Table des Matières

Introduction

Les études des vibrations des corps solides ne purent se développer qu'avec la mise au point de la théorie mathématique des vibrations élastiques entreprise par Robert Hooke entre 1660 et 1676. Les équations de la vibration des barres furent publiées en 1744 par Léonhardt Euler et en 1751 par Daniel Bernoulli.

Les mécanismes de vibration de plaques solides élastiques furent découverts par E. F. Chladni, l'un des plus illustres acousticiens expérimentaux. C'est à lui que l'on doit les célèbres figures de vibration des plaques recouvertes de sable fin mettant en évidence les positions des lignes nodales.

D'Alembert s'intéressa aux petites vibrations et leur forme en général. Il déduit du principe fondamental de la dynamique une équation aux dérivées partielles satisfaite par le déplacement vertical de la corde. D'Alembert résolut cette équation et montra que toute solution est la somme de deux ondes progressives, voyageant en sens inverse, à la même vitesse, sans changer de forme. Les conditions aux limites entraînent que les deux ondes sont en fait égales et périodiques de période double de la longueur de la corde. Il retrouva les modes de vibration en sinusoïde, leurs fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale. Ce sont les ondes stationnaires.

Au XIXème siècle, la famille des ondes s'élargit : l'équation des membranes vibrantes ressemble à celle des cordes, mais les conditions aux limites, au bord de la membrane font que la résolution analytique n'est possible que pour des membranes de formes simples.

En 1850, G. Robert Kirchhoff avança une théorie mathématique décrivant les vibrations des plaques et des cordes.

En particulier, Kirchhoff donna la solution générale de l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{K}$$

qui représente une extension de l'équation de D'Alembert des ondes.

L est la longueur de la corde, p_0, h, ρ et E sont des paramètres caractérisant le matériau de la corde.

Ce type d'équation attira l'attention des chercheurs après le fameux travail de Lions [11] dans lequel est introduit le cadre fonctionnel pour la résolution de tels problèmes.

Dans ce mémoire, basée essentiellement sur la lecture de l'article [12], on s'intéresse à l'équation stationnaire associée à (K).

Ce mémoire est présenté comme suit:

Dans le chapitre 1, on rappelle quelques outils de base de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats connus utilisés dans ce mémoire.

Le chapitre 2, est consacré au premier résultat d'existence et unicité de solution d'un problème de type Kirchhoff par la méthode de sous et sur solutions.

Dans le chapitre 3, on applique la méthode de Galerkin pour démontrer un deuxième résultat d'existence et d'unicité du problème considéré.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à l'existence des solutions non triviales par la méthode variationnelle.

Chapitre 1

Préliminaires

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

1.1 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual, muni de la norme duale:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| ,$$

et soit E'' son bidual (dual de E') muni de la norme

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle| .$$

On considère l'injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit:

Soit $x \in E$ fixé, l'application $f \rightarrow \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linaire et continue sur E', c'est-à-dire un élément de E'' noté J_x, on a donc :

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'}\leq 1} |\langle J_x, f\rangle| = \sup_{\|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E .$$

Définition 1.1.1 [4]

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.

Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E'' (à l'aide de l'isomorphisme J).

Proposition 1.1.2 *Un espace de Banach E est dit réflexif si et seulement si tout fermé borné de E est faiblement compact.*

Théorème 1.1.3 *(d'Eberlein - Shmulyan)*

Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si, toute suite bornée $(x_n)_n$ de E contient une sous suite $(x_{n_i})_i$ qui converge faiblement dans E.

1.2 Espaces séparables et espaces séparés

Définition 1.2.1 *Un espace métrique E est dit séparable s'il existe un ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Définition 1.2.2 *Un espace séparé, dit aussi espace de Hausdorff, est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.*

Définition 1.2.3 *(opérateur compact)*

Soit X, Y deux espaces de Banach, et soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire et continu.

On dit que A est un opérateur compact si et seulement si $\overline{A(B_1)}$ est compact dans Y, où

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.3.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.*

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., N \right\},$$

où

$$g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \operatorname{grad} u.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ et muni de la norme,

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Théorème 1.3.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$, séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.3.3 *Soit m un entier et soit p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \textit{avec} \quad |\alpha| \leq m, \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad \textit{tel que} \\ \\ \int\limits_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \end{array} \right\}$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Les espaces $H^m(\Omega)$

Définition 1.3.4 *De la même façon on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif .*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \ |\alpha| \leq m \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.3.5 *$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable et réflexif.*

Les espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$

$D(\Omega)$ étant l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

Définition 1.3.6 [4]
Soit $1 \leq p \leq \infty$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.
L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$, muni de la norme induite par celle de $W^{m,p}(\Omega)$, est un espace de Banach séparable et réflexif si $1 < p < \infty$.
Et on note:

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ peut-être défini comme suit

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ sur \ \partial\Omega \right\}.$$

Proposition 1.3.7 *(Inégalité du Poincaré)*
Soit Ω un ouvert borné dans une direction, alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi

$$\|u\| := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

est une norme de $H_0^1(\Omega)$.
Par la suite on utilise la notation:

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.3.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est un opérateur compact.*

Théorème 1.3.9 *(Rellich-Kondrachov)*[4]

Supposons Ω de classe C^1, on a:

Si $p < n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \underset{cpt}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1, p^*[\quad$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

Si $p = n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \underset{cpt}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1, +\infty[$,

Si $p > n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \underset{cpt}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$.

1.4 Méthodes topologiques

1.4.1 Méthode de sous et sur solutions

L'idée générale c'est d'exploiter certaines propriétés afin de trouver la solution cherchée[7]

Plus précisément, on montre que si on peut trouver une sous solution $\underline{u}$ et une sur solution $\overline{u}$ d'un problème aux limites bien particulier et si de plus $\underline{u} \leq \overline{u}$, alors il existe une solution qui satisfait:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

considérons par exemple l'équation du Poisson non linéaire:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

oú f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$|f'| \leq c \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Définitions

1· *On dit que* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *est une sur solution faible du problème* (1) *si:*

$$\int_\Omega D\overline{u}Dvdx \geq \int_\Omega f(\overline{u})\, v \; dx, \tag{3}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $v \geq 0$ *p.p.*

2· *On dit que* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *est une sous solution faible du problème* (1) *si:*

$$\int_\Omega D\underline{u}Dvdx \leq \int_\Omega f(\underline{u})\, v \; dx, \tag{4}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $v \geq 0$ *p.p.*

On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ *est une solution faible du problème* (1) *si:*

$$\int_\Omega DuDvdx = \int_\Omega f(u)\, vdx,$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 1.4.2 *Si* $\overline{u}$ *et* $\underline{u} \in C^2(\Omega)$, *alors de* (3) *et* (4) *on trouve:*

$$-\Delta\overline{u} \geq f(\overline{u}) \ \ et \ -\Delta\underline{u} \leq f(\underline{u}) \ \ dans\ \Omega$$

Théorème 1.4.3 *(existence d'une solution entre la sous solution et la sur solution)*

On suppose qu'il existe une sous solution faible $\underline{u}$ *et une sur solution faible* $\overline{u}$ *du problème* (1) *satisfaisant:*

$$\begin{cases} \underline{u} \leq \overline{u} \quad p.p \ dans\ \Omega \\ \underline{u} \leq 0,\ \overline{u} \geq 0 \ sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Alors il existe une solution faible u *du problème* (1) *telle que:*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \ \ p.p \ dans\ \Omega.$$

Démonstration : pour la démonstration de ce théorème voir [7] ■

1.4.4 Méthode de Galerkin

Principe de la méthode

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste qui consiste les formulations faibles. L'idée de la méthode est la suivante:

Partant d'un problème posé dans un espace V de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espace V_i de dimension finie $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} V_i \subset V$, on résout ensuite le problème approché dans V_i, enfin on passe à la limite en faisant tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour obtenir une solution du problème de départ [10].

1.4.5 Méthode de point fixe

Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une fonction.

On appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Les problèmes des EDP non linéaires peuvent être reformulés sous forme d'un problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application.

Théorème du point fixe de Brouwer [7]

Notons par $\overline{B^m}$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^m$de centre 0 et de rayon 1,

$$\overline{B^m} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\}.$$

Théorème 1.4.6 *Toute application continue de $\overline{B^m}$ dans $\overline{B^m}$ admet au moins un point fixe* [7] .

Remarque 1.4.7 *Le théorème de Brouwer n'est pas vrai en dimension infinie.*

Exemple 1.4.8 *Considérons l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ défini comme suit:*

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \textit{telle que} \ \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{l^2} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Notons

$$\begin{aligned} \overline{B} &= \left\{ x \in l^2(\mathbb{N}) \quad \textit{tel que} \quad \|x\|_{l^2} \leq 1 \right\}, \\ S &= \left\{ x \in l^2(\mathbb{N}) \quad \textit{tel que} \quad \|x\|_{l^2} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Considérons l'application $T : \overline{B} \to \overline{B}$ définie par:

$$x \longmapsto T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_0, ..., x_n, ... \right).$$

On voit que T est une application continue, mais T n'admet aucun point fixe.

En effet,

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_{l^2}^2 &= \left(\sqrt{1 - \|x\|_{l^2}^2} \right)^2 + \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 \\ &= 1 - \|x\|_{l^2}^2 + \|x\|_{l^2}^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$T(x) \in S \quad \forall x \in \overline{B}.$$

Supposons au contraire qu'il existe $x \in \overline{B}$ *tel que* $T(x) = x$.

Donc

$$\|T(x)\| = \|x\| = 1,$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} T(x) - x &= 0 \\ i.e \quad \left(\sqrt{1 - \|x\|^2} - x_0, x_0 - x_1, ..., x_n - x_{n+1}, ... \right) &= (0, ..., 0, ...) . \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$x_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Par suite,

$$\|x\| = 0,$$

ce qui est absurde avec l'hypothèse que $\|x\| = 1$.

On conclut donc que la méthode de point fixe de Brouwer ne s'applique pas si l'espace est de dimension infinie.

1.5 Méthode variationnelle

Définition 1.5.1 *Soit* X *un espace de Banach,* V *un ouvert de* X *et* $F : V \to R$ *une fonction. Si* $u \in V$, *on dit que* F *est différentiable (ou dérivable) en* u *au sens de Fréchet s'il existe* $l \in X'$, *tel que:*

$$\forall v \in V, \quad F(v) - F(u) = \langle l, v - u \rangle + o(v - u).$$

Définition 1.5.2 (*point critique*)

Soit $F : V \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle définie sur un espace de Banach* V *différentiable au sens de Fréchet, un point critique de* F *est un élément* u *de* V *qui annule la différentielle* DF *de* F.

Définition 1.5.3 (*point régulier*)

Un point régulier de F *est un point* u *tel que* $DF(u) \neq 0$.

Définition 1.5.4 (*valeur critique*)

Une valeur critique de F *est un nombre réel* c *tel qu'il existe* $u \in V$ *point critique de* F *tel que* $F(u) = c$.

Une valeur qui n'est pas critique est appelée valeur régulière de F.

Dans la méthode variationnelle, les solutions d'un problème sont les points critiques de certaine fonctionnelle réelle définie sur un espace de Banach.

1.5.5 Suite de Palais-Smale

Définition 1.5.6 [9]
Soit F une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach.
Une suite (u_n) est une suite de Palais-Smale si

$$|F(u_n)| \leq c \quad et \quad \|\nabla F(u_n)\|_{E'} \to 0.$$

Et (u_n) est dite une suite de Palais-Smale relative à F, au niveau β si en plus

$$F(u_n) \to \beta.$$

Les calculs variationnels nous donnent l'existence d'une suite de Palais-Smale et non pas l'existence d'un point critique, pour assurer l'existence d'un tel point, on a besoin d'une condition supplémentaire dite condition de Palais-Smale.

Définition 1.5.7 *On dit qu'une fonctionnelle F définie sur un espace de Banach vérifie la condition de Palais-Smale si de toute suite de Palais-Smale en peut extraire une sous suite fortement convergente et la limite est exactement le point critique.*

Dans le cas où F est minorée ou majorée, il est raisonnable de montrer que le minimum ou le maximum sont atteints.

1.5.8 Formulation variationnelle

Soit à chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En fait, u est une solution au sens faible, c'est-à-dire:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega g(x,u)\, v \; dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Et u est un point critique de la fonctionnelle d'énergie associée à ce problème:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx,$$

où

$$G(x,u)=\int\limits_0^u g(x,s)\,ds.$$

Théorème 1.5.9 [*13*]

Soit M un espace vectoriel séparé, supposons $E: M \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonctionnelle qui satisfait la condition de compacité suivante:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R};\ K_\alpha=\{u\in M\colon E(u)\leq\alpha\},$$

est compact, alors E est uniformément bornée inférieurement sur M et atteint son infinimum, i.e

$$\exists u_0\in M \text{ tel que } E(u_0)=\inf_{u\in M}E(u).$$

Théorème 1.5.10 *Soit $(V,\|.\|)$ un espace de Banach réflexif et $M\subset V$, un sous espace fermé de V. Supposons $E: M\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ vérifie les conditions suivantes:*

$$\begin{cases} \text{coercive: si } \|u\|\longrightarrow+\infty \quad \text{alors } E(u)\longrightarrow+\infty \\ \text{faiblement sci: } \forall u_n\longrightarrow u \ \text{ alors } E(u)\leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} E(u_n). \end{cases}$$

Alors E est bornée inférieurement et atteint son minimum.

1.5.11 Théorème du col

Théorème 1.5.12 *Soit X un espace de Banach, $J\in\mathbb{C}^1(X,\mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0)=0$, et que :*

1. *Il existe $R>0$ et $a>0$ tels que si $\|u\|=R$ alors $J(u)\geq a$.*
2. *Il existe $u_0\in X$ tel que $\|u_0\|>R$ et $J(u_0)<a$.*

Alors J possède une valeur critique c telle que $c\geq a$.

Chapitre 2

Résultats d'existence par la méthode de sous et sur solutions

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner des résultats d'existence et d'unicité des solutions positives dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ du problème de type Kirchhoff suivant:

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) \Delta u = f(x,u) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ domaine borné à frontière régulière et $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions non négatives continues. Grâce à un théorème de comparaison et un résultat dû à Alves et Corrêa [2] on montre, en se basant sur la méthode de sous et sur solution l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (P).

2.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, supposons que la fonction M est continue et satisfait la condition suivante:

$$M(t) \geq m_0 \ \forall t \geq 0, \tag{M$_0$}$$

où m_0 est une constante positive. On note par H la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$H(t) = M\left(t^2\right) t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On dit que la fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution du problème (P) si

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right) \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega f(x,u) \, v \; dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Commençons par énoncer le théorème suivant qui nous sera utile par la suite.

Théorème 2.2.1 *Si H est une fonction monotone avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors pour toute $f \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution pour le problème M-linéaire suivant:*

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u = f(x) \;\; \textit{dans } \Omega \\ \qquad u = 0 \;\; \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathrm{p}_{M,L}$}$$

Démonstration : Voir [2] ∎

Maintenant, supposons que la fonction M satisfait la condition suivante:

$$M \text{ est une fonction non-croissante dans } [0, +\infty[. \tag{M_1}$$

Théorème 2.2.2 *Si la fonction M satisfait (M_1), H est une fonction croissante avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et s'il existe $u, w \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifiant:*

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq w \;\; \textit{dans } \Omega \\ u = w = 0 \;\; \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{a}$$

$$-M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u \leq f(x,u), \tag{b}$$

$$-M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx\right) \Delta w \geq f(x,w). \tag{c}$$

Supposons de plus que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante par rapport à la variable réelle, *alors, il existe* $U \in H_0^1(\Omega)$ *tel que:*

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla U|^2 \, dx\right) \Delta U = f(x, U) \text{ dans } \Omega \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec, $u \leq U \leq w$ *dans* $\overline{\Omega}$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du résultat suivant

Théorème 2.2.3 *(principe de comparaison)*
Supposons que les fonctions H *et* M *vérifient les conditions du théorème précédent, et que* $u, w \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *sont des fonctions non-négatives vérifiant:*

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u \leq -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx\right) \Delta w \quad \text{dans } \Omega \\ u = w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P'}$$

alors $u \leq w$ *dans* $\overline{\Omega}$.

Démonstration : En multipliant les deux termes de l'inégalité (P') par u et w respectivement, et en intégrant sur Ω, on obtient:

$$\int\limits_{\Omega} M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right) |\nabla u|^2 \; dx \leq \int\limits_{\Omega} M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx\right) \nabla w \; \nabla u \; dx$$

et

$$\int\limits_{\Omega} M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right) \nabla u \; \nabla w \; dx \leq \int\limits_{\Omega} M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx\right) |\nabla w|^2 \; dx.$$

Donc

$$M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right) \|u\|^2 \leq M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx\right) \langle w, u \rangle .$$

De même

$$M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\right)\langle w,u\rangle\leq M\left(\int_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx\right)\|w\|^2.$$

A partir de ces inégalités on aura:

$$\frac{M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2}{M\left(\|w\|^2\right)}\leq\langle w,u\rangle\leq\frac{M\left(\|w\|^2\right)\|w\|^2}{M\left(\|u\|^2\right)}$$

donc

$$\frac{M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2}{M\left(\|w\|^2\right)}\leq\frac{M\left(\|w\|^2\right)\|w\|^2}{M\left(\|u\|^2\right)},$$

ce qui implique que

$$M^2\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2\leq M^2\left(\|w\|^2\right)\|w\|^2.$$

Comme H est une fonction croissante avec $H(0)=0$ alors

$$M\left(\|u\|^2\right)\|u\|\leq M\left(\|w\|^2\right)\|w\|,$$

d'où,

$$\|u\|\leq\|w\|,$$

et d'après (M_1)

$$M\left(\|u\|^2\right)\geq M\left(\|w\|^2\right). \tag{*}$$

Maintenant, par le principe du maximum, on a :

$$M\left(\|u\|^2\right)u\geq M\left(\|w\|^2\right)w. \tag{**}$$

D'après $(*)$ et $(**)$, on conclut que $u\leq w$. ■

Démonstration : (Théorème 2.2.2)

La preuve de ce théorème utilise un argument similaire à celui dans l'article [6] (pour le cas $M=1$).

Puisque la sous solution $u\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, alors $f(x,u(x))\in L^2(\Omega)$.

Considérons le problème M-linéaire suivant:

$$\begin{cases}-M\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx\right)\Delta v=f(x,u(x))\ \text{ dans }\Omega\\ v=0\text{ sur }\partial\Omega.\end{cases} \tag{P$_1$}$$

Il résulte du théorème 2.2.1 qu'il existe une solution unique $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ du problème (P_1) , de plus,

$$-M\left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx\right)\Delta u_1 \geq -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u \text{ dans } \Omega \ ,$$

ce qui donne, d'après le théorème 2.2.3, $u_1 \geq u \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.

On a également

$$-M\left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx\right)\Delta u_1 \leq -M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\right)\Delta w$$

car, f étant croissante par rapport à sa deuxième variable.

$$\begin{aligned} -M\left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx\right)\Delta u_1 &= f(x,u(x)) \\ &\leq f(x,w(x)) \leq -M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\right)\Delta w. \end{aligned}$$

Utilisons le théorème (2.2.3) encore une fois, on obtient $u_1 \leq w$ dans $\overline{\Omega}$, ainsi

$$0 \leq u \leq u_1 \leq w \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

De même, on obtient $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla v_1|^2 dx\right)\Delta v_1 = f(x,w(x)) \text{ dans } \Omega \\ v_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{P$_2$}$$

et qui satisfait

$$0 \leq u \leq u_1 \leq v_1 \leq w \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Et ainsi de suite, on obtient deux suites (u_n) , et (v_n) vérifiant:

$$0 \leq u = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq w = v_0 \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{A}$$

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx\right) \Delta u_n = f\left(x, u_{n-1}(x)\right) \text{ dans } \Omega \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{B}$$

et

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, dx\right) \Delta v_n = f\left(x, v_{n-1}(x)\right) \text{ dans } \Omega \\ v_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{C}$$

Maintenant, on doit montrer que la suite (u_n) converge vers la solution U du problème (P').

En multipliant les deux termes de (B) par u_n et en intégrant sur Ω, on obtient:

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 = \int\limits_{\Omega} f\left(x, u_{n-1}(x)\right) u_n \, dx \quad \text{ dans } \Omega, \tag{D}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 &\leq \|f\|_2 \|u_n\|_2 \\ &\leq C(\Omega)\|f\|_2 \|u_n\|, \end{aligned}$$

d'où

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\| \leq C,$$

où $C = C(\Omega)\|f\|_2$.

Puisque H est croissante avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, on conclut que cette inégalité entraine que (u_n) est bornée, alors il existe $U \in H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$u_n \rightharpoonup U \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } \begin{cases} u_n \to U \text{ dans } L^p(\Omega) \ \forall p \in [1, +\infty[\text{ si } N = 1, 2 \\ u_n \to U \text{ dans } L^p(\Omega) \ \forall p \in [1, 2^*[\text{ si } N \geq 3. \end{cases}$$

Utilisons l'injection compacte de Schauder, nous obtenons

$$\|u_n\|^2 \longrightarrow \|U\|^2.$$

Comme M est continue, alors

$$M\left(\|u_n\|^2\right) \longrightarrow M\left(\|U\|^2\right). \tag{1}$$

De plus,

$$\langle u_n, v\rangle \longrightarrow \langle U, v\rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

et

$$\int_\Omega f(x, u_n(x))\ v\ dx \ \longrightarrow \int_\Omega f(x, U(x))\ v\ dx\ . \tag{3}$$

Or d'après (D) on a

$$M\left(\|u_n\|^2\right) \int_\Omega \nabla u_n\ \nabla v\ dx = \int_\Omega f(x, u_{n-1}(x))\ v\ dx.$$

En passant à la limite, tout en utilisant (1), (2) et (3),

$$M\left(\|U\|^2\right) \int_\Omega \nabla U\ \nabla v\ dx = \int_\Omega f(x, U(x))\ v\ dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donc,

$$\begin{cases} -M\left(\|U\|^2\right) \Delta U = f(x, U(x)) \text{ dans } \Omega \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

ainsi U est solution du problème avec

$$0 \leq u \leq U \leq w \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

■

2.3 Application à un problème sous-linéaire

Dans cette section, on va traiter la question d'existence et d'unicité de la solution positive pour le problème sous-linéaire suivant:

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2\right) \Delta u = u^q \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\ \Omega, \end{cases} \tag{P$_q$}$$

avec $0 < q < 1$, M une fonction non croissante et continue sur $[0, +\infty[$ et $H(t) = M(t^2)\, t$ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Brezis et Oswald ont étudié dans [5] le problème (P_q) dans le cas $M \equiv 1$ avec second membre incluant $f(x,u) = u^q$, $(0 < q < 1)$ comme cas particulier. Ils ont montré que le problème admet une solution unique.

Notre but est de trouver des hypothèses convenables sur M pour lesquelles le problème (P_q) admet au moins une solution positive.

On a le résultat suivant:

Théorème 2.3.1 *Supposons que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction non croissante, continue satisfait (M_0) telle que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*
$H(t) = M(t^2)\, t$ est croissante avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Si la fonction $G(t) = [M(t^2)]^{\frac{1}{1-q}}\, t$ est injective sur $[0, +\infty[$ alors le problème (P_q) possède une et une seule solution positive.

Démonstration : On s'inspire des arguments utilisés dans $[3,\ 5]$.

1. Existence:

Soit ϕ_1 la fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ avec $\|\phi_1\| = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$-M\left(\int |\nabla \varepsilon \phi_1|^2 \, dx\right) \Delta \varepsilon \phi_1 = \varepsilon M\left(\varepsilon^2\right) \lambda_1 \phi_1 \text{ dans } \Omega,$$

donc pour ε assez petit, on a $\varepsilon \leq \varepsilon^q$ d'où

$$\varepsilon M\left(\varepsilon^2\right) \lambda_1 \phi_1 \leq \varepsilon^q \phi_1^q,$$

donc

$$-M\left(\int |\nabla \varepsilon \phi_1|^2 \, dx\right) \Delta \varepsilon \phi_1 \leq \varepsilon^q \phi_1^q \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi $\varepsilon\phi_1$est une sous solution de (P_q).

Considérons $e \in C_0^\infty(\Omega)$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \partial\Omega. \end{cases}$$

On cherche une sur solution pour le problème (P_q) sous la forme γe où γ est un réel positif. On a

$$-M\left(\int |\nabla \gamma e|^2 \, dx\right) \Delta \gamma e = -M\left(\gamma^2 \int |\nabla e|^2 \, dx\right) \Delta \gamma e \geq \gamma^q e^q$$

i.e

$$-M\left(\gamma^2\int|\nabla e|^2\,dx\right)\gamma\geq\gamma^q e^q.$$

Prenons γ suffisamment grand, donc $\gamma\geq\gamma^q$, car $0<q<1$.
Utilisons maintenant la régularité de ϕ_1 et e, nous concluons que:

$$\varepsilon\phi_1(x)\leq\gamma e(x)\ \text{ dans }\overline{\Omega},$$

pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit. Ainsi, on est dans les circonstances de l'application du théorème (2.2.2), il existe alors une solution
$u\in C^\infty(\Omega)\cap C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ du problème (P_q).

2. Unicité:

Soit U_1,U_2 deux solutions du problème (P_q). Les calculs directs montrent que les fonctions

$$\widetilde{U}_1(x)=\left[M\left(\int|\nabla U_1|^2\,dx\right)\right]^{\frac{1}{1-q}}U_1(x),$$

et

$$\widetilde{U}_2(x)=\left[M\left(\int|\nabla U_2|^2\,dx\right)\right]^{\frac{1}{1-q}}U_2(x).$$

sont des solutions du problème

$$\begin{cases}-\Delta v=v^q\text{ dans }\Omega\\ v=0\text{ sur }\partial\Omega.\end{cases}$$

Le résultat d'unicité de la solution montrée dans [5], nous assure que $\widetilde{U}_1(x)=\widetilde{U}_2(x)\ \forall x\in\overline{\Omega}$,
et donc

$$\left[M\left(\int|\nabla U_1|^2\,dx\right)\right]^{\frac{1}{1-q}}\|U_1\|=\left[M\left(\int|\nabla U_2|^2\,dx\right)\right]^{\frac{1}{1-q}}\|U_2\|.$$

Utilisons le fait que G est injective dans $[0,+\infty[$,

$$G(\|U_1\|)=G(\|U_2\|)\Rightarrow\|U_1\|=\|U_2\|.$$

On conclut donc que

$$U_1(x)=U_2(x)\ \ \forall x\in\overline{\Omega}.$$

■

Chapitre 3

Résultats d'existence par la méthode de Galerkin

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème elliptique quasi-linéaire de type

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u = f(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_M$}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné à frontière régulière, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant:

$$|f(x,s)| \leq C\left(1 + |s|^p\right) \ \forall x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R} \tag{1}$$

avec $C > 0$ et

$$\begin{cases} 1 < p < \frac{(N+2)}{N-2} \ si \ N \geq 3 \\ 1 < p < +\infty \ si \ N = 1, 2. \end{cases}$$

3.2 Existence et unicité de la solution

Supposons que M vérifie la condition suivante

$$\exists m_0 > 0, \ \forall s \geq 0\text{: } M(s) \geq m_0. \tag{2}$$

Théorème 3.2.1 *Supposons que les conditions* (1) *et* (2) *sont vérifiées, supposons de plus qu'il existe des constantes* $a, b > 0$ *telles que*

$$f(x,u)\,u \leq a\,|u|^2 + b\,|u| \;\; \forall x \in \Omega,\, \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

et

$$a < m_0 \lambda_1, \tag{4}$$

où λ_1 *est la valeur propre principale de* $-\Delta$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Alors le problème* (P_M) *admet au moins une solution faible.*

En outre toute solution u *de* (P_M) *satisfait l'estimation suivante:*

$$\|u\| \leq R_1 = \frac{b\,|\Omega|^{1/2}}{\lambda_1^{1/2}\left(m_0 - a\lambda_1^{-1}\right)}. \tag{5}$$

La preuve de ce théorème utilise le résultat suivant

Théorème: *Soit* $\xi \to P(\xi)$ *une application continue de* $\mathbb{R}^N$ *dans lui-même telle que pour un* $r > 0$ *convenable on ait*

$$\langle P(\xi), \xi \rangle \geq 0 \;\forall \xi \text{ tel que } |\xi| = r,$$

où $<\,,\,>$ *est le produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^N$ *et* $|.|$ *sa norme liée, alors il existe* ξ, $|\xi| \leq r$ *tel que* $P(\xi) = 0$.

Pour sa démonstration on peut consulter $[11]$.

Démonstration : Soit $\{w_k\}_{k\geq 1}$ un système orthonormal complet de $H_0^1(\Omega)$. Posons

$$V_n = vect\,\{w_0, ..., w_n\},$$

alors V_n est isométrique à $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $v \in V_n$, il existe un seul $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k.$$

Puisque $\{w_k\}$ est orthonormal dans $H_0^1(\Omega)$ alors $\|v\|^2 = \|\zeta\|_{\mathbb{R}^n}^2$, pour tout $v \in V_n$.

Cherchons maintenant les solutions $u_n \in V_n$ du problème d'approximation suivant:

$$M\left(\|u_n\|^2\right) \int_\Omega \nabla u_n \nabla w_k \, dx - \int_\Omega f(x,u_n)\, w_k \, dx = 0 \;\text{ pour } k = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Pour résoudre ce système algébrique on définit l'opérateur
$P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$(P_n u)_k = M\left(\|u\|^2\right) \int\limits_\Omega \nabla u \nabla w_k \ dx - \int\limits_\Omega f(x,u)\, w_k \ dx, \quad u \in V_n.$$

On note que P_n est continu d'après la continuité de M et f par rapport à u.. Soit

$$u = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k \in V_n.$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle P_n u, u\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (P_n u)_k\, u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(M\left(\|u\|^2\right) \zeta_k - \int\limits_\Omega f(x,u)\, w_k \ dx \right) \zeta_k,
\end{aligned}$$

car

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla w_k dx = \zeta_k.$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle P_n u, u\rangle &= \sum_{k=1}^{n} M\left(\|u\|^2\right) \zeta_k^2 - \int\limits_\Omega f(x,u)\, u \ dx \\
&= M\left(\|u\|^2\right) \|u\|^2 - \int\limits_\Omega f(x,u)\, u \ dx.
\end{aligned}$$

Rappelons que

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int\limits_\Omega |u|^2 \, dx},$$

d'où

$$\lambda_1 \leq \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2},$$

c'est-à-dire.

$$\|u\|_2^2 \leq \lambda_1^{-1} \|u\|^2.$$

De cette inégalité, de (3) et en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient pour tout $u \in V_n$,

$$\begin{aligned}
\langle P_n u, u\rangle &\geq m_0 \|u\|^2 - a\|u\|_2^2 - b\|u\|_1 \\
&\geq \left(m_0 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - b\|u\|_2 |\Omega|^{1/2} \\
&\geq \left(m_0 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\| |\Omega|^{1/2}.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left(m_0 - \frac{a}{\lambda_1}\right)x^2 - \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}} x |\Omega|^{1/2} \\
&= x\left(\left(m_0 - \frac{a}{\lambda_1}\right)x - \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}|\Omega|^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

Cette fonction admet deux racines, $x_0 = 0$ et

$$x_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1} b |\Omega|^{1/2}}{m_0\lambda_1 - a}.$$

Ainsi, il existe $R > 0$ qui dépend seulement de m_0, a, b et Ω tel que:

$$\langle P_n u, u\rangle \geq 0 \text{ si } \|u\| \geq R = \frac{\sqrt{\lambda_1} b |\Omega|^{1/2}}{m_0\lambda_1 - a}.$$

Alors, le système (6) admet une solution $u_n \in V_n$ telle que

$$\|u_n\| \leq R, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De cette estimation, il existe une sous suite encore notée (u_n), $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\|u_n\|^2 \to \gamma \text{ et } u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{7}$$

De plus, puisque l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ $(1 < p < 2^*)$ est compacte et l'opérateur de Nemytskii N_f défini par,

$$u \longmapsto N_f(u) = f(., u)$$

est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{(p+1)'}(\Omega) = L^{1+1/p}(\Omega)$, alors

$$u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega)$$

et

$$f(.,u_n) \to f(.,u) \text{ dans } L^{(p+1)'}(\Omega).$$

Fixons k dans le système (6) et faisons tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$M(\gamma)\int_\Omega \nabla u \nabla w_k dx - \int_\Omega f(x,u)\, w_k dx = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{8}$$

Comme le système $\{w_k\}$ est complet, on remplace w_k par w quelconque de $H_0^1(\Omega)$.

En particulier, si $w = u$ on aura

$$M(\gamma)\|u\|^2 - \int_\Omega f(x,u)\, u \, dx = 0. \tag{*}$$

Dautre part, comme (6) est vérifiée pour tout w_k $(k = 1, ..., n)$ et $u_n \in V_n$ alors, (6) reste valable pour u_n, d'où

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)\, u_n \, dx = 0.$$

En passant à la limite on obtient

$$M(\gamma)\gamma - \int_\Omega f(x,u)\, u \, dx = 0. \tag{**}$$

De $(*)$ et $(**)$ on conclut que $\gamma = \|u\|^2$, ce qui montre que u est une solution du problème (P_M).

Si u est une solutions de (P_M) alors,

$$M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2 - \int_\Omega f(x,u)\, u \, dx = 0$$

donc

$$\begin{aligned} m_0\|u\|^2 &\leq M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2 \\ &= \int_\Omega f(x,u)\, u \, dx \\ &\leq \int_\Omega \left(a|u|^2 + b|u|\right) dx \\ &\leq \frac{a}{\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\| \, |\Omega|^{1/2} \end{aligned}$$

et par suite

$$\left(m_0 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|\,|\Omega|^{1/2} \leq 0,$$

ce qui donne

$$\|u\| \leq R_1 := \frac{\frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|\,|\Omega|^{1/2}}{\left(m_0 - \frac{a}{\lambda_1}\right)}.$$

■

Dans le théorème suivant, nous montrons que, en présence d'une condition suplémentaire sur M, le problème (P_M) admet une seule solution .

Théorème 3.2.2 *Supposons que les hypothèses du théorème* 3.2.1 *sont vérifiées et remplaçons* (3) *par*

$$(f(x,u) - f(x,v))(u - v) \leq a\,|u - v|^2\, \forall x \in \Omega, \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Supposons de plus que M est lipschitzienne dans $[0, R_1^2]$. Alors si la constante de Lipschitz L_M de M est assez petite, le problème (P_M) admet exactement une solution.

Démonstration : L'existence de la solution est assurée par le théorème 3.2.1, il suffit de prendre $v = 0$ dans (9),

$$\begin{aligned} (f(x,u) - f(x,0))\,u &\leq a\,|u|^2 \\ f(x,u)\,u &\leq f(x,0)\,u + a\,|u|^2 \end{aligned}$$

et donc on obtient en posant $b = \sup|f(x,0)|$

$$f(x,u)\,u \leq a\,|u|^2 + b\,|u| \ .$$

et c'est exactement la condition (3).

Soit maintenant u, v deux solutions du problème (P_M). Posons $w = u - v$, alors on obtient l'identité suivant

$$M\left(\|u\|^2\right)\Delta w = -\left(M\left(\|u\|^2\right) - M\left(\|v\|^2\right)\right)\Delta v - (f(x,u) - f(x,v)).$$

Multiplions cette identité par w et intégrons sur Ω, on obtient

$$
\begin{aligned}
M\left(\|u\|^2\right)\|w\|^2 &= -\left(M\left(\|u\|^2\right)-M\left(\|v\|^2\right)\right)\int_\Omega \nabla v\nabla w\ dx \qquad (10)\\
&\quad +\int_\Omega \left(f\left(x,u\right)-f\left(x,v\right)\right)\left(u-v\right)\ dx
\end{aligned}
$$

Utilisons maintenant l'inégalité suivante

$$
\left|\|p\|^2-\|q\|^2\right| \leq \left(\|p\|+\|q\|\right)\|p-q\|,
$$

on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(M\left(\|u\|^2\right)-M\left(\|v\|^2\right)\right)\int_\Omega \nabla v\nabla w\ dx\right| &\leq L_M\left|\|u\|^2-\|v\|^2\right|\int_\Omega \left|\nabla v\nabla w\ \right|dx\\
&\leq L_M\left|\|u\|^2-\|v\|^2\right|\|v\|\|w\|\\
&\leq L_M\left(\|u\|+\|v\|\right)\|u-v\|\|v\|\|w\|,
\end{aligned}
$$

d'où puisque $\|u\|,\|v\| \leq R_1$,
alors

$$
\left|\left(M\left(\|u\|^2\right)-M\left(\|v\|^2\right)\right)\int_\Omega \nabla v\nabla w\ dx\right| \leq 2L_M R_1^2\|w\|^2.
$$

De (9) et (10) en résulte,

$$
\begin{aligned}
m_0\|w\|^2 &\leq 2L_M R_1^2\|w\|^2+a\|w\|_2^2\\
&\leq m_0\|w\|^2+a\lambda_1^{-1}\|w\|^2
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\left(m_0-a\lambda_1^{-1}\right)\|w\|^2 \leq 2L_M R_1^2\|w\|^2.
$$

Ainsi si L_M est suffisamment petit on conclut que $\|w\|=0$, donc $w=0$.

■

3.3 Résultat d'existence pour le problème M-linéaire

Dans cette section, on considère quelques résultats dans le cas où f ne dépend pas de u, c'est-à-dire on cherche les solutions $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème

$$-M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = f, \tag{P$_0$}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Un résultat important est le suivant:

Théorème 3.3.1 *Supposons que $f \in H^{-1}(\Omega)\setminus\{0\}$, alors le problème (P_0) admet autant solutions que l'equation*

$$M(t)\,t^{1/2} = \|w\|, \tag{11}$$

avec $t \geq 0$, est l'inconnue et w est l'unique solution du problème

$$-\Delta w = f \quad \textit{dans } H_0^1(\Omega). \tag{12}$$

En particulier, si M est continue non négative et la fonction

$$t \mapsto M(t)\,t^{1/2} \text{ est croissante pour } t \geq 0, \tag{13}$$

alors le problème (P_0) admet une solution unique.

Démonstration : Soit u une solution de (P_0), alors $w = M\left(\|u\|^2\right)u$ résout (12), *et* $\|w\| = M\left(\|u\|^2\right)\|u\|$, en effet

$$\begin{aligned} -\Delta M\left(\|u\|^2\right)u &= -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u \\ &= f \end{aligned}$$

et

$$\|w\| = M\left(\|u\|^2\right)\|u\|.$$

Ce qui montre que $t = \|u\|$ est une solution de (11).

Inversement, soit t une solution de (11), on définit u comme suit:

$$u = t^{1/2}\frac{w}{\|w\|},$$

alors $\|u\|^2 = t$, et d'après (11)

$$\begin{aligned} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u &= \frac{-M(t)\,t^{1/2}}{\|w\|}\Delta w \\ &= -\Delta w \\ &= f. \end{aligned}$$

Donc u est une solution de (P_0).

Maintenant, si $M \geq 0$ vérifie la condition (13) alors,

$$\lim_{t\to 0} M(t)\,t^{1/2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} M(t)\,t^{1/2} = +\infty.$$

Alors (11) admet une solution unique [d'après le théorème des valeurs intermédiaires]. ■

3.4 Existence des solutions positives

Les arguments du théorème 3.3.1 peuvent être adaptés pour obtenir la solution positive du problème

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = u^p \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

avec $p \neq 1$.

Théorème 3.4.1 *Supposons que*

$$p \in (0,1) \quad \text{ou} \quad p \in (1,\ 2^* - 1),$$

où 2^* est l'exposant critique de Sobolev.

alors le problème (14) admet autant de solution que l'équation en $t > 0$ suivante

$$M(t)\,t^{(1-p)/2} = \|w\|^{1-p}. \tag{15}$$

où w est la solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = w^p \ \text{ dans } \Omega \\ w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{16}$$

Démonstration : *Soit t une solution de (15), notons $\gamma = t^{1/2}\|w\|^{-1}$, on voit que γw satisfait*

$$\begin{aligned} M\left(\|\gamma w\|^2\right) &= M(t) \\ &= \|w\|^{1-p}\,t^{(p-1)/2} \\ &= \gamma^{p-1}. \end{aligned}$$

Donc $u = \gamma w > 0$ *satisfait*

$$\begin{aligned} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u &= -M\left(\|\gamma w\|^2\right)\gamma\Delta w \\ &= \gamma^p w^p \\ &= u^p. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que u *est une solution positive de* (14) . $\blacksquare$

Chapitre 4

Résultats d'existence par la méthode variationnelle

Dans ce chapitre on va généraliser l'étude du problème de type Kirchhoff (P) au cas $f(x,u) = c(x)\, u^p$, ici la propriété de p-homogénéité joue un rôle important. On applique la méthode variationnelle pour traiter ce problème. Comme précédemment, la fonction M est continue et vérifie la condition suivante:

$$M(t) \geq m_0 \quad \forall t \geq 0, \tag{M_0}$$

Supposons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est à croissance sous critique et satisfait la condition suivante

$$|f(x,s)| \leq C\left(1 + |s|^p\right) \ \forall x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $C > 0$, $p \in \left]1, +\infty\right[$ si $N = 1, 2$ et, $p \in \left]1, 2^* - 1\right[$ si $N \geq 3$.
Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (P) si

$$M\left(\|u\|^2\right) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_\Omega f(x,u)\, \phi \, dx = 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Si f est localement lipschitzienne, alors la solution faible de (P) sera encore une solution classique.

Rappelons que les solutions faibles du problème (P) sont précisément les points critiques de la fonctionnelle $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, définie par:

$$I(u) = \frac{1}{2} \hat{M}\left(\|u\|^2\right) - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

où

$$\hat{M}(t) = \int_0^t M(s)\,ds \quad \text{et} \quad F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds.$$

Puisque M est une fonction continue et f est à croissance sous critique, la fonctionnelle I est de class C^1 dans $H_0^1(\Omega)$.

Avant d'établir le résultat d'existence, commençons par démontrer le lemme suivant,

Lemme 4.0.2 *Supposons que f satisfait la condition* (1), *et que M vérifie* (M_0), *alors toute suite bornée de Palais-Smale relative à I contient une sous suite fortement convergente*

Démonstration : Soit (u_n) une suite de (PS) bornée, donc il existe $u \in H_0^1(\Omega)$, telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement.

Comme la fonction f est à croissance sous critique, on obtient,

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\ dx \to 0,$$

et puisque

$$I'(u_n)(u_n - u) \to 0,$$

et

$$I'(u_n)(u_n - u) = M\left(\|u_n\|^2\right) \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\ dx - \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\ dx,$$

on conclut que

$$M\left(\|u_n\|^2\right) \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\ dx \to 0, \tag{2}$$

et comme $M\left(\|u_n\|^2\right) \geq m_0$ alors,

$$\int_\Omega (\nabla u_n \nabla u_n - \nabla u_n \nabla u)\ dx \to 0,$$

et par suite,

$$\|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle \ \to 0, \text{i.e. } \|u_n\|^2 \ \to \|u\|^2.$$

On en déduit que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. ■

Maintenant, considérons le problème sur-linéaire avec f satisfaisant, en plus de (1), les conditions d'Ambrosetti-Rabinowitz:

$$f(x,s) = o(s), \text{ si } s \to 0 \tag{0}$$

$$0 \leq \mu F(x,s) \leq f(x,s)\, s, \ \forall |s| > R, \tag{3}$$

pour certains $\mu > 2$ et $R > 0$.

Théorème 4.0.3 *Supposons que la fonction f est localement lipschitzienne satisfait (1), et (3), alors, si la fonction M est monotone et satisfait (M_0) et la condition suivante,*

$$\hat{M}(t) \geq M(t)\, t \quad \forall t > 0, \tag{4}$$

le problème (P) admet une solution positive.

Démonstration : Par le principe du maximum fort, les solutions positives du problème (P) sont des points critiques non triviaux de la fonctionnelle $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par,

$$I(u) = \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u\|^2\right) - \int_\Omega F\left(x, u^+\right) dx, \tag{5}$$

où $u^+ = \max\{u, 0\}$.

D'après le théorème du col, I admet un point critique non trivial si I vérifie (PS) et les conditions suivantes:

i. $I(0) = 0$,

ii. Il existe ρ, $r > 0$ tels que $I(u) \geq \rho$ .si $\|u\| = r$,

iii. Il existe e tel que $\|e\| > r$ et $I(e) < \rho$.

Vérifions la condition ii.

En utilisant la condition (4) on a

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u\|^2\right) - \int_\Omega F\left(x, u^+\right) dx, \\ &\geq \frac{1}{2}M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2 - \int_\Omega F\left(x, u^+\right) dx. \end{aligned}$$

et de (0) et (1), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$;tel que

$$F(x,u) \leq \varepsilon |u|^2 + C_\varepsilon |u|^{p+1}, \quad \forall u \in \mathbb{R},\ \forall x \in \Omega.$$

D'où, par (M_0) et les inégalités de Hölder et Poincaré

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2}m_0 - \varepsilon C_1\right) \|u\|^2 - C_2 C_\varepsilon \|u\|^{p+1},$$

et puisque $p+1 > 2$ donc il existe $r > 0$, assez petit tel que$I(u) \geq \rho$, pour $\|u\| = r$.

Vérifions la condition iii

Soit ϕ_1 la fonction propre positive associée à la première valeur propre λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ avec $\|\phi_1\| = 1$. Pour t assez grand on a

$$\begin{aligned} I(t\phi_1) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|t\phi_1\|^2\right) - \int_\Omega F(x, t\phi_1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(t^2\right) - \int_\Omega F(x, t\phi_1)\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\hat{M}\left(t^2\right) = t^2 M(\theta),$$

où $\theta \in [0, t^2]$. Et de la condition (3), on a

$$F(x,u) \geq (R+1)^{-\mu} F(x, R+1)\, u^\mu, \qquad \forall u \geq R+1$$

comme la fonction M est monotone, de (4) on en déduit qu'elle décroissante d'où

$$I(t\phi_1) \leq \frac{1}{2}M(0)\, t^2 - t^\mu (R+1)^{-\mu} \int_\Omega |F(x, R+1)|\, |\phi_1|^\mu\, dx.$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, alors $I(t\phi_1) \to -\infty$, car $\mu > 2$; on conclut donc qu'il existe $t_0 > 0$ assez grand tel que $I(t_0\phi_1) < 0$. Pour $e = t_0\phi_1$, $t_0 > r$, la condition iii est vérifiée.

Vérifions la condition de (PS)

Supposons que (u_n) est une suite de (P.S), donc il existe des constantes $C_3, C_4 > 0$ telles que:

$$I(u_n) \leq C_3.$$

$$-I'(u_n)\, u_n \leq C_4 \|u_n\|,$$

donc

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)\, u_n \leq C'(1 + \|u_n\|),$$

avec $C' = \max\left\{C_3, \frac{1}{\mu}C_4\right\}$. d'où

$$C'(1 + \|u_n\|) \geq \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\mu}M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right)dx.$$

De plus, d'après la condition (3) on a

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right)dx \geq \int_{\{\Omega \cap |u| \leq R\}} \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right)dx,$$

car

$$\frac{1}{\mu}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \geq 0 \quad \text{sur} \quad \{\Omega \cap |u_n| > R\}$$

d'où

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)\, u_n &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\mu}M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right)dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \int_{\{\Omega \cap |u_n| \leq R\}} \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right)dx. \end{aligned}$$

Comme f et F sont continues, donc il existe $C_5 > 0$ tel que

$$\left|\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right| \leq C_5 \qquad \text{pour} \quad |u_n| \leq R,$$

d'où

$$\int_{\{\Omega \cap |u_n| \leq R\}} \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F\left(x, u_n^+\right)\right)dx \geq -C'',$$

avec $-C'' = C_5 |\Omega|$. Et d'après (M_0)

$$C' + C' \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) m_0 \|u_n\|^2 - C''.$$

Supposons par l'absurde que $\|u_n\| \to +\infty$, alors puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} > 0$ on aboutit à

$$\frac{C'}{\|u_n\|} + C' \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) m_0 \|u_n\| - \frac{C''}{\|u_n\|},$$

ce qui implique que $C' \geq +\infty$.

Donc $\|u_n\|$ est bornée, d'après le lemme précédent on conclut que I satisfait la condition (PS). ■

Remarque 4.0.4 *si la fonction M est croissante la condition* (4) *n'est plus satisfaite.*

Pour résoudre le problème (P), on utilisera une technique de troncation et les estimations de Gidas et Spruck [8], affirmant que si

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(x,t)}{t^p} = h(x) \text{ uniformément dans } \overline{\Omega}, \tag{5}$$

pour une certaine fonction continue $h > 0$. Alors toute solution classique positive u du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

est bornée c'est-à-dire, il existe $C > 0$, dépendant seulement de p et Ω telle que $u(x) \leq C$.

Théorème 4.0.5 *Supposons que $f \in \left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ est une fonction localement lipschitzienne qui satisfait* (1) *et* (3). *Supposons de plus que M satisfait la condition*

$$\exists m_0 > 0, \forall s \geq 0 : M(s) \geq m_0. \tag{4}$$

et qu'il exise $k > 0$ tel que

$$M(k) < \frac{\mu m_0}{2}. \tag{5}$$

Alors si $M(k)$ est suffisamment petit par rapport à k, le problème (P) admet une solution positive.

Démonstration : On définit la fonction M_k comme suit:

$$M_k(t) = \begin{cases} M(t) & \text{si } t \leq k. \\ M(k) & \text{si } t > k. \end{cases}$$

Puisque $M_k(t) < \mu m_0/2$ pour tout $t \geq k$, on en déduit par des arguments standards et le théorème du col qu'il existe $u_k > 0$, solution du problème

$$\begin{cases} -M_k\left(\|u\|^2\right)\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons

$$w_k = \frac{u_k}{M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{1/(p-1)}}.$$

On voit que $w_k > 0$, résout le problème

$$\begin{cases} -\Delta w = g(x,w) & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$g(x,s) = \frac{f\left(x, M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{1/(p-1)} s\right)}{M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{p/(p-1)}}.$$

Vérification:
D'une part, on a

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \frac{-\Delta u_k}{M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{1/(p-1)}} \\ &= \frac{f(x,u_k)}{M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{p/(p-1)}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} g(x,w_k) &= \frac{f\left(x, M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{1/(p-1)} v_k\right)}{M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{p/(p-1)}} \\ &= \frac{f(x,u_k)}{M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{p/(p-1)}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} -\Delta w = g(x,w) & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty}\frac{g(x,s)}{s^p} &= \lim_{s\to\infty}\frac{f\left(x, M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{1/(p-1)} w_k\right)}{\left(M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{1/(p-1)} s\right)^p}\\ &= h(x).\end{aligned}$$

Et on peut assurer, d'après l'estimation de Gidas-Spruck, l'existence d'une constante C_0 telle que $\|w_k\| \leq C_0$ et donc

$$\|u_k\|^2 \leq C_0^2 M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{2/(p-1)}, \tag{6}$$

Si $\|u_k\|^2 > k$, d'après (6) on obtient

$$k \leq C_0^2 M_k\left(\|u_k\|^2\right)^{2/p-1} = C_0^2 M_k\,(k)^{2/p-1},$$

ce qui est impossible si $M(k) \ll k$.

Donc, $\|w_k\|^2 \leq k$, ce qui prouve que u_k est une solution positive du problème originale (P_M). ■

Bibliographie

[1] C. O. Alves, A. Corrêa and T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Computers and mathematics with applications, 49 (2005) 85-93.

[2] C. O. Alves, A. Corrêa, *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Communication on applied nonlinear analysis, 8 (2001) 43-56.

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex non linearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122(1994) 519-543.

[4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle; Théorie et Applications*, Dunod, Paris 1999.

[5] H. Brezis, L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear analysis TMA 10 (1986) 55-64.

[6] D.G. De Figueiredo, *Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute, Springer, Heidelberg, 1989.

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduates studies in mathematics, Vol. 19, Americain Mathematical Society, 1997.

[8] B. Gidas, J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm Partial Differential Equations 6 (1981) 883–901.

[9] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[10] H. Le Dret, *Notes de cours M2-Equations aux dérivées partielles elliptiques*, polycopié (Université Pierre et Marie Curie) , 2010.

[11] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Gauthier-villars,1969.

[12] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type,* Nonlinear analysis, 63 (2005) 1967-1977.

[13] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear PDE and Hamiltonian Systems*, Springer, Berlin, 1990.