RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Aboubekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electronique

Mémoire de Magister en Electronique
Option Signaux et Systèmes

ANALYSE DES SIGNAUX ELECTROCARDIOGRAMMES : UNE APPROCHE FRACTALE

Présenté en février 2009 par :
Melle SEDJELMACI Ibticeme

Devant la commission du jury

Président :

Mr B. CHERKI	**Maître de Conférence**	**Université Aboubekr Belkaïd - Tlemcen**

Examinateurs :

Mme A. BOUAZZA	**Maître de Conférence**	**Université Aboubekr Belkaïd - Tlemcen**
Mr Z. E. HADJ SLIMANE	**Maître de Conférence**	**Université Aboubekr Belkaïd - Tlemcen**

Directeur de thèse :

Mr F. BEREKSI REGUIG	**Professeur**	**Université Aboubekr Belkaïd - Tlemcen**

Année Universitaire : 2008 - 2009

REMERCIEMENTS

Au préalable ; je rends grâce à Dieu l'omnipotent

Je tiens à remercier vivement Mr F. BEREKSI REGUIG pour sa disponibilité, ses conseils doctes, judicieux et pour son soutien sans faille tout au long de l'élaboration de mon mémoire.

Je remercie respectueusement Mr B. CHERKI pour avoir accepter la présidence du jury, ainsi que Mme A. BOUAZZA et Mr Z. E. HADJ SLIMANE qui m'ont fait l'insigne honneur d'être membres du jury.

Finalement, je remercie Mr Boutaâ et les membres du laboratoire de l'EBM qui m'ont aidé maintes fois et auprès desquels j'ai conforté mes connaissances et ma soif d'apprendre.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents pour leur réconfortante sollicitude,

A mes grands-parents,

A ma sœur et mon frère,

A mes tantes et oncles,

A mes cousines et cousins, en particulier Yousra et Manal.

A tout mes amis de l'Université,

A tout les membres du laboratoire d'EBM.

SOMMAIRE

L'apparition de l'électrocardiographie il y a une centaine d'année coïncide avec la création du premier système d'enregistrement suffisamment sensible pour mesurer les potentiels électriques cardiaques à partir de la surface du corps. Ce système décrit la succession des ondes P, QRS, T dans le signal électrocardiologique. Ou P représente la dépolarisation auriculaire, le complexe QRS correspond à la dépolarisation ventriculaire et l'onde T correspond à la repolarisation des ventricules. L'électrocardiologie est une discipline qui a pour objectif de décrire les anomalies de fonctionnement du cœur en étudiant la forme, la fréquence et l'évolution des signaux électriques cardiaques.

Le signal ECG représente un moyen de diagnostic puissant et peu coûteux. Vu son importance, divers traitements sont réalisés pour son analyse.

Une nouvelle manière de traiter un signal est née : l'analyse fractale. Introduite dans les années 80 pour mettre en évidence les phénomènes connus en turbulence, elle s'est ensuite développée dans plusieurs applications à la variétés des phénomènes naturels. Fractale est un mot inventé par Benoît Mandelbrot en 1974 sur la racine latine "fractus" qui signifie brisé.

Pour l'enrichissement des outils de base de cette théorie, et la caractérisation d'un signal par sa seule dimension fractale sont venus s'ajouter des mesures comme l'analyse multifractale.

L'approche multifractale a été initiée avec les modèles de cascades multiplicatives de B. Mandelbrot pour la dissipation de l'énergie dans le contexte de la turbulence pleinement développée. Cette approche de traitement de signal consiste à étudier sa régularité, plus précisément quand cette dernière varie largement d'un point à un autre, et que les irrégularités du signal nous renseignent sur le phénomène étudié. Le calcul direct du spectre de singularités pour des signaux réels s'avère difficile à mener numériquement étant donné le nombre infini de dimensions à calculer. Une formule, appelée "formalisme multifractal" a été alors mise au point avec l'objectif de déterminer ce spectre.

Récemment, plusieurs développements importants en analyse fractale ont eu un impact majeur sur les applications en traitement du signal. Ces applications, parmi d'autres, montrent que l'analyse fractale est résolument passée depuis quelques années du stade descriptif au stade opérationnel [Adlakha02, Liu05, Jiang97, Harte01, Zhang08].

Les outils fractals développés et que nous allons utilisés sont les spectres multifractals et la dimension fractale.

Quand on cherche à analyser un signal, il est très fréquent qu'on établisse, de manière explicite ou implicite, une représentation temps-fréquence de ce signal. La transformée de Fourier n'est pas l'outil approprié pour mener cette analyse puisqu'elle masque l'évolution temporelle du signal. Par contre, comme nous le montrerons, la transformée en ondelettes et ses extensions fournissent des solutions intéressantes dans ce contexte. Comme la transformée en ondelettes est liés aux singularités du signal, elle sera utilisée dans l'analyse multifractale.

L'ensembles des algorithmes traités sont implémentés sous environnement Matlab 7.0.4, et testés sur des signaux appartenant à la base de données MIT/BIH.

Nous avons répartis notre travail en quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre le signal ECG sera décrit d'une manière générale, ainsi qu'une introduction à sa structure fractale.
- Le deuxième chapitre décrira l'analyse fractale et multifractale, la notion de régularité et l'exposant de Hölder ainsi qu'une représentation des spectres multifractals et les dimensions fractales qui ont été utilisés.
- Pour le troisième chapitre, l'utilisation des ondelettes dans l'analyse multifractale nous donnera un aperçu sur le formalisme multifractal.
- Et enfin le quatrième et dernier Chapitre, comportera une description et utilisation de la boite à outil Fraclab, le tracé des spectres multifractals et le calcul des dimensions fractales du signal ECG pour différents cas de sujets sains et présentant des pathologies cardiaques.

I.1 INTRODUCTION

L'électrocardiogramme (ECG) est un outil de pratique journalière extrêmement utile et important pour le médecin. Réaliser un ECG, consiste à enregistrer l'activité électrique du coeur. Cet examen permet une évaluation sémiologique et diagnostique pour aboutir à une action thérapeutique.

L'analyse de l'électrocardiogramme comprend la mesure des amplitudes et durées ainsi que l'examen de la morphologie de l'onde P, du complexe QRS, de l'onde T, de l'intervalle PR, du segment ST, de l'intervalle QT…

Dans ce chapitre, nous allons décrire le signal ECG d'une manière générale, et montrer sa structure fractale.

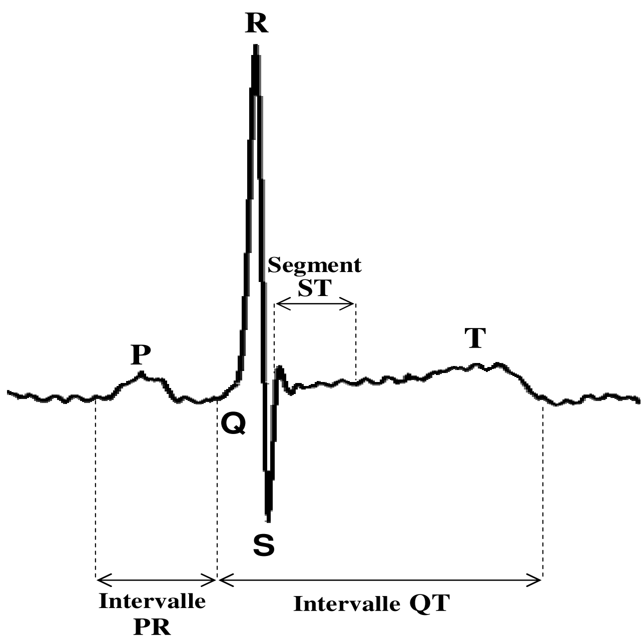


Figure I.1 : Le signal électrocardiogramme

I.2 LE SIGNAL ECG

I.2.1 HISTORIQUE

Le signal ECG remonte déjà en 1842, date à laquelle Carlo Matteucci à mis en évidence les potentiels électriques entraînaient par des courants électriques qui circulent dans le cœur. Ces derniers sont responsables de l'activité musculaire cardiaque. Les premières expérimentations sont réalisées en 1878 par John Burden Sanderson et Frederick Page qui détectent à l'aide d'un électromètre capillaire les phases QRS et T. En 1887 le premier électrocardiogramme humain est publié par Augustus D. Waller. En 1895 Willem Einthoven met en évidence les cinq déflexions P, Q, R, S et T, il utilise le galvanomètre à cordes en 1901 et publie les premières classifications d'électrocardiogrammes pathologiques en 1906. Il obtiendra en 1924 un prix Nobel pour ses travaux sur l'électrocardiographie. Les dérivations précordiales sont utilisées pour le diagnostic médical à partir de 1932 et les dérivations frontales unipolaires à partir de 1942, ce qui permet à Emmanuel Goldberger de réaliser le premier tracé sur 12 voies [Boutaâ06].

En 1938 une conférence internationale transatlantique a fixé la position des dérivations précordiales, V1 à V6.

Aujourd'hui l'électrocardiographie est une technique relativement peu coûteuse, permettant à l'aide d'un examen indolore et sans danger, de surveiller l'appareil cardio-circulatoire, notamment pour la détection des troubles du rythme et la prévention de l'infarctus du myocarde.

I.2.2 ÉLECTROCARDIOGRAMME

L'électrocardiographie (ECG) est la représentation graphique du potentiel électrique qui commande l'activité musculaire du cœur. Ce potentiel est recueilli par des électrodes à la surface de la peau. L'électrocardiogramme est le tracé papier de l'activité électrique dans le cœur [Wikipedia1].

Le signal électrique détecté est de l'ordre du millivolt. La précision temporelle nécessaire est inférieure à 0.5 ms. Les appareils étaient, jusqu'à une époque récente, analogiques. Les plus récents sont numériques. Un filtrage numérique permet d'éliminer les signaux de hautes fréquences secondaires à l'activité musculaire autre que cardiaque et aux interférences des appareils électriques. Un filtre basse fréquence permet de diminuer les ondulations de la ligne de base secondaire à la respiration.

La qualité du signal peut être améliorée par le moyennage de plusieurs complexes, mais cette fonction entraîne des artéfacts en cas d'irrégularités du rythme cardiaque ou d'extrasystoles, surtout ventriculaire. Cette technique de moyennage est particulièrement employée sur les appareils adaptés aux épreuves d'effort où le tracé est fortement artéfacté par le patient en mouvement.

I.2.3 LES DOUZE DERIVATIONS

L'ECG à douze dérivations a été standardisé par une convention internationale. Les douze dérivations permettent d'avoir une idée tridimensionnelle de l'activité électrique du cœur. Chaque dérivation représente le signal ECG …mais accentuées l'une par rapport à l'autre (Figure I.1)

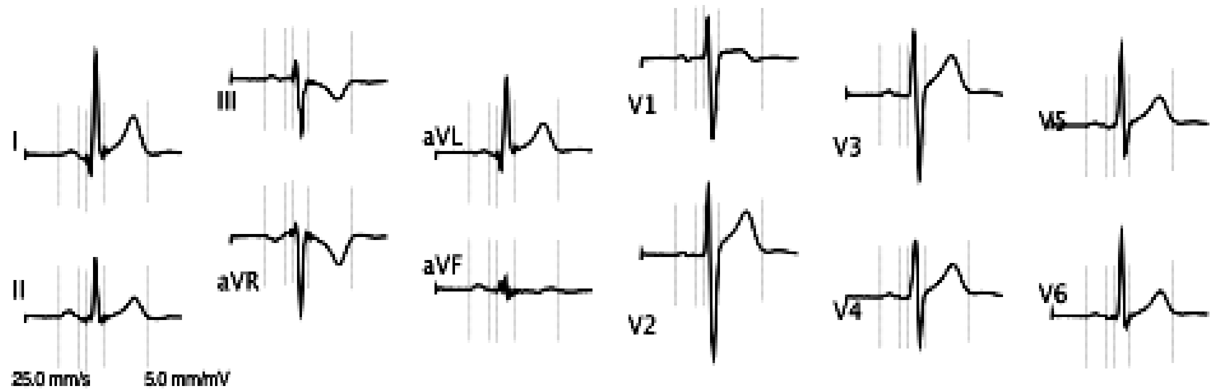


Figure I.2 : les douze dérivations standard

Elles représentantes six dérivations frontales et six autres précordiales

I.2.3.1 Six dérivations frontales

- DI : mesure bipolaire entre bras droit et bras gauche.
- DII : mesure bipolaire entre bras droit et jambe gauche.
- DIII : mesure bipolaire entre bras gauche et jambe gauche.

La lettre D pour dérivation n'est pas en usage dans les pays anglo-saxons qui les appellent tout simplement I, II et III

- aVR : mesure unipolaire sur le bras droit.
- aVL : mesure unipolaire sur le bras gauche.
- aVF : mesure unipolaire sur la jambe gauche.

La lettre a signifie "augmentée"

DI, DII, et DIII décrivent le triangle d'Einthoven, et on peut calculer la valeur de toutes ces dérivations à partir du signal de deux d'entre elles. Par exemple, si on connaît les valeurs de (DI) et (DII) : Enoncé de la Theorie d'Einthoven : le cœur se trouve au centre d'un triangle équilatéral formé par les membres supérieurs et la racine de la cuisse gauche.

- III = II – I
- aVF = II – I / 2
- aVR = – I / 2 – II / 2
- aVL = I – II / 2

Ces équations expliquent que les électrocardiogrammes numériques n'enregistrent plus en réalité que 2 dérivations et restituent les 4 autres à partir de celles-ci par simple calcul.

I.2.3.2 Six dérivations précordiales

- V1 : 4^e espace intercostal droit, bord droit du sternum (parasternal).
- V2 : 4^e espace intercostal gauche, bord gauche du sternum (parasternal).
- V3 à mi-chemin entre V2 et V4.
- V4 : 5^e espace intercostal gauche, sur la ligne médioclaviculaire.
- V5 : même horizontale que V4, ligne axillaire antérieure.
- V6 : même horizontale que V4, ligne axillaire moyenne.

I.2.3.3 Autres dérivations

Elles sont utilisées dans certains cas pour affiner, par exemple, le diagnostic topographique d'un infarctus du myocarde.

- V7 : même horizontale que V4, ligne axillaire postérieure.
- V8 : même horizontale que V4, sous la pointe de l'omoplate.
- V9 : même horizontale que V4, à mi-distance entre V8 et les épineuses postérieures.

- V3R, symétrique de V3 par rapport à la ligne médiane.
- V4R, symétrique de V5 par rapport à la ligne médiane.
- VE, au niveau de la xiphoïde sternale.

I.2.4 BASES DE L'INTERPRETATION D'UN ECG

La lecture et l'interprétation d'un ECG requièrent une grande habitude qui ne peut être acquise par le médecin que par une pratique régulière. Il existe des logiciels livrés avec certains électrocardiographes pouvant aider au diagnostic, mais leur fiabilité approximative ne permet en aucun cas de se substituer au médecin.

Un ECG normal n'élimine en aucun cas une maladie du cœur. Un ECG anormal peut être également tout à fait anodin. Le médecin ne se sert de cet examen que comme un outil parmi d'autres, permettant d'apporter des arguments pour étayer son diagnostic.

Le tracé électrique comporte plusieurs accidents répétitifs appelés « ondes ».

- L'onde P correspond à la dépolarisation (et la contraction) des oreillettes. On analyse sa forme, sa durée (qui est de 0,08 à 0,09 secondes), sa hauteur, son axe et sa synchronisation avec :

- Le complexe QRS qui correspond à la dépolarisation (et la contraction) des ventricules. L'onde Q est la première onde négative du complexe. L'onde R est la première composante positive du complexe. L'onde S est la deuxième composante négative. Suivant la dérivation et sa forme, on parle ainsi d'aspect « QS », « RS », voire « RSR' » (pour une forme en M avec deux positivités). La forme et la taille du QRS dépendent de la maladie du muscle cardiaque sous jacents mais avec une variabilité très importante; le QRS a une durée de 0,06 à 0,09 secondes
- L'onde T correspond à l'essentiel de la repolarisation (la relaxation) des ventricules, celle-ci commençant dès le QRS pour quelques cellules; elle dure 0,20 à 0,25 secondes.
- L'onde T atriale est masquée par l'onde QRS et correspond à la repolarisation (la relaxation) des oreillettes. Celle-ci est négative.

I.2.5 ÉLECTROCARDIOGRAMME NORMAL

I.2.5.1 L'Onde P

Au cours du rythme sinusal normal, la dépolarisation du myocarde auriculaire procède à partir du noeud sinusal, de haut en bas, et de droite à gauche. Sur le plan frontal, le vecteur de dépolarisation auriculaire est donc dirigé en bas et à gauche, ce qui produit une onde P positive dans les dérivations I et II et négative en aVR. Une onde P négative dans la dérivation I évoque soit une inversion des électrodes bras gauche et bras droit, soit beaucoup plus rarement une dextrocardie. Une onde P négative dans la dérivation II évoque un foyer auriculaire ectopique, la dépolarisation auriculaire se faisant alors de bas en haut [Siteweb1].

Sur le plan horizontal la dépolarisation auriculaire droite produit un vecteur dirigé vers les précordiales droites tandis que la dépolarisation auriculaire gauche qui lui succède produit un vecteur dirigé en arrière et à gauche, expliquant l'aspect biphasique de l'onde P (+-) fréquemment observé en V1.

Habituellement les ondes P sont le mieux visibles dans les dérivations II et V1. Voici les valeurs normales des paramètres de l'onde P :

- Durée < 0,11 seconde (Normale : 0,085 - 0,015s)
- Amplitude < 0,25 mV (2,5 mm)

I.2.5.2 Le complexe QRS

La dépolarisation ventriculaire se traduit par un complexe polyphasique, le complexe QRS. L'onde négative initiale est appelée onde Q : sa durée est généralement inférieure à 0,04 seconde et son amplitude dépasse rarement 1 à 2 mm. La première onde positive est appelée onde R. L'onde négative qui suit l'onde R est appelée onde S. Toute déflexion ultérieure positive ou négative sera désignée par les lettres R', S', R", S". Par convention, les lettres minuscules sont utilisées pour désigner les ondes de faible amplitude et les majuscules pour les ondes d'amplitude élevée [Siteweb1].

I.2.5.2.1 La durée du complexe QRS

La durée du complexe QRS normal varie en fonction de l'âge et du sexe : plus élevée chez les sujets âgés et chez les hommes. Elle sera mesurée dans la dérivation où le complexe QRS paraît le plus "large". En effet, la projection perpendiculaire du vecteur du début ou de la fin de la dépolarisation ventriculaire par rapport à certaines dérivations peut y produire un segment isoélectrique, ce qui donne l'impression que le complexe QRS est plus "mince" qu'en réalité. La mesure la plus fiable de la durée de QRS est obtenue en superposant les 12 dérivations enregistrées simultanément et en recherchant le début et la fin globale du QRS. La durée de QRS est normalement comprise entre 0,06 et 0,10 seconde. Au-delà de 0,12 seconde, on évoque un trouble "majeur" de conduction intraventriculaire; entre 0,10 et 0,12 seconde on peut parler de trouble "mineur" de conduction intraventriculaire.

I.2.5.2.2 L'amplitude des composantes du QRS

Elle varie en fonction de plusieurs facteurs : âge, sexe, race, index pondéral, morphologie thoracique et position du coeur dans le thorax. Les valeurs normales d'amplitude peuvent être consultées dans des tables et elles sont incluses dans les programmes d'analyse automatique de l'ECG. Elles sont généralement stratifiées en fonction des deux variables âge et sexe qui sont les principaux facteurs de variation chez l'adulte mais également, et dans une bien plus grande mesure, chez l'enfant et l'adolescent.

I.2.5.2.3 La morphologie du complexe QRS

De façon résumée, la dépolarisation ventriculaire peut se représenter par une série de vecteurs résultants instantanés successifs. L'activation initiale qui débute au moyen de la face gauche du septum interventriculaire produit un vecteur septal I dirigé en avant et à droite, et suivant la position du coeur, vers le haut ou le bas; ensuite l'activation des régions paraseptales et apicales produit un vecteur II dirigé en bas, en avant et légèrement vers la gauche; l'activation de la paroi libre du ventricule gauche dominant la dépolarisation déjà terminée de la paroi ventriculaire droite plus mince donne un vecteur III de grande amplitude dirigé en arrière, à gauche et vers le bas; finalement l'activation des parties postéro-basales des deux ventricules et du septum donne le dernier vecteur IV, plus petit, dirigé en arrière, à gauche ou légèrement à droite et vers le haut.

La connaissance de l'orientation spatiale de ces 4 vecteurs successifs permet de comprendre la morphologie du complexe QRS tant dans le plan frontal (dérivations périphériques), que dans le plan horizontal (dérivations précordiales).

I.2.5.2.4 Le complexe QRS dans l'ECG normal à 12 dérivations

Le novice en électrocardiographie peut s'étonner de ce que rien ne ressemble moins à un ECG normal que l'ECG d'un autre sujet normal ! Ces variations sont dues aux nombreux facteurs constitutionnels (âge, sexe, race, morphologie thoracique, poids, taille etc ...) qui influencent l'électrocardiogramme. Plusieurs traits constants peuvent cependant être décrits comme constitutifs de l'ECG normal.

I.2.5.3 L'Onde T

L'onde T correspond à la phase 3 terminale de la repolarisation ventriculaire. Elle a normalement un aspect asymétrique avec une pente initiale plus faible que son versant descendant, c'est-à-dire une montée plus lente que la descente, et un sommet légèrement arrondi. Son amplitude est faible, de 1 à 4 mm, grossièrement proportionnelle à celle de l'onde rapide QRS. En général, là où s'observe l'onde R la plus ample, s'observe aussi la plus grande onde T mais les ondes T les plus amples par rapport aux QRS s'observent en V2 et V3. L'orientation de l'onde T chez des adultes normaux est gauche, inférieure et, la plupart du temps antérieure. Chez les enfants, les adolescents et les jeunes femmes, elle peut être postérieure mais devient progressivement antérieure avec le vieillissement. L'onde T en V1 peut être positive, isoélectrique ou négative. Elle est généralement positive de V2 à V6 chez l'adulte. En règle générale, l'onde T normale est plus ample en V6 qu'en V1. Chez l'enfant et chez le jeune adulte, surtout chez la jeune femme, l'onde T peut être négative de V1 jusqu'en V3-V4 (onde T "juvénile"). Chez l'adulte, les dérivations périphériques montrent généralement une onde T positive, excepté aVR où l'onde T est toujours négative. L'onde T peut être négative dans la dérivation III si la position du coeur est horizontale et dans la dérivation aVL si la position du coeur est verticale. Avec le segment ST, l'onde T est la partie du tracé qui est la plus sensible aux influences extérieures reflétant des phénomènes physiologiques ou pathologiques [Siteweb1].

I.2.6 LA COMMANDE RYTHMIQUE DU SIGNAL

L'ECG est un signal physiologique généré par un système complexe d'autorégulation. Sur un cœur normal, le nœud sinusal est soumis à une régulation extra cardiaque qui a pour effet de réduire la fréquence cardiaque au repos et de l'augmenter au cours de l'effort physique. Cette régulation est assurée en grande partie par le système nerveux autonome [Malatesta]. Il comprend deux systèmes d'effet inverses :

I.2.6.1 Le système parasympathique

C'est l'élément dominant de la régulation de la fréquence cardiaque, il permet son ralentissement.

I.2.6.2 Le système sympathique

Il est surtout relié aux processus qui impliquent une dépense d'énergie, sa fonction principale est de combattre les effets du système parasympathique.

En fait ces deux systèmes résultant des interactions complexes d'un grand nombre d'éléments dont chacun agit d'une manière relativement simple.

Aussi et souvent dans différents cas de pathologies cardiaques et précisément les arythmies cardiaques [Boutaâ06], se traduisent par des irrégularités sur le signal ECG. Ces irrégularités peuvent être temporelles, fréquentielles et/ou morphologiques octroyant aussi au signal ECG sa nature de non stationnarité et non linéarité. Cependant toute irrégularité n'est pas pathologique : en effet, le système nerveux autonome, exerçant un contrôle permanent peut fortement accélérer le rythme en réponse à un contexte particulier : une période de stress ou d'effort.

De telles irrégularités qui apparaissent sur le signal ECG lui confèrent une structure fractale. Une telle structure peut être étudiée par une analyse fractale.

I.3 STRUCTURE FRACTALE

L'approche fractale pour l'étude des systèmes complexes a fait ses preuves en mathématiques et en physique. Mais c'est dans le domaine du traitement du signal que les progrès récents ont été les plus nets.

Une caractéristique des systèmes physiologiques est leur extraordinaire complexité. La non stationnarité et la non linéarité des signaux générés par les organismes biologiques défient l'approche traditionnelle liée au concept d'homéostasie et aux méthodologies d'analyses biostatistiques traditionnelles. En effet, le principe de l'homéostasie prétend qu'un système biologique s'autorégule pour réduire la variabilité et pour maintenir ses sorties constantes après une quelconque perturbation. Cependant, des faits nouveaux indiquent que les systèmes biologiques « sains » tendent à montrer des dynamiques irrégulières avec des fluctuations complexes, même à l'état de repos. Les méthodes issues des mathématiques non linéaires et de la physique ont relevé la présence de corrélations à long terme de type fractal dans les séries temporelles qui décrivent les fluctuations au cours du temps des systèmes physiologiques [Malatesta].

I.3.1 L'ANALYSE FRACTALE APPLIQUEE AUX SIGNAUX PHYSIOLOGIQUES

Il y a plus d'une vingtaine d'année, le mathématicien B. Mandelbrot a proposé l'adjectif fractal pour désigner des objets dont la géométrie complexe peut, pour simplifier, être caractérisée par une dimension non-entière. Le terme fractal s'adresse à des objets géométriques qui satisfont deux critères : l'auto-similarité et la dimension fractionnaire. L'auto-similarité définit le fait qu'un objet peut être décomposé en sous-unités, puis en sous-sous-unités, qui ressemblent à la structure de l'objet global et qui possèdent les mêmes propriétés statistiques que celui-ci [Kestener03].

Théoriquement, cette propriété est vraie pour un nombre infini de décompositions de l'objet en sous-unités. Cependant, dans le monde réel il est nécessaire d'imposer des bornes (supérieure et inférieure) pour pouvoir appliquer l'auto-similarité. Le deuxième critère, qui définit la fractalité d'un objet, postule que ce dernier doit avoir une dimension fractionnaire contrairement aux objets euclidiens caractérisés par une dimension entière.

Dans la nature, on retrouve de nombreuses structures non-euclidiennes fractales, comme les branches des arbres, le profil des côtes, les surfaces des montagnes. De même, de nombreuses structures anatomiques sont caractérisées par une géométrie fractale: les embranchements des veines et des artères, l'orientation de certains faisceaux du muscle cardiaque, l'architecture des voies aériennes pulmonaires et du système de conduction d'« His-Purkinje ». Cette auto-similarité des structures cardiopulmonaires sous-entend au moins une fonction physiologique importante : un transport rapide et efficient à travers des réseaux anatomiques à structure spatiale complexe. D'autres systèmes physiologiques sont caractérisés par une structure fractale facilitant la transmission de l'information (système nerveux), l'absorption des aliments (intestin) ou, simultanément, la distribution, le recueil et le transport (les canaux biliaires et rénaux, etc.). Avec le vieillissement et la maladie, les structures anatomiques fractales peuvent montrer une dégradation de leur complexité structurale [Malatesta].

L'analyse fractale appliquée avec succès dans le domaine biomédical, a été développée pour l'étude des objets complexes irréguliers pouvant présenter une structure fractale. L'étude de ces models à donner accès à la compréhension et le contrôle de quelques phénomènes complexes [Barrière08], tel que les signaux physiologiques qui caractérisent une organisation complexe (fractale et multifréquentielle). Le signal ECG est soumis à cette analyse dans le chapitre IV, pour l'étude de son comportement fractal. L'assertion de la notion de fractalité du signal ECG est citée dans quelques travaux [Wang03, Barrière08, Muller92, Turcott96, Smrčka03] et découverte en utilisant différents paramètres fractals tel que : dimensions fractales, spectres multifractales, exposant de Hölder, …

Un des grands mérites de Mandelbrot est d'avoir su reconnaître que de nombreuses structures ou dynamiques complexes multi-échelles observées dans de nombreux domaines des sciences fondamentales et appliquées, pouvaient être appréhendées au sein d'un cadre fédérateur basé sur les notions de fractale et d'invariance d'échelle.

I.3.2 SINGULARITES

L'analyse fractale consiste à étudier les signaux dont la régularité varie brutalement d'un point à un autre. Pour caractériser la structure singulière d'un signal, il est nécessaire de quantifier sa régularité : exposant de Hölder.

En mathématiques, la régularité locale d'une fonction est souvent mesurée avec des exposants de Lipschitz. Mallat et Hwang ont trouvé un rapport entre la transformée en ondelettes et l'irrégularité du signal: à une échelle assez petite, les maximum du module de la transformée en ondelettes indiquent les endroits des points représentant la variation du signal, qui fournissent une base pour fixer et caractériser les points irréguliers. Ces maxima de la transformée en ondelettes sont synchrones avec les structures transitoires et singulières du signal ECG et traduisent sa dimension fractale basée sur le changement de leurs propriétés géométriques à différentes échelles.
Les singularités correspondent à la présence de signaux transitoires fractionnés.

I.4 CONCLUSION

L'étude des singularités est un sujet d'une grande importance dans de nombreux domaines. L'étude de signaux à caractère fractal ou multifractal ont suscité des développements mathématiques importants qui ont eu des conséquences imprévues : non seulement ils ont fourni une base théorique solide à l'analyse de signaux fractals, mais en plus, ils ont jeté un nouvel éclairage sur des fonctions, ou des processus aléatoires, dont le caractère multifractal était jusqu'alors passé inaperçu.

L'ECG est un signal physiologique contrôlé par le système nerveux, qui contient des informations d'une importance capitale permettant une évaluation sémiologique et diagnostique pour aboutir à une action thérapeutique. Présentant certaines singularités et irrégularités, il peut donc montré une structure fractale. C'est ce que nous essayons de montrer dans le chapitre IV par les calculs des spectres multifractals et les dimensions fractales dont la principale motivation est d'effectuer une analyse fine des comportements singuliers de mesures.

II.1 INTRODUCTION

La notion de “fractal” caractérise des processus présentant des structurations sur plusieurs échelles, temporelles ou spatiales, ou encore des propriétés d'auto-similarité ou d'auto-transformabilité. Les signaux aléatoires fractals peuvent posséder des corrélations statistiques décroissant en loi de puissance, leur conférant une longue portée identifiant de la longue dépendance.

De tels comportements se rencontrent dans de nombreux processus complexes : trafic informatique ou routier, bruits de composants électroniques, turbulence, signaux biologiques, évolutions d'indices financiers, . . . La modélisation, la synthèse, l'exploitation de signaux possédant de telles propriétés fractales intéressent donc de nombreux secteurs des sciences naturelles et de la technologie, et demeurent encore une problématique nouvelle, non entièrement élucidée [Arnéo04].

L'analyse multifractale, introduite dans les années 80 par des physiciens pour rendre compte de phénomènes apparaissant en turbulence, s'est ensuite développée pour différents domaines [Lévy-Véhel95].

Les applications en traitement du signal et plus généralement en sciences de l'information ne sont apparues que plus tardivement. Une caractéristique des premières tentatives est la vision essentiellement descriptive qui y était à l'oeuvre : des signaux étaient analysés et des comportements fractals étaient ou non relevés, le plus souvent sous la forme d'une invariance d'échelle dans une certaine gamme de résolutions. On en déduisait une “dimension fractale”, et les développements s'arrêtaient là. Cette phase descriptive était très certainement nécessaire, et elle a en tout cas permis de se familiariser avec des notions nouvelles à l'époque [Lévy-Véhel00].

Cependant, elle a aussi, un temps, donné l'impression que si la géométrie fractale pouvait offrir aux sciences de l'ingénieur une description compacte et “intelligente” de certains phénomènes, elle ne permettait pas de créer des procédés opératoires nouveaux.

Deux importantes évolutions de nature différente ont permis d'entrer dans une phase “opérationnelle” au début des années 90 [Lévy-Véhel00].

La première, qui s'inscrit naturellement dans les développements d'une discipline jeune, est l'enrichissement des outils de base de la théorie en vue des applications à la variété des phénomènes naturels : de plus que la caractérisation d'un signal par sa seule “dimension fractale”, des mesures beaucoup plus fines, comme la lacunarité ou l'analyse multifractale ont étaient ajoutés ; les modèles de processus fractals, d'abord parfaitement autosimilaires, se sont diversifiés pour tenir compte d'invariances dans des sens généralisés ; enfin, les méthodes statistiques d'analyse des signaux fractals se sont perfectionnées pour fournir des estimateurs plus robustes et applicables dans des situations plus générales.

La deuxième évolution est d'essence plus conceptuelle, et, semble-t-il, particulière à nos domaines. Au lieu de continuer à rechercher des phénomènes "fractals" (c'est-à-dire invariants d'échelle) et à décrire cette invariance à l'aide de diverses dimensions, on s'est progressivement rendu compte du bénéfice qu'il pouvait y avoir à appliquer des outils fractals à des signaux a priori quelconques. Autrement dit, au lieu d'analyser un signal pour savoir s'il est un objet fractal, on lui fait subir des traitements fractals indépendamment de son possible invariance d'échelle. Cette évolution importante surprendra moins si on la met en parallèle avec la manière dont on utilise des méthodes plus classiques. En effet, elle consiste simplement à user de l'analyse fractale comme on le fait habituellement des autres outils mathématiques en sciences de l'ingénieur : moyennant certaines hypothèses. On peut toujours calculer le gradient d'un signal discret (par exemple *via* un modèle, ou en le régularisant au préalable), ou sa transformée de Fourier (par exemple en le prolongeant de manière adéquate en dehors du domaine où il est observé). De même, on calculera des dimensions ou un spectre multifractal associés à un signal en faisant des hypothèses sur celui-ci. Ces dernières sont d'ailleurs en général de nature semblable à celles faites dans les analyses "classiques", à savoir principalement : appartenance à une classe de modèles, et "régularisation" ou "prolongement" du signal (dans les échelles plutôt qu'en espace).

II.2 NOTIONS DE REGULARITE

L'analyse de la régularité locale d'objets tels que des fonctions, des processus stochastiques, des signaux ou des images, constitue une branche jeune des mathématiques. Elle est née avec le perfectionnement des techniques d'analyse numérique, d'expérimentation et de simulation en physique. En particulier, depuis le début des années 1970, la présence de rapides oscillations locales a été mise en évidence dans plusieurs contextes, notamment en mécanique des fluides. Dans ce cadre, les irrégularités mesurées dans la vitesse d'un fluide turbulent reflètent le fait que l'énergie s'y dissipe de façon hétérogène. Ce phénomène de grande variabilité, aujourd'hui dit de "multifractalité", a conduit B. Mandelbrot à introduire ses cascades multiplicatives aléatoires. Ces cascades constituent le premier modèle multifractal, utilisé plus tard par U. Frisch et G. Parisi dans le cadre de la turbulence pleinement développée pour illustrer leur conjecture [Seuret03].

II.2.1 REGULARITE PONCTUELLE

Dans certaines situations, des informations essentielles sont contenues dans la régularité ponctuelle d'une fonction et dans la manière dont celle-ci varie. Cette notion peut être formalisée de diverses façons : nous pouvons citer les exposants de Hölder et les exposants 2-microlocaux. La régularité deux microlocale étend la notion de régularité Hölderienne et est plus robuste vis à vis de certaines opérations [Projet Fractales97].

Il existe de multiples façons de réaliser une analyse fractale d'un signal. Nous nous intéressons à deux d'entre elles, le calcul de la régularité ponctuelle et l'analyse multifractale.

Dans le premier cas, on associe à un signal $f(t)$ un autre signal $\alpha(t)$, la fonction de Hölder de f, qui mesure la régularité de φ en chaque point τ. Cette dernière peut être évaluée de diverses manières. L'exposant de Hölder ponctuel α de f en x_0, par exemple, est défini par [Projet Fractales98]:

$$\alpha(x_0) = \lim_{\rho \to 0} \sup \left\{ \alpha : \exists c > 0, \left| f(x) - f(x_0) \right| \le c \left| x - x_0 \right|^{\alpha}, \left| x - x_0 \right| < \rho \right\} \tag{II.1}$$

(cette définition est valable pour α non entier et si f est non dérivable, sinon il faut retrancher un polynôme au lieu de $f(x_0)$).

On peut aussi définir un exposant local $\alpha_l(x_0)$ par :

$$\alpha_l(x_0) = \lim_{\rho \to 0} \sup \left\{ \alpha : \exists c > 0, \left| f(x) - f(y) \right| \le c \left| x - y \right|^{\alpha}, \left| x - x_0 \right| < \rho, \left| y - x_0 \right| < \rho \right\} \tag{II.2}$$

α et α_l ne coïncident pas en général (pour $f(x) = |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{|x|^{\beta}}, \alpha(0) = \alpha$ et $\alpha_l(0) = \frac{\alpha}{1+\beta}$) et ont des propriétés très différentes. Par exemple, α_l est stable par différentiation ($\alpha_l(f', x_0) = \alpha_l(f, x_0) - 1$) alors que α ne l'est pas.

En général, plus $\alpha(t)$ est petit, plus la fonction f est irrégulière en τ. Un exposant négatif est le signe d'une discontinuité, alors que si $\alpha(t)$ est strictement supérieur à 1, f est au moins une fois dérivable en t. La caractérisation des signaux par leur régularité Höldérienne a été considérée par de nombreux auteurs d'un point de vue théorique (par exemple en relation avec la décomposition en ondelettes) et dans les applications en traitement du signal (analyse de la turbulence, segmentation d'image). Une telle approche est intéressante dès que l'information pertinente réside dans les irrégularités du signal plus que, par exemple, dans son amplitude ou dans sa transformée de Fourier. C'est en particulier le cas quand on cherche à détecter des contours dans une image ou à caractériser les parties non voisées d'un signal de parole. Les questions qui se posent naturellement dans ce contexte et qui sont en partie résolues [Lévy-Véhel], sont la caractérisation des fonctions de Hölder ponctuelles ou locales, la comparaison des différentes mesures d'irrégularité, et leur estimation sur des signaux réels [Projet Fractales02].

Une généralisation de la régularité Hölderienne est fournie par l'analyse 2-microlocale [Guiheneuf98]. Les espaces 2-microlocaux $C_{x_0}^{s,s'}$ par l'adjonction d'un deuxième indice, permettent de prendre en compte un comportement *au* voisinage du point. Bénéficiant d'une caractérisation simple au travers de conditions de décroissance des coefficients d'ondelettes du signal, les espaces 2-microlocaux jouissent en particulier de la propriété suivante :

$$f \in C_{x_0}^{s,s'} \Leftrightarrow f' \in C_{x_0}^{s-1,s'} \qquad \text{(II.3)}$$

Une nouvelle caractérisation temporelle des espaces 2-microlocaux a été proposée [Projet Fractales97]. Elle permet en particulier la mise au point de procédure d'estimation efficace. Aussi un formalisme 2-microlocal développé par analogie au formalisme multifractal. Celui-ci permet de définir des opérateurs 2-microlocaux qui agissent de façon fine sur la régularité ponctuelle des fonctions [Projet Fractales98].

Il arrive que la fonction de Hölder soit très simple alors que le signal est irrégulier. Il existe cependant des signaux, d'apparence très irrégulière, pour lesquels la fonction de Hölder est encore plus irrégulière, par exemple des signaux continus f tels que α_f est partout discontinue. Dans ces situations, entre autres, il est plus intéressant d'avoir recours à une autre description du signal, le spectre multifractal : au lieu de donner pour chaque t, la valeur de l'exposant de Hölder, on regroupe tous les points de même exposant α dans un sous-ensemble E_α, et on caractérise l'irrégularité de façon globale en calculant, pour chaque valeur de α, la dimension de Hausdorff $f_h(\alpha)$ de l'ensemble E_α. Ainsi et de façon géométrique, évaluer la « taille » des parties du domaine de ϕ où une singularité donnée apparaît. Une autre possibilité est de donner une caractérisation statistique de la répartition des singularités : plus précisément, le spectre de grande déviation $f_g(\alpha)$ estime la vitesse exponentielle de décroissance de la probabilité de rencontrer une singularité à peu près égale à α à la résolution n quand n tend vers l'infini [Projet Fractales97].

Ce type d'analyse, d'abord apparu dans le contexte de la turbulence, s'est ensuite beaucoup développé à la fois au plan théorique (analyse de mesures ou fonctions auto-similaires dans un cadre déterministe et aléatoire, extensions aux capacités, spectres d'ordres supérieurs) et dans les applications (étude des séquences d'ADN, analyse de la distribution des tremblements de terre, traitement du signal, segmentation et débruitage d'images, analyse du trafic routier et internet) [Projet Fractales98].

II.2.2 LA REGULARITE HÖLDERIENNE PONCTUELLE ET UNIFORME

La régularité hölderienne ponctuelle d'une fonction est définie de la façon suivante [Mélot02] :

Définition1 : Soit $x_0 \in \Re^d$ et soit α un réel tel que $\alpha \geq 0$. Une fonction $f \in L^{\infty}_{loc} f : \Re^d \to \Re$ est $C^{\alpha}(x_0)$ si il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_{xo} de degré au plus $[\alpha]$ tel que dans un voisinage de x_0,

$$\left| f(x) - P_{xo}(x) \right| \leq C \left| x - x_0 \right|^{\alpha} \tag{II.4}$$

Remarquons que cette définition est locale et n'implique aucune régularité hölderienne uniforme.

L'exposant de Hölder ponctuel de f en x_0 est :

$$h_f(x_0) = \sup\left\{\alpha : f \in C^{\alpha}(x_0)\right\} \tag{II.5}$$

On a clairement que $C^{\alpha}(x_0) \subset C^{\alpha'}(x_0)$ si $\alpha' \leq \alpha$

D'autre part notons que si $\alpha < h(x_0)$ alors $f \in C^{\alpha}(x_0)$, mais on n'a pas nécessairement $f \in C^{h(x_0)}(x_0)$.

Définition2 : soit α un réel non entier positif. Une fonction $f : \Re^d \to \Re$ est dans $C^{\alpha}(\Re^d)$ si il existe une constante $C > 0$ tel que l'équation (II.4) soit vraie pour tout x_0 dans $\Re^d$.

On peut noter que, à cause du fait que la constante de la définition2 doit être la même pour tout x_0, l'exposant de Hölder uniforme n'est pas l'infimum des exposants de Hölder ponctuels de la fonction.

II.2.3 ANALYSE 2-MICROLOCALE

La régularité 2-microlocale étend la notion de régularité Hölderienne et est beaucoup plus robuste vis à vis de nombreuses opérations mathématiques "standards". Une étude systématique de la caractérisation des exposants 2-microlocaux au travers de conditions de décroissance sur la transformation en ondelettes continue du signal a été effectuée, aboutissant à des résultats de prescription et d'estimation en un point [Projet Fractales97].

La définition de l'exposant de Hölder, facile à appréhender, reproduit de façon assez fidèle la notion intuitive de régularité ponctuelle. Toutefois, trop attaché aux valeurs ponctuelles de la fonction, l'exposant de Hölder ne se comporte pas correctement sous l'action des opérateurs (pseudo)-différentiels [Guiheneuf98]. En particulier, le numéricien comme le traiteur de signaux aimeraient disposer de relations du type [Projet Fractales98]:

$$
\begin{aligned}
& f \in C_{xo}^{\alpha} \overset{?}{\Rightarrow} f' \in C_{xo}^{\alpha-1} \\
& f \in C_{xo}^{\alpha} \overset{?}{\Rightarrow} H(f) \in C_{xo}^{\alpha}
\end{aligned}
\tag{II.6}
$$

Où H() désigne la transformation de Hilbert. La caractérisation de la régularité par la seule donnée des exposants Hölderiens dévoile alors ses limites car les relations précédentes ne sont pas vérifiées. On introduit alors les espaces 2-microlocaux $C_{x_0}^{s,s'}$ qui, par l'adjonction d'un deuxième indice permettent de prendre en compte un comportement au voisinage du point. Bénéficiant d'une caractérisation simple au travers de conditions de décroissance portant sur des décompositions de type Littlewood-Paley (Fourier) ou ondelettes (temps-échelle), les espaces 2-microlocaux, définis par J.-M. Bony, profitent des propriétés suivantes [Seuret03]:

$$
\begin{aligned}
& f \in C_{xo}^{s,s'} \Rightarrow f' \in C_{xo}^{s-1,s'}, \\
& f \in C_{xo}^{s,s'} \Rightarrow H(f) \in C_{xo}^{s,s'}, \\
& f \in C_{xo}^{s,s'} \Rightarrow f \in C_{xo}^{s}, \forall (s+s') > 0
\end{aligned}
\tag{II.7}
$$

Une étude extensive des conditions 2-microlocales exprimées dans le plan temps-échelle a été réalisée, aboutissant à un résultat de prescription de régularité 2-microlocale arbitraire en un point [Guiheneuf98].

II.2.4 ANALYSE DE REGULARITE LOCALE

L'analyse 2-microlocale permet de généraliser la notion d'exposant de régularité pour les fonctions en associant à chaque point non plus un seul exposant, mais une courbe appelée frontière 2-microlocale. Cela permet d'obtenir une caractérisation plus fine du comportement d'une fonction. En se fondant sur la théorie des ondelettes, un formalisme 2-microlocal a été établi liant les coefficients d'ondelettes aux frontières 2-microlocales par une transformée de Legendre [Seuret03, Vacher04].

II.2.5 ETUDE DES EXPOSANTS DE HÖLDER COMME MESURE DE LA REGULARITE

L'exposant de Hölder ponctuel est, avec la dimension de boite des graphes, une des mesures de régularité les plus utilisée en traitement du signal. Il semble cependant que dans la majorité des cas, ce ne soit pas l'exposant de Hölder ponctuel qui soit estimé, mais plutôt un exposant relativement proche, nommé exposant de Hölder local. Il est montré en particulier que dans certains cas, afin de mesurer l'exposant ponctuel et non local, l'utilisation de méthodes directes est préférable aux méthodes par ondelettes [Projet Fractales98].

L'exposant de Hölder ponctuel est très largement utilisé en traitement du signal notamment parce qu'il est facile à interpréter, autant d'un point vue mathématique que pratique. D'autre part, il permet de caractériser une importante quantité de signaux. Notons que:

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha : f \in C_x^\alpha\}, \tag{II.8}$$

la fonction de Hölder ponctuelle d'un signal [Lévy-Véhel].

La classe des fonctions de Hölder ponctuelle d'un signal est exactement celle des fonctions qui sont limites inférieures de fonctions continues.

Ceci étant, cet exposant présente aussi de nombreux désavantage d'où l'étude des espaces 2-microlocaux. Cependant, les algorithmes à base d'ondelettes estiment, non pas l'exposant de Hölder ponctuel, mais plutôt un exposant proche, nommé "exposant de Hölder local" [Projet Fractales98]:

On dit que $f \in C_l^\alpha(\Omega)$ si :

$$\exists C : \forall x, y \in \Omega : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < C \tag{II.9}$$

Ensuite :

$$\alpha_l(f, x_0, \rho) = \sup\{\alpha : f \in C_l^\alpha(B(x_0, \rho))\} \tag{II.10}$$

Soit f une fonction continue. L'exposant de Hölder local de f en x_0 est le réel :

$$\alpha_l(f, x_0) = \lim_{\rho \to 0} \alpha_l(f, x_0, \rho) \tag{II.11}$$

Cet exposant est beaucoup plus stable numériquement que l'exposant ponctuel. C'est là une propriété extrêmement intéressante et qui le rend très attrayant dans de nombreuses applications où l'analyse de la régularité ne nécessite pas d'être pointilleuse. Cependant, la caractérisation de la régularité par cet exposant est relativement grossière, puisque la classe des fonctions de Hölder locales est celle des fonctions semi continues inférieurement [Seuret03].

II.2.6 PROCESSUS FRACTALS

Les processus à mémoire longue (c'est-à-dire dont la fonction d'autocorrélation décroît «lentement») et ceux dont la variance marginale est infinie possèdent des propriétés intéressantes, parfois contre intuitives. Les processus tels que le mouvement Brownien fractionnaire (mBf) ou les processus α-stables, ont des caractéristiques fractales comme l'auto-affinité ($x(at) \overset{d}{=} a^H x(t)$, où $\overset{d}{=}$ signifie l'égalité en distribution), l'irrégularité des trajectoires, ou la mémoire à long terme (décroissance lente de la fonction d'autocorrélation $E(x(t)x(t+\tau)) \sim |\tau|^{\beta}$ quand $\tau \to \infty,\ -1 < \beta < 0$). Ces processus s'éloignent des modèles « classiques » de deux façons [Projet Fractales97]:

- Les processus α–stables ont, pour $\alpha < 2$, une variance infinie. Les lois marginales sont caractérisées par quatre paramètres : $\alpha \in (0, 2]$ décrit l'épaisseur des $(E(|X|^{\beta})$ de distribution dès que $\beta \geq \alpha$ si $\alpha \neq 2$), μ est un paramètre de localisation (égal à la moyenne quand $\alpha > 1$), $\gamma > 0$ est le paramètre d'échelle, et $\beta \in [-1,1]$ rend compte de l'asymétrie de la distribution. La variance infinie induit des discontinuités dans les trajectoires et influe sur leur dimension de Hausdorff.
- Les processus à mémoire longue présentent une divergence de la densité spectrale à l'origine, qui se traduit par la présence de « pseudo-cycles » de toutes tailles sur les trajectoires.

Dans ces deux cas, la plupart des outils classiques (théorème central limite, convergence d'estimateurs) ne s'appliquent plus sous leur forme usuelle, et il faut leur substituer des généralisations. Plusieurs recherches s'attachent à décrire certaines propriétés fractales et multifractales de ces processus et à en chercher des extensions qui les rendent plus adaptées à certaines applications. A titre d'exemple, le mouvement Brownien fractionnaire (mBf) possède une régularité ponctuelle presque sûre identique en chaque point. Cette caractéristique en restreint l'utilisation pratique, ainsi il a été défini une généralisation, appelée mouvement Brownien multifractionnaire [Projet Fractales98], qui permet un contrôle en chaque point de l'exposant de Hölder.

D'autre part, les processus et plus généralement tous les signaux fractals ne sont jamais à bande limitée. On ne peut donc pas en principe les échantillonner sans les filtrer au préalable. Ce filtrage induit parfois des pertes d'informations essentielles. Un sujet d'étude fondamental est d'essayer de contourner ces difficultés en définissant de nouvelles procédures d'échantillonnage [Projet Fractales02].

Il y a deux manières de définir une fonction aléatoire [Demichel06]. La première consiste en une définition implicite à l'aide d'un certain nombre de conditions qui doivent être satisfaites. C'est ainsi qu'est naturellement construit le mouvement brownien. Cette méthode permet de prescrire des propriétés, comme la continuité, que le modèle doit absolument posséder. La difficulté est toutefois de démontrer qu'une telle fonction existe, et réside donc dans le choix des conditions initiales. Une fois cette question réglée, on dispose en général de renseignements précis, comme la loi des accroissements, leur indépendance, qui permettent de bien connaître le signal. Un dernier problème, d'ordre pratique, est de simuler la fonction à partir de propriétés abstraites. Aujourd'hui encore, de nouvelles méthodes pour produire concrètement un mouvement brownien sont étudiées.

La seconde façon de procéder est de décrire la fonction au moyen d'une formule mathématique claire : les séries sont particulièrement appropriées. Il revient au même de disposer d'une règle de construction effective. Les systèmes de fonctions itérés (IFS) permettent par exemple de construire des graphes de fonctions continues de façon simple. Toutefois, les modèles obtenus de cette façon héritent de propriétés inhérentes à l'algorithme de construction, comme l'auto-affinité. De nombreuses fonctions relèvent des deux types précédents [Demichel06].

II.2.7 UNE GENERALISATION DU MOUVEMENT BROWNIEN MULTIFRACTIONNAIRE

Le Mouvement Brownien Multifractionnaire (mBm) est un processus gaussien continue qui généralise le célèbre Mouvement Brownien Fractionnaire de Mandelbrot et Van Ness [Demichel06]. La régularité des trajectoires du mBm peut être prescrite ; lorsque $H(t)$ est une fonction Hölderienne à valeurs dans [a,b] $[a,b] \subset]0,1[$, on peut construire un mBm dont l'exposant de régularité ponctuel en tout point t_0 est égal à $H(t_0)$. La généralisation du mBm est définit pour $H(t)$ appartenant à une classe de fonctions beaucoup plus large que la classe des fonctions Hölderienne, $H(t)$ peut être notamment une fonction très irrégulière.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire (mBf) est le processus gaussien centré, défini par [Projet Fractales98] :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+1/2}} dW(\xi) \qquad \text{(II.12)}$$

où $dW(\xi)$ est une mesure Brownienne et où $H \in]0,1[$. Un des principaux intérêts du mBf est que l'on peut prescrire la régularité de ses trajectoires. Plus précisément, l'exposant de Hölder ponctuel du mBf en un point quelconque t_0, est égal à H. Le mBf s'est révélé être très utile du point de vue des applications : il a permis de modéliser différents phénomènes notamment en économie, dans l'étude de la turbulence et en traitement du signal et de l'image. Toutefois, la régularité des trajectoires du mBf est partout la même et cela peut être indésirable dans certaines situations. Cela est l'une des raisons pour lesquelles il est souhaitable de construire des processus qui généralisent le mBf et tels que l'exposant de régularité ponctuel dépende de t. Une première généralisation du mBf est le Mouvement Brownien Multifractionnaire (mBm), qu'on peut aussi définir par l'équation

(II.12) mais cette fois le paramètre H est une fonction Hölderienne de t et on a pour tout t_0, $\alpha_{mBm}(t_0) = H(t_0)$

II.2.8 LES SYSTEMES DES FONCTIONS ITEREES (IFS)

Cette théorie a été introduite récemment dans le contexte de la géométrie fractale. Ces modèles représentent un grand potentiel dans le traitement du signal, qui génère des propriétés intéressantes des signaux fractals. En particulier, grâce à l'analyse multifractale et à la théorie des systèmes de fonctions itérées, on a pu appliquer les outils fractals à la modélisation fractale et multifractale du traffic internet et à des signaux a priori non fractals, comme les images [Portefaix02].

II.2.9 ESTIMATION

Si l'on veut utiliser l'information fournie par la régularité Höldérienne dans des applications pratiques en traitement du signal, il est essentiel de pouvoir estimer α à partir de données discrètes. Disons qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode fiable qui le permette même pour des signaux bruités [Lévy-Véhel].

Cela tient à plusieurs facteurs :

- Le principal est le caractère discret des données. Comme l'optimalité de $\alpha(x)$ dépend d'une suite $x_n \to x$, on peut très bien se retrouver dans des situations où tous les points d'échantillonnages sont "loins" des x_n, et donc font croire à une régularité plus élevée.
- La fonction de Hölder peut être extrêmement irrégulière, par exemple partout discontinue. Il est clair que, sans hypothèses supplémentaires sur $\alpha(x)$, toute méthode d'estimation rencontrera de sérieuses difficultés.

Le cas qui peut être traité est celui utilisant un estimateur à base d'ondelettes.

II.3 L'ANALYSE MULTIFRACTALE

L'analyse multifractale a pour but l'étude de fonctions dont la régularité ponctuelle peut varier d'un point à un autre. Les premiers outils pour mesurer la régularité sont familiers à tous : continuité, dérivabilité en un point. L'exposant de Hölder introduit un continuum entre ces notions et permet de repérer précisément la régularité grâce à un paramètre réel positif : une fonction f est $C^\alpha(x_0)$ s'il existe un polynôme P de degré au plus $[\alpha]$ tel que [Arnéo04]:

$$|f(x) - P(x - x_0)| \le C|x - x_0| \qquad \text{(II.13)}$$

L'exposant de Hölder de *f* en x_0 est alors

$$H_f(x_0) = \sup \{ \alpha : f \text{ est } C^\alpha(x_0) \} \qquad \text{(II.14)}$$

On a vu que l'on s'attend à ce que les ensembles « isohölder » $A_h = \{x : H_f(x) = h\}$ soient des fractals. Si tel est le cas, le paramètre naturel à déterminer est leur dimension de Hausdorff [Arnéo04].

Finalement, on cherchera donc à calculer la fonction $D(h) = \dim(A_h)$ appelée spectre de singularités de *f*. Réaliser l'analyse multifractale d'une fonction *f*, c'est déterminer son spectre de singularités [Arnéo04].

Les singularités et les structures irrégulières d'un signal sont porteuses d'informations pertinentes. Pour caractériser ces structures singulières, il est nécessaire de quantifier la régularité d'un signal: exposant de Hölder [Projet Fractales02].

Il existe de multiples façons de réaliser une analyse fractale d'un signal. Nous pouvons citer le calcul de la régularité ponctuelle et l'analyse multifractale. Cette dernière fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'un signal: la première est obtenue via l'exposant de Hölder, et la seconde grâce aux spectres multifractals [Projet Fractales02].

L'analyse multifractale concerne l'étude des fonctions dont la régularité ponctuelle varie de point en point. Une approche a alors été développée qui consiste à étudier les ensembles de points où la fonction a une régularité ponctuelle donnée.

II.3.1 SPECTRES MULTIFRACTALS

Dans de nombreux cas, l'information fournie par la fonction $\alpha(x)$ est soit difficile (voire impossible) à obtenir, soit trop complexe pour pouvoir être exploitée. Il peut dans ce cas être avantageux de considérer une information simplifiée, de plus haut niveau, qui consiste à décrire, d'un point de vue géométrique ou statistique, la répartition des exposants de Hölder du signal : cette approche est appelée analyse multifractale, et trois type de spectres multifractals sont usuellement définis [10] : f_h, f_g, f_l qui fournissent des informations complémentaires. f_h renseigne sur la répartition géométrique des singularités, et f_g sur leur distribution statistique.

Réaliser une analyse multifractale sur une mesure revient à évaluer les trois spectres multifractals. Il existe des limitations dues aux difficultés algorithmiques d'estimations des deux spectres f_h et f_g. Une manière élégante de contourner ces difficultés consiste à calculer le spectre de Legendre f_l, qui est la transformée de Legendre d'une certaine quantité qu'on appelle les exposants de Rényi τ (q) des moments d'ordre q de la mesure. Le formalisme multifractal en particulier cherche des conditions sous lesquelles cette approche est valide : elles correspondent à des hypothèses de régularité très restrictives, on parle alors de formalisme multifractal fort [Lévy-Véhel].

II.3.1.1 Spectre de Hausdorff

C'est ce spectre qui donne son nom à l'analyse multifractale, puisque l'on considère ici que chaque exposant de Hölder définit, comme ci-dessous, un ensemble fractal, dont on va calculer la dimension, et que le support du signal X est donc formé de l'union, éventuellement non dénombrable, d'ensemble fractals de dimension différentes. Plus précisément, soit:

$$E_{\alpha} = \{t / \alpha(x) = \alpha\} \qquad \text{(II.15)}$$

On note

$$f_h(\alpha) = \dim_H E_{\alpha} \qquad \text{(II.16)}$$

Où $\dim_H$ dénote la dimension de Hausdorff. f_h est appelé spectre de Hausdorff de X ; il fournit une caractérisation géométrique des singularités du signal.

La définition d'un estimateur de la dimension de Hausdorff, avec pour application principale, le calcul du spectre multifractal de Hausdorff, est encore au stade de la recherche [Lévy-Véhel04, Canus], car il est toujours impossible à estimer à partir de données réelles [Barrière08].

II.3.1.2 Spectre de grandes déviations

On essaie ici de caractériser de façon statistique les singularités.

Plus précisément, on définit, en se restreignant pour simplifier à un signal X défini sur [0,1] et à une analyse par rapport aux intervalles dyadiques.

α_n^k est appelé exposant de grain à la résolution n. Il mesure, en gros, la vitesse à laquelle le signal varie dans une période de temps de 2-n: si α_n^k=1, la variation est "douce", plus α_n^k est petit, plus la variation est grande, et plus α_n^k est grand, plus la variation est petite. $f_g(\alpha) < 1$

$f_g(\alpha)$ mesure alors la vitesse avec laquelle la probabilité de rencontrer α tend vers 0. f_g est appelé spectre de grande déviation, pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe suivant. Il est noté que, de manière intuitive, les procédures qui conduisent au calcul de f_h et f_g sont très proche, à une "inversion de limite" près [Lévy-Véhel]:

Pour f_h, il faut:

- calculer l'exposant de Hölder en faisant tendre la résolution vers l'infini,
- "compter" le "nombre" de points ayant un exposant fixé, c'est-à-dire qu'on calcule la dimension de Hausdorff de ces points.

Pour f_g :

-compter combien d'intervalles ont un exposant de grain fixé

-faire ensuite tendre la résolution vers l'infini en effectuant une normalisation logarithmique pour obtenir f_g.

Bien que le spectre des grandes déviations joue un rôle essentiel dans l'analyse multifractale [Lévy-Véhel04], les méthodes pour l'estimer demeurent à l'heure actuelle peu développées.

II.3.1.3 Spectre de Legendre

f_g s'interprète naturellement comme la fonction de taux d'un principe de grande déviation quand les hypothèses du théorème de Gätner-Ellis sont vérifieés [Lévy-Véhel]. Voici les détails. On pose:

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| X\left((k+1)2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right) \right|^q \tag{II.17}$$

Pour $q \in IR$, avec la convention $0^q = 0$.

On définit ensuite :

$$\tau(q) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log S_n(q)}{-n} \tag{II.18}$$

Puis : $$f_l(\alpha) = \tau^*(\alpha) = \inf_q (q\alpha - \tau(q)) \tag{II.19}$$

Dans le chapitre IV, il y aura plus de détails sur ce spectre où il sera utilisé.

II.3.1.4 Comparaison des spectres

Le spectre de Hausdorff fournit une caractérisation géométrique de la répartition des singularités du signal. f_g, lui, en décrit un aspect statistique. Enfin, f_l n'a pas de signification simple dans le cas général, mais, si le formalisme faible est valide, il fournit une méthode d'estimation de f_g beaucoup plus fiable que la définition directe : on remplace des calculs locaux et deux passages à la limite par un calcul global (une moyenne), et un seul passage à la limite [Lévy-Véhel].

Dans certain cas, en particulier si une structure multiplicative "stricte" est à l'œuvre, on dispose même d'un formalisme multifractal fort, qui indique que:

$$f_h = f_g = f_l \tag{II.20}$$

Ce cas est très favorable, car f_h est encore plus difficile à évaluer que f_g : calcul d'exposants ponctuels et de dimension de Hausdorff sont en effet en général très délicats aussi bien en théorie que dans les applications [Lévy-Véhel, Projet Fractales95].

Dans le cas général cependant, seules les relations ci-dessous sont vraies sans aucune condition:

- $f_h \leq f_g \leq f_l$ (II.21)
- $f_l = f_g^{**}$ (II.22)
- $f_g(\alpha^+) = q\alpha^+ - \tau(q) \quad q > 0$
  $f_g(\alpha^-) = q\alpha^- - \tau(q) \quad q < 0$ (II.23)

Où $\alpha^+ = \tau'(q+), \alpha^- = \tau'(q-)$ (II.24)

Ces relations montrent qu'en général, f_l contient moins d'informations que f_g. En particulier, f_l est toujours concave.

Pour une extension de l'analyse fractale vers une nouvelle description de la distribution des singularités d'un signal, d'autres spectres ont été développés [Vojak96], mais nous ne les mentionnerons pas.

II.3.2 DIMENSIONS FRACTALES

Il existe de nombreuses manières, qui ne sont pas en général équivalentes, de définir la dimension.

La dimension fractale, citée comme l'indicateur des irrégularités d'un graphique d'une fonction est allée au delà des limite de la théorie mathématique pour devenir à la fin des deux dernières décennies un outil de mesure reconnu pour le traitement de signal et d'image [Gonçalvès07].

La dimension fractale décrit la manière qu'une mesure donnée appliquée à une fonction se développe selon l'observation de la variation d'échelle. En théorie, la dimension utilisée est celle de Hausdorff.

II.3.2.1 Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff est un nombre réel positif, éventuellement l'infini, associé à tout espace métrique. Introduite en 1918 par le mathématicien Felix Hausdorff, ensuite développée par Abram Samoilovich Besicovitch. Elle est parfois appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch [Wikipedia2].

Afin de mesurer correctement la dimension d'ensembles fractals, Hausdorff a introduit cette nouvelle notion de dimension plus fine. Si on considère un ensemble E et une partition en boules de rayon ε de cet ensemble (appartenant à $\mathbb{R}^n$), le nombre $N(\varepsilon)$ de boules nécessaires définit, par son comportement en loi de puissance, la dimension fractale d_F de E:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_F(E)} \quad \text{(II.25)}$$

La dimension de Hausdorff $d_F(E)$ ainsi quantifiée sert à définir le spectre de singularité d'une mesure μ quelconque:

$$f(\alpha) = \dim_H \{x|\mu(B_x(\varepsilon)) \sim \varepsilon^\alpha \text{ , pour } \varepsilon \rightarrow 0\} \quad \text{(II.26)}$$

où $B_x(\varepsilon)$ est une boule de diamètre ε centrée en x et $\dim_H$ est la dimension de Hausdorff de cet ensemble. L'exposant de singularité $\alpha(x)$ rend compte du degré de régularité de la mesure en ce point. Cette mesure est dite monofractale si $f(\alpha)$ se réduit à un point (même alpha en tout x). Elle est multifractale si le support de $f(\alpha)$ est large et qu'il y existe une variété d'exposants.

II.3.2.2 Dimension de boîtes

En terme d'estimation, cette dimension est plus facile à calculer comparée à celle de Hausdorff. Considérons que E est borné :

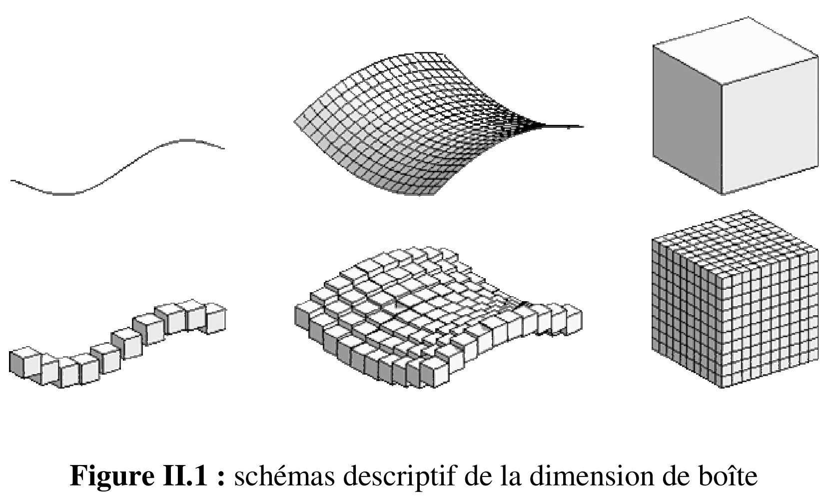


Figure II.1 : schémas descriptif de la dimension de boîte

Définition [Siteweb2]**:**

Soit $N_{\delta}(E)$ le plus petit nombre de l'ensemble ayant un diamètre égale à δ couvrant *E*, et d un nombre tel que :

$$N_{\varepsilon}(E) \sim 1/\varepsilon^{d} \text{ pour } \varepsilon \to 0 \tag{II.27}$$

La boite de dimension de E est d si et seulement s'il existe une constante positive k tel que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N_{\varepsilon}(E)}{1/\varepsilon^{d}} = k \tag{II.28}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\ln N_{\varepsilon}(E) + d \ln \varepsilon) = \ln k \tag{II.29}$$

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln k - \ln N_{\varepsilon}(E)}{\ln \varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_{\varepsilon}(E)}{\ln \varepsilon} \tag{II.30}$$

La boite de dimension inférieure et supérieure de *E* sont respectivement définie par [Lévy-Véhel]:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B E &= \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_{\delta}(E)}{-\log \delta} \\ \underline{\dim}_B E &= \underline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_{\delta}(E)}{-\log \delta} \end{aligned} \tag{II.31}$$

Quand ces nombres coïncident, on parle de dimension de boîte locale de F en *x*.

La relation suivante est toujours vérifiée :

$$\dim_H \Gamma \leq \dim_p \Gamma \leq \dim_B \Gamma \tag{II.32}$$

Dans le meilleur des cas, toutes ces définitions donnent le même résultat pour le même graphe, qui est d'ailleurs relatif à l'exposant de Hölder.

S'il existe de nombreux estimateurs de la dimension de boîtes, nous n'avons rien trouvé dans la littérature concernant l'estimation de la dimension de Hausdorff.

II.3.2.3 Formalisme multifractal

D'après [45], les travaux de Parisi et Frisch ont introduit le terme multifractal, et depuis des idées et concepts de la théorie multifractale se sont largement répandus dans de nombreux domaines des sciences fondamentales comme appliquées : mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur, sciences de la Terre, finances, biologie et médecine. Dès les années 20, quelques mathématiciens comme Hausdorff ou Besicovitch s'intéressent, dans le cadre de la théorie de la mesure, à l'étude d'objets géométriques irréguliers voire pathologiques que l'on appelle aujourd'hui fractals. Ce domaine connait un renouveau dans les années 70 sous l'impulsion des travaux de Mandelbrot dans lesquels apparaissent les premiers modèles de cascades multiplicatives pour l'étude de la turbulence développée. Sur le plan théorique, à la fin des années 70, en établissant un rapprochement entre l'espace des phases de la mécanique statistique et celui des systèmes dynamiques, des travaux sur les systèmes dynamiques ergodiques et la théorie des grandes déviations donnent naissance au formalisme thermodynamique qui permet, en particulier, de démontrer des résultats exacts en théorie des systèmes dynamiques holomorphes dont fait partie l'étude de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia associés.

Le calcul numérique du spectre de singularités d'un signal est clairement impossible à effectuer directement à partir de la définition (le calcul d'un exposant de Hölder qui peut être partout discontinu est déjà complètement instable numériquement). Les bases du formalisme multifractal ont été posées en 1985 par Parisi et Frisch dans leur célèbre article où ils introduisent la notion même de multifractalité. Leur but était de calculer le spectre de singularités non pas directement à partir de sa définition, mais plutôt à partir de quantités auxiliaires facilement estimables numériquement [Arnéo04].

II.4 LES FRACTALES

Les résultats mathématiques récents ont eu un profond impact dans les domaines appliqués. Ainsi, les physiciens pensaient encore récemment qu'un comportement multifractal était la signature d'une organisation interne extrêmement précise dans le signal (phénomènes de cascade, autosimilarité…). Les résultats mathématiques de généricité ont renversé cette perspective, puisqu'ils montrent qu'un signal quelconque est, en général, multifractal [Arnéo04].

II.4.1 LES SIGNAUX FRACTALS

Les signaux fractals sont des signaux complexes qui possèdent une certaine forme d'ordre ou de structure ; c'est cette structure qui leur confère un rôle particulier parmi l'ensemble des signaux irréguliers: elle permet de dériver des méthodes naturelles pour les analyser, méthodes qui sont souvent fondées sur la transformée en ondelettes. Une fois les outils mis au point, on peut les appliquer à des classes de signaux plus générales [Lévy-Véhel].

Les courbes fractales sont des figures manifestant un très grand degré d'irrégularité (ils sont souvent singuliers en tous points) et ne possédant pas de longueur caractéristique. Ils obéissent cependant à un ordre intrinsèque précis.

II.4.2 DIFFERENTES STRUCTURES

Les fractales peuvent être déterministes ou stochastiques, elles sont réparties en trois grandes catégories :

- Les systèmes itérés de fonctions. Ceux-ci ont une règle de remplacement géométrique fixe ;
- Les fractales définies par une relation de récurrence en chaque point dans un espace ;
- Les fractales aléatoires, générées par des processus stochastiques et non déterministes.

De toutes ces fractales, seules celles construites par des systèmes itérés de fonctions affichent habituellement la propriété d'« auto-similitude » propriété signifiant que leur complexité est invariante par changement d'échelle.

Les fractales aléatoires sont les plus utilisées dans la pratique, et peuvent servir à décrire de nombreux objets extrêmement irréguliers du monde réel. Les techniques fractales ont été utilisées dans la compression d'image fractale, de même que dans beaucoup de disciplines scientifiques.

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est exactement ou statistiquement auto-similaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties;
- sa dimension de Hausdorff est plus grande que sa dimension topologique.

Les fractales n'ont pas à satisfaire toutes les propriétés mentionnées ci-dessus pour servir de modèles. Il leur suffit de réaliser des approximations convenables de ce qui intéresse dans un domaine de validité donné.

II.3.3 ECHANTILLONNAGE DE SIGNAUX FRACTALS

Un résultat fondamental en traitement du signal est le théorème d'échantillonnage de Shannon. Celui-ci implique qu'il faut sévèrement filtrer un signal fractal avant de l'échantillonner. La perte ainsi occasionnée est parfois préjudiciable aux traitements ultérieurs, et nous proposons des façons de contourner partiellement ce problème [Projet Fractales99].

Le théorème d'échantillonnage de Shannon indique que la fréquence d'échantillonnage d'un signal X doit être au moins le double de sa fréquence maximale pour permettre une reconstruction exacte et éviter des phénomènes de repliement de spectre de Fourier. Pour un signal fractal, qui n'est jamais à bande limitée, cela implique qu'il faut effectuer un filtrage passe-bas avant d'échantillonner.

On perd cependant des informations qui sont essentielles pour la mesure par exemple de l'exposant de Hölder du signal en un point donné. Une première solution consiste à changer la méthode d'échantillonnage. On peut par exemple effectuer une distorsion fréquentielle du signal X, en considérant la suite de transformations suivantes:

$$X(t) \xrightarrow{TF} \hat{X}(f) \rightarrow \hat{Z}(\mu(f)) \xrightarrow{TF^{-1}} Z(t) \qquad \text{(II.33)}$$

où TF désigne la transformée de Fourier, TF^{-1} son inverse, et μ une fonction C^{∞} bijective de $\Re$ dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Z est à bande limitée, on peut donc l'échantillonner, et le problème revient à savoir quand est-ce que l'on peut reconstruire *X* à partir de *Z*. il a été proposé plusieurs caractérisations de l'espace des signaux *X* représentables de cette sorte [Projet Fractales99].

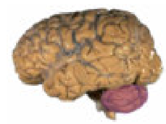
Une deuxième voie consiste à admettre une perte à l'échantillonnage (sans filtrage préalable), mais à adapter celui-ci de façon à minimiser une certaine erreur. Nous nous sommes placés dans le cadre suivant : on suppose que *X* est un processus dont on désire estimer un paramètre de la loi. On cherche alors les instants "optimaux" d'échantillonnage sur un intervalle borné, c'est-à-dire ceux qui vont minimiser la borne de Cramer-Rao relative à l'estimation du paramètre d'intérêt. On obtiendra ainsi une règle pour le choix des instants d'échantillonnage qui est optimale indépendamment des détails de la méthode d'estimation. La résolution de ce problème [Projet Fractales99] est faite dans le cas où X est soit un processus de Markov, soit un processus Gaussien.

II.3.4 EXEMPLES

II.4.4.1 Fractales aléatoires et naturelles

Des fractales approximatives sont facilement observables dans la nature. Ces objets ont une structure autosimilaire sur une échelle étendue, mais finie. Voici quelques exemples : les nuages, les flocons de neige, les montagnes, le chou-fleur, le cerveau et les vaisseaux sanguins.

Surface du cerveau humain



Surface du chou-fleur

Côte de Grande-Bretagne

Figure II.2 : Fractales dans la nature

Une fougère fractale modélisée en utilisant un Système de fonctions itérées

Un cœur fractal modélisé

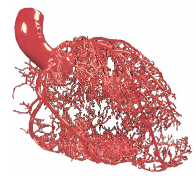


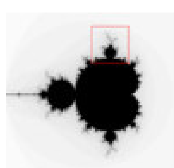
Figure II.3 : Fractales modélisés

Les arbres et les fougères sont de nature fractale et peuvent êtres modélisés par ordinateur à l'aide d'un algorithme récursif. La nature récursive est évidente dans ces exemples - la branche d'un arbre ou la fronde d'une fougère sont des répliques miniatures de l'ensemble: pas identiques, mais de nature similaire.

Ce point de vue a donné naissance au modèle de l'univers fractal, décrivant un univers basé sur les fractales.

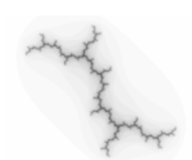
II.4.4.2 Fractales déterministes

Ensemble de Mandelbrot

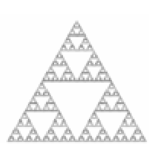


Ensemble de Cantor

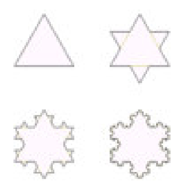
Ensemble de Julia



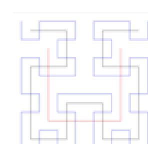
Triangle et courbe de Sierpiński



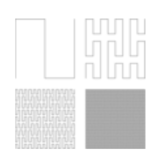
Suite qui tend vers le flocon de Koch



Courbe de Hilbert



Courbe de Peano



Courbe de Koch

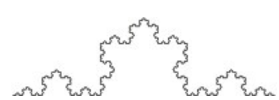


Figure II.4 : Listes de fractals

II.5 CONCLUSION

L'approche fractale pour l'étude des systèmes complexes a fait ses preuves en mathématiques (analyse d'ensembles irréguliers ou de mesures singulières), et en physique (description de phénomènes fortement non linéaires). Mais c'est dans le domaine du traitement du signal que les progrès récents ont pu être appliqués. En particulier, grâce à l'analyse multifractale, on a pu appliquer les outils fractals à des signaux a priori non fractals.

La notion de régularité est un point essentiel dans l'analyse fractale qui consiste à l'étude des fonctions pour lesquelles la régularité varie. Pour cela, il existe plusieurs méthodes d'analyse que nous avons mentionnées de manière générale dans ce chapitre.

Il comporte aussi une description générale sur L'exposant de Hölder, un outil de mesure de la régularité ponctuelle est utilisé par la suite pour tracer les spectres multifractals, ces derniers ont eu un grand intérêt pour notre analyse, ainsi que les dimensions fractales.

Un signal fractal ne se résume plus à la caractéristique d'autosimilarité, a priori tout signal quelconque qui présente un certain degrés d'irrégularité peut être considéré comme tel. Et par conséquent l'analyse fractale a agrandi son champ d'applications.

III.1 INTRODUCTION

Les ondelettes sont actuellement l'objet d'un grand intérêt auprès de nombreux mathématiciens, physiciens et informaticiens. En moins de 20 ans, elles se sont imposées comme une théorie mathématique féconde, venant compléter l'analyse de Fourier. Elles trouvent de très nombreuses applications, particulièrement dans le traitement du signal.

L'analyse par ondelettes a été introduite au début des années 1980, dans un contexte d'analyse du signal et d'exploration pétrolière. Il s'agissait à l'époque de donner une représentation des signaux permettant de faire apparaître simultanément des informations temporelles (localisation dans le temps, durée) et fréquentielles, facilitant par là l'identification des caractéristiques physiques de la source du signal. Avec quelques années de recul, nous réalisons maintenant que ce sont ces origines "scientifiquement cosmopolites" qui ont donné à la théorie toute sa richesse et sa beauté, en même temps que ses vastes domaines d'application.

Très souvent l'essentiel de l'information d'un signal se situe dans ses singularités et ses structures irrégulières. La transformée en ondelettes permet de réaliser une analyse des structures locales d'un signal avec un zoom qui dépend de l'échelle considérée.

Ce chapitre visera à montrer l'apport de le transformée en ondelettes pour l'analyse fractale. Des exemples sur des données réelles illustreront dans le chapitre IV l'intérêt des approches par ondelettes pour la description locale des séries temporelles non stationnaires. La transformée en ondelettes permet de traiter efficacement de tels signaux, puisque son principe est de décrire, en fournissant des informations sur la régularité locale, l'évolution temporelle d'un signal à différentes échelles de temps.

III.2 LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES

La transformée en ondelettes remplace la sinusoïde de la transformée de Fourier par une famille de translations et dilatations d'une même fonction, l'ondelette.

III.2.1 UN OUTIL INDISPENSABLE : LA TRANSFORMEE DE FOURIER

Le transformée de Fourier associe à une fonction f absolument intégrable la fonction $\hat{f}$. Elle s'interprète ainsi : si *f* est fonction du temps, sa transformée de Fourier donne la composition en fréquence de *f*. Elle s'écrit :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\Re} f(t) e^{-jwt} dt \tag{III.1}$$

L'analyse classique de Fourier ne permet pas de réaliser l'étude des composantes transitoires de durées différentes d'un signal. Pour cela, la transformée en ondelettes décompose les signaux sur une famille d'ondelettes translatées et dilatées.

III.2.2 ONDELETTES CONTINUES

Pour obtenir de l'information à la fois temporelle et fréquentielle sur un signal $f(t)$, il faut le décomposer sur des fonctions concentrées à la fois en temps et en fréquence. Pour définir ces fonctions, il faut partir d'une fonction $\psi(t)$ appelée "ondelette mère" si elle est bien localisée et si elle est oscillante (elle ressemble à une onde, mais étant localisée, est une ondelette). La condition de localisation s'écrit sous la forme habituelle de décroissance en amplitude rapide quand $|t|$ augmente indéfiniment. La condition d'oscillation suggère que $\psi(t)$ vibre comme une onde : on demande donc que l'intégrale de $\psi(t)$ sur le temps soit nulle et qu'il en soit de même pour ses m premiers moments. La mère des ondelettes engendre les autres ondelettes de la famille, $\psi_{a,b}(t)$, $a > 0$ et b réel, par dilatation (paramètre a) et par translation dans le temps (paramètre b) [Boutaâ06].

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{III.2}$$

Le facteur de normalisation $1/\sqrt{a}$ peut être aussi pris égal à 1 ou à $1/a$.

Grossman et Morlet ont montré que si $\psi(t)$ est à valeurs réelles, cette collection peut être utilisée comme s'il s'agissait d'une base orthonormée. Cela signifie que tout signal d'énergie finie peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'ondelettes $\psi_{a,b}(t)$ et que les coefficients de cette combinaison sont, à un facteur de normalisation près, les produits scalaires :

$$C(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \tag{III.3}$$

Ces coefficients mesurent, en un certains sens, les fluctuations du signal $f(t)$ autour du point b à l'échelle fournie par a.

L'écart-type en temps est proportionnel à a et l'est en fréquence est inversement proportionnel à a.

Voici un exemple de boîtes de Heisenberg d'atomes d'ondelettes:

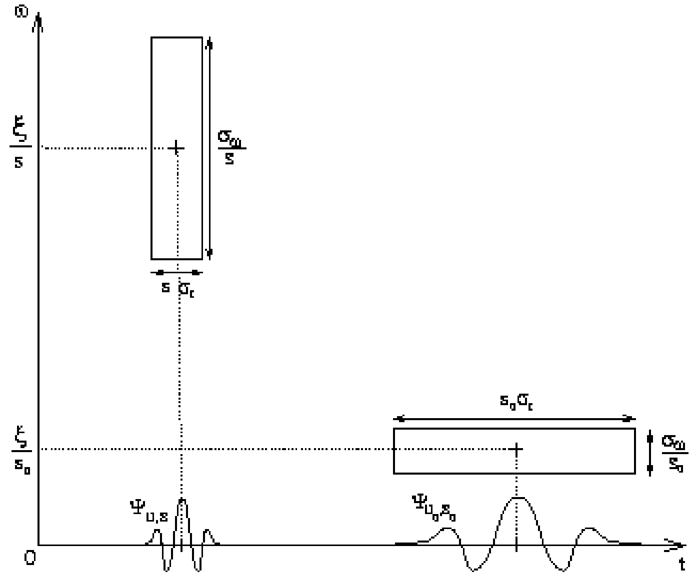


Figure III.1 : Boite de Heisenberg

Aux échelles plus fines, on peut "entasser" plus de boîtes de Heisenberg côte à côte car la résolution temporelle est meilleure.

Si l'ondelette choisie vérifie une condition, dite d'admissibilité, alors la transformée en ondelettes est complète et conserve l'énergie. Ce résultat est traduit par le théorème suivant:

Théorème :

Si l'ondelette est réelle et vérifie :

$$C_{\psi} = \int_{0}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw < +\infty \tag{III.4}$$

alors pour toute fonction f dont le carré est intégrable nous avons :

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wfa,b \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-u}{s}) db \frac{da}{a^2} \tag{III.5}$$

et $\int_{\Re} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wfa,b|^2 db \frac{da}{a^2}$ (III.6)

Il faut donc s'assurer que la transformée de Fourier de notre ondelette en zéro soit nulle pour que la condition soit satisfaite dans le cas où $\hat{\psi}$ est continûment différentiable. On peut vérifier que la décroissance rapide de ψ implique ces propriétés.

Le choix de l'ondelette à utiliser dépend du type d'analyse à réaliser et du signal pris en compte. Toutefois nous pouvons citer deux propriétés essentielles que doit posséder l'ondelette, à savoir des moments nuls d'ordre suffisant et un support compact.

Nous dirons que ψ possède un moment d'ordre k si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t)dt = 0$, une transformée en ondelettes possédant des moments jusqu'à l'ordre n estime le degré de régularité d'une fonction *f* en ignorant le polynôme de degrés n-1 qui l'estime au mieux.

La transformée en ondelette est un opérateur linéaire, invariant par translation et par dilatation. Quelle que soit l'échelle et quel que soit l'endroit, l'analyse du signal se fait avec la même fonction.

Si la base engendrée par l'ondelette n'est pas orthogonale, on a une redondance d'informations et un risque d'instabilité lors de la reconstruction du signal analysé. Par ailleurs, la transformée en ondelette d'un signal n'est pas unique, elle dépend de l'ondelette mère utilisée.

Le traitement numérique des données nécessite la discrétisation de l'analyse en ondelettes. Il faut se donner un réseau de points de discrétisation. Le principal problème réside dans la reconstruction du signal. Il y a plusieurs manières de traiter ce problème. Mallat, par exemple, introduit l'analyse multirésolution. D'une façon générale, les bases d'interpolation dans L^2 (espace des fonctions continûment dérivables) permettent de bien décrire l'analyse en ondelettes discrète. L'algorithme de transformation en ondelettes discrètes le plus simple consiste alors à convoluer le signal avec l'ondelette, en dilatant ou en contractant la forme de celle-ci, suivant l'échelle à laquelle on veut faire l'analyse.

III.2.3 CHOIX DE LA FENETRE

En ce qui concerne la transformée en ondelette continue, une ondelette est une fonction d'énergie finie et de moyenne nulle. Outre sa boîte de Heisenberg, la propriété la plus importante d'une ondelette est le nombre de ses moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t)dt = 0 \text{ pour } 0 \le k < n \qquad \text{(III.7)}$$

La nullité des moments d'une ondelette permet d'analyser la régularité locale d'un signal.

III.2.4 DISCRETISATION DE LA TRANSFORMEE CONTINUE

On veut trouver une base orthonormale d'ondelettes dans laquelle il sera possible de décomposer le signal $f(t)$ appartenant à $L^2(\Re)$ ($\Re$ est l'espace des réels). Pour cela, il faut utiliser l'analyse multirésolution dans $L^2(\Re)$. Une telle analyse consiste à utiliser une gamme très étendue d'échelles pour analyser le signal. A chaque échelle, le signal sera remplacé par l'approximation la plus adéquate que l'on puisse y tracer. En allant des échelles les plus grossières vers les échelles les plus fines, on accède à des représentations de plus en plus précises du signal donné. L'analyse s'effectue donc en calculant ce qui diffère d'une échelle à l'autre, c'est-à-dire les détails.

Une approximation de l'espace des fonctions de carrés sommables $L^2(\Re)$ consiste à le découper en une séquence de sous-espaces $(V_j)_{j\in Z}$. Ces sous-espaces ont un certain nombre de propriétés : ils forment une suite emboîtée, leur intersection est réduite à $\{0\}$ et leur réunion est dense dans $L^2(\Re)$. Chaque sous-espace est l'ensemble de toutes les approximations possibles d'un même signal à la résolution associée au sous-espace. Le signal à analyser sera approximé par une succession de projections orthogonales sur les sous-espaces V_j.

Il faut à présent trouver une base engendrant V_j. Soit la fonction $\phi(f)$ appartenant à $L^2(\Re)$ telle que $\phi(f-k)$ ($k \in Z$) soit une base orthonormée dans $L^2(\Re)$. Soit V_0 le sous-espace vectoriel engendré par cette suite. V_j est défini à partir de V_0 par simple changement d'échelle :

$$f(x)\in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x)\in V_j \tag{III.8}$$

pour toute fonction f de $L^2(\Re)$. De plus, l'ensemble des fonctions $\sqrt{2}\phi_{j,k}(2^j x-k)$ est une base de V_j. La fonction ϕ est appelée fonction d'échelle ou fonction d'interpolation. L'échelle associée à la résolution j est $a_j = 1/2^j$. Le choix d'un facteur 2 correspond à une analyse diadique. Si on pose : $\phi_j(x) = 2^j\phi(2^j x)$, alors la famille $\sqrt{2^{-j}}\phi_{j,k}(x-2^{-j}k)$ engendrée par translation (paramètre $2^{-j}k$) et par dilation (paramètre 2^{-j}) de ϕ est une base orthonormale.

Le passage d'une résolution $j+1$ à une résolution j se fait en projetant la fonction f_{j+1} appartenant à une base V_{j+1} sur un espace V_j dont les fonctions définies ci-dessus forment une base. La projection f_j s'écrit sous la forme :

$$f_j(k) = \left\langle f(x), \phi(x-2^j k\right\rangle \tag{III.9}$$

Or $\phi(x-2^{-j}k)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(x-2^{-j}k) = 2^{-j-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left\langle \phi_j(u-2^{-j}k), \phi_{j+1}(u-2^{-j-1}l)\right\rangle \phi_{j+1}(x-2^{-j-1})l \tag{III.10}$$

D'où, après un changement de variable adéquat :

$$f_j(k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\langle \phi_{-1}(x), \phi_0(x-(l-2k)) \right\rangle \left\langle f(x), \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1} l \right\rangle \tag{III.11}$$

Si $h(u) = \left\langle \phi_{-1}(x), \phi_0(x-u) \right\rangle$, on a :

$$f\ (k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(l-2k) f_{j+1}(l) \tag{III.12}$$

Pour son algorithme, Mallat considère une suite croissante de grille emboitées qui va de la grille la plus fine à la grille la plus grossière. Le signal à analyser est échantillonné sur la grille fine. Etant donné un signal original discret $f_0(k)$ (avec $1 \le k \le N$) son approximation $f_{-1}(k)$ (avec $1 \le k \le N/2$) est obtenue par convolution de f_0 et du filtre de réponse impulsionnelle h précédemment décrit en gardant un échantillon sur deux à la sortie du filtre. Cette procédure est itérée un certain nombre de fois.

Il est possible d'associer à f_0, précédemment décrit, un filtre discret H dont il est la réponse impulsionnelle. Si la transformation de Fourier discrète de ce filtre est notée $H(v)$, alors $H(v)$ doit vérifier les relations suivantes :

$$\left| H(0) \right| = 1 \tag{III.13}$$

$$\left| H(v) \right|^2 + \left| H(v + \frac{1}{2}) \right|^2 = 1 \tag{III.14}$$

La transformée de Fourier de la fonction échelle ϕ associée au filtre H est alors donnée par :

$$\hat{\phi}(v) = \prod_{j=1}^{+\infty} H(2^{-j} v) \tag{III.15}$$

Le signal original est donc filtré par une suite de filtres passe-bas en cascade dont la fréquence de coupure décroît de moitié lorsque l'on passe de la résolution $j+1$ à la résolution j.

III.2.5 RECONSTRUCTION

Le signal de départ peut être reconstruit à partir de sa pyramide. Puisque W_j et V_j sont complémentaires dans V_{j+1}, $(\sqrt{2^{-j}}\phi_{j,k}(x - 2^{-j}k), \sqrt{2^{-j}}\psi_{j,k}(x - 2^{-j}k))$ forment une base orthogonale de V_{j+1}. On peut donc décomposer ϕ_{j+1} au point $(x - 2^{-j-1}k)$ sur cette base :

$$\begin{aligned} \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k) = \quad & 2^{-j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\langle \phi_j(u - 2^{-j} l), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}k) \right\rangle \phi_j(x - 2^{-j} l) \\ & + 2^{-j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\langle \psi_j(u - 2^{-j} l), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}k) \right\rangle \psi_j(x - 2^{-j} l) \end{aligned} \tag{III.16}$$

Soit encore (après changement de variables) :

$$\phi_{j+1}(x-2^{-j-1}k) = 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(l-2k)\phi_j(x-2^{-j}l) + \bar{g}(l-2k)\psi_j(x-2^{-j}l) \tag{III.17}$$

où $\bar{g}$ et $\bar{h}$ sont les filtres duaux de h et de g, tels que $\bar{h}(x) = h(-x)$ et $\bar{g}(x) = g(-x)$. Le passage d'une résolution à une autre se fait en prenant le produit scalaire :

$$f_{j+1} = 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(l-2k) f_j(l) + \bar{g}(l-2k) d_j(l) \tag{III.18}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\left\langle f(x), \phi_{j+1}(x-2^{-j-1}k) \right. = \quad & 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(l-2k)\left\langle f(x), \phi_j(x-2^{-j}l)\right\rangle \\ & + 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(l-2k)\left\langle f(x), \psi_j(x-2^{-j}l)\right\rangle\end{aligned} \tag{III.19}$$

La fonction est donc reconstruite en mettant des zéros entre chaque échantillon de f_j et de d_j et en convoluant les signaux obtenus par les filtres $\bar{h}$ et $\bar{g}$ respectivement

III.2.6 IMPLEMENTATION

La transformée en ondelettes se calcule par une transformée en ondelettes rapide. Celle-ci effectue une transformée discrète par des convolutions circulaires, elles-mêmes calculées par FFT.

III.2.7 REGULARITE DES ONDELETTES

La possibilité de choisir la fonction $\psi(x)$ bien localisée à la fois en temps et en fréquence (donc très régulière) est une propriété remarquable des bases de d'ondelettes.

A l'exigence de la régularité et de la localisation s'ajoute celle de l'oscillation, ou cancellation, ce qui signifie que la fonction ψ a un certain nombre de moments nuls. Munies de ces trois propriétés, les ondelettes forment alors des bases inconditionnelles pour un grand nombre d'espaces fonctionnels [Cohen92].

III.3 CONSTRUCTION DES ONDELETTES DE DAUBECHIES

III.3.1 DES ONDELETTES A SUPPORT COMPACT ET N MOMENTS NULS : LES ONDELETTES DE DAUBECHIES

Les ondelettes que l'on utilise souvent dans le cadre du traitement du signal mono-dimensionnel discret sont les ondelettes de Daubechies. Pour la transformée rapide en ondelettes (DWT), les fonctions sont définies par un jeu d'indices que l'on désigne sous l'appellation "coefficients des filtres en ondelettes" [Maillot06].

Les ondelettes de Daubechies à support compact sont des fonctions à p moments nuls, leur régularité augmente avec p. Le nombre de coefficients est de 4 pour $p=2$, de 12 pour $p=6$ et de 20 pour $p=10$. La forme de chaque ondelette pour 4, 12 et 20 coefficients est visualisée sur les figures III.2, III.3 et III.4.

Une transformée en ondelettes contient non seulement la répartition spectrale du signal analysé mais aussi une information temporelle. En effet, la transformée de Fourier (FFT) sur une fenêtre glissante en temps offre une résolution uniforme en temps et en fréquence, ce qui se traduit par un pavage régulier de l'espace temps-fréquence. La résolution temporelle est constante, c'est la largeur T de la fenêtre de calcul ($T = 2^N \delta t$, où 2^N désigne le nombre de points dans la fenêtre et δt le pas d'échantillonnage), la résolution fréquentielle est elle aussi constante, c'est l'inverse de la largeur de la fenêtre d'analyse

$$\sigma_f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2^N \delta t} = \frac{f_e}{2^N} \tag{III.20}$$

Nous pouvons exprimer cela en disant que l'on ne connaît que le spectre moyen du signal sur la fenêtre d'analyse. La résolution spectrale peut être rendue la plus faible possible en augmentant suffisamment la largeur de la fenêtre d'analyse, c'est à dire en augmentant autant que nécessaire le nombre d'échantillons dans la fenêtre : lorsque ce nombre augmente indéfiniment, le spectre tend à être continu [Maillot06]. La valeur maximale de la fréquence du spectre ne dépend que de la fréquence d'échantillonnage, elle est égale à $\frac{f_e}{2}$, d'après le théorème d'échantillonnage ou de Shannon.

Par contre, la transformée en ondelettes utilise un pavage très différent qui traduit le fait que le produit de la résolution temporelle par la résolution fréquentielle est constant pour tous les facteurs d'échelle (figure III.5).

Ceci se traduit d'une part par une meilleure résolution en temps pour les hautes fréquences qui sont significatives de variations rapides que pour les basses fréquences, et d'autre part, une résolution temporelle inférieure pour les basses fréquences qui correspondent à des variations lentes.

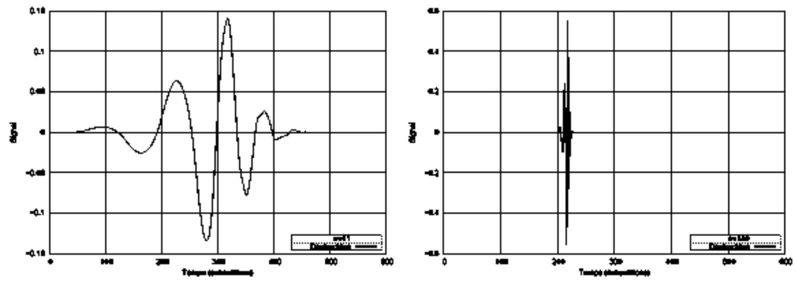


Figure III.2 : Ondelettes de Daubechies à 6 moments nuls (12 coefficients) pour 2 facteurs d’échelles différents.

Le coefficient d’ondelettes le plus élevé correspond à l’ondelette dont le spectre est le plus haut en fréquence, mais il ne correspond pas à une fréquence unique comme dans le cas de la FFT.

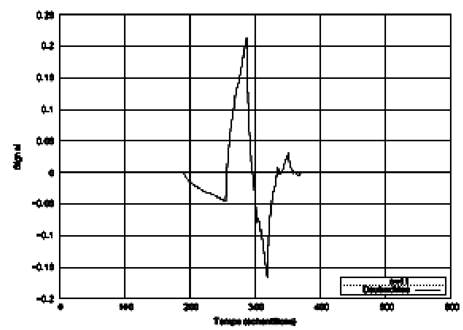


Figure III.3 : Ondelettes de Daubechies à 2 moments nuls (4 coefficients)

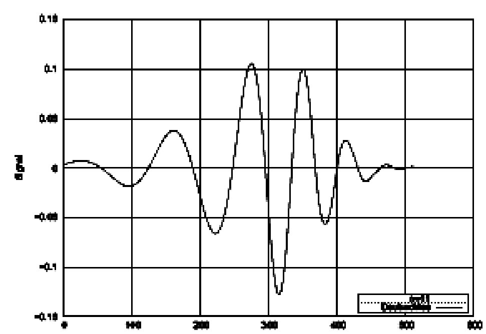


Figure III.4 : Ondelette Daubechies à 10 moments nuls (20 coefficients).

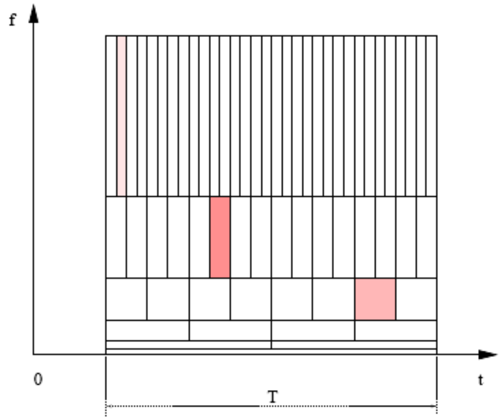


Figure III.5

La mathématicienne Ingrid Daubechies a cherché dans ses travaux à concilier deux contraintes restrictives : l’orthogonalité de la base d’ondelettes et la compacité du support de l’ondelette-mère (ce qui implique que toute ondelette de la base est à support compact). De plus, elle a imposé à ses ondelettes une troisième condition : avoir n moments nuls. Explicitons ces deux dernières propriétés [Maillot06]:

- une fonction est dite à support compact si elle s’annule en-dehors d’un compact de $\Re$
- une fonction f a n moments nuls si elle est orthogonale à l’espace $\Re_n[X]$ des polynômes de degré n ou moins, i.e. si : $\forall k \in \{0,...,n\} \langle f | t^k \rangle = \int_{\Re} t^k f(t)dt = 0$

Une ondelette ayant beaucoup de moments nuls est intéressante car elle permet une reconstitution rapide de fonctions régulières.

III.4 ONDELETTES ET FRACTALES

Les méthodes de traitement du signal ont été grandement améliorées par les nouveaux outils issus de la géométrie fractale et de l'analyse ondelettes. Le principal avantage de ces approches est qu'elles permettent une prise en compte fine de la régularité locale des signaux [Lévy-Véhel01]. En effet, l'analyse de Fourier, utilisée jusqu'alors, ne permettait pas aisément de relier la régularité locale d'une fonction avec le comportement de ses coefficients. Des avancées importantes, marquées par les travaux de Jean Morlet et Yves Meyer dans les dix dernières années, ont permis une description locale des signaux et l'obtention de caractérisations nouvelles de la régularité.

Le succès de ce type de méthode s'explique par le fait que la décomposition en ondelettes de la plupart des signaux ne fait apparaître des coefficients significatifs qu'à un petit nombre de positions dans le plan temps-échelle, c'est-à-dire que l'énergie est localisée préférentiellement à certaines fréquences et certaines positions. Cette caractéristique est utile, par exemple, pour la compression d'image car un petit nombre de coefficients suffisent à en reconstruire l'essentiel. Elle l'est aussi pour le débruitage car les coefficients d'un bruit blanc sont tous à peu près du même ordre, à l'inverse du signal utile, dont l'énergie est concentrée.

L'analyse fractale s'intéresse quant à elle à la mesure de la régularité locale des signaux [Projet Fractales97, Projet Fractales98, Projet Fractales99]. L'idée de base est que, bien souvent, l'information pertinente dans un signal ne réside pas dans son amplitude mais dans les variations locales de sa régularité [Lévy-Véhel]. Par exemple, les contours dans une image sont repérés par les discontinuités plus que par les valeurs exactes des niveaux de gris. Le traitement fractal des signaux commence donc par remplacer le signal original par une fonction qui décrit les variations de cette régularité locale. On peut alors effectuer divers traitements : on détectera par exemple des changements significatifs en isolant plusieurs régimes de régularité, ou bien on débruitera le signal en augmentant sa régularité en chaque point.

L'analyse fractale par ondelettes suscite beaucoup d'intérêts en raison de la traduction par les lois d'échelle des propriétés d'autosimilarité. Par exemple A. Arnéodo et al utilisent la transformée en ondelettes pour caractériser des propriétés d'invariance d'échelle locales des objets fractals [Misiti93].

III.4.1 LES SINGULARITES ET LE FORMALISME MULTIFRACTAL

Les exposants de régularité, ainsi que les dimensions d'ensembles s'avèrent difficiles, voire extrêmement difficile à évaluer directement. Néanmoins leurs liens avec la transformée en ondelettes peut être quant à lui relativement simple à formaliser. En particulier, pour ce qui est du formalisme multifractal, ce sont A. Arnéodo et ses collaborateurs qui ont utilisé les premiers la transformée en ondelettes pour calculer grâce au formalisme multifractal le spectre de singularités d'une fonction [Mélot02].

Pour l'étude des questions liées aux singularités ponctuelle et au formalisme multifractal, les ondelettes apparaissent un outil particulièrement adapté. En effet elles permettent de caractériser de façon très simple les espaces fonctionnels qui entrent en jeu dans l'étude de la régularité locale et permettent aussi de donner des critères simples pour caractériser la régularité globale du type Besov qui intervient dans le formalisme multifractal [Mélot02].

III.4.1.1 Caractérisation de singularités

Nous appellerons points singuliers d'une fonction f, ou singularités de f les points de son domaine de définition en lesquels f n'est pas dérivable.

La transformée en ondelettes est un outil particulièrement bien adapté à la détection des singularités, les transformées en ondelettes produisent des coefficients importants. Les singularités d'une fonction peuvent être caractérisées par leur régularité hölderienne (aussi appelée régularité lipschitzienne) [LeCadet04].

III.4.1.2 Le formalisme multifractal revu par la transformée en ondelettes

Dans le contexte de l'étude de la turbulence pleinement développée, en particulier de l'étude de la nature singulière du champ de vitesse d'un écoulement turbulent, Parisi et Frisch ont proposée une description multifractale basée sur l'étude du comportement en loi de puissance des fonctions de structure [Kestener03]:

$$S_p(l) = < (\delta f_l)^p > \sim l^{\zeta_p}, \ (p \text{ entier} > 0) \tag{III.21}$$

où $\delta f_l(x) = f(x+l) - f(x)$ est un incrément du signal sur une distance l. En définissant l'exposant de Hölder par la quantité $h(x)$ caractérisant l'invariance d'échelle locale du signal : $\delta f_l(x) \sim l^{h(x)}$, on peut alors quantifier les fluctuations de régularité de la fonction considérée à l'aide du spectre des singularités $D(h)$, où $D(h)$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points x pour lesquels l'exposant de Hölder local $h(x)$ vaut h. En principe $D(h)$ peut être obtenu par transformation de Legendre des exposants ζ_p.

Cependant, comme l'ont souligné Muzy et coll., la méthode des fonctions de structure présente d'importantes lacunes. En particulier, elle ne permet pas d'accéder à la totalité du spectre $D(h)$ [Kestener03].

Ainsi, même s'il est possible, en considérant la valeur absolue des incréments, d'étendre cette approche aux valeurs réelles positives de p (et non plus se limiter aux seules valeurs entières), les fonctions de structure n'existent pas pour $p < 0$. De plus, la présence possible dans f de singularités d'exposant de Hölder $h > 1$ ou de comportements réguliers, affecte de façon sérieuse l'estimation des exposants ζ_p et par conséquent le calcul du spectre des singularités $D(h)$ via la transformation de Legendre.

Remarquons que la définition des incréments $\delta f_l(x_0) = f(x_0 + l) - f(x_0)$ d'un signal f peut être reformulée de la manière suivante :

$$\delta f_l(x_0) = \frac{1}{l}\int \Delta^{(1)}\left(\frac{x - x_0}{l}\right) f(x)dx \qquad \text{(III.22)}$$

où $\Delta^{(1)}(x) = \delta(x+1) - \delta(x)$, c.-à-d en terme de transformée en ondelettes du signal *f*.

Soulignant les lacunes de la méthode des fonctions de structure, Arneodo et coll. [Kestener03, Arnéodo03] ont présenté une nouvelle méthode permettant d'effectuer une étude multifractale des fonctions autoaffines et multiaffines. Cette approche plus naturelle du problème suggère d'utiliser la transformée en ondelettes continue, là où le formalisme multifractal classique proposait l'utilisation de boîtes ou d'incréments. Par leur grande variété, les boîtes oscillantes généralisées que sont les ondelettes permettent de s'affranchir des composantes douces qui peuvent soit masquer les singularités, soit perturber l'estimation de leur force h. De plus, le squelette défini par les maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) fournit un partitionnement naturel du demi-plan espace-échelle dont on peut se servir pour positionner de façon efficace les boîtes oscillantes [Kestener03].

III.4.2 ANALYSE PAR ONDELETTES

Un signal irrégulier est difficile à analyser et à reproduire fidèlement. On cherche à en extraire des informations claires qui permettent de le décrire, d'établir des comparaisons avec d'autres, voire de mettre en évidence certaines lois physiques. Il existe des méthodes qui transforment le signal pour en reconstituer un autre possédant les mêmes caractéristiques, comme la transformation de Fourier ou en ondelettes.

L'analyse de Fourier permet de caractériser la régularité globale d'une fonction, la transformée en ondelettes permet d'analyser sa régularité ponctuelle.

III.4.2.1 Transformée en ondelettes de signaux singuliers

Le comportement singulier d'un signal en un point x_O peut être caractérisé par un exposant de Hölder $h(x_O)$, qui est le plus grand exposant tel qu'il existe un polynôme de degré n vérifiant [Borgnat96]:

$$|s(x) - P_n(x - x_0)| = \mathcal{O}(|x - x_0|^{h(x_0)}) \qquad \text{(III.23)}$$

Dans ce cas, $h(x_O)$ est compris entre n et $n + 1$ et est le premier terme singulier apparaissant dans le développement de Taylor autour de x_O. Cette notion se relie facilement à celle d'exposant de singularité du modèle multifractal, en l'étendant aux valeurs supérieures à 1.

Les propriétés d'autosimilarité des signaux fractals permettent de trouver le comportement de la transformée en ondelette d'un signal fractal en fonction de l'échelle. Si l'ondelette est orthogonale aux polynomes de premiers degrés, vérifiant :

$$\int x^m \psi(x)dx = 0 \text{, pour } 0 \le m \le N \tag{III.24}$$

alors pour tout exposant inférieur à N on a:

$$|T_\psi[s](x,a)| = \mathcal{O}(a^{h(x)}), \text{quand } a \to 0. \tag{III.25}$$

Les exposants de Hölder supérieurs à N se comportent comme le terme dominant du développement de Taylor, moins les premiers moments qui sont annulés, donc en a^N. L'analyse en ondelette nous permet alors de déterminer les exposants de singularité en chaque point. Il n'est cependant pas faisable de calculer ces exposants, puis d'essayer de trouver l'ensemble des positions où l'on trouve un exposant donné et de calculer la dimension de Hausdorff de ce support. La méthode du Maximum du Module évite ces obstacles et permet le calcul de *D(h)* à partir de la transformée en ondelette [Borgnat96].

III.4.2.2 Méthode du Maxima du Module de la TO

Une façon naturelle de généraliser le formalisme multifractal aux fonctions et plus généralement aux distributions fractales consiste à revoir les algorithmes classiques de comptage de boites en remplaçant les boites par des “boites oscillantes”, à savoir les ondelettes [Arnéodo03]. La méthode MMTO consiste à utiliser le squelette de la transformée en ondelettes pour positionner ces “boites oscillantes” dans le demi-plan espace-échelle, en d’autres termes former une fonction de partition basée sur les maxima locaux, définis à chaque échelle, du module de la TO [Borgnat96]. Ainsi la fonction de partition est définis par :

$$\mathscr{Z}(q,a) = \sum_{x_i \in \mathscr{S}(a)} \left|T_\psi[f](x_i,a)\right|^q \sim a^{\tau(q)} \tag{III.26}$$

où $q \in \Re$ et $\mathscr{S}(a)$ est l'ensemble des maxima locaux de $|T_\psi[f]|$ à l'échelle a. Le résultat principal de la méthode MMTO est que le spectre $D(h)$ des singularités peut être déterminé par simple transformation de Legendre du spectre d'exposants $\tau(q)$:

$$D(h) = \min_q (qh - \tau(q)) \qquad \text{(III.27)}$$

Les variables conjuguées de $\tau(q)$ et q sont donc $D(h)$ et h. De façon plus pratique, la transformée de Legendre se fait mal numériquement en passant par cette minimisation. Il vaut mieux utiliser les formules suivantes, établies en écrivant Z sous forme intégrale (ce qui est justifié si $D(h)$ et $\tau(q)$ sont continûment dérivables) [Borgnat96]:

$$\begin{cases} h = d\tau / dq \\ D(h) = qh - \tau(q) \end{cases} \qquad \text{(III.28)}$$

Il est important de remarquer que les signaux homogènes monofractals mettant en jeu des singularités de même exposant de Hölder $h(x) = H$, sont caractérisés par un spectre $\tau(q)$ linéaire $(H = \partial\tau / \partial q)$. Au contraire, un spectre $\tau(q)$ non linéaire est la signature de la nature multifractale du signal analysé avec un exposant de Hölder $h(x)$ qui dépend de x et prend généralement des valeurs $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$. La méthode MMTO a été testée sur des signaux synthétiques monofractals (escaliers du diable, signaux Browniens fractionnaires) et multifractals (cascades aléatoires sur des bases ondelettes) et appliquée avec certains succès à divers domaines des sciences fondamentales comme la turbulence pleinement développée, les phénomènes de croissance fractale, les signaux financiers, les signaux médicaux.

III.4.2.3 Coefficients d'ondelettes et régularité

L'un des principaux atouts de l'analyse par ondelettes tient en sa capacité à produire des coefficients forts là où le signal est irrégulier et des coefficients très faibles dans les zones plus lisses. Une propriété de l'ondelette, son nombre de moments nuls, va contrôler la petitesse des coefficients d'ondelettes sur les zones lisses [Gonçalvès98].

Le choix de l'ondelette résulte en fait d'un compromis entre son support et son nombre de moments nuls ; plus son support est petit, moins nombreux seront les gros coefficients affectés par une irrégularité d'un signal. D'un autre côté, prendre une ondelette avec beaucoup de moments nuls permet d'avoir des coefficients de petites échelles sur les parties régulières du signal. Or favoriser l'une de ses propriétés se fait au détriment de l'autre ; I. Daubechies a construit des ondelettes biorthogonales qui, pour un nombre de moments nuls p donné, ont un support de taille minimale [LeCadet04].

III.5 CONCLUSION

La transformation en ondelettes, un outil mathématique apparu dans les années 80 en analyse du signal, consiste à décomposer un signal sur un ensemble de fonctions caractérisées par un paramètre de position et un paramètre d'échelle est un véritable microscope mathématique.

Nous avons étudié, dans ce chapitre, les propriétés de la transformée en ondelettes et son efficacité à caractériser les singularités d'un signal. De plus son rôle dans l'analyse fractale à savoir leur relation avec le formalisme multifractal et les spectres multifractals. Ainsi, décris brièvement comment appliquer les outils de l'analyse multifractale basée sur la transformation en ondelettes entre autre la méthode du maxima du module de la transformée en ondelettes. Cette méthode est fondée sur le cadre théorique du formalisme multifractal, qui vise à décrire de manière statistique les fractals.

Une formule du formalisme multifractal a été mise au point avec l'objectif de déterminer le spectre de singularités qui s'est avéré difficile à mener numériquement étant donné le nombre infini de dimensions à calculer. Cette formule difficilement applicable sur les signaux réels, s'est restituée en utilisant des méthodes numériques stables à base d'ondelettes.

IV.1 INTRODUCTION

Les outils de l'analyse fractale et multifractale ont trouvés un grand nombre d'application dans ces dernières années. Leurs utilisations ne cesse de croître dans différents domaines tel que l'astronomie, traitement des images médicales et des signaux biologiques, finance…

L'utilisation d'ondelettes et d'outils d'analyse fractale est appropriée à l'analyse des signaux irréguliers. La caractérisation de la régularité (locale) est importante dans la description de ces signaux.

L'analyse multifractale fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'un signal qui sont souvent porteuses d'informations pertinentes : la première est obtenue en calculant l'exposant de Hölder, la seconde grâce aux spectres multifractals.

Il est souvent impossible, ou pire inintéressant, de calculer exactement ou de tenter d'estimer en chaque point l'exposant ponctuel de Hölder d'une fonction ou l'exposant de Hölder d'une mesure (typiquement, cela est impossible pour la réalisation d'un processus stochastique) [Seuret03]. Dans ces situations, il est plus judicieux d'avoir recours à une autre description du signal, le spectre multifractal : au lieu de donner pour chaque point *t*, la valeur de l'exposant de Hölder, on regroupe tous les points de même exposant α dans un sous-ensemble E_α , et on caractérise l'irrégularité de façon globale en calculant, pour chaque valeur de α, la dimension de Hausdorff $f_h(\alpha)$ de l'ensemble E_α. On évalue ainsi, de façon géométrique, la “taille” des parties du domaine de *f* où une singularité donnée apparaît. Une autre possibilité est de donner une caractérisation statistique de la répartition des singularités : plus précisément, le spectre de grande déviation $f_g(\alpha)$ estime la vitesse exponentielle de décroissance de la probabilité de rencontrer une singularité à peu près égale à α à la résolution *n* quand *n* tend vers l'infini [Projet Fractales97].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse fractale de quelques signaux ECG. Cette analyse est traduite par le calcul de leurs spectres multifractals et leurs dimensions fractales. Pour ce faire, une boite à outils nommée Fraclab est utilisée. Cette boite à outils comportant dans l'ensemble les éléments de base pour l'analyse fractale, a été crée dans le cadre du projet de recherche “Projet Fractales”et développée par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique).

IV.2 FRACLAB

Avec la diversité d'application de l'analyse fractale, il semble important pour le domaine de la recherche manœuvrant les outils fractals de disposer d'un ensemble de méthodes stables pour le calcul de la dimension fractale, exposant de corrélation et les spectres multifractals. De telles méthodes doivent être fiable dans la mesure où elles puissent comparer les approximations et les résultats [Lévy-Véhel03].

L'objectif de Fraclab est de satisfaire un tel besoin en fournissant une boite à outils gratuite, composé de routines pouvant servir de base dans diverses situations.

D'un autre coté, une importante et récente évolution dans l'utilisation de l'analyse fractale a été réalisée, qu'il serait intéressant d'appliquer ces outils à des signaux quelconques (non fractals). C'est le point adopter dans Fraclab : il fonctionne plutôt pour le traitement fractal des signaux, que pour le traitement des signaux fractals. En général, Fraclab propose d'utiliser l'analyse fractale exactement de la même manière que les autres outils mathématique pour le traitement de signal [Lévy-Véhel03].

IV.2.1 UN ENSEMBLE DE PROGRAMMES POUR L'ANALYSE FRACTALE

Fraclab est une boîte à outils d'analyse fractale orientée vers le traitement des signaux 1-D et 2-D. Fraclab offre un large éventail de techniques fondées sur des développements récents en analyse fractale et multifractale, théorie des systèmes des fonctions itérées, théorie des processus aléatoires fractals et analyse en ondelettes [Projet Fractales97].

Fraclab offre deux voies pour l'analyse d'un signal : soit nous sommes spécifiquement intéressés par ses propriétés fractales, et il est alors possible de déterminer diverses dimensions, régularités locales ou spectres multifractals. Soit nous désirons plutôt effectuer une tâche classique en traitement du signal : débruitage, modélisation, segmentation ou estimation, et ces traitements sont applicables avec les techniques fractales disponibles dans Fraclab.

Les routines Fraclab sont essentiellement développées en langage C et interfacées avec les logiciels de programmation scientifique Matlab et Scilab. Fraclab est développé sur les environnements Unix, Linux et Windows. Une interface graphique en rend l'utilisation aisée [Projet Fractales02].

Compte tenu du lien naturel qui existe entre l'analyse temps-échelle et l'analyse fractale, un nombre important d'outils développés autour des ondelettes est également disponible dans Fraclab.

IV.2.2 FONCTIONS PRINCIPALES DE FRACLAB

Fraclab prend en considération deux points de vue

- La synthèse des signaux fractals et le calcul des différents paramètres fractals
- Traitement du signal et d'image

Cette séparation est artificielle dans un sens, puisque les outils associés à ces deux approches se confondent [Lévy-Véhel03].

Fraclab offre une interface graphique facile à utiliser (Figure IV.1), divisée en quatre 4 groupes distincts :

- Synthèse des signaux fractals
- Analyse fractale et multifractale
- Traitement de signal et d'image
- Autres fonctions diverses

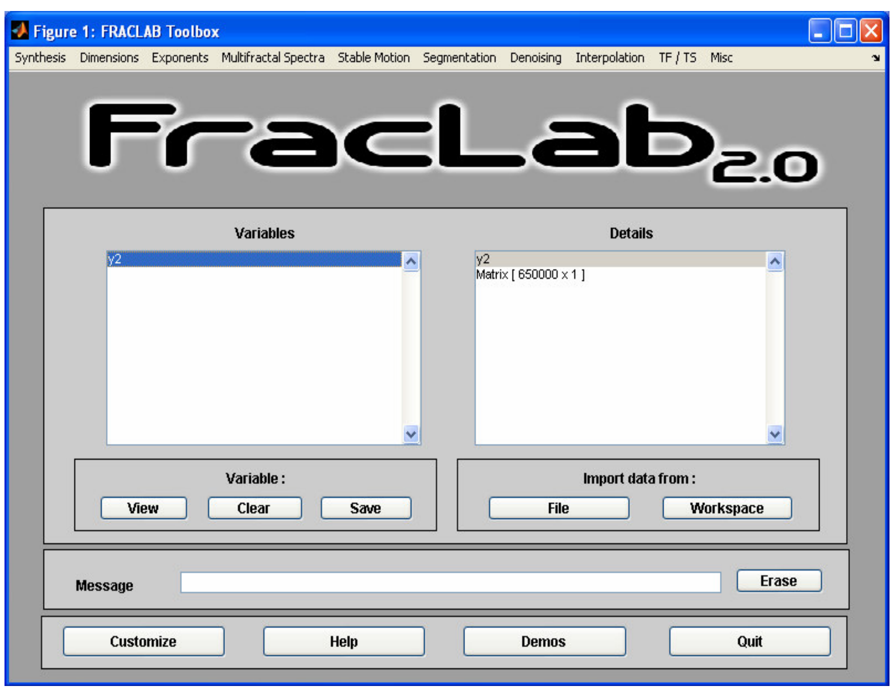


Figure IV.1 : Interface graphique de Fraclab

IV.2.1.1 SYNTHESE DES SIGNAUX FRACTALS

Fraclab peut générer deux types de signaux : mesures ou fonctions, qu'ils soit déterministes ou stochastiques. Les mesures sont plus intéressantes et plus facile à manier. Généralement Fraclab permet de synthétiser un sous-ensemble de tous les models fractals classiques décrit dans la littérature : 1D et 2D du mouvement Brownien fractionnaire, mouvement Brownien multifractionnaire, fonctions de Weiesrstrass généralisées…

IV.2.1.2 ANALYSE FRACTALE ET MULTIFRACTALE

Les paramètres de base qui peuvent être calculés sont bien évidement la dimension fractale. Dans cette implémentation de Fraclab, les dimensions disponibles sont : la dimension de boite et la dimension de régularisation. La caractérisation de la régularité locale est souvent intéressante en traitement de signal, et pour cela, il faut recourir à l'exposant de Hölder. Un ensemble spécifique d'outils pour l'estimation des deux exposants local et ponctuel utilisant différentes méthodes, ainsi que l'exposant 2-microlocal et d'autres... . Pour le spectre de grande déviation et celui de Legendre, ils sont estimés par différentes procédures.

IV.2.1.3 TRAITEMENT DE SIGNAL ET D'IMAGE

Fraclab permet la segmentation des signaux et des images 1-D. dans le 1er cas, un model basé sur une généralisation d'un IFS est utilisé. Pour les images, elles sont réparties en segments possédant une régularité donnée. De même pour la régularisation et le débruitage qui sont possible à réaliser, utilisant diverses méthodes basées sur l'analyse de la régularité hölderienne ou encore l'analyse multifractale.

IV.2.1.4 AUTRES FONCTIONS

Un ensemble de fonctions complémentaires est disponible sur Fraclab, tel que la représentation temps-fréquence et temps-échelle (TFTS), manipulation des structures de bases : création d'une ondelette discrète, d'un graphe, d'une matrice, extraction d'une matrice…

IV.3 SPECTRES DE LEGENDRE

Le traitement du signal est un domaine où l'étude de la régularité locale est amenée à jouer un rôle important. En effet, les méthodes classiques d'analyse de signaux peuvent être améliorées ou complétées grâce à une approche “fractale”. Il est important de comprendre que les méthodes développées dans ce domaine peuvent être appliquées à des signaux qui eux-mêmes ne sont pas "fractals" (au sens où par exemple ils ne présentent pas de structure auto-similaire), à condition toutefois que ces signaux possèdent une certaine irrégularité et que leur comportement local présente un intérêt.

"La détection et la caractérisation des singularités sont abordées à partir de la notion d'exposant de Hölder et de sa détermination fondée sur la transformée en ondelettes. D'un point de vue mathématique, une singularité peut être décrite par sa régularité de Hölder et l'orientation de ces singularités peut mener à extraire les signatures locales. "

Le spectre des singularités est calculé à l'aide des exposants de Hölder ponctuels, le formalisme multifractal traduit les concepts liés à l'estimation de ce spectre d'une mesure μ.

Si on considère une distribution de N objets, et $N(\varepsilon)$ celles de la même taille ε qui recouvrent l'ensemble, la probabilité de trouver n_i objets dans la cellule *i* est:

$$P_i = n_i(\varepsilon)/N \tag{IV.1}$$

P_i est la mesure associée à la cellule *i*. Les dimensions de Renyi (Renyi 1970) sont alors données par:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{q-1} \frac{\log \Sigma_i P_i^q}{\log \varepsilon} \tag{IV.2}$$

où D_0 est la dimension de capacité et $D_1 = \lim_{q \to 0} D_q$

Il s'avère que le spectre des singularités d'une mesure singulière est intiment lié à celui des dimensions généralisées de Renyi.

Les régions de haute densité ont un plus grand poids quand $q > 0$, et les régions sous-denses pèsent davantage quand $q < 0$. Une description alternative est donnée par le spectre des singularités $f(\alpha)$ [Halsey86]. On peut considérer une structure multifractale comme une superposition de structures monofractales homogènes. Supposons que la probabilité P_i qu'une cellule soit occupée suit la loi de puissance $P_i \; \alpha \; r_i^{\alpha}$; α représente la dimension ponctuelle. Considérons l'ensemble $E(\alpha)$ qui contient toutes les particules qui ont des indices dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + d\alpha]$, définissons $f(\alpha)$ (appelé spectre des singularités) comme la dimension fractale de l'ensemble $E(\alpha)$, qui est une structure monofractale. Les paires (q, τ_q) et $(\alpha, f(\alpha))$ sont liés par la transformée de Legendre $\tau_q = \alpha q - f(\alpha)$ et $\alpha(q) = \frac{dr_q}{d_q}$. Pour une structure multifractale les dimensions D_q sont des fonctions décroissantes de q, et $f(\alpha)$ est une fonction convexe, avec une valeur maximale qui correspond à la dimension d'Hausdorff D_H.

Le spectre multifractale est le spectre des singularités f(α) (dimension fractale) corrélé avec l'exposant de Hölder. Le spectre des singularités est défini comme la fonction :

$$f(\alpha) = d_H(\Delta(\alpha)) \tag{IV.3}$$

Il peut être déterminer à partir du calcul d'une quantité intermédiaire τ(q). Le formalisme multifractal repose sur les fondements suivants :

1) Pour tout $q \in IR$, la limite suivante existe :

$$\tau(q) = \lim \frac{\log(\sup \sum_i \mu(U_i)^q}{-\log r} \tag{IV.4}$$

2) Le spectre des singularités de μ s'obtient en prenant la transformée de Legendre de τ(q)

$$f(\alpha) = \inf_q (\alpha q + \tau(q)) \tag{IV.5}$$

Une mesure est dite monofractale, si le spectre des singularités est dégénéré et réduit en un point : en tout point du support de la mesure, l'exposant de singularité α est le même. De manière équivalente, le spectre τ(q) d'une mesure monofractale est linéaire. Dans le cas général, une mesure multifractale possède un spectre de singularités à support large, c-à-d. qu'il existe un continuum de valeurs possibles de l'exposant de singularités α. Les dimensions généralisées Dq sont reliés au spectre τ(q) par l'équation :

$$\tau(q) = D_q/(q-1) \tag{IV.6}$$

Pour éviter le calcul de cette quantité intermédiaire τ(q), qui présente des difficultés, Chhabra et Jensen [Chhabra89] ont développées une méthode simple et précise pour le calcul direct du spectre multifractal à partir des données réelles [Projet Fractales97].

Le spectre de Legendre utilisé dans plusieurs applications [Caron02], nous a servi par la suite pour une analyse multifractale.

IV.4 LA DIMENSION DE REGULARISATION

La dimension de régularisation est une nouvelle manière d'évaluer la régularité d'un graphique d'une fonction [Lévy-Véhel98].

Notons E_H l'ensemble des points où l'exposant de Hölder d'une fonction f vaut exactement H; une fonction multifractale sera telle que les ensembles isohölderiens E_H sont, pour toute une gamme de valeurs de H, des ensembles fractals dont on cherchera à déterminer la dimension $df(H)$ (cette fonction $df(H)$ s'appelle le spectre de singularités de *f*).

Il existe 2 façons principales pour la mesure de la régularité d'une fonction non-différentiable $f : K \to R$ où K est un ensemble compact de R [Lévy-Véhel98].

- La première est basée sur la recherche des propriétés de l'exposant de Hölder de *f*. Ce dernier peut être vu d'une manière globale : chercher le plus grand α_g >0 tel que $\exists C > 0, \forall x, y \in K, |f(x) - f(y)| < C|x - y|^{\alpha_g}$, une approche locale serait de voir seulement dans un voisinage de x_0 pour le plus grand exposant : $\sup\limits_{x,y \in B(x_0,\rho)} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha_l}}$ fini et faire tendre ρ vers 0.

  En conclusion, l'exposant de Hölder ponctuel α_p maximum est obtenu si et seulement si $\sup\limits_{x,y \in B(x_0,\rho)} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho^{\alpha_p}}$ est fini.

- La deuxième façon d'évaluer la régularité de *f* est de mesurer la dimension de son graphe. Plusieurs définitions existent, nous développerons la plus fréquemment utilisée :

Soit un graphe Γ d'une fonction bornée $f : R \to R$ (K est supposé borné).

La dimension de boîte de Γf est obtenue en considérant des recouvrements de Γf par des réunions de boules de diamètre de plus en plus petit. On évalue la vitesse avec laquelle ces ensembles tendent vers Γf. On peut choisir d'approcher Γf par des graphes de fonctions continues plutôt que par une réunion de boules. Pour cela, on considère des versions régulières de f obtenues par convolution avec un noyau très régulier, et qui tendent en un certain sens vers f. Leurs graphes ont une longueur finie : on évalue la vitesse avec laquelle celle-ci tend vers celle de Γf. Cette méthode conduit à la dimension de régularisation introduite et étudiée dans [Lévy-Véhel98].

Soit X un noyau dans la classe de Schwartz tel que:

$$\int X = 1 \tag{IV.7}$$

Supposons X pair et à support [−1, 1]. On pose, pour $x > 0$

$$X_a(t) = \frac{1}{a} X\left(\frac{t}{a}\right) \tag{IV.8}$$

$X_a(t)$ est la version dilaté de X à l'échelle a

On considère la régularisée : $f_a = f * X_a$ de *f* par X_a

La condition (IV.7) assure que X_a tend vers la distribution de Dirac et f_a à f au sens des distributions quand a tend vers 0.

La dimension de régularisation de *f* s'écrit [Gonçalvès07]:

$$\dim_R(\Gamma_f) = 1 + \overline{\lim_{a \to 0}} \frac{\log(L_a)}{-\log(a)} \tag{IV.9}$$

Où

$$L_a = \int_K \sqrt{1 + f_a^{'}(t)^2}\, dt \tag{IV.10}$$

L_a est la longueur du graphe de *f*. Lorsque *f* est très irrégulière, la longueur de Γf n'est pas finie [Gonçalvès07].

Dans plusieurs cas, la dimension de régularisation coïncide avec la dimension de boite. Mais en général, il est montré qu'elle est plus précise que la dimension de boite du moment qu'elle est toujours inférieure mais reste supérieure à la dimension Hausdorff [Lévy-Véhel98, Li03].

La boite à outils Fraclab est utilisée pour l'analyse du signal ECG, ou encore les battements cardiaques, plus précisément le complexe QRS. Toute fois ce complexe doit être détecté. Ils existe une multitude de méthodes de détection, nous avons choisis l'algorithme de PAN et TOMPKINS [Pan85] pour obtenir les complexes QRS de quelques signaux ECG. L'algorithme regroupe les étapes citées ci-dessous :

- Un filtre passe bande
- Dérivations première et seconde
- La mise au carré
- Intégration à fenêtre glissante

IV.5 L'ANALYSE FRACTALE DU SIGNAL ECG :

L'analyse menée vise à étudier le comportement fractal du signal ECG de sujets de différents ages, sexe dans le cas normal ou présentant des pathologies.

Les signaux analysés sont issus de la banque de données MIT-BIH. Cette base contient 48 enregistrements numérotés, obtenus de 47 sujets choisis parmi une population de patients hospitalisés et non hospitalisés. (voir Annexe)

IV.5.1 LES SPECTRES MULTIFRACTALS

La boite à outils Fraclab a été utilisée pour tracer les spectres multifractals de 5 signaux ECG appartenant à la base de données MIT-BIH. Ces signaux représentent des sujets sains (comportant une majorité de battements normaux) de différentes tranches d'age : jeunes, d'age mur et âgés. Trois sujets de sexe féminin et deux de sexe masculin.

Signal	Sexe	Age
"113"	Féminin	24
"115"	Féminin	39
"101"	Féminin	75
"122"	Masculin	51
"117"	Masculin	69

Tableau IV.1 : Listes des signaux ECG représentant des sujets sains de différentes tranches d'age

D'autres part, et pour traiter les signaux présentant des pathologies, nous avons tracé des spectres multifractals de 10 signaux ECG dont 4 appartenant à des sujets sains, le reste contenant des pathologies. Divisés en quatre groupes comme suit, chaque groupe contient un signal normal pour pouvoir comparer le cas normal avec les différentes pathologies pour le même age.

	Signal	Sexe	Age	Etat du sujet
1er groupe	"208"	Féminin	23	Pathologique
	"113"	Féminin	24	Sain
2ème groupe	"212"	Féminin	32	Pathologique
	"115"	Féminin	39	Sain
3ème groupe	"122"	Masculin	51	Sain
	"214"	Masculin	53	Pathologique
	"233"	Masculin	57	Pathologique
	"234"	Masculin	56	Pathologique
4ème groupe	"105"	Féminin	73	Pathologique
	"101"	Féminin	75	Sain

Tableau IV.2 : Listes des signaux ECG de sujets sains et présentant différentes pathologies et de différentes tranches d'age

Les figures IV.1 jusqu'à IV.6 illustrent les spectres de Legendre de chaque signal obtenus en utilisant la transformée en ondelettes discrètes.

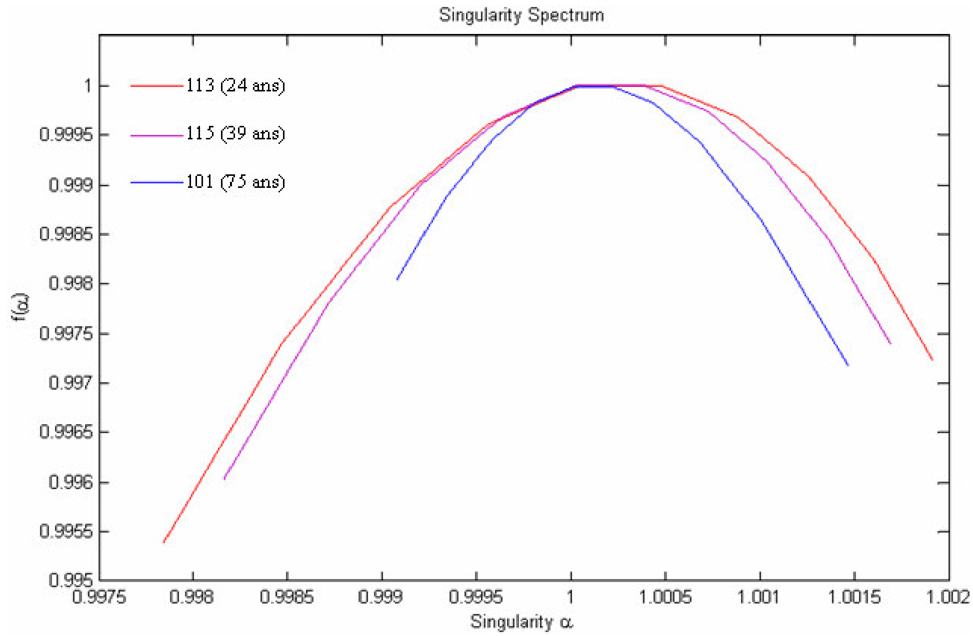


Figure IV.2 : spectres de Legendre des signaux ECG: “113”, “115”, “101” sujets sains, de sexe féminin et de différents tranches d'age

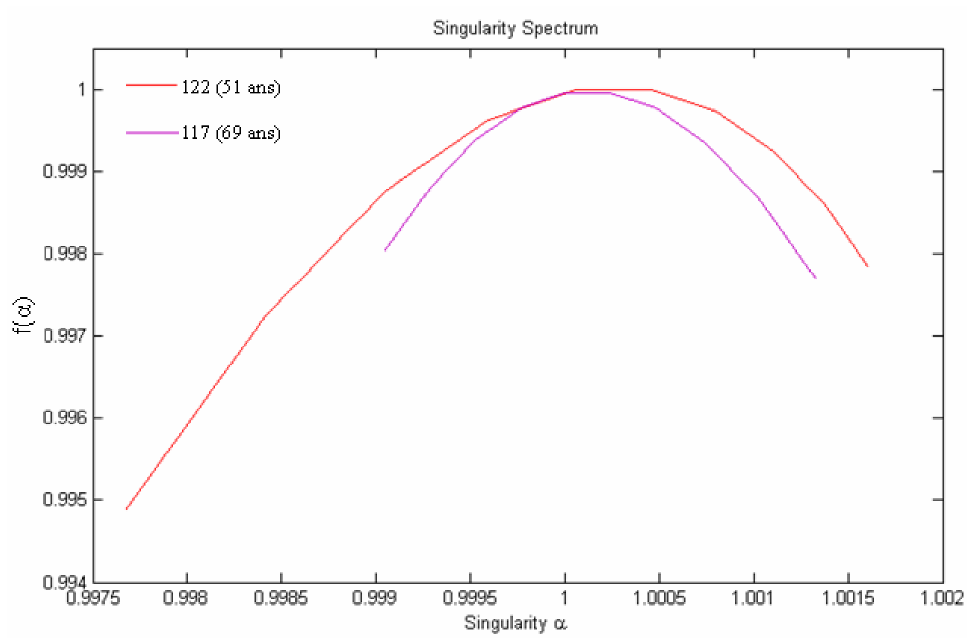


Figure IV.3 : spectres de Legendre des signaux ECG : “122”, “117” sujets sains, de sexe masculin et de différents ages

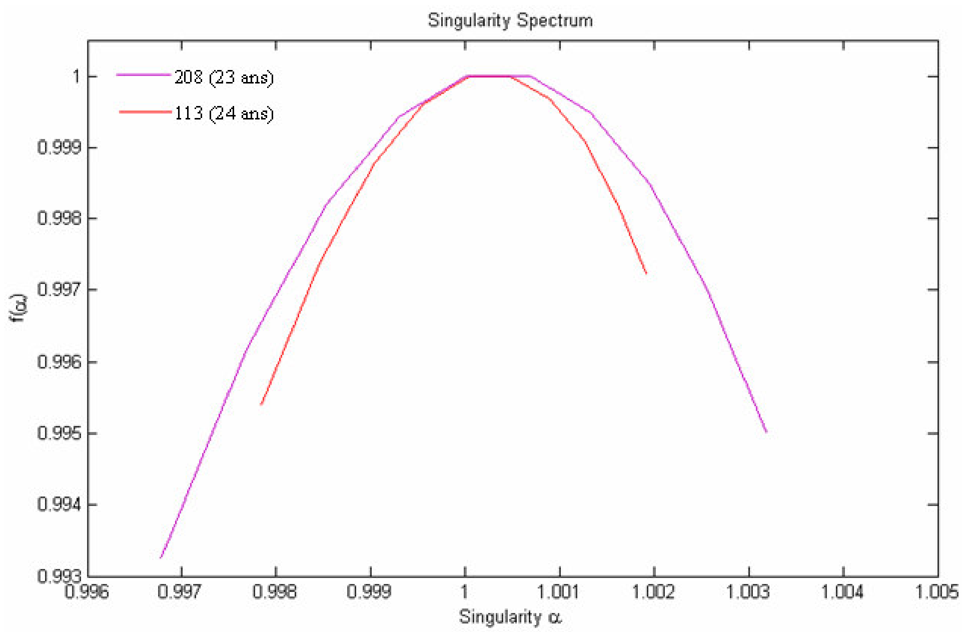


Figure IV.4 : spectres de Legendre des signaux ECG : "113" sain et "208" pathologique sujets jeunes de sexe féminin

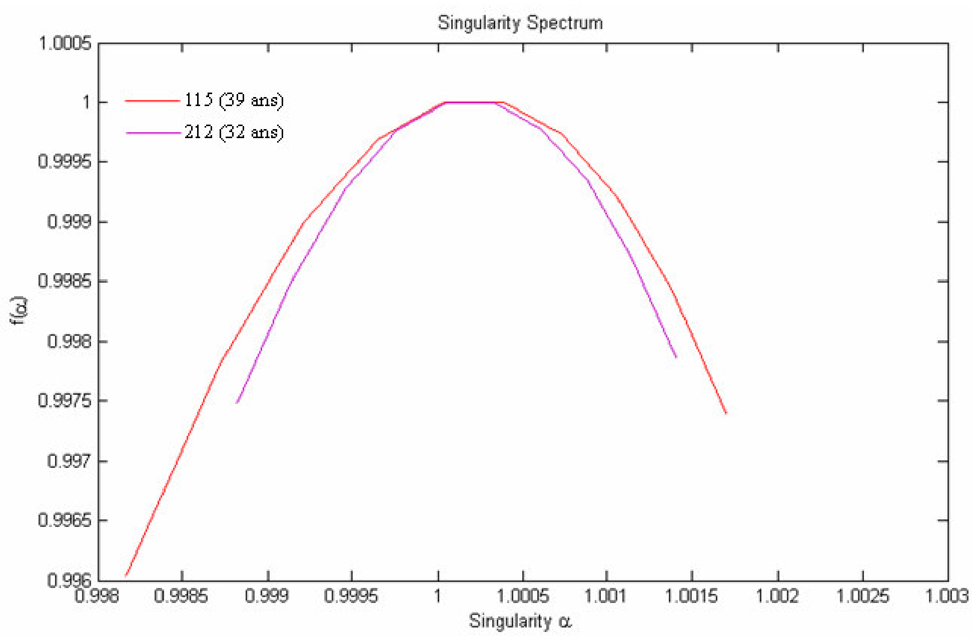


Figure IV.5 : spectres de Legendre des signaux ECG : "115" sain et "212" pathologique de sexe féminin, même tranche d'age

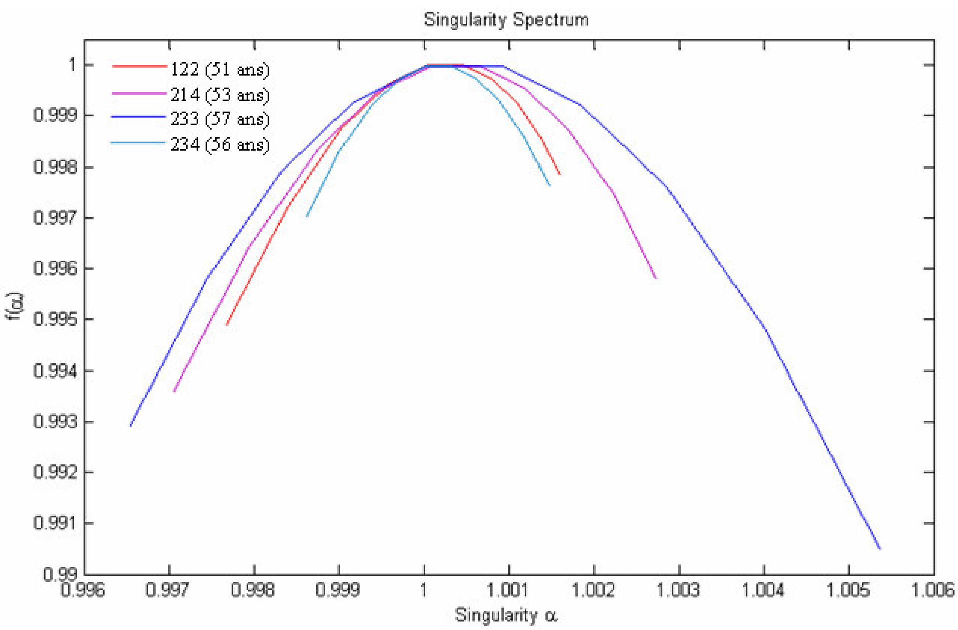


Figure IV.6 : spectres de Legendre des signaux ECG : "122" sain, "214", "233"et "234" pathologiques, de sexe masculin, même tranche d'age

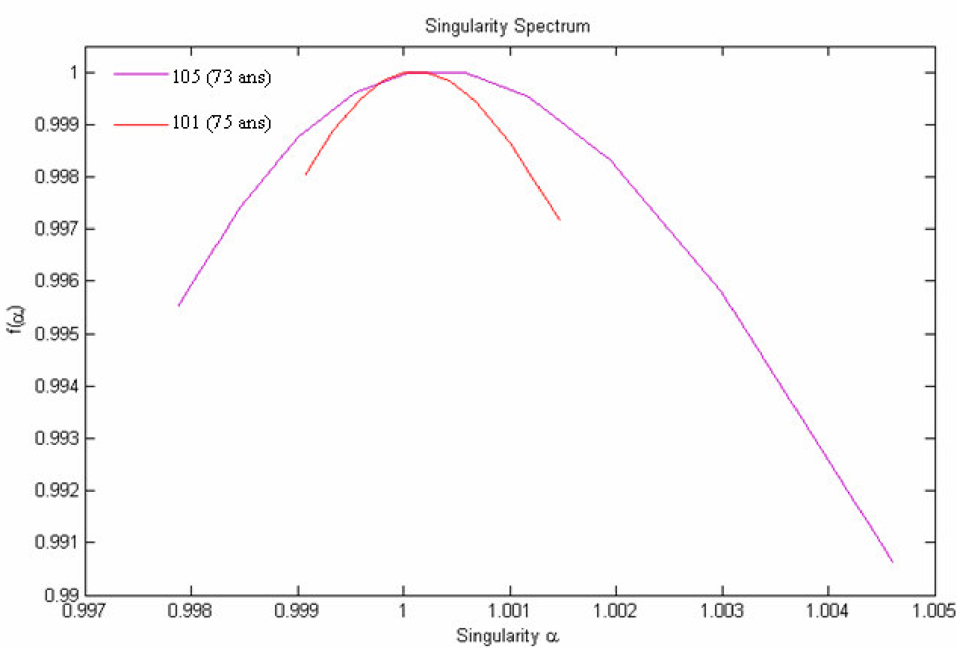


Figure IV.7 : spectres de Legendre des signaux ECG : "101" sain et "105" pathologique sujets âgés de sexe féminin

Nous remarquons que le tracé du spectre multifractal qui caractérise un sujet jeune est plus large que celui d'un autre plus âgé.

L'organisation fractale dans les systèmes physiologiques a un rôle primordial dans l'organisation des fonctions et des structures physiologiques saines et caractérise leur capacité adaptative face aux stimuli extérieurs. En effet, cette corrélation représente un mécanisme d'auto-organisation pour les processus complexes qui génèrent des fluctuations multi-fréquentielles, c'est-à-dire selon différentes échelles temporelles. L'absence d'une réponse mono-fréquentielle, avec une fréquence dominante, inhibe l'apparition d'un comportement de type périodique qui pourrait réduire la capacité de réponse et d'adaptation aux stimuli extérieurs. Ce type de réponse mono-fréquentielle ou périodique caractérise les systèmes physiologiques pathologiques.

Le passage de l'organisation complexe (fractale et multifréquentielle) du système physiologique sain à celle du système physiologique pathologique est une véritable rupture, qui caractérise les fluctuations complètement aléatoires de certaines pathologies.

De nombreuses pathologies sont caractérisées par une perte de complexité fractale ou dynamique par rapport à l'organisme sain. Cette décomplexification du système avec la maladie peut être une caractéristique de différentes pathologies ou du vieillissement. Quand les systèmes physiologiques deviennent moins complexes, le contenu de l'information à l'intérieur des séries temporelles des processus physiologiques est détérioré. Le système n'est plus capable de générer des fluctuations multi-fréquentielles et il manifeste des réponses mono-fréquentielles. Par conséquent, le système est moins capable de s'adapter aux exigences extérieures, qui changent de manière continue ; il devient hautement prévisible et ses sorties régulières sont pauvres en information puisque le système répète, de manière monotone, son activité.

Les systèmes physiologiques sains avec des sorties de type fractales montrent un large spectre qui comporte plusieurs fréquences différentes. Dans notre cas, le vieillissement fait perdre la structure fractale du signal et passe du multifractal au monofractal. Pour les systèmes pathologiques, cette théorie n'est pas vérifiée à cause de l'élargissement du spectre.

Sachant que l'amplitude d'un signal représente l'énergie et que le l'ECG enregistre l'amplitude du signal des battements cardiaques qui varie avec le temps, cela veut dire que f et α nous renseignent sur l'énergie des battements cardiaques puisqu'elle décroît avec l'age [Wang03].

Nous avons remarqué que les spectres multifractals dans les cas pathologiques sont plus larges comparés avec le cas normal pour des sujets du même age, ou encore moins large bien que le sujet soit plus jeune.

Les signaux traités ont montré que le spectre est proportionnel à l'age pour le cas normal et cela peut prêter à confusion. Par conséquent, nous n'avons aucune information directe sur l'existence de pathologies dans cette étape.

Cependant si les spectres multifractals ne sont pas significatifs (dans certains cas) en terme de mesure, nous pouvons chercher à savoir de quelle manière ils remplissent l'espace, et c'est alors la dimension de ces signaux qu'on veut calculer.

IV.5.2 LES DIMENSIONS FRACTALES

Le complexe QRS est une onde importante du signal ECG. Il est non stationnaire, durant très peu de temps et ayant une amplitude très élevée par rapport au reste du signal. Changeant d'un sujet à un autre et différant dans les cas pathologiques.

Les irrégularités du complexe QRS nous renseignent sur la régularité du rythme et du système nerveux. Ces irrégularités peuvent orienter vers certaines pathologies [Zhang97].

Nous allons nous intéresser aux indices permettant de caractériser l'irrégularité : les dimensions fractales. Vu la sensibilité de la dimension fractale aux changements brusques d'un signal, une méthode est utilisée concernant la variation de la dimension fractale [Gnitecki03]. Configurée sous algorithme, ces variations nous renseignent sur les irrégularités de ce signal. Sur ce principe, nous avons choisis calculés les dimensions fractales des complexes QRS de quelques signaux ECG et de les comparés.

IV.5.2.1 Détection et calcul

Les signaux utilisés sont issus de la base de données MIT/BIH. Ils sont classés comme suit :

Type1 : ne contient que des battements normaux

Type2 : contient des battements normaux et pathologiques.

Type3 : contient différents battements pathologiques

Sur les 650 000 échantillons du signal ECG, nous avons traité en général les 200 000 premiers échantillons pour tous les signaux choisis.

Après la détection des complexes QRS, nous avons utilisé Fraclab pour calculer leurs dimensions de régularisation (RD). Les résultats sont illustrés sur les figures (IV.7…IV.19) suivantes et les valeurs limites de chaque cas sont réuni sur le tableau ci-dessous: Chaque point représente la dimension de régularisation d'un seul complexe QRS, et chaque cas (normal et différentes pathologies) est défini par une couleur et une forme géométrique différente.

	N		ESA		ESV		BBD		BBG	
N°	RDmin	RDmax	RDmin	RDmax	RDmin	RDmax	RDmin	RDmax	RDmin	RDmax
115	1.2235	1.411	×	×	×	×	×	×	×	×
122	1.0951	1.214	×	×	×	×	×	×	×	×
113	1.2437	1.3918	×	×	×	×	×	×	×	×
100	1.2046	1.3372	1.2652	1.3259	×	×	×	×	×	×
117	1.1803	1.2592	1.2126	1.2126	×	×	×	×	×	×
101	1.1047	1.3733	1.2223	1.2223	×	×	×	×	×	×
220	1.1878	1.4089	1.3034	1.3941	×	×	×	×	×	×
116	1.1964	1.3265	×	×	1.025	1.0905	×	×	×	×
119	1.2334	1.334	×	×	1.028	1.06	×	×	×	×
212	1.2253	1.4142	×	×	×	×	1.0707	1.3631	×	×
231	1.2182	1.4111	×	×	1.052	1.082	1.158	1.3126	×	×
118	×	×	×	×	1.202	1.289	1.0924	1.369	×	×
109	×	×	×	×	1.1516	1.2221	×	×	1.064	1.1493

Tableau IV.3 : Résultats des différents calculs des dimensions de régularisation pour quelques signaux ECG

Où N : Représente des battements normaux.

ESA : Contraction auriculaire prématuré.

ESV : Contraction ventriculaire prématuré.

BBD : Bloc de branche droit.

BBG : Bloc de branche gauche.

RDmin : la valeur minimale correspondante à la dimension de régularisation d'un complexe QRS.

RDmax : la valeur maximale correspondante à la dimension de régularisation.

D'après le calcul de la dimension de régularisation pour différents signaux ECG, nous remarquons que cette dernière est très sensible aux changements de la structure irrégulière du signal ainsi qu'à la bonne ou mauvaise détection de chaque complexe QRS.

IV.5.2.1.1 Les signaux du Type1 : La dimension de régularisation dans le cas d'un sujet sain

"115" (39 ans) et "122" (51 ans) sont deux signaux ECG comportant que des battements normaux, appartenant à deux sujets de sexe opposé et de différent age.

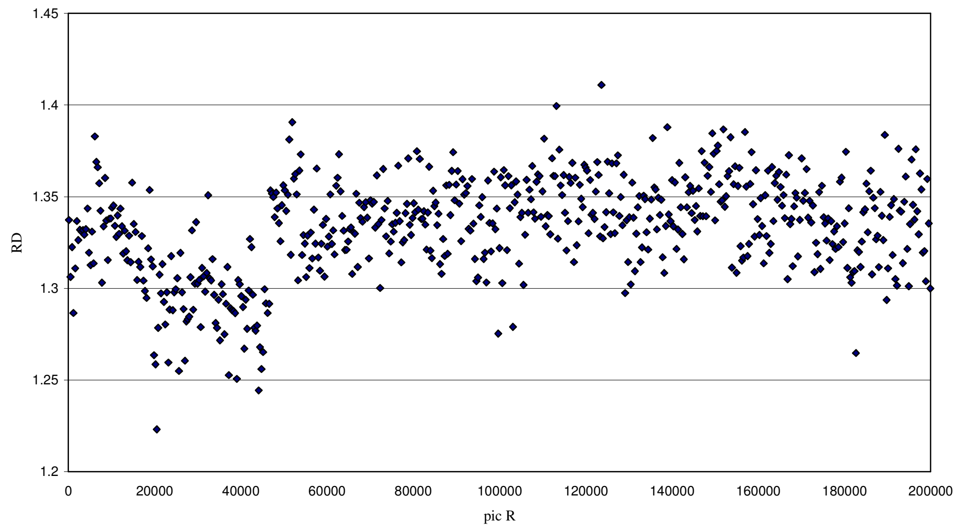


Figure IV.8 : les dimensions de régularisation des différents complexes QRS du signal du type1 "115"

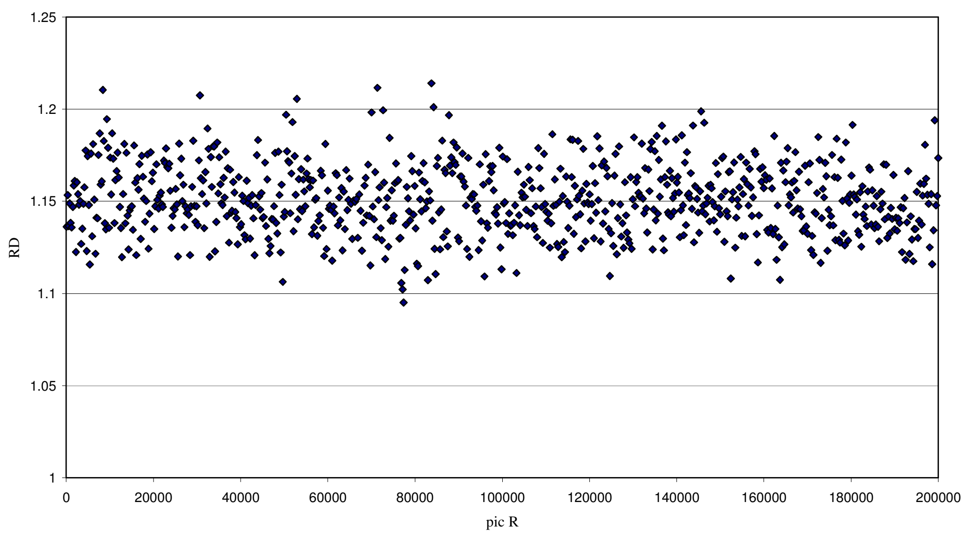


Figure IV.9 : les dimensions de régularisation des différents complexes QRS du signal du type1 "122"

En effet et comme cela est illustré sur les figures IV.8 et IV.9 ci-dessus, les marges des dimensions de ces signaux qui représentent deux sujets sains de différents ages ne sont pas les mêmes. Pour le premier, la marge est supérieure à 1.2, tandis que pour le deuxième elle ne dépasse pas la valeur 1.214. Ces marges sont proportionnelles à l'amplitude du signal mais sont inversement proportionnelles à l'age. Par conséquent, la dimension du signal peut être liée à son amplitude.

IV.5.2.1.2 Les signaux du Type2

a\ La dimension fractale dans le cas d'existence d'une contraction auriculaire prématuré

Prenons les signaux suivants :

"117" : signal comportant des battements de type N et une seule pathologie du type ESA (69 ans)

"100" : signal comportant des battements de type N et 33 (6) pathologies du type ESA (69 ans)

"101" : signal comportant des battements de type N et 3 (1) pathologies du type ESA (75 ans)

"220" : signal comportant des battements de type N et 94 pathologies du type ESA (87 ans)

"113" : comportant des battements de type N et 6 ESAa

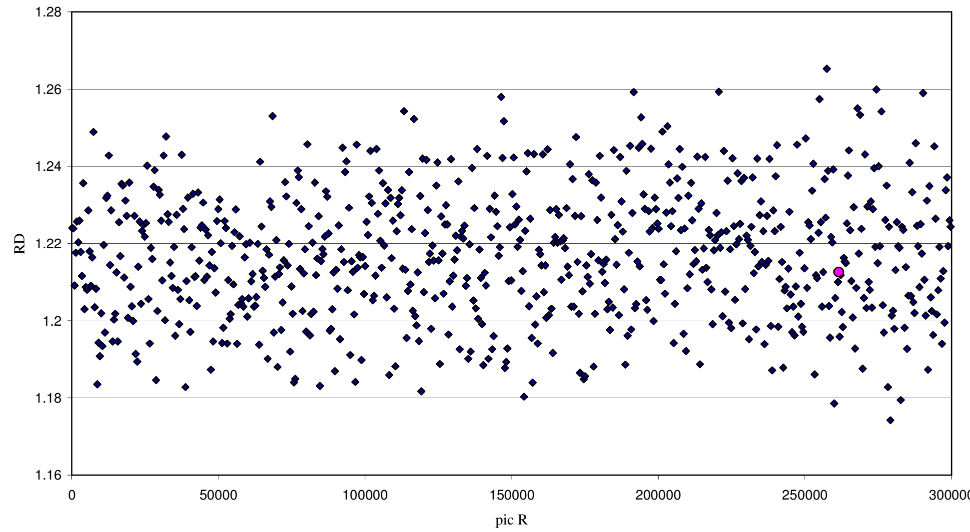


Figure IV.10 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type2 "117"

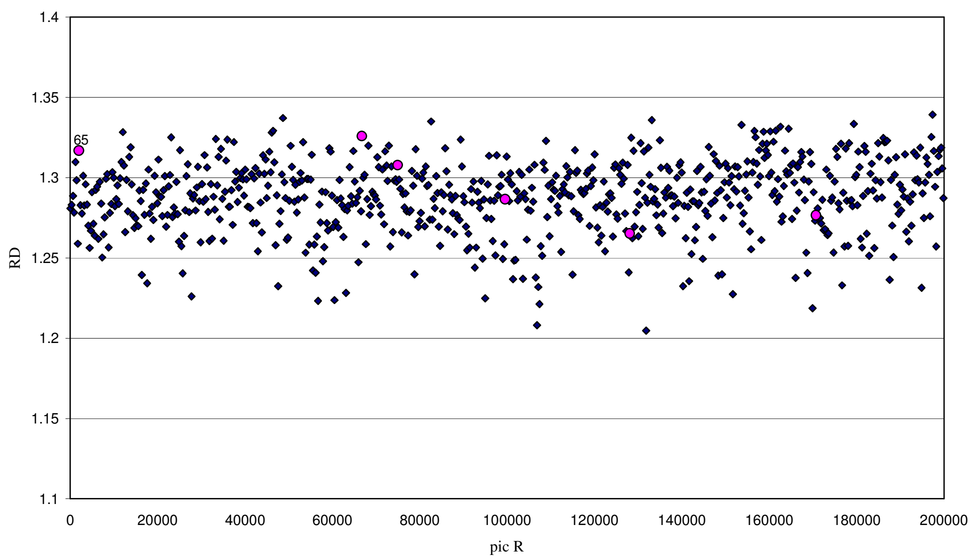


Figure IV.11 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type2 "100"

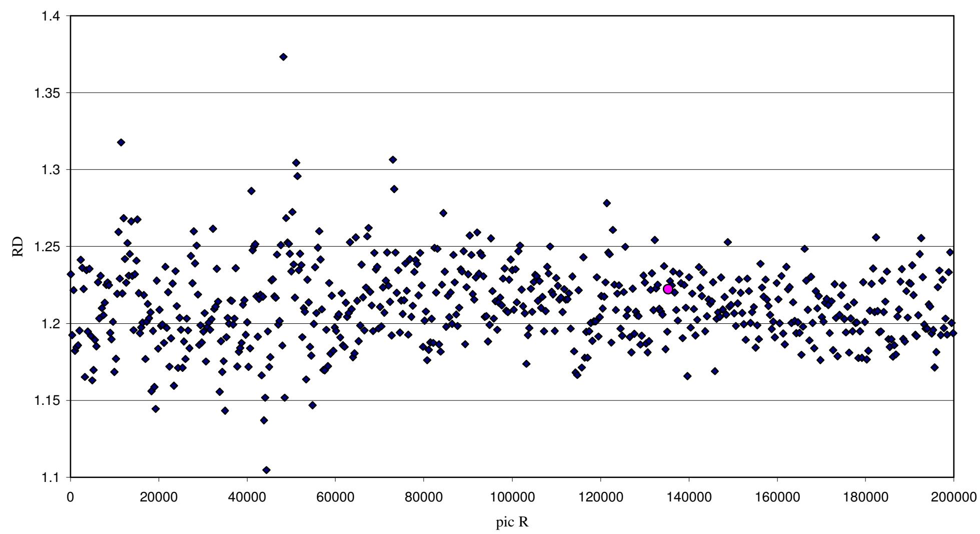


Figure IV.12 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type2 "101"

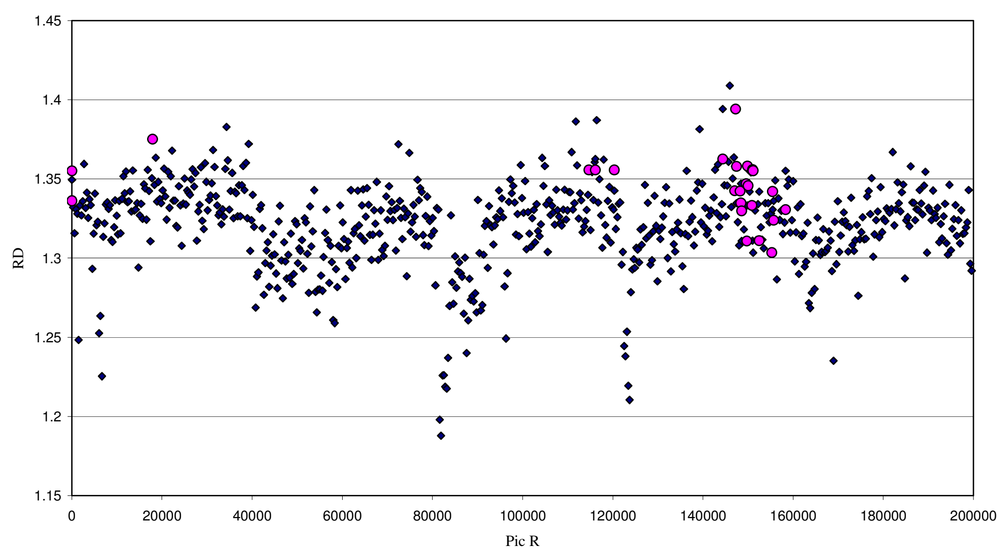


Figure IV.13 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type2 "220"

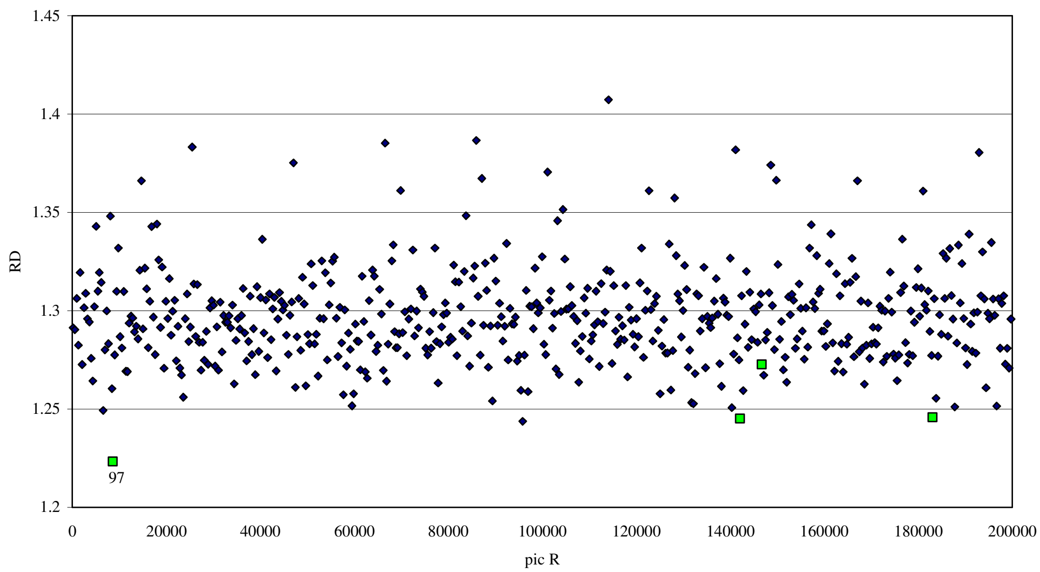


Figure IV.14 : les dimensions de régularisation des différents complexes QRS du signal du type2 “113”

Tous les points qui représentent les dimensions de régularisation des complexes QRS du type ESA sont noyés dans l'ensemble. Et par conséquent nous ne pouvons les distingués des autres points si nous ne connaissons pas son existence, or notre but est repéré les pathologies. Ceci est du à la contraction auriculaire prématuré qui n'entraîne pas un changement dans la morphologie du QRS, mais seulement sur l'intervalle R-R. Et comme notre étude ne concerne que les complexes QRS du signal ECG, nous ne pouvons avoir d'informations sur ce cas. “Pour cette raison, les ESA ne sont pas considérés comme des battements pathologiques”.

Si nous suivons le raisonnement précédent de la dimension de régularisation qui est inversement proportionnelle à l'age, nous devons trouver les marges du signal ECG “100” pour des battements normaux moins importante que celles du “122 ” du type1, vu leurs age. Seulement le résultat est tout autre, les marges dans ce cas sont plus importantes. Comme nous pouvons le constater le signal ECG “100” comporte des battements du type ESA. Pour le signal “117” appartenant à un sujet du même age que celui du signal ECG “100” avec un nombre de battements du type ESA plus petit, la marge est de valeur plus petite.

D'après ces résultats, nous ne pouvons comparer les signaux et leurs dimensions de régularisations ayant le même type de pathologies. La dimension dans ce cas est proportionnelle aux nombres des QRS pathologiques mais elle l'est inversement à l'age. La pathologie entraîne une augmentation sur la marge des battements normaux.

b\ La dimension dans le cas d'existence d'une contraction ventriculaire prématuré

Les signaux "116" et "119" comportent des battements normaux et d'autres pathologiques de type ESV.

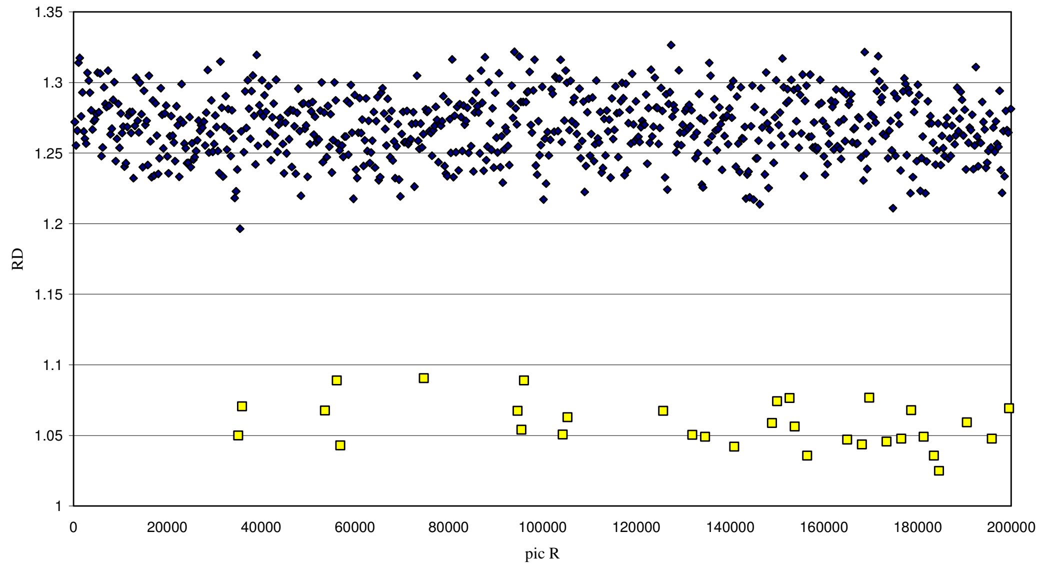


Figure IV.15 : les dimensions de régularisation des différents complexes QRS du signal du type2 "116"

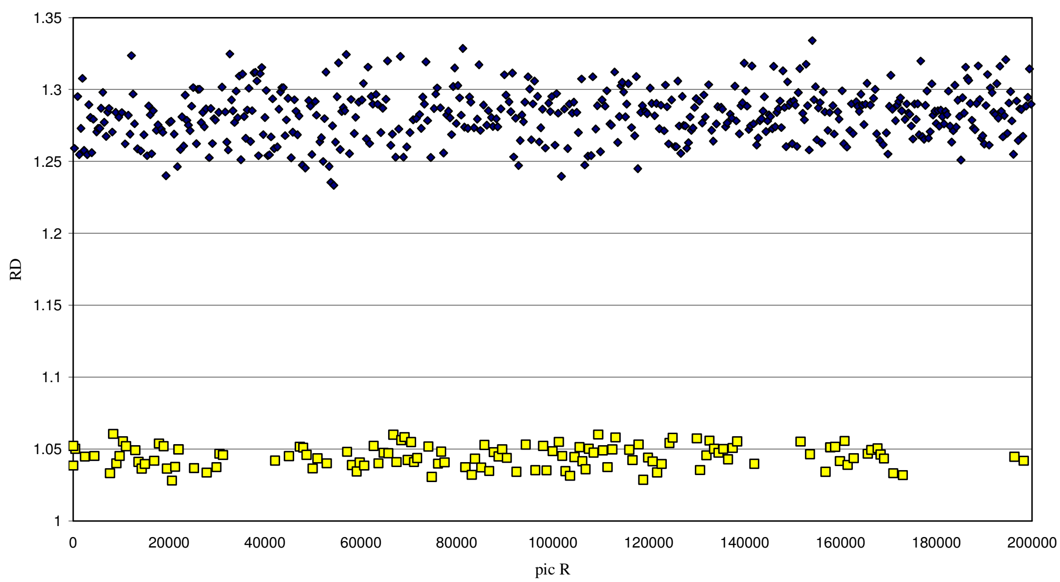


Figure IV.16 : les dimensions de régularisation des différents complexes QRS du signal du type2 "119"

La dimension de régularisation qui représente le QRS pathologique (ESV) est très faible par rapport à celle du QRS normal (voir le tableau). Dans le cas d'une contraction ventriculaire prématuré le complexe QRS subit un élargissement et par conséquent son nombre d'échantillons augmente et la dimension de régularisation dans ce cas est plus importante, or elle a chutée. D'après les résultats précédents, la pathologie entraîne une diminution dans la fractalité du signal et la chute de la dimension fractale.

c\ La dimension dans le cas du bloc de branche droit

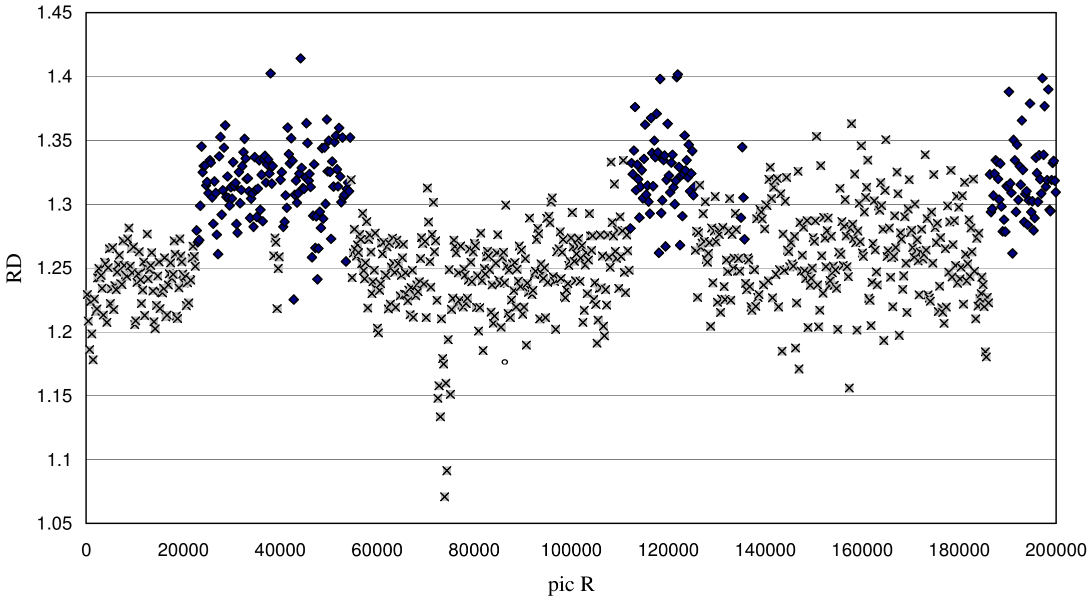


Figure IV.17 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type2 "212"

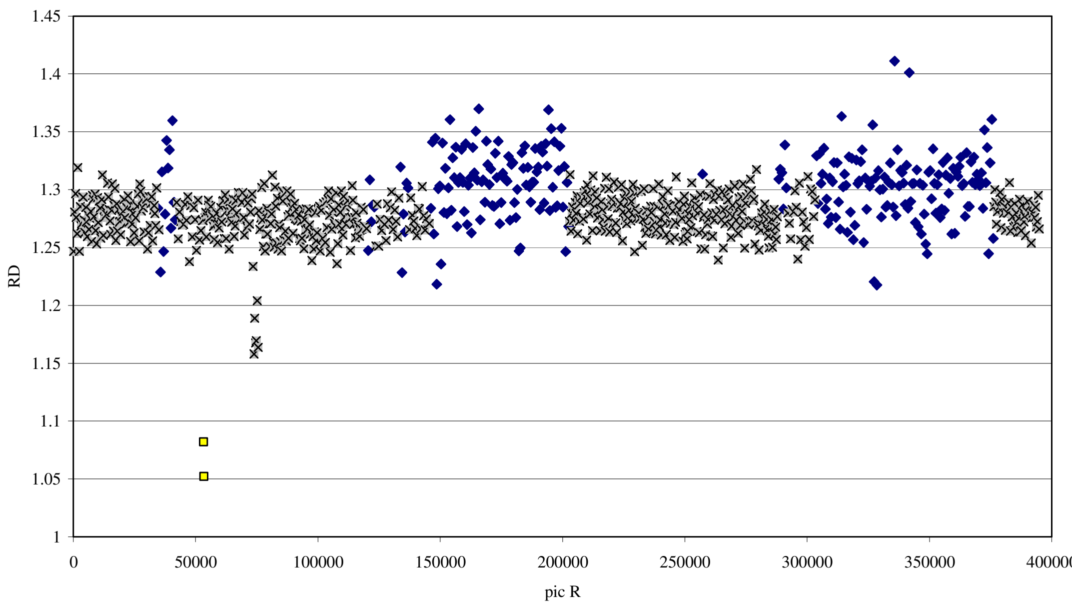


Figure IV.18 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type2 "231"

Le "212" est un signal comportant des battements normaux et pathologiques de type BBD. Les dimensions calculées pour les complexes QRS de ce signal ont une marge comprise entre les valeurs RD = 1.0707 et RD = 1.3631, seulement la majorité des points sont situés entre RD = 1.2 et RD = 1.3, là où la majorité des points qui représentent les dimensions des complexes QRS normaux commence. Nous remarquons une distinction entre les deux, mais la marge des battements normaux de ce signal est assez élevée par rapport au cas normal du type1. La morphologie est différente et l'amplitude est plus importante pour les battements normaux.

IV.5.2.1.3 Les signaux du Type3

La dimension de régularisation dans le cas de deux pathologies (Bloc de branche droit ou gauche avec une contraction ventriculaire prématuré)

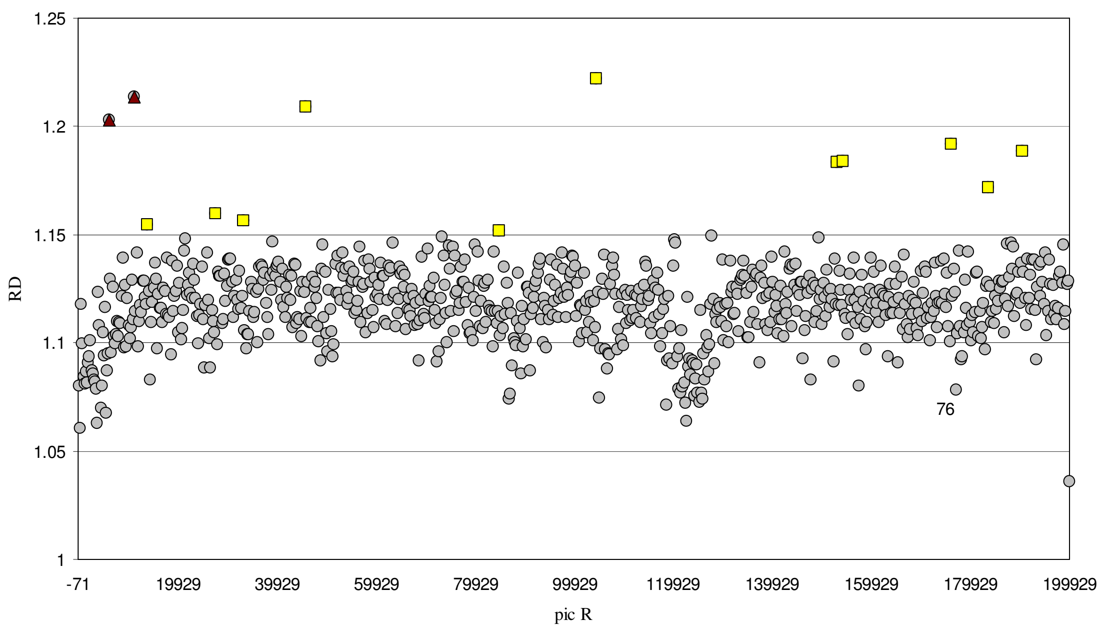


Figure IV.19 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type3 "109"

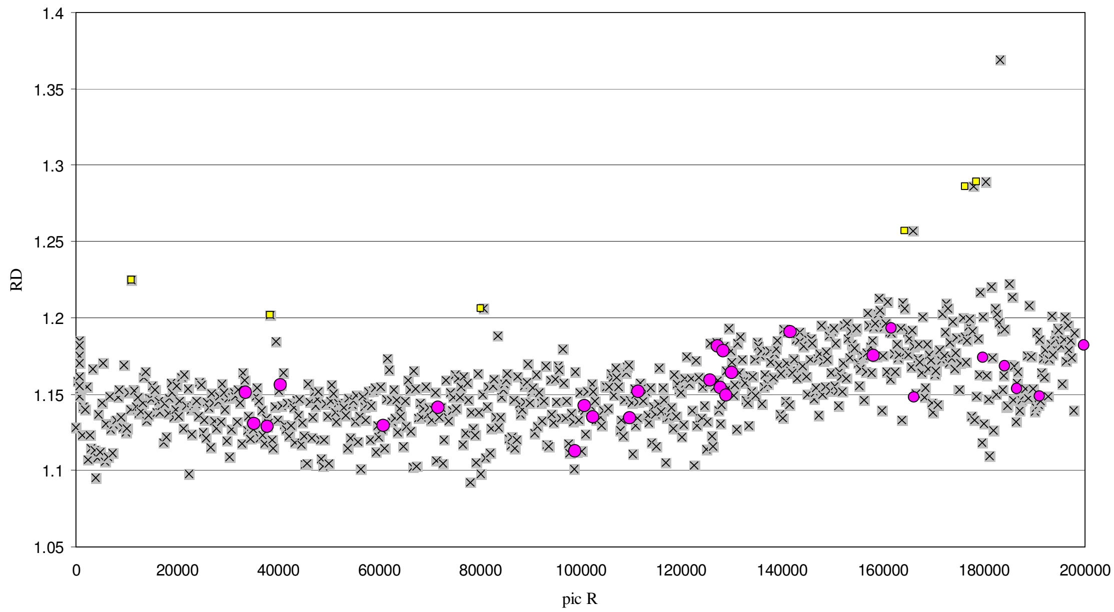


Figure IV.20 : les dimensions de régularisation
des différents complexes QRS du signal du type3 "118"

Nous avons choisis les signaux suivants :

109 : signal comportant des battements pathologiques de type ESV et BBG

118 : signal comportant des battements pathologiques de type ESV et BBD

Contrairement aux signaux du type2, la marge de la dimension concernant les QRS pathologiques (ESV), dans ce cas, est élevée. Par contre, elle reste distinctive par rapport à la marge des autres pathologies (BBD, BBG). L'existence de ces dernières a influée sur la valeur de la dimension de régularisation de l'autre pathologie.

IV.5.2.1.4 La dimension de régularisation du rythme cardiaque

Une autre approche de la dimension de régularisation serait de la calculer pour plusieurs complexes QRS. Pour chaque dimension qu'on notera RDpic, elle comportera un ensemble d'intervalle R-R successif en rajoutant à chaque fois le suivant.

Les signaux périodiques sont des signaux qui ne se croisent jamais et ne reculent pas en arrière, alors leurs dimensions fractales se situent entre les valeurs 1 et 2. Par contre et dans le cas contraire, il y a possibilité d'avoir une dimension supérieure à 2 [Katz88].

Dans le cas normal (Figure IV.21), la dimension est d'ordre croissant à quelques exceptions près. A chaque fois que le nombre d'intervalle R-R introduit augmente, la dimension augmente aussi. Elle se stabilise malgré la continuité des intervalles et ne dépasse pas la valeur de 2.

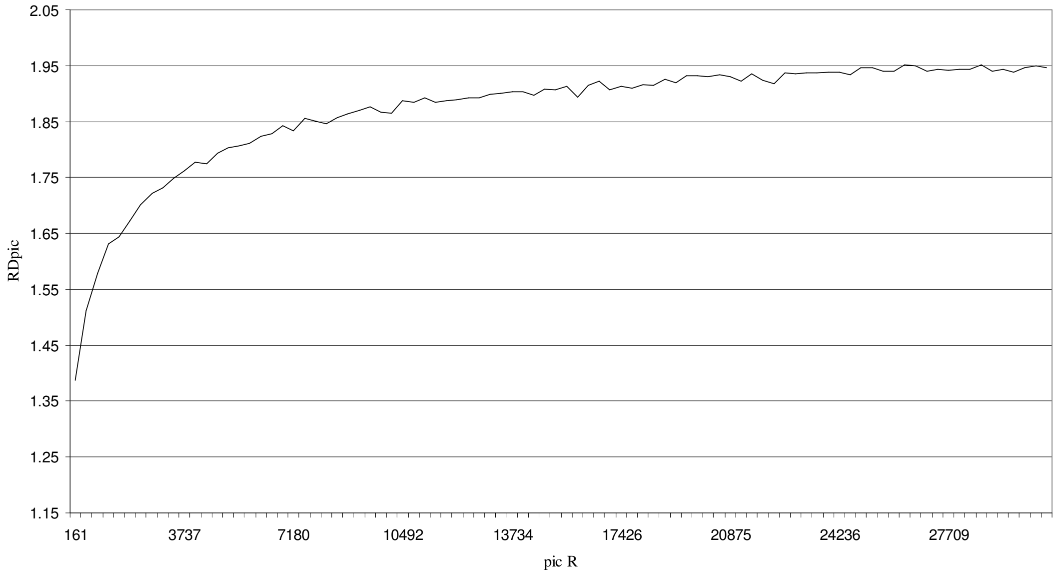


Figure IV.21 : Signal du type1"115" ne contient que des battements normaux

Le cas suivant (Figure IV.22) représente un signal comportant des battements normaux et pathologiques à la fois. A chaque transition pathologique, la dimension diminue. Après un certain nombre d'intervalles R-R, la dimension ne présente pas un grand changement pour les mêmes battements (normaux ou pathologiques), mais contrairement au premier cas elle dépasse la valeur de 2.

Le troisième cas (Figure IV.23), qui concerne 2 pathologies (BBG, ESV), nous remarquons l'existence de pics. Ces derniers représentent des battements pathologiques ESV. Les dimensions bien q'elles se stabilisent dépassent largement la valeur de 2. Ce dépassement est peut être du à l'estimation de la dimension de régularisation qui reste toujours supérieure à celle d'Hausdorff.
Nous n'avons pas pu calculer la dimension pour plus d'intervalle R-R car le nombre d'échantillons était trop important pour faire ce calcul.

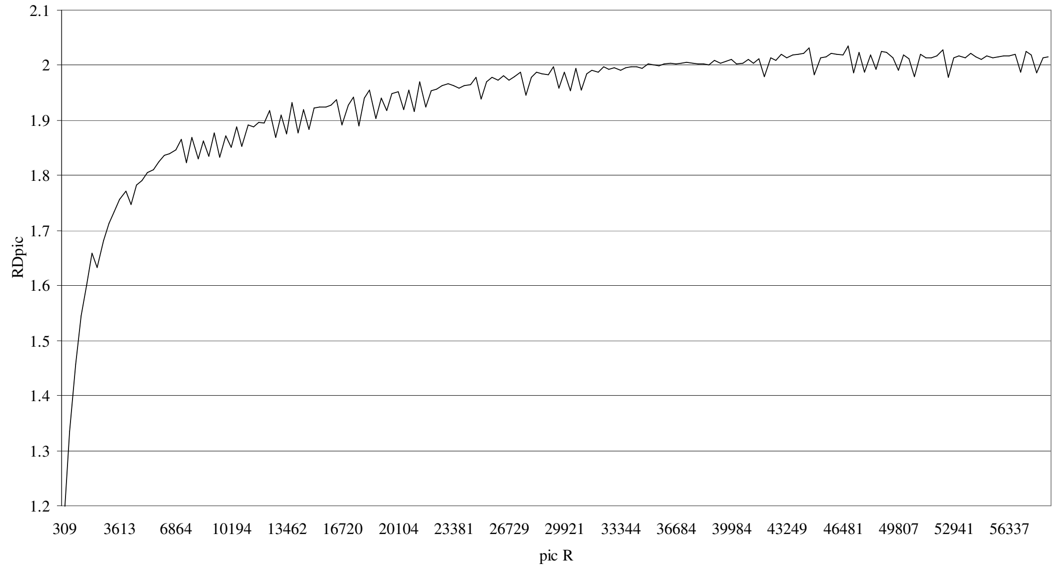


Figure IV.22 : Signal du type2 "119"

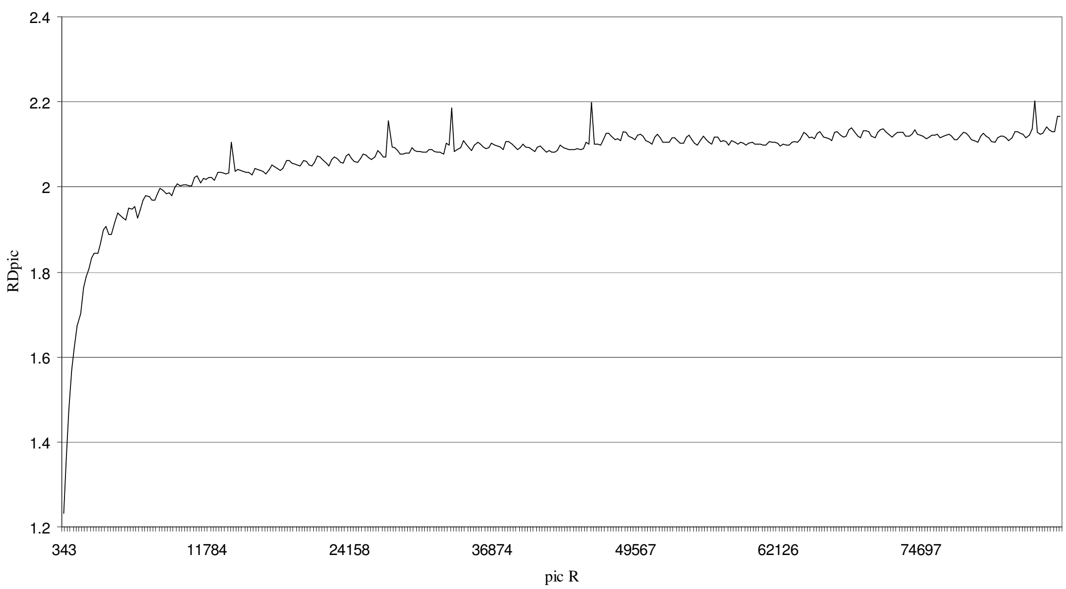


Figure IV.23 : Signal du type3 "109"

ne contient que battements pathologiques (BBG, ESV)

IV.6 CONCLUSION

Les systèmes physiologiques présentent des caractéristiques importantes dans leurs organisations complexes et tendent à montrer des dynamiques irrégulières. Pour cela, et connaissant le rôle de l'analyse fractale dans la notion de régularité, c'est elle qui s'y prête le mieux pour ce genre de signaux.

Pour démontrer la structure fractale du signal ECG, nous avons utilisés les outils fractals disponibles dans la boite à outils Fraclab, les spectres multifractals pour différents signaux sains ou contenant des pathologies pour différentes tranches d'age ont été tracés. Les complexes QRS ont été détectés et leurs dimensions fractales calculés.

Le signal ECG, dans le cas normal, est multifractal vu la largeur de son spectre et sa dimension élevée. Le vieillissement et la présence de pathologies affaiblissent se caractère du moment que les dimensions dans ce cas sont moins importantes, cela est vérifié par l'étroitesse du spectre. Ces résultats indiquent que la compréhension de l'origine et de l'organisation de telles structures temporelles et de leurs altérations peut élucider certaines caractéristiques des mécanismes de contrôle des systèmes physiologiques sains, pathologiques et vieillissants.

La caractéristique principale des systèmes physiologiques est la complexité de leurs organisations. Les méthodologies d'analyses bio-statistiques traditionnelles prétendent qu'un système biologique s'autorégule pour réduire la variabilité et pour maintenir ses sorties constantes après une quelconque perturbation.

Cependant, des faits nouveaux indiquent que les systèmes biologiques sains tendent à montrer des dynamiques irrégulières avec des fluctuations complexes, même à l'état de repos. Les méthodes issues des mathématiques non-linéaires et de la physique ont relevé la présence de corrélations à long terme de type fractal qui décrivent les fluctuations au cours du temps des systèmes physiologiques. Ces nouveaux résultats suggèrent que les systèmes biologiques évoluent loin de l'équilibre et que le maintien de la stabilité n'est pas le but du contrôle physiologique. En outre, il a été montré que ces fluctuations physiologiques révèlent des structures cachées non supposées et qu'elles sont dépendantes des perturbations d'ordre pathologique ou liées au vieillissement "perte de complexité".

L'analyse fractale étant une nouvelle génération d'outils pour la traitement du signal, a fourni différents concepts pour l'analyse des signaux d'une grande complexité et pour l'étude des questions liées aux singularités et formalisme multifractal. Dans ce cas, les ondelettes s'avèrent être aussi un outil puissant particulièrement adapté pour les définir.

La transformée en ondelettes est un outil de traitement du signal particulièrement adapté à l'analyse des signaux transitoires. Des avancées importantes ont marqués cette analyse et permis une description locale des signaux et l'obtention de nouvelles caractérisations de la régularité.

Pour mettre en évidence la structure fractale du signal ECG, nous avons utilisés les outils fractals disponibles dans la boite à outils Fraclab. Les tracés des spectres multifractals pour différents signaux sont en mesure de nous renseignés sur les différences d'age entre plusieurs sujets à travers l'élargissement du spectre. Plus ce spectre est large plus nous avons des indications sur le jeune age du sujet par rapport aux autres.

Les dimensions fractales des complexes QRS, nous ont permis de distinguer le cas normal et pathologique, dans le cas normal la dimension fractale du complexe QRS se trouve à un niveau plus élevé par rapport au complexe QRS pathologique. De même pour le cas de différentes pathologies, elles sont comparées par groupe de deux et les dimensions fractales des complexes QRS se trouvent à différents niveaux selon le type de pathologie.

Dans le cas normal, Le signal ECG est multifractal vu la largeur de son spectre et sa dimension élevée. Le vieillissement et la présence de pathologies affaiblissent ce caractère. Le passage de l'organisation complexe (fractale et multifréquentielle) du système physiologique sain à celle du système physiologique pathologique est une véritable rupture.

Afin d'étudier les transitions entre un complexe QRS normal et pathologique et entre deux QRS de différentes pathologies pour un même sujet, nous avons calculés la dimension de régularisation du rythme cardiaque pour un ensemble d'intervalles R-R et constaté ce qui suit :

- Pour le cas normal, la courbe croissante se stabilise sans dépasser la valeur de deux.
- La présence de pathologie a donnée une courbe croissante aussi qui présente des pics indiquant la pathologie par rapport au cas normal ou une autre pathologie différentes. Contrairement au premier cas, la courbe dépasse la valeur de deux sachant que la dimension fractale d'un signal doit être comprise entre 1 et 2,

A chaque transition, nous remarquons une variation de la dimension selon le cas traité. Ces résultats ouvrent des perspectives sur l'analyse du rythme cardiaque avec les outils fractals et identifier d'autres pathologies.

Listes des Figures

Listes des tableaux

CHAPITRE IV

ANNEXE

Résumé

Notre travail consiste à traiter les signaux ECG de sujets de différents ages, normaux et présentant des pathologies par une nouvelle approche en traitement du signal appelée analyse fractale pour une identification de différentes pathologies et une éventuelle possibilité de trouver une signature fractale.

L'utilisation d'ondelettes et d'outils d'analyse fractale est appropriée à l'analyse des signaux irréguliers. La caractérisation de la régularité (locale) est importante dans la description de ces signaux.

Cela peut se faire d'une manière quantitative : tracer le spectre multifractale du signal, ou encore calculer sa dimension fractale pour plusieurs complexes QRS, et comparer les résultats en se basant sur l'age, le sexe, et l'état de santé du patient.

Les signaux ECG utilisés appartiennent à la base de données " MIT-BIH " et traités avec une boite à outils nommée Fraclab.

Mots clés*:* ECG, complexe QRS, analyse multifractale, exposant de Hölder, spectres multifractals, dimension fractale, base de données MIT/BIH.

Abstract

The ECG's signals of both normal and ill subjects with different age has been analyzed with a new approach used in signal processing called fractal analysis, in order to distinguish various pathologies and find a fractal signature.

The use of wavelets and fractal analysis tools are appropriated to the irregular signal analysis, because the characterization of the local regularity is important in the description of these signals.

For this objective, we have traced multifractals spectrums of ECG's signals for different subjects and calculated their fractals dimensions of many QRS complex. Then we have compared the results and classified them for both normal and ill subjects with different ages and sexes.

These signals are obtained from the MIT/BIH and analyzed with a toolbox named Fraclab.

Keywords : ECG, QRS complex, multifractal analysis, Hölder exponents, multifractals spectrums, fractal dimension, MIT/BIH database.

ملخص

تمركز الهدف من هذا العمل في دراسة المخططات البيانية الكهربائية لعمل القلب لبعض الأشخاص مختلفي السن، مرضى أو بحالة صحية جيدة بطريقة جديدة في ميدان دراسة الإشارات تعرف بتحليل التكسير "فراكتال"، وذلك لتعيين مختلف أنواع أمراض القلب.

إن استعمال طريقة الموجات الصغيرة وكذا أدوات تحليل التكسير ملائم لدراسة الإشارات الغير نظامية لأن تمييز النظام المحلي مهم في وصف هذه الإشارات.

ولهذا الغرض قد قمنا برسم طيف التكسير وحساب سعة التكسير لمختلف مركبات "QRS"، وقمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها حسب لسن وجنس مختلف الأشخاص وحالتهم الصحية.

كل المخططات البيانية المستعملة تنتمي إلى قائمة المعطيات "MIT/BIH " وقد درست بواسطة علبة الأدوات التي تسمى "فراكلاب".

كلمات البحث: المخططات البيانية الكهربائية لعمل القلب، المركب "QRS"، تحليل التكسير"فراكتال"، دليل"هولدار"، طيف التكسير، سعة التكسير، قائمة المعطيات "MIT/BIH ".

Abréviations et Notations

Abréviations :

ECG	: Electrocardiogramme
T.O	: Transformée en ondelettes
MMTO	: Méthode du maxima du module de la transformée en ondelettes
mBf	: Mouvement Brownien Fractionnaire
mBm	: Mouvement Brownien Multifractionnaire
IFS	: Théorie des systèmes de fonctions itérés
1D	: Une Dimension (signal)
2D	: Deux Dimensions (image)
RD	: Regularization Dimension (Dimension de Régularisation)
RDmin	: La valeur minimale
RDmax	: La valeur maximale
RR	: Rythme cardiaque, Intervalle entre deux pics R
MIT/BIH	: Massachusetts Institute of Technology/ Beth Israel Hospital
INRIA	: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

Notations :

α	: Exposant de Hölder
β	: Exposant d'une fonction Hölderienne
f_h	: Spectre de Hausdorff
f_g	: Spectre de grande déviation
f_l	: Spectre de Legendre
$\hat{f}$	: Transformée de Fourier de f
ψ	: Fonction ondelette mère
$\psi_{a,b}$	: Famille d'ondelettes analysantes
$C_{x_0}^{s,s'}$	: Espaces 2-microlocaux
C_x^{α}	: Espaces Höldériens
D_q	: Dimensions de Renyi
d_F	: Dimension fractale
$\dim_H$	: Dimension de Hausdorff
$\dim_B$	: Dimension de Boite
$\dim_R$	: Dimension de Régularisation
$H(\,)$	: Transformation d'Hilbert
τ_q	: Exposants de Renyi
$L_{Loc}^{\infty} f$	: Ensembles de fonctions locales
$\stackrel{d}{=}$	: Égalité en distribution

Base de données MIT/BIH

En 1975, les laboratoires de l'hôpital de Beth Israêl à Boston et MIT ont réalisés une base de données nommée MIT/BIH. Distribuée en 1980, elle contient 48 enregistrements extraits d'une demi-heure, obtenus de 47 sujets traités par le laboratoire d'arythmie de BIH. Les séries "100" comportent 23 enregistrements choisis au hasard parmi un ensemble de 4000 enregistrements ambulatoires de 24 heures réunis d'une population de patients hospitalisés (60%) et non hospitalisés (40%). Les séries "200" représentent les 25 enregistrements qui restent en prenant en considération des arythmies rarement observées.

Ces enregistrements sont échantillonnés à une fréquence $f_e = 360 Hz$, avec une résolution de 11 bits sur une gamme de 10mV. Chaque enregistrement est annoté indépendamment par deux cardiologues ou plus, environ 110.000 annotations sont incluses dans la base de données [Boutaâ06].

Annotation	Description
N	Battement normal (Normal beat)
A	Contraction auriculaire prématurée (Atrial Premature Contraction)
V	Contraction ventriculaire prématurée (Premature Ventricular Contraction)
a	Contraction auriculaire prématurée aberrée (Aberrated Atrial Premature Contraction)
R	Bloc de branche droit (Right Bundle Branch Block)
L	Bloc de branche gauche (Left Bundle Branch Block)
P	Battement ectopique (Paced beat)
F	Fusion des battements V et N (Fusion of Ventricular and Normal beat)
f	Fusion des battements P et N (Fusion of Paced and Normal beat)
J	Battement nodal (ou jonctionnel) prématuré (Nodal (Junctional) Premature beat)
a	Battement nodal (ou jonctionnel) échappé (Nodal (Junctional) Espace beat)
E	Battement ventriculaire échappé (Ventricular Espace beat)
e	Battement auriculaire échappé (Atrial Espace beat)
S	Battement supraventrculaire prématuré (Supraventricular Premature beat)
Q	Battement non classé (Unclassified beat)

Tableau A.1 : Description des annotations des battements cardiaques de différents signaux ECG de la base de données MIT/BIH.

Le tableau (A.1) ci-dessus présente les annotations et leurs descriptions des différents battements cardiaques pour des signaux issus de la base de données. Le tableau suivant (A.2) détaille le contenu des fichiers d’annotations.

M : Masculin, **F** : Féminin et **N.E** : non enregistré

Enregistrement			Annotation															Total
	Sexe	Age	N	A	V	a	R	L	P	F	f	J	j	E	e	S	Q	
100	M	69	2239	33	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2273
101	F	75	1860	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1863
102	F	84	99	0	4	0	0	0	2028	0	56	0	0	0	0	0	0	2187
103	M	N.E	2082	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2084
104	F	66	163	0	2	0	0	0	1380	0	666	0	0	0	0	0	18	2229
105	F	73	2526	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	2572
106	F	24	1507	520	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2027
107	M	63	0	0	59	0	0	0	2078	0	0	0	0	0	0	0	0	2137
108	F	87	1740	4	16	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	1763
109	M	64	0	0	38	0	0	2492	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2532
111	F	47	0	0	1	1	1	2123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2124
112	M	54	2537	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2539
113	F	24	1789	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1795
114	F	72	1820	10	43	0	0	0	0	4	0	2	0	0	0	0	0	1879
115	F	39	1953	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1953
116	M	68	2302	1	109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2412
117	M	69	1534	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1535
118	M	69	0	96	16	0	2166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2278
119	F	51	1543	0	444	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1987
121	F	83	1861	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1863
122	M	51	2476	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2476
123	F	63	1515	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1518
124	M	77	0	2	47	0	1531	0	0	5	0	29	5	0	0	0	0	1619
200	M	64	1743	30	836	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2601
201	M	68	1625	30	198	97	0	0	0	2	0	1	10	0	0	0	0	1963
202	M	68	2061	36	19	19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2136
203	M	43	2529	0	444	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	2980
205	M	59	2571	3	71	0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	0	2656
207	F	89	0	107	105	0	86	1457	0	0	0	0	0	105	0	0	0	1860
208	F	23	1586	0	992	0	0	0	0	373	0	0	0	0	0	2	2	2955
209	M	62	2621	382	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3004
210	M	89	2423	0	194	22	0	0	0	10	0	0	0	1	0	0	0	2650
212	F	32	923	0	0	0	1825	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2748
213	M	61	2641	25	220	3	0	0	0	362	0	0	0	0	0	0	0	3251
214	M	53	0	0	256	0	0	2002	0	1	0	0	0	0	0	0	2	2261
215	M	81	3196	2	164	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3363
217	M	65	244	0	162	0	0	0	1542	0	260	0	0	0	0	0	0	2208
219	M	N.E	2082	7	64	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2154
220	F	87	1954	0	94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2048
221	M	83	2031	0	396	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2427
222	M	84	2062	208	0	0	0	0	0	0	0	1	212	0	0	0	0	2483
223	M	73	2029	72	473	1	0	0	0	14	0	0	0	0	16	0	0	2605
228	F	80	1688	3	362	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2063
230	M	32	2255	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2256
231	F	72	314	1	2	0	1254	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1571
232	F	76	0	1382	0	0	397	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1780
233	M	57	2230	7	831	0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	0	3079
234	M	56	2700	0	3	0	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	2753
Total			75054	2544	7129	150	7259	8074	7028	803	982	83	229	106	16	2	33	109492

Tableau A.2 : Fichiers d'annotations de la base de données MIT/BIH détaillés

[Adlakha02] Amit Adlakha, **“Single trial EEG Classification”**, Swiss Federal Institute of Technology, 2002.

[Arnéo04] A. Arnéo, S. Jaffard, **“L’analyse multifractale des signaux”**, Images des Mathématiques, pp. 7-14, 2004.

[Arnéodo] A. Arnéodo, E. Barcy, S. Jaffard, J.F. Muzy, **“Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities”**, Journal of Fourier analysis and applications, pp. 159- 174, sans date.

[Arnéodo03] A. Arnéodo, C. Vaillant, B. Audit, Y. D'aubenton-Carafa et C. Thermes, ***“La transformation en ondelettes continue : un microscope mathématique adapté à l'étude des propriétés d'invariance d'échelle et de corrélations à longue portée des séquences d'ADN”***, Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images GRETSI, 2003.

[Barrière08] Olivier Barrière, Jacques Lévy Véhel, ***“Local Hölder regularity-based modeling of RR intervals”***, Refereed Conference Contribution, IEEE International Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS), 2008.

[Boutaâ06] M. Boutaâ, ***“Analyse et quantification de la corrélation du rythme cardiaque avec les différentes composantes du signal ECG”***, Thèse de Magister, Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen, 2006.

[Borgnat96] P. Borgnat, ***“Détermination du spectre de singularité d'un signal fractal par la méthode du module du maxima de la transformée en ondelettes”***, Archive des rapports de stages des étudiants de l'École Normale Supérieure de Lyon, MSM2, 1996.

[Canus] C. Canus, J. Lévy Véhel, C. Tricot, **“Continuous large deviation multifractal spectrum : definition and estimation”**,…

[Caron02] Y. Caron, P. Makris, N. Vincent, ***“A method for detecting objects using Legendre transform”***, RFAI team publication, Maghrebian Conference on Computer Science MCSEAI, Annaba (Algeria) , pp. 219-225, May 2002.

[Chhabra89] A. Chhabra, R. V. Jensen, ***"Direct Determination of the f (α) Singularity Spectrum"***, Phys. Rev. Lett. 62, 1327, 1989.

[Cohen92] A. Cohen, ***"Ondelettes et traitement numérique du signal "***, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées. 1992.

[Demichel06] Y. Demichel, ***"Analyse fractale de fonctions aléatoires: les fonctions de Bosses"***, Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales N° 505, 2006.

[Gnitecki03] J. Gnitecki, Z. Moussavi, **"Variance Fractal Dimension Trajectory as a Tool for Heart Sound Localization in Lung Sounds Recordings"**, Engineering in Medicine and Biology Society, Vol. 3, pp. 2420- 2423, 2003.

[Gonçalvès98] Paulo Gonçalvès, Rudolf Riedi & Richard Baraniuk, **"Simple Statistical Analysis of Wavelet-based Multifractal Spectrum Estimation"**, Signals Systems and Computers, pp. 109-121, 1998.

[Gonçalvès07] P. Gonçalvès, P. Abry, G. Rilling, and P. Flandrin, ***"Fractal dimension estimation: empirical mode decomposition versus wavelets"***. In IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc., Honolulu, Hawaii (US), 2007.

[Guiheneuf98] B. Guiheneuf, S. Jaffard, J. Lévy Véhel, **"Two results concerning chirps and 2-microlocal exponents prescription"**, Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol. 5, N. 4, p. 487- 492, 1998.

[Halsey86] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P.Kadanoff, I. Procaccia, & B. Shraiman, ***"Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets"***, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. Vol. 33, No 2,* pp. 513-516, 1986.

[Harte01] D. Harte, ***"Multifractals: theory and applications"***, ISBN 1-58488-154-2, 2001.

[Jiang97] C. F. Jiang, A.P. Avolio, ***"Characterisation of structural changes in the arterial elastic matrix by a new fractal feature: directional fractal curve"***, Med. Biol. Eng. Comput, Vol. 35, pp. 246-252, 1997.

[Katz88] Michael J. Katz, ***“Fractals and the analysis of waveforms”***, Compt. Biol. Med. Vol. 18, No. 3, pp 145-156, 1988.

[Kestener03] Pierre Kestener, ***“Analyse Multifractale 2D et 3D à l’aide de la transformation en ondelettes”***, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux, 2003.

[LeCadet04] O. Le Cadet, ***“Méthodes ondelettes pour la segmentation d’images. Applications à l’magerie médicale et au tatouage d’images”***, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.

[Lévy-Véhel] J. Lévy Véhel, ***“Régularité Ponctuelle, Analyse Multifractale, et Traitement des signaux”***, http://www-syntim.inria.fr/fractales/. INRIA, sans date.

[Lévy-Véhel95] J. Lévy Véhel, ***"Approches fractales en traitement du signal”***, GRETSI, Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images, 1995.

[Lévy-Véhel98] J. Lévy Véhel and F. Roueff, ***“A regularization approach to fractional dimension estimation”***, in *proceedings of Fractals 98*, Malta, 1998.

[Lévy-Véhel00] J. Lévy Véhel, ***"Analyse Fractale : une nouvelle génération d'outils pour le traitement du signal"***, Refereed Journal Article, Hermes Science publications, Informatiques -enjeux, tendances et évolution-, TSI, 2000.

[Lévy-Véhel01] J. Lévy Véhel , Albert Benveniste, ***“Ondelettes et fractales”***, INRIA - INedit 27, 2001.

[Lévy-Véhel03] J. Lévy Véhel, Pierrick Legrand, **“Signal and image processing with Fraclab”**, 2003.

[Lévy-Véhel04] J. Lévy Véhel, C. Tricot, **“On Various Multifractal Spectra”**, Progress in Probability, Vol. 57, pp. 23-42, 2004.

[Li03] J. Li, F. Nekka, ***“The Hausdorff measure functions: A new way to characterize fractal sets”***, Pattern Recognition Letters, Vol. 24, pp. 2723–2730, 2003.

[Lina07] D.C. Lina and A. Sharif, ***"Wavelet transform modulus maxima based fractal correlation analysis"***, The European Physical Journal B, Vol. 60, pp 483-491, 2007.

[Liu05] J. Z. Liu, Q. Yang, B. Yao, R.W. Brown, G. H. Yue, ***"Linear correlation between fractal dimension of EEG signal and handgrip force"***, Biological Cybernetics, Vol. 93, pp. 131-140, 2005.

[Maillot06] F. Maillot, **"Une construction d'ondelettes de Daubechies"**, 2006.

[Malatesta] D. Malatesta, C. Caillaud, **"Analyse fractale de la marche : application au sujet âgé"**,…

[Mélot02] C. Mélot, ***"Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal"***, Thèse de Doctorat, Université PARIS XII, 2002.

[Misiti93] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J. M. Poggi, ***"Ondelettes en statistique et traitement du signal"***, Revue de statistique appliquée, tome 41, n°4 (1993).

[Muller92] P.Y. Muller, N. Contento, H. Rix, **"Fractal Dimension on ECG"**, Engineering in Medicine and Biology Society, Vol.14. Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE. 1992.

[Pan85] J. Pan, W. J. Tompkins, ***"A real-time QRS detection algorithm"***, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. BME-32, No. 3, 1985.

[Portefaix02] C. Portefaix, C. Cavaro Ménard, F. Chapeau Blondeau, ***"Identification and modeling of fractal signals with iterated function systems"***, European Signal Processing Conference, Toulouse, France, Vol. 1, pp. 185-188, 2002.

[Projet Fractales95] Jacques Lévy Véhel, et al, **" *Approches Fractales pour l'Analyse et la Modélisation des Signaux*"**, Rapport d'activité, 1995.

[Projet Fractales97] Jacques Lévy Véhel, et al, **" *Approches Fractales pour l'Analyse et la Modélisation des Signaux*"**, Rapport d'activité, 1997.

[Projet Fractales98] Jacques Lévy Véhel, et al, **" *Approches Fractales pour l'Analyse et la Modélisation des Signaux*"**, Rapport d'activité, 1998.

[Projet Fractales99] Jacques Lévy Véhel, et al, “ ***Approches Fractales pour l’Analyse et la Modélisation des Signaux***”, Rapport d’activité, 1999.

[Projet Fractales02] Jacques Lévy Véhel, et al, “ ***Approches Fractales pour l’Analyse et la Modélisation des Signaux***”, Rapport d’activité, 2002.

[Siteweb1] http://ECG/3_ L'ELECTROCARDIOGRAMME NORMAL.html

[Siteweb2] http://Fractal Dimension.html

[Seuret03] S. Seuret, ***“Analyse de Régularité locale, Quelques Applications à l’Analyse Multifractale”***, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 2003.

[Smrčka 03] P. Smrčka, R. Bittner, P. Vysoký, K. Hána, ***“Fractal and multifractal properties of heartbeat interval series in extremal states of the human organism”***, Measurement Science Review, Volume 3, Section 2, 2003.

[Turcott96] R. G. Turcott and M. C. Teich, ***“Fractal character of the Electrocardiogram: Distinguishing heart-failure and normal patients”***, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 24, pp. 269-293, 1996.

[Vacher04] M. Vacher, D. Istrate, ***“Notes de lecture sur la transformée en Ondelettes”***, Communication Langagière et Interaction Personne-Système, 2004.

[Vojak96] Robert Vojak, Jacques Lévy Vehel, ***“Higher order multifractal analysis”***, Rapport de Recherche, 1996.

[Wang03] J. Wang, X. B. Ning, Y. Chen, ***“Multifractal analysis of electronic cardiogram taken from healthy and unhealthy adult subjects”***, Physica A, 323:561, 2003.

[Wikipedia1] http://fr.wikipedia.org/Electrocardiographie.html

[Wikipedia2] http://fr.wikipedia.org/Dimension de Hausdorff.html

[Zhang97] X. S. Zhang, Y. S. Zhu, X. J. ZhangNew, ***“Approach to studies on ECG dynamics: extraction and analyses of QRS complex irregularity time series”***, Med. Biol. Eng. Comput., Vol. 35, pp. 467-474, 1997.

[Zhang08] D. Zhang, G. Tan, J. Hao, ***"Fractal Random Walk and Classification of ECG Signal"***, International Journal of Hybrid Information Technology, Vol. 1, No. 1, January, 2008.