THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES

SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

The Élan Am386SC300 Portable Computer

John Zaitseff (2120715)

Bachelor of Engineering (Computer Engineering)

October 1995

Supervisor: A/Prof. Branko Celler
Assessor: Dr. Tim Hesketh

Table des Matières

List of Figures

List of Tables

Table des Matières

Chapitre 0

Introduction

Les découvertes des savants de l'époque moderne sont à l'origine de nos connaissances en acoustique. Ainsi, Brook Taylor a établi les équations des courbes de vibration des cordes. Ses recherches furent complétées par celles de Jean d'Alembert, ce denier s'intéressa aux petites vibrations et leur forme en général. Il déduit du principe fondamental de la dynamique une équation aux dérivées partielles satisfaite par le déplacement vertical de la corde. De nos jours, elle est connue sous le nom d'équation des ondes. Elle se trouve partout autour de nous, car nous sommes entourés d'ondes: sonores dans l'air, électriques dans les fils, électromagnétiques (radio, micro-onde, lumière visible), sismiques dans le sol.

Cette équation, D'Alembert la résolut. Il montra que toute solution est la somme de deux ondes progressives, de son côté Daniel Bernoulli montra également qu'une corde en vibration produit simultanément une multitude d'oscillations élémentaires dont la somme donne le son résultant, c'est le principe de superposition (la sommes de deux solutions de l'équation des ondes est encore une solution).

Les travaux du mathématicien Joseph Fourier apportèrent à l'acoustique un théorème fondamental sur lequel sont encore construits la plupart des outils d'analyse du son.

Louis de Lagrange résolut de façon complète et analytique l'équation de la vibration d'une corde. Cette équation, assimilant la corde à un ensemble de particules identiques et réduisant la vibration à une somme de vibrations élémentaires, a permis le calcul des fréquences harmoniques émises par une corde tendu.

Les études des vibrations des corps solides ne purent se développer qu'avec la mise au point de la théorie mathématique des vibrations élastiques entreprise par Robert Hooke entre 1660 et 1676.

Les mécanismes de vibrations de plaques solides élastiques furent découverts par E.F.F. Chladni, l'un des plus illustres acousticiens expérimentaux. En 1850, G. Robert Kirchhoff avança une théorie mathématique décrivant les vibrations de ces plaques.

Au courant de XIX^e siècle, la famille des ondes s'élargit: l'équation des membranes vibrantes ressemble à celle des cordes, mais la condition aux limites, au bord de la membrane, fait que la résolution analytique n'est possible que pour des membranes de forme simples: rectangle (Poisson), cercle (Clebsch), triangle (Lamé), ellipse (Mathieu). Maxwell établit les équations de l'électromagnétisme et montra qu'elles ont comme conséquence l'équation des ondes 3-dimensionnelles. Kirchhoff en donne la solution générale, qui s'apparente à celle de D'Alembert.

Dans ce travail on s'intéresse à la méthode de Galerkin, c'est une méthode qui consiste les formulations faibles, et on va l'appliquer aux équations elliptiques de type Kirchhoff pour étudier l'existence et la non existence de ce type d'équation.

Ce mémoire, basé essentiellement sur l'article [6], est divisé en 3 chapitres organisés de la manière suivante:

Le chapitre 1 est consacré à rappeler quelques notions sur les espaces de Sobolev, la méthode variationnelle en donnant des théorèmes qu'on va les appliquer après, à la fin on décrit le principe de la méthode de Galerkin et on résout un problème modèle par cette méthode.

Dans le chapitre 2 on va étudier l'existence et la non existence du problème de type Kirchhoff.

Et enfin le chapitre 3 est consacré à l'application de la méthode de Galerkin à un problème de Kirchhoff contenant un terme non local singulier.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces réflexifs

Soit V un espace de Banach, V' son dual muni de la norme $\|f\| = \underset{\substack{x\in V \\ \|x\|\leq 1}}{Sup} |\langle f, x\rangle|$ et V'' son bidual muni de la norme $\|\xi\| = \underset{\substack{f\in V' \\ \|f\|\leq 1}}{Sup} |\langle \xi, f\rangle|$.

On définit l'injection canonique $J : V \longrightarrow V''$comme suit:

Soit $x \in V$ fixé, l'application $f \longrightarrow \langle f, x\rangle$ de V' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur V' c'est-à-dire un élément de V'' noté Jx on a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{V'',V'} = \langle f, x\rangle_{V',V}, \forall x \in V, \forall f \in V'.$$

J est linéaire et J est une isométrie c'est-à-dire $\|Jx\|_{V''} = \|x\|_V$ pour tout $x \in V$;

en effet

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

Définition 1.1

Soit V un espace de Banach et soit J l'injection canonique de V dans V''. On dit que V est réflexif si

$$J(V) = V''.$$

Lorsque V est réflexif on identifie implicitement V et V''.

Théorème 1.1 (d'Eberlein-Shmulyan) [7]

Un espace de Banach V est réflexif si et seulement si toute suite bornée $(x_n)_n$ de V contient une sous suite $(x_{n_i})_i$ qui converge faiblement dans V.

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ avec α_i entier positif et $i = 1, 2, \ldots, N$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$ et

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi.$$

Définition 1.2

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) \ : \ \forall \alpha \ \text{ avec } \ |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_\Omega u \ D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int\limits_\Omega g_\alpha \ \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

on note $D^\alpha u = g_\alpha$. Il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Théorème 1.2 [4]

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1.1

On note

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

En particulier on s'intéresse à l'espace $H^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert réflexif et séparable.

1.2.2 Espace $W_0^{m,p}(\Omega)$

$D(\Omega)$ étant l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact.

Définition 1.3

$W_0^{m,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ c'est-à-dire

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

Remarque 1.2

On note

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

En particulier on s'intéresse à l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est défini aussi par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \quad \text{dans } \Omega \ \text{ et } \ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \right\}$$

et muni de la norme

$$\|u\|_{H_0^1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}.$$

1.2.3 Injection compacte

Définition 1.4

Soit B un espace métrique et $A \subset B$. L'injection de A dans B est compacte signifie que toute boule $B(x,r)$ de A vue dans B est relativement compacte c'est-à-dire que $\overline{B_A(x,r)}$ est compacte dans B.

Théorème 1.3 (Rellich-Kondrachov) [4]

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière. On a
Si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
Si $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,
Si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,
avec injections compactes.

Théorème 1.4 [4]

Soit Ω *un ouvert borné dans* $\mathbb{R}^N$*. Alors pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *on a*

$$H_0^{m+1}(\Omega) \underset{compacte}{\subset} H_0^m(\Omega).$$

En particulier

$$H_0^1(\Omega) \underset{compacte}{\subset} L^2(\Omega).$$

Proposition 1.1 (**Inégalité de Poincaré**) [4]

Soit Ω *un ouvert borné alors il existe une constante* $C_\Omega > 0$ *qui dépend que de* Ω *telle que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi

$$\|u\| := \|\nabla u\|_{L^2}$$

est une norme de $H_0^1(\Omega)$.
Par la suite on fait la notation:

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p}, \ pour \ 1 \leq p \leq +\infty.$$

Rappelons à ce niveau là l'inégalité de Hölder.
Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est-à-dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Théorème 1.5 (Inégalité de Hölder) [4]

Soient $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$, *Alors* $f.g \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |(f(x)g(x))| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1.2.4 Méthode variationnelle

Soit V un espace de Banach, $U \subset V$ un ouvert et $E : V \to R$ une fonctionnelle de classe C^1.

Définition 1.5

On dit que $u \in U$ est un point critique de E si $E'(u) = 0$.
Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de E.

Définition 1.6

On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de E s'il existe $u \in U$ tel que

$$E(u) = c \text{ et } \; E'(u) = 0.$$

Si c n'est pas une valeur critique alors on dit que c'est une valeur régulière de E.

Remarque 1.3

Dans la méthode variationnelle les solutions sont cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle réelle définie sur un espace de Banach V.

1.2.5 Suites et condition de Palais-Smale

Définition 1.7

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V est une suite de Palais-Smale s'il existe $c > 0$ tel que

$$E(u_n) \leq c \;\text{ et }\; E'(u_n) \to 0 \;\text{ dans } V'.$$

Définition 1.8 [7]

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V est une suite de Palais-Smale au niveau $\beta \in \mathbb{R}$ si

$$E(u_n) \to \beta \;\text{ dans } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad E'(u_n) \to 0 \;\text{ dans } V'.$$

Définition 1.9 [7]

On dit que E vérifie la condition de Palais-Smale resp (Palais-Smale au niveau β) si de toute suite de Palais-Smale resp (Palais-Smale au niveau β) on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

1.2.6 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on considère le problème suivant,

$$\begin{cases} -\triangle u = g(x,u), \ x \ \in \Omega \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on aura

$$-\int_\Omega \Delta u \ vdx = \int_\Omega g(x,u) \ vdx \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En appliquant la deuxième formule de Green pour le premier membre de l'égalité ci-dessus en tenant compte que dans notre cas $v \in H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle est donnée donc par

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx \ = \int_\Omega g(x,u) \ vdx, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Et la solution u de ce problème est un point critique de la fonctionnelle

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega G(x,u)dx,$$

avec $G(x,u) = \int_0^u g(x,t) \ dt.$

On rappelle que la deuxième formule de Green est

$$-\int_\Omega \Delta u \ vdx = \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx \ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \ vd\sigma, \ \forall u \in \ H^2(\Omega), \ \forall v \in \ H^1(\Omega),$$

où n est le vecteur unitaire normal extérieur au bord $\partial\Omega$.

Théorème 1.6 [10]

Soit M un espace vectoriel topologique séparé, supposons que $E : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifie la condition de compacité suivante

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad K_\alpha = \{u \in M : E(u) \le \alpha\} \text{ est compact.}$$

Alors E est uniformément borné inférieurement sur M et atteint son minimum.

Théorème 1.7 [10]

Soit $(V, \|.\|)$ *un espace de Banach réflexif et* $M \subset V$ *un sous ensemble faiblement fermé de* V*. On suppose que* $E : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est:*

1) *coercive c'est-à-dire que* $E(u) \to +\infty \quad$ *quand* $\|u\| \to +\infty$*,* $u \in M$*.*

2) *faiblement semi continue inférieurement c'est-à-dire que pour tout* $u \in M$*, toute suite* $(u_n)_n$ *dans* M *tel que* $u_n \overset{V}{\rightharpoonup} u$ *on a* $E(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf E(u_n)$*.*

Alors E *est bornée inférieurement dans* M *et atteint son minimum dans* M*.*

Théorème 1.8 [9]

Soit $\xi \to P(\xi)$ *une application continue de* $\mathbb{R}^N$ *dans lui-même telle que pour un* $r > 0$ *convenable on ait*

$$\langle P(\xi), \xi \rangle \geq 0 \ \forall \xi \text{ tel que } |\xi| = r,$$

où $<\ ,\ >$ *est le produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^N$ *et* $|.|$ *sa norme liée, alors il existe* ξ*,* $|\xi| \leq r$ *tel que* $P(\xi) = 0$*.*

Preuve.

Par absurde, on suppose que $P(\xi) \neq 0$ dans la boule $K = \{|\xi| \ \ |\xi| \leq r\}$. On considère l'application

$$g : \quad \xi \to -P(\xi)\frac{r}{|P(\xi)|}$$

de K dans K qui est continue. Le théorème du point fixe de Brouwer donne alors l'existence d'un ξ tel que

$$\xi = -P(\xi)\frac{r}{|P(\xi)|} \tag{**}$$

d'où $|\xi| = r$. En prenant le produit scalaire des deux membres de $(**)$ par ξ on aura

$$<\xi, \xi>= \frac{-r}{|P(\xi)|} \langle P(\xi), \xi \rangle ,$$

ce qui implique que

$$< P(\xi), \xi >= -r \ |P(\xi)| \ < 0,$$

ce qui contredit le fait que $< P(\xi), \xi > \geq 0$, d'où le résultat. ■

1.3 Méthode de Galerkin

1.3.1 Principe de la méthode

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste qui consiste les formulations faibles. L'idée de la méthode est la suivante:

Partant d'un problème posé dans un espace V de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espace V_i de dimension finie $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} V_i \subset V$, on résout ensuite le problème approché dans V_i, enfin on passe à la limite en faisant tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour obtenir une solution du problème de départ.

1.3.2 Résolution d'un problème modèle par la méthode de Galerkin

On se propose de prendre le modèle suivant comme exemple d'application.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, il s'agit de trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\triangle u = f\ (u)$ au sens de $D'(\Omega)$. De façon équivalente, il s'agit de résoudre le problème variationnel: Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f(u)\ v dx. \tag{1}$$

Lemme 1.1

Soit V un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $v_i \in V$, telle que l'espace des combinaisons linéaires finies des v_i est dense dans V.

Remarque 1.4

Le lemme (1.1) s'exprime de façon équivalente: si $V_i =< v_1, v_2, \ldots, v_i >$ est l'espace vectoriel engendré par les i premiers vecteurs, alors le sous espace vectoriel $\underset{i\geq 1}{\cup} V_i$ est dense dans V.

On pose $V = H_0^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert séparable. Pour construire l'approximation du problème en dimension finie, on restreint la formulation variationnelle (1) à l'espace V_i engendré par la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$,

$$V_i =< v_1, v_2, \ldots, v_i > .$$

Montrons l'existence de solutions de ce problème en dimension finie.

Proposition 1.2

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le problème variationnel: trouver $u_i \in V_i$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u_i.\nabla v dx = \int_\Omega f(u_i)\ v dx, \quad \forall v \in V_i, \tag{2}$$

admet au moins une solution.

Preuve.

On munit V_i du produit scalaire de $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire

$$[u, v]_i = \int_\Omega u\ v dx.$$

L'application $(u, v) \mapsto a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$ est une forme bilinéaire sur V_i. Par le théorème de Riesz, il existe une application linéaire $A_i : V_i \to V_i$ telle que

$$a\,(u, v) = [A_i(u), v]_i.$$

Comme V_i est de dimension finie, cette application est continue.

De même, il existe une application $F_i : V_i \to V_i$ telle que

$$\int_\Omega f(u)\ v dx = [F_i(u), v]_i.$$

Il suffit de prendre $F_i = \Pi_i \circ \tilde{f}$ où Π_i est la projection orthogonale de L^2 sur V_i et $\tilde{f} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est définie par $\tilde{f}\ (u)(x) = f(u(x))$. Cette application, non linéaire est aussi continue car c'est la composée d'applications continues. Le problème (2) se réécrit donc

$$\forall v \in V_i,\ [A_i(u_i), v]_i = [F_i(u_i), v]_i. \tag{3}$$

On introduit la fonction continue

$$P_i : V_i \to V_i,\ P_i(u) = A_i(u) - F_i(u),$$

et l'équation (3) est équivalente à:

$$P_i(u_i) = 0. \tag{4}$$

Pour résoudre ce problème, on va appliquer le théorème (1.8). Pour cela, il faut calculer $[P_i(u), u]_i$. Par définition du produit scalaire sur V_i nous obtenons

$$\begin{aligned}
[P_i(u), u]_i &= \int_\Omega P_i(u) u dx \\
[P_i(u), u]_i &= a(u, u) - \int_\Omega f(u) u dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}[P_i(u), u]_i &\geq \|\nabla u\|_2^2 - \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_2 \\ &\geq \|\nabla u\|_2^2 - C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2 \\ &\geq \|\nabla u\|_2 (\|\nabla u\|_2 - C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

où C_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré. Nous voyons donc dès que

$$C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \leq \|\nabla u\|_2, \tag{5}$$

alors

$$[P_i(u), u]_i \geq 0.$$

Or toutes les normes sont équivalentes sur V_i car il est de dimension finie donc il existe deux nombres réels strictement positifs C_0 et C_1 tels que

$$C_0 \|\nabla u\|_2 \leq \|u\|_i \leq C_1 \|\nabla u\|_2 . \tag{6}$$

En multipliant (5) par C_0 on aura

$$C_0 C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \leq C_0 \|\nabla u\|_2 . \tag{7}$$

De (6) et (7) on a

$$C_0 C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \leq C_0 \|\nabla u\|_2 \leq \|u\|_i .$$

Donc en prenant

$$r = C_0 C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

on a

$$[P_i(u), u]_i \geq 0, \text{ pour } \|u\|_i \geq r.$$

Par le théorème (1.8) il existe $u_i \in V_i$ solution du problème (4) telle que

$$\|u_i\|_i \leq r.$$

■

Lemme 1.2

La suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$.

Preuve.

D'après la proposition précédente il existe un u_i tel que

$$P_i(u_i) = 0,$$

donc

$$A_i(u_i) = F_i(u_i),$$

par suite

$$\begin{aligned} [A_i(u_i), u_i]_i &= [F_i(u_i), u_i]_i, \\ \int_\Omega \nabla u_i.\nabla u_i dx &= \int_\Omega f(u_i) u_i dx. \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Sobolev et Poincaré nous aurons

$$\|\nabla u_i\|_2^2 \leq C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_i\|_2 \,,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_i\|_2 &\leq C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \,, \\ \|u_i\| &\leq C_\Omega \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \,. \end{aligned}$$

Ce qui montre le lemme. ■

Proposition 1.3

Toute sous-suite faiblement convergente de la suite $(u_i)_i$ *converge vers une solution du problème* (1).

Preuve.

On a $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$ alors on peut extraire une sous suite $(u_{i'})_{i'\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned} u_{i'} &\rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ u_{i'} &\rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

comme f est une fonction continue alors

$$f(u_{i'}) \rightarrow f(\ u) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Fixons un entier j, comme la suite V_i est croissante, pour tout $i \geq j$, $v_j \in V_i$. Alors on peut écrire l'équation (2) avec la fonction test v_j

$$\int_{\Omega} \nabla u_i.\nabla v_j dx = \int_{\Omega} f(u_i) v_j dx,$$

comme $\nabla u_{i'} \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$, on a d'une part

$$\int_{\Omega} \nabla u_{i'}.\nabla v_j dx \to \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v_j dx,$$

comme $f(u_{i'}) \to f(\ u)$ dans $L^2(\Omega)$, d'autre part on a

$$\int_{\Omega} f(u_{i'}) v_j dx \to \int_{\Omega} f(u) v_j dx.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \nabla u.\nabla v_j dx = \int_{\Omega} f(u) v_j dx.$$

Comme cette équation est linéaire par rapport à v_j elle reste vraie pour toute combinaison linéaire finie des v_j

$$\forall v \in \bigcup_{i \geq 1} V_i, \quad \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx,$$

et comme $\bigcup_{i \geq 1} V_i$ est dense dans V alors:

Pour tout $v \in V$, il existe une suite $z_i \in V_i$ telle que $z_i \to v$.

On applique l'égalité précédente avec $z_i = v$ et on passe à la limite quand $i \to +\infty$ on aura

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx.$$

On conclut que u est bien une solution de notre problème. ■

Chapitre 2

Existence et non existence de solutions pour un problème de type Kirchhoff

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions quelques questions concernant à la fois l'existence et la non existence de la solution du problème

$$\begin{cases} -M(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx)\triangle u = f(x,u) \quad \textit{dans } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné à frontière régulière,

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ et } M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sont des fonctions dont le comportement sera précisé ultérieurement.

Notons que si $M \equiv 1$ le problème (P) devient

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui a été largement étudié.

L'objectif principal de cette étude est d'établir des conditions sur les fonctions f et M pour lesquelles le problème (P) possède ou pas des solutions.

Un point important qui mérite toute l'attention c'est que l'opérateur

$$Lu := M\ (\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx)\ \triangle u$$

est non linéaire, ce qui provoque de nombreuses et intéressantes questions mathématiques.

La motivation principale de cette étude vient du fait que l'opérateur L nommé "non linéarité de Timoshenko" pour certains auteurs, apparaît dans de nombreuses applications liées à des problèmes de vibration, la plupart du temps associés à des modèles de Kirchhoff. Voici deux exemples:

Exemple 2.1

Lions [9], a considéré le problème de vibrations suivant contenant le terme de Timoshenko

$$\begin{cases} u_{tt} - M\ (\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx)\ \triangle u = f(x,u) \text{ dans } \Omega \times [0,T] \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0,T] \\ u(0) = u_0 \\ u_t(0) = u_1, \end{cases}$$

avec $M(t) \geq m_0 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2

Un autre problème où le terme Timoshenko apparait dans l'équation suivante impliquant une équation non linéaire de type Schrödinger

$$\begin{cases} iw_t + \Delta w = M\ (\int_\Omega \operatorname{Re} |\nabla w|^2\, dx) \operatorname{Re} w,\ x \in \mathbb{R}^N \\ w(x,\, 0) = w_0(x) = \Phi(x) + i\ \Psi(x), \text{ dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

2.2 Existence et unicité de la solution dans le cas M-linéaire

Tout le long de ce travail, la fonction M est supposée continue et vérifiant la condition suivante

$$M\ (t) \geq m_0 > 0, \forall t \geq 0, \tag{M_0}$$

où m_0 est une constante réelle. Nous noterons par

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la fonction continue donnée par

$$H(t) = M\ (t^2)t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous rappelons qu'une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (P) si

$$M\ (\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)\ v dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Théorème 2.1

Si la fonction H est monotone avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ alors pour chaque $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème M-linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -M\ (\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx)\ \triangle u = f(x) \text{ dans } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{$P_{M,L}$}$$

Preuve.

Soit

$$B = \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...\}$$

la base orthonormée de l'espace $H_0^1(\Omega)$ formée par les fonctions propres Φ_j associées au valeurs propres λ_j du problème linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -\triangle\Phi_j = \lambda_j\Phi_j \text{ dans } \Omega \\ \quad \Phi_j = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

avec

$$\|\Phi_j\| = 1,$$

par suite

$$-\int_\Omega \triangle\Phi_j\Phi_j dx = \lambda_j \int_\Omega |\Phi_j|^2\, dx,$$

ce qui implique

$$\|\Phi_j\|^2 = \lambda_j\, \|\Phi_j\|_2^2\,,$$

donc

$$\|\Phi_j\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \Phi_j \text{ et } \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty. \tag{2}$$

Il existe aussi $\{f_j\} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \Phi_j \quad \text{et} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j^2}{\lambda_j} < \infty. \tag{3}$$

Dans ce qui suit nous allons chercher les a_j de telle manière que u donnée en (2) soit solution du problème $(P_{M,L})$. Pour cela supposons que $(P_{M,L})$ possède une solution $u \in H_0^1(\Omega)$. De (1) et (3) nous avons

$$M\ (\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2) a_j = \frac{f_j}{\lambda_j}. \tag{4}$$

Compte tenu de l'hypothèse (M_0), nous avons

$$f_j = 0 \ \Leftrightarrow a_j = 0.$$

Soit $j_0 \in \mathbb{N}$ le premier indice pour lequel $f_j \neq 0$ (ce qui est équivalent à $a_j \neq 0$). Alors pour tous les indices k avec $a_k \neq 0$ nous avons l'identité suivante

$$a_k = \frac{a_{j_0}\ \lambda_{j_0}\ f_k}{\lambda_k\ f_{j_0}}. \tag{5}$$

De (4) et (5) nous avons

$$M\ \left(a_{j_0}^2\ \left[1 + \frac{\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2} \right] a_{j_0} \right) = \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}. \tag{6}$$

Soit

$$c = 1 + \frac{\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2} > 0,$$

nous pouvons écrire (6) sous la forme suivante

$$M\ ((\sqrt{c} a_{j_0})^2) \sqrt{c} a_{j_0} = \sqrt{c} \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}. \tag{7}$$

On pose $t = \sqrt{c} a_{j_0}$, en remplaçant t dans (7) on aura

$$M\ (t^2) t = \sqrt{c} \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}},$$

ce qui implique que

$$H(t) = \sqrt{c} \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}} \neq 0,$$

par suite il existe un unique $t_0 = \sqrt{c}a_{j_0}$ solution de l'équation $H(t) = \sqrt{c}\frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}$ car H est une bijection. Une fois que nous avons trouvé les a_{j_0} nous pouvons utiliser (5) pour déterminer a_k pour tout $k \geq j_0$. Par conséquent nous concluons que u donnée par (2) avec $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ vérifiant (5) et (7) est l'unique solution de $(P_{M,L})$. ∎

Remarque 2.1

Nous présentons ci-dessous quelques exemples où les conditions du théorème précèdent sont satisfaites:

1) $M(t) = 1$, $H(t) = t$.
2) $M(t) = \exp(t) + 1$, $H(t) = t\exp(t^2) + t$.
3) $M(t) = t + m_0$, $H(t) = t^3 + m_0 t$.

2.3 Résultat d'existence pour un problème de Kirchhoff sous-linéaire

Reprenons le problème (P) avec

$$f(x,u) = |u|^{p-1}\, u + \lambda g(x)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\, M(\|u\|^2)\ \Delta u = |u|^{p-1}\, u + \lambda\ g(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P'}$$

où $\lambda > 0$, p un réel positif.

Avant de donner les principaux résultats, on fait les hypothèses suivantes:

$g_1)$ $g \in C^1(\overline{\Omega})$.

$g_2)$ g change de signe sur $\overline{\Omega}$.

$g_3)$ Le problème

$$\begin{cases} -\, \Delta u = g(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_g}$$

admet une solution non négative.

Théorème 2.2

Si les hypothèses (g_1) et (g_2) sont satisfaites, $0 < p < 1$ et la fonction M est non décroissante satisfaisant (M_0), alors le problème (P') admet une solution à énergie négative.

Preuve.

On cherche les solutions qui sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie I associée au problème (P'), définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(u) = \frac{1}{2}\tilde{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \lambda\int_\Omega g(x)udx,$$

où

$$\tilde{M}(t) = \int_0^t M(s)ds.$$

On va appliquer le théorème (1.7) à notre problème.

De la condition (M_0), l'inégalité de Hölder et les injections de Sobolev et de Poincaré on a

$$I(u) \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u\|^{p+1} - C_2\lambda\|g\|_2\|u\|,$$

où C_1et C_2 sont respectivement les constantes de l'injection de Sobolev et de Poincaré. Puisque $1 < p+1 < 2$, la fonctionnelle I est coercive c'est-à-dire que

$$I(u) \to +\infty \text{ quand } \|u\| \to +\infty.$$

Soit

$$\alpha = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} I(u),$$

et (u_n) une suite minimisante c'est-à-dire elle vérifie

$$I(u_n) \to \alpha.$$

Supposons que (u_n) n'est pas bornée c'est-à-dire que

$$\|u_n\| \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty,$$

comme I est coercive alors

$$I(u_n) \to +\infty \text{ quand } \|u_n\| \to +\infty.$$

Contradiction avec le fait que (u_n) est une suite minimisante.

Donc (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, par conséquent, il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{array}{lll} u_n & \rightharpoonup & v \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n & \to & v \text{ dans } L^{p+1}(\Omega), \\ u_n & \to & v \text{ p.p dans } \Omega. \end{array}$$

La fonction M est positive, donc $\tilde{M}$ est croissante et comme

$$\|v\| \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|u_n\|,$$

on écrit donc

$$\tilde{M}(\|v\|^2) \leq \tilde{M}((\lim_{n\to+\infty} \inf \|u_n\|)^2).$$

Comme la fonction $\tilde{M}$ est continue et $\|u_n\| > 0$ on obtient

$$\tilde{M}((\lim_{n\to+\infty} \inf \|u_n\|)^2) = \tilde{M}(\lim_{n\to+\infty} \inf \|u_n\|^2) = \lim_{n\to+\infty} \inf \tilde{M}(\|u_n\|^2).$$

Ainsi

$$\tilde{M}(\|v\|^2) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \tilde{M}(\|u_n\|^2). \tag{8}$$

Sachant que

$$u \mapsto \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx + \lambda \int_\Omega g(x)u dx$$

est faiblement continue alors

$$\frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1}\, dx + \lambda \int_\Omega g(x)u_n dx \to \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\, dx + \lambda \int_\Omega g(x)v dx, \tag{9}$$

de (8) et (9) on déduit que I est faiblement semi continue inférieurement, et par conséquent

$$\alpha \leq I(v) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf I(\|u_n\|) = \alpha.$$

d'où

$$I(v) = \alpha.$$

Ce qui montre que I atteint son infinimum à la limite v.

Montrons maintenant que v est à énergie négative. Posons

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega:\ \ g(x) > 0\},$$

et

$$\Omega^- = \{x \in \Omega:\ \ g(x) \leq 0\}.$$

Choisissons une fonction positive $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que supp$\varphi \subset \Omega^+$.

Pour $t \in (0,1)$ on a

$$I(t\varphi) = \frac{1}{2}\tilde{M}(\|t\varphi\|^2) - \frac{1}{p+1}\int\limits_{\Omega} |t\varphi|^{p+1}\,dx - \lambda \int\limits_{\Omega^+} g(x)t\varphi dx - \lambda \int\limits_{\Omega^-} g(x)t\varphi dx.$$

Comme supp$\varphi \subset \Omega^+$ alors

$$\int\limits_{\Omega^-} g(x)t\varphi dx = 0, \tag{10}$$

on a aussi

$$\lambda \int\limits_{\Omega^+} g(x)t\varphi dx > 0, \tag{11}$$

de (10) et (11) on aura

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{2}\tilde{M}(\|t\varphi\|^2) - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int\limits_{\Omega} |\varphi|^{p+1}\,dx,$$

en appliquant le théorème des accroissements finis nous obtenons

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{2}M(t^2\,\|\varphi\|^2)\,\|\varphi\|^2\,t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int\limits_{\Omega} |\varphi|^{p+1}\,dx,$$

puisque M est croissante et $0 < t < 1$ alors

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{2}M(\|\varphi\|^2)\,\|\varphi\|^2\,t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int\limits_{\Omega} |\varphi|^{p+1}\,dx.$$

Comme $1 < p+1 < 2$, on en déduit que $I(t\varphi) < 0$ pour les petites valeurs de t et donc

$$I(v) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq \inf_{0<t<1} I(t\varphi) < 0.$$

v est alors un minimum global non trivial de I ayant une énergie négative. Le théorème (2.2) est prouvé. ■

2.4 Résultat de non existence pour un problème de Kirchhoff sur-linéaire

Reprenons le problème $(P^{'})$ avec la condition $p > 1$.

Théorème 2.3

On suppose que les hypothèses (g_1) et (g_3) sont vérifiées, $p > 1$ et la fonction M est non croissante satisfaisant (M_0), Alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour $\lambda > \lambda^*$ le problème $(P^{'})$ n'a aucune solution positive.

Preuve.

Soit λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta,\, H_0^1(\Omega))$ et ϕ_1 la première fonction propre associée. Si u_λ est une solution positive du problème $(P^{'})$ alors

$$-M(\|u_\lambda\|^2)\int\limits_\Omega \phi_1 \Delta u_\lambda \; dx = \int\limits_\Omega u_\lambda^p \phi_1 \; dx + \lambda \int\limits_\Omega g(x) \; \phi_1 \; dx,$$

d'où

$$-M(\|u_\lambda\|^2)\int\limits_\Omega u_\lambda \Delta \phi_1 dx = \int\limits_\Omega u_\lambda^p \phi_1 dx + \lambda \int\limits_\Omega g(x) \phi_1 dx,$$

et comme ϕ_1 est la première fonction propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ alors

$$\lambda \int\limits_\Omega g(x)\phi_1 dx = \int\limits_\Omega \left[\lambda_1 M(\|u_\lambda\|^2) u_\lambda - u_\lambda^p\right] \phi_1 dx.$$

Comme

$$\|u_\lambda\|^2 > 0,$$

et la fonction M étant non croissante alors

$$M(\|u_\lambda\|^2) \leq M(0),$$

et par suite

$$\lambda \int\limits_\Omega g(x)\phi_1 dx \leq \int\limits_\Omega \left[\lambda_1 M(0) u_\lambda - u_\lambda^p\right] \phi_1 dx.$$

Le maximum de la fonction

$$u_\lambda \mapsto \lambda_1 M(0) u_\lambda - u_\lambda^p$$

est atteint en

$$u_\lambda = (\frac{\lambda_1 M(0)}{p})^{\frac{1}{p-1}},$$

en conséquence

$$\lambda\int_{\Omega} g(x)\phi_1 dx \leq (p-1)(\frac{\lambda_1 M(0)}{p})^{\frac{p}{p-1}}\int_{\Omega}\phi_1 dx. \tag{12}$$

Rappelons que d'après la condition (g_3), le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution non négative $u_g \in H_0^1(\Omega)$ d'où

$$\int_{\Omega} g(x)\phi_1 dx = \int_{\Omega} -\Delta u_g \ \phi_1 dx, \tag{13}$$

mais

$$\int_{\Omega} -\Delta u_g \ \phi_1 dx = \int_{\Omega} -\Delta\phi_1 u_g dx = \lambda_1\int_{\Omega} u_g \ \phi_1 dx > 0. \tag{14}$$

D'où de (13) et (14) on a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi_1 dx > 0.$$

De cette dernière égalité et de (12) on obtient

$$\lambda \leq \frac{(p-1)(\frac{\lambda_1 M(0)}{p})^{\frac{p}{p-1}}\int_{\Omega}\phi_1 dx}{\int_{\Omega} g(x)\phi_1 dx} = \lambda^*.$$

Ceci implique que le problème $(P^{'})$ n'admet pas de solution positive pour $\lambda > \lambda^*$.

■

Chapitre 3

Existence de solutions d'un problème elliptique non local et singulier par la méthode de Galerkin

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions certaines questions relatives à l'existence des solutions pour le problème elliptique non local

$$\begin{cases} -M\ (\|u\|^2)\ \triangle u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_f}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné à frontière régulière, $f \in H^{-1}(\Omega)$, $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dont le comportement sera précisé plus tard.

L'objectif principal est d'établir des propriétés sur M pour lesquelles le problème (P_f) possède une solution.

Dans le chapitre précédent on a étudié le problème (P_f) dans le cas où M satisfait l'hypothèse suivante:

$$\exists\ m_0 > 0,\ \forall\ t \geq 0\ M(t) \geq m_0,$$

et la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec

$$H(t) = M\ (t^2)\ t$$

est monotone et $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, nous montrons un résultat similaire en permettant à M d'atteindre des valeurs négatives et $M(t) \geq m_0 > 0$ seulement pour t assez grand.

Ceci est possible grâce à des idées utilisées par Alves-De Figueiredo [2], basées sur la méthode de Galerkin pour attaquer un système elliptique non-variationnelle. La technique peut être facilement adaptée à des problèmes tels que (P_f). De cette façon, nous améliorons considérablement les résultats d'existence en imposant des hypothèses plus faibles sur la fonction M.

La méthode que nous utilisons repose en grande partie sur le théorème (1.8), c'est une variante bien connue du théorème du point fixe de Brouwer.

Nous rappelons que par une solution de (P_f), nous entendons une solution faible qui est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$M\left(\|u\|^2\right) \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f(x)\ v dx,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

3.2 Le problème M-Linéaire:

Dans cette section nous étudions le problème M-linéaire (P_f) où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant:

$$\exists\ t_\infty,\ m_0 > 0 \text{ tels que } M(t) \geq m_0, \text{ pour tout } t \geq t_\infty. \tag{M_1}$$

Nous allons considérer deux cas. On traîtera le cas où la fonction M est continue, et ensuite on étudiera le problème quand la fonction M présente une singularité.

3.2.1 Cas continu

Théorème 3.1

Si la fonction M est continue et sous l'hypothèse (M_1), pour chaque $0 \neq f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème (P_f) possède une solution faible.

Preuve.

Pour la preuve, on va utiliser la méthode de Galerkin.

D'abord prenons $M^+ = \max\ \{M(t), 0\}$, la partie positive de M et considérons le problème auxiliaire

$$\begin{cases} -M^+\left(\|u\|^2\right) \triangle u = f(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_{M^+}}$$

Nous allons prouver que le problème (P_{M^+}) possède une solution et que cette solution résout également le problème (P_f). Nous rappelons que M^+ répond également à l'hypothèse (M_1).

Soit

$$S=\{e_1,e_2,...,e_m,...\} \text{ de } H_0^1(\Omega)$$

la base orthonormée de l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on considère l'espace de Hilbert de dimension finie

$$V_m = \ <e_1,e_2,...,e_m> .$$

Puisque $(V_m,\|.\|)$ et $(\mathbb{R}^m,|.|)$ sont isométriques et isomorphes, où $\|.\|$ est la norme habituelle de l'espace $H_0^1(\Omega)$ et $|.|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$, $\langle,\rangle$ son produit scalaire, on a l'identification

$$u=\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j \leftrightarrow \xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m),\ \|u\|=|\xi|\,.$$

Nous allons montrer que pour chaque m il y a un $u_m\in V_m$, solution approchée de (P_{M^+}) c'est-à-dire

$$M^+\ (\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\ \nabla e_i dx=(f,e_i),\ i=1,...,m,$$

où $(,)$ est le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

D'abord nous considérons la fonction $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ donnée par

$$F(\xi)=(F_1(\xi),F_2(\xi),...,F_m(\xi)),$$

$$F_i(\xi)=M^+\ (\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u.\nabla e_i dx-(f,e_i),$$

où $i=1,...,m$ et $u=\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j$, on a alors

$$\begin{aligned}
F_i(\xi) &= M^+(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla(\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j).\nabla e_i dx-(f,e_i),\\
&= M^+(\|u\|^2)\int_\Omega (\sum_{j=1}^{m}\xi_j \nabla e_j).\nabla e_i dx-(f,e_i),\\
&= M^+(\|u\|^2)\sum_{j=1}^{m}(\xi_j\int_\Omega \nabla e_j.\nabla e_i dx)-(f,e_i),\\
&= M^+(\|u\|^2)\xi_i\,\|e_i\|^2-(f,e_i),
\end{aligned}$$

et par suite

$$F_i(\xi)=M^+(\|u\|^2)\xi_i-(f,e_i).$$

Avec l'identification ci-dessus on a

$$\begin{aligned}\langle F(\xi),\xi\rangle &= \sum_{i=1}^{m} F_i(\xi).\xi_i,\\ \langle F(\xi),\xi\rangle &= M^{+}(\|u\|^2)\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2-\left(f,\sum_{i=1}^{m}\xi_i e_i\right),\end{aligned}$$

donc

$$\langle F(\xi),\xi\rangle = M^{+}(\|u\|^2)\,\|u\|^2-(f,u).$$

En utilisant (M_1), les inégalités de Hölder et Poincaré nous obtenons

$$\langle F(\xi),\xi\rangle \geq m_0\,\|u\|^2-\|f\|_{H^{-1}}\,\|u\|_2\,,\ \forall\,\|u\|^2\geq t_\infty,$$

et alors

$$\langle F(\xi),\xi\rangle \geq m_0\,\|u\|^2-C_\Omega\,\|f\|_{H^{-1}}\,\|u\|\,,\ \forall\,\|u\|^2\geq t_\infty.$$

On remarque que

$$\langle F(\xi),\xi\rangle \geq 0 \text{ si } \|u\|=r,$$

pour r assez grand et plus exactement pour

$$\|u\|=r\geq \max\{\sqrt{t_\infty},\frac{C\,\|f\|_{H^{-1}}}{m_0}\}$$

Ainsi d'après le théorème (1.8), il existe $u_m\in V_m$, $\|u_m\|\leq r$, r ne dépend pas de m telle que

$$F(u_m)=0,$$

c'est-à-dire que

$$F_i(u_m)=0,\ i=1,...,m,$$

donc

$$M^{+}\ (\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\nabla e_i=(f,e_i),\ i=1,...,m,$$

ce qui implique que

$$M^{+}\ (\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\ \nabla w=(f,w),\ w\in V_m. \tag{1}$$

Maintenant puisque (u_m) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est un espace réflexif alors il existe une sous suite encore notée (u_m) telle que

$$\begin{aligned}u_m &\rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega),\\ u_m &\to u \text{ dans } L^2(\Omega),\end{aligned}$$

et

$$\|u_m\|^2 \to t_0,$$

pour un certain $t_0 \geq 0$.
Comme M^+ est une fonction continue alors

$$M^+(\|u_m\|^2) \to M^+(t_0).$$

Prenant $k \leq m$, alors $V_k \subset V_m$. En fixant k et en faisant tendre $m \to \infty$ dans l'équation (1), nous obtenons pour tout $w \in V_k$

$$M^+(t_0)\int_\Omega \nabla u.\nabla w dx = (f,\, w). \tag{2}$$

Comme k est arbitraire, la dernière égalité reste vraie pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.
Si $M^+(t_0) = 0$, on aura

$$(f, w) = 0 \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

donc

$$f = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse du théorème. Par conséquent

$$M^+(t_0) > 0 \text{ et ainsi } M^+(t_0) = M(t_0).$$

En remplaçant w par u_m dans (1), nous obtenons

$$M^+(\|u_m\|^2)\, \|u_m\|^2 = (f, u_m).$$

En passant à la limite on aura

$$M^+(t_0)\ t_0 = (f, u),$$

ce qui est équivalent à

$$M(t_0)\ t_0 = (f, u). \tag{3}$$

Comme l'égalité (2) est vraie pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, alors en remplaçant w par u et en tenant compte du fait que $M^+(t_0) = M(t_0)$, on aura

$$M(t_0)\, \|u\|^2 = (f, u), \tag{4}$$

de (3) et (4) on a

$$\|u\|^2 = t_0,$$

ce qui montre que la fonction u est une solution faible du problème (P_f). Et la preuve du théorème (3.1) est terminée. ■

Remarque 3.1

Il ressort de la preuve du théorème (3.1) que la solution u obtenue satisfait

$$M(\|u\|^2) > 0.$$

Nous affirmons qu'il n'y a qu'une seule solution du problème (P_f) vérifiant cette propriété. Ceci peut être prouvé comme suit. Soient u et v deux solutions du problème (P_f) obtenues comme avant. Comme u et v sont des solutions faibles de (P_f), on a

$$M\ (\|u\|^2) \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla w dx = M\ (\|v\|^2) \int\limits_{\Omega} \nabla v.\nabla w dx,\ w \in H_0^1(\Omega), \tag{5}$$

ainsi $M\ (\|u\|^2)u$ et $M\ (\|v\|^2)v$ sont aussi deux solutions du problème

$$\begin{cases} -\triangle u = f\ (x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par unicité on a

$$M\ (\|u\|^2)u = M\ (\|v\|^2)v, \tag{6}$$

par suite

$$\left\| M\ (\|u\|^2)u \right\| = \left\| M\ (\|v\|^2)v \right\|,$$

comme $M\ (\|u\|^2)$ et $M\ (\|v\|^2)$ sont des scalaires positifs alors

$$M(\|u\|^2)\, \|u\| = M(\|v\|^2)\, \|v\|\,. \tag{7}$$

Puisque la fonction $t \to M(t^2)t$ est croissante pour $t > 0$, donc injective, alors

$$\|u\| = \|v\|\,.$$

En remplaçant ça dans (7), on obtient

$$M\ (\|u\|^2) = M\ (\|v\|^2).$$

Finalement en remplaçant ce résultat dans (6) il vient

$$u = v,$$

donc nous avons prouvé que (P_f) possède une seule solution u si la fonction

$$t \to M(t^2)t$$

est croissante pour $t > 0$.

Remarque 3.2

Si $M(t_0) = 0$ pour un certain $t_0 > 0$ et $f = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$ alors nous perdons l'unicité. En effet, soit $u \neq 0$ une fonction dans $C_0^2(\bar{\Omega})$ et $v = \frac{\sqrt{t_0}}{\|u\|}u$. Dans ce cas $\|v\|^2 = t_0$ et ainsi

$$\begin{cases} -M\ (\|v\|^2)\triangle v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

et donc pour chaque fonction $u \in C_0^2(\bar{\Omega})$ telle que $u \neq 0$, la fonction v définie ci-dessus est une solution non triviale de (8).

3.2.2 Cas discontinu

Dans cette section, nous concentrons notre intérêt sur le problème (P_f) lorsque M possède une discontinuité. Plus précisément, nous étudions le problème (P_f) avec

$$M : \mathbb{R}/\left\{\theta\right\} \to \mathbb{R}$$

continue telle que

$$\lim_{t\to\theta^+} M(t) = \lim_{t\to\theta^-} M(t) = +\infty. \tag{M_2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup M(t^2)t = +\infty. \tag{M_3}$$

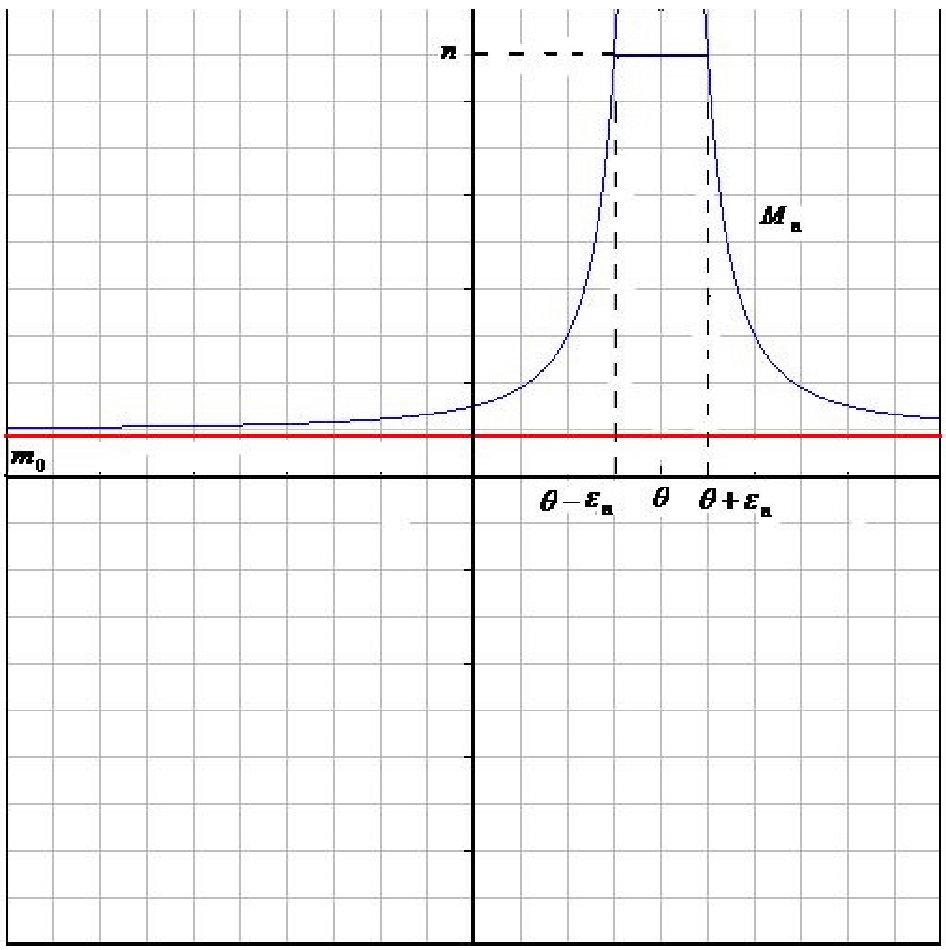
et (M_1) est satisfaite pour certain $t_\infty > 0$.

Remarque 3.3

Voici un exemple d'une fonction qui satisfait les hypothèses (M_1), (M_2) et (M_3)

$$M(t) = \frac{1}{(t-\theta)^2} + m_0.$$

Son graphe est donné par



Théorème 3.2

Si M satisfait (M_1), (M_2) et (M_3) alors le problème (P_f) possède une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $0 \neq f \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve.

Nous considérons d'abord la suite des fonctions

$$M_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

donnée par:

$$M_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } \theta - \varepsilon'_n \leq t \leq \theta + \varepsilon''_n \\ \\ M(t) & \text{si } t \leq \theta - \varepsilon'_n \text{ ou } t \geq \theta + \varepsilon''_n. \end{cases}$$

Pour $n > m_0$, où $\theta - \varepsilon'_n$, $\theta + \varepsilon''_n$, ε'_n, $\varepsilon''_n > 0$ sont respectivement les points les plus proches à θ à gauche et à droite de sorte que

$$M(\theta - \varepsilon'_n) = M(\theta + \varepsilon''_n) = n.$$

On note que

$$\varepsilon'_n, \varepsilon''_n \to 0 \text{ quant } n \to \infty.$$

Prenons $n > m_0$ et observons que les droites horizontales $y = n$ coupent le graphe de $M(t)$. D'où M_n est continue et satisfait (M_1) pour tout $n > m_0$, donc d'après le théorème(3.1), pour chaque $n > m_0$, il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$M_n(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n . \nabla w dx = (f, w), \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega). \tag{9}$$

En prenant $w = u_n$ et en remplaçant dans (9) on aura

$$M_n(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 = (f, u_n).$$

En appliquant les inégalités de Hölder et Poincaré nous obtenons

$$M_n(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 \leq C_\Omega \|f\|_{H^{-1}} \|u_n\| .$$

Donc

$$M_n(\|u_n\|^2) \|u_n\| \ \leq C_\Omega \|f\|_{H^{-1}} .$$

Supposons maintenant que

$$\|u_n\| \to +\infty,$$

d'après (M_3) on a

$$M_n(\|u_n\|^2) \|u_n\| \to +\infty \text{ quand } \|u_n\| \to +\infty,$$

donc

$$+\infty \leq C_\Omega \|f\|_{H^{-1}}$$

ce qui est absurde, et par suite $\|u_n\|$ doit être bornée, par conséquent

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to u \quad \text{dans} \;\; L^2(\Omega),$$

et

$$\|u_n\|^2 \to \theta_0$$

pour certain $\theta_0 > 0$.
Si

$$M_n(\|u_n\|^2) \to 0$$

alors

$$(f, w) = 0 \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

et par suite

$$f = 0$$

ce qui est absurde car on a

$$0 \neq f \in H^{-1}(\Omega),$$

ainsi si $M_n(\|u_n\|^2)$ converge sa limite est différente de zéro.
Montrons maintenant que

$$\theta \neq \theta_0,$$

pour cela, supposons que

$$\|u_n\|^2 \to \theta \neq 0.$$

On distingue 2 cas

1^{er}*cas si* $\|u_n\|^2 < \theta - \varepsilon_n'$ *ou* $\|u_n\|^2 > \theta + \varepsilon_n''$.

Pour une infinité de n nous obtenons

$$M_n(\|u_n\|^2) = M(\|u_n\|^2),$$

par suite

$$M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 = (f, u_n),$$

en utilisant l'hypothèse (M_2) on aura

$$+\infty = (f, u)$$

ce qui est absurde, donc

$$\|u_n\|^2 \to \theta_0 \neq \theta.$$

$2^{\text{ème}}cas\ \ si\ \theta - \varepsilon_n' \leq \|u_n\|^2 \leq \theta + \varepsilon_n''$

on a

$$M_n(\|u_n\|^2) = n,$$

donc

$$n\,\|u_n\|^2 = (f, u_n),$$

alors

$$+\infty = (f, u)$$

ce qui est absurde, ainsi dans les deux cas on a

$$\|u_n\|^2 \to \theta_0 \neq \theta.$$

ce qui implique que pour n assez grand

$$\|u_n\|^2 \leq \theta - \varepsilon_n' \text{ ou } \|u_n\|^2 \geq \theta + \varepsilon_n'',$$

donc

$$M_n(\|u_n\|^2) = M(\|u_n\|^2),$$

ce qui donne

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n.\nabla w dx = (f, w), \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega). \tag{10}$$

Si on remplace w par u_n dans l'équation ci dessus on aura

$$M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 = (f, u_n),$$

en passant à la limite nous obtenons

$$M(\theta_0)\theta_0 = (f, u). \tag{11}$$

D'autre part si
on passe à la limite dans (10) on aura

$$M(\theta_0)\int_\Omega \nabla u.\nabla w dx = (f, w), \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega)$$

et si on remplace w par u on obtient

$$M(\theta_0)\,\|u\|^2 = (f, u). \tag{12}$$

Donc de (11) et (12) on a

$$M(\theta_0)\,\|u\|^2 = M(\theta_0)\theta_0.$$

Raisonnons comme précédemment, nous concluons que

$$M(\theta_0) \neq 0$$

par suite

$$\|u\|^2 = \theta_0$$

et donc u est une solution de notre problème. ■

3.3 Un problème sous-linéaire

Dans cette section, nous concentrons notre attention sur le problème

$$\left\{ \begin{aligned} -M(\|u\|^2) \triangle u &= u^\alpha \;\text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \;\text{ sur } \partial\Omega \\ u &> 0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \right. \qquad (P_\alpha)$$

où $0 < \alpha < 1$, plus précisément nous avons le résultat suivant

Théorème 3.3

Si M est une fonction strictement positive sur $[0, +\infty[$ *telle que $M(t) < m_\infty$, pour une certaine constante positive m_∞* et

$$\lim_{t\to\infty} M(t^2)t^{1-\alpha} = +\infty$$

alors le problème (P_α) possède une solution.

Preuve.

La preuve du théorème est inspirée d'un résultat dû à Alves et De Figueiredo [2].

Tout d'abord considérons le problème

$$\left\{ \begin{aligned} -M(\|u\|^2) \triangle u &= (u^+)^\alpha + \lambda\Phi(x) \;\text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \;\text{ sur } \partial\Omega \\ u &> 0 \;\text{ dans } \Omega, \end{aligned} \right. \qquad (P_\lambda)$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, $\Phi > 0$ est une fonction dans $H_0^1(\Omega)$ et

$$u^+ = \max\{u, 0\}$$

est la partie positif de u.

En procédant comme dans la preuve du théorème (3.1), nous avons trouvé que pour chaque $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$ il existe une solution u_λ de l'équation (P_λ), en tenant compte du fait que

$$M(\|u_\lambda\|^2) > 0,$$

et en utilisant le principe du maximum on conclut que

$$u_\lambda > 0,$$

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2) \triangle u = (u_\lambda)^\alpha + \lambda\Phi(x) \geq u_\lambda^\alpha & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

Puisque

$$M(t) < m_\infty,$$

alors

$$\begin{cases} -\triangle u_\lambda \geq m_\infty^{-1} u_\lambda^\alpha & \text{dans } \Omega \\ u_\lambda = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Grâce à un résultat d'Ambrosetti-Brezis-Cerami [3] on a

$$u_\lambda \geq m_\infty^{-1} w_1,$$

où $w_1 > 0$ dans Ω est la seule solution positive de

$$\begin{cases} -\triangle w_1 = w_1^\alpha & \text{dans } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme dans la preuve du théorème (3.1), on a

$$\|u_\lambda\| \leq r_\lambda$$

où r_λ est une constante positive qui dépend éventuellement de λ.

Prenons $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$, nous devons garantir que $\|u_\lambda\|$ est bornée indépendamment de λ.

Observons d'abord qu'en multipliant l'équation par u_λ et en intégrant sur Ω on a

$$M(\|u_\lambda\|^2)\,\|u_\lambda\|^2 = \int_\Omega (u_\lambda)^{\alpha+1} dx + \lambda \int_\Omega \Phi(x) u_\lambda dx,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$M(\|u_\lambda\|^2)\,\|u_\lambda\|^2 \leq C\ \ \|u_\lambda\|_2^{\alpha+1} + \lambda\,\|u_\lambda\|_2\,\|\Phi\|_2\,,$$

et par l'inégalité de Poincaré

$$M(\|u_\lambda\|^2)\,\|u_\lambda\|^2 \leq C\ \ \|u_\lambda\|^{\alpha+1} + C\,\|u_\lambda\|\,.$$

En divisant par $\|u_\lambda\|^{\alpha+1}$ nous obtenons

$$M(\|u_\lambda\|^2)\,\|u_\lambda\|^{1-\alpha} \leq C + \frac{C}{\|u_\lambda\|^{\alpha}},$$

et puisque

$$M(t^2)t^{1-\alpha} \to +\infty \text{ quand } t \to +\infty,$$

on conclut que $\|u_\lambda\|$ est bornée pour tout $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$.

Enfin, nous pouvons prendre $\lambda \to 0$ pour obtenir une solution u du problème (P_α).

■

Bibliographie

[1] C. O. Alves, A. Corréa, *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Communication on applied nonlinear analysis, 8(2001), 43-56.

[2] C. O. Alves, D. G. De Figueiredo, *Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods*, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis - The Hans Triebel Anniversary Volume, Ed. Birkhauser, 2003, 47-57.

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal., 122(1994), 519-543.

[4] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle Et Applications*, Dunod, 1999.

[5] N.P. Càc, J. A. Gatica, Y. Li, *Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign*, Nonlinear Analysis, 37(1999), 501-510.

[6] A. Corréa, S. Francisco Julio, B. Menezes et D. Silvano, *Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method,* Electronique journal of differencial equations, 19 (2004), 1-10.

[7] O. Kavian, *Introduction A La Théorie Des Points Critiques Et Applications Aux Problèmes Elliptiques,* Springer-Verlag, 1993.

[8] H. Le Dret, *Notes de cours M2-Equations aux dérivées partielles elliptiques,* Polycopié, 2010.

[9] J.L. Lions, *Quelques Méthodes De Résolution Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[10] M. Struwe, *Variational Methods; Applications To Nonlinear Partial Differential Equations And Hamiltonian Systems,* Springer-Verlag, 1999.