qui est une technique fréquentielle, de prédiction de comportement complexe qui peut être utilisée dans un objectif d'analyse (approche numérique) et de contrôle (analyse pour le contrôle : approche analytique) est cela pour les systèmes non linéaires ayant un régime périodique; celle-ci a vu le jour grâce aux travaux de Kryloff et Boglioff (1940) puis Gibson et Pram (1961) et Gelb et Vander(1974).[10,27,28]

Actuellement et grâce à la puissance des calculateurs, beaucoup de ramifications de cette méthode ont été développées, on peut citer la méthode de la balance harmonique d'ordre supérieur, la balance harmonique incrémentale, La BH par continuation ANM...etc.[10][8]

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Ces panoplies de méthodes de la balance harmonique, constituent un outils puissant pour l'analyse de phénomènes dynamiques tel que les cycles limites, le doublement de période, le saut....etc. , est donc la balance harmonique est vue comme alternative pour les méthodes basée sur l'intégration temporelle.[28]

Beaucoup de travaux concernant l'analyse des systèmes non linéaires par la BH sont jusqu'à présent une thématique de recherche, on peut citer les travaux de Liping. Liu, Earl.Dowell,Kennet.all, P.J.attar B.cochelin...[27][26].[28][13]. Concernant le contrôle ou de l'analyse pour le contrôle des systèmes non linéaires et chaotiques, on peut citer les travaux de R.Genesio ; A.Tesi, H.Abed...etc.[16][17][18][19]

Dans notre mémoire nous allons traiter le problème d'analyse des systèmes bifurquant via la balance harmonique avec ces deux aspects, et cela en montrant comment cette méthode peut être appliquée pour une résolution numérique puis on abordera le problème dans une perspective de contrôle, ou une bonne stratégie consiste à détecter une route vers le chaos et cela à travers le scénario d'une cascade de doublement de période (prédire un doublement de période) comme nous l'avons déjà présenter en chapitre deux.

2/ Balance Harmonique : Méthodologie [13][28][27][44] :

La balance Harmonique est basée sur l'assomption que la réponse du système dans le domaine temporelle peut être développée en forme de série de Fourier.

Par conséquent la MBH est habituellement utilisée pour étudier les systèmes non linéaires dont la sortie ou réponses est périodique dans le temps. De tel système sont divers , on peut citer les oscillateurs qu'il soient mécanique , chimique, biologiques, électronique..etc, ou autres systèmes tel que les moteur électriques, ponts ...etc.

L'idée de base de la BH est simple; elle consiste à substituer une solution de la forme d'une série de Fourier comme étant une solution du système dans le domaine temporel et cela dans

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

les équations d'évolutions qui gouvernent le système puis à balancer (équilibrer) les coefficients de même composante harmonique (1,cos ωt ,cos2 ωt,sin ωt ,sin2.....).

Cependant le problème réside dans l'implémentation, car il n'est pas toujours facile de représenter les non linéarité ; on plus la précision de la méthode va dépendre du nombre d'harmonique à choisir.

Le point fort de la méthode est le fait de pouvoir substituer la solution prédite dans l'équation gouvernant le système, cela va nous permettre de transformé le problème d'une équation différentielle ordinaire, en un système algébrique non linéaire qui peut être résolut grâce à des algorithmes numériques, comme par exemple Newton-Raphson.

2.1/ exemple :

Considérant toujours l'équation de Van der Pol :

$$\ddot{x} - a(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

Supposons que la solution de (3.1) peut être de la forme d'une série de Fourier traquée :

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (x_{2n-1} \cos n\omega t + x_n \sin n\omega t) \dots\dots\dots (3.2)$$

Ou ω est la fréquence fondamentale de la solution.

X_n (n=0..... N_H) sont les solutions de la BH est représentent les coefficients de Fourier.

Le développement en série de Fourier du terme non linéaire $x^2 \dot{x}$ dans (3.4) peut aussi être donné par (3.3), en retenant que N_H harmonique :

$$(x(t))^2 \dot{x}(t) = r_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (r_{2n-1} \cos(n\omega t) + r_{2n} \sin(n\omega t)) \dots\dots\dots (3.3)$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Où :
$$r_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (y(t))^2 \dot{y}(t) dt$$

$$r_{2n-1} = \frac{1}{p} \int_0^{2p} (y(t))^2 \dot{y}(t) \cos(nt) dt$$

$$r_{2n} = \frac{1}{p} \int_0^{2p} (y(t))^2 \dot{y}(t) \sin(nt) dt$$

Où y(t) est seulement l'expression dans (3.2) en remplaçant (ωt) par (t).

On substituant (3.2)et (3.3) dans (3.1) est en remplaçant les termes de mêmes harmoniques c'est-à-dire chaque $\cos(n\omega t)$ et chaque $\sin(n\omega t)$ pour ($n=0, \dots, N_H$), nous aurons un système algébrique non linéaire de $2N_H + 1$ équations pour les coefficients de Fourier x_n ($n=0, \dots, N_H$).

Le système algébrique résultant peut être de la forme suivante :

$$(A^2 - aA + I)Q_x + aR_x = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

Où Q_x est le vecteur des inconnus qui est définit par :

$$Q_x = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2N_H} \end{Bmatrix}_{(2N_H+1) \times 1}, \quad R_x = \begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{2N_H} \end{Bmatrix}_{(2N_H+1) \times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & J_1 & & & \\ & & J_2 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & J_{N_H} \end{bmatrix}_{(2N_H+1) \times (2N_H+1)}$$

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & nW \\ -nW & 0 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, N_H$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

- La résolution du système(3.4) nécessite l'expression analytique pour la fonction non

Linéaire $r_i (i = 0,1,2,\dots,2N_H)$ et cela en terme des variables $x_i (i = 0,1,2,\dots,2N_H)$

-La fréquence ω est une inconnus supplémentaire dans l'analyse du système, et donc dans l'objectif de résoudre le système algébrique non linéaire (3.2) pour les coefficients de Fourier et la fréquence ω on impose une condition supplémentaire et cela sur premier harmonique qui peut être ou $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$; cette condition est plus connus dans la littérature comme étant la condition de phase.

- notons aussi que la forme générale du système obtenu n'est pas standard, elle change d'un système à un autre.

Pour $N_H = 1$, on a le système suivant :

$$\begin{cases} x_0 + ar_0 = 0 \\ -(w^2 + 1)x_1 - awx_2 - r_1 = 0 \\ awx_1 + (-w^2 + 1)x_2 - r_2 = 0 \\ x_2 = 0 \quad (\text{condition de phase}) \end{cases}$$

- Nous pouvons constater qu'une difficulté de la BH réside dans la génération des r_i surtout en augmentant l'ordre de troncature.
- La précision du résultat obtenu n'est pas évidente, et elle dépend d'une manière général de l'ordre de troncature, celui-ci ne peut être fixé à priori et selon le système il peut aller jusqu'à des ordres élevés..
- Le choix des conditions initiales n'est pas toujours facile pour un solveur numérique surtout dans le cas d'un système autonome.
- L'habilité de détecter une bifurcation de Hopf ou une bifurcation à doublement de période réside dans l'observation qu'un cycle limite à doublement de période est un signal présentant des harmoniques, une forme de la solution dans le cas d'une bifurcation flip est :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{N_H} x_k \cos(k \frac{W}{2} t) + \sum_{L=1}^{N_H} x_L \sin(L \frac{W}{2} t) \dots\dots\dots(3.5)$$

-La méthode de la BH fournit l'avantage par rapport aux méthodes d'intégration Temporelles tel que Runge-Kutta et que celle-ci donne directement le régime Permanent alors que la méthode deRunge-Kutta établit le transitoire et le permanent, cela cause des couts sur le temps de calcul.

-Quand cette méthode est implémenté numériquement, elle souvent connue en littérature sous l'appellation de méthode spectrale.

-Il existe bien d'autre ramification de la BH , comme nous l'avons citer au début, cependant le principe de la méthode de la BH reste toujours le même , quelque soit la méthode à utiliser.

3/ Balance harmonique pour le contrôle :[46][17][18][19][10][16][22]

Nous avons dit que la BH est très utiliser pour détecter diverses bifurcation, plus particulièrement elle est très utiliser pour prédire l'amplitude et la fréquence d'un cycle limite .

Nous allons nous basées sur cette approche pour faire de l'analyse du chaos et cela dans un une perspective de contrôle ou, plus exactement la suppression du chaos via la BH.

Nous allons montrer comment grâce à cette méthode, nous pouvons développer de simple condition mathématique ou tout simplement des conditions sur le système afin de pouvoir prédire une bifurcation de type doublement de période.

Notons enfin que pour les problèmes de contrôle traiter via la BH, pour un ordre de troncature égale à 1, la BH est souvent appelée la méthode des fonctions de descriptions ou la technique du linéarisé équivalent (chapitre-1-).

3.1 / Représentation du système :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

La B.H est une méthode qui peut être appliquée pour des systèmes non linéaires présentant des oscillations dans le cas analyse. Ce n'est pas le cas pour les problèmes de contrôle ou le système doit avoir une forme particulière souvent appelée en littérature comme la « **forme de Lur'e** ».

Cette forme consiste en une boucle fermée (feedback) ou il ya une interconnexion entre deux partie du même système (sub système), le premier sub système est un système linéaire à temps invariants alors que la deuxième partie du système (le deuxième sub système) est un système non linéaire à temps invariants. La figure suivante montre le système de Lur'e noté « S » :

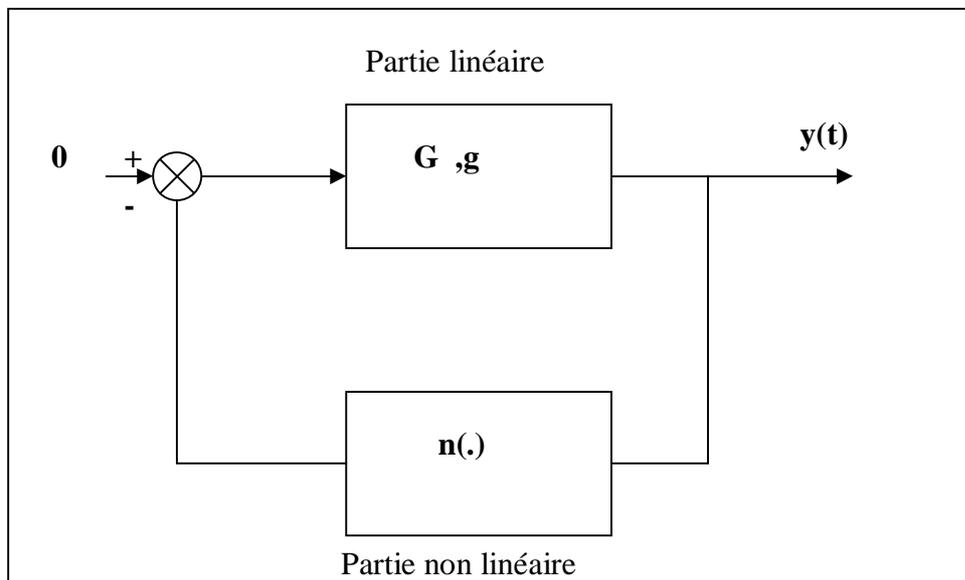


Figure-3.1- Système « S »

Ou :

$g=g(t)$ représente la réponse impulsionnelle de la partie linéaire du système « S » et

$G=G(s)$ et sa transformée de Laplace.

La partie non linéaire est représenté par un opérateur à temps invariant qui est un scalaire.

Le système « S » peut être décrit par l'équation suivante :

$$g * (n \bullet y) + y = 0 \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

Ou : « o » est un opérateur application.

« * » est un opérateur de convolution

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$y(t)$ représente une sortie scalaire du système « S ».

En représentation d'état, le système de l'ur'e peut être de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bn(y(t)) \\ y = Cx \end{cases} \dots\dots\dots(3.7)$$

Ou $G(s) = N(s)/D(s) = C.(SI-A)^{-1}B$

Et A, B et C sont des matrices de dimensions appropriés et $\dot{x}_1 = x_1, \dots; \dot{x}_{n-1} = x_{n-1}, y = x_n$

Nous supposons maintenant les hypothèses suivantes :

- Le système linéaire se comporte comme étant un filtre passe bas.
- La non linéarité $n(.)$ est une non linéarité explicite.

3.2/ Prédiction des points d'équilibre et des cycles limites :

Dans le cas du système « S » nous clarifions qu'un équilibre ou point d'équilibre est une solution pour laquelle le système « S » admet une sortie constante, c'est-à-dire le signal $y(t)$ est constant ; pour ce qui est du cycle limite , la sortie $y(t)$ est périodique.

Donc on peut parler d'une « sortie en cycle limite » ou d'une « sortie point d'équilibre »

Cependant il est plus convenable de dire « point d'équilibre » et « cycle limite » au lieu de dire « sortie en cycle limite » ou « sortie point d'équilibre ».

Nous savons que pour n'importe quel signal $y(t)$ de période $2p/w$, son développement en série de Fourier peut être de la forme :

$$y_{(m)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos(\omega t + f_1) + Y_2 \cos(2\omega t + f_2) + \dots\dots\dots + Y_m \cos(m\omega t + f_m) \dots\dots\dots(3.8)$$

Ou Y_0 et $Y_i \geq 0$ et $f_i \in [-p, p]$ avec $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

- Points d'équilibres de S :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Sont les sorties constantes pour lesquels, $y_{(0)}(t) \equiv Y_0$. Ils sont obtenus en résolvant l'équation suivante :

$$Y_0 + G(0)(n \bullet Y_0) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

Ou $(n \bullet Y_0)(t)$ est la sortie constante du bloc non linéaire

La stabilité locale du point d'équilibre peut être investie par les techniques linéaires standard, en substituons le bloc non linéaire par le gain (linéarisation)

$$n'(E_j) = \left. \frac{dn(y)}{dy} \right|_{y=E_j}$$

- **Cycle Limite Prédic (CLP) :**

Dans le cas de la prédiction des cycles limite par la BH ; on peut prendre une approximation du cycle limite, et cela en utilisant plusieurs termes de la série de Fourier pour la solution désirée. On pourra alors prendre plusieurs ordres d'approximations.

On peut prendre par exemple une approximation du premier ordre d'un cycle limite de la forme :

$$y_{(1)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos \omega t \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

D'une façon similaire une approximation du second ordre du cycle limite peut être de la forme :

$$y_{(2)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos(\omega t + f) + Y_2 \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

Nous allons montrer, comment les paramètres Y_0 , Y_1 et ω de l'équation (3.10) peuvent être déterminés ; nous expliquerons ensuite comment les paramètres Y_0 , Y_1 , Y_2 , ω et Φ de l'équation (3.11) peuvent eux aussi être déterminés.

Soit $y_{(1)}(t)$ l'entrée du bloc (sous système) non linéaire comme dans la figure-1-

L'état d'équilibre résultant est donnée par :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$(n \bullet y_{(1)}(t))(t) = N_0 Y_0 + \text{Re}(N_1 e^{j\omega t}) Y_1 \dots \dots \dots (3.12)$$

Où $(n \bullet y_{(1)}(t))$ est le développement en série de Fourier et cela en se basant sur l'hypothèse que la non linéarité est explicite.

Aussi N_0 et N_1 sont respectivement le gain biaisé et le gain complexe de la partie non linéaire ; ils sont donnés par :

$$N_0 = N_0(Y_0, Y_1, \omega) = \frac{\omega}{2pY_0} \int_{-\frac{p}{\omega}}^{\frac{p}{\omega}} (n \bullet y_{(1)}(t)) dt \dots \dots \dots (3.13)$$

$$N_1 = N_1(Y_0, Y_1, \omega) = \frac{\omega}{pY_1} \int_{-\frac{p}{\omega}}^{\frac{p}{\omega}} (n \bullet y_{(1)}(t)) e^{-j\omega t} dt \dots \dots \dots (3.14)$$

Le Principe de la balance harmonique implique l'équilibrage entre le signal obtenue a partir du bloc non linéaire comme entrée du système linéaire avec le signal supposé à partir de l'équation (3.10) ; le résultat est un système d'équations algébriques :

$$Y_0 [1 + G(0)N_0(Y_0, Y_1, \omega)] = 0 \dots \dots \dots (3.15)$$

$$1 + G(j\omega)N_1(Y_0, Y_1, \omega) = 0 \dots \dots \dots (3.16)$$

Ces condition sont souvent appelées les conditions d'auto-oscillations.

Définition du Cycle Limite Prédic (CLP) :

Un cycle limite prédic du premier ordre est un signal comme dans (3.10) ou les paramètres Y_0 , Y_1 et ω sont calculés à partir de (3.15) et (3.16) est cela en fonction de N_0 et N_1 qui sont calculés à partir de (3.13) et (3.14).

Nous formulons maintenant comment on peut obtenir une approximation harmonique du second ordre $y_2(t)$ (3.11) d'un cycle limite prédic qui se produit dans le système « S »

Comme dans le cas d'un CLP du premier ordre, on procède de la même manière pour retrouver les paramètres du signal $y_2(t)$ c'est-à-dire Y_0 , Y_1 , Y_2 , ω et Φ et cela en résolvant un système d'équation algébriques (les conditions non numérique) , qui sont données par :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$Y_0[1 + G(0)N_0(Y_0, Y_1, Y_2, w, f)] = 0 \dots\dots\dots(3.17)$$

$$1 + G(jw)N_1(Y_0, Y_1, Y_2, w, f) = 0 \dots\dots\dots(3.18)$$

$$1 + G(j2w)N_2(Y_0, Y_1, Y_2, w, f) = 0 \dots\dots\dots(3.19)$$

Les fonctions N0 , N1 et N2 qui apparaissent dans ces équations sont définies comme suite :

$$N_0 = N_0(Y_0, Y_1, Y_2, w, f) = \frac{w}{2pY_0} \int_{\frac{-p}{w}}^{\frac{p}{w}} (n \bullet y_{(2)})(t) dt \dots\dots\dots(3.20)$$

$$N_1 = N_1(Y_0, Y_1, Y_2, w, f) = \frac{w}{pY_1} \int_{\frac{-p}{w}}^{\frac{p}{w}} (n \bullet y_{(2)})(t) e^{-j(wt+f)} dt \dots\dots\dots(3.21)$$

$$N_2 = N_2(Y_0, Y_1, Y_2, w, f) = \frac{w}{pY_2} \int_{\frac{-p}{w}}^{\frac{p}{w}} (n \bullet y_{(2)})(t) e^{-j2wtdt} \dots\dots\dots(3.22)$$

Remarque :

Si la non linéarité est statique, le calcul du CLP est simplifié, car tous les gains seront indépendants de ω .

Si en plus la non linéarité est sans mémoire le gain N1 devient réel, ceci implique que ω est déterminé par la résolution de $G^{-1}(jw) = 0$

3.3/ analyse de la Stabilité du CLP via la BH (stabilité des auto-oscillations) :

Le principal outil de la BH pour déterminer la stabilité du cycle limite est ce qu'on appelle le « critère de Loeb ».

Cependant un problème apparaît dans son application, car il n'existe pas une formulation claire de ce critère dans la littérature ; donc on va se contenter de donner l'idée, qui nous permet de l'utiliser.

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Le critere de Loeb résulte de l'analyse de la MBH du premier ordre et cela pour le cycle limité

Hypothese :

Dans le développement en série des trajectoires du système en respectant la déviation initiale du CLP tous les termes du premier ordre tendent vers zéros quand le temps augmente, à l'exception des termes du premier harmonique dont la fréquence est celle du CLP.

Considérant le système « S » et

$$y_{(1)}^0(t) = Y_0^0 + Y_1^0 \cos w^0 t \dots\dots\dots(3.23)$$

L'indice 0 est utilisé pour indiquer la valeur nominal des paramètres w, Y0 et Y1 qui satisfassent (3.15) et (3.16) avec les fonctions N0 et N1 comme donné dans (3.15) et (3.14)

Considérant que le système « S » génère le transitoire et cela à partir d'un petit changement sur les conditions initiales sur le CLP considérer.

Posons :

$$Y_0 = Y_0^0 + dY_0 \dots\dots\dots \dots \dots \dots (3.24)$$

$$Y_1 = Y_1^0 + dY_1 \dots\dots\dots \dots \dots \dots (3.25)$$

$$w = w^0 + dw + j\delta s \dots\dots\dots \dots \dots \dots (3.26)$$

Cette perturbation dans les conditions initiales est obtenue à partir de (3.23) qui est soumis à une perturbation, qui peut avoir la forme suivante :

$$(y_{(1)}^0(t) = Y_0^0 + dY_0 + (Y_1^0 + dY_1) \text{Re}(e^{-j(w^0+dw+j\delta s)t}) \dots\dots\dots (3.27)$$

Ou, δ : représente un facteur d'amortissement.

Le fait d'introduire le facteur δ résulte du fait que une fois le CLP perturbé, il n'est plus périodique mais oscille avec un mouvement perturbé, on aura une pulsation complexe.

Si on considère que (3.27) peut être développée sous forme complexe, alors le développement en série de Taylor, va nous permettre de générer trois équations algébriques .

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Ces équations peuvent être résolues par rapport aux quantités $\frac{dY_0}{dY_1}$, $\frac{dw}{dY_1}$ et $\frac{ds}{dY_1}$

Le rapport entre ces trois ratios va nous permettre de développer la condition de stabilité.

Le critère de Loeb peut être formulé de différentes manières :

Critère de Loeb :

Le CLP du premier ordre $y_{(1)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos \omega t$ avec les paramètres Y_0 , Y_1 et ω qui satisfont (3.13) et (3.14) est stable si la condition suivante est satisfaite :

$$\text{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial Y_1} \left[\overline{G(j\omega)N_1(Y_0(Y_1, \omega), Y_1, \omega)} \right] \times \frac{\partial}{\partial \omega} [G(j\omega)N_1(Y_0(Y_1, \omega), Y_1, \omega)] \right\} \dots \dots \dots (3.28)$$

Dans le cas d'une non linéarité statique, on peut avoir les formulations suivantes du critère de Loeb :

Critère de Loeb pour une non linéarité statique (première formulation) :

Pour le système « S » avec une non linéarité statique n , le cycle limite correspondant au premier ordre $y_{(1)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos \omega t$ avec les paramètres Y_0 , Y_1 et ω qui satisfont (3.13) et (3.14) est stable si la condition suivante est satisfaite :

$$|G(j\omega)|^2 \text{Im} \left[\frac{dN_1(Y_0(Y_1), Y_1)}{dY_1} \cdot \frac{dG^{-1}(j\omega)}{d\omega} \right] \neq 0 \dots \dots \dots (3.29)$$

Critère de Loeb pour une non linéarité statique (deuxième formulation) :

Pour le système « S » avec une non linéarité statique n , le cycle limite correspondant au CLP du premier ordre $y_{(1)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos \omega t$ avec les paramètres Y_0 , Y_1 et ω qui satisfont (3.13) et (3.14) est stable si $G(s)$ est stabilisable en sortie par retour à gain proportionnel :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$r = N_1(Y_0, Y_1) + h \frac{\frac{dN_1(Y_0(Y_1), Y_1)}{dY_1} |N_1(Y_0, Y_1)|^2}{\left| \frac{dN_1(Y_0(Y_1), Y_1)}{dY_1} \right| N_1^2(Y_0, Y_1)} \dots\dots\dots(3.30)$$

Ou h est un petit paramètre positif.

3.4 / Analyse d'une bifurcation à doublement de période par la BH :

On considère toujours le système « S » défini par la figure(1) ; nous supposons que g et/ou n dépendent d'un paramètre réel ; cette notation ne sera pas toujours mentionné dans ce qui suit c'est-à-dire que S_μ ou S sont toujours des systèmes qui dépendent de μ , et $G(s, \mu)$ et $G(s)$ sont les fonctions de transfert du système linéaire dépendant d'une valeur spécifique de μ .

3.4.1/ Prédiction d'une bifurcation à doublement de période par la BH :

Supposons que le système « S » possède un cycle limite prédé pour une valeur du paramètre μ .

Si ce cycle limite subit une bifurcation à doublement de période à une certaine valeur critique du paramètre notée μ_c ; alors on assistera à l'émergence d'un nouveau cycle limite prédé qui va contenir des sous harmoniques et cela pour une fréquence divisée par deux.

Puisque nous adopterons une analyse par BH du premier ordre, le CLP nominal sera de la forme :

$$y_{(1)}^{nom}(t, \mathbf{m}) = Y_0^{nom} + Y_1^{nom} \cos W^{nom} t \dots\dots\dots(3.31)$$

L'indice « nom » est utilisé pour indiquer que les paramètres de la solution sont calculés pour le CLP nominal en utilisant la BH du premier ordre. Ces paramètres dépendent du paramètre de bifurcation μ . Ces paramètres sont obtenus en résolvant (3.13) et (3.14) en fonction de N_0 et N_1 définie dans (3.15) et (3.16).

Le signal obtenu peut être de la forme suivante :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$Y_0 + e \cos\left(\frac{1}{2} \omega t + f\right) + Y_1 \cos \omega t \dots\dots\dots(3.32)$$

Ou e est petit paramètre positive

Ce signal obtenus est un candidat naturel pour approximation de la BH du second ordre d'un CLP qui résulte à partir de (3.31) et cela à travers une bifurcation à doublement de période.

En effet si ω , Y_0 et Y_1 dans le signal (3.32) sont les valeurs nominales correspondant dans (3.31) pour e petit alors on peut dire que (3.31) est approximativement de période deux.

On sait d'après le chapitre deux que la bifurcation à doublement de période génère un cycle limite à période deux sous critique ou sur critique, considérant pour cela que le paramètre de contrôle μ peut être développé comme suite :

$$m(e) = m_c + m_1 e + m_2 e^2 + O(e^3) \dots\dots\dots(3.33)$$

Ou $m(e)$ est une fonction continument différentiable, avec $m_1 = 0$ et $m_2 \neq 0$ (cas générique).

Introduisant la fréquence $\hat{\omega}$ qui est la fréquence fondamentale du CLP à doublement de période et adoptant la formulation suivante :

$$y_{(2)}(t, m) = Y_0 + e \cos(\hat{\omega} t + f) + Y_2 \cos 2\hat{\omega} t \dots\dots\dots(3.34)$$

Appliquons (3.17)-(3.19) et (3.20)-(3.22) pour l'approximation du cycle limite du deuxième ordre (3.34)

Les équations résultantes dépendent du paramètre de contrôle est sont donnée par :

$$Y_0 [1 + G(0, m)N_0(Y_0, e, Y_2, \hat{\omega}, f, m)] = 0 \dots\dots\dots(3.35)$$

$$1 + G(j\hat{\omega}, m)N_1(Y_0, e; Y_2, \hat{\omega}, f, m) = 0 \dots\dots\dots(3.36)$$

$$1 + G(j2\hat{\omega}, m)N_2(Y_0, e, Y_2, \hat{\omega}, f, m) = 0 \dots\dots\dots (3.37)$$

Ou :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$N_0(Y_0, e, Y_2, \hat{w}, f, m) = \frac{\hat{w}}{2pY_0} \int_{-\frac{p}{\hat{w}}}^{\frac{p}{\hat{w}}} (n \bullet y_{(2)})(t, m) dt \dots\dots\dots(3.38)$$

$$N_1(Y_0, e, Y_2, \hat{w}, f, m) = \frac{\hat{w}}{pe} \int_{-\frac{p}{\hat{w}}}^{\frac{p}{\hat{w}}} (n \bullet y_{(2)})(t, m) e^{-j(\hat{w}t+f)} dt \dots\dots\dots(3.39)$$

$$N_2(Y_0, e, Y_2, \hat{w}, f, m) = \frac{\hat{w}}{pY_2} \int_{-\frac{p}{\hat{w}}}^{\frac{p}{\hat{w}}} (n \bullet y_{(2)})(t, m) e^{-j2\hat{w}t} dt \dots\dots\dots(3.40)$$

Définition de la bifurcation à doublement de période prédite :

La bifurcation à doublement de période prédite (DPP) est dite se produire à la valeur du paramètre critique $m = m_c$ si (3.35)-(3.37) ont une solution

$$\hat{w}(m_c) = \frac{1}{2} w^{nom}(m_c), Y_0(m_c) = Y_0^{nom}(m_c), e(m_c) = 0, Y_2(m_c) = Y_1^{nom}(m_c), f(m_c), m = m_c$$

Pour mener à bien le calcul du DPP discuté auparavant, nous considérant

$y_{(2)}(t)$ à partir de (3.34) comme entrée au bloc non linéaire du système « S » et considérant qu'il ya dépendance par rapport à e de la sortie.

La notation suivante est utile pour l'analyse suivante :

$$\begin{aligned} y_{(2)}(t) &= y_{(2)}^0(t) + e \cos(\hat{w}t + f) \\ &= [Y_0 + Y_2 \cos 2\hat{w}t] + e(\hat{w}t + f) \dots\dots\dots(3.41) \end{aligned}$$

Considérant le gain de la BH du second ordre (3.39). Par (3.41) on a pour $e = 0$

$y_2(t)$ Est périodique ; donc la fonction $(n \bullet y_{(2)})(t)$ est aussi périodique. Maintenant pour $e = 0$ l'intégral qui apparait dans (42) disparaît pour toutes les valeurs des paramètres : \hat{w}, Y_0, Y_2 et f . Pour s'assurer que N1 donné dans (3.39) est finie, nous supposons que

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

l'intégral mentionner est $O(e)$ pour de petit valeurs de e . Avec cette hypothèse nous pouvons prendre la limite quand $e \rightarrow 0$ l'ensemble complet des équations algébriques

(3.35)-(3.40).

Notons que pour $e \rightarrow 0$ la phase Φ peut être égale à zéros dans (3.35) et (3.37).

Nous avons alors les équations prédisant le doublement de période :

$$Y_0[1 + G(0, \mathbf{m})N_0(Y_0, 0, Y_2, \hat{\omega}, 0, \mathbf{m})] = 0 \dots\dots\dots(3.42)$$

$$1 + G(j\hat{\omega}, \mathbf{m})N_1(Y_0, 0; Y_2, \hat{\omega}, f, \mathbf{m}) = 0 \dots\dots\dots(3.43)$$

$$1 + G(j2\hat{\omega}, \mathbf{m})N_2(Y_0, 0, Y_2, \hat{\omega}, 0, \mathbf{m}) = 0 \dots\dots\dots(3.44)$$

Avec :

$$N_0(Y_0, 0, Y_2, \hat{\omega}, 0, \mathbf{m}) = \frac{\hat{\omega}}{2pY_0} \int_{-\frac{p}{\hat{\omega}}}^{\frac{p}{\hat{\omega}}} (n \bullet y_{(2)})(t, \mathbf{m}) dt \dots\dots\dots(3.45)$$

$$N_1(Y_0, 0, Y_2, \hat{\omega}, f, \mathbf{m}) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\hat{\omega}}{pe} \int_{-\frac{p}{\hat{\omega}}}^{\frac{p}{\hat{\omega}}} (n \bullet y_{(2)})(t, \mathbf{m}) e^{-j(\hat{\omega}t+f)} dt \dots\dots\dots(3.46)$$

$$N_2(Y_0, 0, Y_2, \hat{\omega}, 0, \mathbf{m}) = \frac{\hat{\omega}}{pY_2} \int_{-\frac{p}{\hat{\omega}}}^{\frac{p}{\hat{\omega}}} (n \bullet y_{(2)})(t, \mathbf{m}) e^{-j2\hat{\omega}t} dt \dots\dots\dots(3.47)$$

Supposons que les équations prédisant un doublement de période (3.42)-(3.44) et

(3.45)-(3.47) ont une solution $((\hat{\omega}, Y_0, Y_2, f))$ pour un une valeur critique du paramètre

de bifurcation μ_c . Pour déterminer quand la bifurcation à doublement de période se produit, nous appliquons la définition concernant la bifurcation à doublement de période prédite.

Nous comparons donc la solution qui apparait comme doublement de période avec la solution nominale $y_{(1)}^{nom}(t, \mathbf{m})$ qui est donné dans (3.31).

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Nous obtenons cette comparaison en inspectant partie par partie l'ensemble des équations satisfaisant les paramètres de chaque CLP. Plus spécifiquement nous comparons (3.15), (3.16), (3.14) et (3.15) avec (3.42)-(3.47).

Cette comparaison montre que pour n'importe quel valeur de μ paramètre de bifurcation du système, \hat{w} , Y_0 et Y_2 satisfaisant les équations prédisant un doublement de période (3.42)-(3.47) coïncide respectivement avec, $\frac{1}{2}W^{nom}$, Y_0^{nom} , et Y_1^{nom} . Ces paramètres sont associés avec le CLP nominal $y_{(1)}^{nom}(t, m)$. Donc puisque les la solution supposé (3.42)-(3.47) inclut la valeur critique μ_c du paramètre de bifurcation, nous avons par la définition de la bifurcation à doublement de période prédite et la comparaison qui précède avec la solution nominale qui prédit une bifurcation à doublement de période se produisant pour le système « S ».

Nous terminons cette discussion de l'approche BH pour la prédiction d'une bifurcation à doublement de période en indiquant deux stages pour un calcul systématique du DPP.

Le premier stage de la procédure consiste à dans la résolution de l'équation réel (3.42) avec L'équation complexe (3.44) pour, $\hat{w}(m)$, $Y_0(m)$ et $Y_2(m)$, tous associé avec le CLP nominal. Dans le deuxième stage, on substitue ces paramètres dans (3.43) (équation complexe) qui est alors résolue pour la valeur critique du paramètre de bifurcation μ_c et pour la phase $f(m_c)$ du CLP à doublement de période.

Remarquons que dans le cas d'un système « S » avec une non linéarité statique ; ces deux procédures de résolutions sont simplifier ; le détail du calcul sont données en appendice-A-

3.4.2/ Analyse de la stabilité d'un doublement de période :

Le principal objectif de cette section est d'obtenir un test de stabilité pour le cycle limite prédit à doublement de période.

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

3.4.2.1/ Test de stabilité basique d'un DPP :

Dans le contexte de la BH , le cycle limite doublement de période prédit peut être stable respectivement instable si le cycle limite prédit est stable respectivement instable pour des valeurs du paramètre μ ou le nominal CLP à doublement de périodes n'existe pas.

Il apparaît donc qu'une approche raisonnable pour la détermination de la stabilité du DPP est de pouvoir évaluer le signe dans (3.28) pour le CLP nominal pour n'importe quel valeur de μ qui est la plus proche de la valeur critique du paramètre μ_c pour lequel le CLP à doublement de période n'existe pas.

Le résultat peut être pris comme étant une bifurcation à doublement de période sous critique ou super critique.

On énonce maintenant le test de stabilité, basé toujours sur le critère de Loeb :

$$\mathbf{I}(m) = \text{Im} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial Y_1} [G(jw)N_1(Y_0(Y_1, w), Y_1, w)] \right] \right\} \times \left[\frac{\partial}{\partial w} [G(jw)N_1(Y_0(Y_1, w), Y_1, w)] \right] \dots\dots\dots(3.48)$$

Posons maintenant le test de stabilité qui emploie la quantité μ_2 (cas générique)

Test de stabilité du DPP :

Soit μ_c le paramètre de bifurcation critique et soit μ_2 donné.

Alors le DPP est prédit super critique (et l'orbite à doublement de période est prédite stable)

Si :

$$\mathbf{I}(m_c - m_2x) \mathbf{f} 0 \dots\dots\dots(3.49)$$

Si :

$$\mathbf{I}(m_c - m_2x) \mathbf{p} 0 \dots\dots\dots(3.50)$$

Alors le DPP est prédit sous critique (et l'orbite à doublement de période est prédite instable). Ou x est un réel positif suffisamment petit.

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Remarque :

Pour un système « S » présentant une non linéarité statique , le critère décrit précédemment est simplement $\mathbf{I}(m)$ comme décrit dans (3.29).

3.4.2.2/ Evaluation de m_2 :

Nous exposons maintenant comment évaluer m_2

Une approche pour déterminer m_2 est de tenter de résoudre (3.35)-(3.37) pour la fonction $m(e)$ Pour tout e petit.

Considérant le CLP nominal

$$y_{(2)}^0(t) = Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2w^0 t \dots\dots\dots(3.51)$$

Obtenue à partir des équations (3.42) et (3.44) solution du doublement de période est cela pour $m = m_c$ c'est-à-dire : $Y_0^0 = Y_0(m_c)$, $Y_2^0 = Y_2(m_c)$ et $w^0 = \hat{w}(m_c)$

Dans le cas générique cette bifurcation à doublement de période assure l'existence CLP à doublement de période de la forme (3.34) pour de petite valeur de e . Pour chaque valeur de e

Les autres quantités Y_0, Y_2, \hat{w} , et f du signal (37) et du paramètre de bifurcation μ sont calculés en utilisant (3.35) et (3.37). Donc résoudre (3.35) et (3.37) résulte les quantités Y_0, Y_2, \hat{w}, f et m en terme de e .

Une approche analytique pour déterminer m_2 est maintenant donnée :

La première étape dans cette approche est de développer (3.35)-(3.37) dans un voisinage de la condition nominale $m = m_c, Y_0 = Y_0^0, e = 0, Y_2 = Y_2^0, w = w^0$ et $f = f^0$

Nous procédant à écrire les quantités qui vont résoudre (3.35) et (3.37) comme :

$$Y_0 = Y_0^0 + dY_0, \quad Y_2 = Y_2^0 + dY_2, \quad f_0 = f_0^0 + df, \quad w_0 = w_0^0 + dw, \quad m = m_c + dm$$

Ou : dY_0, dY_2, df, dw, dm peuvent être aperçus comme des quantités différentielles.

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Nous développons (3.35)-(3.37), autour de la valeur nominale en prenant (3.42)-(3.44) en compte, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(0)N_0}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial G(0)N_0}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial G(0)N_0}{\partial w} dw + \frac{\partial G(0)N_0}{\partial f} df + \frac{\partial G(0)N_0}{\partial m} dm = \\ - \frac{\partial G(0)N_0}{\partial e} e - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(0)N_0}{\partial e^2} e^2 \end{aligned} \dots\dots\dots(3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(jw)N_1}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial G(jw)N_1}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial G(jw)N_1}{\partial w} dw + \frac{\partial G(jw)N_1}{\partial f} df + \frac{\partial G(jw)N_1}{\partial m} dm = \\ - \frac{\partial G(jw)N_1}{\partial e} e - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(jw)N_1}{\partial e^2} e^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(j2w)N_2}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial G(j2w)N_2}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial G(j2w)N_2}{\partial w} dw + \frac{\partial G(j2w)N_2}{\partial f} df + \frac{\partial G(j2w)N_2}{\partial m} dm = \\ - \frac{\partial G(j2w)N_2}{\partial e} e - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(j2w)N_2}{\partial e^2} e^2 \end{aligned} \dots\dots\dots (3.54)$$

Ici toutes les dérivées partielles sont évalué à $m = m_c$ est les fonctions N_0 , N_1 et N_2 sont donnés par (3.38)-(3.40). Les équations (3.52)-(3.54) sont équivalentes à un système à cinq équations réelles algébrique linéaire pour cinq inconnus qui sont : dY_0 , dY_2 , df , dw , dm

La résolution de ce système au voisinage de $m = m_c$ nous donne μ en fonction de e comme dans la forme désirée (3.33). Ceci retourne le résultat de μ_2 .

Nous procédant à la résolution de ce système d'équations pour μ_2 dans le cas d'une non linéarité statique.

Développons en e la sortie du bloc non linéaire autour du CLP d'une fréquence $2w^0$, nous avons :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$\begin{aligned}
 n[Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q + e \cos(q + f^0)] = & n(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) + \\
 & en'(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \cos(q + f^0) + \\
 & \frac{1}{2}e^2 n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \cos^2(q + f^0) + \dots\dots\dots(3.55) \\
 & \frac{1}{6}e^3 n'''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \cos^3(q + f^0) + O(e^3)
 \end{aligned}$$

Ou : $q = \omega t$, $n'(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q)$, $n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q)$, et $n'''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q)$

Sont respectivement les dérivées première, seconde et troisième dérivé du bloc non linéaire n
 Evaluer autour du CLP nominal $y_{(2)}^0(t)$.

Substituons (3.55) dans les intégrales (3.38)-(3.40) et calculons les dérivées partielles du premier ordre de N_0 , N_1 et N_2 en respectant e à $m = m_c$, nous avons :

$$\frac{\partial N_0}{\partial e} = \frac{1}{2pY_0^0} \int_{-p}^p n'(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \times \cos(q + f^0) dq \dots\dots\dots(3.56)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial e} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \times \cos^2(q + f^0) e^{-j(q+f^0)} dq \dots\dots\dots (3.57)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial e} = \frac{1}{pY_2^0} \int_{-p}^p n'''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \times \cos(q + f^0) e^{-j2q} dq \dots\dots\dots(3.58)$$

D'une façon similaire les dérivées partielles secondes de N_0 , N_1 et N_2 en fonction de e à $m = m_c$ sont donnés par :

$$\frac{\partial^2 N_0}{\partial e^2} = \frac{1}{2pY_0^0} \int_{-p}^p n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \times \cos^2(q + f^0) dq \dots\dots\dots (3.59)$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial e^2} = \frac{1}{3p} \int_{-p}^p n'''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \times \cos^3(q + f^0) e^{-j(q+f^0)} dq \dots\dots\dots (3.60)$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial e^2} = \frac{1}{pY_2^0} \int_{-p}^p n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) \times \cos^2(q + f^0) e^{-j2q} dq \dots\dots\dots(3.61)$$

Maintenant, il est clair que puisque le CLP nominal est périodique dans le temps avec comme

période $\frac{P}{w^0}$, ou $q = w^0 t$

Aussi, il est clair que : $n(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q)$, $n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q)$, et $n'''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q)$

Sont périodique dans θ avec période π .

Nous développons les séries de Fourier de ces fonctions périodiques comme suite :

$$n'(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a'_l(Y_0^0, Y_2^0) e^{j2lq} \dots\dots\dots(3.62)$$

$$n''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a''_l(Y_0^0, Y_2^0) e^{j2lq} \dots\dots\dots(3.63)$$

$$n'''(Y_0^0 + Y_2^0 \cos 2q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a'''_l(Y_0^0, Y_2^0) e^{j2lq} \dots\dots\dots(3.64)$$

Substituons (3.62)-(3.64) dans (3.56)-(3.58) et (3.59)-(3.61) ca nous donnent :

$$\frac{\partial N_0}{\partial e} = 0 \dots\dots\dots(3.65)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial e} = 0 \dots\dots\dots (3.66)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial e} = 0 \dots\dots\dots(.3.67)$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$\frac{\partial^2 N_0}{\partial e^2} = \frac{1}{4Y_0^0} (a_{-1}'' e^{j2f^0} + 2a_0'' + a_1'' e^{-j2f^0}) \dots\dots\dots(3.68)$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial e^2} = \frac{1}{12} (a_{-1}''' e^{j2f_0} + 3a_0''' + 3a_1''' e^{-j2f_0} + a_2''' e^{-4jf_0} \dots\dots\dots(3.69)$$

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial e^2} = \frac{1}{2Y_2^0} (a_0'' e^{j2f} + 2a_1'' + a_2'' e^{-j2f^0}) \dots\dots\dots(3.70)$$

On note que par (3.65)-(3.67) les termes en ε disparaissent des équations (3.52)-(3.54).

Les équations (3.68)-(3.70) peuvent être utilisés pour donné μ_2 de (3.33).

Pour simplifier ces expressions, nous introduisant la notation matricielle suivante :

$$A = \begin{bmatrix} G(0) \frac{\partial N_0}{\partial Y_0} & G(0) \frac{\partial N_0}{\partial Y_2} & 0 & 0 \\ \text{Re} \left[G(jw) \frac{\partial N_1}{\partial Y_0} \right] & \text{Re} \left[G(jw) \frac{\partial N_1}{\partial Y_2} \right] & \text{Re} \left[N_1 \frac{\partial G(jw)}{\partial w} \right] & \text{Re} \left[G(jw) \frac{\partial N_1}{\partial f} \right] \\ \text{Im} \left[G(jw) \frac{\partial N_1}{\partial Y_0} \right] & \text{Im} \left[G(jw) \frac{\partial N_1}{\partial Y_2} \right] & \text{Im} \left[N_1 \frac{\partial G(jw)}{\partial w} \right] & \text{Im} \left[G(jw) \frac{\partial N_1}{\partial f} \right] \\ \text{Re} \left[G(j2w) \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} \right] & \text{Re} \left[G(j2w) \frac{\partial N_2}{\partial Y_2} \right] & \text{Re} \left[N_2 \frac{\partial G(j2w)}{\partial w} \right] & 0 \\ \text{Im} \left[G(j2w) \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} \right] & \text{Im} \left[G(j2w) \frac{\partial N_2}{\partial Y_2} \right] & \text{Im} \left[N_2 \frac{\partial G(j2w)}{\partial w} \right] & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (3.71)$$

$$b = \left[\frac{\partial G(0)N_0}{\partial m} \quad \frac{\partial \text{Re}[G(jw)N_1]}{\partial m} \quad \frac{\partial \text{Im}[G(jw)N_1]}{\partial m} \quad \frac{\partial \text{Re}[G(j2w)N_2]}{\partial m} \quad \frac{\partial \text{Im}[G(j2w)N_2]}{\partial m} \right]^T$$

...

(3.72)

$$c = \left[G(0) \frac{\partial^2 N_0}{\partial e^2} \quad \text{Re} \left[G(jw) \frac{\partial^2 N_1}{\partial e^2} \right] \quad \text{Im} \left[G(jw) \frac{\partial^2 N_1}{\partial e^2} \right] \quad \text{Re} \left[G(jw) \frac{\partial^2 N_2}{\partial e^2} \right] \quad \text{Im} \left[G(jw) \frac{\partial^2 N_2}{\partial e^2} \right] \right]^T$$

(3.73)

Le système linéaire (3.52)-(3.54) se réduit alors comme :

$$[A \quad b]v = -\frac{1}{2} e^2 c \dots\dots\dots (3.74)$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Où

$v = [dY_0 \ dY_2 \ dw \ df \ dm]$ est le vecteur des inconnus. Résoudre (3.74) et en

utilisant le fait que $dm = m_2 e^2 + O(e^2)$

Nous trouvons que m_2 est prédis pour

$$m_2 = -\frac{1}{2} \frac{\det[A \ c]}{\det[A \ b]} \dots\dots\dots(3.75)$$

4/ Application :

4.1/ Présentation d'un système à secousse (jerk system) :[41][42][46][52][37][29]

Le terme « jerk » ou secousse vient du fait que dans les systèmes mécaniques, la variable déplacement est représenté par x , la vitesse est représenter par \dot{x} , l'accélération est représenter par \ddot{x} , la quantité \dddot{x} est appelée secousse « jerk »(Schot, 1978). L'étude de ces systèmes est l'objet d'intenses recherches ou en peut citer les travaux de « Sprott ».

Un jerk system à une équation de la forme : $\dddot{x} = J (\ddot{x}, \dot{x}, x)$

Les systèmes dynamiques à secousse, on les retrouve aussi dans la littérature sous le terme de systèmes minimaux, décrivent plusieurs phénomènes en physique, en ingénierie, tel que les circuits électriques, oscillateur mécanique, laser, ... etc.

Dans beaucoup de situation pratique, le chaos est un phénomène indésirable, qui peut générer des situations dangereuses. Donc d'un point de vue pratique, on veut convertir une solution chaotique en une solution périodique ou à un point stationnaires.

Et donc c'est l'intérêt pratique comme l'implémentation électronique d'un circuit comme, les système de Chua, Rossler, genesisio-tesi, qui à partir d'une forme d'un système à secousse

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

peut être directement réaliser à partir de simple composants comme des résistances, des capacités, des diodes et des amplificateurs opérationnels .

L'objectif de ce chapitre est de faire une analyse d'un système à secousse afin de déceler ces différents comportements et cela on se basant les méthodes vue précédemment. Les simulations seront effectuées sous l'environnement matlab.

4.2/ Applications : approche BH pour le contrôle (conditions analytiques) :

Considérant le système à secousse (Genesio-Tesi sytem)suivant :[46]

$$y''' + ay'' + 1.2y' + y - y^2 = 0$$

Sa forme de Lur'e est la suivante :

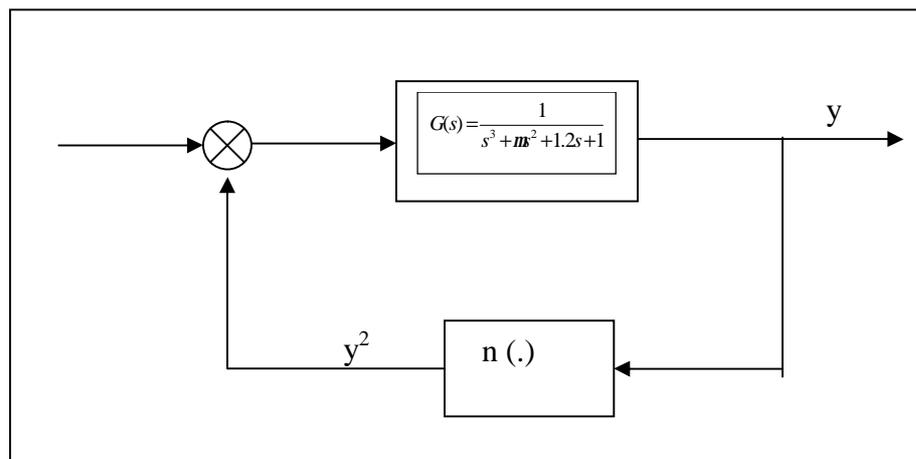


Figure-3.2-Représentation du système de Lur'e « S »

Donc le système est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + 1.2s + 1}$$

$$n(y) = -y^2$$

Avec $m = -a$

En appliquant (3.9), on a l'équation suivante :

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$Y_0 - Y_0^2 = 0$$

Le système « S » admet alors deux points d'équilibres :Le point $Y_0=1$ qui est instable pour $\mu < 0$ et le point d'équilibre $Y_0=0$ qui est stable pour toutes les valeurs de $\mu < -5/6$ mais admet deux valeurs propres avec une partie réel positive pour $m \in (-\frac{5}{6}, 0)$.

On peut alors dire que le système subit une bifurcation de Hopf pour la valeur de $\mu = -5/6$.La prédiction du cycle limite se fait en se basant sur le suivant :

Supposons que la solution est de la forme $y_{(1)}(t) = Y_0 + Y_1 \cos \omega t$ comme donnée dans (3.10).Calculons alors les fonctions de descriptions du système en se basant sur les équations (3.13) et (3.14)

Nous obtenons alors :

$$N_0 = N_0(Y_0, Y_1) = -Y_0 - \frac{Y_1^2}{Y_0} \dots\dots\dots (3.76)$$

$$N_1 = N_1(Y_0, Y_1) = -Y_0 \dots\dots\dots (3.77)$$

Notons que N_0 et N_1 ne dépendent pas de ω (non linéarité statique).

Substituons (3.76) et (3.77) et $G(j\omega)$ dans les équations (3.15) et (3.16) et en nous avons :

$$Y_0(1 - Y_0 - \frac{Y_1^2}{2Y_0}) = 0 \dots\dots\dots(3.78)$$

$$1 - \frac{2}{1 + mw^2 + jw(1.2 - w^2)} Y_0 = 0 \dots\dots\dots (3.79)$$

La résolution de (3.78) et (3.79) nous donnent une famille de paramètre dépendant de μ qui sont données par :

$$Y_0(m) = \frac{1}{2}(1 + 1.2m) \dots\dots\dots(3.80)$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$Y_1(m) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - (1.2m)^2]} \dots\dots\dots(3.81)$$

$$w(m) = \sqrt{1.2} \dots\dots\dots(3.82)$$

Observant que pour $\mu = -5/6$, nous avons $Y_0=0$ et $Y_1=0$ et $w = \sqrt{1.2}$ impliquons une bifurcation de Hopf.

Nous calculons maintenant le doublement de période prédit (DPP).

En se basant sur la définition du DDP, on peut localiser le DPP à partir des Informations contenus dans la famille du CLP obtenus auparavant.

Nous prenons alors Y_0, Y_2 et \hat{w} comme $Y_0(m), Y_1(m)$ et $w(m)$ donné dans (3.80)-(3.82)

L'objectif est alors de déterminer la valeur critique du paramètre μ_c

Puisque la non linéarité est statique on invoque le résultat de l'annexe :

En appliquant (A.2), nous avons :

$$a'_0(Y_0, Y_2) = -2Y_0 \quad \text{et} \quad a'_1(Y_0, Y_2) = -Y_2$$

A partir de (A.5) on a :

$$\left| -\frac{3}{4}1.2m + j\frac{3.6\sqrt{1.2}}{8} \right| = \sqrt{\frac{1 - (1.2m)^2}{2}}$$

On retrouve alors que la bifurcation à doublement de période prédite (DPP) se produit à $m_c = -0.41$.

Pour déterminer si la bifurcation à doublement de période est sous critique ou super critique, nous évaluons le coefficients, m_2 à partir de (3.75)

nous calculons $\mathbf{I}(m)$ en utilisant (3.48) puis on applique le test (3.49)

on a les résultats suivants :

$$m_2 = 1.51$$

$$\mathbf{I}(m) = -2\sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - (1.2m)^2}}{m(1 + 1.2m)^2} \quad \text{Donc le DPP est stable.}$$

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Afin de compléter cette analyse, nous testons la stabilité du cycle limite (3.80)-(3.82) pour $m \in (-5/6, -0.41)$; en se basant sur (3.30) ;

Pour $m = -0.5$ on a $r = 2.123$; on conclut que le cycle est stable ; de la même manière on pourra dire que la famille est stable.

Notons enfin que Φ à été pris pour une valeur égale à zéros

Nous passons maintenant aux simulations numériques sous l'environnement matlab pour pouvoir comparer les résultats obtenus :

Le diagramme de bifurcation du système est donné comme suite :

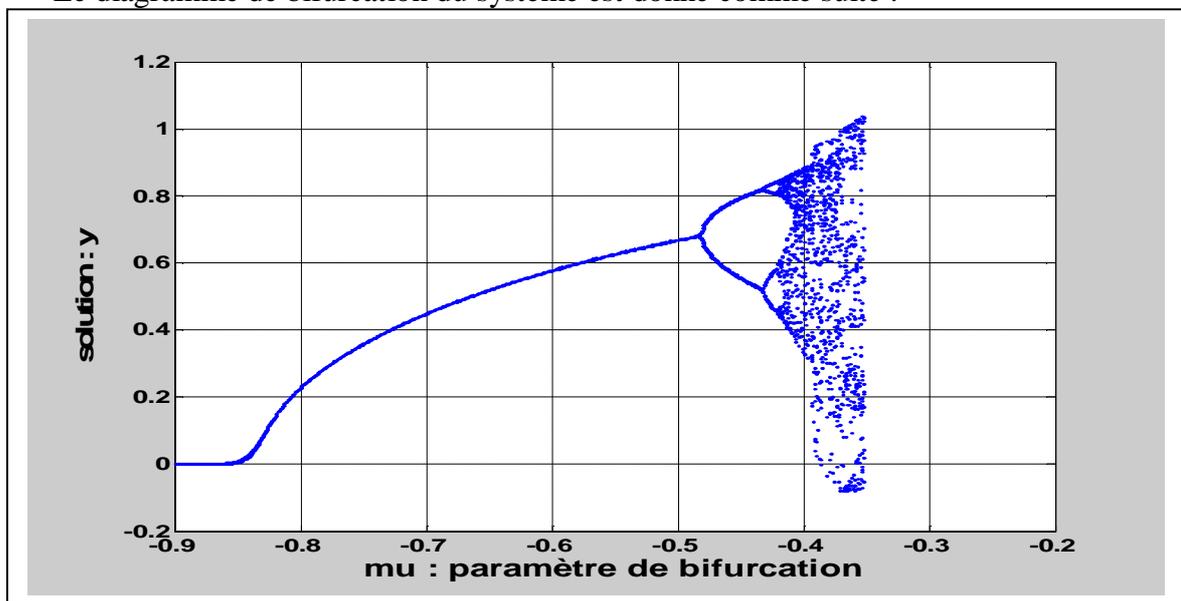


Figure-3.3- Diagramme de bifurcation du système à secousse

On peut remarquer à partir de ce diagramme que les résultats obtenus précédemment (conditions analytiques) sont qualitativement acceptable, car nous pouvons constater à partir de ce diagramme que le cycle limite nominal existe pour une valeur du paramètre comprise entre $(-5/6, -0.48)$; pour une valeur du paramètre égale à -0.48 le système subit une bifurcation à doublement de période. Nous pouvons aussi voir que le système entre dans un régime chaotique à partir de $\mu = -0.4$.

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

Nous validons ce résultat en se basant sur le test des exposants de Lyapunov donné dans la figure-3.4-

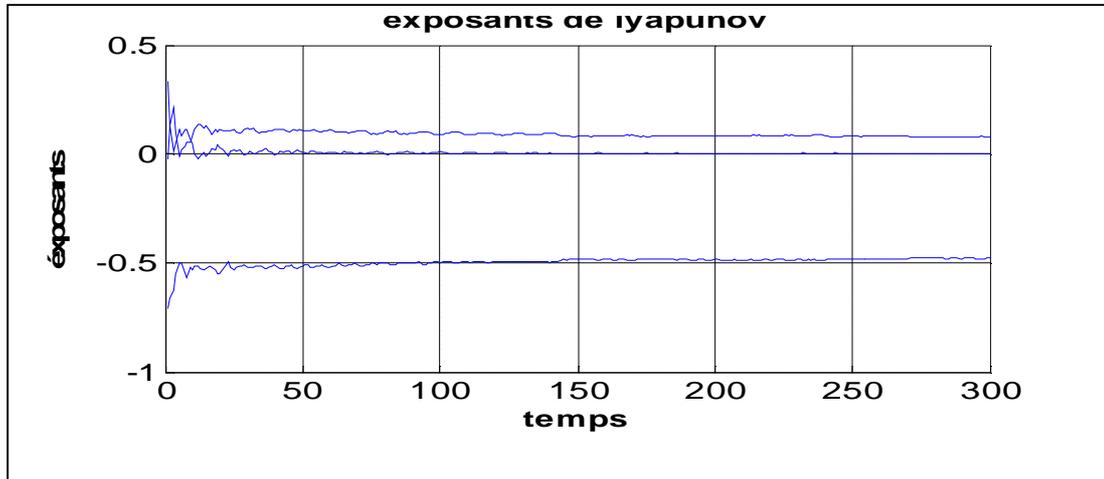


Figure-3.4-Exposants de Lyapunov

On a les trois exposants suivants :

$$I_1 = 0.07, \quad I_2 = 0 \quad \text{et} \quad I_3 = -0.48$$

D'où on est en présence d'un régime chaotique.

4.3/ Application : approche numérique pour la BH :

Nous allons maintenant essayer de reprendre la méthode de la BH d'une manière numérique et cela en se basant sur son aspect implémentable basée sur l'algorithme de Newton-Raphson afin de montrer comment cette méthode peut être appliquée dans le cas général, en même temps pour la comparer avec une approche temporelle basée sur l'algorithme de Runge-Kutta . Et cela pour des valeurs particulières du paramètre de bifurcation.

Nous rappelant que la recherche de la solution à partir de la BH consiste à supposée une solution sous la forme d'une série de Fourier (choix établie a partir de la nature de la solution supposée) et de remplacer celle- ci dans l'équation régissant le système, ce qui va

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

générer un système algébrique non linéaire qui grâce à l'algorithme de Newton-Raphson va être résolu.

Nous choisirons dans notre application un ordre de troncature égale à trois puis à cinq (voir annexe-B-)

Nous commençons par tester pour une valeur du paramètre $\mu_c = -0.833$ afin de détecter une bifurcation de Hopf, les résultats des simulations qui sont effectués à partir de matlab sont données comme suite :

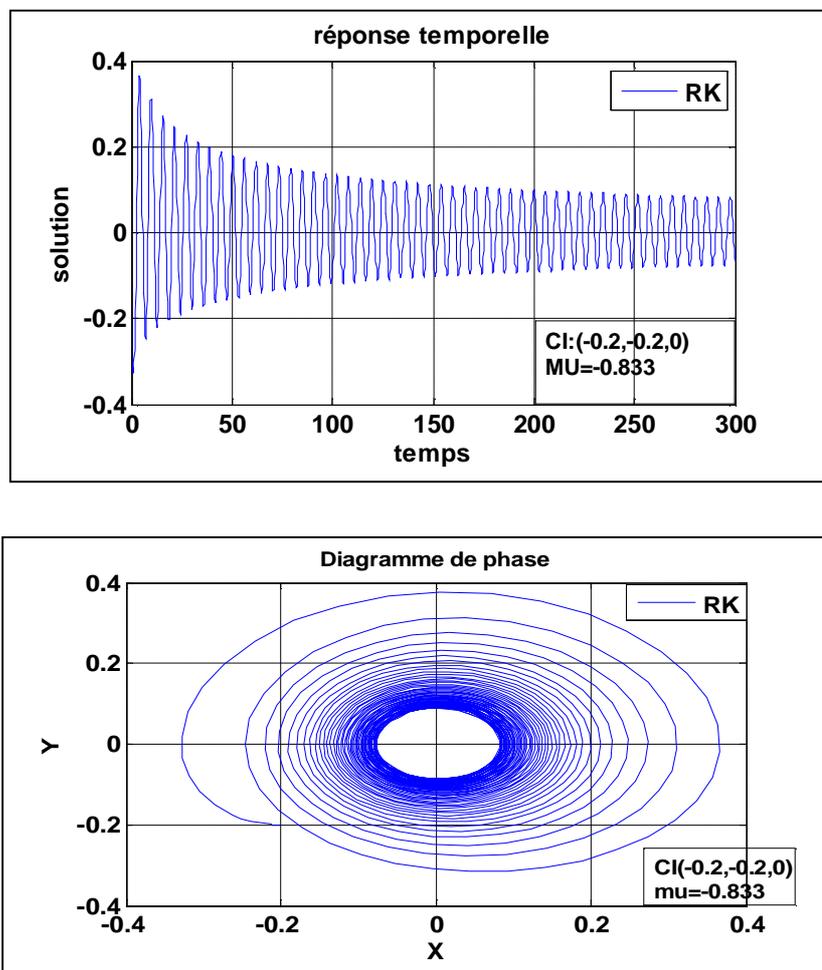


Figure-3.5- Réponse temporelle et diagramme de phase du système basée sur

RK4

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

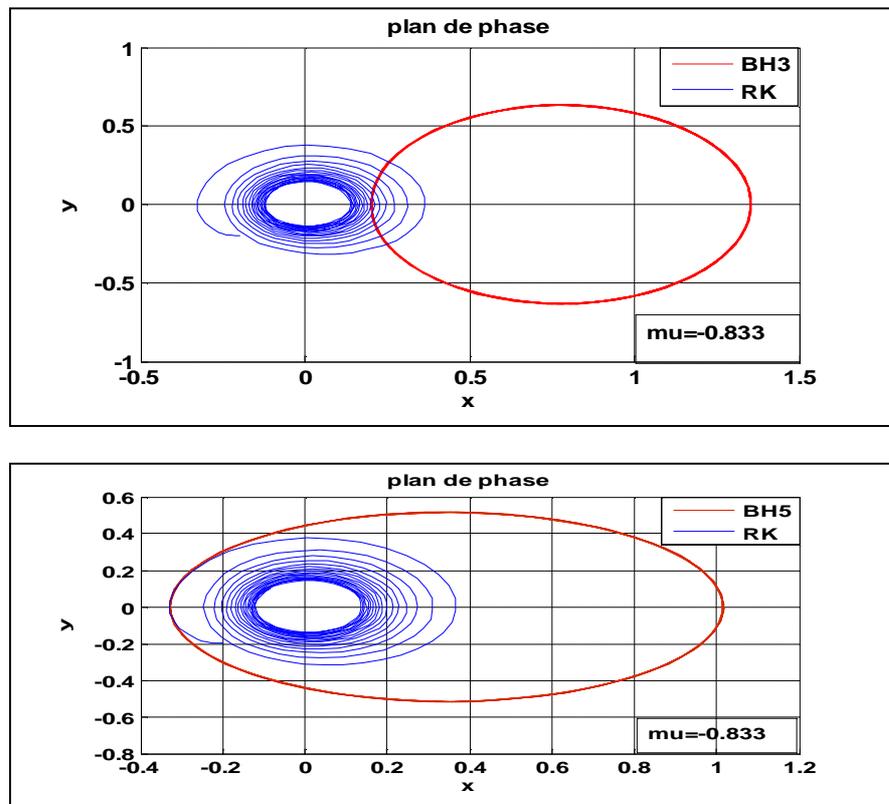


Figure-3.6- Comparaison entre une solution RK et BH d'ordre 3 et 5

$$\text{BH3 : } y=0.778+0.578*\sin(1.0954*t)$$

$$\text{BH5 : } y=0.3445+0.5804*\cos(4*0.1921*t)+0.3388*\sin(4*0.1921*t)$$

Les solutions ont été générées à partir des systèmes et des conditions initiales définies dans l'annexe-B-

On remarque d'après les résultats obtenus diagramme des phases et réponses temporelles que la bifurcation de Hopf a été détectée à partir des deux méthodes, harmonique d'ordre trois et cinq et l'intégration temporelle par Runge- Kutta, aussi que la BH5 est plus précise que la BH3, donc en augmentant l'ordre de troncature on s'approche au mieux de la solution exacte.

Nous allons maintenant tester les deux approches d'analyses dans le cas d'une bifurcation à doublement de période et cela pour un paramètre de bifurcation $\mu_c=-0.48$, les résultats des simulations effectués sous matlab sont donnés comme suite :

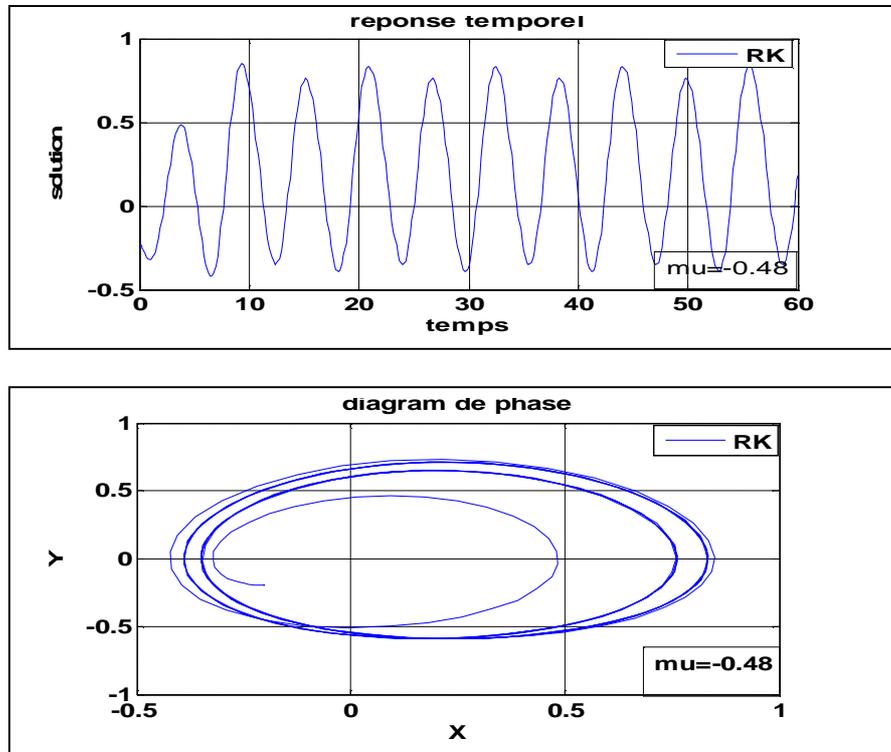


Figure-3.7- Réponse temporelle et diagramme de phase du système basée sur RK4

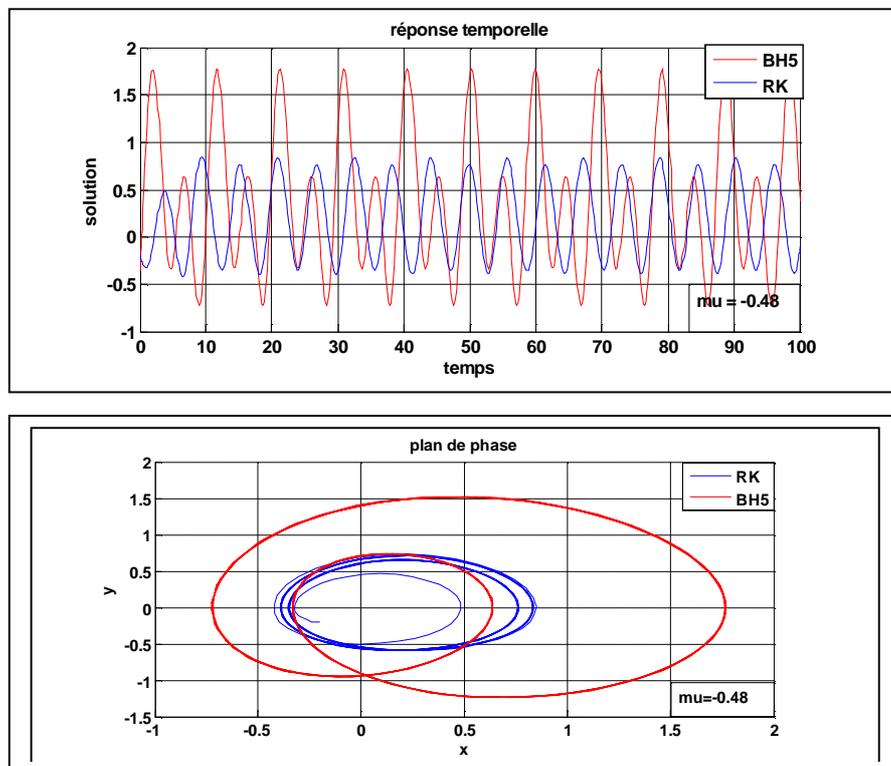


Figure-3.8- Comparaison entre les plan de phase et réponse temporelle des RK et BH5

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

$$y=0.3867+0.6036*\sin(0.5*1.3038*t)-0.7054*\cos(1.3038*t)+0.4566*\sin(1.3038*t)-0.0125*\cos(1.5*1.3038*t)+0.0335*\sin(1.5*1.3038*t)-0.0154*\cos(2*1.3038*t)+0.0195*\sin(2*1.3038*t)-0.0009*\cos(2.5*1.3038*t)+0.0005*\sin(2.5*1.3038*t);$$

On remarque d'après ces simulations que les résultats obtenus sont qualitativement bon car, ont a pu détecter la bifurcation à doublement de période pour le paramètre de contrôle

$$\mu = -0.48.$$

Aussi on peut dire qu'une BH5 est plus précise qu'une BH3 où on n'a pas pu obtenir le doublement de période voulu (imprécision).

5/ Conclusion :

Nous avons présenter dans ce chapitre une approche fréquentielle basée sur une méthode analytique dite la Balance Harmonique, celle-ci peut avoir deux aspects, un aspect pour l'analyse est un autre aspect pour le contrôle, ou on peut développer de simple condition pour pouvoir prédire les points d'équilibres, les bifurcations de type cycles limites et les bifurcations de type à doublement de période route vers le chaos, ainsi que leurs stabilités ; aussi comment cette méthode peut être une alternative pour l'intégration temporelle.

L'application de la méthode de la BH à un système de secousse nous à permis de tester la validité de cette approche pour détecter les points d'équilibres ,des bifurcations tel que la bifurcation de Hopf et la bifurcation à doublement de période signe révélateur d'une route vers le chaos ; nous avons pu constater que la BH sous ces deux formes que ca soit par de simples condition analytiques ou par approches numériques génèrent des solution analytiques qui sont qualitativement correcte, et cela par comparaison avec une méthode d'intégration temporelle, cependant l'ordre de troncature et le choix des conditions initiales pour l'algorithme de Newton-Raphson reste un handicap pour la précision de la méthode de la BH,

Chapitre 3 :Analyse fréquentielle d'une bifurcation à doublement de période

pour une BH à résolution numérique, alors qu'une BH avec condition mathématique souffre de l'hypothèse du filtre.

Le chapitre suivant va être consacré au contrôle du chaos via deux approches une temporelles et une autre fréquentielles.

1/ Introduction : [3,4,23]

Avec l'avènement du concept du chaos dans la littérature scientifique, le comportement chaotique était vu comme un phénomène qui intéresser seulement les mathématiciens, plus tard on découvrit que la dynamique chaos est présente dans n'importe quel champs scientifique ou technique, ou en cite les systèmes mécaniques, communication, laser, chimie biologie, économie et médecine ...etc., est qui peut être de nature utile ou dangereuse. [1,3,4] Avec ce fait, la question du contrôle est devenu un problème centrale, est donc plusieurs travaux concernant cet aspects, ont commencé à voir le jour des le début des années 1990, avec notamment la méthode de OGY (méthode de linéarisation de la carte de Poincaré) et la méthode de Pyragas (méthode de bouclage à délai de temps) ; ainsi selon la classe de contrôle du chaos choisit, plusieurs techniques ont été adaptés et développés selon le besoin. [3, 4,23]

Nous abordons dans ce chapitre le problème de suppression du chaos à partir d'une approche fréquentielle, en nous basant sur l'analyse par la méthode de la balance harmonique faite précédemment et qui permet à travers son utilisation de synthétiser un contrôleur qui va permettre de « retarder » la bifurcation à doublement de période « delay », et donc un contrôle du chaos ; cela tout en maintenant les dynamiques du système (points d'équilibres et les cycles limites). Cependant nous abordons aussi les techniques de contrôle linéaire est non linéaires classiques, dans l'objectif de montrer comment le chaos peut-il être contrôler à partir d'une approche temporel, cela se fera à partir du contrôle des point d'équilibres ; ce type de contrôle du chaos est souvent important car il touche à la suppression du bruit et des harmoniques dans plusieurs construction, élimination des harmoniques dans les systèmes de communication, dispositifs électroniques...etc. Nous terminerons ce chapitre par une application des différentes techniques de contrôle sur le système à secousse traité au chapitre-

3-

2/Contrôle des bifurcations :[11,16,17,35,46,49]

Nous allons maintenant appliquer les résultats établis lors de l'analyse et la prédiction des bifurcations de type cycle limite et doublement de période dans l'objectif et de pouvoir contrôler de tel phénomène.

L'objectif de cette étude est alors de pouvoir contrôler les bifurcations dans le sens où on peut modifier leur création (naissance) et cela en prenant en considération le paramètre μ .

En effet il est bien connu que n'importe quel bifurcation est un changement qualitative des caractéristiques dynamiques du système ainsi que ses différents comportements (périodique, quasi périodique,....chaotique).

Ainsi le contrôle désirer est le suivant « *déplacer* » le point de bifurcation qui nous intéresse en « *retardant* », *delayed* ou « *décalons* » celui-ci en prenant en compte les caractéristiques du système.

Sachant que dans le cas des systèmes chaotiques, une bifurcation à doublement de période représente une route vers le chaos ; l'objectif du control sera alors de « supprimer », « décaler » le chaos et cela en retardant la création d'une bifurcation à doublement de période ; donc on peut dire que le problème du contrôle du chaos est un problème de contrôle des bifurcations.

2.1/Formulation du problème :

Considérant le système contrôler « S^* » représenté par la figure-4.1-, ce système n'est autre que le système « S » vue dans le chapitre précédant équipé avec un contrôleur K en rétroaction.

Ce système admet l'équation suivante :

$$g * (n \bullet y + k \bullet y) + y = 0$$

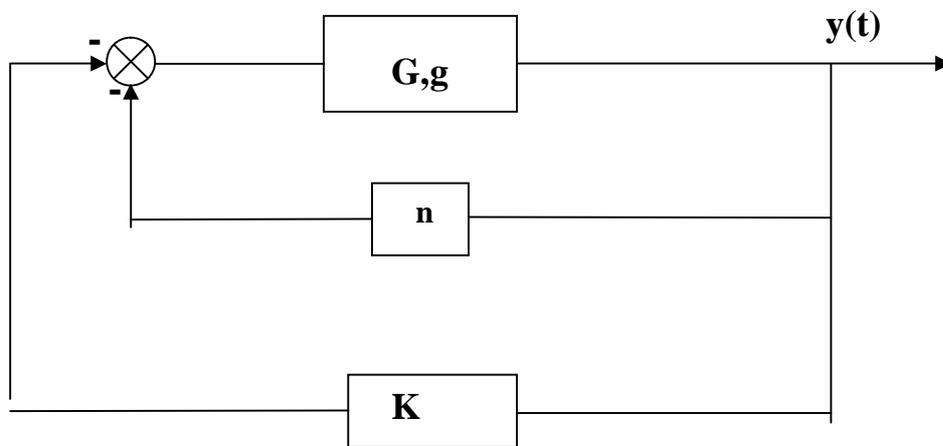


Figure-4.1- le système contrôler « S* »

Supposons maintenant le scénario suivant :

Le système non contrôler subit une bifurcation de Hopf à $m = m_H$ résultant de ce fait un cycle limite g_m qui existe pour tous les $m \in m_H$. Au point $m = m_c$ le cycle limite g_m subit une bifurcation à doublement de période supercritique.

L'objectif sera alors de synthétiser un contrôleur K tel que le système contrôler S* admet une bifurcation à doublement de période retarder est cela en prenant un m_c^* plus grand que m_c , ceci doit être fait en prenant en compte que la bifurcation de Hopf du système contrôler et du système non contrôler soit la même c'est-à-dire que pour $m_h^* = m_h$ en à la même bifurcation .

- Dans le cadre de la Balance Harmonique (BH) le problème peut être formulé comme suite :

Supposons qu'un système S admet deux valeurs critiques du paramètre de bifurcation m_h et m_c pour lesquels le système admet respectivement une bifurcation de Hopf est une

Chapitre 4 : Contrôle des systèmes chaotiques

bifurcation prédite à doublement de période (DPP). Supposons que le système S possède une famille de cycle limite prédis (CLPs) pour $m \in [m_h, m_c]$ stable dans l'intervalle $m_h \leq m \leq m_c$.

On doit déterminer un contrôleur K tel que le système commandé S^* satisfait les conditions suivantes :

- i/ S^* admet une bifurcation de Hopf pour $m_h^* = m_h$.
- ii/ S^* à un bifurcation à doublement de période prédite pour $m_c^* \in [m_c, m_c]$.
- iii/ S^* possèdent une famille de cycle limite prédis (CLPs) stable pour $m \in (m_h^*, m_c^*)$.
- iv/ S^* à les mêmes points d'équilibres que ceux de S.

2.2/Synthèse du contrôleur :

Pour préserver les points d'équilibres, on choisit une fonction de transfert de type filtre passe haut plus connue sous le nom de « washout filter » de la forme :

$$\frac{s}{s + a} \dots\dots\dots(4.1)$$

Où $a > 0$.

Pour maintenir le cycle limite prédis PLC :

$$y_{(1)}^0(t) = Y_0^0 + Y_1^0 \cos w^0 t \dots\dots\dots(4.2)$$

Nous introduisant une dynamique dans le numérateur de (4.1) tel qu'on a zéros de la forme $\pm jw^0$; en combinant cela et en s'assurant que la fonction de transfert soit propre la fonction de transfert du contrôleur peut être de la forme :

$$K(s) = r \frac{s(s^2 + b^2)}{(s + a)^3} \dots\dots\dots(4.3)$$

Où $a > 0$. et ρ sont des paramètres libres et $b = w^0$ est la fréquence du cycle limite prédis.

Pour le scénario considéré au paravent, nous prenons β est la fréquence $w(m_h)$ pour laquelle

Chapitre 4 : Contrôle des systèmes chaotiques

Le cycle limite prend naissance à partir d'une bifurcation de Hopf au point $m = m_h$

Puisque $K(s)$ préserve les points d'équilibres et les cycles limites prédits (CLPs) de la fréquence $w(m_h)$; ce contrôleur préserve aussi la bifurcation de Hopf qui se produit à

$$m = m_h.$$

Pour établir la condition (iii) qui consiste à retarder la bifurcation à doublement de période à la valeur m_c^* , utilisons la balance harmonique pour établir les conditions sur α et ρ tel que les conditions (iii) et (ii) sont satisfaites.

Pour le système S^* , en appliquons la même procédure que dans le chapitre-3-, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Y_0[1 + G(0)N_0(Y_0, Y_1, w)] &= 0 \\ 1 + G(jw)K(jw) + G(jw)N_1(Y_0, Y_1, w) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.4)-(4.5)$$

Notons par $Y_0^*(m)$, $Y_1^*(m)$ et $w^*(m)$ la solution de (4.4)-(4.5) pour $m \in (m_h, m_c^*)$ en prenant en compte que ces paramètres dépendent de α et ρ .

La détermination d'une bifurcation à doublement de période qui vérifie (ii) est donnée par la relation suivante, ou reconnaît directement la forme donnée au chapitre précédent :

$$1 + G(j\frac{1}{2}w^*(m_c^*))K(j\frac{1}{2}w^*(m_c^*)) + G(j\frac{1}{2}w^*(m_c^*))N_1(Y_0^*(m_c^*), 0, Y_1^*(m_c^*), \frac{1}{2}w^*(m_c^*), f^*) = 0 \quad \dots(4.6)$$

Nous avons donc imposé que la valeur du paramètre critique à la bifurcation à doublement de période prédite pour le système contrôlé est $m = m_c^*$.

L'équation (4.6) est une équation complexe à trois variables α, ρ et Φ^* .

Remarquons que dans le cas d'une non linéarité statique l'équation (4.6) est remplacé par (B.5) de l'annexe et cela en remplaçant G^{-1} par $G^{-1}+K$.

3/ Contrôle linéaire est non linéaire du chaos :[39,40]

3.1/ méthode de contrôle linéaire (synthèse par linéarisation approximative) :

Considérant le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad , x \in R^n, u \in R^p \dots\dots\dots(4.7)$$

Ou $f(0,0) = 0$, et $f(x,u)$ continûment différentiable

le problème est alors de synthétiser une loi de commande $u=t(x)$ qui stabilise le système.

On procède alors de la manière suivante :

On linéarise le système autour du point d'équilibre, ce qui va générer un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$.

Supposons que la paire (A, B) est contrôlable. Nous élaborons une matrice K tel que nous positionneront les valeurs propres de la matrice (A+BK) dans le demi-plan gauche du repère complexe.

Nous appliquons ensuite la loi de commande linéaire $U=KX$ au système non linéaire (4.7).

3.2/ linéarisation par bouclage (linéarisation exacte) :

La linéarisation par bouclage (feedback linearization) est une méthode de synthèse de loi de commande non linéaire ; l'idée centrale est de transformer le modèle original en modèle équivalent plus simple.

3.2.1/ Concept intuitive :

Dans sa forme la plus simple la linéarisation par bouclage d'état consiste à éliminer les non linéarités dans un système non linéaire, ainsi les dynamiques en boucles fermée seront linéaires, cette idée est illustrée par l'exemple suivant :

Exemple :

Considérant le contrôle du niveau h d'un fluide dans un réservoir, représenté par la figure-4.2- à un niveau spécifié h_d . le contrôle du flot du liquide est u.

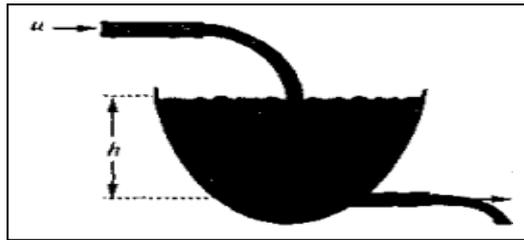


Figure-4.2- contrôle de niveau

Son modèle dynamique est de la forme :

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}$$

Avec « A(h) » section transversale du réservoir et « a » section transversale du tube de sortie.

Si u est choisit de la forme :

$$u = a\sqrt{2gh} + A(h)v$$

Où v devient l'entrée équivalente qui doit être spécifiée, la dynamique résultante est linéaire :

$$\dot{h} = v$$

Choisissons v de la forme $v = a\tilde{h}$ ou $\tilde{h} = h(t) - h_d$

La dynamique de la boucle fermée résultante est :

$$\dot{h} + a\tilde{h} = 0$$

Ceci implique que $\tilde{h}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

En se basant les résultats précédant, l'entrée du flot est déterminée par la loi de commande

non linéaire :

$$u(t) = a\sqrt{2gh} - A(h)a\tilde{h}$$

L'idée de la linéarisation par bouclage est d'éliminer les non linéarités et d'imposer la dynamique linéaire désirée, peut être simplement appliqué à une classe de système non linéaire qui sont décrit par la forme compagne ou forme compagne de contrôle.

Le système est dit de forme compagne s'il est représenté par :

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + b(x)u$$

Où u est le contrôle et x le vecteur d'état, est f(x) et b(x) des fonctions non linéaires.

De tel système aura pour commande $u \approx \frac{1}{b}(v - f)$

On élimine les non linéarités, on aura une relation entrée sortie de la forme

$$x^{(n)} = v$$

Où v sera choisit tel que $v = -k_0 x - k_1 \dot{x} - \dots - k_{n-1} x^{n-1}$

3.2.2/ Linéarisation entrée état (input state linearization) :

Considérons le système non linéaire mono entrée :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

où u représente le contrôle.

La technique de linéarisation entrée état résout le problème en étapes. Premièrement on doit trouver une transformation $Z=Z(x)$ et une transformation de l'entrée $U=U(X,V)$, ainsi la dynamique du système non linéaire est transformée en un équivalent linéaire de la forme

$\dot{z} = Az + bv$. Deuxièmement on utilise les techniques linéaire standard de contrôle pour la synthèse de loi de commande v.

Exemple :

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1$$

Considérons les nouvelles variables d'état :

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = ax_2 + \sin x_1$$

donc $\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1)$$

On peut maintenant remarquer que la non linéarité peut être supprimé par la loi de commande

suivante :

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)} (v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1)$$

Où v représente la nouvelle entrée équivalente.

On a alors la relation linéaire entrée état suivante :

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

Donc grâce à une transformation d'état et une transformation de l'entrée, nous avons transformé le problème de contrôle non linéaire en un problème de contrôle linéaire.

Puisque le nouveau système est linéaire et commandable, on choisit v tel que :

$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ ou on peut placer les pôles du système n'importe où avec un choix approprié de K .

A partir de cet exemple surgit la question du comment trouver une transformation d'état appropriée ?

3.2.3/ Linéarisation entrée-sortie (input-output linearization) :

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = h(x, u)$$

$$y = h(x)$$

Supposons maintenant qu'on veut trouver une relation entre la sortie et la commande u

Pour cela nous considérons l'exemple suivant :

Exemple : soit le système suivant

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u$$

$$y = x_1$$

pour générer une relation entre la commande u et la sortie y , différencions la sortie y :

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + f_1(x)$$

$$\text{avec } f_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2$$

Il est clair que à la deuxième différentiation de y , nous avons une relation explicite entre y et la commande u .

$$\text{Avec } u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1(x))$$

Et $\ddot{y} = v$

- Cette stratégie de synthèse de commande et de pouvoir générer une relation entrée-sortie linéaire, puis formuler le contrôleur linéaire.

- Le nombre de fois qu'on a besoin de différencier la sortie pour que la commande apparaisse s'appelle-le de **degré relatif r**.

Ces exemples nous ont permis d'avoir une compréhension sur ce qu'est la linéarisation par bouclage ; reste à savoir comment on peut généraliser ces concepts aux systèmes non linéaires ?

3.3/ Linéarisation entrée-états pour les systèmes mono-entrée mono-sortie :

Soit le système non linéaire à une seule entrée décrit par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad \dots\dots\dots(4.8)$$

Où f et g sont des champs de vecteur continûment différentiable

Le problème est de pouvoir dire quand est ce que ce type de système peut être linéarisable par état est une transformation d'entrée ? et comment peut on trouver une transformation qu'il le permet et comment on peut concevoir le contrôleur ?

Notons que le système de la forme (4.8) est dit linéaire en contrôle ou affine.

3.3.1/ Définition :

Le système non linéaire mono-entrée de la forme (4.8) avec $f(x)$ et $g(x)$ des champs de vecteur continûment différentiable sur R^n est dit linéarisable par entrée état s'il existe une région Ω dans R^n , un difféomorphisme (annexe-C-) $f : \Omega \rightarrow R^n$, est une loi de commande du bouclage non linéaire

Chapitre 4 : Contrôle des systèmes chaotiques

$$u = a(x) + b(x)v \quad (4.9)$$

tel que la nouvelle variable $z = f(x)$ est la nouvelle entrée v satisfait la relation à temps invariant suivante :

$$\dot{z} = Az + bv \dots\dots\dots(4.10)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

La nouvelle variable d'état Z est appelée l'état linéarisant et loi de commande (4.9) est appelée loi de commande linéarisante ; pour des simplifications de notation on note souvent Z comme un difféomorphisme : $Z=Z(x)$

Les matrices A et b sont sous une forme compagne

Remarque : on peut constater à partir de (4.10) que la linéarisation par bouclage est un cas particulier de la linéarisation entrée-sortie, ou la sortie conduit à un degré relatif n . Ceci signifie que si le système est linéarisable par entrée-sortie , avec un degré relatif n , alors il doit être linéarisable par entrée état. autrement si le système est linéarisable par entrée état avec $Z1$ comme première variable d'état représentant la sortie ; alors le système est linéarisable par entrée sortie avec un degré relatif n .

3.3.2/lemme : relation entre la linéarisation entrée-état et entrée-sortie :

Un système non linéaire du n^{ieme} ordre est linéarisable par entrée-état, si est seulement si il existe une fonction scalaire $Z1(x)$ tel que le système est linéarisable par entrée-sortie avec $Z1(x)$ comme fonction de sortie avec un degré relatif n .

3.3.3/ Condition pour la linéarisation entrée-état :

Théorème : le système (4.8) est linéarisable par entrée-état, si et seulement si il existe une région Ω tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

- Les champs de vecteurs $[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g]$ sont linéairement indépendants dans Ω .
- L'ensemble $[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g]$ est involutive dans Ω .

Où $ad_f g$ représente le crochet de Lie.

3.3.4/ méthode générale de construction d'une linéarisation entrée-état :

La construction d'une linéarisation entrée-état peut se faire en suivant les étapes suivantes :

- Construire un champ de vecteur $[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g]$ pour le système donné.
- Vérifier les conditions pour la linéarisation entrée-état.
- Si les deux conditions sont satisfaites, trouver la première variable d'état $Z_1(x)$ tel

$$\text{que : } \begin{aligned} \nabla_{z_1} ad_f^i g &= 0 \quad i = 0, \dots, n-2 \\ \nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g &\neq 0 \end{aligned}$$

- Calcul de la transformation d'état $z(x) = [z_1 \quad L_f z_1 \quad \dots \quad L_f^{n-1} z_1]$ est la

transformation d'entrée avec :

$$a(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

Où L_g représente la dérivée de Lie (voir appendice-C-)

4/ Application du contrôle du chaos :

4.1/ Contrôle du chaos par la balance harmonique :

Chapitre 4 : Contrôle des systèmes chaotiques

L'objectif du control est de synthétiser un correcteur qui permettra de décaler (retarder) la naissance d'une bifurcation à doublement de période prédite d'une valeur de $m_c = -0.41$ à une valeur $m_c^* = -0.32$.

Donc comme décrit plus haut, nous fixons $b = \sqrt{1.2}$ dans le contrôleur qui est de la forme :

$$K(s) = r \frac{s(s^2 + 1.2)}{(s + a)^3}$$

Puisque $\omega(\mu)$ est constante , il suivent que $K(j\omega(\mu)) \equiv 0$ pour tous les μ ; utilisons ce fait dans l'équation (4.5) vue plus haut, nous trouvons que dans ce cas S et S* ont la même famille des CLPs, ceci implique :

$$Y_0^*(m) = \frac{1}{2}(1 + 1.2m)$$

$$Y_1^*(m) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - (1.2m)^2]}$$

$$w^*(m) = \sqrt{1.2}$$

On choisit $\alpha=2$, et on cherche quel est la valeur du gain ρ qui nous permet de déplacer la bifurcation DPP à la valeur $m_c^* = -0.32$.

On se basant sur l'annexe on retrouve :

$$|0.288 + 0.0065r + j(0.985 + 0.08r)| = 0.653$$

La résolution de cette équation va permettre de générer deux valeurs pour ρ , on choisit $\rho=-4.15$.

$$K(s) = -4.15 \frac{s(s^2 + 1.2)}{(s + 2)^3}$$

les résultats sont donné par la figure suivante :

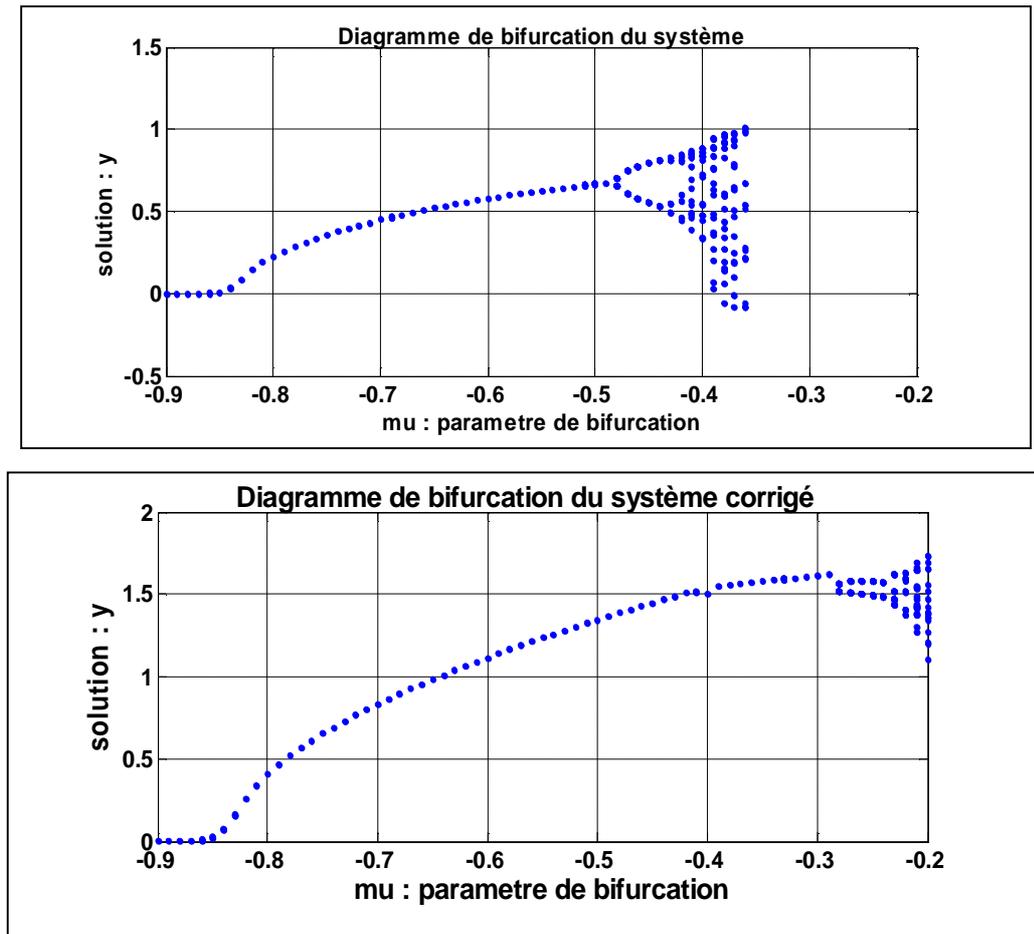


Figure-4.3- Systèmes contrôler et non contrôler

On peut constater à partir de la figure-4.3- que le contrôleur à pu satisfaire les conditions décrites précédemment, plus particulièrement celle de la suppression (décalage) du chaos ; ou on peut remarquer que celui apparait pour une valeur de $\mu=-0.22$, alors que ca genèse , c'est-à-dire la naissance du doublement de période apparait pour une valeur de $\mu=-0.29$. Ceci accepte qualitativement les résultats théoriques.

4.2/ contrôle linéaire et non linéaire du chaos :

A partir des résultat vue précédemment, on peut dire que le système est chaotique pour une valeur du paramètre de bifurcation égale à -0.4

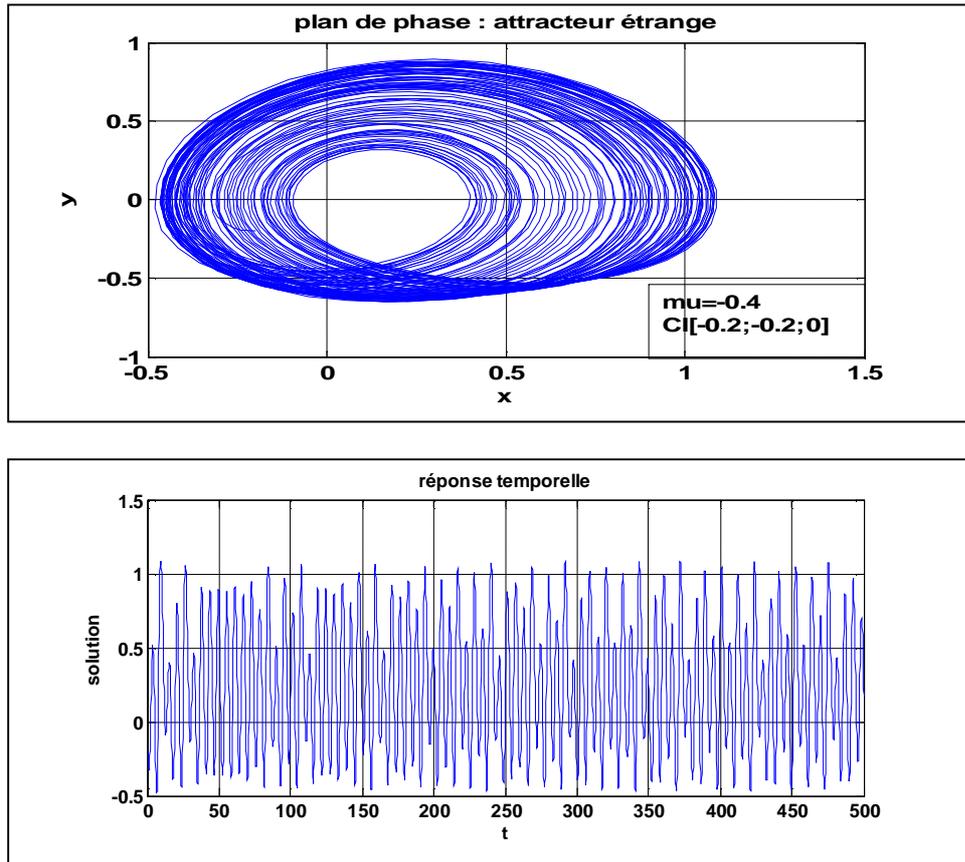


Figure-4.5- plan de phase et réponse temporelle du système

La reformulation du système sous forme d'état donne :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -0.4x_3 - 1.2x_2 - x_1 + x_1^2$$

Ce système admet deux points d'équilibres (0,0,0) et (1,0,0) .

Le système avec control est :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -0.4x_3 - 1.2x_2 - x_1 + x_1^2 + u$$

Avec $u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$

Chapitre 4 : Contrôle des systèmes chaotiques

Nous allons stabiliser ce système autour du point (0,0,0),

On choisit les pôles (-1,-2,-3), on génère $k=[5 \ 9.8 \ 5.6]$ à partir de la commande « place » sous matlab. Le résultat est donnée par la figure-4.6-

Appliquons maintenant la deuxième méthode de contrôle c'est-à-dire la linéarisation par feedback entrée-état.

Nous commençons par tester la commandabilité et l'involutivité du champs de vecteur :

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g & ad_f^2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -0.4 \\ 1 & 0.4 & -1.04 \end{bmatrix}$$

Doc ce système est de rang complet, aussi il est involutive. Donc le système est linéarisable par feedback.

Le choix de $z_1(x)$ est régit par :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0$$

Donc $z_1(x) = x_1$

La transformation $z(x)$ est donnée par : $z(x) = [x_1 \ x_2 \ x_3]$

U est choisit tel que : $a(x) = -0.4x_3 - 1.2x_2 - x_1 + x_1^2$ et $b(x) = 1$

Le système linéarisé est alors :

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = v$$

v est choisit tel que les pôles soit à (-1,-2,-3) , on génère un $K=[6 \ 11 \ 6]$;

Le résultat est donné par la figure-4.7-

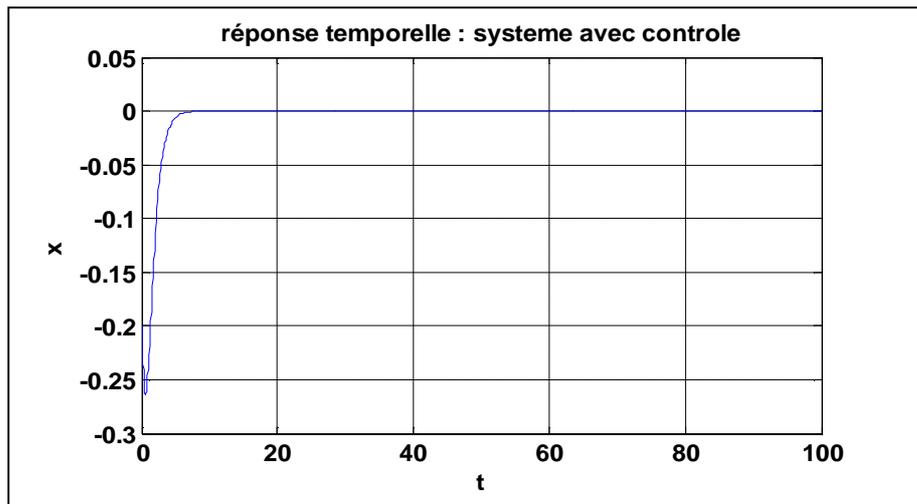


Figure-4.6-système avec control (linéarisation approximative)

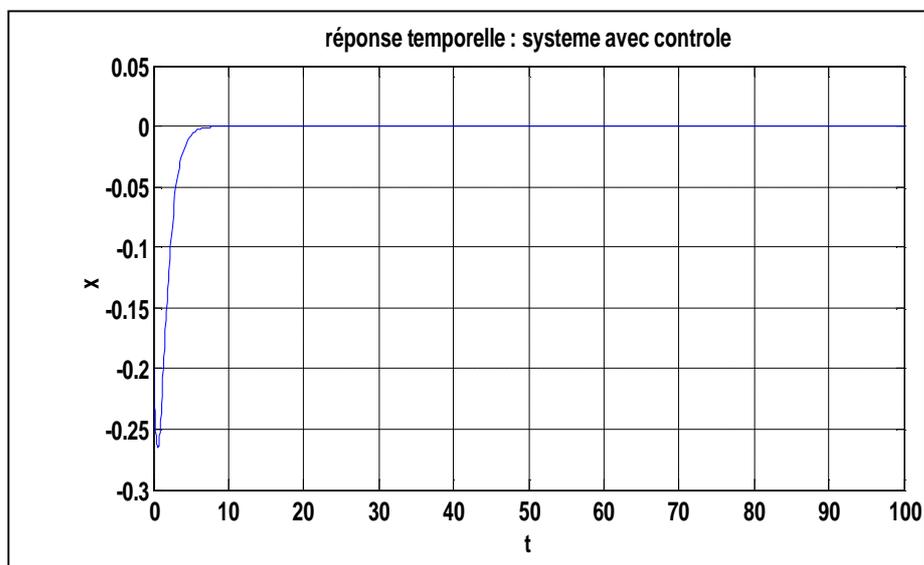


Figure-4.7-système avec contrôle(linéarisation exacte)

les figures-4.7- et -4.6- montrent que le système est stabiliser que sa soit par la première méthode ou la deuxième méthode de contrôle.

5/ Conclusion :

Ce chapitre avait pour objectif de présenter une approche fréquentielle de synthèse d'une loi de commande, basée sur la méthode de la balance harmonique. L'idée est alors d'introduire dans le système originale (forme de lur'e), une fonction de transfert basée sur le filtre washout afin de retarder le comportement chaotique, tout en maintenant les dynamique

Chapitre 4 : Contrôle des systèmes chaotiques

du système non contrôlé (points d'équilibres et cycles limites) ; les paramètres du contrôleur sont définis à partir de l'application du principe de la balance harmonique. Les résultats de l'application sur le système à secousse à montrer l'efficacité de la méthode.

Nous avons ensuite appliqué une technique de contrôle linéaire et non linéaire afin de montrer une autre méthodologie de contrôle du chaos, et cela dans le domaine temporelle, ou à partir

D'une linéarisation approximative et exacte, nous avons développé des lois de commandes capables de supprimer le chaos dans le système à secousse.

Conclusion générale et Perspectives

Conclusion et perspectives :

L'objectif de ce mémoire entre dans le cadre de l'étude des systèmes non linéaires bifurquant, plus particulièrement ceux qui présentent un comportement chaotique ; cela en se basant sur une approche fréquentielle, et en abordant une approche temporelle, afin de montrer comment un comportement dynamique complexe tel que le chaos peut être étudié.

Nous avons traité au cours de ce mémoire comment un système non linéaire grâce au phénomène de bifurcation pouvait changer de comportement dynamique, qui peut être d'un point d'équilibre jusqu'à un attracteur étrange, nous avons montré qu'une route vers le chaos était une cascade de doublement de période.

On a donc focalisé notre étude sur différents outils d'analyse temporels et fréquentiels des systèmes non linéaires bifurquant, qui nous permettent de mieux cerner le problème du chaos. Nous avons commencé par voir des méthodes classiques basées sur l'intégration temporelle telle que les réponses temporelles et les espaces de phases, nous avons ensuite présenter les exposants de Lyapunov et les diagrammes de bifurcation.

Nous avons ensuite abordé une approche fréquentielle, en l'occurrence une méthode analytique dite la balance harmonique, nous l'avons présenté avec ces deux aspects qui sont l'analyse et le contrôle (analyse dans un objectif de contrôle), nous avons montré comment cette méthode pouvait être utilisée pour prédire des comportements complexes. Dans son aspect analyse cette méthode peut se référer à une résolution numérique basée sur des algorithmes itératives tel que Newton-Raphson qui nous permet de générer la solution périodique voulue. Dans son aspect contrôle (analyse pour le contrôle), cette technique est utilisée pour générer de simple condition (non numériques) qui vont être à la base de la prédiction des bifurcations tel que la bifurcation à doublement de période, enfin selon la solution obtenus on peut tester la stabilité grâce au critère de Loeb ou les méthodes linéaires

Conclusion générale et Perspectives

standard (Routh, critère de stabilité,.....). Cependant le résultat le plus important a partir de cette technique est le fait qu'elle sera directement utiliser pour le contrôle du chaos et cela on injectant une fonction de transfert basée sur le filtre washout afin de maintenir les caractéristiques du système tout on retardant la bifurcation à doublement de période est donc contrôler le chaos. Nous avons ensuite appliqué les méthodes de contrôle linéaire est non linéaire du chaos afin de montrer comment cette dynamique complexe peut être analysé est contrôler dans le domaine temporel.

Les deux approches (temporelle et fréquentielle) appliquée à un modèle de secousse, ont montré l'efficacité des deux approches à détecter des bifurcations de type Hopf ou à doublement de période, néanmoins l'approche temporelle reste l'outil le plus sûr pour trancher sur le type de la solution et sa stabilité.

Les perspectives dans ce mémoire peuvent être :

Tester d'autres méthodes de contrôle du chaos et des bifurcations via la BH.

Essayer d'améliorer la précision des résultats en étudiant plusieurs ramifications de la BH.

Essayer de mettre en œuvre ce résultat par application pratique afin de valider réellement les résultats théoriques et ceux des simulations.

Annexe

-A- Doublement de periode prédie pour une non linéarité statique

Si la non linéarité du système « S » est statique et n est continument différentiable a l'aprophe du CLP $y^{nom}(t)$, subissant une bifurcation à doublement de periode alors les deux stages décrient dans le chapitre-3- se simplifient comme suite :

Premierement puisque n est une nonlinéarité statique , la fréquence n'apparaît pas dans les équations (3.45)-(3.47).dans le deuxieme stage de la procédure, il peut etre décrit comme suite :

Nous développons la partie droite de l'équation (3.46) autour du cycle limite comme suite :

$$N_1(Y_0,0,Y_2,0,f) = \frac{1}{p} \int_{-p}^p n'(Y_0 + Y_2 \cos 2q) \times \cos(q+f) e^{-j(q+f)} dq \quad (A.1)$$

Ou $q = wt$, et $n'(Y_0 + Y_2 \cos 2q)$ n'est autre que la dérivée du sous systèmes non linéaire évaluer le long du CLP $y^{nom}(t)$ et \hat{w} à été remplace par zéro dans la partie à gauche de l'intégrale précédente.

Puisque le CLP nominal est périodique, alors on a aussi $n'(Y_0 + Y_2 \cos 2q)$ périodique, nous la développons en série de Fourier comme suite :

$$n'(Y_0 + Y_2 \cos 2q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l'(Y_0, Y_2) e^{j2lq} \quad (A.2)$$

Substituons (A.2) dans (A.1) est évaluons le résultat de l'intégrale :

$$N_1(Y_0,0,Y_2,0,f) = a_0'(Y_2, Y_0) + a_1'(Y_0, Y_2) e^{-j2f} \quad (A.3)$$

Substituons ce résultat dans (3.43), nous avons :

$$G^{-1}(j\hat{w}) + a_0'(Y_0, Y_2) = -a_1'(Y_0, Y_2) e^{-j2f} \quad (A.4)$$

Prenant les amplitudes résultante de l'équation va nous permettre d'éliminer la phase f ce qui nous donne :

$$\left| G^{-1}(j\hat{w}) + a_0'(Y_0, Y_2) = \left| a_1'(Y_0, Y_2) \right| \right. \quad (\text{A.5})$$

Puisque les paramètres $\hat{w}(m)$, $Y_0(m)$ et $Y_2(m)$ sont obtenus dans le premier stage de la procédure , le paramètre critique $m = m_c$ sera obtenus on résolvant l'équation (A.5)

-B- Génération des systèmes :

Bifurcation de Hopf

BH3 (CI : [0.1;0.01;2.3;0.1;0.1;0.1;0.1;1.1])
 $y = [x(1) - x(1)^2 - 0.5x(2)^2 - 0.5x(3)^2 - 0.5x(4)^2 - 0.5x(5)^2 - 0.5x(6)^2 - 0.5x(7)^2;$
 $x(2) + 1.2x(3)x(8) + 0.833x(2)x(8)^2 - x(3)x(8)^3 - 2x(1)x(2);$
 $x(3) - 1.2x(2)x(8) + 0.833x(3)x(8)^2 + x(2)x(8)^3 - 2x(1)x(3);$
 $x(4) + 1.2x(5)x(8) + 0.833x(4)x(8)^2 - 8x(5)x(8)^3 - 2x(1)x(4);$
 $x(5) - 1.2x(4)x(8) + 0.833x(5)x(8)^2 + 8x(4)x(8)^3 - 2x(1)x(5);$
 $x(6) + 1.2x(3)x(7)x(8) + 0.833x(6)x(8)^2 - 27x(7)x(8)^3 - 2x(1)x(6);$
 $x(7) - 1.2x(3)x(6)x(8) + 0.833x(7)x(8)^2 + 27x(6)x(8)^3 - 2x(1)x(7)x(2)];$

BH5 : CI : [0.15;0.5;2.3;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.3])
 $y = [x(1) - x(1)^2 - 0.5x(2)^2 - 0.5x(3)^2 - 0.5x(4)^2 - 0.5x(5)^2 - 0.5x(6)^2 - 0.5x(7)^2 - 0.5x(8)^2 - 0.5x(9)^2 - 0.5x(10)^2 - 0.5x(11)^2;$
 $x(2) + 1.2x(3)x(12) + 0.833x(2)x(12)^2 - x(3)x(12)^3 - 2x(1)x(2);$
 $x(3) - 1.2x(2)x(12) + 0.833x(3)x(12)^2 + x(2)x(12)^3 - 2x(1)x(3);$
 $x(4) + 2.4x(5)x(12) + 0.833x(4)x(12)^2 - 8x(5)x(12)^3 - 2x(1)x(4);$
 $x(5) - 2.4x(4)x(12) + 0.833x(5)x(12)^2 + 8x(4)x(12)^3 - 2x(1)x(5);$
 $x(6) + 1.2x(3)x(7)x(12) + 0.833x(6)x(12)^2 - 27x(7)x(12)^3 - 2x(1)x(6);$
 $x(7) - 1.2x(3)x(6)x(12) + 0.833x(7)x(12)^2 + 27x(6)x(12)^3 - 2x(1)x(7);$
 $x(8) - 1.2x(4)x(9)x(12) + 16x(8)x(12)^2 - 64x(9)x(12)^3 - 2x(1)x(8);$

```

x(9)-1.2*4*x(8)*x(12)+16*0.833*x(9)*x(12)^2+64*x(8)*x(12)^3-
2*x(1)*x(9);
x(10)-1.2*5*x(11)*x(12)+25*0.833*x(10)*x(12)^2-125*x(11)*x(12)^3-
2*x(1)*x(10);
x(11)-1.2*5*x(10)*x(12)+25*0.833*x(11)*x(12)^2+125*x(10)*x(12)^3-
2*x(1)*x(11);
x(2)];

```

Bifurcation à doublement de période :

BH ordre 5

CI : [0.1;0.09;2.4;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;1.1]

```

r(1)=x(1)^2-0.5*x(2)^2-0.5*x(3)^2-0.5*x(4)^2-0.5*x(5)^2-0.5*x(6)^2-
0.5*x(7)^2-0.5*x(8)^2-0.5*x(9)^2-0.5*x(10)^2-0.5*x(11)^2;
r(2)=-2*x(1)*x(2)-0.5*x(2)*x(4)-0.5*x(3)*x(5)-0.5*x(4)*x(2)-0.5*x(4)*x(6)-
0.5*x(5)*x(3)-0.5*x(5)*x(7)-0.5*x(6)*x(4)-0.5*x(6)*x(4)-0.5*x(6)*x(8)-
0.5*x(7)*x(5)-0.5*x(7)*x(9)-0.5*x(8)*x(6)-0.5*x(9)*x(7)-0.5*x(9)*x(11)-
0.5*x(10)*x(8)-0.5*x(11)*x(9);
r(3)=-2*x(1)*x(3)-0.5*x(2)*x(5)+0.5*x(3)*x(4)+0.5*x(4)*x(3)-0.5*x(4)*x(7)-
0.5*x(5)*x(2)+0.5*x(6)*x(5)-0.5*x(6)*x(9)-
0.5*x(7)*x(3)+0.5*x(7)*x(8)+0.5*x(8)*x(7)-0.5*x(8)*x(11)-
0.5*x(9)*x(6)+x(9)*x(10)-0.5*x(11)*x(8);
r(4)=-2*x(1)*x(4)-0.5*x(2)^2-0.5*x(2)*x(6)+0.5*x(3)^2-0.5*x(3)*x(7)-
0.5*x(5)*x(9)-0.5*x(6)*x(2)-0.5*x(7)*x(3)-0.5*x(7)*x(11)-0.5*x(8)*x(4)-
0.5*x(9)*x(5);
r(5)=-2*x(1)*x(5)-x(2)*x(3)-0.5*x(2)*x(7)+0.5*x(3)*x(6)-0.5*x(4)*x(5)-
0.5*x(4)*x(9)+0.5*x(5)*x(8)+0.5*x(6)*x(3)-0.5*x(7)*x(2)+0.5*x(7)*x(10)-
0.5*x(8)*x(5)+0.5*x(10)*x(7)-0.5*x(11)*x(6)-x(1)*x(5);
r(6)=-2*x(1)*x(6)-0.5*x(2)*x(4)-0.5*x(2)*x(8)+0.5*x(3)*x(5)-0.5*x(3)*x(9)-
0.5*x(4)*x(2)-0.5*x(4)*x(10)+0.5*x(5)*x(3)-0.5*x(5)*x(11)-0.5*x(8)*x(2)-
0.5*x(9)*x(3)-0.5*x(10)*x(4)-0.5*x(11)*x(5);
r(7)=-2*x(1)*x(7)-0.5*x(2)*x(5)-0.5*x(2)*x(9)+0.5*x(3)*x(4)+0.5*x(3)*x(8)-
0.5*x(4)*x(3)-0.5*x(4)*x(11)-0.5*x(5)*x(2)+0.5*x(5)*x(10)+0.5*x(8)*x(2)-
0.5*x(9)*x(2)+0.5*x(10)*x(5)-0.5*x(11)*x(4);
r(8)=-2*x(1)*x(8)-0.5*x(2)*x(7)-0.5*x(2)*x(10)-
0.5*x(3)*x(7)+0.5*x(4)^2+0.5*x(5)^2-0.5*x(6)*x(2)+0.5*x(7)*x(3)-
0.5*x(10)*x(2)-0.5*x(11)*x(2)-0.5*x(11)*x(3);
r(9)=-2*x(1)*x(9)-0.5*x(2)*x(7)-0.5*x(2)*x(11)-
0.5*x(3)*x(6)+0.5*x(3)*x(10)-0.5*x(5)*x(4)-0.5*x(6)*x(3)-
0.5*x(7)*x(2)+0.5*x(10)*x(3);

```

$$r(10) = -2x(10) - 0.5x(2)x(8) + 0.5x(3)x(9) - 0.5x(4)x(6) + 0.5x(5)x(7) - 0.5x(6)x(4) + 0.5x(7)x(5) - 0.5x(8)x(2) + 0.5x(9)x(3);$$

$$r(11) = -2x(11) - 0.5x(2)x(9) - 0.5x(3)x(8) - 0.5x(4)x(7) - 0.5x(5)x(6) - 0.5x(8)x(2) - 0.5x(2)x(9) + 0.5x(9)x(3);$$

$$y = [x(1) + r(1);$$

$$x(2) + 1.2 \cdot 0.5x(3)x(12) + 0.48 \cdot 0.25x(2)x(12)^2 - 0.125x(3)x(12)^3 + r(2);$$

$$x(3) - 1.2 \cdot 0.5x(2)x(12) + 0.48 \cdot 0.25x(3)x(12)^2 + 0.125x(3)x(12)^3 + r(3);$$

$$x(4) + 1.2x(5)x(12) + 0.48x(4)x(12)^2 - 0.125x(5)x(12)^3 + r(4);$$

$$x(5) - 1.2x(4)x(12) + 0.48x(5)x(12)^2 + x(4)x(12)^3 + r(5);$$

$$x(6) + 0.2 \cdot 1.5x(7)x(12) + 0.48 \cdot 2.25x(6)x(12)^2 - 3.375x(7)x(12)^3 + r(6);$$

$$x(7) - 1.2 \cdot 1.5x(6)x(12) + 0.48 \cdot 2.25x(7)x(12)^2 + 3.375x(6)x(12)^3 + r(7);$$

$$x(8) + 1.2 \cdot 2x(9) + 0.48 \cdot 4x(8)x(12)^2 - 8x(9)x(12)^3 + r(8);$$

$$x(9) - 1.2 \cdot 2x(8) + 0.48 \cdot 4x(9)x(12)^2 + 8x(8)x(12)^3 + r(9);$$

$$x(10) + 1.2 \cdot 2.5x(11)x(12) + 0.48 \cdot 6.25x(10)x(12)^2 - 15.625x(11)x(12)^3 + r(10);$$

$$x(11) - 1.2 \cdot 2.5x(10)x(12) + 0.48 \cdot 6.25x(11)x(12)^2 + 15.625x(10)x(12)^3 + r(11);$$

$$x(2)];$$

-C- Rappel sur la géométrie différentielle :

Dérivée et crochet de Lie :

Soit une fonction scalaire $h(x)$ est un champs de vecteur $f(x)$, nous définissons une nouvelle

fonction scalaire $L_f h = \nabla h f = \frac{\partial h}{\partial x} f$ appelée dérivée de Lie.

Soit f et g deux champs de vecteur sur R^n . La dérivée de Lie de f et g est un troisième champs

de vecteur définie par : $[f, g] = \nabla g f - \nabla f g$

Le crochet de Lie est souvent notée $ad_f g$

$$ad_f^2 g = \nabla ad_{fg} f - \nabla ad_f g$$

Difféomorphisme :

Une fonction $f: R^n \rightarrow R^n$ définie dans une région Ω est appelée difféomorphisme si il est continument différentiable et si f^{-1} existe est aussi continument différentiable.

Involutivité :

Un ensemble de champs de vecteur $\{f_1(x) \dots f_m(x)\}$ est involutive si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_m(x) \\ [f_i, f_j](x) \end{pmatrix} = \text{rang} \{f_1(x) \dots f_m(x)\}$$

Ou $[f_i, f_j](x)$ est le crochet de lie de deux champs de vecteurs.

- [1] : Alvares, A., E. Curial and F. Verlus (1997). Complex dynamics in classical control systems. Science direct. Journal systems and control vol 31, issue 5, 277-285.
- [2] : Amado, T.,(2006). Modélisation d'un système dynamique à jeux de groupe moto propulseur. Mémoire de Thèse de doctorat en mécanique. école centrale de lyon.
- [3] : Andeviki, B. and A.L. Fradkov (2004). Control of chaos : methods and application.II.Applications. Automation and remote control, vol 65, N 4, 505-533.
- [4]: Andeviki, B. and A.L. Fradkov (2003). Control of chaos : methods and application.I.methods. Automation and remote control, vol 64, N 5, 637-713.
- [5] : Astrom, K. and R.M. Murray (2008). Feedback systems : an introduction for scientists and engineers, Princeton university press.
- [6] : Banerjee, S. Dynamics for engineers (2005). John wiley and sons.
- [7] : Basso, M., R. Genesio and A. Tesi (1997). A frequency method for predicting limite cycle bifurcation. Springer link . Nonlinear dynamics, Vol 13, N 04, 339-360.
- [8] : Belandez, A. and E. Fernandez (2005). A harmonic balance approach to nonlinear oscillations of punctual charge in the electrical field of charge ring. Elsevier. Physics letters A. vol 373, N 13, 339-360.
- [9] : Bergé, P, Y. Pomeau et C. Vial (1997). L'ordre dans le chaos. Herman édition.
- [10] : Bonini, F and M. Gilli (1999). Analysis of stability and bifurcation of limite cycle in chua circuits thought the harmonic balance approach. IEEE trans. Circuits and systems fundamental theory and application. Vol 46, N 08, 881-890.
- [11] : Chen, G., J. Moiola and H. Wang (1995). Controlling bifurcation. Pinsa 65 A, 585-612.
- [12] : Chen, G. (2004). Stability of nonlinear systems. Encyclopedia of RF and microwave engineers. Wiley, new york, 4869-4881.
- [13] : Cochelin, B and C. Verges (2009). A hight order purely frequency base harmonic formulation for continuation of periodic solution. Eisevier. Sound and vibration, 243-262
- [14] : Elnashnaie, S. and F. uhlig (2006). Numerical techniques for chemical and biological engineers using matlab: a simple bifurcation approach. Springer.
- [15] : Gao, D.Y and R.W. ogden (2006). Nonlinear dynamics of wheeled vehicucle. Springer.
- [16] : Genesio, R and A. Tesi (1993). Control techniques for chaotic dynamical systems. Kybernetica, vol 29, N 05, 469-478.

- [17] : Genesio, R., A. Tesi and F. Villorosi (1993). A frequency approach for analysing and controlling chaos in nonlinear circuits. IEEE tran. Circuits and systems, fundamental theory vol 40; N 011 , 816-832.
- [18] : Genesio, R., A. Tesi.(1995). Models complex dynamics in nonlinear systems. Elsevier. systems and control, letters 25,185-192.
- [19] : Genesio, R., G. Innocenti and F. Galdani. (2007). A global qualitative view of bifurcation and dynamics in the rossler systems. Science direct. Physics letters A. vol 372, issue 11, 1799-1809.
- [20] : Haddad , W.M. and V. Chellbina (2007). Nonlinear dynamical systems and control. Princeton university press.
- [21] : Hilborn, R.C (1995). Chaos and nonlinear dynamics. Oxford university press.
- [22] : Hirai, K analysis of bifurcation and control by describing function method, conference of nonlinear oscillation, japan (2002).
- [23]: Jianzu, Y. and T.L. Vincent (1997). Investigation on control of chaos. Chinese journal of aeronautics, V 10n N 03, 233-238.
- [24]: Jordan, D.W. and P. Smith. (2003). Nonlinear ordinary differential equation : an introduction for scientist and engineers. Oxford press university.
- [25] : King, A.C. , J. Billings and S.R. Otto (2003). Differential equation : linear, nonlinear, ordinary and partial. Cambridge university press.
- [26] : Labrayer, A. and P.J. Attar (2010). A harmonic balance approach for large scale problems in nonlinear structural dynamics. Science direct. Computers and structures 88, 1002-1014.
- [27] : Liu, L. and E.A. Dowelle (2007). A novel harmonic balance analysis for the van der pol oscillations. Science direct. Nonlinear mechanics vol 42, N 08, 2-12.
- [28] : Liu, L. J.P. Thomas, E.H. Dowell and P. Attar (2006). A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approach for duffing oscillations. Science direct . computational physics 215, 298-320.
- [29] : Malasoma, J.M and C. Lattelier (2010). Systemes minimaux symétrie et ordre minimale. Rencontre du non linéaire. p103-108.
- [30] : Mandal, A.K. (2008). Introduction to control engineers : modelling, analysis and design. A new age international Pvt Ltd publishers.
- [31] : Milon, A.N and S.G. Stavridis (2009). Nonlinear electronic circuits multiple routes to chaos. Science direct . nonlinear analysis theory method application, Vol 71, issue 12, e3-e20.
- [32] : Mira, C.(1990). Systems asservis non linéaire, aspects continue et discret, hermes.

- [33] : Moila, L.. and C. Gwanrong (1996). Hopf bifurcation analysis : a frequency approach. World scientific, nonlinear science.
- [34] : Mullohampt, P (2009). Introduction à l'analyse et à la commande des systemes non linéaires. Press polytechnique romande.
- [35] : Nayef, A. H. and A. Holden (1995). Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental method. John wiley and sons.
- [36] : Ozer, A.B. and E. Akil (2005). Conference international non linéaire.turquie.
- [37] : Patidau, V. and K. Sum (2006). Identical synchronization in chaotic jerk dynamical systems. Electronic journal of therotical physics, N 11, 33-47.
- [38] : Robert, B. et M. Cecile (2000). Dynamique apériodique etchaotique du moteurs pas à pas. Revus internationale de génie électrique, vol 3, N 03 , 313-328.
- [39] : Sastry, S. (2010). Nonlinear systems analysis, stability and control. Springer.
- [40] : Slotine, J.J .(1991). Applied nonlinear control. Prentice Hall.
- [41] : Sprott, J.C. (2000). A new class of chaotic circuits .elseiver, Physics letter A vol 23, 19-30
- [42] : Sprott, J.C. (2010) . Elegant chaos : Algebraically simple chaotic flow. World scientific.
- [43] : strogatz, S. H. (1994). Nonlinera dynamics and chaos with application to physics, biology and engineer. Western press.
- [44] : Suarez, A. and J. collait a global qualitative view of bifurcation and dynamics using Harmonic balance
- [45] : Tahraoui, S. (2009). L'analyse des bifurcations par l'approche fréquentielle. Master de contrôle. Université A.B.B.
- [46] : Tesi, A., A.H. Abed, R. Genesio and H.O. Wang (1996). Harmonic balance analysis of period doubling bifurcation with implication for control of nonlinear dynamics. IEEE Trans. Automation, Vol 32, N 09, 1255-1274.
- [47] : Thompson, J. and H.B. Stewart (2002). Nonlinear dynamics and chaos. Wiley edition.
- [48] : Tse, C.K (2004). Complex behaviour of switching power converters . CRC press.
- [49] : Wang, H. and E.H. Abed (1993). Thesis report. University of texas.
- [50] : Zwillinger, D (1997) . Handbook of differential equation. 3 rd edition. Academic press.
- [51] : www.mathworks.com/matlab central/file exchange
- [52] : <http://sprott.physics.wisc.edu/simpjerk>

RESUME :

Les systèmes non linéaires bifurquant représentent une large classe de système « réels », possédant de riches dynamiques, parmi lesquels on cite le « chaos ».

L'objectif de ce mémoire est d'investir dans l'analyse et le contrôle des systèmes chaotiques et cela en se basant sur deux approches, une fréquentielle, et une autre temporelle.

Nous avons montré que la prédiction du chaos, passe par l'étude de sa genèse, plus particulièrement le doublement de période, qui représente un signe révélateur du chaos, nous avons donc analysé cette dynamique au moyen d'une méthode fréquentielle dite balance harmonique, celle-ci peut avoir deux aspects l'un pour l'analyse est un autre pour le contrôle, nous avons appuyé cette étude au moyen d'une évaluation numérique basée sur des outils classiques tel que le diagramme de bifurcation.

Pour retarder/supprimer le chaos nous avons appliqué un contrôle via la balance harmonique afin de contrôler une bifurcation flip ; puis un contrôle linéaire et non linéaire basé respectivement sur la linéarisation approximative et exacte afin de stabiliser les points d'équilibres d'un système à secousse.

Mots clé : chaos, systèmes non linéaires bifurquant, balance harmonique, contrôle du chaos, filtre washout, système à secousse.

Abstract :

Nonlinear systems are branching off a large class of "real" system, has rich dynamics, among which cites the "chaos".

The purpose of this memorandum is to invest in the analysis and control of chaotic systems and that, based on two approaches, a frequency, and temporel.

We have shown that the prediction of chaos, through the study of its genesis, especially the doubling of the period, which is a telltale sign of chaos, we have analyzed this process using a method called frequency harmonic balance, it can have two aspects for each analysis is another for control, we supported this study using a numerical rating based on traditional tools such as bifurcation diagram.

To delay / remove the chaos we have applied a control via the harmonic balance to control a flip bifurcation, then a linear control based on the Jacobean linearization and a nonlinear control based on the linearization loop to stabilize the points 'equilibrium of a jerk system.

Key words : chaos, nonlinear systems bifurcate, harmonic balance, control of chaos, washout filter, jerk system

ملخص:

تمثل فئة كبيرة من نظام "حقيقي"، مع الديناميات الغنية، التي يستشهد بين "الفوضى". الغرض من هذه المذكرة هو الاستثمار في التحليل والسيطرة على نظم الفوضى، وأنه بناء على نهجين، والتردد أ، ووقت آخر.

لقد أظهرنا أن التنبؤ من الفوضى، من خلال دراسة نشأتها، وخاصة في مضاعفة هذه الفترة، وهو علامة منبهة من الفوضى، وقمنا بتحليل هذه العملية باستخدام طريقة تسمى توازن التردد التوافقي، أيدنا أنه يمكن أن يكون لها جانبان في تحليل آخر للتحكم، فإن هذه الدراسة باستخدام التصنيف العددية القائمة على الأدوات التقليدية مثل الرسم التخطيطي التشعب.

لتأخير / القضاء على الفوضى طبقنا السيطرة عن طريق توازن متناسق للسيطرة على التشعب الوجه، ثم سيطرة الخطية وغير الخطية على التوالي على الخطية التقريبية والدقيقة لتحقيق الاستقرار في نقطة التوازن للنظام هزة. لكلمات الرئيسية

الفوضى، وأنظمة غير الخطية bifurcating، توازن متناسق، والسيطرة على الفوضى، وفشل مرشح، صدمة النظام