

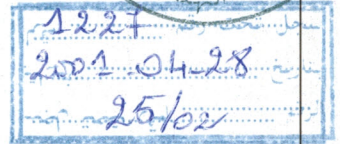
MEMOIRE

Présenté à

L'Université d'Abou Bakr Belkaïd - Tlemcen
Faculté des Sciences de L'Ingénieur
Département d'Electronique



Pour l'obtention du diplôme de :



MAGISTER

EN ELECTRONIQUE

Option : « Signaux et Systèmes »

par

M^{lle} Ouis Amaria

Thème

Sur la Fragilité des Synthèses Optimales

Soutenu en fevrier 2001
Devant la commission d'examen :

Président	Mr N. Ghouali	Professeur à l'université A. B. Belkaïd. Tlemcen
Examineurs	Mr F. Khelfi	Maître de conférences à l'université D'Oran. Es-Senia
	Mr S. M. Bouguima	Maître de conférences à l'université A.B. Belkaïd. Tlemcen
Rapporteur	Mr B. Cherki	Maître de conférences à l'université A.B. Belkaïd. Tlemcen

A ma maman chérie...

Remerciements

Voilà encore une fois que j'ai eu la chance d'être dirigée dans mon travail par Monsieur Brahim CHERKI, Maître de conférences au département d'Electronique de la faculté des sciences de l'ingénieur de Tlemcen. Sa compétence scientifique, sa culture autant que ses conseils constructifs et ses encouragements m'ont été très précieux pour mener à bien la réalisation de ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect et ma sincère gratitude.

Je présente mes respectueux remerciements à Monsieur le Professeur Nouredine GHOUALI, Recteur de l'université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Que Monsieur Fayçal KHELFI, Maître de conférences au département d'Informatique de la faculté des sciences de l'ingénieur d'Oran, trouve ici le témoignage des mes sincères remerciements pour avoir mis à ma disposition les références dont j'avais besoin et d'avoir bien accepter de consacrer une partie de son temps à l'examen de ce document.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Sidi Mohamed BOUGUIMA, Maître de conférences au département des Mathématiques de la faculté des sciences de Tlemcen pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour avoir bien voulu accepter de le juger.

Je remercie chaleureusement ma mère, mon père, mes soeurs et mes frères pour la compréhension et la patience dont ils ont fait preuve - encore une fois - lors de la réalisation du présent travail.

Pour la sympathie qu'ils m'ont toujours témoignée et pour le soutien moral qu'ils ont su me donner je tiens à remercier aussi mes Amis(es) et collègues : Nawel.H, Faïza, Naïma, Amina.O, Halim, Fouad, Samad, Souhila, Amina.B, Wassila, Bahia, Nabil, Fayçal, Zaki.T, Lamia.T, Nassim, Amel, Siham, Sid Ahmed, Hicham, Lamia.B, Nawel.B, Zaki.R, Esmâ, Yasmina, Bouchra, Karim, Mourad.K, Zaki.S, Lotfi, Belkacem, Sidi Mohamed, Hadj, Mourad.H, abdelrrezak, Fethi, abdelghani, Salim, Yacine, Nouri, abdelillah, ...

Sans oublier de remercier tout le personnel de la faculté des sciences de l'ingénieur et toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, au bon déroulement de mon travail.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE

5

0 NOTIONS DE BASE

8

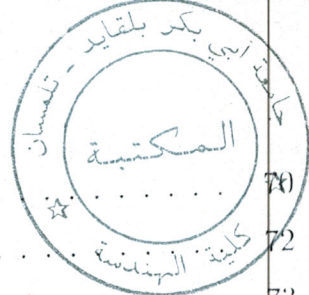
0.1	Introduction	8
0.2	La boucle de contre-réaction	9
0.3	La stabilité interne	11
0.4	Les performances : suivi et rejet de perturbations	13
0.5	Les normes des signaux et des systèmes	16
0.5.1	Normes des vecteurs	16
0.5.2	Les normes des signaux	17
0.5.3	Normes de systèmes	19
0.5.4	Relation Entrée/Sortie via les normes	20
0.6	Incertitudes et erreurs de modèle	21
0.6.1	Incertitudes structurées	22
0.6.2	Incertitudes non structurées	22
0.7	L'extension aux systèmes multivariables	25
0.7.1	Les normes H_2 et H_∞	25

1 ROBUSTESSE et OPTIMALITÉ

28

1.1	Introduction	28
1.2	La commande optimale	29
1.3	La robustesse	30
1.4	Etat de l'art	31
1.5	Conclusion	38

2	ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES À INCERTITUDES PARAMÉTRIQUES	39
2.1	Introduction	39
2.2	Famille de polynômes à incertitudes paramétriques	41
2.2.1	Polynômes paramétriques	41
2.2.2	Famille de polynômes paramétriques	42
2.2.3	Classes de polynômes paramétriques	43
2.3	Analyse de la stabilité d'une famille de polynômes par le théorème de croisement de frontière	44
2.3.1	Régions et frontières de stabilité	45
2.3.2	Hypothèses	46
2.3.3	Théorème de croisement de frontière	46
2.3.4	Interprétation du théorème à l'aide d'un exemple	47
2.3.5	Le principe d'exclusion du zéro	48
2.4	Analyse de la stabilité d'un polynôme par le théorème d'Hermite-Biehler (d'al- ternance)	49
2.4.1	La stabilité d'Hurwitz	49
2.4.2	Théorème d'Hermite-Biehler : Cas continu	50
2.4.3	Le théorème d'Hermite-Biehler : cas discret (cas de Schur)	53
2.5	Analyse de la stabilité des polynômes intervalles par le théorème de Kharitonov	54
2.5.1	L'historique du théorème	54
2.5.2	La présentation du théorème	55
2.6	Généralisation du théorème de Kharitonov en termes d'alternance	56
2.7	Marge de stabilité paramétrique	58
2.7.1	Définition	58
2.7.2	La boule de stabilité dans l'espace des paramètres	59
2.7.3	Calcul de la marge de stabilité paramétrique	62
2.7.4	La l_2 marge de stabilité paramétrique	65
2.7.5	Exemple de calcul	66
2.8	Conclusion	69
3	INTRODUCTION AU PROBLÈME DE LA FRAGILITÉ	70
3.1	Introduction	70



3.2	La fragilité : un problème ouvert!	70
3.3	Une synthèse est-elle Robuste, Fragile ou Optimale?	72
3.3.1	Correcteur H_∞ basé sur l'optimisation de la marge de gain	73
3.3.2	Un correcteur arbitraire	80
3.3.3	Correcteur H_∞ robuste	84
3.3.4	Correcteur basé sur la μ synthèse	86
3.3.5	Le correcteur H_2 -optimal	89
3.4	La fragilité des pôles et des zéros	91
3.4.1	Exemple accadémique	92
3.4.2	Discussion dans le cas général	94
3.5	Conclusion	95
4	FRAGILITÉ D'UNE SYNTHÈSE OPTIMALE PAR LQR	97
4.1	Introduction	97
4.2	Système d'application : le pendule inversé	97
4.2.1	Définition	97
4.2.2	Le modèle du système	99
4.2.3	Les paramètres du système	104
4.2.4	L'analyse du système	104
4.3	La commande optimale LQR	105
4.4	La commande Optimale LQR avec Observateur d'Ordre Complet	107
4.5	La commande Optimale LQR avec Observateur d'Ordre Réduit	110
4.6	Choix des matrices de pondération	114
4.7	Analyse de la fragilité d'une synthèse LQR	115
4.7.1	Synthèse LQR	115
4.7.2	Analyse de la fragilité	120
4.8	Analyse de la fragilité d'une synthèse LQR avec observateur d'ordre complet	126
4.8.1	Synthèse d'observateurs d'ordre complet	126
4.8.2	Analyse de la fragilité	129
4.9	Analyse de la fragilité d'une synthèse LQR avec observateur d'ordre réduit	133
4.9.1	Synthèse d'observateur d'ordre réduit	133
4.9.2	Analyse de la fragilité	136

4.10 Conclusion	138
5 LA FRAGILITÉ DE LA SYNTHÈSE H_∞-Optimale	140
5.1 Introduction	140
5.2 Méthode de synthèse H_∞	140
5.2.1 Définition du problème H_∞ standard	140
5.2.2 Résolution du Problème H_∞	143
5.3 Système d'application	147
5.4 Synthèse de régulateur H_∞ -optimal	151
5.5 Analyse de la fragilité du correcteur H_∞ -optimal	157
5.5.1 Analyse de la fragilité avec linéarisation de l'équation caractéristique	159
5.5.2 L'analyse de la fragilité par l'approche de Lyapunov	162
5.6 Conclusion	169
CONCLUSION GENERALE	171
BIBLIOGRAPHIE	178

Introduction Générale

La recherche de performances de plus en plus grandes pour différents systèmes technologiques, a poussé à la recherche de lois de commande sophistiquées, optimales et robustes.

Les objectifs sans cesse plus importants (conquête spatiale, aviation,...), les contraintes techniques et économiques ont incité les ingénieurs à mettre en œuvre des critères dont l'optimalité présentait des avantages très importants.

Les imperfections des modèles mathématiques dues aux approximations, aux dynamiques négligées, etc... nécessitaient des précautions supplémentaires dans la synthèse des lois de commande qui devaient alors être suffisamment insensibles aux erreurs de modèle.

Pour se faire, les études de synthèses de commande devenaient de plus en plus fines, afin de concevoir des méthodes de synthèses optimales et robustes. Des synthèses qui ont connu un essor remarquable durant ces dix dernières années [1], [4], [5], [8], [9], [18], [19], [20], [21], [39], [51].

Il faut noter aussi que tous ces travaux ont été établis sous l'hypothèse que le correcteur synthétisé soit implémenté d'une manière exacte. Or, ceci n'est malheureusement pas toujours le cas en pratique. On peut expliquer ce phénomène par le fait que l'implémentation du correcteur est sujette à des imprécisions propres à la conversion A/D et D/A , aux longueurs des mots finis, aux instruments de mesure à résolution finie et aux erreurs d'arrondi dans les calculs numériques. D'où la nécessité d'avoir une marge de tolérance autour du correcteur synthétisé, d'une part. D'autre part, on peut toujours supposer que même si l'implémentation exacte du correcteur soit possible, l'ingénieur de commande a souvent besoin de réajuster les paramètres du correcteur nominal qu'il a en mains; afin de satisfaire les exigences de performances qui n'étaient pas considérées lors du problème de synthèse initial. Cela confirme que toute procédure de synthèse devrait engendrer un correcteur qui a aussi suffisamment de place pour le réajustement de ses coefficients. On se demande alors de combien pourrait être la quantité d'incertitudes ΔK qu'un correcteur implémenté $K + \Delta K$ puisse admettre, tout

en restant aussi stabilisant et efficace que le correcteur synthétisé K .

Une telle question a été abordée, pour la première fois, dans un article publié récemment par Keel et Bhattacharyya [6]. A travers des exemples et des calculs de marges de stabilité paramétrique des correcteurs, ils ont montré que des perturbations, extrêmement petites, sur les coefficients du correcteur issus de synthèses robustes ou optimales telles que H_2 , H_∞ et μ , pourraient entraîner la déstabilisation de la boucle fermée.

Ce résultat a permis à Keel et Bhattacharyya de qualifier un correcteur d'une telle sensibilité aux variations de ses coefficients, par le nom de "correcteur fragile". C'est ainsi alors, que s'ajoute le terme "fragilité" à la littérature de contrôle. Un fait qui a ouvert les portes vers de nouvelles études témoignées par le nombre de travaux entamés [2], [7], [12], [17],[23], [25], [26], [33], [48], [49], [50]. Il a même été montré par Mäkilä, que la fragilité pourrait être due à la forme sous laquelle on implémente le correcteur. [34], [40], [41]

L'étude de la fragilité étant déjà faite sur des correcteurs robustes et optimaux donnés sous forme de fonctions de transfert, nous nous sommes intéressés dans ce travail, à étudier la fragilité de certains correcteurs optimaux mais cette fois-ci donnés dans une structure des représentations d'état, tels que le correcteur optimal LQR et le correcteur H_∞ -optimal.

Nous avons, en premier lieu, commencé par établir une synthèse optimale LQR (seule, avec observateur d'ordre complet et d'ordre réduit) et une synthèse H_∞ optimale - les deux - appliquées au Benchmark "pendule inversé". Par la suite, nous sommes passés à l'analyse de la fragilité des correcteurs qui en résultent. Celle-ci se traduit par l'analyse de la sensibilité de la stabilité - et éventuellement des performances - à de petites variations dans les paramètres de ces correcteurs.

En ce qui concerne l'organisation de ce mémoire, la rédaction s'articule sur 6 chapitres dont le contenu est décrit ci-après d'une manière introductive.

Le chapitre 0 passe au préalable en revue certaines notions de base de la théorie de contrôle des systèmes, en général, et celles qui se rattachent au contrôle robuste et optimal en particulier. On commence par voir, pour les systèmes SISO, la notion du feedback et celle du problème bien-posé. Par la suite, les définitions de stabilité, des performances, des incertitudes et des normes seront données, avec comme complément, une généralisation aux systèmes MIMO, résumant ainsi les concepts de base nécessaires aussi bien à l'analyse qu'à la synthèse.

Le chapitre 1 est consacré aux notions de robustesse et d'optimalité et à un état-de-l'art

concernant ces notions.

Le chapitre 2 est entièrement voué à l'approche paramétrique. Nous commençons par donner une définition de l'incertitude paramétrique et de la famille des polynômes incertains qui en découlent. Par la suite, un théorème basé sur la continuité des racines en fonction de celle des paramètres est donné; c'est le théorème de croisement de frontière suivi de sa version alternative, le principe d'exclusion du zéro. De nouvelles méthodes astucieuses pour analyser la stabilité d'un polynôme seront vues aussi. Un autre résultat élégant et suprenant à la fois est donné par le théorème de Kharitonov, celui-ci permet de vérifier la stabilité d'une famille intervalle seulement en vérifiant celle de quatre polynômes extrêmes. Le théorème de Kharitonov est également interprété en terme d'alternance. Ce chapitre est complété par la définition et la présentation de la méthode de calcul de la marge de stabilité paramétrique. Une marge qui est l'outil de base dans l'analyse de la fragilité.

Le chapitre 3 introduit le problème de la fragilité tel qu'il a été énoncé dans la littérature de contrôle. A travers des exemples, nous allons voir à quel point certaines méthodes de synthèses telles que H_2 , H_∞ et μ pourraient être fragiles. Une autre origine de fragilité est exposée aussi dans ce chapitre, fragilité due à la forme sous laquelle le correcteur est implémenté.

Le chapitre 4 est réservé à l'analyse de la fragilité d'un correcteur optimale LQR . Une présentation du système d'application qui est le Benchmark " Pendule Inversé ", un aperçu théorique pour faire une synthèse LQR seule, avec observateur d'ordre complet et observateur d'ordre réduit sont donnés. Après, on synthétisera des lois de commande de ce type et une analyse de fragilité suivra.

Le chapitre 5 s'intéresse à l'analyse de la fragilité du correcteur H_∞ -optimal. Il commence en premier lieu, par définir le problème H_∞ standard et par donner sa méthode de résolution. Le modèle du pendule inversé est mis sous la forme standard, à savoir le modèle augmenté. La synthèse étant faite et validée par des essais de simulation, on passera à l'analyse de la fragilité du correcteur résultant.

Chapitre 0

NOTIONS DE BASE

0.1 Introduction

En vue de faire une étude dans le cadre des synthèses optimales ; il s'avère nécessaire de passer au préalable en revue certaines notions de base de la théorie de contrôle des systèmes, en général, et celles qui se rattachent au contrôle robuste et optimal en particulier.

Un système de contrôle est un mécanisme qui fait en sorte que certaines variables physiques d'un système, appelé aussi processus, se comportent d'une manière prescrite, et cela en dépit de la présence des perturbations et des incertitudes. Les processus ou les systèmes à commander sont des systèmes dynamiques, tels que : les avions, les processus chimiques, les moteurs électriques, les robots, etc ...

L'objectif du contrôle est de faire suivre à une entrée de référence $r(t)$, la sortie du système $y(t)$ et cela d'une manière aussi rapprochée que possible, même en présence de perturbations affectant le système.

Dans le but de réaliser un contrôle automatique, on est généralement amené à établir, ce que l'on appelle "boucle de contre-réaction" ou "feedback". Nous allons donc, commencer par voir pour les systèmes SISO (systèmes monovariabiles) la notion du feedback et celle du problème bien-posé. Par la suite, les définitions de stabilité, des performances, des incertitudes et des normes seront données, avec comme complément, une généralisation aux systèmes MIMO (systèmes multivariabiles), résumant ainsi les concepts de base nécessaires aussi bien à l'analyse qu'à la synthèse.

0.2 La boucle de contre-réaction [19]

Les systèmes de commande à contre-réaction, les plus élémentaires contiennent trois composants :

- le processus (l'objet à contrôler),
- un capteur pour mesurer la sortie du processus,
- et un correcteur pour générer l'entrée du processus.

Souvent l'actionneur est implémenté avec le processus.

On représente cet ensemble d'éléments par le diagramme-bloc de la figure 0.1

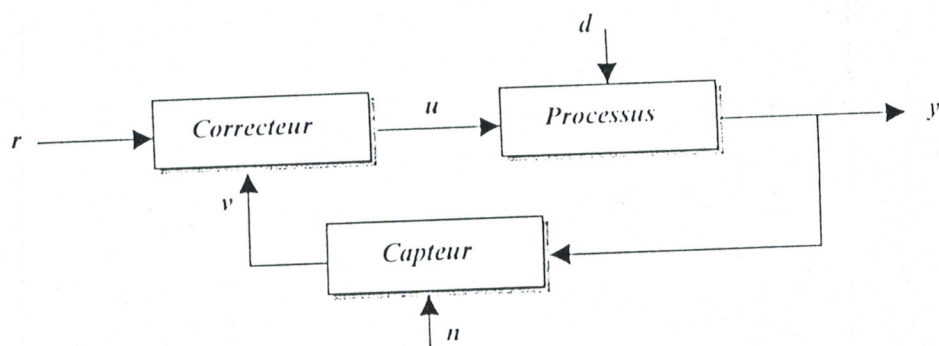


Fig.0.1 : Système de commande élémentaire.

r : signal de référence; d : perturbations externes

v : la sortie du capteur ; n : bruits du capteur

u : le signal actionneur ou entrée du processus

y : la sortie du processus, c'est le signal mesuré.

Les trois signaux venant de l'extérieur (r , d , et n) sont appelés, *entrées exogènes*.

Les trois éléments sur la figure 0.1 sont supposés être linéaires. Dans ce cas, les sorties sont représentées par des vecteurs à deux dimensions. Par exemple :

$$y = P \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix}$$

En partitionnant P en une matrice de transfert (1×2) : $P = [P_1 \ P_2]$, on obtient :

$$y = P_1 d + P_2 u$$

On peut donc supposer que la sortie de chaque élément est une fonction linéaire de la somme (ou de la différence) de ses entrées, c'est-à-dire que le processus, le capteur, et le correcteur vérifient des équations de la forme :

$$y = P(d + u)$$

$$v = F(y + n)$$

$$u = C(r - v)$$

Le diagramme-bloc représenté par ces équations est donné par la figure 0.2

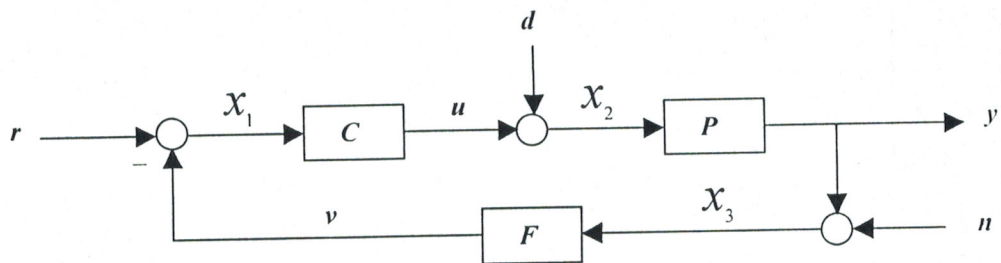


Fig.0.2 : La boucle de contre-réaction élémentaire.

On considère les systèmes, linéaires, invariants, causaux et de dimension finie.

Au type de structure donnée par la figure 0.2, nous allons associer la notion de "bien-posé" (en anglais le "well-posedness").

La notion de problème bien-posé signifie, selon la structure considérée dans la figure 0.2, que toutes les fonctions de transfert en boucle fermée existent, c'est-à-dire, que toutes les fonctions de transfert reliant les 3 signaux exogènes, r , d et n et tous les signaux internes, u , y et v avec les sorties des sommateurs notées x_1 , x_2 , x_3 existent.

Ainsi, pour le bien-posé du problème, il suffit de voir les neuf fonctions de transfert entre r , d , n et x_1 , x_2 , x_3 , car on a :

$$x_1 = r - F x_3$$

$$x_2 = d + C x_1$$

$$x_3 = n + P x_2$$

Sous la forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

Ainsi, on dit que le système de la figure 0.2 est bien-posé *si et seulement si* la matrice (3×3) précédente est non singulière, c'est-à-dire, lorsque le déterminant de $1 + PCF$ n'est pas nul.

Les neuf fonctions de transfert sont obtenues à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Quand les fonctions de transfert P , C et F sont propres, la forte notion de bien-posé signifie que les neuf fonctions de transfert si-dessus sont propres. La condition nécessaire et suffisante pour que cela soit vrai est que $1 + PCF$ ne soit pas strictement propre (i.e. $PCF(\infty) \neq -1$).

Notez que le système à contre-réaction est automatiquement bien-posé, si P , C et F sont propres et l'un d'eux est strictement propre.

0.3 La stabilité interne [19]

On considère un système avec une entrée u , une sortie y et une fonction de transfert $G(s)$, supposée stable et propre, on peut l'écrire :

$$G(s) = G_0 + G_1(s)$$

où G_0 est une constante et G_1 est une fonction strictement propre. Dans le domaine

temporel la sortie du système est donnée par :

$$y(t) = G_0 u(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

si $|u(t)| \leq C$ pour tout instant t , alors :

$$|y(t)| \leq |G_0| C + \int_{-\infty}^{+\infty} |g_1(\tau)| d\tau C$$

La partie droite de l'inégalité est finie. Par conséquent, la sortie est bornée chaque fois que l'entrée est bornée.

En revenant au système présenté sur la figure 0.2, on dit que :

Si les neuf fonctions de transfert (1) sont stables, alors le système est dit : "internement stable".

Comme conséquence, si les entrées exogènes sont bornées en amplitude, ainsi le seront x_1 , x_2 et x_3 et donc u , y et v . Donc la stabilité interne garantie des signaux internes bornés pour tous signaux exogènes bornés.

Remarque 0.1 L'idée derrière cette définition de stabilité interne, c'est de ne pas se contenter de vérifier seulement les fonctions de transfert Entrée/Sortie, comme celle entre r et y , par exemple. Cette fonction de transfert pourrait être stable, de sorte que y soit bornée lorsque r l'est ; mais les signaux internes pourraient être non-bornés, et donc peuvent causer des dégâts internes au système physique.

Comme nous venons de le voir, pour tester l'importante notion de stabilité interne, on doit tester les neuf fonctions de transfert(1). Pour éviter cela, il y a un autre test, plus simple, se résumant dans le théorème suivant :

Théorème 0.1 Le système avec contre-réaction à une stabilité interne si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a - La fonction de transfert $1 + P(s)C(s)F(s)$ n'a pas de zéros avec $\text{Re}\{s\} \geq 0$.

b - Il n'y a pas de simplification pôle-zéro avec $\text{Re}\{s\} \geq 0$ quand le produit

$P(s)C(s)F(s)$ est formé.

Du théorème cité ci-dessus et du principe de l'argument [30] découle le fameux critère de Nyquist qui permet de vérifier graphiquement la stabilité interne.



✦ Critère de Nyquist :

On construit le tracé de Nyquist de PCF , en évitant par des échancrures les pôles se trouvant sur l'axe imaginaire.

Soit n le nombre total de pôles de P , C et F avec $\text{Re}\{s\} \geq 0$, alors le système avec contre-réaction a une stabilité interne si et seulement si le tracé de Nyquist ne passe pas par le point -1 et l'encercle exactement n fois dans le sens antihoraire.

Après avoir vu un point fondamental dans l'analyse, la synthèse et l'évolution des systèmes de contrôle, qui est la stabilité interne, nous allons évoquer un autre point fondamental, aussi important que le premier, c'est la notion de performance.

0.4 Les performances : suivi et rejet de perturbations

[38]

Dans le système de la figure 0.3, la sortie $y(t)$ du processus est supposée suivre le signal de référence $r(t)$ d'une manière aussi rapprochée que possible en dépit des perturbations $d(t)$ et des bruits de mesure $n(t)$.

Les signaux exogènes ne sont pas connus exactement comme des fonctions de temps, mais ils sont connus qualitativement. En se basant sur cette remarque, les concepteurs en contrôle utilisent une certaine classe de signaux de test pour évaluer toute synthèse proposée.

La spécification de synthèse typique pourrait être comme suit : un système a une erreur permanente nulle, chaque fois que le signal de référence r et la perturbation d consistent en des échellons et rampes d'amplitudes et de pentes arbitraires et inconnues.

Souvent le bruit de mesure n possède le plus d'énergie dans la plage de fréquences $[\omega_1, \omega_2]$. En plus des échellons et des rampes, les signaux r et d pourraient avoir une énergie significative dans la plage des basses fréquences $[0, \omega_0]$.

L'exigence raisonnable à imposer est que : y suive r avec une "petite" erreur pour tout signal dans cette classe d'incertitude et sans utiliser une énergie de commande excessive.

On examine cette idée d'une manière plus précise en établissant les équations du système en boucle fermée de la figure 0.3 avec un retour unitaire ($F = 1$).

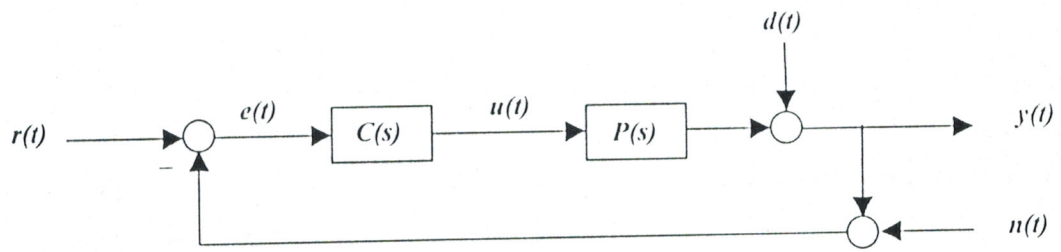


Fig.0.3 : Système en boucle fermée à retour unitaire.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 y(s) &= P(s) u(s) + d(s) \\
 u(s) &= C(s) [r(s) - n(s) - y(s)] \\
 e(s) &= r(s) - y(s) \quad (\text{l'erreur de suivi})
 \end{aligned}$$

On peut réécrire les équations précédentes pour avoir :

$$\begin{aligned}
 y &= [1 + PC]^{-1} d + [1 + PC]^{-1} PC r - [1 + PC]^{-1} PC n \\
 e &= -[1 + PC]^{-1} d + [1 + PC]^{-1} r + [1 + PC]^{-1} PC n
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dans ces équations, on introduit deux fonctions de transfert :

- $S = [1 + PC]^{-1}$ appelée : “ fonction de sensibilité ”
- $T = [1 + PC]^{-1} PC$ appelée : “ fonction de sensibilité complémentaire ”

On remarque bien, que les fonctions de sensibilité S et T sont des outils mathématiques qui nous permettent de connaître le comportement d'un système de contrôle.

En effet, ces deux fonctions de sensibilité S et T caractérisent le fonctionnement du système bouclé. Si on prend en considération les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 y &= Sd + Tr - Tn \\
 e &= -Sd + Sr + Tn
 \end{aligned}$$

L'interprétation des rôles de S et T devient plus simple, et on dira alors que :

• S représente :

- l'influence des perturbations sur la sortie et sur l'erreur.
- la fonction de transfert entre la référence et l'erreur.

• T représente :

- l'influence des bruits de mesure sur la sortie et sur l'erreur.
- la fonction de transfert entre la référence et la sortie.

✕ Objectifs de synthèse :

Compte tenu de l'interprétation que nous avons donné des fonctions de transfert S et T , il est clair que lorsqu'on effectue la synthèse du correcteur C , on doit chercher à :

- rendre S la plus faible (petite) possible, afin de minimiser l'influence des perturbations d et d'assurer un bon suivi de la référence.
- rendre T la plus faible (petite) possible, afin de minimiser l'influence des bruits de mesure.

Mais comme nous avons $S + T = 1$, il est clair que ces deux objectifs sont contradictoires. Nous devons donc, trouver un compromis.

Ce compromis sera satisfait, si la plage de fréquences dans laquelle varient r et d est disjointe de celle dans laquelle varie n . Dans ce cas $S(j\omega)$ devrait être maintenue faible sur la bande de fréquences $[0, \omega_0]$ pour fournir un suivi précis des signaux basses fréquences et $T(j\omega)$ devrait être maintenue faible sur la bande de fréquence $[\omega_1, \omega_2]$ pour l'atténuation des bruits.

D'autre part le signal de commande u est donné par l'équation suivante :

$$u = \frac{T}{P}r + \frac{T}{P}n - \frac{T}{P}d$$

Du théorème de Parseval, on a :

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(j\omega)|^2 d\omega$$

ainsi, on remarque que l'énergie du signal de commande peut être maintenue petite en gardant l'amplitude de $T(j\omega)$ aussi faible que possible sur les bandes de fréquences de r , d et n . Il est clair que ceci contredit le besoin de rendre $S(j\omega)$ faible sur la bande de fréquences $[0, \omega_0]$. Ainsi pour un bon suivi, $T(j\omega)$ doit nécessairement être large sur $[0, \omega_0]$, mais elle

- La norme-2 (l_2) :

appelée aussi norme euclidienne. Elle est égale à :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right]^{1/2}$$

- La norme-p (l_p) :

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p}$$

- La norme- ∞ (l_∞) :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

0.5.2 Les normes des signaux

Définition d'une norme :

On considère un signal $u(t)$ qui s'applique de $(-\infty, +\infty)$ à \mathfrak{R} . Il est supposé être continu par morceau. $u(t) = 0$ pour $t < 0$.

Il existe différentes normes pour de tels signaux. mais il faut d'abord mentionner qu'une norme doit vérifier les propriétés suivantes :

- i / $\|u\| \geq 0$
- ii / $\|u\| = 0 \iff u(t) = 0 \quad \forall t$
- iii / $\|a u\| = |a| \|u\| \quad \forall a \in \mathfrak{R}$
- iv / $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)

Exemples de normes :

- La norme-1 :

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt$$

- La norme-2 :

$$\|u\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt \right]^{1/2}$$

- La norme-p :

$$\|u\|_p = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

Exemple 0.1 Supposons que $u(t)$ soit un courant passant à travers une résistance de 1Ω . La puissance instantanée est égale alors à $u^2(t)$, l'énergie totale est égale à l'intégrale de celle-ci, à savoir $\|u\|_2^2$.

Donc, on peut généraliser cette interprétation et dire que :

“ La puissance instantanée d'un signal $u(t)$ est définie par $u^2(t)$ et que son énergie est définie par le carré de sa norme-2 ($\|u\|_2^2$) ”.

- La norme- ∞ :

La norme- ∞ d'un signal est définie comme étant la plus petite borne supérieure de sa valeur absolue.

$$\|u\|_\infty = \sup_t |u(t)|$$

$$\|(1 - e^{-t}) e(t)\|_\infty = 1 \quad (e(t) : \text{échelon unité})$$

Signaux à puissance moyenne finie PMF :

- La puissance moyenne de $u(t)$ est la moyenne temporelle de sa puissance instantanée :

$$P_{moy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u^2(t) dt$$

Si cette limite existe, le signal $u(t)$ sera appelé “ signal à puissance moyenne finie ”.

- La racine carrée de la puissance moyenne sera notée $P(u)$, ce qui donne :

$$P(u) = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Notons qu'un signal non nul, peut avoir une puissance moyenne nulle, par conséquent, $P(u)$ n'est pas une norme, bien qu'elle puisse vérifier les propriétés i/, iii/ et iv/.

Propriétés :

Le fait qu'une norme soit finie n'implique pas nécessairement que les autres soient finies. En effet, nous avons les propriétés suivantes :

- 1- Si $\|u\|_2 < \infty$, \Rightarrow $\begin{cases} u \text{ est un signal à puissance moyenne finie} \\ \text{avec } P(u) = 0 \end{cases}$
- 2- Si $\begin{cases} u \text{ est un signal à puissance moyenne finie} \\ \text{et } \|u\|_\infty < \infty \end{cases} \Rightarrow P(u) \leq \|u\|_\infty$
- 3- Si $\begin{cases} \|u\|_1 < \infty \\ \text{et } \|u\|_\infty < \infty \end{cases} \Rightarrow \|u\|_2 \leq [\|u\|_\infty \|u\|_1]^{1/2} \text{ et donc } \|u\|_2 < \infty$

0.5.3 Normes de systèmes

Soit un système linéaire, invariant, causal et de dimension finie, représenté par la fonction de transfert $G(s)$; pour laquelle nous allons introduire les deux normes suivantes :

- La norme-2 :

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$$

Si G est stable, alors par le théorème de Parseval, on a :

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

- La norme- ∞ :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

La norme- ∞ vérifie l'importante propriété de sous-multiplicité

$$\|GH\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|H\|_\infty$$



✧ L'interprétation graphique :

- Dans le plan complexe la norme- ∞ de G ($\|G\|_\infty$) est égale à la distance entre l'origine et le point le plus éloigné sur le tracé de Nyquist de G .

- Elle apparaît aussi comme la valeur du pic sur le tracé d'amplitude de Bode.

Il y a certains cas particuliers dans lesquels on a la certitude que les normes sont finies ; ils se résument dans le lemme suivant :

Lemme 0.1

- $\|G\|_2$ est finie ssi $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ est strictement propre et} \\ G \text{ n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire (Re } s \neq 0) \end{array} \right.$
- $\|G\|_\infty$ est finie ssi $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ est propre et} \\ G \text{ n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire (Re } s \neq 0) \end{array} \right.$

0.5.4 Relation Entrée/Sortie via les normes

Dans cette section, on va aborder une question très intéressante qui est la suivante :

► Si on connaît la grandeur de l'entrée, quelle serait la grandeur que va prendre la sortie ?

Considérons un système linéaire avec une entrée u , une sortie y et une fonction de transfert G , supposée stable et strictement propre.

Les résultats regroupant toutes les relations Entrée/Sortie sont résumés dans les deux tableaux suivants :

	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = \sin \omega t$
$\ y\ _2$	$\ G(j\omega)\ _2$	∞
$\ y\ _\infty$	$\ g(t)\ _\infty$	$ G(j\omega) $
$P(y)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} G(j\omega) $

Tableau 0.1 : Les normes et la puissance du signal de sortie pour deux types d'entrée.

Exemple 0.2 Supposons que $u(t) = \delta(t)$ une impulsion unité. Alors la norme-2 de $y(t)$ est égale à la norme-2 de $g(t)$ (la réponse impulsionnelle) qui par le théorème de Parseval, est égale à la norme-2 de $G(j\omega)$.

$$\|y\|_2 = \|g\|_2 = \|G\|_2$$

Le plus souvent, les signaux d'entrée, surtout les signaux perturbateurs ne sont pas connus à priori ; mais à la rigueur, on pourrait connaître juste leurs normes. Pour de telles situations, le tableau 0.2 ci-dessous nous permet de calculer la norme ou la puissance de la sortie connaissant le norme ou la puissance de l'entrée.

	$\ u\ _2$	$\ u\ _\infty$	$P(u)$
$\ y\ _2$	$\ G\ _\infty$	∞	∞
$\ y\ _\infty$	$\ G\ _2$	$\ g(t)\ _1$	∞
$P(y)$	0	$\leq \ G\ _\infty$	$\ G\ _\infty$

Tableau 0.2 : Les gains de systèmes.

La valeur ∞ dans certaines cases est valable tant que $G \neq 0$, c'est-à-dire tant qu'il y a des fréquences ω pour lesquelles $G(j\omega) \neq 0$.

Exemple 0.3 Soit un système avec une fonction de transfert $\frac{1}{10s+1}$ et qui a une entrée de perturbation $d(t)$ connue pour avoir une borne d'énergie $\|d\|_2 \leq 0.4$. Supposons qu'on veuille trouver la meilleure estimation de la norme- ∞ de la sortie $y(t)$ ($\|y\|_\infty$).

Le tableau 0.2 montre que le gain norme-2/norme- ∞ est égale à la norme-2 de la fonction de transfert :

$$\frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_2} = \|G\|_2$$

et comme :

$$\|G\|_2 = \frac{1}{\sqrt{20}} \quad \Rightarrow \quad \|y\|_\infty \leq \frac{0.4}{\sqrt{20}}$$

Remarque 0.3 La norme- ∞ de G (et $g(t)$) apparait dans plusieurs cases des tableaux. Par conséquent on voit que cette norme ($\|\cdot\|_\infty$) est une importante mesure pour les performances des systèmes.

0.6 Incertitudes et erreurs de modèle [14], [38]

Le calcul de la commande d'un processus physique passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle mathématique (appelé aussi modèle nominal) qui aussi parfait soit-il, sera tou-

jours, qu'une approximation de la réalité. Autrement dit le comportement de ce modèle sera différent de celui du processus physique réel. Chose qui est due au fait que la modélisation des systèmes physiques implique constamment un compromis entre la simplicité du modèle et sa précision à suivre le comportement du système physique.

En effet, si le modèle nominal est obtenu par des méthodes théoriques ou d'identification, il est nécessaire de négliger intentionnellement les parties compliquées du système et cela afin d'obtenir un modèle convenable pour les manipulations mathématiques. Il y a donc des différences entre le système physique réel et le modèle nominal. Ces différences sont généralement appelées "erreurs de modèle" ou "incertitudes du processus".

Les erreurs du modèle proviennent de différentes sources. Elle peuvent être dues aux effets de linéarisation ou au fait de considérer le modèle avec seulement les modes les plus dominants, etc...

D'autres erreurs de modèle proviennent de la détermination imprécise des paramètres du modèle. Des erreurs courantes lorsque le modèle nominal est déterminé par les méthodes "d'identification du système" dans lesquelles les paramètres sont estimés à partir des informations Entrée/Sortie.

Les phénomènes qui génèrent la variabilité du modèle physique idéal sont essentiellement de 2 types :

- Incertitudes non-structurées.
- Incertitudes structurées.

0.6.1 Incertitudes structurées

C'est une incertitude liée aux variations ou erreurs d'estimation sur certains paramètres du système. Autrement dit, c'est une incertitude qui affecte la connaissance de certains paramètres physiques généralement bien localisés tels que : les masses, les inerties, le centre de gravité, etc...

Les erreurs structurées sont connues par le fait qu'elles ne sont pas toujours faciles à exploiter.

0.6.2 Incertitudes non structurées

L'incertitude non structurée est une incertitude qui rassemble les dynamiques négligées dans le procédé telles que : le comportement haute fréquence, les non linéarités, l'idéalisation

des éléments de commande, etc...

Dans ce genre d'incertitudes, les erreurs de modèle sont représentées sous une forme globale, et ceci en attribuant aux amplitudes des dynamiques négligées une borne supérieure qui varie en fonction des fréquences.

Supposons par exemple, un système de fonction de transfert en boucle ouverte $L = G.P$, avec $G(j\omega)$ et $P(j\omega)$ les transmittances respectives du correcteur et du processus.

En ayant une réalisation soignée du correcteur $G(j\omega)$, les incertitudes $\frac{\Delta L}{L}$ sont identiques aux incertitudes relatives sur le processus P .

$$L = G.P \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L(j\omega)}{L(j\omega)} = \frac{\Delta P(j\omega)}{P(j\omega)}$$

Lorsqu'on atteint les hautes fréquences, les dynamiques négligées représentées par les incertitudes relatives $\frac{\Delta P}{P}$, deviennent prépondérantes, car après qu'elles étaient faibles (10% à 20%) en basses fréquences, elles risquent de devenir très grandes (100% à 1000%) en hautes fréquences.

On évalue un majorant pour l'incertitude relative $\frac{\Delta P(s)}{P(s)}$ tel que :

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} = \frac{\tilde{P}(s) - P(s)}{P(s)} \leq \Delta(s) \quad (3)$$

avec :

$P(s)$: La fonction de transfert du processus nominal. (l'unique)

$\tilde{P}(s)$: La fonction de transfert du processus perturbé. (une multitude)

et $\Delta(s)$ une fonction de transfert variable satisfaisant $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.

L'inégalité (3) peut nous donner à la limite :

$$\frac{\tilde{P}(s) - P(s)}{P(s)} = \Delta(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{P}(s) = P(s) + \Delta(s)P(s)$$

On voit bien qu'on ne dispose au mieux que d'une majoration de $|\Delta(s)P(s)|$. Cette majoration, engendre un disque d'incertitude autour de chaque point du lieu de Nyquist de

des éléments de commande, etc...

Dans ce genre d'incertitudes, les erreurs de modèle sont représentées sous une forme globale, et ceci en attribuant aux amplitudes des dynamiques négligées une borne supérieure qui varie en fonction des fréquences.

Supposons par exemple, un système de fonction de transfert en boucle ouverte $L = G.P$, avec $G(j\omega)$ et $P(j\omega)$ les transmittances respectives du correcteur et du processus.

En ayant une réalisation soignée du correcteur $G(j\omega)$, les incertitudes $\frac{\Delta L}{L}$ sont identiques aux incertitudes relatives sur le processus P .

$$L = G.P \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L(j\omega)}{L(j\omega)} = \frac{\Delta P(j\omega)}{P(j\omega)}$$

Lorsqu'on atteint les hautes fréquences, les dynamiques négligées représentées par les incertitudes relatives $\frac{\Delta P}{P}$, deviennent prépondérantes, car après qu'elles étaient faibles (10% à 20%) en basses fréquences, elles risquent de devenir très grandes (100% à 1000%) en hautes fréquences.

On évalue un majorant pour l'incertitude relative $\frac{\Delta P(s)}{P(s)}$ tel que :

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} = \frac{\tilde{P}(s) - P(s)}{P(s)} \leq \Delta(s) \quad (3)$$

avec :

$P(s)$: La fonction de transfert du processus nominal. (l'unique)

$\tilde{P}(s)$: La fonction de transfert du processus perturbé. (une multitude)

et $\Delta(s)$ une fonction de transfert variable satisfaisant $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.

L'inégalité (3) peut nous donner à la limite :

$$\frac{\tilde{P}(s) - P(s)}{P(s)} = \Delta(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{P}(s) = P(s) + \Delta(s)P(s)$$

On voit bien qu'on ne dispose au mieux que d'une majoration de $|\Delta(s)P(s)|$. Cette majoration, engendre un disque d'incertitude autour de chaque point du lieu de Nyquist de

$P(j\omega)$. (voir figure 0.4)

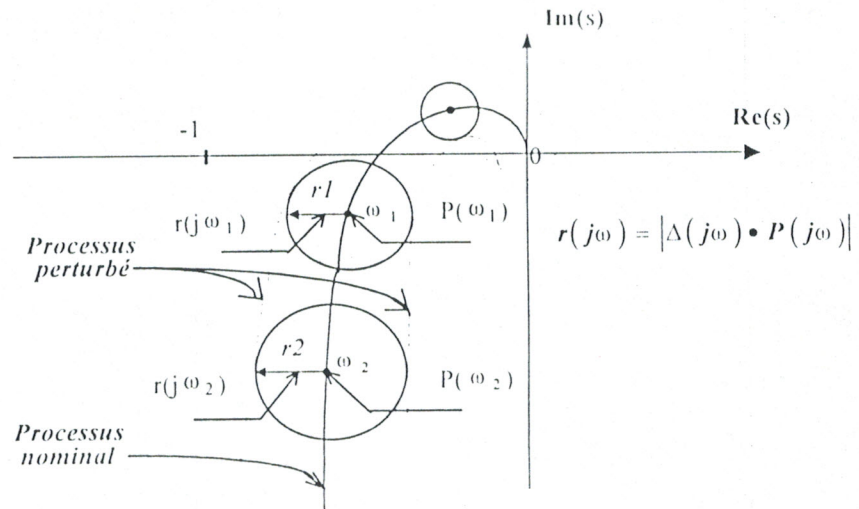


Fig.0.4 : Modification du lieu de Nyquist de $P(j\omega)$ par le modèle d'incertitude.

Le rayon du disque d'incertitude est déterminé par $\Delta(j\omega) P(j\omega)$.

Comme on l'a déjà dit, P représente le processus nominal. On ajoute encore que P est unique, alors qu'il y a une multitude \tilde{P} . Cette multitude de processus \tilde{P} est engendrée par la succession des disques P_i de rayon $r(j\omega_i) = |\Delta(j\omega_i) P(j\omega_i)|$ et ayant pour centres les points $P(j\omega_i)$ du lieu de Nyquist de $P(j\omega)$.

- On dénote par \mathcal{P} l'ensemble des processus incertains \tilde{P} , c'est-à-dire, que \mathcal{P} contient la totalité des processus perturbés \tilde{P} qui s'écartent du processus nominal P de $|\Delta(j\omega) P(j\omega)|$.

Selon la formulation de $\tilde{P}(s)$ en fonction de $P(s)$ et $\Delta(s)$, on peut avoir plusieurs types d'incertitudes non-structurées :

- Incertitude additive : $\tilde{P}(s) = P(s) + \Delta_a(s)$
- Incertitude multiplicative : $\tilde{P}(s) = P(s) [1 + \Delta_m(s)]$

D'autres représentations d'erreurs de modèle sont possibles [20], suivant les besoins et les spécifications de chacune d'elles :

- Incertitude multiplicative inverse,
- Incertitude factorisée, etc...

Remarque 0.4 La représentation qu'on adoptera reflétera à la fois notre connaissance des phénomènes physiques qui causent ces erreurs et notre capacité à représenter ceux-ci sous une forme simple et facile à manipuler sur le plan mathématique.

0.7 L'extension aux systèmes multivariables

En réalité, la plupart des systèmes physiques sont des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties. On les appelle alors systèmes MIMO (multiinput-multioutput) ou systèmes multivariables.

Pour l'étude de tels systèmes, différentes techniques sont apparues, la plupart basées sur la représentation d'état et sur l'utilisation d'un formalisme matriciel très intéressant aussi bien pour sa puissance que pour sa généralité.

La plus commune représentation des systèmes multivariables est celle du modèle basé sur les variables d'état. Ce modèle est une description du système dans l'espace d'état ; il se présente sous la forme suivante :

$$G : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Dx \end{cases}$$

où

$x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état (n étant la dimension du système).

$u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées de commande (m : le nombre d'entrées).

$y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties (p : le nombre de sorties).

- Pour les systèmes continus, nous avons : $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ avec $\delta(x) = \dot{x}(t)$.
- Pour les systèmes discrets, nous avons : $x(k)$, $u(k)$, $y(k)$ avec $\delta(x) = x(k+1)$.

L'analyse d'un système représenté dans l'espace d'état revient à analyser les propriétés des matrices A , B , C , et D de tailles respectives : $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(p \times n)$, $(p \times m)$.

Dans le cas des systèmes multivariables nous allons voir la notion des normes qui est toujours aussi importantes que celle des systèmes SISO.

0.7.1 Les normes H_2 et H_∞ [18]

Pour une matrice de transfert stable $G(s) \in \mathfrak{C}(m \times n)$, associée à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

tel que :

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1} B$$

On peut définir la norme H_2 et la norme H_∞ en termes de ses valeurs singulières $\sigma_i(j\omega)$ [20], [21].

► La norme H_2 :

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} [G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega \right]^{1/2}$$

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q (\sigma_i(j\omega))^2 d\omega \right]^{1/2} \quad \text{avec } q = \min \{n, m\}$$

Cette norme surgit lorsque les signaux exogènes sont soit fixés ou à spectre de puissance finie.

► La norme H_∞ :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{\|u\|_2=1} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

avec $y \in \mathfrak{R}^p$ le vecteur de sortie et $u \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur d'entrée.

Le calcul de la norme- H_∞ est plus délicat. On peut tracer la fonction $\omega \rightarrow \bar{\sigma}(G(j\omega))$ et déterminer la valeur maximale. Cette méthode présente cependant le risque de manquer un pic étroit.

En plus des définitions qu'on vient de donner, les normes H_2 et H_∞ peuvent se calculer suivant une autre manière plus rigoureuse, à savoir :

► Le calcul de la norme H_2 :

Soit A , B et C les matrices du système dans l'espace d'état.

Si $L_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$, représente le Grammien de contrôlabilité de (A, B)

et $L_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$, représente le Grammien d'observabilité de (C, A)

et ils sont les solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$A L_c + L_c A' + B B' = 0$$

$$A' L_o + L_o A + C' C = 0$$

Alors :

$$\|G\|_2^2 = \text{trace}[C L_c C'] = \text{trace}[B' L_o B]$$

► Le calcul de la norme H_∞ :

La norme H_∞ est plus délicate à calculer, en fait elle peut être seulement approximée numériquement.

Considérons respectivement la matrice Hamiltonienne et son équation de Riccati associée [8] :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & \frac{B B'}{\gamma} \\ \frac{-C' C}{\gamma} & -A' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A' X + X A + \gamma^{-1} X B B' X + \gamma^{-1} C' C = 0$$

On a, alors :

$\|G\|_\infty < \gamma$ si et seulement si H_γ n'a pas de valeurs propres imaginaires.

ou d'une manière équivalente :

$\|G\|_\infty < \gamma$ si et seulement si $X > 0$ (X définie positive).

La procédure de calcul se résume dans l'algorithme suivant :

✠ *Algorithme de bisection* :

1. Choisir γ
2. Trouver les valeurs propres de H_γ
3. Si la matrice Hamiltonienne n'a pas de valeurs propres imaginaires, diminuer γ et revenir à l'étape 2. Sinon augmenter la valeur de γ .
4. Arrêter lorsque $\gamma = \gamma_{\min}$. Alors : $\|G\|_\infty = \gamma_{\min}$.

Chapitre 1

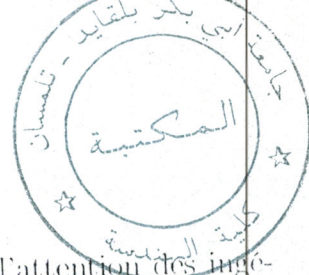
ROBUSTESSE et OPTIMALITÉ

1.1 Introduction

De nos jours, la théorie des systèmes s'intéresse plus particulièrement à l'optimisation du comportement. Un tel problème pourrait être la maximisation de la portée d'un missile ou le profit d'une entreprise, la minimisation de l'erreur d'estimation de la position d'une cible, de l'énergie ou encore le coût exigé pour atteindre un but final. La recherche d'une commande permettant d'atteindre de tels objectifs tout en minimisant, ou bien en maximisant, un critère donné à priori, constitue le problème fondamental dans la théorie de l'optimisation. Cette commande est qualifiée par le nom de *Commande Optimale*. Ceci d'une part.

D'autre part, en théorie du contrôle, on a toujours recours à l'utilisation d'un modèle. Pourquoi? parce que c'est le seul moyen mathématique disponible pour l'étude de notre système physique. Connaissant les différentes méthodes de modélisation, il ne serait pas étonnant de dire que le modèle obtenu reste toujours une approximation de la réalité et qu'il doit être cependant, donné avec des incertitudes. Ainsi, du besoin d'élaborer une loi de commande en présence d'incertitudes, que s'est introduite l'idée de *Robustesse*.

C'est alors, de ces raisons que nous avons choisi de consacrer ce chapitre aux notions de robustesse et d'optimalité. Nous allons donc, commencer par les définir, puis à présenter un état-de-l'art à leur sujet.



1.2 La commande optimale

Les problèmes de commande optimale ont toujours beaucoup attiré l'attention des ingénieurs en contrôle. Surtout avec l'introduction de l'approche des variables d'état qui a permis la généralisation des synthèses au cas multivariables et qui a encore contribué au développement des idées des synthèses optimales.

Un système à commande optimale est un système dont la synthèse optimise - i.e. minimise ou maximise selon la situation en mains - la valeur de la fonction cout, choisie comme indicateur de performances.

Un système à commande optimale diffère d'un système idéal. Le premier (l'optimal), c'est le meilleur atteint en présence de contraintes physiques, tandis que le deuxième (l'idéal) pourrait bien être un but inaccessible.

En synthétisant un système de contrôle optimal ou un système à régulateur optimal, nous avons besoin de déterminer une commande sujette à des contraintes afin de minimiser certaines mesures de déviations par rapport au comportement idéal. Cette mesure est souvent fournie par le choix d'un bon "Critère de Performance".

✧ Critère de Performance

Le critère de performance est une fonction dont la valeur est considérée comme une indication de la manière avec laquelle les performances actuelles du système arrivent à bien suivre les performances désirées.

Le choix d'un critère de performance approprié est très important. Il doit être formulé en se basant sur les exigences que le système doit satisfaire et prendre en compte dans la détermination de la nature du système résultant.

Souvent, les exigences de synthèse incluent non seulement les spécifications de performances, mais aussi, la garantie d'une réalisabilité physique et les restrictions sur la forme de la commande à utiliser.

En résumant, le problème de la synthèse d'une commande optimale se présente comme suit :

✧ Formulation des problèmes d'optimisation

Le problème d'optimisation d'un système de commande peut être formulé si les informations suivantes sont disponibles :

1. les équations du système,
2. la classe des vecteurs de commande admissibles,

3. les contraintes sur le problème,
4. le critère de performances,
5. les paramètres du système.

La solution au problème de contrôle optimal est de déterminer le vecteur de commande optimal $u(t)$ appartenant à une classe de vecteurs de commande admissibles.

1.3 La robustesse

Le calcul d'une loi de commande d'un processus physique passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle qui, aussi parfait soit-il, ne sera jamais qu'une approximation de la réalité. Or, la commande recherchée doit bien évidemment assurer des performances correctes telles que : stabilité, précision, rapidité, réjections des bruits, etc..., pour le modèle (processus nominal) mais surtout pour le processus réel qu'il représente. Car, étant conscient de l'existence d'une différence entre le modèle mathématique et le processus réel ; on se pose la question si :

- La loi de commande élaborée pour le modèle est-elle valable pour le processus réel ?

Par conséquent, on voit bien qu'il est très important que la commande calculée pour le modèle mathématique convienne aussi au processus réel ; et c'est donc ainsi que s'introduit naturellement l'idée de "*Robustesse*".

Le problème de la robustesse correspond à une préoccupation d'ordre pratique. Il s'agit de prendre en compte au moment de la conception de la commande, les incertitudes de modélisation, afin d'assurer un comportement satisfaisant au processus réel (système physique) commandé.

Les causes d'incertitudes dans la modélisation d'un processus réel sont de natures variées :

- *Incertitudes intrinsèques* liées à l'incapacité d'une connaissance totale de tous les phénomènes mis en jeu, telles que la méconnaissance ou les variations des paramètres du processus.
- *Incertitudes volontaires* découlant d'approximations, telles que les effets de linéarisation autour d'un point de fonctionnement et les effets de réduction d'ordre. Des opérations visant à adapter le modèle de représentation au but final recherché.

D'autre part, on sait que l'objectif de la théorie de la commande a toujours été d'assurer au modèle nominal, représentant le système physique :

- la stabilité
- et les performances nominales requises pour le bon fonctionnement du système.

D'autre part, nous avons l'importante notion de robustesse qu'il ne faut pas négliger. Ce qui fait, on est amené à dire selon une nouvelle version, que l'objectif de la commande c'est d'assurer :

- la stabilité robuste
- et les performances robustes.

Et donc avoir : “*une Commande Robuste*”.

1.4 Etat de l'art

Au bon milieu du 19^{ième} siècle, la théorie du contrôle a commencé à voir le jour quand Maxwell publia, en 1868, son article intitulé “ Sur les régulateurs ”.

L'article de Maxwell fut motivé par le besoin de comprendre et de corriger le comportement instable (oscillatoire) observé sur un grand nombre de machines à vapeur utilisées à cette époque pour les locomotives. Il a montré que le comportement d'un système dynamique, peut être approximé au voisinage d'un point d'équilibre par une équation différentielle linéaire. Par conséquent, la stabilité ou l'instabilité d'un tel système pourrait être déterminée à partir de la position des racines du polynôme caractéristique correspondant à cette équation différentielle linéaire.

A cette époque, la vitesse des locomotives était contrôlée par des gouverneurs (dit aussi régulateurs) centrifuges. Ainsi, le problème fut de déterminer les paramètres de conception du correcteur (la masse et l'inertie du ballon d'air, la tension du ressort, etc...) pour pouvoir assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Maxwell posa alors ce problème d'une manière générale en demandant de :

“ Déterminer les contraintes sur les coefficients d'un polynôme qui garantissent que les racines de ce polynôme seraient limitées au demi-plan gauche : le domaine de stabilité des systèmes continus ”

En réalité, ce problème était déjà résolu pour la première fois, en 1856, par le mathématicien français C.Hermite.

En 1877, le physicien anglais E.J.Routh, en utilisant la théorie des indices de Cauchy et celle des suites de Sturm, a établi son fameux algorithme pour calculer le nombre K des racines qui se trouvent dans la moitié droite du plan complexe, $\text{Re}(s) \geq 0$. Cet algorithme donna ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité dans le cas particulier : $K = 0$.

En 1895, A.Hurwitz, en s'inspirant des travaux d'Hermitte, a fourni un autre critère pour la stabilité d'un polynôme. Ce nouvel ensemble de conditions nécessaires et suffisantes était sous forme de n inégalités déterminantes, où n est le degré du polynôme à tester.

Des résultats équivalents ont été découverts au début du 20^{ème} siècle par I.Shur (en 1918) et A.Cohn (en 1922) pour le cas discret où le domaine de stabilité est l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe.

L'un des principaux soucis des ingénieurs en contrôle a toujours été l'analyse et la synthèse (conception ou étude) des systèmes qui sont sujets à de divers types d'incertitudes et de perturbations.

Des perturbations peuvent surgir à l'intérieur du système, dans ses paramètres physiques. Ce dernier type de perturbations, appelées perturbations paramétriques, peut être le résultat de variations réelles dans les paramètres physiques du système dues au vieillissement ou au changement des conditions de fonctionnement. Par exemple, dans la conception des avions, les coefficients des modèles dépendent considérablement de l'altitude du vol. Il se peut que ce soit une conséquence des incertitudes ou des erreurs dans le modèle lui-même (exemple : le poids des passagers et le chargement des bagages).

Du point de vue synthèse, ce type de problème de variation de paramètres est rencontré aussi lorsque la structure du correcteur est fixée mais ses paramètres sont ajustables. Le choix de la structure du correcteur est souvent dicté par des contraintes physiques, d'ingénierie, de matériel et d'autres telles que le coût, la simplicité, etc... Dans une situation pareil, le concepteur reste limité à un nombre restreint de correcteurs ou de paramètres de synthèse à ajuster afin d'avoir un comportement satisfaisant en boucle fermée. Par exemple, les correcteurs PID ont seulement trois paramètres à ajuster.

Le polynôme caractéristique d'un système de contrôle en boucle fermée, dépend des paramètres incertains que peut contenir ce système. Il est alors nécessaire dans ce contexte, d'analyser la stabilité de toute une famille de polynômes caractéristiques.

Cependant, les conditions de Routh-Hurwitz si faciles à vérifier pour un seul polynôme sont presque inutiles pour les familles de polynômes, parce qu'elles mènent à des conditions extrêmement non-linéaires avec les paramètres inconnus.

Ainsi, malgré le besoin fondamental d'agir sur les systèmes affectés par des perturbations paramétriques, les ingénieurs étaient confrontés, dès le début, à des obstacles majeurs sous forme de caractère non-linéaire des conditions de Routh-Hurwitz ; qui en plus étaient le seul

outil disponible pour résoudre ce genre de problème !

L'une des premières et des plus importantes contributions à l'analyse de la stabilité avec perturbations paramétriques était faite par Nyquist en 1932 dans son article classique sur la stabilité des amplificateurs par contre-réaction (feedback). Ce problème découlait directement de son travail sur les problèmes de téléphonie à longue distance. Peu après, il a été suivi par le travail de Bode (en 1945) qui a conduit en fin de compte, à l'introduction des notions de marges de gain et de phase pour les systèmes à contre-réaction. A partir de cette époque, le critère de Nyquist et les concepts de marges de gain et de phase forment la base de combien de méthodologies de conception de systèmes de commande classique largement utilisés par les ingénieurs en contrôle.

La période entre 1960 et 1975, fut une période majeure pour l'évolution de la théorie des systèmes de commande. Elle fut marquée par l'introduction de l'approche des variables d'état et les idées du contrôle optimal dans le domaine temporel. Ces approches sont survenues suite à l'apparition d'importants problèmes technologiques rencontrés à cette époque, tels que : le lancement, le suivi et le guidage des véhicules spatiaux.

De ce fait, de nombreux efforts ont été fournis et des développements rapides, aussi bien dans la théorie que dans la pratique, ont pris place. La théorie du contrôle optimal fut alors développée sous l'influence de plusieurs grands chercheurs, tels que :

- R.Bellman (en 1957) qui a appliqué la programmation dynamique au contrôle optimal des systèmes discrets en démontrant que le moyen naturel de résoudre les problèmes de contrôle optimal est d'inverser le temps. Ces procédures donnaient des schémas de contre-réaction avec des boucles fermées généralement non-linéaires.
- L.S.Pontryagin (en 1958) qui a développé son principe du maximum pour la résolution des problèmes du contrôle optimal en utilisant le calcul de variations développé par L.Euler (1707-1783). Pontryagin a aussi résolu le problème du temps-minimal en établissant les lois de contrôle Bang-Bang comme contrôle optimal (en 1962).
- R.Kalman et ses collègues aux Etats Unis. En 1960 trois articles majeurs ont été publiés : l'un d'eux, celui de Kalman et Bertram en 1960 a donné l'essentiel des travaux de Lyapunov dans le contrôle des systèmes non-linéaires dans le domaine temporel. Le deuxième article est celui de Kalman dans lequel il a introduit un nombre de concepts clés des variables d'état dont la contrôlabilité, l'observabilité, le régulateur linéaire quadratique optimal (LQR) et le retour d'état. Le troisième article, de Kalman toujours, a

traité le filtrage optimal et l'estimation d'état en fournissant les équations de synthèses des filtres de Kalman discrets. Et pour le filtre de Kalman continu, c'est en 1961 qu'il a été développé par Kalman et Bucy.

Il est important de souligner que jusque là, le point d'intérêt était essentiellement l'optimalité du système nominal. Tandis que le problème d'incertitudes sur le processus est resté pour longtemps dans l'ignorance, à l'exception de deux articles : celui de Zames (en 1963), dans lequel il a introduit le concept du principe du "petit gain". De nos jours, ce concept joue un rôle clef dans les critères de stabilité robuste. Et Kalman (en 1964) a montré que pour les systèmes SISO, les lois de commande optimales par retour d'état (le LQR) avaient des propriétés de robustesse très fortement garanties, à savoir une marge de gain infinie et une marge de phase de 60° ; qui sont en plus indépendantes du choix du critère quadratique.

Dans les implémentations, les variables d'état, sont généralement non disponibles pour la mesure directe ; elles pourraient être alors substituées par leurs " estimées " générées par un système appelé, observateur ou filtre de Kalman. Et donc, pour fermer la boucle de contre-réaction " la commande par retour d'état optimale " serait remplacée par " la commande par retour d'état observé sous-optimale ". Après, il a été facilement montré que le système en boucle fermée résultant a des racines caractéristiques qui sont précisément les valeurs propres du correcteur optimal et celles de l'observateur.

Ceci signifie que les valeurs propres optimales étaient préservées lors de l'implémentation du " retour de sortie " et suggère que la synthèse d'un estimateur d'état pourrait être découplée de celle du correcteur optimal. Ceux-ci et certains faits apparentés sont connus par " le principe de séparation " .

En invoquant ce principe de séparation, les scientifiques en contrôle étaient généralement ramenés à croire que les extraordinaires propriétés de robustesse via la synthèse par retour d'état LQR étaient préservées quand la commande est implémentée avec retour de sortie. En 1968, Pearson proposa un schéma (plan) dans lequel le compensateur par retour de sortie pourrait être synthétisé pour optimiser les dynamiques de la boucle fermée dans le sens LQR, en incluant, dès le début, le nombre d'intégrateurs requis dans le problème du contrôle optimal. La philosophie derrière cette approche, c'est que le système implémenté va être "optimal" aussi et non "sous-optimal" comme dans le cas précédant du retour d'état observé.

A la fin des années 60 au début des années 70, l'intérêt des théoriciens en contrôle portait sur le problème de servomécanismes. Cependant, les problèmes de suivi, de rejet de pertur-

bations avec des signaux permanents tels que : les échelons, les rampes et les sinusoïdes ne pouvaient pas être résolus d'une manière évidente par les méthodes de contrôle optimal qui existaient déjà. Parce qu'à moins que des signaux convenables soient inclus dans le critère de performance, la fonction coût était souvent non-bornée.

C'est en 1970-1972 que S.P. Bhattacharyya et Pearson ont donné une solution au problème de servomécanismes multivariables. La technique de résolution était basée sur le problème de régulation de sortie, formulé et résolu par Bhattacharyya, Pearson et Wonham (en 1972). Elle a été établie en utilisant l'élégante théorie géométrique des systèmes linéaires (en 1989) développée à cette époque par Wonham. Chose qui a clarifié les conditions sous lesquelles le problème de servo (ou suivi) pourrait être résolu, en l'associant à la stabilisation d'un système à erreur convenablement définie.

Le problème de servomécanisme robuste, basé sur la contre-réaction de l'erreur, était traité par Davison en 1976. Plutard, B.A. Francis et W.M. Wonham ont développé " le principe du modèle interne" qui a établi la nécessité d'utiliser des correcteurs pilotés par l'erreur et qui incluent les modèles des signaux exogènes.

Dans les travaux de Ferrera et Bhattacharyya (en 1976), le problème de servomécanisme multivariable était interprété comme un problème dans lequel les pôles des signaux exogènes doivent être placés comme des zéros dans la fonction de transfert de l'erreur. La notion des "zéros bloquants" était introduite dans leur article en 1977 où il a été montré que les performances robustes du servo, équivalentes à un placement robuste des zéros bloquants de la fonction de transfert de l'erreur, pourraient avoir lieu en employant des correcteurs qui pilotent l'erreur et qui contiennent comme pôles, dans chaque canal d'erreur, les pôles des générateurs des signaux exogènes.

Il n'a été réalisé qu'à la fin des années 70, que le principe de séparation du retour d'état, et la théorie du control LQR s'appliquaient réellement qu'au système nominal et qu'elles n'étaient pas valables pour les systèmes perturbés.

Ce fait, a été dramatiquement exposé en 1978 dans un article de J.C. Doyle qui, par un contre exemple à montré que toutes les garanties sur les propriétés de robustesse (les marges de gain et de phase) de la synthèse LQR disparaissent dans une implémentation par retour de sortie. Les observations de Doyle, ont réellement porté à l'attention de la communauté de recherche, l'importance de concevoir des correcteurs par feedback qui garantissent les propriétés de robustesse désirées. Ainsi un intérêt renouvelé est apparu dans le problème d'incertitude

des processus. Il a été réalisé alors que l'approche basée sur l'espace d'état via le contrôle optimal LQR était inadéquate pour la stabilité robuste.

De plus, l'approche géométrique de Wonham, qui avait fait preuve de succès dans la résolution de plusieurs problèmes de synthèses de commande, s'est avérée inadéquate pour manipuler les questions de robustesse à cause du fait qu'elle supposait une connaissance exacte du processus.

A peu près, à la même période, des résultats significatifs ont été présentés sur l'analyse des systèmes multivariables dans le domaine fréquentiel. En particulier, le concept de la description de fractions de matrices premières des systèmes multivariables; introduit comme outils de synthèse en 1976 par Youla, Jabr et Bongiorno et en 1980 par Desoer, Liu, Murray et Sacks. Dans les travaux de Youla, Jabr et Bongiorno (en 1976) et ceux de Kucéra (en 1979), une paramétrisation de tous les correcteurs stabilisant était donnée. Celle-ci connue par le nom de paramétrisation YJBK, est arrivée à jouer un rôle fondamental dans la théorie de stabilisation robuste des systèmes multivariables.

Le critère de stabilité de Nyquist, a été généralisé aux systèmes multivariables aussi, grâce aux travaux de Rosenbrock (en 1970) et ceux de MacFarlane et postlethwaite (en 1977).

Ce confluent d'intérêt, a mené naturellement à la formulation du problème de commande robuste, dans le domaine fréquentiel. Plus précisément, les incertitudes et les perturbations dans un système avec $G(s)$ comme fonction de transfert, étaient modélisées par :

$$i / \quad G(s) \longrightarrow G(s) [I + \Delta G(s)] \text{ perturbation multiplicative}$$

$$ii / \quad G(s) \longrightarrow G(s) + \Delta G(s) \text{ perturbation additive}$$

$$\text{avec } \|\Delta G(s)\| < \infty.$$

où $\|\Delta G(s)\|$ dénote une norme appropriée dans l'espace des matrices de fonctions de transfert stables.

Ce type de perturbations dans le modèle du processus sera désigné comme perturbations non-structurées ou à norme bornée; Parce que les normes qui sont communément employées dans $i /$ et $ii /$ écartent complètement toute information sur la phase, à l'égard des perturbations. En plus, il n'y a pas de liens évidents entre les bornes sur ces perturbations ou les autres paramètres de $G(s)$ et les bornes sur la norme de cette fonction de transfert.

La solution du problème de stabilisation robuste, à savoir le problème de la détermination du correcteur pour un niveau prescrit de perturbations non-structurées, était donnée en 1984 par Kimura pour le cas des systèmes SISO. Quant au problème de stabilité robuste

multivariable, il a été résolu en 1986 grâce à Vidyasagar, Kimura et Glover.

Ces résultats, en fait, ont été un coproduit d'importantes lignes de recherches commencées déjà par Zames en 1981, concernant le problème de réjection de perturbations optimal. Ces lignes peuvent se résumer comme problèmes de synthèse d'un correcteur par feedback qui minimise l'effet du pire des cas dans une classe de perturbations. Sur la sortie du système, ce problème est équivalent mathématiquement à celui appelé : Problème de minimisation de la sensibilité ou au problème de la minimisation de la fonction de transfert de l'erreur. Notons que l'idée de synthétiser une commande par feedback de manière à réduire la sensibilité de la boucle fermée est une idée très classique qui remonte aux travaux de Bode (en 1945).

Dans son article, Zames (en 1981) a proposé l'idée de synthétiser des correcteurs qui ne font pas seulement réduire la sensibilité du système en boucle fermée, mais aussi réellement optimiser la sensibilité dans un sens approprié. L'idée cruciale était de considérer la fonction de sensibilité comme application entre les espaces des signaux à énergie bornée (norme H_2 bornée) et de minimiser sa norme d'opérateur induit. Ce qui suppose physiquement, que le signal perturbateur qui touche chaque système est précisément la plus mauvaise perturbation pour ce système.

La norme de l'opérateur induit pour l'opérateur de convolution entre les espaces des signaux à énergie finie est appelée aussi norme H_∞ dont le nom découle de la théorie des espaces de Hardy dans l'analyse fonctionnelle.

De cette manière, l'article fondamental de Zames a fait introduire pour la première fois l'approche H_∞ dans la synthèse des systèmes de commande. Et dans le même article, une solution au problème- H_∞ de la minimisation de la sensibilité a été donnée pour le cas où un système a un seul zéro dans le demi plan droit. Cet article a par conséquent mené à une multitude de résultats concernant la solution du problème H_∞ de la minimisation de la sensibilité optimale ou du problème H_∞ de réjection optimale de perturbations.

En 1984, Francis et Zames ont donné une solution pour le cas SISO ; quant au problème multivariable, il a été résolu par Doyle (en 1983), Chang et Pearson (en 1984) et Safonov et Verma (en 1985). Dans ses travaux Doyle a montré aussi (1982-1985) l'équivalence entre la performance robuste et la sensibilité dans les problèmes H_∞ .

En 1989, une solution - dans l'espace d'état - aux problèmes de réjection H_∞ de perturbations était donnée par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [18].

Suivant la même philosophie de synthèse d'optimisation de norme, Vidyasagar a proposé en

1986 dans un article le problème L_1 de réjection de perturbations optimal. Dans ce problème, les perturbations qui affectent le système ne sont plus des signaux à énergie bornée (L_2), mais des signaux à amplitude bornée (L_∞). Ce problème L_1 de rejet de perturbations optimal a été résolu par Dahleh et Pearson en 1987.

Pratiquement, tous les résultats de recherche de ces dernières années entraînent une association entre les techniques du domaine fréquentiel et celles du domaine temporel. Ces résultats comprennent :

- ▶ L'approche d'interpolation : traitée par exemple par Limbeer et Anderson en 1988.
- ▶ L'approche fréquentielle : établie par exemple, par Doyle en 1984, Francis en 1987, et Glover en 1984.
- ▶ L'approche polynomiale : établie par exemple par Kwakernaak en 1986.
- ▶ L'approche par factorisation J-spectrale : établie par Kimura en 1989.

Récemment, une attention considérable était portée aux méthodes purement temporelles, basées sur les équations algébriques de Riccati. Parmi les travaux investis dans cet axe de recherche, nous avons les travaux de : Peterson (1987), de Khargonekar, Peterson et Rotea (en 1988); de Doyle, Glover et Francis (1989) de Sampu, Mita et Nakamichi (1990), de Scherer (1992-1997), de Stoogovel (1992); de Stoogovel, Saberi et Chen (1994), de Sabri, chen et lin (1994), de chen, Guo et Tin (1996) et les travaux de Zhou, Doyle et Glover (1996).

Au long de toutes ces lignes de recherche, on remarque que l'intérêt des chercheurs en théorie de contrôle, porte toujours sur la commande Robuste et Optimale, d'où le besoin d'approfondir notre étude dans ce sens.

1.5 Conclusion

Vu la grande diversité des approches robustes et optimales et le nombre de travaux parus ces dernières années, il serait vain de vouloir être exhaustif dans un rappel de techniques d'analyse et de synthèses. On s'est contenté alors de définir la robustesse et la commande optimale et de donner un état-de-l'art dans ce sens.

Remarquez que les études déjà faites sur la stabilité robuste concernaient surtout l'incertitude du type non-structurée; il serait alors opportun d'étudier aussi l'analyse de la stabilité robuste en présence d'incertitude structurée (paramétrique). Un sujet qui va faire l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES À INCERTITUDES PARAMÉTRIQUES [6]

2.1 Introduction

L'analyse et la synthèse des systèmes de contrôle nécessitent toujours un modèle mathématique. Pour les systèmes linéaires invariants, il peut être donné :

- Dans le domaine temporel, par une représentation dans l'espace d'état, sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

- Ou dans le domaine fréquentiel, sous forme de fonction de transfert :

$$y(s) = G(s) u(s)$$

Le modèle d'espace d'état (A, B, C) ou la fonction de transfert $G(s)$ peut être déterminé selon deux approches :

- ▶ Par une modélisation Entrée/Sortie : le modèle est obtenu par une expérience, durant laquelle les signaux $u(t)$ et $y(t)$ sont mesurés pour servir à l'identification des paramètres d'un modèle d'une certaine forme connue a priori.
- ▶ Ou par une modélisation analytique, dans laquelle le système est décomposé en sous-

systèmes auxquels on applique les lois de la physique telles que : le premier principe de la mécanique, les lois de Kirchoff, de Park, de la thermodynamique, etc...

Le modèle obtenu va dépendre typiquement de certaines valeurs de paramètres propres au système tels que : la température, les masses, les longueurs, les vitesses, etc...

Malheureusement, les valeurs de ces paramètres ne peuvent pas être connues avec exactitude. Cela est dû soit à la limite de la *précision* des mesures ou parceque c'est la *nature* du système qui l'impose [1].

Donc à la rigueur les paramètres peuvent être cernés dans un intervalle.

Exemple 2.1 *Le modèle d'un avion est un exemple type. Il est clair que ce modèle dépend du poids de cet avion, paramétré par M . Mais est-ce que M est fixe ? Non, car il va varier selon le poids des passagers, des bagages, etc.... Tout ce qu'on peut connaître, c'est le poids minimal M_{\min} et le poids maximal M_{\max} . Donc le paramètre $M \in I = [M_{\min}, M_{\max}]$*

$$\text{Le modèle de l'avion} \equiv f(M, \dots) \quad \text{avec} \quad M \in I$$

Le modèle est alors connu avec une incertitude sur ses paramètres, d'où le nom "*incertitude paramétrique*", une incertitude du type structuré.

Nous allons donc définir l'incertitude paramétrique et la famille des polynômes incertains qui en découlent. Afin de vérifier la stabilité d'une telle famille ; nous allons voir un théorème basé sur la continuité des racines en fonction de la continuité des paramètres, c'est le **théorème de croisement de frontière** suivi de sa version alternative, le **principe d'exclusion du zéro**. Aux méthodes classiques de l'analyse de stabilité d'un polynôme, qu'on a l'habitude de voir, on peut ajouter de nouveaux outils tel que le **théorème d'alternance**. Par la suite, un autre résultat élégant et suprenant à la fois sera donné par le **théorème de Kharitonov**. Un théorème qui permet de vérifier la stabilité d'une famille intervalle seulement en vérifiant celle de quatre polynômes extrêmes. Le théorème de Kharitonov sera également interprété en terme d'alternance.

En exploitant les résultats précédents, on aboutit à la définition et au calcul de la marge de stabilité paramétrique. Une nouvelle marge très utile dans l'analyse et la synthèse par approche paramétrique. L'approche qui montre l'intérêt de ce chapitre.

2.2 Famille de polynômes à incertitudes paramétriques

2.2.1 Polynômes paramétriques

Un système de contrôle par feedback, sous sa forme standard se présente comme suit :

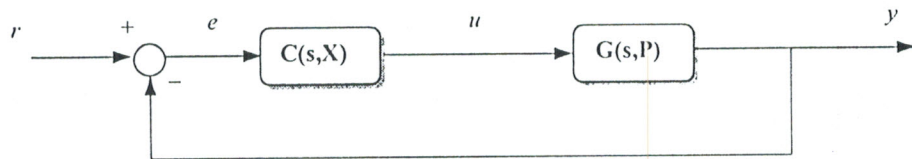


Fig.2.1 : Un système de contrôle sous forme standard.

Tout système à feedback est composé d'au moins deux sous-systèmes ; à savoir : le processus et le correcteur, reliés par une boucle de contre réaction.

On suppose que :

- les paramètres de la fonction de transfert du processus sont contenus dans le vecteur P , un vecteur qui spécifie complètement le comportement de ce processus.
- et que le correcteur est caractérisé par le vecteur X .

Les fonctions de transfert respectives deviennent :

$$G(s) = G(s, P) \quad \text{et} \quad C(s) = C(s, X)$$

Le comportement d'un système en boucle fermée standard est généralement régi par son équation caractéristique, appelée aussi **polynôme caractéristique**, donné dans ce cas par :

$$\delta(s, X, P) = 1 + G(s, P) C(s, X)$$

Sous une forme générale, on le trouve :

$$\delta(s, X, P) = \sum_{i=0}^n \delta_i(X, P) s^i$$

avec n : l'ordre du polynôme (et du système).

Quoique les paramètres X et P ensemble influencent les coefficients δ_i , les natures de ces deux ensembles de paramètres sont assez différentes :

D'une part, le processus contient des paramètres qui sont sujets à des variations incontrôlables, qui dépendent des conditions de fonctionnement physique, des perturbations, des erreurs de modèle, etc...

D'autre part, les paramètres du correcteur sont souvent fixés durant le fonctionnement du système. Cependant, à l'étape de synthèse, ils sont aussi des paramètres incertains à choisir.

Exemple 2.2 *Supposons que le correcteur soit un correcteur PID de fonction de transfert :*

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Alors :

$$X = [K_P, K_I, K_D]^T$$

et que la fonction de transfert $G(s)$ s'écrit sous ces deux formes :

$$G(s) = \frac{\mu(s - \alpha)}{(s - \beta)(s - \gamma)} = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

- avec la première forme :

$$P_1 = [\mu, \alpha, \beta, \gamma]^T$$

et

$$\delta(s, P_1, X) = s(s - \beta)(s - \gamma) + \mu(s - \alpha)(K_P s + K_I + K_D s^2)$$

- avec la deuxième forme :

$$P_2 = [a_0, a_1, b_0, b_1, b_2]^T$$

et

$$\delta(s, P_2, X) = s(b_2 s^2 + b_1 s + b_0) + (a_1 s + a_0)(K_P s + K_I + K_D s^2)$$

2.2.2 Famille de polynômes paramétriques

Pour simplifier la présentation théorique qui va suivre nous allons supposer pour le moment que les paramètres X du correcteur sont fixés. Le polynôme caractéristique sera :

$$\delta(s, P) = \delta_0(P) + \delta_1(P) s + \delta_2(P) s^2 + \dots + \delta_n(P) s^n$$

En supposant aussi que chaque composante p_i du vecteur des paramètres réels $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]^T$ peut varier indépendamment des autres composantes avec

$$p_i \in [p_i^-, p_i^+]$$

Comme résumé, nous allons avoir :

- Un ensemble de vecteur de paramètres admissibles donné par :

$$\Pi = \left\{ P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]^T \ / \ P_i \in [p_i^-, p_i^+] ; i = 1, 2, \dots, l \right\}$$

- et un ensemble de polynômes caractéristiques généré par Π :

$$\Delta(s, P) = \{ \delta(s, P) \ : \ P \in \Pi \}$$

Un ensemble appelé aussi famille de polynômes paramétriques que nous allons appeler juste famille de polynômes.

2.2.3 Classes de polynômes paramétriques

Il est supposé aussi que les coefficients :

$$\delta_0(P), \delta_1(P), \delta_2(P), \dots, \delta_n(P)$$

soient des fonctions continues des paramètres constants et inconnus du vecteur P .

On peut donc distinguer selon la nature des $\delta_i(P)$ différentes classes de polynômes paramétriques [1] :

1. Polynômes à coefficients intervalles :

$$\delta_i \in [\delta_i^-, \delta_i^+]$$

2. Polynômes à coefficients affines :

$$\delta_i(P) = \beta_i + \gamma_i^T P$$

3. Polynômes à coefficients multilinéaires :

Exemple :

$$\delta_i(P) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$$

4. Polynômes à coefficients polynômes :

Exemple :

$$\delta_i(P) = p_1 + p_1 p_2^2 + p_3 p_4^3 + \dots$$

2.3 Analyse de la stabilité d'une famille de polynômes par le théorème de croisement de frontière

Si on prend un système du 2^{ième} ordre avec le modèle suivant :

$$H = \frac{1}{s^2 + as + 1}$$

avec $a = 0.5$ par exemple.

Vérifier la stabilité d'un tel système revient à vérifier la stabilité du polynôme :

$$P_a(s) = s^2 + as + 1$$

et cela par les différentes méthodes classiques, telles que : les méthodes graphiques, le critère de Routh, etc...

Mais, comment allons nous procéder dans le cas où le paramètre a est connu avec incertitude? ou lorsqu'il est variable? c'est-à-dire dans le cas où

$$a \in [\alpha, \beta]$$

Car dans ce cas, nous n'aurons pas à vérifier la stabilité d'un seul polynôme $P_{0.5}(s)$, mais de toute une famille de polynômes :

$$P(a, s) = \{P_a(s) : a \in [\alpha, \beta]\}$$

Afin de résoudre ce genre de problèmes, plusieurs résultats ont été établis dans l'approche paramétrique. Entre autres le théorème de croisement de frontière, bien qu'il soit simple, il peut conduire à de nombreux résultats utiles et pas très évidents dans la théorie de stabilité des familles de polynômes.

Avant d'énoncer le théorème de croisement de frontière, nous allons d'abord présenter les frontières et les régions de stabilité et poser certaines hypothèses.

2.3.1 Régions et frontières de stabilité

Considérons le plan complexe \mathcal{C} et soit $S \subset \mathcal{C}$ tout ensemble ouvert donné.

On sait que S et sa frontière ∂S ensemble avec l'intérieur U° de l'ensemble fermé $U = \mathcal{C} - S$ forment une partition du plan complexe. C'est-à-dire :

$$S \cup \partial S \cup U^\circ = \mathcal{C}$$

$$S \cap U^\circ = S \cap \partial S = \partial S \cap U^\circ = \emptyset$$

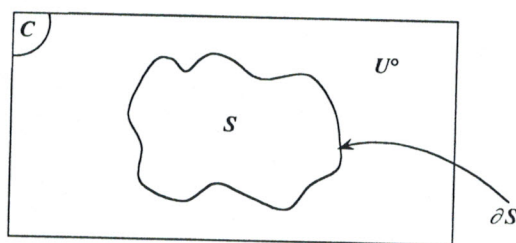


Fig.2.2 : Régions et frontières.

Supposons aussi que chacun de ces trois ensembles est non vide.

Ces suppositions sont très générales. Dans la théorie de la stabilité on peut choisir pour S

- Le demi-plan gauche ouvert \mathcal{C}^- (pour les systèmes continus)
- ou le disque unité ouvert \mathcal{D} (pour les systèmes discrets)

- ou même des sous-ensembles de ces derniers, (voir figure 2.3)

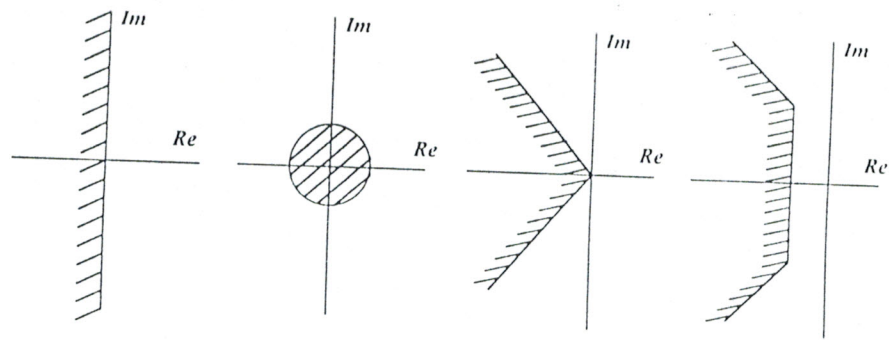


Fig.2.3 : Les différentes régions de stabilité.

2.3.2 Hypothèses

Supposant maintenant une famille de polynômes $P(\lambda, s)$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

✂ Hypothèses :

$P(\lambda, s)$ est une famille de polynômes de :

- 1- Degré fixe n (degré invariant, i.e. même nombre de racines).
- 2- Continus en fonction de λ variant sur un intervalle fixé $I = [a, b]$.

En d'autres termes, un élément typique de $P(\lambda, s)$ peut s'écrire :

$$P(\lambda, s) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) s + \dots + P_n(\lambda) s^n$$

où $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda)$ et $P_n(\lambda)$ sont des fonctions continues avec λ sur I et $P_n(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in I$.

2.3.3 Théorème de croisement de frontière

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses précédentes, on suppose que :*

- $P(a, s)$ a toutes ses racines dans S ,
- tandis que $P(b, s)$ a au moins une racine dans U .

Alors il existe au moins un ρ dans $]a, b]$, tel que :

- a- $P(\rho, s)$ a toutes ses racines dans $S \cup \partial S$ et
- b- $P(\rho, s)$ a au moins une racine dans ∂S .

Le résultat précédant est très intuitif. Il mentionne juste, qu'en allant d'un ensemble ouvert (S) vers un autre ensemble ouvert (U) disjoint du premier ; l'ensemble des racines de la famille continue des polynômes à degré fixe $P(\lambda, s)$, doit croiser à un niveau intermédiaire la frontière (∂S) du premier ensemble ouvert.

Si $P(\lambda, s)$ perd un degré sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire si $P_n(\lambda)$ s'annule pour une certaine valeur de λ , le théorème de croisement de frontière n'est plus valable.

2.3.4 Interprétation du théorème à l'aide d'un exemple

On veut vérifier la stabilité du polynôme $a_1s + a_0$, où $P = [a_0, a_1]$

Selon la figure 2.4, on voit que le polynôme $P = P_0$ est stable et que $P = P_1$ ou $P = P_2$ est instable.

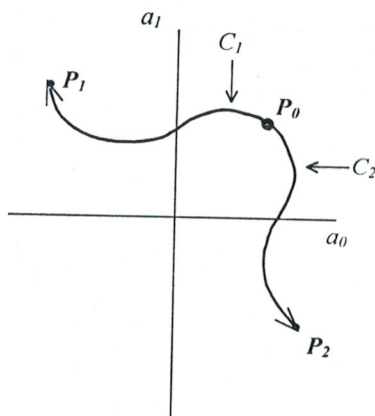


Fig.2.4 : Degré non perdu sur C_1 et perdu sur C_2 .

- En partant du polynôme stable P_0 vers le polynôme instable P_1 suivant le chemin C_1 , il y a un polynôme sur ce chemin qui a une racine en $s = 0$, donc sur la frontière de stabilité. Alors le résultat du théorème est bien vérifié.

- Maintenant, partant du polynôme stable P_0 vers le polynôme instable P_2 suivant le chemin C_2 , on remarque qu'il n'y a pas de polynômes dont les racines croisent la frontière de stabilité. C'est une conséquence du fait qu'il y a eu perte de degré de polynôme sur le chemin C_2 pour $a_1 = 0$.

Donc, on remarque bien que l'hypothèse d'avoir un degré invariant est très importante.

2.3.5 Le principe d'exclusion du zéro

Le théorème de croisement de frontière peut être appliqué à une famille de polynômes pour y détecter la présence de polynômes instables.

Soit $\delta(s, P)$ un polynôme dont les coefficients dépendent d'une manière continue du vecteur des paramètres $P \in \mathfrak{R}^l$ qui varie dans l'ensemble $\Pi \in \mathfrak{R}^l$ et générant ainsi la famille de polynômes :

$$\Delta(s) = \{\delta(s, P) : P \in \Pi\}$$

Nous avons la région de stabilité S et nous voulons savoir si la famille $\Delta(s)$ contient des polynômes instables.

Supposons que dans cette famille il y a au moins un polynôme stable $\delta(s, P_a)$ et que tous les polynômes ont le même degré.

Alors si $\delta(s, P_b)$ est un polynôme instable, il découle du théorème de croisement de frontière que sur tout chemin reliant P_a et P_b , il doit exister un point P_c tel que le polynôme $\delta(s, P_c)$ contient des racines sur la frontière de stabilité ∂S .

Si un tel chemin peut être entièrement construit dans Π . C'est à dire si Π est connexe, alors le point P_c appartient à Π .

Dans ce cas la présence de polynômes instables dans la famille $\Delta(s)$ est équivalente à la présence de polynômes avec des racines sur la frontière dans cette famille.

Si s^* est une racine d'un certain polynôme dans cette famille, alors $\delta(s^*, P) = 0$ pour un certain $P \in \Pi$ et ceci implique que $0 \in \Delta(s^*)$.

Par conséquent, la présence d'éléments instables dans $\Delta(s)$ peut être détectée :

1. En générant l'ensemble image de la famille $\Delta(s^*)$ dans le plan complexe pour $s^* \in \partial S$. Avec s^* fixe et P variant dans Π .
2. En balayant s^* le long de la frontière ∂S .
3. En vérifiant si la condition d'exclusion du zéro $0 \notin \Delta(s^*)$ est violée pour certains $s^* \in \partial S$.

Ceci est énoncé formellement par le théorème suivant comme une version alternative du théorème de croisement de frontière.

Théorème 2.2 *Soit la famille de polynômes :*

$$\Delta(s) = \{\delta(s, P) \quad : \quad P \in \Pi\}$$

On suppose que cette famille de polynômes est de degré constant et contient au moins un polynôme stable, Π est connexe.

Alors la famille entière est stable si et seulement si :

$$0 \notin \Delta(s^*) \quad \text{pour tous } s^* \in \partial S.$$

Comme nous le voyons le principe d'exclusion de zéro peut être utilisé pour donner des résultats, et théoriques et numériques à de nombreux problèmes de stabilité robuste paramétrique.

D'autre part, on remarque que nous avons souvent besoin de poser l'hypothèse de l'existence d'au moins un polynôme stable $\delta(s, P_a)$ dans une famille de polynôme $\Delta(s)$. Cependant, il faut bien des moyens pour tester la stabilité de ce polynôme.

Pour rester toujours dans le cadre des résultats qui se rapportent à l'approche paramétrique; nous allons présenter dans la prochaine section le théorème d'Hermite-Biehler.

2.4 Analyse de la stabilité d'un polynôme par le théorème d'Hermite-Biehler (d'alternance)

Le théorème sera énoncé pour le cas de Hurwitz (cas continu) puis pour le cas de Schur (cas discret).

Pour des raisons de simplicité on va se limiter au cas des polynômes à coefficients réels. Sachant qu'il existe une version pour les polynômes complexes [6].

2.4.1 La stabilité d'Hurwitz

On considère un polynôme de degré n :

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \cdots + p_ns^n$$

$P(s)$ est dit un polynôme de Hurwitz si et seulement si : toutes ses racines se trouvent

dans le demi-plan gauche du plan complexe. Donc :

$$\text{polynôme de Hurwitz} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Polynôme stable}$$

Nous avons les deux propriétés suivantes :

- **Propriété 1 :**

Si $P(s)$ est un polynôme réel de Hurwitz, alors tous ses coefficients sont non nuls, et ont le même signe, soit tous positifs ou tous négatifs.

- **Propriété 2 :**

Si $P(s)$ est un polynôme réel de Hurwitz de degré n , alors $\arg [P(j\omega)]$ appelé aussi phase de $P(j\omega)$ est une fonction continue et strictement croissante avec $\omega \in]-\infty, +\infty[$. En plus, l'accroissement net de la phase pour ω allant de $-\infty$ à $+\infty$ est :

$$\arg [P(+j\infty)] - \arg [P(-j\infty)] = n \pi$$

2.4.2 Théorème d'Hermite-Biehler : Cas continu

La propriété d'alternance

Pour un polynôme réel $P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n$, les parties paire et impaire sont définies par :

$$\begin{aligned} P_{\text{paire}} &= p_0 + p_2s^2 + p_4s^4 + \dots \\ P_{\text{impaire}} &= p_1s + p_3s^3 + p_5s^5 + \dots \end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned} P_p(\omega) &= P_{\text{paire}}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 + \dots \\ P_I(\omega) &= \frac{P_{\text{impaire}}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 + \dots \end{aligned}$$

P_p et P_I sont les deux, des polynômes en ω^2 . Comme conséquence immédiate, leurs ensembles de racines seront toujours symétriques par rapport à l'origine du plan complexe.

✧ Cas de n pair, $n = 2m$, $m > 0$:

$$\begin{aligned} P_p(\omega) &= p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m} \\ P_I(\omega) &= p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^{m-1} p_{2m-1}\omega^{2m-2} \end{aligned}$$

Définition 2.1 Un polynôme réel $P(s)$ satisfait la propriété d'alternance si :

a- p_{2m} et p_{2m-1} ont le même signe.

b- Toutes les racines de $P_p(\omega)$ et $P_I(\omega)$ sont réelles et distinctes; et les m racines positives de $P_p(\omega)$ ensemble avec les $m-1$ racines positives de $P_I(\omega)$ s'alternent de la manière suivante :

$$0 < \omega_{P,1} < \omega_{I,1} < \omega_{P,2} < \omega_{I,2} < \dots < \omega_{P,m-1} < \omega_{I,m-1} < \omega_{P,m}$$

✧ Cas de n impair, $n = 2m + 1$, $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_p(\omega) &= p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m} \\ P_I(\omega) &= p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m+1}\omega^{2m} \end{aligned}$$

Définition 2.2 Un polynôme réel $P(s)$ satisfait la propriété d'alternance si :

a- p_{2m+1} et p_{2m} ont le même signe.

b- Toutes les racines de $P_p(\omega)$ et $P_I(\omega)$ sont réelles et distinctes; et les m racines positives de $P_p(\omega)$ ensemble avec les m racines positives de $P_I(\omega)$ s'alternent de la manière suivante :

$$0 < \omega_{P,1} < \omega_{I,1} < \omega_{P,2} < \omega_{I,2} < \dots < \omega_{P,m-1} < \omega_{I,m-1} < \omega_{P,m} < \omega_{I,m}$$

✧ La deuxième description de la propriété d'alternance :

$P(s) = P_{\text{paire}}(s) + P_{\text{impaire}}(s)$ satisfait la propriété d'alternance si et seulement si :

a - Les derniers coefficients de $P_{\text{paire}}(s)$ et $P_{\text{impaire}}(s)$ sont de même signe.

b - Tous les zéros de $P_{\text{paire}}(s) = 0$ et $P_{\text{impaire}}(s) = 0$ sont distincts, se trouvent sur l'axe imaginaire et s'alternent tout au long de cet axe.

Théorème d'Hermite-Biehler : ou théorème d'alternance

Après définition de la propriété d'alternance, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Un polynôme réel $P(s)$ est de Hurwitz si et seulement s'il satisfait la propriété d'alternance.*

✠ Interprétation par un exemple :

$$P(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6$$

alors : $P(j\omega) = P_P(\omega) + j\omega P_I(\omega)$

avec : $P_P(\omega) = 11\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6$

$$P_I(\omega) = \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49$$

Les racines positives de $P_P(\omega)$ et $P_I(\omega)$ sont les suivantes :

$$P_P(\omega) \longrightarrow [0.0425 \quad 0.5777 \quad 2.1070 \quad 10.5455]$$

$$P_I(\omega) \longrightarrow [0.2184 \quad 1.1389 \quad 4.2463 \quad 46.3964]$$

La propriété d'alternance d'un polynôme peut être vérifiée aussi en traçant les graphes de $P_P(\omega)$ et $P_I(\omega)$. La figure 2.5 montre que le polynôme $P(s)$ est de Hurwitz parcequ'il vérifie la propriété d'alternance graphiquement aussi.

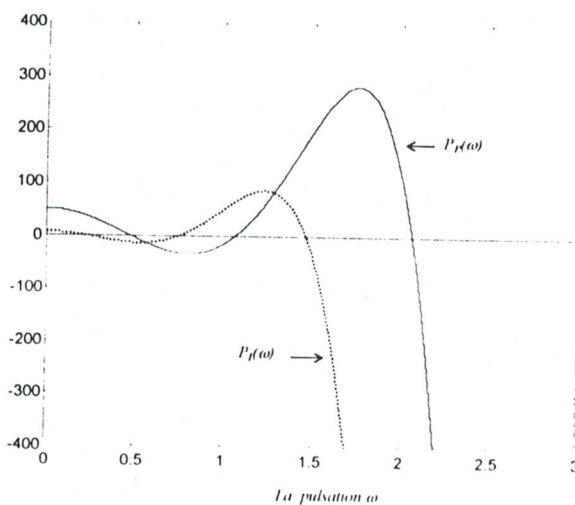


Fig.2.5 : La propriété d'alternance pour un polynôme de Hurwitz.

2.4.3 Le théorème d'Hermité-Biehler : cas discret (cas de Schur)

En fait, il est toujours possible de trouver un résultat similaire au théorème d'alternance pour toute région de stabilité S qui a comme propriété : le fait que la phase d'un polynôme stable évaluée le long de la frontière de stabilité ∂S croît d'une manière monotonique.

Dans cette partie on va s'intéresser au cas où S est le disque unité ouvert. La région de stabilité pour les systèmes discrets.

Définition d'un polynôme de Schur

Un polynôme $P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$, est dit un polynôme de Schur si toutes ses racines se trouvent dans le disque unité ouvert du plan complexe.

La condition nécessaire pour la stabilité de Schur est $|p_n| > |p_0|$.

Le tracé fréquentiel pour la stabilité de Schur

$P(z)$ peut s'écrire :

$$P(z) = p_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

où les z_i sont les n racines de $P(z)$.

Si $P(z)$ est un polynôme de Schur, toutes ses racines sont localisées à l'intérieur du disque unité $|z| < 1$, ainsi lorsque z varie le long du cercle unité (la frontière), $z = e^{j\theta}$, l'argument de $P(e^{j\theta})$ croît monotoniquement.

Pour un polynôme $P(z)$ de Schur de degré n , $P(e^{j\theta})$ a un net accroissement d'argument de $2n\pi$. Ainsi le tracé de $P(e^{j\theta})$ encercle l'origine n fois.

Ceci peut être utilisé comme test dans le domaine des fréquences pour la stabilité de Schur.

Exemple 2.3 *Considérons le polynôme stable*

$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^4 - 3.2z^3 + 1.24z^2 + 0.192z - 0.1566 \\ &= 2(z + 0.3)(z - 0.5 + 0.2j)(z - 0.5 - 0.2j)(z - 0.9) \end{aligned}$$

On évalue $P(z)$ lorsque z varie le long du cercle unité. Le tracé obtenu sur la figure 2.6 encercle l'origine 4 fois, ce qui montre que ce polynôme de degré 4 vérifie bien la stabilité de Schur.

✂ Une simplification peut être faite en considérons le polynôme inversé $z^n P(z^{-1})$.

$$\begin{aligned} z^n P(z^{-1}) &= p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \\ &= p_n (1 - z_1 z)(1 - z_2 z) \dots (1 - z_n z) \end{aligned}$$

$z^n P(z^{-1})$ s'annule en $z = z_i^{-1}$ pour $i = 1, \dots, n$.

Si $P(z)$ est un polynôme de Schur les z_i ont un module inférieur à 1, ainsi les z_i^{-1} se trouvent à l'extérieur du disque unité.

Si on fait varier $z = e^{j\theta}$ le long du cercle unité le net accroissement de l'argument de $e^{jn\theta} P(e^{-j\theta})$ doit sûrement être nul. Ceci signifie que pour la stabilité de Schur de $P(z)$, il est nécessaire et suffisant que le tracé fréquentiel polynôme inversé $e^{jn\theta} P(e^{-j\theta})$ n'encercle pas l'origine (voir figure 2.7).

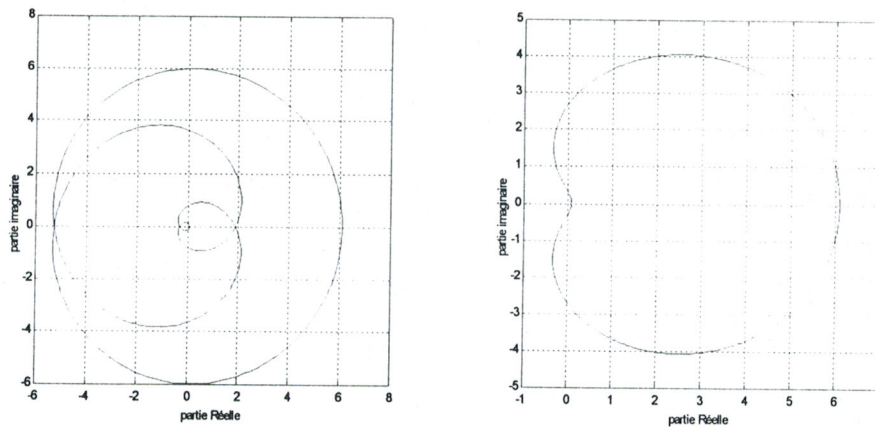


Fig.2.6 : Le tracé de $P(e^{j\theta})$. Fig.2.7 : Le tracé de $e^{jn\theta} P(e^{-j\theta})$.

2.5 Analyse de la stabilité des polynômes intervalles par le théorème de Kharitonov

2.5.1 L'histoire du théorème

Durant les années 60 et 70 le problème de stabilité avec incertitudes paramétriques était presque complètement ignoré par les chercheurs en contrôle. Cela était principalement dû à la perception de la grande difficulté du problème.

Mais la situation a complètement changé avec l'apparition d'un remarquable théorème établi par le théoricien en contrôle, le russe V.L. Kharitonov.

Les travaux de Kharitonov étaient publiés en 1978 dans la littérature technique russe mais ses résultats restaient encore inconnus durant plusieurs années ; à cause du fait que les premières démonstrations de Kharitonov étaient écrites sous une forme très condensée.

Le théorème de Kharitonov est un résultat aussi suprenant qu'élégant. Il donne la possibilité de vérifier la stabilité de Hurwitz de toute une famille de polynômes intervalles et cela d'une manière très simple.

Ce résultat était un point de départ pour un intérêt renouvelé pour la théorie de contrôle robuste avec un appui sur des perturbations paramétriques bornées et déterministes.

2.5.2 La présentation du théorème

Le type de stabilité considéré, est la stabilité de Hurwitz et les polynômes sont du type intervalle. Considérons l'ensemble $I(s)$ de polynômes réels de degré n , de la forme :

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \dots + \delta_n s^n$$

où les coefficients δ_i s'étendent à l'intérieur des intervalles :

$$\delta_0 \in [x_0, y_0] \quad , \quad \delta_1 \in [x_1, y_1] \quad , \dots \quad , \quad \delta_n \in [x_n, y_n]$$

on note :

$$\underline{\delta} = [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \dots \quad \delta_n]$$

Le polynôme $\delta(s)$ est alors identifié par son vecteur de coefficients $\underline{\delta}$.

En considérant tous les intervalles des paramètres, on obtient le polyèdre ou la boîte des coefficients suivante :

$$\Delta = \{ \underline{\delta} / \underline{\delta} \in \mathfrak{R}^{n+1} / x_i \leq \delta_i \leq y_i ; i = 0, 1, \dots, n \}$$

On suppose que le degré reste invariant sur toute la famille donc $0 \notin [x_n, y_n]$.

Un tel ensemble de polynômes est appelé "famille intervalle réelle" et on se réfère à $I(s)$

par : "Polynôme Intervalle".

On dit qu'une famille de polynômes est stable ssi : *tout* polynôme de la famille est un polynôme de Hurwitz.

Le théorème de Kharitonov donne une condition nécessaire et suffisante, simple pour démontrer la stabilité de Hurwitz de toute la famille de polynômes.

Théorème 2.4 *Tout polynôme dans la famille $I(s)$ est de Hurwitz ssi :*
les quatre polynômes extrêmes suivants sont de Hurwitz :

$$K^1 = x_0 + x_1s + y_2s^2 + y_3s^3 + x_4s^4 + x_5s^5 + y_6s^6 + \dots$$

$$K^2 = x_0 + y_1s + y_2s^2 + x_3s^3 + x_4s^4 + y_5s^5 + y_6s^6 + \dots$$

$$K^3 = y_0 + x_1s + x_2s^2 + y_3s^3 + y_4s^4 + x_5s^5 + x_6s^6 + \dots$$

$$K^4 = y_0 + y_1s + x_2s^2 + x_3s^3 + y_4s^4 + y_5s^5 + x_6s^6 + \dots$$

Dans le cas d'un polynôme intervalle d'ordre 2 (3 paramètres incertains), la boîte Δ et les sommets correspondant aux polynômes de Kharitonov sont représentés par la figure 2.8.

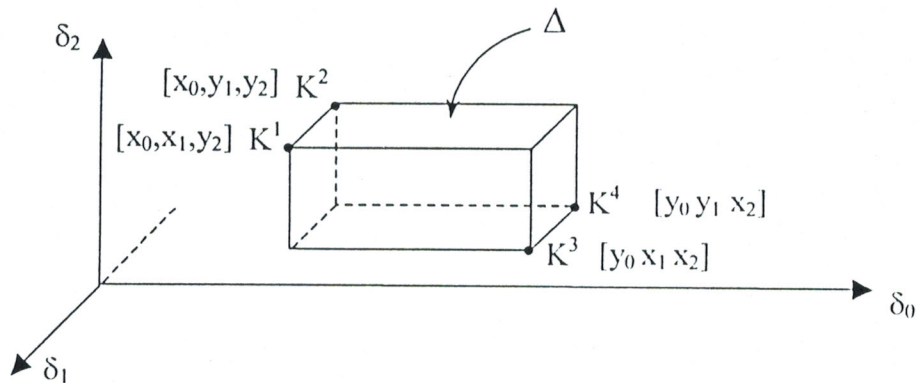


Fig.2.8 : La boîte Δ et les quatre sommets de Kharitonov.

2.6 Généralisation du théorème de Kharitonov en termes d'alternance

La démonstration du théorème de Kharitonov [6] permet de l'interpréter comme une généralisation du théorème d'Hermité-Biehler (d'alternance) qu'on a déjà vu en section 2.4.

Il se trouve que les polynômes de Kharitonov (les quatre) peuvent s'écrire sous une autre

forme. Avec :

$$K_{pair}^{\max} = y_0 + x_2s^2 + y_4s^4 + x_6s^6 + y_8s^8 + \dots$$

$$K_{pair}^{\min} = x_0 + y_2s^2 + x_4s^4 + y_6s^6 + x_8s^8 + \dots$$

et

$$K_{impair}^{\max} = y_1s + x_3s^3 + y_5s^5 + x_7s^7 + y_9s^9 + \dots$$

$$K_{impair}^{\min} = x_1s + y_3s^3 + x_5s^5 + y_7s^7 + x_9s^9 + \dots$$

on obtient :

$$K^1(s) = K_{pair}^{\min} + K_{impair}^{\min}$$

$$K^2(s) = K_{pair}^{\min} + K_{impair}^{\max}$$

$$K^3(s) = K_{pair}^{\max} + K_{impair}^{\min}$$

$$K^4(s) = K_{pair}^{\max} + K_{impair}^{\max}$$

D'après le théorème d'alternance, on a vu que vérifier la stabilité de Hurwitz d'un seul polynôme $\delta(s) = \delta_{pair}(s) + \delta_{impair}(s)$ revient à vérifier la propriété d'alternance de $\delta_P(\omega) = \delta_{pair}(j\omega)$ et $\delta_I(\omega) = \frac{\delta_{impair}(j\omega)}{j\omega}$.

Et vérifier la stabilité de Hurwitz de toute une famille de polynômes intervalles revient à vérifier la propriété d'alternance pour tous les polynômes de cette famille.

Mais suivant l'idée de Kharitonov, il doit être vrai que la vérification de la propriété d'alternance des quatre polynômes de Kharitonov garantie la propriété d'alternance de tous les polynômes de la famille.

Ce point de vue est donné par la présente version du théorème de Kharitonov.

Soit : $\omega_{P_i}^{\max}$ ($\omega_{P_i}^{\min}$) les racines positives de $K_P^{\max}(\omega)$ ($K_P^{\min}(\omega)$).

et : $\omega_{I_i}^{\max}$ ($\omega_{I_i}^{\min}$) les racines positives de $K_I^{\max}(\omega)$ ($K_I^{\min}(\omega)$).

Théorème 2.5 *La famille $I(s)$ contient seulement des polynômes stables ssi :*

1. *Les polynômes $K_P^{\max}(\omega)$, $K_P^{\min}(\omega)$, $K_I^{\max}(\omega)$ et $K_I^{\min}(\omega)$ ont seulement des racines réelles et ensemble ces racines réelles s'alternent comme suit :*

$$0 < \omega_{P_1}^{\min} < \omega_{P_1}^{\max} < \omega_{I_1}^{\min} < \omega_{I_1}^{\max} < \omega_{P_2}^{\min} < \omega_{P_2}^{\max} < \omega_{I_2}^{\min} < \omega_{I_2}^{\max} < \dots$$

2. $K_P^{\max}(0)$, $K_P^{\min}(0)$, $K_I^{\max}(0)$ et $K_I^{\min}(0)$ sont non nuls et de même signe.

Ce théorème est illustré par la figure 2.9. L'alternance des tubes pair et impair implique l'alternance des parties paire et impaire de chaque polynôme dans la famille des polynômes intervalles.

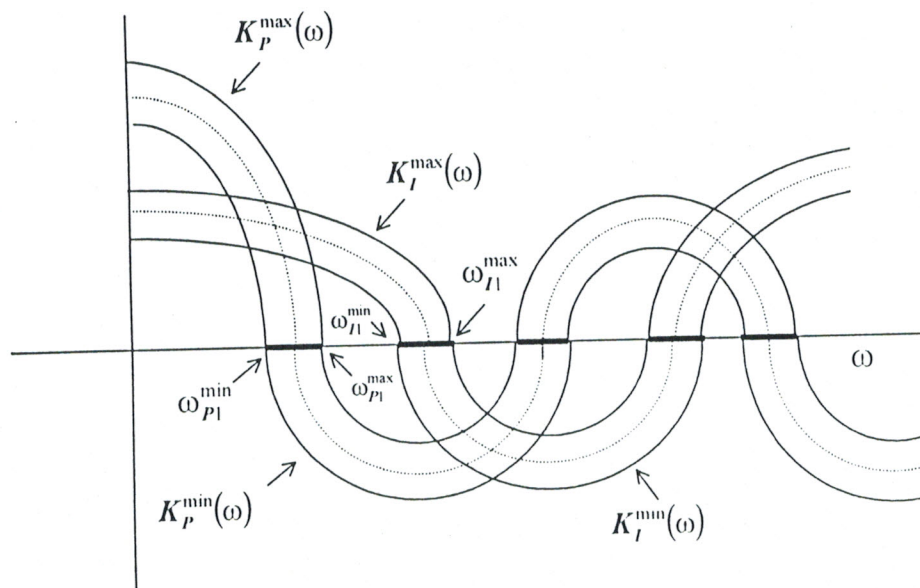


Fig.2.9 : Alternance des tubes pair et impair.

2.7 Marge de stabilité paramétrique

2.7.1 Définition

Soit P le vecteur des paramètres du processus et P° le vecteur des valeurs nominales de ces paramètres.

Considérons le correcteur fixe $C^\circ(s)$, avec les paramètres X° stabilisant le processus nominal $G(s, P^\circ)$.

On pose maintenant :

$$\Delta P = P - P^\circ$$

ΔP représente une perturbation du vecteur des paramètres P du processus par rapport aux valeurs nominales P° .

La question qui nous vient à l'esprit, est la suivante :

► De combien pourrait être la perturbation ΔP sans pour autant détruire la stabilité en boucle fermée ?

Une borne sur la taille de ΔP pour laquelle la stabilité en boucle fermée est garantie est très utile. Elle nous donne aussi, dans l'espace des paramètres une boule dans laquelle les paramètres peuvent varier librement sans qu'on perde la stabilité en boucle fermée. Une quantité encore plus utile à connaître, c'est la taille d'une telle boule de stabilité.

La marge de stabilité paramétrique (Msp) est définie comme étant la taille (la quantité) de la plus petite perturbation qui déstabilise la boucle fermée.

Cette marge sert comme une mesure quantitative de la robustesse, des systèmes bouclés, à l'égard des incertitudes paramétriques évaluées au point nominal P° .

La marge de stabilité paramétrique est très utile aussi bien dans l'analyse que la synthèse. Dans la synthèse des correcteurs, par exemple, elle peut être utilisée comme moyen pour comparer les performances des correcteurs proposés. Dans la synthèse et dans les problèmes de conception on est amené à choisir les paramètres X du correcteur qui augmentent ou maximisent cette marge (Msp).

2.7.2 La boule de stabilité dans l'espace des paramètres

Dans cette section, on va essayer de donner une caractérisation utile de la marge de stabilité paramétrique dans le cas général. Cela peut se faire en cherchant la plus large boule de stabilité dans l'espace des paramètres centrée en P° , le vecteur des paramètres du processus nominal stable.

Soit $S \subset \mathcal{C}$ un ensemble ouvert symétrique par rapport à l'axe des réels, stable.

Soit P le vecteur des paramètres réels :

$$P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_l]^T$$

Le polynôme caractéristique du système est donné par :

$$\delta(s, P) = \delta_n(P) s^n + \delta_{n-1}(P) s^{n-1} + \dots + \delta_0(P)$$

$\delta(s, P)$ est un polynôme réel avec des coefficients qui sont des fonctions continues du vecteur des paramètres nominaux $P = P^\circ$, $\delta(s, P^\circ) = \delta^\circ(s)$ est stable vis-à-vis de S (il a ses

racines dans S).

$$\Delta P = P - P^\circ = [p_1 - p^\circ_1, p_2 - p^\circ_2, \dots, p_l - p^\circ_l]^T$$



On introduit la norme $\|\cdot\|$ comme moyen de mesure pour la grandeur ΔP .

On introduit la boule ouverte, de rayon ρ :

$$\beta(\rho, P^\circ) = \{P : \|P - P^\circ\| < \rho\}$$

L'hypersphère de rayon ρ est définie par :

$$S(\rho, P^\circ) = \{P : \|P - P^\circ\| = \rho\}$$

A la boule $\beta(\rho, P^\circ)$ on associe la famille de polynômes incertains :

$$\Delta_\rho(s) = \{\delta(s, P^\circ - \Delta P) : \|\Delta P\| < \rho\}$$

Définition 2.3 Dans l'espace des paramètres, la marge de stabilité paramétrique est définie comme étant le rayon, noté $\rho^*(P^\circ)$, de la plus large boule centrée en P° pour laquelle $\delta(s, P)$ reste stable pour tout $P \in \beta(\rho^*(P^\circ), P^\circ)$.

Cette marge de stabilité nous indique de combien peut on perturber les paramètres originaux P° et garder la stabilité.

Le théorème suivant est une caractérisation de la boule de stabilité maximale. Pour simplifier les notations on prend ρ^* au lieu de $\rho^*(P^\circ)$.

Théorème 2.6 Avec les hypothèses déjà énoncées, la marge de stabilité paramétrique est caractérisée par le fait :

A / Qu'il existe une plus large boule de stabilité $\beta(\rho^*, P^\circ)$ centrée en P° avec les propriétés suivantes :

a1- Pour chaque P' à l'intérieur de la boule, le polynôme caractéristique $\delta(s, P')$ est stable et de degré n .

a2- Il existe au moins un point P'' sur l'hypersphère $S(\rho^*, P^\circ)$ elle-même tel que $\delta(s, P'')$ est instable ou de degré inférieur à n .

B / En plus si P'' est tout point sur l'hypersphère $S(\rho^*, P^\circ)$ tel que $\delta(s, P'')$ est instable,

alors les racines instables de $\delta(s, P'')$ ne peuvent être que sur la frontière de stabilité.

Ce théorème nous donne une première simplification pour le calcul de la marge de stabilité paramétrique ρ^* . Il indique que pour déterminer ρ^* , il suffit de calculer la distance minimale entre P° et l'ensemble de ces points P qui attribuent au polynôme caractéristique des racines sur la frontière de stabilité, ou qui causent une perte de degré.

D'après le théorème précédent et le théorème de croisement de frontière donné sous forme de principe d'exclusion du zéro, pour la famille de polynômes $\Delta_\rho(s)$, on détermine ρ^* comme suit :

1. On fixe s^* en un point sur la frontière de S , (∂S) , soit $\rho_0(s^*)$ la valeur limite de ρ tel que $0 \in \Delta_\rho(s^*)$:

$$\rho_0(s^*) = \inf \{ \rho : 0 \in \Delta_\rho(s^*) \}$$

On définit alors :

$$\rho_f = \inf_{s^* \in \partial S} \rho_0(s^*)$$

En d'autres termes, ρ_f est la valeur limite pour laquelle certains polynômes dans la famille $\Delta_\rho(s)$ acquièrent des racines sur la frontière de stabilité ∂S .

2. Soit encore la valeur limite de ρ , notée ρ_d , pour laquelle certains polynômes dans $\Delta_\rho(s)$ perdent un degré :

$$\rho_d = \inf \{ \rho : \delta_n(s, P^\circ - \Delta P) = 0, \|\Delta P\| < \rho \}$$

Ce qui aboutit au théorème suivant :

Théorème 2.7 *La marge de stabilité paramétrique :*

$$\rho^* = \min \{ \rho_f, \rho_d \}$$

Le théorème précédent montre que le problème de la détermination de ρ^* peut se réduire aux étapes suivantes :

A / Déterminer la marge de stabilité "locale" $\rho(s^*)$ en chaque point s^* sur la frontière de la région de stabilité.

B / Minimiser la fonction $\rho(s^*)$ sur toute la frontière de stabilité et ainsi déterminer ρ_f .

C / Calculer ρ_d et poser,

D / $\rho^* = \min \{ \rho_f, \rho_d \}$.

la marge de stabilité paramétrique ou la distance de l'instabilité est mesurée au moyen de normes, et par conséquent la valeur numérique de ρ^* dépendra de la norme spécifiquement choisie, à savoir la norme l_1 , l_2 ou l_∞ (H_2 ou H_∞).

La détermination de ρ^* est un difficile problème d'optimisation non-linéaire. Cependant, en le partitionnant en différentes étapes (*A*, *B*, *C* et *D*), il peut devenir simple. En particulier lorsque les paramètres entrent linéairement dans les coefficients du polynôme caractéristique. Il se réduit dans le cas l_2 au problème des moindres carrés que nous allons voir par la suite, ou au problème des sommets ou de programmation linéaire, également simple pour le cas l_∞ et l_1 [6].

2.7.3 Calcul de la marge de stabilité paramétrique

On va présenter des formules explicites pour la marge de stabilité paramétrique dans le cas où les coefficients du polynômes caractéristique dépendent linéairement des paramètres incertains :

On pose l'équation caractéristique :

$$\delta(s, P) = a_1(s)p_1 + \dots + a_l(s)p_l + b(s) \quad (2.1)$$

Le vecteur des paramètres incertains :

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]$$

Le vecteur des paramètres nominaux :

$$P^\circ = [p^\circ_1 \ p^\circ_2 \ \dots \ p^\circ_l]$$

Le vecteur des perturbations :

$$\begin{aligned} \Delta P &= [p_1 - p^\circ_1, \ p_2 - p^\circ_2 \ \dots \ p_l - p^\circ_l] \\ &= [\Delta p_1, \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_l] \end{aligned}$$

l'équation caractéristique peut s'écrire :

$$\delta(s, P^\circ + \Delta P) = \underbrace{\delta(s, P^\circ)}_{\delta^\circ(s)} + \underbrace{a_1(s) \Delta p_1 + \dots + a_l(s) \Delta p_l}_{\Delta \delta(s, \Delta P)}$$

• Soit s^* un point sur la frontière de stabilité ∂S . Pour que $s^* \in \partial S$ soit une racine de $\delta(s, P^\circ + \Delta P)$, on doit avoir :

$$\delta(s^*, P^\circ) + a_1(s^*) \Delta p_1 + \dots + a_l(s^*) \Delta p_l = 0 \quad (2.2)$$

La norme $\|\Delta P\|$ minimale solution de cette équation nous donne $\rho(s^*)$; le calcul demandé à l'étape **A** dans la section précédente.

• De même, pour le cas d'une perte de degré, on a l'équation :

$$\delta_n(P^\circ + \Delta P) = 0 \quad (2.3)$$

Soit a_{in} le coefficient du terme de degré n dans le polynôme $a_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, l$. L'équation (2.3) devient :

$$\underbrace{a_{1n} p_1^\circ + a_{2n} p_2^\circ + \dots + a_{ln} p_l^\circ}_{\delta_n(P^\circ)} + a_{1n} \Delta p_1 + a_{2n} \Delta p_2 + \dots + a_{ln} \Delta p_l = 0 \quad (2.4)$$

La norme minimale $\|\Delta P\|$, solution de cette équation nous donne ρ_d .

Considérons les équations (2.2) et (2.4) précédentes avec plus de détail.

L'équation (2.4) peut s'écrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}}_{A_n} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{t_n} = \underbrace{-\delta_n^\circ}_{b_n} \quad (2.5)$$

Pour l'équation (2.2) deux cas peuvent surgir, selon que s^* soit réel ou complexe :

- Si $s^* = s_r$; s_r est réel, on a une seule équation :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1(s_r) & a_2(s_r) & \cdots & a_l(s_r) \end{bmatrix}}_{A(s_r)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{t(s_r)} = \underbrace{-\delta^\circ(s_r)}_{b(s_r)} \quad (2.6)$$

- Si $s^* = s_c$; s_c est complexe; avec x_r et x_i les parties réelle et imaginaire du nombre x , tel que $x = x_r + jx_i$ avec x_r et x_i des réels.

On aura :

$$\begin{aligned} a_k(s^*) &= a_{kr}(s^*) + ja_{ki}(s^*) \\ \delta^\circ(s^*) &= \delta_r^\circ(s^*) + j\delta_i^\circ(s^*) \end{aligned}$$

L'équation (2.2) sera équivalente à deux équations :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1r}(s_c) & a_{2r}(s_c) & \cdots & a_{lr}(s_c) \\ a_{1i}(s_c) & a_{2i}(s_c) & \cdots & a_{li}(s_c) \end{bmatrix}}_{A(s_c)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{t(s_c)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\delta_r^\circ(s_c) \\ -\delta_i^\circ(s_c) \end{bmatrix}}_{b(s_c)} \quad (2.7)$$

Ces équations déterminent complètement la marge de stabilité paramétrique pour toutes les normes.

Soit $t^*(s_c)$, $t^*(s_r)$, et t_n^* les solutions de normes minimales de (2.7), (2.6), (2.5) respectivement, ainsi on a :

$$\|t^*(s_c)\| = \rho(s_c) \quad (2.8)$$

$$\|t^*(s_r)\| = \rho(s_r) \quad (2.9)$$

$$\|t_n^*\| = \rho_d \quad (2.10)$$

Si l'une des équations précédentes (2.5 - 2.7) n'a pas de solution, la valeur correspondante de $\rho(\cdot)$ sera égale à l'infini.

Soit ∂S_r et ∂S_c les sous-ensembles réel et complexe de ∂S :

$$\partial S = \partial S_r \cup \partial S_c$$

$$\rho_r = \inf_{s_r \in \partial S_r} \rho(s_r)$$

$$\rho_c = \inf_{s_c \in \partial S_c} \rho(s_c)$$

Par conséquent ;

$$\rho_f = \inf \{ \rho_r, \rho_c \}$$

La section suivante va être réservée au cas spécifique de la norme l_2 (H_2).

2.7.4 La l_2 marge de stabilité paramétrique

On va s'intéresser à la solution de norme l_2 minimale des équations (2.5), (2.6) et (2.7).

- L'équation (2.7) :

- Supposons que $A(s_c)$ soit une matrice de rang complet, $\text{rang} = 2$.

Le vecteur $t^*(s_c)$ qui est solution de norme minimale se calcule par

$$t^*(s_c) = A^T(s_c) [A(s_c) \ A^T(s_c)]^{-1} b(s_c)$$

- Si $A(s_c)$ n'est pas de rang complet, les deux cas suivants peuvent surgir :

Cas 2.1 : $\text{Rang} \{A(s_c)\} = 0$, l'équation (2.7) n'a pas de solution :

$$\rho(s_c) = \infty$$

Cas 2.2 : $\text{Rang} \{A(s_c)\} = 1$,

- Si $\text{Rang} \{A(s_c), b(s_c)\} = 1$, on remplace l'équation (2.7) par une seule équation et on détermine la solution de norme minimale.
- Si $\text{Rang} \{A(s_c), b(s_c)\} \neq 1$, l'équation (2.7) n'a pas de solution :

$$\rho(s_c) = \infty$$

- De même si (2.6) et (2.5) n'ont pas de vecteur nuls, on peut calculer les solutions par :

$$t^*(s_r) = A^T(s_r) [A(s_r) A^T(s_r)]^{-1} b(s_r)$$

$$t_n^* = A_n^T [A_n A_n^T]^{-1} b_n$$

2.7.5 Exemple de calcul

Nous allons traiter un exemple de calcul de la l_2 marge de stabilité de Shur, c'est-à-dire la marge de stabilité paramétrique dans le cas d'un système discret, pour ainsi compléter la partie de la marge de stabilité.

Considérons un système de commande discret avec un correcteur et un processus spécifiés respectivement par leurs fonctions de transfert :

$$C(z) = \frac{z+1}{z^2} \quad \text{et} \quad G(z, P) = \frac{(-0.5 - 2p_0)z + (0.1 + p_0)}{z^2 - (1 + 0.4p_2)z + (0.6 + 10p_1 + 2p_0)}$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est :

$$\delta(z, P) = z^4 - (1 + 0.4p_2)z^3 + (0.1 + 10p_1)z^2 - (0.4 + p_0)z + (0.1 + p_0)$$

Les valeurs nominales :

$$P^\circ = [p^\circ_0 \quad p^\circ_1 \quad p^\circ_2] = [0 \quad 0.1 \quad 1]$$

La perturbation est notée par :

$$\Delta P = [\Delta p_0 \quad \Delta p_1 \quad \Delta p_2]$$

Le polynôme a une stabilité de Shur pour les paramètres nominaux P^o .

On calcul la l_2 marge de stabilité pour le polynôme :

$$\delta(z, P^o + \Delta P) = (-z + 1) \Delta p_0 + 10z^2 \Delta p_1 - 0.4z^3 \Delta p_2 + (z^4 - 1.4z^3 + 1.1z^2 - 0.4z + 0.1)$$

- On remarque que le degré reste invariant (=4) pour toute perturbation, donc :

$$\rho_d = \infty$$

La région de stabilité est le cercle unité, on calcul donc les marges pour $z = 1$, $z = -1$ et $z = e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

- Pour que $z = 1$ soit une racine de $\delta(z, P^o + \Delta P)$, de (2.6) on a :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 10 & -0.4 \end{bmatrix}}_{A(1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_0 \\ \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{bmatrix}}_{t(1)} = \underbrace{-0.4}_{b(1)}$$

$$\text{ainsi : } \rho(1) = \|t^*(1)\|_2 = \left\| A^T(1) [A(1) \quad A^T(1)]^{-1} b(1) \right\|_2 = 0.04$$

- De même $z = -1$, de (2.6) on a :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0.4 \end{bmatrix}}_{A(-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_0 \\ \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{bmatrix}}_{t(-1)} = \underbrace{-4}_{b(-1)}$$

$$\text{et : } \rho(-1) = \|t^*(-1)\|_2 = 0.3919$$

Par conséquent :

$$\rho_r = 0.04$$

- Pour le cas où $\delta(z, P^o + \Delta P)$ a des racines en $z = e^{j\theta}$ avec $\theta \neq \pi$ et $\theta \neq 0$, de (2.7) on a :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\cos \theta + 1 & 10 \cos 2\theta & -0.4 \cos 3\theta \\ -\sin \theta & 10 \sin 2\theta & -0.4 \sin 3\theta \end{bmatrix}}_{A(\theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_0 \\ \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{bmatrix}}_{t(\theta)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 4\theta - 1.4 \cos 3\theta + 1.1 \cos 2\theta - 0.4 \cos \theta + 0.1 \\ \sin 4\theta - 1.4 \sin 3\theta + 1.1 \sin 2\theta - 0.4 \sin \theta \end{bmatrix}}_{b(\theta)}$$

Ainsi :

$$\rho(e^{j\theta}) = \|t^*(\theta)\|_2 = \left\| A^T(\theta) [A(\theta) A^T(\theta)]^{-1} b(\theta) \right\|_2$$

et

$$\rho_c = \min \rho(e^{j\theta})$$

La figure 2.10 illustre le tracé de $\rho(e^{j\theta})$.

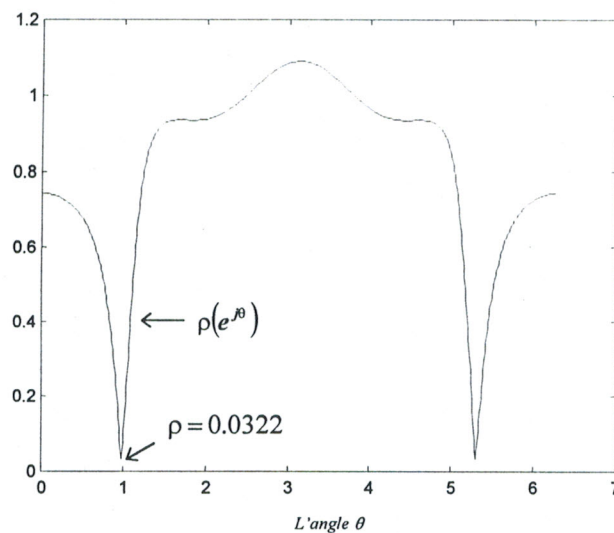


Fig.2.10 : Le tracé de $\rho(e^{j\theta})$.

Par conséquent, la l_2 marge de stabilité paramétrique est :

$$\rho_c = 0.032 = \rho_f = \rho^*$$

2.8 Conclusion

Dans le but de rapprocher, le plus possible, le modèle mathématique du processus physique et afin qu'il représente au mieux le comportement réel ; le modèle est toujours représenté avec des incertitudes du type adéquat à la nature du système réel.

Dans ce chapitre on s'est intéressé à l'incertitude paramétrique et spécialement à l'analyse de la stabilité en présence de celle-ci.

On a donc essayé de présenter les principaux résultats qui ont suscité un intérêt renouvelé de l'approche paramétrique ; à savoir les méthodes qui permettent l'analyse d'un polynôme réel ou de toute une famille de polynômes réels à incertitudes paramétrique.

Parmi ces méthodes paramétriques, nous avons : le théorème de croisement de frontière et sa version alternative donnée par le principe d'exclusion du zéro, le théorème d'alternance, de Kharitonov et le calcul de la marge de stabilité paramétrique.

Des outils, qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Chapitre 3

INTRODUCTION AU PROBLÈME DE LA FRAGILITÉ

3.1 Introduction

L'objet du présent chapitre est de présenter un problème, encore ouvert, intitulé “ *la fragilité* ”, qui se traduit par la sensibilité de la stabilité -et éventuellement des performances- à de petites variations dans les paramètres du correcteur.

Notons que le thème “*fragilité*” a été introduit récemment, pour la première fois, par Keel et Bhattacharyya dans leur article intitulé : “ Robust, Fragile or Optimal ? ” [27]. Suite auquel on a commencé à voir à travers de nouveaux articles l'intérêt porté à ce sujet. [2], [7], [12], [17],[23], [25], [26], [33], [34], [40], [41], [48], [49], [50]

On va donc voir : en premier lieu, les motivations qui ont abouti à l'apparition de cette fragilité, et à travers des exemples, la méthode avec laquelle on procède à l'analyse de la fragilité d'un correcteur, puis les causes éventuelles de celle-ci. Tout cela dans le cadre des systèmes SISO, donnés par des représentations fréquentielles.

3.2 La fragilité : un problème ouvert !

La synthèse des correcteurs robustes et optimaux est l'un des plus importants thèmes de recherche dans la commande des systèmes linéaires. Durant ces deux dernières décennies, d'élégantes approches, telles que les synthèses H_2 , H_∞ et μ ont été développées dans le but de résoudre un problème devenu classique, se résumant ainsi :

“Ayant un processus P avec une incertitude ΔP (additive par exemple). Trouvez le correcteur K qui garantit la stabilité interne et les performances désirées pour toute la famille $P + \Delta P$ ”.

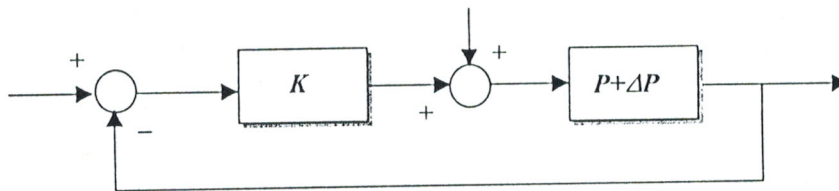


Fig.3.1 : Schéma standard d'un système de commande robuste.

Cependant, l'hypothèse implicite et propre à ces approches, consiste à supposer que le correcteur synthétisé soit implémenté d'une manière exacte. (voir figure 3.1).

Relativement parlant, cette hypothèse est valable - dans le sens où l'incertitude sur le processus est réellement le type d'incertitudes les plus significatives dans un système de commande - tant que les correcteurs sont implémentés avec un matériel de haute précision.

- Mais, est-ce le cas en pratique ?

Non malheureusement, car il se trouve qu'en réalité il y a plusieurs raisons qui font que le correcteur doit être capable de tolérer une certaine quantité d'incertitudes dans ses coefficients.

En effet, l'implémentation du correcteur est sujette à des imprécisions propres à la conversion A/D et D/A (Analogique/Digitale et Digitale/Analogique), aux longueurs des mots finis, aux instruments de mesure à résolution finie et aux erreurs d'arrondi dans les calculs numériques. Ainsi, il est nécessaire qu'existe une marge de tolérance -non nulle- autour du correcteur synthétisé; d'une part.

D'autre part, même si l'implémentation exacte du correcteur est possible, l'ingénieur de commande a souvent besoin de réajuster les paramètres du correcteur nominal qu'il a en mains; afin de satisfaire les exigences de performances qui n'étaient pas considérées lors du problème de synthèse initial. Cela signifie que toute procédure de synthèse devrait engendrer un correcteur qui a aussi suffisamment de place pour le réajustement de ses coefficients.

En résumé, le problème se traduit par le besoin que d'adéquates marges de stabilité et de performances soient disponibles autour des coefficients des fonctions de transfert ou d'autres paramètres caractérisant l'implémentation du correcteur nominal synthétisé.

Les systèmes de commande doivent être alors considérés d'une manière plus réaliste selon

le schéma de commande donné par la figure 3.2.

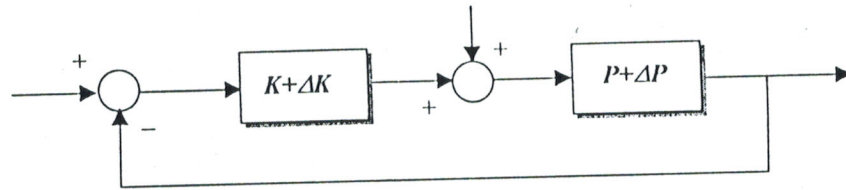


Fig.3.2 : Système de commande robuste avec incertitudes sur le correcteur.

On se pose alors la question : que savons-nous sur la quantité d'incertitudes ΔK qu'un correcteur implémenté $K + \Delta K$ puisse admettre, tout en restant aussi efficace que le correcteur synthétisé K ?

C'est dans un article publié récemment par Keel et Bhattacharyya que la question a été abordée. A travers des exemples et des calculs de marges de stabilité paramétriques des correcteurs, ils ont montré que des perturbations, extrêmement petites, sur les coefficients du correcteur issus de synthèses robustes ou optimales, pourraient entraîner la déstabilisation de la boucle fermée.

Ce résultat a permis à Keel et Bhattacharyya de qualifier un correcteur d'une telle sensibilité aux variations de ses coefficients, par le nom de "correcteur fragile". C'est ainsi alors, que s'ajoute le terme "fragilité" à la littérature de contrôle.

Notons que lorsqu'on parle de fragilité d'un correcteur; celle-ci peut être étudiée selon deux points de vue, celui :

- de la synthèse du correcteur : c'est la fragilité de la synthèse.
- ou de la forme du correcteur : c'est la fragilité des pôles et des zéros du correcteur.

Nous allons donc présenter par la suite, le problème ouvert de la fragilité dans ces deux derniers contextes.

3.3 Une synthèse est-elle Robuste, Fragile ou Optimale ?

Dans leur article Keel et Bhattacharyya on montré à travers des exemples que les correcteurs robustes et optimaux synthétisés par les approches H_2 , H_∞ et μ , peuvent produire des correcteurs extrêmement fragiles; dans le sens où une perturbation extrêmement petite dans leurs coefficients déstabiliserait la boucle fermée.

Pour plus de détails, on réserve cette section à la présentation des exemples qui leur ont permis de tirer leurs conclusions. On va étudier l'analyse de la fragilité de cinq exemples de synthèses optimales (et/ou robustes) pris de la littérature de commande.

Chaque exemple est un système mono-entrée/mono-sortie et le correcteur est synthétisé dans le but d'optimiser certaines fonctions de performances en boucle fermée.

La procédure avec laquelle on analyse la fragilité d'une synthèse consiste à fixer le modèle du processus nominal et à faire varier les coefficients du correcteur autour de leurs valeurs nominales. Par conséquent, c'est le correcteur qui sera considéré avec incertitudes, contrairement à ce qui a été le cas pour l'analyse de la robustesse.

L'équation caractéristique résultante sera donc fonction des paramètres incertains du correcteur.

La taille de la plus petite perturbation capable de déstabiliser la boucle fermée est donnée par le calcul de la marge de stabilité paramétrique (Msp) [6]. Le principe de calcul de cette marge est similaire à celui déjà présenté dans le chapitre précédent.

Cette marge sert alors comme une mesure quantitative de la fragilité des correcteurs synthétisés, à l'égard des incertitudes paramétriques évaluées au point nominal de leurs coefficients.

3.3.1 Correcteur H_∞ basé sur l'optimisation de la marge de gain

Cet exemple est pris du livre [19]. Il utilise comme synthèse la paramétrisation YJBK (de Youla Jabr Bongiorno et Kucera) et le problème d'ajustement H_∞ du modèle pour optimiser la plus grande marge de gain. Le processus à corriger :

$$P(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

Le correcteur synthétisé pour avoir la plus grande marge de gain égale à 3.5 (boucle fermée stable pour l'intervalle de gain de [1, 3.5]) est obtenu par optimisation de la norme H_∞ de la fonction de sensibilité complémentaire. Le correcteur trouvé est le suivant :

$$C(s) = \frac{q_6^0 s^6 + q_5^0 s^5 + q_4^0 s^4 + q_3^0 s^3 + q_2^0 s^2 + q_1^0 s + q_0^0}{p_6^0 s^6 + p_5^0 s^5 + p_4^0 s^4 + p_3^0 s^3 + p_2^0 s^2 + p_1^0 s + p_0^0}$$

avec :

$$\begin{aligned}q_6^0 &= 379 & p_6^0 &= 3 \\q_5^0 &= 39383 & p_5^0 &= -328 \\q_4^0 &= 192306 & p_4^0 &= -38048 \\q_3^0 &= 382993 & p_3^0 &= -179760 \\q_2^0 &= 383284 & p_2^0 &= -314330 \\q_1^0 &= 192175 & p_1^0 &= -239911 \\q_0^0 &= 38582 & p_0^0 &= -67626\end{aligned}$$

Les pôles de ce correcteur nominal sont les suivants :

$$174.70, \quad -65.99, \quad -1.86, \quad -1.04, \quad -0.98 \pm j0.03$$

Les pôles de la boucle fermée :

$$-0.4666 \pm j14.2299, \quad -5.5334 \pm j11.3290, \quad -1.0000 \pm j0.0002, \quad -1.0002, \quad -0.9998$$

Cela vérifie que le correcteur est en effet stabilisant.

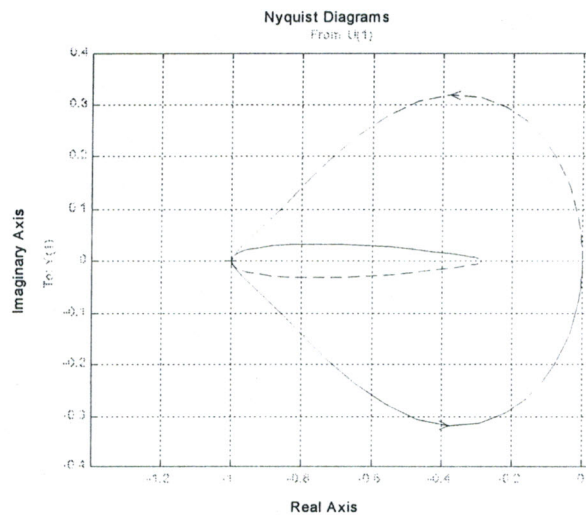


Fig.3.3 : Le tracé de Nyquist du système en boucle fermée $P(s).C(s)$.

On remarque sur la figure 3.3 que la plus grande marge de gain (le 3.5 désirée) est bien

atteinte. D'autre part, en remarque aussi que les plus petites marges de gain et de phase sont :

$$Mg = [1, 0.99915]$$

$$Mp = [0, 0.16807] \text{ degrés}$$

Ce qui fait qu'une réduction dans le gain de 1/1000 déstabiliserait le système en boucle fermée. De même qu'une très petite perturbation de phase est déstabilisante.

Pour continuer notre analyse, on va faire le calcul de la marge de stabilité paramétrique de ce correcteur. On regroupe les coefficients de la fonction de transfert du correcteur dans un vecteur de paramètres P , avec comme valeurs nominales :

$$P^0 = [q_6^0 \quad q_5^0 \quad q_4^0 \quad \dots \quad q_0^0 \quad p_6^0 \quad p_5^0 \quad p_4^0 \quad \dots \quad p_0^0]$$

et ΔP le vecteur représentant les perturbations sur P^0 :

$$\Delta P = [\Delta q_6 \quad \Delta q_5 \quad \Delta q_4 \quad \dots \quad \Delta q_0 \quad \Delta p_6 \quad \Delta p_5 \quad \Delta p_4 \quad \dots \quad \Delta p_0]$$

on aura :

$$P = P^0 + \Delta P \quad \text{avec} \quad q_i = q_i^0 + \Delta q_i \quad \text{et} \quad p_i = p_i^0 + \Delta p_i \quad \text{pour} \quad i = 0 \dots 6$$

E l'équation caractéristique aura la forme suivante :

$$E(s, P) = 1 + P(s) \cdot C(s, P)$$

$$E(s, P) = (s^2 - s - 2) (p_6 s^6 + p_5 s^5 + p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0) + (s - 1) (q_6 s^6 + q_5 s^5 + q_4 s^4 + q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0)$$

qui devient après substitution des valeurs nominales :

$$\begin{aligned}
E(s, \Delta P) = & 3s^8 + 48s^7 + 1278s^6 + 11867s^5 + 132213s^4 + 434230s^3 + \dots & (3.1) \\
& 609836s^2 + 393855s + 96670 + (s^7 - s^6) \Delta q_6 + (s^6 - s^5) \Delta q_5 + \\
& (s^5 - s^4) \Delta q_4 + (s^4 - s^3) \Delta q_3 + (s^3 - s^2) \Delta q_2 + (s^2 - s) \Delta q_1 + \\
& (s - 1) \Delta q_0 + (s^8 - s^7 - 2s^6) \Delta p_6 + (s^7 - s^6 - 2s^5) \Delta p_5 + \\
& (s^6 - s^5 - 2s^4) \Delta p_4 + (s^5 - s^4 - 2s^3) \Delta p_3 + (s^4 - s^3 - 2s^2) \Delta p_2 + \\
& (s^3 - s^2 - 2s) \Delta p_1 + (s^2 - s - 2) \Delta p_0
\end{aligned}$$

On calcule la marge l_2 de stabilité pour le polynôme caractéristique $E(s, \Delta P)$ à l'aide du théorème de croisement de frontières [6].

Le processus étant un système continu, le domaine de stabilité S est le demi plan gauche ouvert et l'axe des imaginaires représente alors la frontière de stabilité ∂S .

On rappelle que le calcul de la marge de stabilité paramétrique (M_{sp}) pour le cas continu, consiste à :

1. Calculer la marge (M_d) pour laquelle la famille des polynômes caractéristiques perd un degré.
2. Calculer la marge (M_0) pour $s = 0$ (la variable réelle).
3. Calculer la marge (M_w) pour $s = j\omega$ (la variable complexe pour $\omega \neq 0$).
4. Et à poser :

$$M_{sp} = \min \{M_d, M_0, M_w\}$$

1. La marge M_d pour laquelle l'équation E perd un degré. Le plus haut degré dans le cas de l'équation (3.1) est égale à 8. Calculer M_d revient à résoudre l'équation :

$$3 + \Delta p_6 = 0$$

On a immédiatement :

$$\Delta p_6 = -3$$

soit :

$$M_d = 3$$

2. La marge M_0 pour le cas $s = 0$:

En remplaçant $s = 0$ dans (3.1). M_0 se calcule en résolvant l'équation qui en résulte :

$$-\Delta q_0 - 2\Delta p_0 + 96670 = 0$$

Cette équation étant à deux inconnus :

- on peut la résoudre par une méthode géométrique. En traçant sa droite, la distance la plus petite entre cette droite et l'origine sera la valeur de la marge M_0 que nous cherchons.
- ou par une méthode analytique, en l'écrivant sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A(0)} \begin{bmatrix} \Delta q_6 \\ \Delta q_5 \\ \vdots \\ \Delta q_0 \\ \Delta p_6 \\ \Delta p_5 \\ \vdots \\ \Delta p_0 \end{bmatrix} = \underbrace{96670}_{B(0)}$$

La solution au sens des moindres carrés sera :

$$t(0) = A^T(0) [A(0) A^T(0)]^{-1} B(0)$$

$$M_0 = \|t(0)\|_2$$

$$M_0 = 43232.13827$$

3. La marge M_ω pour $s = j\omega$ et $\omega \neq 0$:

Puisque $s = j\omega$ l'équation caractéristique (3.1) contiendra une partie réelle et une partie imaginaire. Nous allons mettre les deux égales à zéro (pour $\omega \in]0, \infty[$), ce qui nous donne le système d'équations suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
 (\omega^6) & (-\omega^6) & (-\omega^4) & (\omega^4) & (\omega^2) & (-\omega^2) & (-1) & (\omega^8 + 2\omega^6) & \dots \\
 (-\omega^6) & (-\omega^4) & (\omega^4) & (\omega^2) & (-\omega^2) & (-1) & (1) & (\omega^6) & \dots \\
 (\omega^6) & (-\omega^6 - 2\omega^4) & (-\omega^4) & (\omega^4 + 2\omega^2) & (\omega^2) & (-\omega^2 - 2) & & & \\
 (-\omega^6 - 2\omega^4) & (-\omega^4) & (\omega^4 + 2\omega^2) & (\omega^2) & (-\omega^2 - 2) & (-1) & & &
 \end{bmatrix}}_{A(\omega)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}
 \Delta q_6 \\
 \Delta q_5 \\
 \Delta q_4 \\
 \Delta q_3 \\
 \Delta q_2 \\
 \Delta q_1 \\
 \Delta q_0 \\
 \Delta p_6 \\
 \Delta p_5 \\
 \Delta p_4 \\
 \Delta p_3 \\
 \Delta p_2 \\
 \Delta p_1 \\
 \Delta p_0
 \end{bmatrix}}_{t(\omega)} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
 -3 \omega^8 + 1278 \omega^6 - 132213 \omega^4 + 609836 \omega^2 - 96670 \\
 48 \omega^6 - 11867 \omega^4 + 434230 \omega^2 - 393855
 \end{bmatrix}}_{B(\omega)}$$

Ce système d'équations sera résolu au sens des moindres carrés pour chaque $\omega \in]0, \infty[$:

$$M(j\omega) = \|t(j\omega)\|_2$$

avec :

$$t(j\omega) = A^T(j\omega) [A(j\omega) A^T(j\omega)]^{-1} B(j\omega)$$

on aura :

$$\begin{aligned}M_{\omega} &= \min_{\omega \in]0, \infty[} M(j\omega) \\M_{\omega} &= 0.15813905985115 \quad \text{à } \omega = 14.271 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

4. La marge de stabilité paramétrique finale M_{sp} , sera :

$$\begin{aligned}M_{sp} &= \min \{M_d, M_0, M_{\omega}\} \\&= \min \{3, 43232.13827, 0.15813905985115\}\end{aligned}$$

d'où :

$$M_{sp} = 0.15813905985115$$

Cette marge de stabilité paramétrique (M_{sp}) nous permet d'avoir une idée sur la quantité de variations dans les coefficients du correcteur requise pour déstabiliser la boucle. Mais que sa valeur soit petite ou grande dépend des valeurs nominales des coefficients du correcteur. Donc, pour décider de la fragilité ou non d'un correcteur on doit se fier à la valeur normalisée de cette marge, c'est-à-dire au rapport suivant :

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|P^0\|_2}$$

avec P^0 le vecteur des valeurs nominales des coefficients du correcteur à analyser.

ρ représente le rapport normalisé du changement dans les paramètres du correcteur requis pour déstabiliser la boucle fermée. Dans ce cas :

$$\rho = 2.103407498368591 \times 10^{-7}$$

Un résultat pareil montre qu'un changement inférieur à 1/1 million dans les coefficients du correcteur déstabilise la boucle fermée. Ce correcteur est loin d'être robuste, en fait, on sera certainement juste en le qualifiant d'être un *correcteur fragile*.

Afin de vérifier ce résultat plutôt surprenant, on construit un correcteur déstabilisant dont

les paramètres sont obtenus en posant :

$$P = P^0 + \Delta P$$

Les pôles en boucle fermée du système commandé par le correcteur perturbé ($P = P^0 + \Delta P$) prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} &0.000000 \pm j14.27167 ; -5.57452 \pm j10.91867 \\ &-1.00674 \pm j0.01579 ; -1.00437 \quad -0.98204 \end{aligned}$$

On remarque que l'équation caractéristique du système avec correcteur perturbé possède une paire de racines ($0.000000 \pm j14.27167$) symétriques sur l'axe des imaginaires. Ce qui confirme qu'il y a bien eu croisement de frontière de stabilité à la pulsation $\omega = 14.2717$ et que le correcteur perturbé est en effet déstabilisant.

3.3.2 Un correcteur arbitraire

En vue de faire une comparaison entre un correcteur optimal et un correcteur arbitraire, on continue avec le même exemple de la section précédente mais cette fois-ci en choisissant un simple correcteur du premier ordre avec le même processus :

$$P(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

Le correcteur est synthétisé par placement de pôles. Les pôles en boucle fermée sont placés dans le demi-plan gauche d'une manière équidistante sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$. La fonction de transfert de ce correcteur est :

$$C(s) = \frac{q_1^0 s + q_0^0}{s + p_0^0}$$

avec :

$$\begin{aligned} q_1^0 &= 11.44974739 & p_0^0 &= -7.03553383 \\ q_0^0 &= 11.24264066 \end{aligned}$$

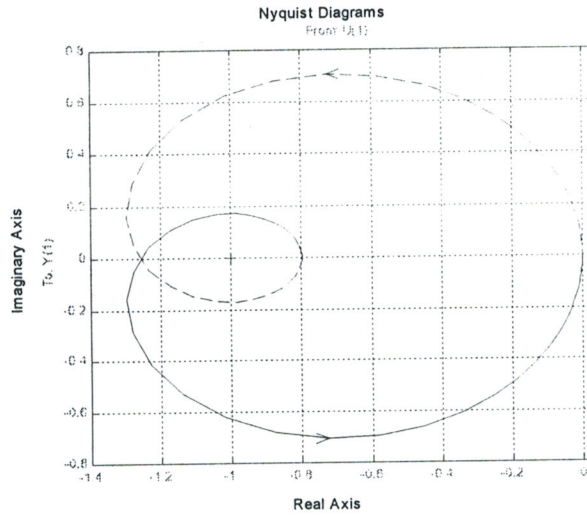


Fig.3.4 : Le tracé de Nyquist du système en boucle ouverte $P(s).C(s)$.

Le tracé de Nyquist de la boucle ouverte $P(s).C(s)$ est illustré par la figure 3.4. Les plus petites marges de gain et de phase sont :

$$Mg = [1, 0.79657155602288]$$

$$Mp = [0, -9.88729274575801] \text{ degrés}$$

► Le système peut tolérer une réduction de 21% dans la marge de gain. Il y a une amélioration par un facteur de 20000 par rapport au correcteur précédent. La marge de phase aussi est améliorée d'un facteur 60 environ.

On passe maintenant au calcul de la marge de stabilité paramétrique :

On introduit le vecteur de paramètres $P = P^0 + \Delta P$ correspondant aux coefficients du correcteur, avec des valeurs nominales et des incertitudes données respectivement par :

$$P^0 = [q_1^0 \quad q_0^0 \quad p_0^0] \quad \text{et} \quad \Delta P = [\Delta q_1 \quad \Delta q_0 \quad \Delta p_0]$$

L'équation caractéristique d'un système avec correcteur perturbé est la suivante :

$$E = s^3 + 3.41421356s^2 + 4.82842710s + 2.828427 + (s^2 - s)\Delta q_1 + (s - 1)\Delta q_0 + (s^2 - s - 2)\Delta p_0$$

1. La marge M_d pour laquelle l'équation E perd un degré.

Le plus haut degré dans ce cas est égale à 3. Le coefficient correspondant ne peut jamais être nul, d'où

$$M_d = \infty$$

2. La marge M_0 pour le cas $s = 0$.

M_0 se calcul en résolvant l'équation :

$$2.82842700 - \Delta q_0 - 2\Delta p_0 = 0$$

qui s'écrit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_0 \\ \Delta p_0 \end{bmatrix}}_{t(0)} = \underbrace{-2.828427}_{B(0)}$$

$$\Rightarrow M_0 = 1.26491100827916$$

3. La marge M_ω pour $s = j\omega$ et $\omega \neq 0$:

Ce qui nous donne le système d'équations suivant à résoudre :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (-\omega^2) & (-1) & (-\omega^2 - 2) \\ (-1) & (1) & (-1) \end{bmatrix}}_{A(j\omega)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_0 \\ \Delta p_0 \end{bmatrix}}_{t(j\omega)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.41421356\omega^2 - 2.82842700 \\ \omega^2 - 4.8284271 \end{bmatrix}}_{B(j\omega)}$$

$$\begin{aligned} M(j\omega) &= \|t(j\omega)\|_2 \\ &= \left\| A^T(j\omega) [A(j\omega) A^T(j\omega)]^{-1} B(j\omega) \right\|_2 \end{aligned}$$

avec :

$$M_w = \min_{\omega \in]0, \infty[} M(j\omega)$$

on aura :

$$M_w = 1.85294116591621$$

4. la marge de stabilité finale :

$$\begin{aligned} M_{sp} &= \min \{M_d, M_0, M_w\} \\ &= \min \{\infty, 1.26491100827916, 1.85294116591621\} \end{aligned}$$

d'où

$$M_{sp} = 1.26491100827916$$

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|P^0\|_2}$$

avec P^0 le vecteur des valeurs nominales des coefficients du correcteur à analyser.

le rapport normalisé du changement dans les paramètres du correcteur requis pour déstabiliser la boucle fermée, est donné par :

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|P^0\|_2} = 0.07219317556675$$

► Comparé à la valeur de ρ de l'ordre du 10^{-7} près trouvée dans l'exemple du correcteur précédent. On remarque que ce correcteur peut tolérer un changement de $\rho = 7.2\%$ près dans les valeurs de ses coefficients comparée à la valeur de $\rho = 10^{-4}\%$ près, du correcteur optimal.

En plus de l'amélioration dans les marges de gain et de phase, on a aussi une forte amélioration dans la marge de stabilité paramétrique normalisée du présent correcteur. Par conséquent, sur tous les plans, le correcteur non-optimal est extrêmement moins fragile que le correcteur optimal.

3.3.3 Correcteur H_∞ robuste

L'exemple suivant a été pris aussi de la littérature de commande [19]. Il synthétise un correcteur H_∞ robuste et optimal qui minimise $\|W_2(s)T(s)\|_\infty$ où $T(s)$ est la fonction de sensibilité complémentaire et la pondération $W_2(s)$ est choisie comme fonction passe-haut.

$$W_2(s) = \frac{s + 0.1}{s + 1}$$

La fonction de transfert du processus est :

$$P(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 0.5s - 0.5}$$

Le correcteur robuste optimal trouvé :

$$C(s) = \frac{-124.5s^3 - 364.95s^2 - 360.45s - 120}{s^3 + 227.1s^2 + 440.7s + 220}$$

Les pôles du système en boucle fermée sont :

$$\begin{aligned} & -99.999\,999\,999\,999\,94 \\ & -1.000\,009\,632\,815\,84 \\ & -0.999\,99\,518\,359\,208 \pm j0.00000834211207 \\ & -0.100\,000\,000\,000\,00 \end{aligned}$$

par conséquent le correcteur stabilise le processus nominal.

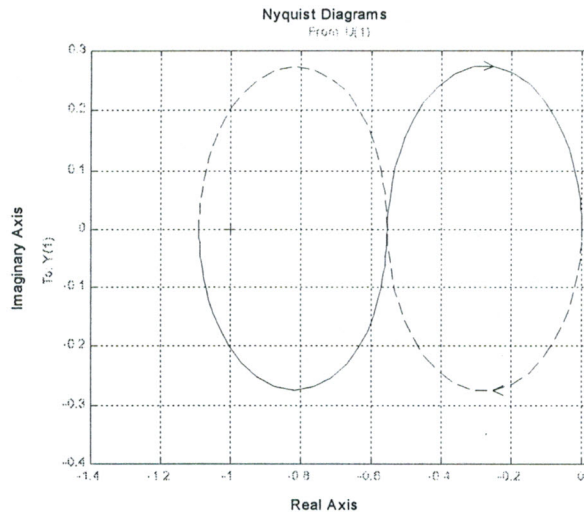


Fig.3.5 : Le tracé de Nyquist du système en boucle ouverte $P(s) \cdot C(s)$.

Le tracé de Nyquist de la boucle ouverte $P(s) \cdot C(s)$ est illustré par la figure 3.5. Les plus petites marges de gain et de phase sont :

$$Mg = [1, 0.916\ 666\ 666\ 666\ 67]$$

$$Mp = [0, 12.911\ 703\ 277\ 617\ 36] \text{ degrés}$$

Des marges pareilles, sont assez pauvres et pourraient probablement être inacceptables dans le système réel.

Pour notre analyse on regroupe toujours les coefficients du correcteur dans le vecteur P . La procédure de calcul de la marge de stabilité paramétrique est similaire à celle déjà utilisée dans les sections précédentes. On trouve :

1. La marge M_d à laquelle l'équation caractéristique perd un degré :

$$M_d = 1$$

2. La marge M_0 pour le cas $s = 0$:

$$M_0 = 8.94427190999916$$

3. La marge M_w pour le cas $s = j\omega$ avec $\omega \in]0, \infty[$:

$$M_w = 46.41995685282448$$

la norme l_2 de la plus petite perturbation déstabilisante ΔP est :

$$M_{sp} = 1$$

Le rapport normalisé est alors :

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|P^0\|_2} = 0.00130498398260$$

► Ce qui laisse voir que le correcteur qui par synthèse est fortement robuste vis-à-vis des perturbations H_∞ et des erreurs de modèle, est assez fragile vis-à-vis des perturbations sur ses coefficients.

3.3.4 Correcteur basé sur la μ synthèse

Cet exemple traite le cas d'un correcteur synthétisé pour un système de suspension électromagnétique. Ce correcteur a été synthétisé en utilisant la technique de la μ synthèse.

La fonction de transfert du système :

$$P(s) = \frac{-36.27}{s^3 + 45.69s^2 - 4480.9636s - 204735.226884}$$

Le correcteur conçu pour tolérer l'incertitude structurée prescrite au processus est donné par :

$$C(s) = \frac{q_6^0 s^6 + q_5^0 s^5 + q_4^0 s^4 + q_3^0 s^3 + q_2^0 s^2 + q_1^0 s + q_0^0}{s^7 + p_6^0 s^6 + p_5^0 s^5 + p_4^0 s^4 + p_3^0 s^3 + p_2^0 s^2 + p_1^0 s + p_0^0}$$

avec :

$$q_6^0 = -5.220000000000000 \times 10^8$$

$$q_5^0 = -1.190629800000000 \times 10^{11}$$

$$q_4^0 = -1.089211902480000 \times 10^{13}$$

$$q_3^0 = -5.104622252074320 \times 10^{14}$$

$$q_2^0 = -1.285270261841830 \times 10^{16}$$

$$q_1^0 = -1.629532689765926 \times 10^{17}$$

$$q_0^0 = -7.937217972339767 \times 10^{17}$$

$$p_6^0 = 1.468170000000000 \times 10^3$$

$$p_5^0 = 8.153914724000001 \times 10^5$$

$$p_4^0 = 2.268680248018680 \times 10^8$$

$$p_3^0 = 1.818763428483511 \times 10^{10}$$

$$p_2^0 = 5.698409038920188 \times 10^{11}$$

$$p_1^0 = 6.284542925855980 \times 10^{12}$$

$$p_0^0 = 6.227740485023126 \times 10^{11}$$

Les pôles en boucle fermée sont :

$$-557.780980781351$$

$$-424.062740635735$$

$$-127.987138247385 \pm j32.750959185160$$

$$-67.791476257991$$

$$-66.940000007491$$

$$-45.689999998569$$

$$-42.997168378274$$

$$-26.311678722910 \pm j9.297227877310$$



Ce qui montre que le système en boucle fermée est nominalement stable.

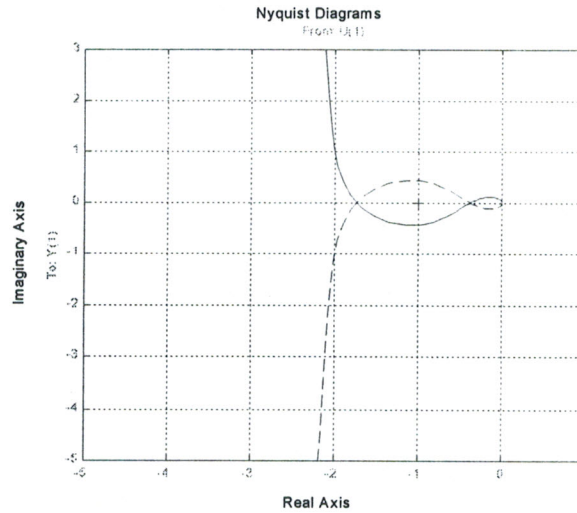


Fig.3.6 : Le tracé de Nyquist du système en boucle ouverte $P(s) \cdot C(s)$.

D'après le tracé de Nyquist de la figure 3.6 les marges de gain et de phase prennent les valeurs respectives suivantes :

$$Mg = [0.5745485459 , 2.5853154084]$$

$$Mp = [0 , \pm 24.0555115710]$$

Pour le calcul de la marge de stabilité paramétrique, on regroupe les coefficients du correcteur dans le vecteur des paramètres P . Suivant la même procédure déjà utilisée on calcule :

1. La marge M_d à laquelle l'équation caractéristique perd un degré :

Le coefficient du plus haut degré est constant, d'où

$$M_d = \infty$$

2. La marge M_0 pour le cas $s = 0$:

$$M_0 = 1.399895161473642 \times 10^{14}$$

3. La marge M_w pour le cas $s = j\omega$ avec $\omega \in]0, \infty[$:

$$M_w = 1.179386747290289 \times 10^3$$

la norme l_2 de la plus petite perturbation déstabilisante ΔP est :

$$M_{sp} = 1.179386747290289 \times 10^3$$

Le rapport normalisé est alors :

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|P^0\|_2} = 1.455352738086887 \times 10^{-15}$$

► Un résultat pareil indique que la boucle fermée est très très fragile à l'égard des perturbations dans les paramètres du correcteur.

En remarquant encore les valeurs des marges de gain et de phase trouvées, elles nous font penser que de bonnes marges de gain et de phase ne sont pas nécessairement de bons indicateurs de la robustesse. Cependant des marges de gain et/ou de phase pauvres sont de bons indicateurs de la fragilité!

3.3.5 Le correcteur H_2 -optimal

Cet exemple de synthèse est extrait du livre [19]. Le système à corriger a comme fonction de transfert :

$$P(s) = \frac{-s + 1}{s^2 + s + 2}$$

Le correcteur optimal est synthétisé en minimisant la norme H_2 pondérée de la fonction de transfert des perturbations $\|W(s)P(s)S(s)\|_2$ où $S(s)$ est la fonction de sensibilité. On obtient :

$$C(s) = \frac{q_6^0 s^6 + q_5^0 s^5 + q_4^0 s^4 + q_3^0 s^3 + q_2^0 s^2 + q_1^0 s + q_0^0}{p_6^0 s^6 + p_5^0 s^5 + p_4^0 s^4 + p_3^0 s^3 + p_2^0 s^2 + p_1^0 s}$$

avec :

$$\begin{aligned}q_6^0 &= 1.0002 & p_6^0 &= 0.0001 \\q_5^0 &= 3.0406 & p_5^0 &= 1.0205 \\q_4^0 &= 8.1210 & p_4^0 &= 2.1007 \\q_3^0 &= 13.2010 & p_3^0 &= 5.1403 \\q_2^0 &= 15.2004 & p_2^0 &= 6.06 \\q_1^0 &= 12.08 & p_1^0 &= 2.0 \\q_0^0 &= 4.0 & p_0^0 &= 0\end{aligned}$$

Les pôles en boucle fermée sont :

$$\begin{aligned}-99.99999999999976 &\pm j0.00000554547470 \\-0.49999995583131 &\pm j1.32287571852361 \\-0.50000004416869 &\pm j1.32287559254097 \\-1.00000006893990 \\-0.99999993106011\end{aligned}$$

Ce qui vérifie la stabilité.

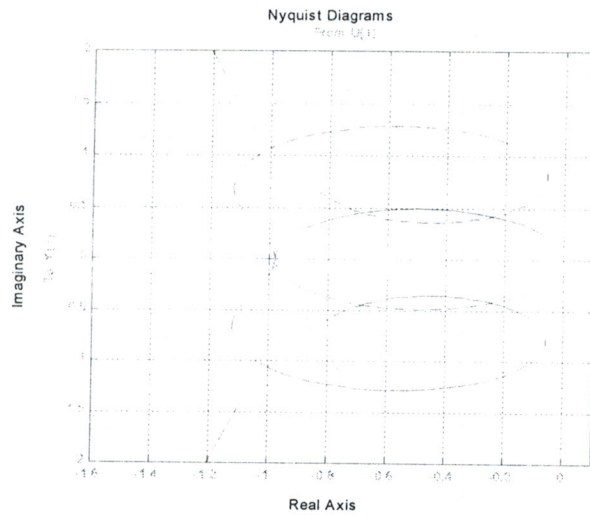


Fig.3.7 : Le tracé de Nyquist du système en boucle ouverte $P(s).C(s)$.

Les valeurs des marges de gain et de phase sont :

$$Mg = [1, 1.02000161996515]$$

$$Mp = [0, 6.86646258505439]$$

C'est des marges assez pauvres.

Avec la même procédure de calcul, on trouve :

1. La marge M_d à laquelle l'équation caractéristique perd un degré :

$$M_d = 0.0001$$

2. La marge M_0 pour le cas $s = 0$:

$$M_0 = 4$$

3. La marge M_w pour le cas $s = j\omega$ avec $\omega \in]0, \infty[$:

$$M_w = 0.00608964116843$$

la norme l_2 de la plus petite perturbation déstabilisante ΔP est :

$$Msp = 0.0001$$

Le rapport normalisé est alors :

$$\rho = \frac{Msp}{\|P^0\|_2} = 3.737066131643625 \times 10^{-6}$$

La valeur de cette marge normalisée, indique encore que ce correcteur est extrêmement fragile.

3.4 La fragilité des pôles et des zéros

L'apparition du problème de la fragilité dans la littérature de commande a ouvert de nouvelles voies d'études et de recherches. Selon Keel et Bhattacharyya, la fragilité d'un correcteur

peut être due à la méthode avec laquelle celui-ci a été synthétisé. Cependant, récemment un scientifique Finlandais P.M. Mäkilä a donné une autre interprétation de la fragilité. Il s'est justifié, lui aussi, à travers un exemple en annonçant que la fragilité d'un correcteur peut être due aussi à la forme de sa fonction de transfert. Autrement dit, c'est la fragilité des pôles et des zéros de ce correcteur.

Nous allons voir à présent le problème selon le point de vue de Mäkilä.

3.4.1 Exemple académique

Le système à étudier a comme fonction de transfert :

$$G_n(q^{-1}) = \frac{0.30003^n q^{-1}}{(1 + 0.69997 q^{-1})^n} = \frac{0.30003^n q^{n-1}}{(q + 0.69997)^n}$$

avec :

$n \geq 1$ l'ordre du système

q et q^{-1} dénotent respectivement, l'opérateur d'avance et de retard dans le temps, tel que :
 $(qu)(t) = u(t+1)$ et $(q^{-1}u)(t) = u(t-1)$.

Ce système est stable et tous ses pôles se situent en " -0.69997 ".

il est opportun de définir la dispersion des pôles par :

$$D = \max_{i,j} |p_i - p_j|$$

où les $\{p_i\}$ sont les pôles du système.

Dans le cas de ce système :

- La dispersion :

$$D = 0$$

- Les pôles sont déterminés à partir de l'équation :

$$(q + 0.69997)^n = 0$$

Généralement dans l'identification des boîtes noires et dans les synthèses de commande les numérateurs et les dénominateurs des fonctions de transfert sont donnés sous leurs formes

développées.

La forme développée du dénominateur de notre système pour le cas $n = 8$ est donnée, grâce au logiciel de calcul numérique et symbolique MAPLE, par :

$$\begin{aligned}
 (q + 0.69997)^8 = & q^8 + 5.59976q^7 + \\
 & 13.7188240252q^6 + 19.205530505838488q^5 + \\
 & 16.80411898521470805670q^4 + \\
 & 9.4099033328645913587586392q^3 + \\
 & 3.293325017952614006695142340412q^2 + \\
 & 0.65863677509036892179039965257662504q + \\
 & 0.0576282479325006917732032556017575286561
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Voyons ce qui pourrait arriver aux pôles lorsque l'on arrondi à 5 chiffres les coefficients du dénominateur donné sous sa forme développée.

Le dénominateur approximé est donné par :

$$\begin{aligned}
 (z + 0.69997)^8 = & z^8 + 5.5998z^7 + 13.719z^6 + 19.206z^5 + 16.804z^4 + \\
 & 9.4099z^3 + 3.2933z^2 + .65864z + .057628
 \end{aligned}$$

Les racines de l'expression approximative deviennent :

$$\begin{aligned}
 & -1.106438677 \\
 & -.9145515157 \pm j.3089738833 \\
 & -.6258401230 \pm j.3042599473 \\
 & -.4838691080 \pm .1591702294 \\
 & -.4448398297
 \end{aligned}$$

Notons que la dispersion D des pôles est à présent égale à 0.66 ! En plus, il y a un pôle qui se trouve à l'extérieur du cercle unité, ce qui veut dire que le système arrondi (approximé) est instable.

Si on répétait les calculs en prenant cette fois-ci les coefficients du dénominateur développé avec une approximation de 6 chiffres significatifs, les pôles obtenus seront tous à l'intérieur du cercle unité. (Cela reste vrai si on utilise encore plus de 6 chiffres significatifs). Par conséquent, 5 est le plus grand nombre de chiffres significatifs pour lequel le système approximé est instable.

3.4.2 Discussion dans le cas général

Soit un système d'ordre n ayant des coefficients avec des chiffres après la virgule.

On définit $d(n)$, le nombre de chiffres significatifs que l'on prend dans les coefficients pour que le système arrondi passe de l'instable au stable, comme une fonction de l'ordre n du système.

après l'exemple précédent et suivant la même méthode, Mäkilä a essayé de déterminer $d(n)$ comme une fonction de l'ordre n du système. A sa grande surprise, il a trouvé qu'il est très difficile de continuer les calculs pour $n > 20$, même si les coefficients sont pris avec plus de 200 chiffres. Car à partir de $n = 20$, les programmes de résolutions d'équations dans MAPLE commencent à se plaindre des problèmes de mal conditionnement.

Plusieurs valeurs de $d(n)$ ont été trouvées, telles que :

$$d(5) = 5$$

$$d(10) = 6$$

$$d(12) = 8$$

$$d(15) = 10$$

$$d(20) = 13$$

D'après de telles valeurs, il semble raisonnable de prétendre que le nombre de chiffres significatifs, $d(n)$ - requis pour prédire que les pôles du système arrondi soient stables - croît presque linéairement en fonction de l'ordre n du système. Des remarques que Mäkilä qualifie d'accablantes.

De telles observations on retient selon Mäkilä les conséquences suivantes :

- Le correcteur ne doit pas être implémenté sous la forme standard d'une fonction de transfert développée.
- Les règles d'identification par boîtes noires ont besoin d'être réexaminées.
- Il est très important de comprendre lesquelles des propriétés du système peuvent être réellement identifiées pour des expériences avec une précision raisonnable.
- En plus, les méthodes de synthèse qui comptent beaucoup sur les pôles et les zéros, telles que le placement de pôles et la commande à variance minimale, risquent de perdre partiellement leurs justifications.

Dans les livres concernant les systèmes de commande ou l'identification des systèmes, les exemples donnés contiennent des systèmes d'ordre 1-3 seulement; donc il n'y a pas de problèmes généralement. Les choses commencent à être intéressantes à partir de l'ordre 3-5. Les exigences de précision peuvent devenir même très importantes à partir de l'ordre 4-9.

Par l'occasion, combien nous faut-il prendre de chiffres significatifs dans les coefficients du dénominateur développé et arrondi du système G_8 pour que ses racines soient égales à -0.69997 à 1% près?

La réponse : c'est 19 chiffres.

Ainsi se posent de difficiles questions, à savoir :

- S'il n'y a pas un moyen fiable pour représenter les systèmes linaires invariants (LTI) dont les fonctions de transfert ne présentent pas des pôles et des zéros dangereusement errants?
- S'il n'y a pas un moyen fondamental pour décrire ces représentations de systèmes et de correcteurs qui ne présentent pas de fortes sensibilités de pôles et de zéros à de petites perturbations dans les paramètres de ces représentations?
- S'il n'y a pas un moyen pour éviter les représentations ayant des pôles et des zéros *fragiles*?

3.5 Conclusion

Le but de ce chapitre était de présenter le problème de la fragilité tel qu'il a été introduit dans la littérature de commande. On a constaté que la fragilité peut être considérée selon deux points de vue :

- La fragilité due à certains types de synthèses, selon les propos de Keel et Bhattacharyya.

Les résultats de calculs donnés montrent que les synthèses H_∞ , H_2 et μ peuvent mener à des correcteurs fragiles. Dans le sens où de très petites perturbations dans les coefficients du correcteur entraînent l'instabilité.

Il a été constaté aussi que la fragilité s'introduit souvent par des marges de gain et de phase extrêmement faibles aussi. Sachant que celles-ci étaient calculées pour le processus nominal; alors que serait-ce les marges de l'ensemble des processus incertains qui pourrait être même plus pauvres.

Pour ce qui est de la marge de stabilité paramétrique autour des coefficients nominaux du correcteur ; les très faibles valeurs trouvées signifient que pratiquement il ne reste plus de liberté à réajuster ou à accorder les paramètres du correcteur.

Ainsi, du moins pour les exemples présentés ci-dessus, l'ingénieur de commande qui choisit de telles synthèses optimales est obligé de, soit accepter une conception fragile ou de la rejeter entièrement.

- La fragilité des pôles et des zéros. Selon les propos de Mäkilä, la fragilité peut être la conséquence de l'implémentation du correcteur sous une mauvaise forme de fonction de transfert, à savoir la forme d'une fonction de transfert développée. Il a été constaté que cette forme exige d'être considérée avec plus de précision à mesure que l'ordre du système augmente.

Par conséquent, les résultats trouvés évoquent des remarques importantes, qui remettent en cause la fiabilité de certaines méthodes de synthèses ainsi que la forme avec laquelle on implémente les correcteurs qui en résultent.

Vu le rôle des synthèses robustes et optimales telles qu'elles ont été développées durant ces deux dernières décennies dans les applications pratiques, il est important de revoir la question de fragilité avec plus de profondeur. Pour se faire, nous allons nous intéresser dans les prochains chapitres à faire l'analyse de fragilité dans le cadre des représentations dans l'espace d'état de deux types de synthèses robustes et optimales , à savoir : La synthèse optimale LQR et la commande H_∞ -optimale.

Chapitre 4

FRAGILITÉ D'UNE SYNTHÈSE OPTIMALE PAR LQR

4.1 Introduction

Le problème de la fragilité que nous avons déjà présenté dans le chapitre précédent concerné surtout les correcteurs robustes et optimaux donnés par une représentation fréquentielle. Pour encore mieux compléter cette présentation, nous allons dédier ce chapitre ainsi que le suivant à l'étude de la fragilité des correcteurs issus des synthèses optimales, et cela dans le cadre des représentations d'état. Parmi les synthèses optimales, notre choix s'est porté sur la synthèse du *Régulateur Quadratique Optimal*, *LQR* (*Linear Quadratic Regulator*).

Après définition du Benchmark *pendule inversé* que nous allons prendre comme application, nous allons lui synthétiser une loi de commande *LQR*. Une fois cette loi de commande disponible nous passerons à l'analyse de sa fragilité. Le même scénario va se répéter pour le cas d'une synthèse *LQR* avec estimateur d'ordre complet et le cas d'une synthèse *LQR* avec estimateur d'ordre réduit.

4.2 Système d'application : le pendule inversé

4.2.1 Définition

Le pendule inversé est souvent utilisé pour tester les nouvelles théories de commande destinées aux systèmes de nature instable. Son expérience consiste en un chariot mobile sur

lequel est attachée, à travers, une charnière l'extrémité d'une tige formant ainsi le pendule. (voir figure 4.1)

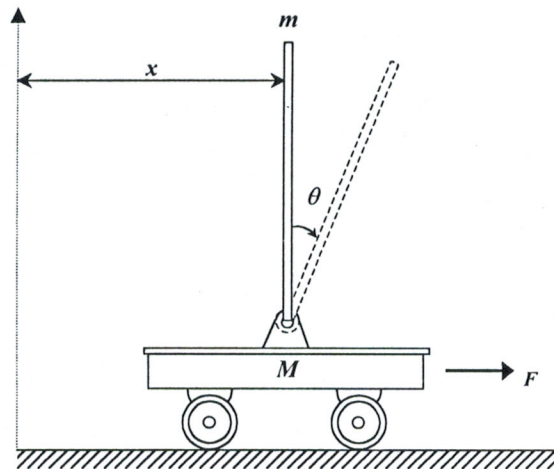


Fig.4.1 : Le système pendule inversé.

avec :

M : la masse du chariot.

m : la masse du pendule.

l : la distance entre le centre de rotation et le centre de gravité de la tige.

h : la hauteur de l'axe de rotation par rapport au sol, de valeur constante.

r : le rayon de la roue du véhicule.

x : la position du chariot par rapport à l'origine.

θ : la déviation du pendule par rapport à la verticale.

L'objectif de la commande est de maintenir le pendule à la position verticale avec moins de déplacements possibles pour le chariot, chose qui n'est pas possible sans qu'il n'y ait tout le temps l'assistance d'une force extérieure. Pour ce faire - après mesure de la position du pendule et du chariot - et suivant une certaine loi de commande $u(t)$, une force F provenant d'un moteur électrique est appliquée sur le chariot afin de l'ajuster en même temps que le pendule. Ce qui résulte en un système sous actionné ayant à commander deux sorties avec seulement une entrée.

Le pendule et le chariot n'ont qu'un seul degré de liberté. C'est-à-dire que le pendule ne peut tourner que dans le plan vertical et que le chariot ne peut aller qu'en arrière ou en avant. On remarque alors, que le problème du pendule inversé est apparenté au problème d'équilibrage d'un bâton sur le bout d'un doigt. Il peut être vu aussi, d'une manière plus

rigoureuse, comme un problème de mise en équilibre d'une fusée lors de son décollage.

4.2.2 Le modèle du système

Pour l'étude du système "pendule inversé", un modèle a été établi [11]. Ce modèle tient compte principalement des équations qui régissent le comportement dynamique du système.

D'autre part, on sait que les frottements influencent beaucoup le fonctionnement des systèmes dynamiques. Pour pouvoir ainsi synthétiser des lois de commandes performantes, il est alors nécessaire de réaliser des modélisations très fines par la prise en compte des frottements.

Le système à modéliser étant piloté par un moteur électrique à aimant permanent, il s'avère nécessaire d'introduire encore les caractéristiques de ce dernier dans le modèle final afin d'avoir une représentation plus complète.

Modèle dynamique

Le modèle dynamique peut être établi suivant le formalisme de Lagrange qui consiste à :

- Choisir les coordonnées généralisées (q_1, \dots, q_k) .
- Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des variables (q_i, \dot{q}_i, t) .
- Ecrire les équations de Lagrange.
- Etudier les solutions de ces équations.

Pour le cas du pendule inversé, les coordonnées généralisées sont $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$.

Après calcul, on obtient un modèle non-linéaire et fortement couplé. Il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} ml \cos \theta \ddot{x} + (I + ml^2) \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \\ (M + m) \ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \end{cases} \quad (4.1)$$

avec I l'inertie du pendule.

Modèle des frottements

Les frottements interviennent principalement au niveau des actionneurs et des transmissions mécaniques. Ils dépendent de nombreux facteurs, entre autres : la vitesse de déplacement

(sens et amplitude), la température et les caractéristiques mécaniques du système (lubrifiant, roulement, etc...).

Le frottement est souvent modélisé de façon simplifiée par la relation :

$$Fr = Fv \dot{q} + Fs \text{ signe}(\dot{q})$$

avec :

Fv : coefficient de frottement visqueux.

Fs : coefficient de frottement sec ou de Coulomb.

$\text{signe}(\cdot)$: La fonction signe.

Lorsque les frottements sont considérés, le modèle donné par l'équation (4.1) devient :

$$\begin{cases} ml \cos \theta \ddot{x} + (I + ml^2) \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = -Fv_1 \dot{\theta} - Fs_1 \text{ signe}(\dot{\theta}) \\ (M + m) \ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F - Fv_2 \dot{x} - Fs_2 \text{ signe}(\dot{x}) \end{cases} \quad (4.2)$$

Modèle du moteur électrique

Le schéma électrique du moteur est donné par la figure 4.2 :

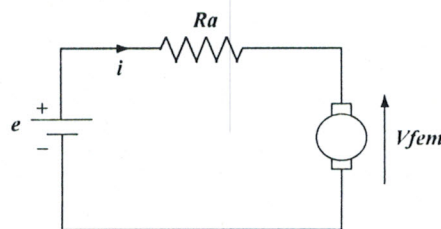


Fig.4.2 : Schéma électrique du moteur.

- Le couple mécanique T fourni par le moteur est lié au courant par :

$$T = K_1 i$$

où K_1 est la constante du couple.

L'équation électrique du moteur s'écrit :

$$e - V_{fem} = R_a i$$

avec :

R_a la résistance d'armature du moteur

V_{fem} : la force électromotrice, $V_{fem} = K_2 \Omega$, où K_2 est le rapport vitesse-tension du moteur et Ω la vitesse de rotation du moteur, $\Omega = \frac{\dot{x}}{r}$.

- Par ailleurs, le couple appliqué au véhicule est lié à la force d'entraînement F par :

$$T = r \cdot F$$

On peut alors exprimer la force d'entraînement en fonction de la tension par la relation :

$$F = \frac{K_1 e}{R_a r} - \frac{K_1 K_2}{R_a r^2} \dot{x} \quad (4.3)$$

Le modèle final

Il est clair que le modèle final s'obtient à partir de (4.2) et (4.3). Grâce à la théorie des états, le système (4.2) décrit par deux équations différentielles d'ordre deux, peut être représenté par quatre équations différentielles du premier ordre.

Pour pouvoir décrire le système (4.2) sous forme de représentation d'état, on pose :

- Le vecteur d'état : $X = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$
- Le vecteur de sortie : $y = [x, \theta]^T$
- l'entrée du système : $u = F$

(le vecteur X sera noté x , mais il ne faut pas le confondre avec la position du pendule notée aussi par x)

Le modèle se présente alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ y = h(x) \end{cases}$$

ou de manière explicite :

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{x} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} m g l \sin \theta - F v_1 \dot{\theta} - F s_1 \operatorname{sign}(\dot{\theta}) & I + m l^2 \\ m l \sin \theta \dot{\theta}^2 + F - F v_2 \dot{x} - F s_2 \operatorname{sign}(\dot{x}) & m l \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} ml \cos \theta & mgl \sin \theta - Fv_1 \dot{\theta} - Fs_1 \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \\ M + m & ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F - Fv_2 \dot{x} - Fs_2 \operatorname{sign}(\dot{x}) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} ml \cos \theta & I + ml^2 \\ M + m & ml \cos \theta \end{bmatrix}$$

Le modèle non-linéaire du pendule-véhicule-moteur en tenant compte des caractéristiques du moteur et des frottements est donné par :

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\Delta} \left[m^2 l^2 g \cos x_2 \sin x_2 - Fv_1 ml \cos x_2 x_4 - Fs_1 ml \cos x_2 \operatorname{sign}(x_4) - (I + ml^2) ml \sin x_2 x_4^2 + (I + ml^2) Fv_2 x_3 + (I + ml^2) Fs_2 \operatorname{sign}(x_3) + (I + ml^2) \frac{K_1 K_2}{R_a r^2} x_3 - (I + ml^2) \frac{K_1}{R_a r} e \right]$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\Delta} \left[(M + m) mgl \sin x_2 - (M + m) Fv_1 x_4 - (M + m) Fs_1 \operatorname{sign}(x_4) - m^2 l^2 g \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 + ml \cos x_2 Fv_2 x_3 + ml \cos x_2 Fs_2 \operatorname{sign}(x_3) + ml \cos x_2 \frac{K_1 K_2}{R_a r^2} x_3 - ml \cos x_2 \frac{K_1}{R_a r} e \right]$$

et

$$\Delta = M ml^2 + I (M + m) + m^2 l^2 \sin^2 x_2$$

Le modèle ainsi obtenu est un modèle non-linéaire et compliqué. Dans la pratique, nous sommes souvent contraints à simplifier ou à idéaliser les propriétés réelles d'un système et à ne tenir compte que des éléments de base nous permettant d'analyser le système réel d'une manière plus ou moins facile.

Pour se faire, nous allons négliger l'inertie et les effets des frottements secs et visqueux. Et puisque le pendule doit rester à la position verticale, nous pouvons supposer que θ et $\dot{\theta}$ restent faibles, et poser : $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ et $\theta \dot{\theta} \approx 0$.

Nous obtenons alors le modèle simplifié suivant :

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{4.4}$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{mg}{M} x_2 - \frac{K_1 K_2}{M R_a r^2} x_3 + \frac{K_1}{M R_a r} e$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(M + m)}{M l} g x_2 + \frac{K_1 K_2}{M l R_a r^2} x_3 - \frac{K_1}{M l R_a r} e$$

qui se présente sous la forme linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

où $x \in R^n$, $y \in R^p$ et $u \in R^m$ sont respectivement le vecteur d'état, d'observation et de commande.

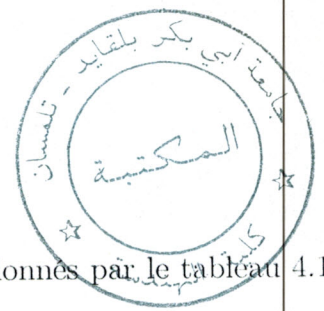
A , B et C sont respectivement la matrice d'état, de commande et d'observation.

Le système (4.4) est alors équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m}{M}g & -\frac{K_1 K_2}{M R_a r^2} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)}{Ml}g & \frac{K_1 K_2}{Ml R_a r^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{M R_a r} \\ -\frac{K_1}{Ml R_a r} \end{bmatrix} e \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

c'est le modèle final simplifié du système pendule inversé.



4.2.3 Les paramètres du système [11]

Les paramètres utilisés dans le modèle du pendule inversé sont donnés par le tableau 4.1 suivant :

Paramètre	Description	Valeur
M	masse du chariot	0.785 Kg
m	masse du pendule	0.130 Kg
l	la distance du centre de gravité	0.96 m
g	accélération due à la gravité	9.81 m/s ²
K_1	constante de couple du moteur DC	0.25916 N.m
K_2	rapport vitesse-tension du moteur DC	0.003409 V / rad / A
R_a	résistance d'armature du moteur DC	6 Ω
r	diamètre de la roue du chariot	0.01 m

Tableau 4.1 : Les paramètres du pendule inversé.

4.2.4 L'analyse du système

Après substitution des valeurs données par le tableau 4.1 dans le modèle donné par (4.5), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.6245859872 & -1.8757461571 & 0 \\ 0 & 11.9110270700 & 1.9539022469 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.5023354564 \\ -5.7315994338 \end{bmatrix}}_B u \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

L'ensemble des valeurs propres du système pendule inversé est donné par :

$$VP = \{0, 3.3622940641, -3.6953387744, -1.5427014467\}$$

On remarque que le système possède une valeur propre à partie réelle positive ; il est alors instable en boucle ouverte. Par conséquent, il est clair qu'une loi de commande doit être mise au point afin de stabiliser le pendule inversé.

Assurons nous maintenant que notre système est bien commandable et observable en calculant le rang des matrices de commandabilité et d'observabilité [45] :

$$\begin{aligned} \text{Rang } C_{(A,B)} &= \text{Rang } [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = 4 \\ \text{Rang } O_{(A,C)} &= \text{Rang } [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T = 4 \end{aligned}$$

avec $n = 4$ l'ordre du système.

En effet, le système est commandable et observable.

Remarque 4.1 *Lorsqu'une seule sortie est mesurée, par exemple θ , le système devient inobservable car :*

$$\text{Rang } O_{(A,C)} = 3$$

4.3 La commande optimale LQR

Pour un système linéaire, continu, invariant, régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

avec $x(t) \in R^n$ désignant le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ le vecteur de commande, et $y(t) \in R^p$ le vecteur des sorties régulées. A , B et C des matrices de dimensions appropriées indépendantes du temps.

La synthèse d'une commande **optimale Linéaire Quadratique** dénommée **LQ** ou **LQR** (*Linear Quadratic Regulator*) consiste en la recherche d'une matrice de gain K_c , telle que la commande $u(t) = -K_c x(t)$ soit une commande stabilisante et optimale. L'optimalité recherchée est mesurée au sens de la minimisation de la fonction du coût donnée par le critère quadratique suivant :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.9)$$

La fonction J représente la somme pondérée de l'énergie de l'état x et celle de la commande u . Les matrices de pondération respectives Q et R doivent être choisies en respectant les contraintes suivantes :

- Q matrice ($n \times n$) symétrique et semi-définie positive ($Q \geq 0$). On la prend généralement $Q = C^T C$.
- R matrice ($m \times m$) symétrique et définie positive ($R > 0$).

Pour la résolution de tels problèmes de commande optimale quadratique, nous pouvons suivre différentes techniques ([4], [14],[31],[42]), telles que :

- La technique de minimisation par les équations d'Euler-Lagrange,
- La théorie de Bellman-Hamilton-Jacobi,
- La principe du minimum de Pontriagin.

qui aboutissent en la commande par retour d'état optimale :

$$u(t) = -Kx(t) \tag{4.10}$$

La matrice K ($m \times n$) du retour d'état a pour expression :

$$K = R^{-1} B^T P$$

où P est une matrice ($n \times n$) définie positive solution de l'équation algébrique de Riccati donnée par :

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

La valeur minimale du critère est donnée par :

$$J_{\min} = x_0^T P x_0$$

avec $x_0 = x(t_0)$ l'état à l'instant initial.

En boucle fermée, après substitution de l'équation (4.10) dans le système (4.8), on obtient :

$$\dot{x} = (A - BK) x$$

$(A - BK)$ est alors la matrice du système en boucle fermée et par conséquent ses valeurs

propres représentent les pôles du système en boucle fermée.

Le montage d'une commande par retour d'état optimal est donné par le schéma bloc suivant :

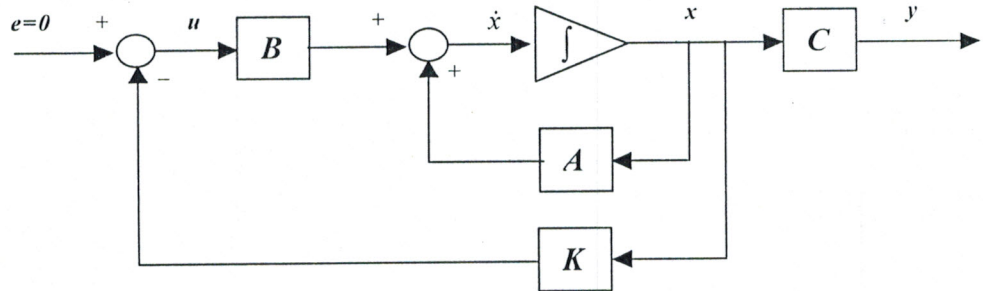


Fig.4.3 : Schéma de principe d'un système de commande par retour d'état optimal.

Remarques 4.1 • *Il est important de noter qu'en plus du fait qu'un correcteur synthétisé par l'approche LQR soit optimal, il a aussi des propriétés de robustesse très fortement garanties. à savoir une marge de gain infinie et une marge de phase de 60° [4], [20], [45].*

- *La commande par retour d'état optimal établie par le problème LQR garantie d'être stabilisante pour tout critère de performance de la forme de J (4.9) ; pourvu seulement que la paire (C, A) soit détectable et (A, B) stabilisable [13], [45].*

- *Jusqu'à présent, la synthèse a été établie en supposant que tous les états x du système étaient disponibles, alors qu'en réalité on a accès qu'à un nombre réduit de variables d'état au moyen de l'équation de sortie $y(t) = C x(t)$. Car en fait, certains états ne sont pas toujours accessibles, soit parce que c'est difficile voir impossible de les mesurer technologiquement ou que cela revient trop cher économiquement. Pour résoudre le problème des états inaccessibles on a généralement recours à l'utilisation d'un reconstituteur d'état appelé "obsevateur".*

4.4 La commande Optimale LQR avec Observateur d'Ordre Complet

Pour appliquer une commande par retour d'état optimal sur un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (4.11)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (4.12)$$

avec $x(t)$ des états inaccessibles, il est nécessaire de disposer d'un observateur, pour pouvoir utiliser les états estimés $\hat{x}(t)$ au lieu de $x(t)$. Chose qui n'est possible qu'à conditions d'avoir une paire (A, C) observable ou de modes non observables stables (détectables).

L'observateur qu'on va présenter est un système linéaire, stable, réalisable et capable de fournir l'estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ en respectant la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$$

En d'autres termes, il faut que l'erreur d'estimation de l'état tende asymptotiquement vers zéro.

En 1960, Luenberger [31] a proposé pour les systèmes linéaires observables, l'observateur défini par l'équation :

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + L (y - C \hat{x}) \quad (4.13)$$

qui correspond à une simulation ($\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + \dots$) constamment corrigée par l'écart constaté entre la sortie observée et la sortie reconstruite ($\dots + L (y - C \hat{x})$).

L'objectif est de choisir la matrice L , appelée gain de l'observateur, de telle sorte que l'erreur d'estimation $e(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$ tende asymptotiquement vers zéro malgré qu'on a $\hat{x}(0) \neq x(0)$.

Pour cela, on va écrire l'équation différentielle de l'erreur d'estimation $e(t)$ en faisant la soustraction membre à membre de (4.11) et (4.13), ce qui donne :

$$\dot{e}(t) = (A - LC) e(t) \quad (4.14)$$

La solution de cette équation différentielle tend asymptotiquement vers zéro ($e(t) \rightarrow 0$) si et seulement si la matrice $(A - LC)$ est asymptotiquement stable; c'est à dire, si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative. Ces valeurs propres représentent la dynamique de l'observateur. Pour spécifier cette dynamique, il suffit alors de choisir convenablement La matrice de gain L .

Le problème de la détermination de la matrice de gain L de l'observateur est un problème dual de celui de la détermination de gain de commande K .

Le calcul du gain L se fait alors suivant la même procédure de calcul utilisée pour avoir le

gain K , mais en remplaçant :

- A par A^T
- B par C^T
- K par L^T
- Q par Q_o
- R par R_o .

Le système en boucle fermée résultant de l'interconnexion (4.11)-(4.12) avec l'observateur (4.13) et la commande $u(t) = -K \hat{x}(t)$, dont le schéma de principe est donné par la figure 4.4, peut être décrit par le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v(t)$$

En utilisant le modèle (4.14) de l'erreur d'estimation, l'équation du système global devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

On constate alors que le polynôme caractéristique du système en boucle fermée ainsi obtenu est donné par :

$$\det \left\{ sI - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \right\} = \det \{sI - (A - BK)\} \cdot \det \{sI - (A - LC)\}$$

On peut remarquer que l'ensemble des valeurs propres du système global est égal à l'union des deux spectres introduits respectivement par le régulateur (K) et l'observateur (L).

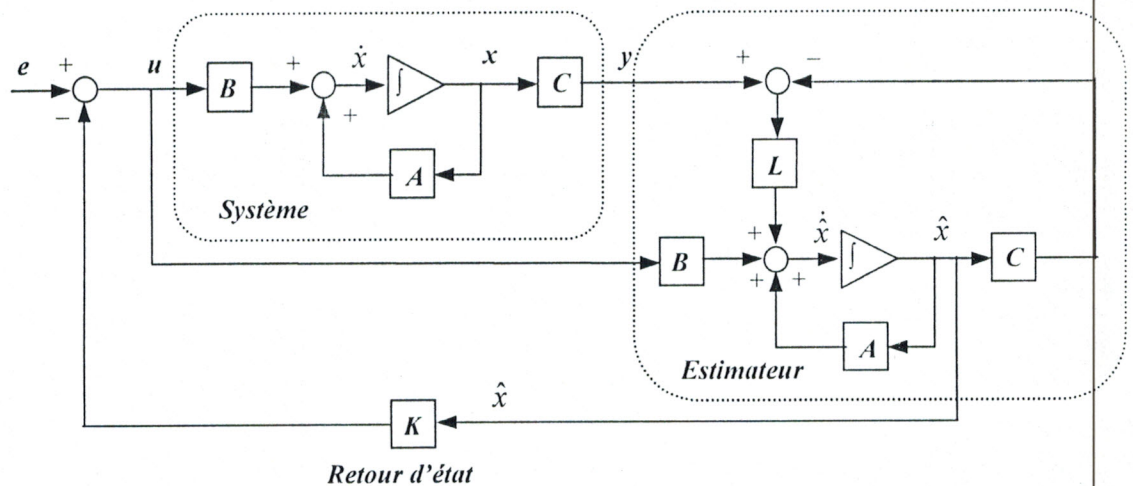


Fig.4.4 : Schéma de principe d'un système de commande LQR+observateur d'ordre complet.

Remarque 4.2 L'observateur présenté dans cette section est dit observateur d'ordre complet parce qu'il est du même ordre que le système à corriger. Autrement on l'appellerait, observateur d'ordre réduit.

4.5 La commande Optimale LQR avec Observateur d'Ordre Réduit

La commande considérée est toujours du type $u = -Kx(t)$ avec $x(t)$ étant les variables d'état du système. On a vu dans la section précédente qu'on pouvait substituer les variables estimées $\hat{x}(t)$ aux variables $x(t)$ en cas où ces dernières ne sont pas entièrement disponibles.

Pour un système à n états dont m sont des sorties mesurables, il semblerait redondant d'estimer les m états déjà disponibles. Par exemple, si $y = x_1$ l'observateur d'ordre complet estimera x_1 , même s'il est évident que cela n'est pas nécessaire. Théoriquement, tout ce dont on a besoin c'est d'estimer les états inconnus. Ce qui résulte en un observateur d'ordre $(n-m)$, introduit par D. Luenberger [31], [45], appelé *observateur d'ordre réduit*.

L'observateur d'ordre réduit assure une configuration plus simple et plus économique et si le nombre des variables mesurées m est élevé, l'avantage est encore considérable.

Pour synthétiser un observateur d'ordre réduit, on commence d'abord par définir une

transformation linéaire des états, donnée par :

$$z = T x$$

avec : T matrice de dimension $(n - m) \times n$, et z vecteur de dimension $(n - m) \times 1$.

T est une matrice quelconque telle que $E = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$ est une matrice non-singulière. On définit $E^{-1} = [P \mid M]$ qui existe si $\text{rang}(C) = m$.

En combinant y et z , on aura :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = [P \mid M] \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = P y + M z$$

Supposons qu'on puisse établir un observateur d'ordre complet pour estimer z ; un observateur de dimension égale à la dimension de z , soit $n - m$. On peut donc avoir l'estimée de x à partir de :

$$\hat{x} = P y + M \hat{z} \quad \text{avec } \hat{z} \text{ l'estimée de } z$$

Par conséquent, tout ce qui nous reste à faire pour estimer x c'est d'établir un observateur pour estimer z .

Pour se faire, on a besoin de connaître les dynamiques de z , c'est-à-dire, les équations différentielles qui régissent le comportement des variables z . Celles-ci s'obtiennent en prémultipliant les premières équations d'état (4.11) par E ; ce qui correspond à un changement de base, d'où une nouvelle réalisation du système :

$$E \dot{x}(t) = E A x(t) + E B u(t)$$

en remplaçant x et E , on aura :

$$E \dot{x} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A x + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} B u = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A [P \mid M] \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} B u$$

on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAP & CAM \\ TAP & TAM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CB \\ TB \end{bmatrix} u \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (4.15)$$

L'équation différentielle de z est donnée par :

$$\dot{z} = A_{22}z + (A_{21}y + B_2u) \quad (4.16)$$

L'observateur d'ordre complet de z a la structure suivante :

$$\dot{\hat{z}} = A_{22}\hat{z} + \underbrace{(A_{21}y + B_2u)}_{(a)} + \underbrace{L(y - C\hat{x})}_{(b)} \quad (4.17)$$

Le terme (a) est une quantité connue, elle est considérée comme entrée de l'observateur ; le terme (b) est un terme de correction destiné à stabiliser le système d'erreur de l'observateur. On remarque qu'avec $[P \mid M] = E^{-1}$, on a $CP = I$ et $CM = 0$, d'où :

$$y - C\hat{x} = y - C(Py + M\hat{z}) = y - CPy - CM\hat{z} = y - y - 0 = 0$$

Donc, le terme (b) après tout n'ajoute aucune correction.

Par fois, dans la théorie de contrôle classique, le retour de sorties seul n'est pas efficace, alors qu'un retour de sorties avec leurs dérivées pourrait aider. Théoriquement, si y est disponible, on peut supposer que sa dérivée l'est aussi. De là, dans le terme correcteur, on utilise à la place de y , sa dérivée \dot{y} .

Du système (4.15), on a :

$$\dot{y} = A_{11}y + A_{12}z + B_1u \quad (4.18)$$

De (4.17) et (4.18), l'observateur d'ordre réduit est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_{22}\hat{z} + (A_{21}y + B_2u) + L(\dot{y} - A_{11}y - B_1u - A_{12}\hat{z})$$

$$\dot{\hat{z}} = A_{22}\hat{z} + (A_{21}y + B_2u) + L A_{12} (z - \hat{z}) \quad (4.19)$$

Pour que cet observateur fonctionne correctement, il faut que l'erreur d'estimation $e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$, avec le temps, tende asymptotiquement vers zéro.

On obtient les dynamiques du système d'erreur en retranchant (4.16) de (4.19) et en remplaçant \dot{y} par (4.18), ce qui donne :

$$\dot{e} = (A_{22} - L A_{12}) e$$

Le système d'erreur contient un paramètre encore inconnu, c'est le vecteur L (ou matrice L dans le cas multi-sorties). Le problème maintenant est de savoir comment déterminer L .

Luenberger a montré que l'observabilité de la paire (C, A) est équivalente à l'observabilité de la paire (A_{12}, A_{22}) . Donc par dualité, L peut être choisi pour placer les valeurs propres du système d'erreur quelque part dans le demi-plan gauche du plan complexe.

La détermination de L d'un observateur d'ordre réduit se fait de la même manière que celle d'un observateur d'ordre complet mais en remplaçant seulement :

- A par A_{22}
- C par A_{12}

Le principe de séparation est toujours valable dans le cas d'un observateur d'ordre réduit. On peut le remarquer en combinant les équations du système en boucle fermée avec celles du système d'erreur :

pour $u = -K \hat{x}$ et $\dot{x} = Ax - BK \hat{x}$, on peut trouver que $\hat{x} = x - M e$ et que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK M \\ 0 & A_{22} - L A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Par conséquent, l'ensemble des valeurs propres du système en boucle fermée contient à la fois les valeurs propres du régulateur et celles de l'observateur d'ordre réduit.

Remarques 4.2

- Dans le cas où la matrice $C = [I_m \mid 0_{m,n-m}]$, la matrice T peut être choisie :

$$T = [0_{n-m,m} \mid I_{n-m}] \quad \implies \quad E = I_n$$

- On remarque que les mesures apparaissent directement à la sortie de l'observateur, par conséquent les bruits de mesures risquent de passer par ce dernier. Donc le choix d'un observateur d'ordre réduit doit être pris avec prudence dans le cas où les bruits présentent un danger.

4.6 Choix des matrices de pondération

Parmi les compromis que doit traiter l'automaticien, on trouve celui de l'équilibrage entre les écarts de sortie et la sollicitation des actionneurs, la commande LQR est évidemment un instrument privilégié pour négocier ce compromis.

Le grand intérêt de cette commande est d'engendrer des lois de commandes stabilisantes par l'intermédiaire de paramètres de synthèses Q et R dont la manipulation exerce une action sélective sur les réponses et sur la commande.

Pour la détermination de ces paramètres on pourra être utilement guidé par la connaissance de quelques propriétés limites, lorsque Q ou R tendent vers 0, [14].

▷ $Q \rightarrow 0$:

La commande qui en résulte est à énergie minimale puisque $u(t)$ seule est pénalisée. Pour un système instable en boucle ouverte, la réflexion des pôles instables est un phénomène instructif : une instabilité *rapide* exigera une boucle fermée également rapide si on veut faire le minimum d'effort, et ce minimum ne sera pas infiniment petit. Par exemple, il est clair qu'il est impossible de rétablir l'équilibre d'un pendule inversé sans qu'il y ait un minimum d'énergie. Par conséquent, un tel choix pour la pondération Q ne convient pas pour la commande du pendule.

▷ $Q \rightarrow \infty$ (ou $R \rightarrow 0$) :

Un choix pareil revient à libérer totalement la commande, ce qui donne une commande à temps minimum. La tendance prévisible est une accélération des temps de réponses.

Remarque 4.3 Lors du choix des matrices de pondération destinées à une synthèse d'observateur, on doit respecter le fait que les valeurs propres de l'observateur doivent être plusieurs fois (3 à 10 fois) plus rapides que celle du correcteur afin d'assurer la convergence rapide de l'estimation. On choisit, par exemple, Q_o 5 fois plus importante que Q_c .

4.7 Analyse de la fragilité d'une synthèse LQR

En vue de faire une analyse de la fragilité d'une loi commande optimal LQR, nous allons d'abord commencer par synthétiser celle-ci pour de différents choix de matrices de pondération.

4.7.1 Synthèse LQR

Le modèle du système pendule inversé pour le quel on synthétise notre loi de commande par LQR, est donné par (4.7). On rappelle que les matrices du modèle prennent les valeurs suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.6245859872 & -1.8757461571 & 0 \\ 0 & 11.9110270700 & 1.9539022469 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.5023354564 \\ -5.7315994338 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On choisit des matrices de pondération R_c et Q_c , de la forme :

$$R_c = 1$$

$$Q_c = q_c C^T C = \begin{bmatrix} q_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag} \left\{ \underbrace{[q_c, q_c, 0, 0]}_{D_{Q_c}} \right\}$$

avec q_c un paramètre scalaire qu'on va fixer à une valeur prise de l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000\}$.

Le vecteur de commande K introduit au système par la commande $u = -Kx$ est calculé grâce à la boîte à outils **Control System Toolbox** du Logiciel MATLAB [10],[45]. En particulier à l'aide de la fonction `lqr`.

Le tableau suivant résume les différents gains K correspondant aux différentes matrices de pondération Q_c .

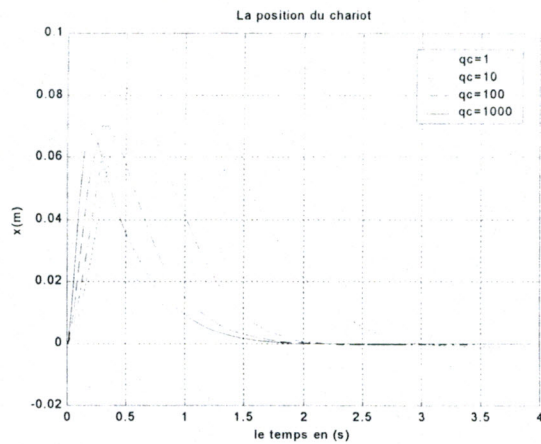
La diagonale de Q_c	Les Gains de commande K
$(Q_{c1}) : [1, 1, 0, 0]$	$[-01.000000 \quad - 10.349836 \quad - 01.683507 \quad - 03.128364]$
$(Q_{c2}) : [10, 10, 0, 0]$	$[-03.162277 \quad - 17.676192 \quad - 03.530313 \quad - 05.345641]$
$(Q_{c3}) : [100, 100, 0, 0]$	$[-10.000000 \quad - 38.094960 \quad - 08.916739 \quad - 11.403012]$
$(Q_{c4}) : [1000, 1000, 0, 0]$	$[-31.622776 \quad - 96.974649 \quad - 25.077891 \quad - 28.579958]$

Tableau 4.2 : Les gains de commande LQR correspondant aux différents choix de matrices de pondération.

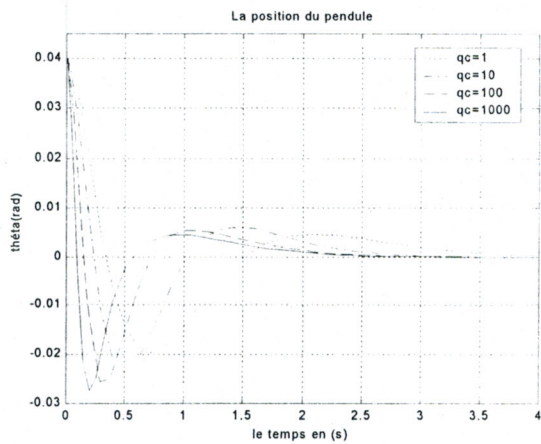
Une fois la synthèse terminée, nous allons passer à la validation de ses résultats. Nous allons donc présenter ci-dessous les simulations effectuées sur Simulink pour les gains de commande correspondant aux différents choix de matrices de pondération.

La simulation consiste à voir la position du chariot et du pendule et la commande pour le cas où :

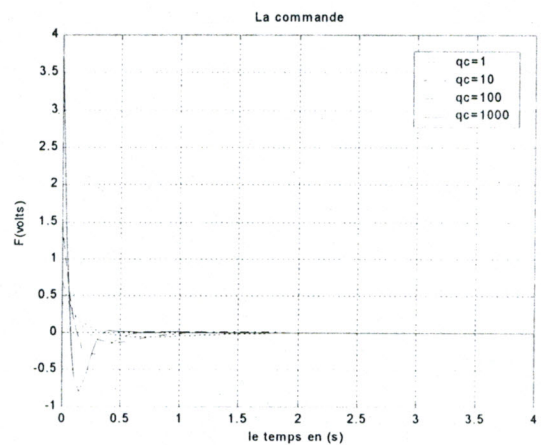
- ▶ le pendule est initialement écarté de la position verticale d'un angle θ_i (figure 4.5).
- ▶ le pendule est en équilibre, jusqu'à ce qu'une perturbation d_θ intervienne (figure 4.6).
- ▶ Il y a présence de bruits de mesures (figure 4.7).



(a) : Position du chariot.

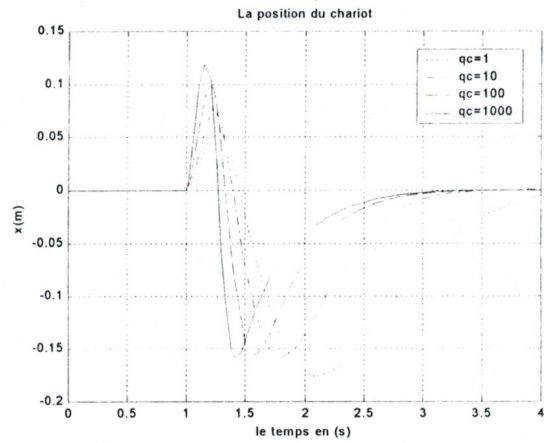


(b) : Position du pendule.

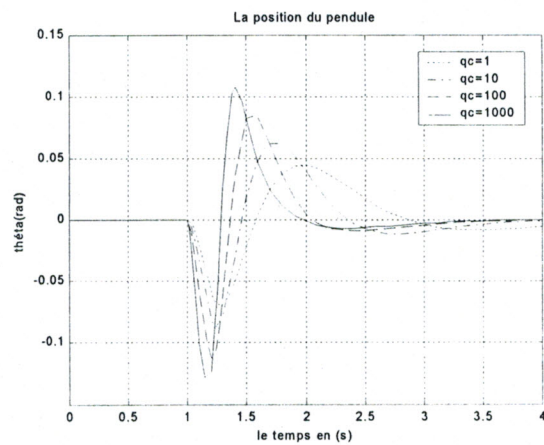


(c) : La commande appliquée sur le chariot.

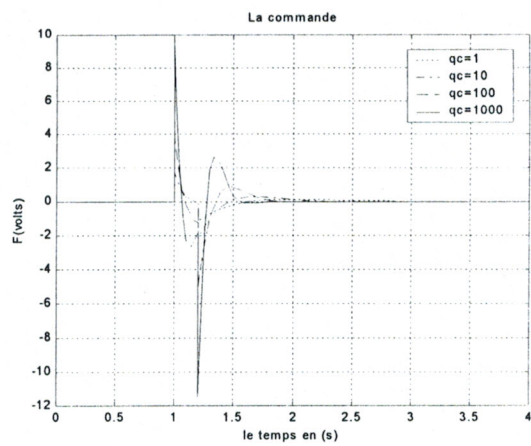
Fig.4.5 : Les résultats d'une commande LQR. Cas d'un pendule initialisé à l'angle $\theta_i = 0.04$ rad.



(a) : Position du chariot.

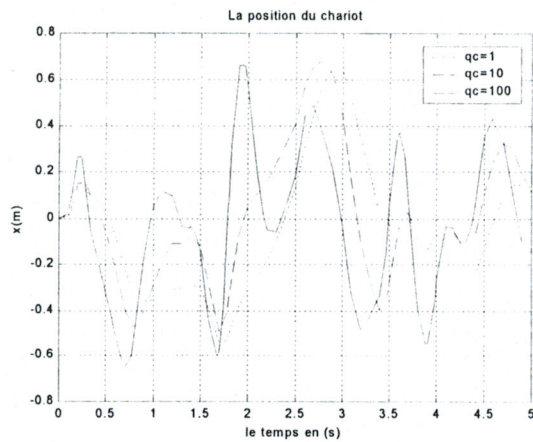


(b) : Position du pendule.

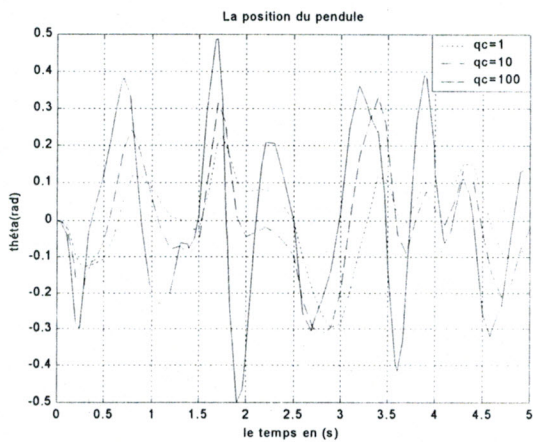


(c) : La commande appliquée sur le chariot.

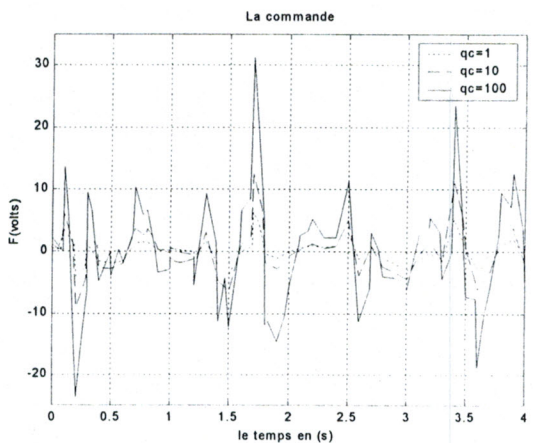
Fig.4.6 : Les résultats d'une commande LQR. Cas d'une perturbation d_θ sur le pendule.
à $t = 1$ s, $d_\theta = 0.1$ rad durant 1 seconde.



(a) : Position du chariot.



(b) : Position du pendule.



(c) : La commande appliquée sur le chariot.

Fig.4.7 : Résultats d'une commande LQR. Cas d'une présence de bruits blanc de puissance 0.001.

D'après les résultats de simulation illustrés par la figure 4.5 et 4.6, nous remarquons que quel que soit le choix des matrices de pondération, les réponses temporelles obtenues ont la même allure. Ainsi, le pendule inversé réagit toujours de la même manière sauf que les temps de réponse et les dépassements sont différents.

Pour le cas où la position du pendule est écarté vers la droite d'un angle initial (figure 4.5) ou d'une perturbation après un état d'équilibre (figure 4.6), le chariot va se déplacer aussi vers la droite pour essayer de compenser cet écart et de remettre ainsi le pendule sa position verticale. En effet, ce dernier atteint cette position ($\theta = 0$), mais il va la dépasser de nouveau, ce qui va pousser le chariot à revenir sur son chemin mais cette fois-ci en décelérant car ce dépassement est moins important que le premier. Le chariot va continuer à réagir de la même manière, ce qui a pour effet de stabiliser le système du pendule inversé.

la commande établie pour la matrice de pondération correspondant à $q_c = 1$ est stabilisante.

Mais à mesure que les pondérations sont plus importantes les résultats deviennent encore meilleurs, dans le sens où l'on peut avoir :

- un temps de réponse plus faible,
- et un parcours plus court pour le chariot.

Cependant, avoir un système plus rapide se fait au détriment d'avoir :

- des écarts plus importants pour le pendule,
- et des commandes plus élevées.

Par ailleurs, sur la figure 4.7 nous avons les résultats de simulations faites pour un système en présence de bruits de mesures. Le bruit appliqué été un bruit blanc de puissance 0.001. Malheureusement, malgré les efforts de la commande, celui-ci n'a pas été rejeté, au contraire son influence augmente avec l'augmentation des pondérations, au point de déstabiliser le système pour le cas $q_c = 1000$.

4.7.2 Analyse de la fragilité

La loi de commande dans une synthèse par régulateur LQR est de la forme $u = -Kx$, avec K étant le gain du retour d'état x .

Les paramètres du correcteur sont alors rassemblés dans le vecteur K ; un vecteur ligne de dimension égale à la dimension du système à réguler.

Dans le cas de notre système pendule inversé le gain K est de la forme :

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

Pour analyser la fragilité d'une telle loi de commande, nous allons procéder suivant le même principe déjà présenté dans le chapitre 2, réservé à *l'approche paramétrique* [6].

Nous allons prendre les éléments k_i du vecteur K comme paramètres du correcteur. A chaque éléments k_i , $i = 1..4$, nous ajoutons une perturbation correspondante Δk_i du vecteur :

$$\Delta K = [\Delta k_1 \ \Delta k_2 \ \Delta k_3 \ \Delta k_4]$$

Le but est de trouver la quantité minimale ΔK capable de mener le système en boucle fermée la limite de stabilité. Cette quantité est représentée par ce que l'on appelle marge de stabilité paramétrique du correcteur (la *Msp*).

Pour étudier la stabilité d'un système en boucle fermée, on doit, bien sûr, étudier son *équation caractéristique*.

Dans le cas d'une étude de fragilité, l'équation caractéristique doit contenir : les paramètres du système, les paramètres du correcteur et en plus les perturbations (ou incertitudes) Δk_i considérées sur ce correcteur. Dans ce cas, l'équation caractéristique est donnée par :

$$\det(sI - A_{BF}) = 0 \tag{4.20}$$

avec $A_{BF} = A - B (K + \Delta K)$ la matrice du système en boucle fermée.

Pour calculer la marge de stabilité (*Msp*) de notre correcteur, nous devons trouver les paramètres limites Δk_i (ΔK_{sol}) susceptibles d'attribuer à l'équation caractéristique (4.20) des racines sur la frontière de stabilité [6], sachant que :

$$M_{sp} = \|\Delta K_{sol}\|_2$$

Le problème revient alors à résoudre au sens des moindres carrés le problème d'optimisation donné par (4.20).



Après substitution des valeurs numériques connues, l'équation caractéristique (4.20) devient :

$$\begin{aligned}
 E = & s^4 + (-5.731599 k_4 + 5.502335 k_3 + 1.875746) s^3 - 56.226990 k_1 \\
 & + (-5.731599 k_2 + 5.5023354 k_1 - 11.911027) s^2 + (-56.226990 k_3 - 19.167781) s \\
 & + (5.502335 s^2 - 56.226990) \Delta k_1 + (-5.731599 s^2) \Delta k_2 \\
 & + (5.502335 s^3 - 56.226990 s) \Delta k_3 - 5.731599 s \Delta k_4
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des paramètres connus à partir de la synthèse.

$\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta k_3$ et Δk_4 sont des incertitudes à déterminer pour l'analyse de la fragilité. On remarque qu'elles interviennent d'une manière linéaire dans l'équation caractéristique (4.21).

En suivant les mêmes étapes de calcul de la marge de stabilité données en chapitre 2 et utilisées en chapitre 3 et pour différents choix de matrices de pondération et donc différentes lois de commande, nous aboutissons aux résultats réunis dans le tableau 4.3, tel que :

- $\|K_0\|_2$ est la norme-2 du vecteur K_0 des paramètres nominaux du régulateur.
- Le système étant un système continu, la frontière de stabilité est alors l'axe des imaginaires. M_0 est donc la marge de stabilité paramétrique pour le cas $\omega = 0$.
- M_ω la marge de stabilité paramétrique pour le cas $\omega \neq 0$
- ω_c la fréquence à laquelle il y a eu croisement de frontière de stabilité.
- $M_d = \infty$ car le coefficient du plus haut degré de l'équation caractéristique est constant.
- M_{sp} la marge de stabilité paramétrique finale. $M_{sp} = \min \{M_0, M_\omega\}$.
- ρ la marge de stabilité paramétrique **normalisée**, $\rho = \frac{M_{sp}}{\|K_0\|_2}$.
- ξ_{\min} le plus faible amortissement des pôles en boucle fermée non perturbée.

La diagonale de Q_c	$\ K_0\ _2$	M_0	M_ω	ω_c	M_{sp}	ξ_{\min}	ρ
$(Q_{c1}) : [1, 1, 0, 0]$	010.9881	01.0000	0.8694	1.416	0.8694	0.828777	0.079125
$(Q_{c2}) : [10, 10, 0, 0]$	019.0653	03.1623	1.2308	8.3	1.2308	0.826604	0.064559
$(Q_{c3}) : [100, 100, 0, 0]$	041.9614	10.0000	1.8138	12.133	1.8138	0.745278	0.043226
$(Q_{c4}) : [1000, 1000, 0, 0]$	108.8567	31.6228	2.9662	19.0990	2.9662	0.719346	0.027248

Tableau 4.3 : Analyse de la fragilité du gain de commande K .

✦ **Commentaires :**

Vu le rôle que nous attribuons à la marge de stabilité paramétrique normalisée ρ dans l'analyse de la fragilité, nous savons que plus ρ est faible plus le correcteur est fragile. Les résultats d'analyse donnés par le tableau 4.3 montrent que les valeurs de ρ sont assez faibles. Ce qui nous fait dire que la loi de commande issue d'une synthèse LQR est assez fragile.

Pour connaître les éventuelles causes de cette fragilité, essayons de voir dans quel sens évolue la diminution du rapport ρ .

D'après les résultats du tableau 4.3, la valeur de ρ diminue avec l'augmentation des pondérations Q_c . D'autre part, nous savons bien que lorsqu'on choisit, dans une synthèse LQR, des pondérations Q_c importantes, les valeurs des gains de commande ont tendance à devenir élevées. Avec des gains pareils le système en boucle fermée risque d'être mal amorti ; nous pouvons d'ailleurs le voir également sur le tableau 4.3. A mesure que les pondérations augmentent le coefficient d'amortissement ξ_{\min} diminue.

Nous concluons alors que le problème de la fragilité est lié au plus faible amortissement des pôles en boucle fermée. Lorsque cet amortissement ξ_{\min} diminue la fragilité augmente.

On sait que les racines d'un polynôme varient d'une manière continue avec les variations de ces coefficients. Pour notre cas, nous allons essayer maintenant de varier petit à petit les incertitudes contenues dans les coefficients du polynôme caractéristique (4.21) pour voir le comportement que vont prendre les racines de celui-ci. Ces racines étant les pôles de notre système bouclé par un correcteur dont nous perturbons les paramètres.

En effet, nous allons considérer l'équation caractéristique avec un gain de commande variant de :

$$K^\circ \xrightarrow{\Delta} K^\circ + \Delta K_{sol}$$

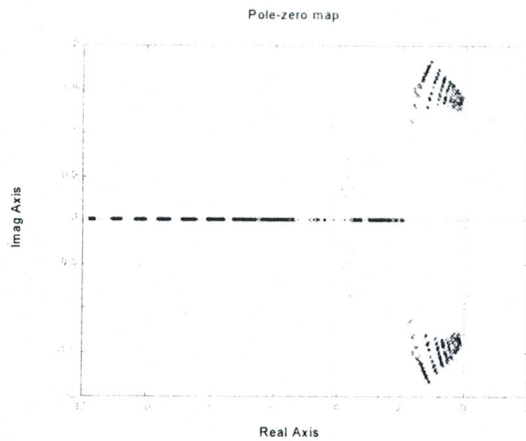
Pour différentes matrices de pondération Q_c , les pôles en boucle fermée sont donnés :

- Pour les deux cas limites (K° et $K^\circ + \Delta K_{sol}$), par le tableau 4.4,
- et pour l'ensemble des variations de ΔK , par la figure 4.8.

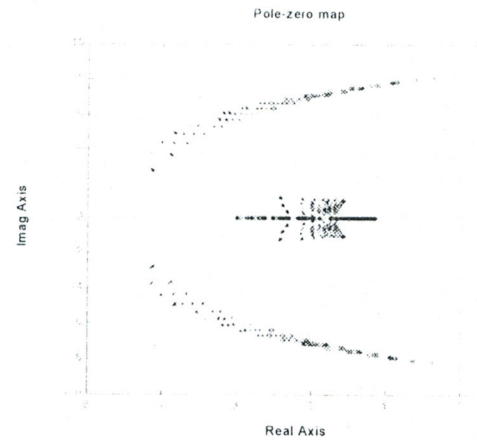
	ρ	ξ_{\min}	les pôles initiaux	les pôles finaux
$q_{c1} = 1$	0.079125	0.828777	$-1.6854 \pm 1.1379i$ $-3.5861 \pm 0.8576i$	$0.0000 \pm 1.4160i$ -12.6550 -2.9771
$q_{c2} = 10$	0.064559	0.826604	$-4.1420 \pm 2.8200i$ $-2.4029 \pm 1.1434i$	$0.0000 \pm 8.3000i$ -1.2479 -2.0983
$q_{c3} = 100$	0.043226	0.745278	$-6.6411 \pm 5.9413i$ $-2.4441 \pm 1.0524i$	$0.0000 \pm 12.1330i$ $-1.8858 \pm 0.5252i$
$q_{c4} = 1000$	0.027248	0.719346	$-11.4019 \pm 11.0105i$ $-2.4469 \pm 1.0439i$	$0.0000 \pm 19.099i$ $-2.0671 \pm 0.7779i$

Tableau 4.4 : Les pôles du système nominal stable et du système perturbé jusqu'à la limite de stabilité.

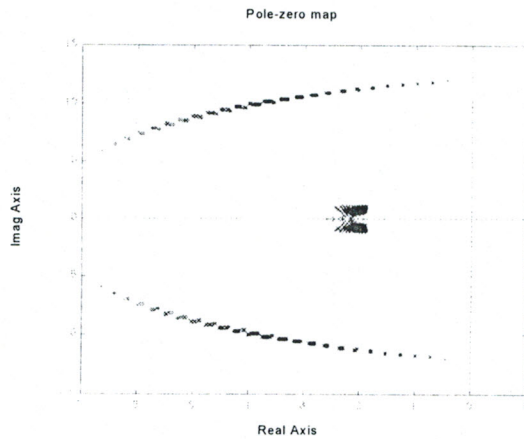
La figure 4.8 suivante va nous permettre de visualiser le déplacement des pôles en boucle fermée lorsqu'on perturbe les paramètres du correcteur :



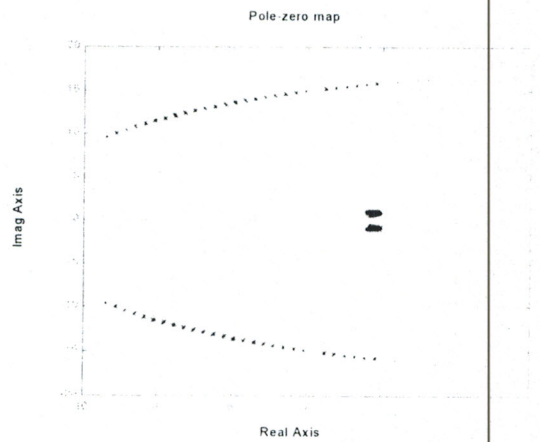
(a) les pôles initiaux ($q_{c1} = 1$) :
 $-1.6854 \pm 1.1379i$ et $-3.5861 \pm 0.8576i$



(b) les pôles initiaux ($q_{c2} = 10$) :
 $-4.1420 \pm 2.8200i$ et $-2.4029 \pm 1.1434i$



(c) les pôles initiaux ($q_{c3} = 100$) :
 $-6.6411 \pm 5.9413i$ et $-2.4441 \pm 1.0524i$



(d) les pôles initiaux ($q_{c4} = 1000$) :
 $-11.4019 \pm 11.0105i$ et $-2.4469 \pm 1.0439i$

Fig.4.8 : L'évolution des pôles lorsque les paramètres du correcteur varient.

A priori, lorsqu'on allait perturber les paramètres du correcteur dans l'équation caractéristique -afin d'atteindre la limite de stabilité - on s'attendait à ce que ça soit les pôles les plus proches de l'axe imaginaire qui se déplacent vers cet axe pour atteindre l'instabilité. Or, comme nous le voyons sur la figure 4.8, ce n'est pas toujours le cas. Au fait, ce sont les pôles qui ont le plus faible coefficient d'amortissement (ξ_{\min}) qui se dirigent vers l'axe imaginaire. Par conséquent c'est ces pôles qui causent la forte sensibilité de la stabilité aux petites variations dans les paramètres du correcteur que nous qualifions de fragile.

4.8 Analyse de la fragilité d'une synthèse LQR avec observateur d'ordre complet

Le but de cette section est de faire l'analyse de la fragilité d'une loi de commande établie avec l'estimation des états à l'aide d'un observateur d'ordre complet. Pour ce faire, nous allons synthétiser différents gains de commande et d'estimateur (K et L) correspondant aux différents choix de matrices de pondération.

4.8.1 Synthèse d'observateurs d'ordre complet

Le modèle du système "pendule inversé" pour lequel on synthétise notre loi de commande par LQR et notre estimateur est donné par le modèle mathématique (4.7).

Les matrices de pondération choisies pour les gains de commande restent les mêmes que celles de la section 4.7, ce qui fait que nous allons avoir les mêmes gains de commande K donnés par le tableau 4.2.

Les matrices de pondération de l'observateur d'ordre complet Q_{oc} sont choisies *5 fois plus grandes* que Q_c de la commande. R_{oc} et Q_{oc} seront de la forme :

$$R_{oc} = I$$
$$Q_{oc} = q_{oc} [I_4 - C^T C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{oc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{oc} \end{bmatrix} = \text{diag} \left\{ \underbrace{[0, 0, q_{oc}, q_{oc}]}_{D_{Q_{oc}}} \right\}$$

avec q_{oc} un paramètre scalaire qu'on va fixer à une valeur prise de l'ensemble $\{5, 50, 500, 5000\}$.

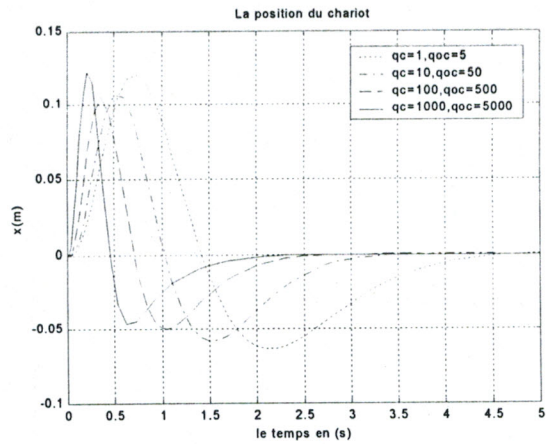
La matrice L_{oc} représentant le gain de l'observateur est calculée grâce à la boîte à outils **Control System Toolbox** du Logiciel MATLAB [10],[45]. En particulier à l'aide de la fonction **lqr**.

Le tableau suivant résume les différents gains L_{oc} correspondant aux différentes matrices de pondération Q_{oc} .

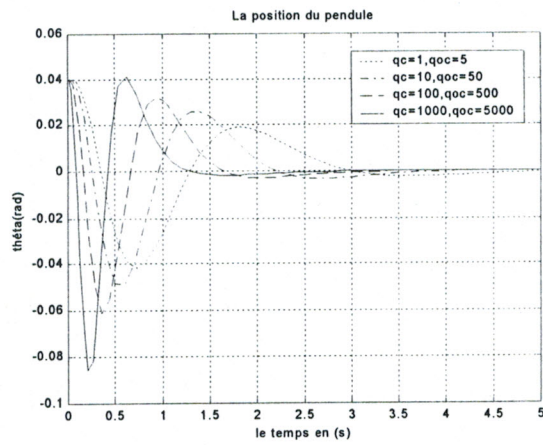
La diagonale de Q_{oc}	La matrice L_{oc} de l'observateur d'ordre complet
$(Q_{oc1}) : [0, 0, 5, 5]$	[1.045833 - 0.361667; - 0.361667 6.767855; ... 0.612285 - 1.953060; - 0.872896 22.967333]
$(Q_{oc2}) : [0, 0, 50, 50]$	[2.369667 0.014841; 0.014841 7.135244; ... 2.807772 - 1.457236; 1.598299 25.455969]
$(Q_{oc3}) : [0, 0, 500, 500]$	[5.045556 0.452847; 0.452847 8.692870; ... 12.831356 - 0.118559; 6.339970 37.885532]
$(Q_{oc4}) : [0, 0, 5000, 5000]$	[10.126793 0.712474; 0.712474 13.002137; ... 51.529779 2.410531; 14.068233 84.781596]

Tableau 4.5 : Les gains L_{oc} correspondant à $R_{oc} = I$ et à différentes matrices Q_{oc} .

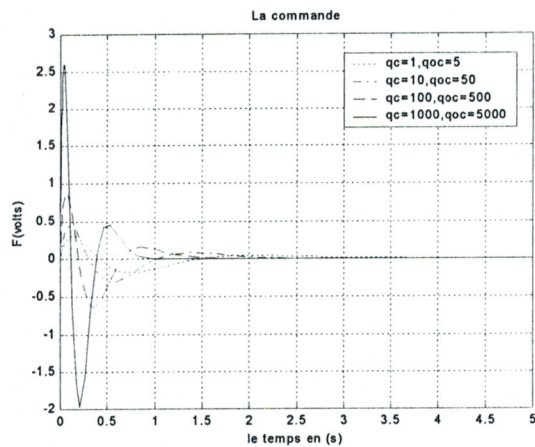
Quelques résultats de simulations sont illustrés par la figure 4.9 donnée ci-dessous :



(a) : Position du chariot.



(b) : Position du pendule.



(c) : La commande appliquée sur le chariot.

Fig.4.9 : Les résultats d'une commande LQR.
Cas d'un pendule initialisé à l'angle $\theta_i = 0.04 \text{ rad}$.

Nous remarquons qu'à mesure que les valeurs des pondérations Q_c et Q_{oc} augmentent :

- Le temps de réponse diminue donc le système a tendance à devenir plus rapide.
- l'écart d'erreur du régime transitoire du chariot diminue et celui du pendule augmente.
- La commande devient plus élevée.

4.8.2 Analyse de la fragilité

Pour analyser la fragilité dans le cas d'une commande par LQR avec une estimation complète des états, nous allons considérer, en plus des paramètres du vecteur de commande K , les paramètres de la matrice L_{oc} de l'observateur synthétisé.

Le vecteur de commande K et les perturbations correspondantes ΔK sont donnés respectivement par :

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] \quad \text{et} \quad \Delta K = [\Delta k_1 \ \Delta k_2 \ \Delta k_3 \ \Delta k_4]$$

de même pour L_{oc} et ses perturbations ΔL_{oc} , on a :

$$L_{oc} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \\ l_5 & l_6 \\ l_7 & l_8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta L_{oc} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 & \Delta l_2 \\ \Delta l_3 & \Delta l_4 \\ \Delta l_5 & \Delta l_6 \\ \Delta l_7 & \Delta l_8 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique E que nous allons étudier sera alors fonction : des paramètres du système, de K , de L_{oc} et des incertitudes rassemblées dans le vecteur

$$\Delta P = \left[\Delta k_1 \ \Delta k_2 \ \Delta k_3 \ \Delta k_4 \ \Delta l_1 \ \Delta l_2 \ \Delta l_3 \ \Delta l_4 \ \Delta l_5 \ \Delta l_6 \ \Delta l_7 \ \Delta l_8 \right]$$

pour

$$P = \left[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5 \ l_6 \ l_7 \ l_8 \right]$$

La détermination des valeurs de ΔK et ΔL_{oc} (ou ΔP) capables d'attribuer à l'équation caractéristique des racines sur l'axe des imaginaires nous donne la valeur de la marge de stabilité paramétrique qui nous permet de juger la fragilité de l'ensemble "régulateur-observateur d'ordre complet".

L'équation caractéristique sera de la forme :

$$\det \left\{ sI - \begin{bmatrix} A - B(K + \Delta K) & B(K + \Delta K) \\ 0 & A - (L_{oc} + \Delta L_{oc})C \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (4.22)$$

d'où

$$E = f(s, A, B, C, P, \Delta P)$$

Afin de déterminer les ΔK et ΔL_{oc} (ou ΔP) requis pour déstabiliser le système, on va devoir résoudre (4.22) et cela aux moyens d'une optimisation au sens des moindres carrés tel qu'il a été fait pour le cas du vecteur de commande K seul.

Mais le problème, c'est qu'en développant l'équation (4.22), on obtient une équation fonction des Δk_i et Δl_j d'une manière multilinéaire. Il est alors impossible d'utiliser la même méthode de résolution, en revanche nous allons garder le même principe. Par conséquent, la marge de stabilité paramétrique sera déterminée par une optimisation, toujours au sens des moindres carrés, mais non-linéaire [16], [43].

La fonction qui permet de résoudre de tels problèmes d'optimisation non-linéaires au sens des moindres carrés est disponible dans la boîte à outils **Opimization Toolbox** de MATLAB 5.3; c'est la fonction **lsqnonlin**.

Suivant le principe de la détermination de la marge de stabilité paramétrique [6] et à l'aide de la fonction **lsqnonlin**, nous avons pu trouver les résultats donnés par le tableau 4.6 correspondant aux différents choix de matrices de pondération :

Les scalaires q_c et q_{oc}	$\ P_0\ _2$	M_0	M_ω	ω_c	M_{sp}	ξ_{\min}	ρ
$q_{c1} = 1, q_{oc1} = 5$	026.4641	1.0000	0.8819	01.4060	0.8819	0.8288	0.033324
$q_{c2} = 10, q_{oc2} = 50$	032.8722	03.1623	1.6617	08.2940	1.6617	0.7848	0.050551
$q_{c3} = 100, q_{oc3} = 500$	059.1807	09.9056	2.5321	12.1300	2.5321	0.7302	0.042785
$q_{c4} = 1000, q_{oc4} = 5000$	148.8938	31.4717	4.1674	19.1000	4.1674	0.7070	0.027989

Tableau 4.6 : Analyse de la fragilité du gain de commande K et de l'observateur d'ordre complet L_{oc} .

Les faibles valeurs de ρ indiquent que la stabilité du système bouclé par une loi de commande LQR avec estimation complète des état est très sensible aux petites variations dans les paramètres du correcteur. On constate alors que l'ensemble " correcteur + observateur d'ordre complet " est fragile aussi.

✂ Critique de la méthode d'optimisation utilisée

Pour déterminer les plus petites incertitudes déstabilisantes ΔP considérées sur les gains du correcteur et de l'observateur d'ordre complet nous avons résolu l'équation caractéristique (4.22) du système avec correcteur et estimateur perturbés. Cette équation étant non-linéaire, nous avons utilisé la méthode d'optimisation non-linéaire au sens des moindres carrés représentée par la fonction `lsqnonlin` de Matlab, dans laquelle nous avons activé l'algorithme de Gauss-Newton.

La méthode de Gauss-Newton présente l'avantage d'une convergence rapide, mais l'inconvénient c'est que cette convergence est locale. Donc la solution trouvée va dépendre des conditions initiales choisies.

Afin de s'assurer que le minimum local obtenu est un minimum global, il suffit de vérifier que la fonction objectif soit convexe ou strictement convexe [37].

Définition 4.1 On dit qu'une fonction $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ définie sur un ensemble convexe S , est convexe, si elle vérifie :

$$\forall x \in S, \quad \forall y \in S, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est toujours vérifiée pour $x \neq y$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$.

On peut dire que la fonction *f* est convexe (strictement convexe) si sa matrice Hessienne est semi définie positive (définie positive).

Nous avons calculé le Hessien de la fonction objectif à optimiser ; malheureusement il n'est pas semi défini positif. Ce qui fait que les minimums obtenus sont seulement des minimums locaux.

✂ Commentaires :

Les résultats trouvés dans le tableau 4.6 sont calculés pour des conditions initiales nulles ($\Delta p_{i0} = 0, i = 1..12$), il est clair que si on change ces conditions on va -peut être- obtenir d'autre résultats, car le minimum que nous avons trouvé n'est pas global. Il se peut alors qu'il y ait un autre minimum, même plus petit.

Dans le cas de notre étude, une telle situation n'est pas grave. Car déjà avec les résultats que nous avons, nous trouvons que l'ensemble " correcteur + observateur d'ordre complet " est fragile ; que serait-ce alors si on avait des valeurs encore plus petites.

Si on remarque les valeurs de ρ dans le 2^{ième}, 3^{ième} et 4^{ième} choix des matrices de pondération, on peut dire que la fragilité d'une loi de commande avec observateur d'ordre complet augmente avec la diminution des amortissement causée par l'augmentation des pondérations et donc avec l'augmentation des performances.

A première vue, en comparant la valeur de ρ trouvée dans le 1^{ier} choix avec les autres ρ , nous ne pouvons pas enoccer la conclusion donnée ci-dessus. Car, d'après les ρ trouvés, le 1^{ier} choix à l'air de donner un système plus fragile que celui synthétisé par le 2^{ième} et le 3^{ième} choix. Cependant, il est clair que les ammortissements ξ_{\min} diminuent du 1^{ier} au 4^{ième} choix, donc, la valeur de $\rho = 0.0333$ pourrait être une conséquence de la non globalité de la solution trouvée.

4.9 Analyse de la fragilité d'une synthèse LQR avec observateur d'ordre réduit

Dans cette section, nous allons nous intéresser encore une fois à l'analyse de la fragilité d'une loi de commande LQR; mais cette fois-ci, établie en présence d'un observateur d'ordre réduit.

4.9.1 Synthèse d'observateur d'ordre réduit

Le modèle du système pendule inversé pour le quel on synthétise notre loi de commande par LQR et notre estimateur est donné par le modèle mathématique (4.7).

Les matrices de pondération choisies pour les gains de commande restent les mêmes que celles de la section 4.7, ce qui fait que nous allons encore avoir les mêmes gains de commande K donnés par le tableau 4.2.

Les matrices de pondération de l'observateur d'ordre réduit Q_{or} sont choisies *5 fois plus grandes* que Q_c de la commande. Q_{or} et R_{or} seront de la forme :

$$R_{or} = I_2$$

$$Q_{or} = q_{or} \cdot I_2 = \begin{bmatrix} q_{or} & 0 \\ 0 & q_{or} \end{bmatrix} = \text{diag} \left\{ \underbrace{[q_{or}, q_{or}]}_{D_{Q_{oc}}} \right\}$$

avec q_{or} un paramètre scalaire qu'on va fixer à une valeur prise de l'ensemble $\{5, 50, 500, 5000\}$.

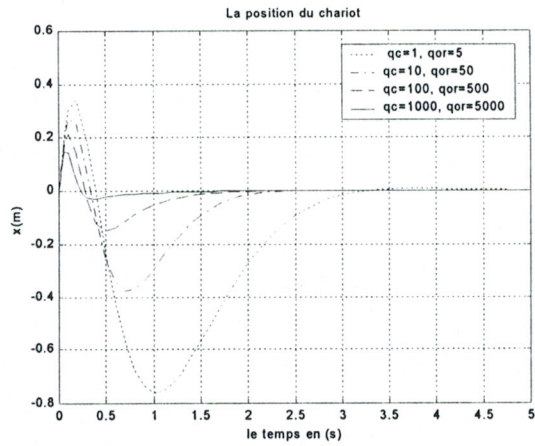
Le matrice L_{or} représentant le gain de l'observateur est calculée grâce à la boîte à outils **Control System Toolbox** du Logiciel MATLAB [10],[45]. En particulier à l'aide de la fonction `lqr`.

Le tableau suivant résume les différents gains L_{or} correspondant aux différentes matrices de pondération Q_{or} .

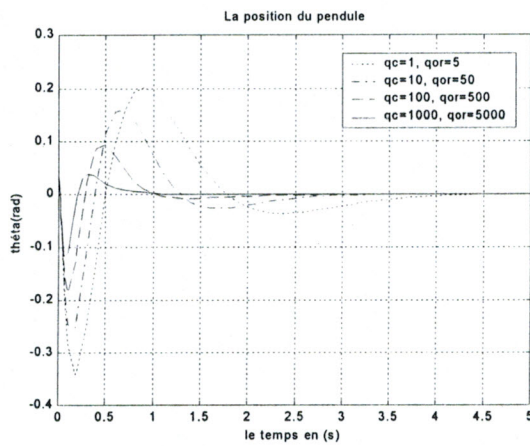
La diagonale de Q_{or}	La matrice L_{or} de l'observateur d'ordre réduit
(1) : [5, 5]	[1.019533 0.368485 ; 0.368485 2.510814]
(2) : [50, 50]	[5.403616 0.727535 ; 0.727535 7.232825]
(3) : [500, 500]	[20.545605 0.895229 ; 0.895229 22.420904]
(4) : [5000, 5000]	[68.853413 0.951032 ; 0.951032 70.730559]

Tableau 4.7 : Les gains L_{or} correspondant à $R_{or} = I_2$ et à différentes matrices Q_{or} .

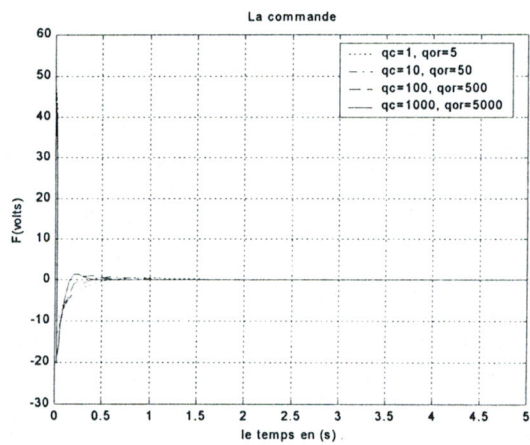
La figure 4.10 donnée ci-dessous illustre les réponses temporelles du système du pendule inversé lorsque le pendule de celui-ci est écarté à l'état initial d'un angle $\theta_i = 0.04 \text{ rad}$.



(a) : Position du chariot.



(b) : Position du pendule.



(c) : La commande appliquée sur le chariot.

Fig.4.10 : Les résultats d'une commande LQR avec observateur d'ordre réduit.

Cas d'un pendule initialisé à l'angle $\theta_i = 0.04 \text{ rad}$.

Des résultats obtenus ci-dessus, nous constatons qu'en augmentant les pondérations Q_c et Q_{or} , les réponses du système deviennent meilleurs, ce qui est intéressant en général, mais c'est au détriment de la commande qui ainsi devient plus importante.

4.9.2 Analyse de la fragilité

Pour analyser la fragilité dans le cas d'une commande par LQR avec un observateur d'ordre **réduit**, nous nous retrouvons dans la même situation que celle d'une commande LQR avec un observateur d'ordre **complet**, sauf que cette fois-ci la dimension de la matrice L_{or} et celle de ses perturbations ΔL_{or} est réduite. On a :

$$L_{or} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta L_{or} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 & \Delta l_2 \\ \Delta l_3 & \Delta l_4 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique E que nous allons étudier sera fonction des paramètres : du système, de K , de L_{or} et des incertitudes rassemblées dans le vecteur

$$\Delta P = \left[\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad \Delta k_3 \quad \Delta k_4 \quad \Delta l_1 \quad \Delta l_2 \quad \Delta l_3 \quad \Delta l_4 \right]$$

pour

$$P = \left[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \right]$$

La détermination des valeurs minimales de ΔK et ΔL_{or} (ou ΔP) capables d'attribuer à l'équation caractéristique des racines sur l'axe des imaginaires nous donne la valeur de la marge de stabilité paramétrique qui nous permet de juger la fragilité de l'ensemble "régulateur-observateur d'ordre réduit".

L'équation caractéristique sera de la forme :

$$E = \det \left\{ \begin{bmatrix} A - B (K + \Delta K) & B (K + \Delta K) M \\ 0 & A_{22} - (L_{or} + \Delta L_{or}) A_{12} \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (4.23)$$

D'où :

$$E = f(s, A, B, A_{22}, A_{12}, M, P, \Delta P)$$

Afin de déterminer les ΔK et ΔL_{oe} (ou ΔP) requis pour déstabiliser le système, on va devoir résoudre (4.23) et cela aux moyens d'une optimisation au sens des moindres carrés tel qu'il a été fait pour le cas du vecteur de commande K seul.

A part la dimension de la matrice L_{or} qui a changée, on se retrouve confronté à un problème identique à celui de la détermination de la marge de stabilité paramétrique dans le cas d'un ensemble " régulateur- observateur d'ordre complet ". Vu la multi-linéarité de l'équation (4.23), la marge de stabilité paramétrique sera déterminée par une optimisation, toujours au sens des moindres carrés, mais non-linéaire [16], [43].

La fonction qui permet de résoudre de tels problèmes d'optimisation est disponible dans la boîte à outils **Opimization Toolbox** de MATLAB 5.3 ; c'est la fonction **lsqnonlin**.

Suivant le principe de la détermination de la marge de stabilité paramétrique [6] et à l'aide de la fonction **lsqnonlin**, nous avons pu trouver les résultats donnés par le tableau 4.6 correspondant aux différents choix de matrices de pondération :

Les scalaires q_c et q_{or}	$\ P_0\ _2$	M_0	M_ω	ω_c	M_{sp}	ξ_{\min}	ρ
$q_{c1} = 1, q_{or1} = 5$	11.3294	01.0000	0.8819	1.406	0.8819	0.82878	0.077842
$q_{c2} = 10, q_{or2} = 50$	21.1201	03.1622	1.6617	8.294	1.6617	0.8266	0.078680
$q_{c3} = 100, q_{or3} = 500$	51.8380	10.0000	2.5321	12.13	2.5321	0.7453	0.048846
$q_{c4} = 1000, q_{or4} = 5000$	146.9530	31.6227	4.1674	19.10	4.1674	0.7193	0.028359

Tableau 4.8 : Analyse de la fragilité du gain de commande K et de l'observateur d'ordre réduit L_{or} .

✂ **Commentaires :**

Du tableau 4.8, nous pouvons tirer les mêmes conclusions, à savoir que :

- La synthèse LQR établie en présence d'un observateur d'ordre réduit est fragile.
- Que la fragilité se fait plus sentir lorsque le plus faible amortissement des pôles en boucle fermée diminue suite à l'augmentation des pondérations.
- Et que le résultat du premier choix des pondérations Q_c et Q_{or} n'est pas concluant, probablement à cause de la non globalité des solutions trouvées par l'algorithme de Gauss-Newton.

4.10 Conclusion

Le but de ce chapitre été de voir ce que signifie le terme fragilité pour une synthèse optimale donnée par le LQR seul, avec observateur d'ordre complet, et observateur d'ordre réduit.

Autrement dit, nous voulions savoir si ces synthèses optimales sont concernées ou pas par la sensibilité de la stabilité aux petites variations dans les paramètres synthétisés destinés à l'implémentation.

Après présentation du modèle de notre système d'application qui est le benchmark "pendule inversé", nous avons donné quelques détails sur la théorie des méthodes de synthèses citées ci-dessus.

Pour différents choix de matrices de pondération, nous avons établi les synthèses déjà présentées, dont les résultats ont été validés par simulation. Nous avons remarqué qu'avec l'augmentation des pondérations les temps de réponses et les écarts transitoires du chariot diminués au détriment d'une élévation dans les écarts transitoires du pendule et les amplitudes de la commande.

Après chaque synthèse, on passé à l'analyse de la fragilité du système bouclée, en vérifiant à quel point la stabilité de celui-ci est sensible aux petites variations dans les paramètres de la commande ou de l'observateur prévus pour être implémentés en pratique.

Analyser une telle sensibilité revient à étudier l'équation caractéristique du système en prenant en compte les perturbations sur les paramètres à implémenter et cela en calculant la marge de stabilité paramétrique normalisée du système bouclé (ρ).

Dans le cas d'une synthèse LQR sans estimation des états, cette équation caractéristique perturbée est fonction linéaire en ces paramètres. Donc, le calcul de la marge de stabilité paramétrique normalisée ρ été plus ou moins simple. Par contre, pour les lois de commande LQR avec observateur d'ordre complet ou réduit, on se retrouve avec une équation caractéristique fonction multilinéaire des paramètres incertains considérés. Ce qui nous a poussé à utiliser une méthode d'optimisation nonlinéaire qui a l'inconvénient de donner une solution locale.

Les valeurs de ρ généralement trouvées dans notre analyse sont de l'ordre du 1 à 8% environ, ce qui montre que les gains de la commande ou de l'observateur n'admettent pas des erreurs plus grandes que ces valeurs. Par conséquent, les lois de commande trouvées avec ou sans observateur sont assez fragiles.

Il a été constaté que la fragilité est liée au plus faible amortissement du système bouclé. Car nous avons remarqué que la valeur de la marge de stabilité paramétrique diminue avec l'augmentation des pondérations qui améliore les performances et entraîne la diminution de l'amortissement aussi. Nous avons d'ailleurs confirmé graphiquement - en suivant l'évolution des pôles lorsque l'équation caractéristique est perturbée - que ce sont les pôles ayant le coefficient d'amortissement le plus faible qui causent la fragilité.

En comparant les valeurs de ρ et celles des amortissements minimums trouvées dans les trois types de synthèses, on conclue que c'est la commande *LQR* avec observateur d'ordre complet qui est la plus fragile à cause de ses gains élevés et ses amortissements faibles. Suivie de la commande *LQR* seule. Et vient en dernier, c'est-à-dire relativement la synthèse la moins fragile, la synthèse *LQR* avec observateur d'ordre réduit ; qui comparée aux autres, elle est la moins performante, celle qui a les commandes les plus élevées et de surcroît la plus sensible aux bruits de mesures.

Pour des gains très élevés, les trois types de commande présentent à peu près la même fragilité.

Chapitre 5

LA FRAGILITÉ DE LA SYNTHÈSE H_∞ -Optimale

5.1 Introduction

Nous allons à présent, nous intéresser dans ce chapitre à l'analyse de la fragilité d'une autre synthèse optimale donnée dans le cadre des structures de variables d'état, c'est la synthèse H_∞ -optimale.

Puisque la synthèse H_∞ utilise la notion de problème standard, nous allons commencer par augmenter la représentation du modèle de notre système d'application en lui imposant à priori les spécifications généralement désirées dans le cahier des charges.

Par la suite, après un aperçu théorique, nous passerons à la synthèse d'un correcteur H_∞ -optimal, une fois ce correcteur en mains nous procéderons à l'analyse de sa fragilité.

5.2 Méthode de synthèse H_∞

5.2.1 Définition du problème H_∞ standard

Un problème H_∞ standard est un problème dans le quel le système considéré est donné sous une forme standard. Décrire un système sous une forme standard revient à décrire simultanément dans une même représentation, voire dans un même schéma fonctionnel : le modèle du système et le cahier des charges que doit satisfaire la loi de commande sur ce système.

La forme standard regroupe dans un modèle *augmenté*, noté $P(s)$, les quatre transferts

multivariables entre d'une part, la commande (u) et les perturbations ou consignes (w) dites entrées exogènes et d'autre part, les mesures (y) et les sorties régulées (z). (voir figure 5.1)

Ce problème standard est représenté schématiquement par la figure 5.1

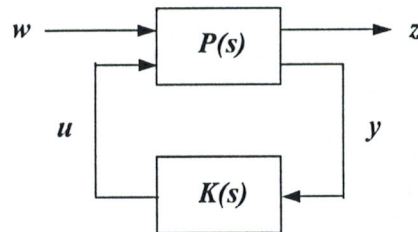


Fig.5.1 : Problème standard.

Dans ce schéma de boucle fermée, y et u désignent respectivement l'entrée et la sortie du bloc $K(s)$. On note, par comparaison avec les schémas classiques d'asservissement présentés au chapitre 0 (figure 0.3), l'absence du comparateur. La boucle de retour est donc maintenant positive, si besoin est, le comparateur doit être intégré au bloc $P(s)$.

La forme standard est représentée par le quadripôle fréquentiel [4] :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}$$

qui décrit les interconnexions entre w, u, z et y :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

La représentation d'état augmentée faisant apparaître le vecteur d'état interne x de $P(s)$ est une représentation d'état "normale", dans laquelle il convient de distinguer les deux pôles d'entrée dans le vecteur d'entrée et les deux pôles de sortie dans le vecteur de sortie. C'est ce qui donne la version d'état maintenant classique :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$; $w \in \mathbb{R}^{m_1}$; $u \in \mathbb{R}^{m_2}$; $z \in \mathbb{R}^{p_1}$; $y \in \mathbb{R}^{p_2}$.

Cette représentation remplace la forme initiale de référence :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

On reconnaît cependant dans les matrices A, B, C, D les matrices A, B, C, D classiques, dans le cas particulier où le vecteur y du quadripôle est effectivement le vecteur de mesure et u le vecteur de commande.

Sous sa forme la plus simple, le problème H_∞ est un problème de réjection de perturbations. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation w sur le comportement du système. Le signal w est supposé d'énergie finie et sa taille est mesurée en norme-2. Son effet sur le système est mesuré par la norme-2 du vecteur coût (z).

Enfin, on peut agir sur le système P par une commande u et disposer d'un vecteur de sortie y . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande $u = K(s)y$ qui minimise l'impact de w sur z . Cet impact est mesuré par le rapport $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$. La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

La fonction de transfert en boucle fermée entre w et z est donnée par la Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT [36]) :

$$G_{zw} = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}$$

En remarquant que le rapport $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ est dans le pire des cas :

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty$$

Le problème décrit ci-dessus peut se formuler mathématiquement [4], [9] comme suit :

✧ **Problème H_∞ Optimal** : Minimiser $\|F_l(P, K)\|_\infty$ sur l'ensemble des compensateurs $K(s)$ qui stabilisent le système de manière interne.

Le minimum est noté γ_{opt} et appelé gain (ou atténuation) " H_∞ -optimal". Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important :

✧ **Problème H_∞ Sous-Optimal** : étant donné $\gamma > 0$, trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$.

5.2.2 Résolution du Problème H_∞ [4], [9], [18]

On va présenter dans cette section une technique de résolution par variables d'état pour les problèmes H_∞ sous-optimaux et optimaux.

Soit une réalisation minimale du système $P(s)$:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B_1 \ B_2]$$

Cette réalisation est associée à la description interne suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases}$$

On supposera que

$$D_{12} \in R^{p_1 \times m_2} \quad \text{et} \quad D_{21} \in R^{p_2 \times m_1}$$

avec $m_1 \geq p_2$ et $p_1 \geq m_2$. Enfin n désignera la taille de A , i.e, l'ordre du système $P(s)$.

La solution par variable d'état n'est applicable que sous les hypothèses suivantes :

✂ **Hypothèses :**

(H₁) (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable. Cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un compensateur qui stabilise le système de manière interne.

(H₂) Les matrices D_{12} et D_{21} sont de plein rang.

(H₃)

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2$$

et

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} j\omega I - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2$$

pour tout $\omega \in R$. Autrement dit, $P_{12}(s)$ et $P_{21}(s)$ n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire.

C'est deux dernières hypothèses sont appelées **hypothèses de régularité** [9]. On ajoute aussi les hypothèses simplificatrices suivantes dites de "**normalisation**" :

$$(\mathbf{H}_4) \text{ normalisation : } D_{12}^T (D_{12}, C_1) = (I, 0) \text{ et } D_{21} (D_{21}^T, B_1^T) = (I, 0).$$

$$(\mathbf{H}_5) D_{22} = 0 \text{ et } D_{11} = 0.$$

On peut toujours satisfaire (\mathbf{H}_4) - (\mathbf{H}_5) par des changements de variables appropriés.

Suite aux hypothèses qu'on vient de poser, le problème H_∞ résultant est dit problème normalisé dont la solution dépendra des conditions qu'on va donner par le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Sous les hypothèses (\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_5) ci-dessus, il existe un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure*

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si :

(i) *Les équations de Riccati :*

$$\begin{aligned} A^T X + X A + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 &= 0 \\ A^T Y + Y A + Y (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

ont respectivement des solutions stabilisantes X_∞ et Y_∞ .

(ii) *Ces solutions vérifient de plus*

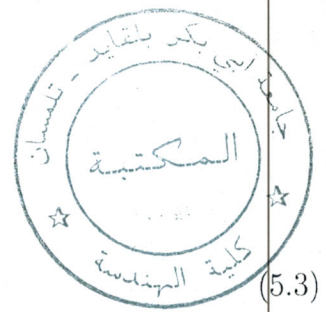
$$X_\infty \geq 0 \quad Y_\infty \geq 0 \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (5.2)$$

avec $\rho(M)$ le rayon spectral de la matrice M .

l'existence de solutions stabilisantes pour les équations (5.1) traduit la contrainte $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$; alors que les conditions de positivité (5.2) assurent le stabilité interne.

Si le correcteur établi pour résoudre le problème de commande optimale H_∞ a la réalisation (minimale) suivante :

$$K : \begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + B_c y \\ u = C_c \xi + D_c y \end{cases} \quad \text{ou autrement} \quad K(s) = D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c$$



la matrice d'état du système en boucle fermée est :

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La stabilité interne est alors équivalente à la stabilité de la matrice A_{BF} .

✠ **Calcul du gain H_∞ -optimal γ_{opt} .**

Le théorème précédent suggère un algorithme de dichotomie pour calculer le gain H_∞ -optimal γ_{opt} . Cet algorithme est connu sous le nom de "γ-itération".

On initialise le processus de dichotomie avec un intervalle $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ contenant γ_{opt} et à chaque itération, on élimine une moitié de cet intervalle en testant les conditions (i)-(ii) au point médian

$$\gamma = \frac{1}{2} (\gamma_{min} + \gamma_{max})$$

Si elles sont satisfaites, on a $\gamma > \gamma_{opt}$ et on rejette la moitié droite de l'intervalle. Sinon, on élimine la moitié gauche. Ce schéma itératif s'arrête lorsque la longueur de l'intervalle tombe en-dessous de la précision désirée pour γ_{opt} .

A chaque itération, "tester" la valeur γ exige d'effectuer les opérations suivantes :

Etape 1 : Calculer le spectre des matrices Hamiltoniennes

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix}$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1 C_1^T - C_2 C_2^T \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

associées aux équations (5.1). Si ces spectres contiennent des valeurs propres imaginaires pures, conclure que $\gamma < \gamma_{opt}$ et passer à l'itération suivante.

Etape 2 : calculer les sous-espaces invariants stables :

$$\begin{bmatrix} P_X \\ Q_X \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} P_Y \\ Q_Y \end{bmatrix}$$

de H_∞ et j_∞ , respectivement. On notera qu'ils sont toujours de dimension n à ce stade. Si P_X ou P_Y est singulière, conclure que $\gamma < \gamma_{opt}$ et passer à l'itération suivante. Sinon, calculer les solutions stabilisantes des équations de Riccati comme :

$$X_\infty = Q_X P_X^{-1}; \quad Y_\infty = Q_Y P_Y^{-1}$$

Etape 3 : tester (ii) pour conclure sur la position de γ par rapport à γ_{opt} . Signalons que, dans la majeure partie des cas, l'optimum est caractérisé par l'égalité

$$\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_{opt}^2$$

En plus d'une caractérisation du gain H_∞ -optimal, l'approche variable d'état fournit également des formules explicites pour une solution particulière du problème sous-optimal de paramètre γ .

Théorème 5.2 *Supposons (H_1) - (H_5) et soit le compensateur*

$$K_c(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c$$

avec

$$A_c = A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty - (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} Y_\infty C_2^T C_2$$

$$B_c = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} Y_\infty C_2^T$$

$$C_c = -B_2^T X_\infty$$

stabilise le système de manière interne et satisfait

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

*Cette solution particulière du problème H_∞ sous-optimal est appelée **compensateur central**.*

On note que le compensateur central est strictement propre et d'ordre égale à celui du système $P(s)$.

5.3 Système d'application

Le système de notre application sera toujours le pendule inversé déjà présenté dans le chapitre précédent. Cependant, dans une synthèse H_∞ , dans le cadre de la théorie des états, le modèle du système en question doit être augmenté afin de mieux faire apparaître les exigences du cahier des charges. Le modèle ainsi obtenu est appelé *modèle standard* ou *modèle augmenté*.

On rappelle que le but d'un contrôle destiné au système pendule inversé est d'assurer la stabilité du pendule, et le positionnement du chariot tout en essayant :

- de limiter l'amplitude de la commande,
- de désensibiliser le système aux effets de frottements
- d'éviter l'amplification des bruits de mesures.
- de minimiser l'influence des perturbations sur x et θ .

Par conséquent, le modèle augmenté que nous devons établir dans ce sens doit :

- contenir en plus des sorties à réguler x et θ du modèle initial une troisième sortie, qui est la commande u .
- faire apparaître les perturbations sur x et θ . (par d_1 et d_2 par exemple).
- et considérer les frottements fr_1 et fr_2 sur \dot{x} et $\dot{\theta}$ respectivement, comme étant constants (des perturbations encore).
- avec bien sûr la prise en compte des bruits de mesures n .

Le modèle non-linéaire du système pendule inversé déjà présenté dans le chapitre précédent a été établi en prenant les frottements comme des fonctions de la vitesse. Cependant, dans la situation actuelle, les frottements seront considérés comme étant des perturbations constantes :

$$Fr = +Fv \dot{q} + Fs \operatorname{signe}(\dot{q}) = fr$$

ce qui devra entraîner un changement dans le modèle à étudier. Le modèle dynamique avec les frottements comme perturbations internes, devient :

$$\begin{cases} ml \cos \theta \ddot{x} + (I + ml^2) \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = -fr_1 \\ (M + m) \ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F - fr_2 \end{cases}$$

L'équation d'état du système sera alors donnée par la forme :

$$\dot{X} = f(X) + g(X) w + h(X) u$$

avec $X = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$ et $w = [fr_1 \ fr_2]^T$ (pour le moment).

De manière explicite, on a :

$$\dot{x}_1 = x$$

$$\dot{x}_2 = \theta$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{x} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} mgl \sin \theta - fr_1 & I + ml^2 \\ ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F - fr_2 & ml \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} ml \cos \theta & mgl \sin \theta - fr_1 \\ M + m & ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F - fr_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} ml \cos \theta & I + ml^2 \\ M + m & ml \cos \theta \end{bmatrix}$$

et F la force fournie par le moteur électrique ; donnée par :

$$F = \frac{K_1 e}{R_a r} - \frac{K_1 K_2}{R_a r^2} \dot{x}$$

Puisque le but est de garder le pendule à la position verticale, nous pouvons considérer que θ et $\dot{\theta}$ restent faibles tels que : $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ et $\theta \dot{\theta} \approx 0$.

En négligeant encore l'inertie I du système, on obtient le modèle linéarisé et simplifié, donné par les équations :

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{mg}{M} x_2 - \frac{K_1 K_2}{M R_a r^2} x_3 + \frac{1}{Ml} fr_1 - \frac{1}{M} fr_2 + \frac{K_1}{M R_a r} e$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(M+m)}{Ml} g x_2 + \frac{K_1 K_2}{Ml R_a r^2} x_3 - \frac{M+m}{M ml^2} fr_1 + \frac{1}{Ml} fr_2 - \frac{K_1}{Ml R_a r} e$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m}{M}g & -\frac{K_1 K_2}{M R_a r^2} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)}{Ml}g & \frac{K_1 K_2}{Ml R_a r^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{Ml} & -\frac{1}{M} \\ -\frac{Ml}{Mm l^2} & \frac{M}{Ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} fr_1 \\ fr_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{M R_a r} \\ -\frac{K_1}{Ml R_a r} \end{bmatrix} e$$

Le modèle donné par (5.4) doit être complété en introduisant les perturbations d_1 et d_2 et les bruits de mesures n .

Le modèle augmenté (standard) sera pris alors de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases}$$

avec :

$x = \begin{bmatrix} x & \theta & \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ le vecteur d'état.

$y = \begin{bmatrix} x_m & \theta_m & \dot{x}_m & \dot{\theta}_m \end{bmatrix}^T$ le vecteur des sorties mesurées.

$z = \begin{bmatrix} x & \theta & u \end{bmatrix}^T$ le vecteur des sorties régulées.

$w = \begin{bmatrix} fr_1 & fr_2 & n & d_1 & d_2 \end{bmatrix}^T$ le vecteur des perturbations.

C_1, C_2, D_{12} et D_{21} des matrices que nous allons choisir suivant la nature du système.

$u = e$ la tension de commande.

Avec l'arrière plan comme motivation, Le modèle final est donné par les 3 équations suivantes :

La première :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} fr_1 \\ fr_2 \\ n \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + B_2 u$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m}{M}g & -\frac{K_1 K_2}{M R_a r^2} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & \frac{K_1 K_2}{Ml R_a r^2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Ml} & -\frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(M+m)}{Mml^2} & \frac{1}{Ml} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{M R_a r} \\ -\frac{K_1}{Ml R_a r} \end{bmatrix}$$

La deuxième et la troisième sont :

$$z = \begin{bmatrix} x_r \\ \theta_r \\ u_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{12}} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} x_m \\ \theta_m \\ \dot{x}_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{21}} \cdot \begin{bmatrix} fr_1 \\ fr_2 \\ n \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Une telle structure permet d'adapter le modèle initial à l'algorithme de résolution du problème H_∞ [10], [18], [45], [47]. Elle a été établie tout en respectant la nature du système et en vérifiant les hypothèses (H_1) - (H_5) posées pour assurer l'existence d'une solution au problème H_∞ -optimal.

Remarque 5.1 La matrice D_{21} est une matrice de pondération. Elle représente l'influence des frottements, des bruits et des perturbations sur les sorties mesurées du système, i.e l'influence de w sur y . Ce qui fait que les cases contenant le poids 1 peuvent être substituées par d'autres valeurs supérieures ou inférieures à 1 selon qu'on veuille mettre en évidence les éléments de w ou diminuer leurs effets.

5.4 Synthèse de régulateur H_∞ -optimal

Pour synthétiser une loi de commande convenable au système pendule inversé, nous allons utiliser le modèle augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w \end{cases}$$

avec les valeurs numériques suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.624586 & -1.875746 & 0 \\ 0 & 11.911027 & 1.953902 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.326964 & -1.273885 & 0 & 0 & 0 \\ -9.728942 & 1.326964 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.502335 \\ -5.731599 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour la matrice D_{21} , nous optons pour le choix suivant :

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 10 \\ 0 & 0.1 & 100 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un choix qui permet d'avoir le modèle standard et qui respecte la nature du système. Par exemple, les frottements qui réellement ne devaient pas être constants, on les prend avec une faible pondération [47] (d'où la valeur 0.1). Et pour éliminer les bruits et les perturbations,

nous devons les mettre en valeur en leurs attribuant des pondérations assez importantes (d'où les valeurs respectives 100 et 10).

Le correcteur synthétisé pour résoudre le problème H_∞ -optimal est de la forme :

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + B_c y \\ u = C_c \xi + D_c y \end{cases}$$

avec ξ , y et u représentant respectivement les états internes, l'entrée et la sortie du correcteur.

Afin de déterminer les paramètres du correcteur Σ_c , à savoir les matrices A_c , B_c , C_c et D_c , nous avons utilisé la fonction **hinfopt** disponible dans la boîte à outils **Robust Control Toolbox** du logiciel MATLAB 5.3 [10], [45].

Les hypothèses **(H₁)**-**(H₅)** étant vérifiées, le calcul des paramètres du correcteur nous a donné :

$$A_c = \begin{bmatrix} -18.227533 & 14.707166 & -10.690443 & 13.918836 \\ 52.438672 & -51.051978 & 8.172705 & -4.567994 \\ -79.324470 & 74.064286 & -13.374665 & 8.079945 \\ 227.044244 & -210.676304 & 31.620298 & -12.002113 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0.001555 & 0.000593 & 12.087815 & -12.089944 \\ -0.001644 & -0.003483 & -39.071478 & 39.076655 \\ 0.041523 & 0.001603 & 59.951628 & -59.994847 \\ 0.242358 & 0.002814 & -171.501210 & 171.256371 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0.013154 & -0.237503 & -1.401705 & 2.172457 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est à noter que la stabilité du système est garantie a priori, du moment que la solution H_∞ -optimale existe. Alors une fois le correcteur H_∞ synthétisé, il reste à voir à présent la qualité des réponses temporelles du système en boucle fermée ainsi que le comportement de

celui-ci vis-a-vis des perturbations, des bruits, etc...

Grâce au logiciel **Simulink** de MATLAB, nous avons pu réaliser les simulations du système pendule inversé commandé par un correcteur H_∞ -optimal. Le schéma de Simulink utilisé est donné par la figure suivante :

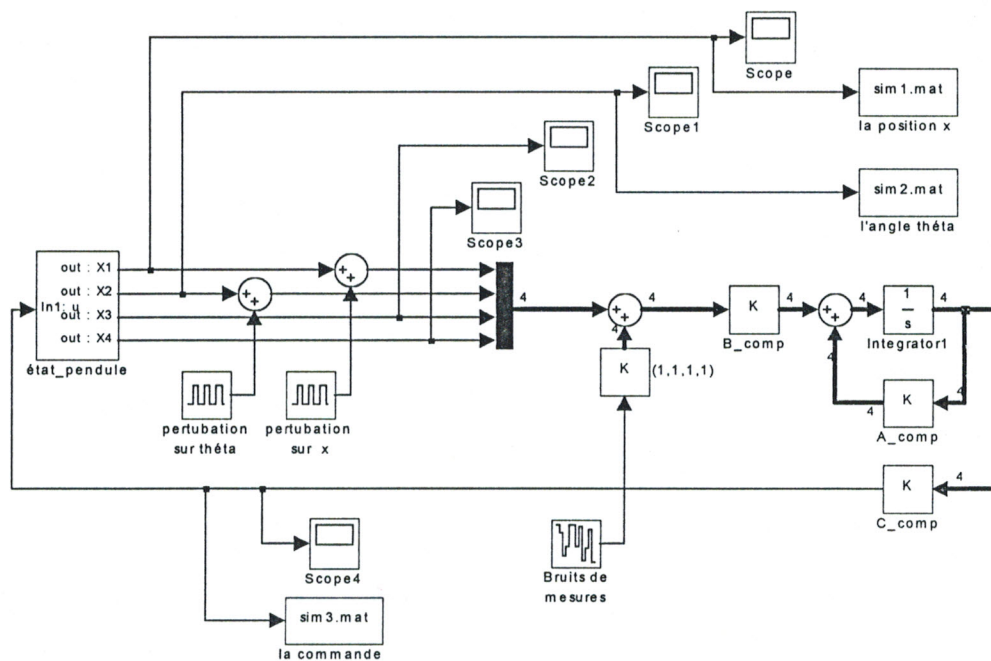
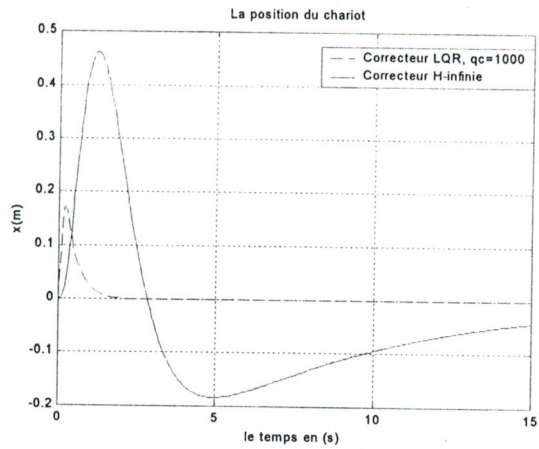
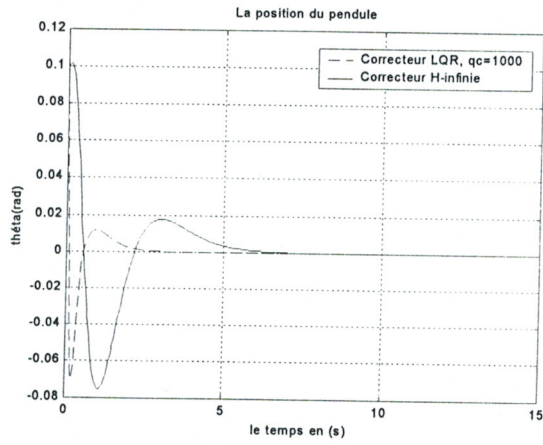


Fig.5.2 : Schéma de simulation du pendule inversé commandé par un correcteur H_∞ -optimal.

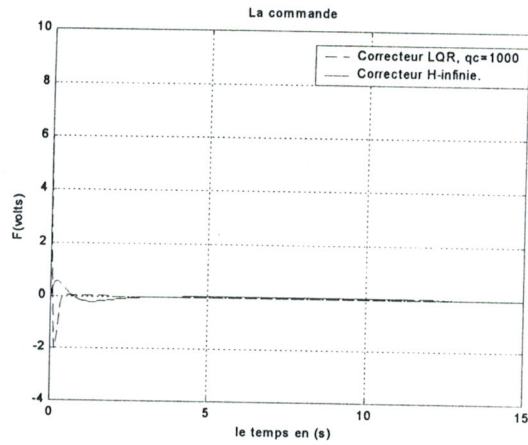
Les résultats de simulations sont illustrés par les figures suivantes :



(a) : Position du chariot.

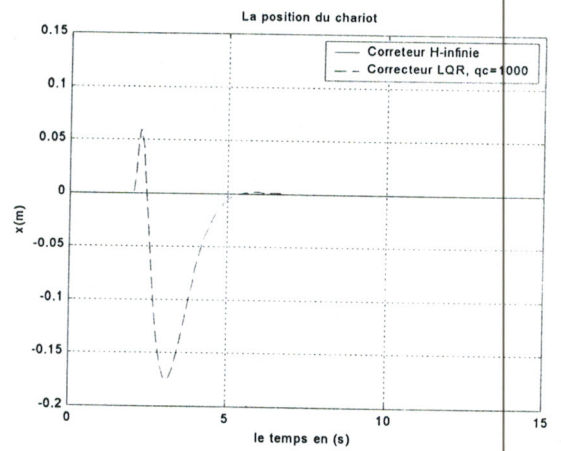
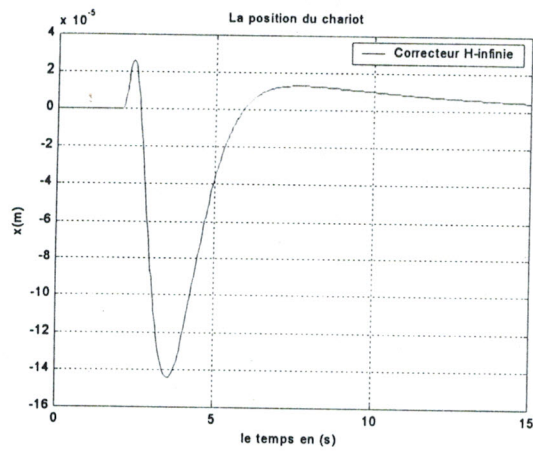


(b) : Position du pendule.

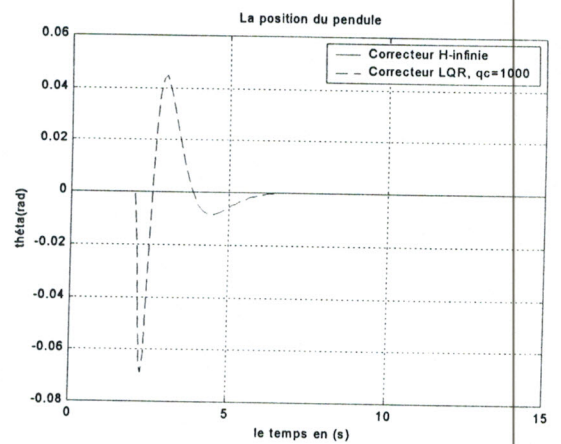
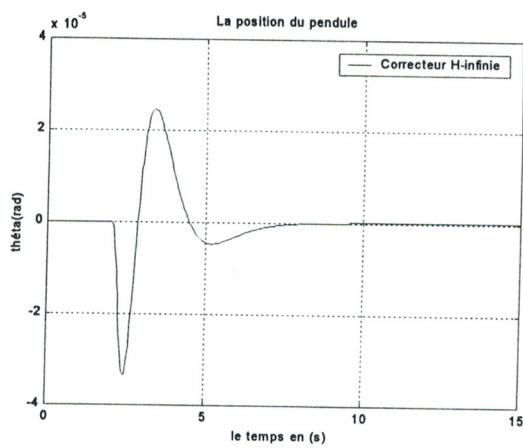


(c) : La commande appliquée sur le chariot.

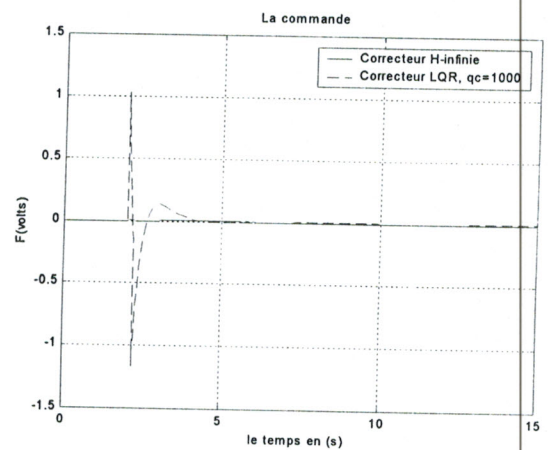
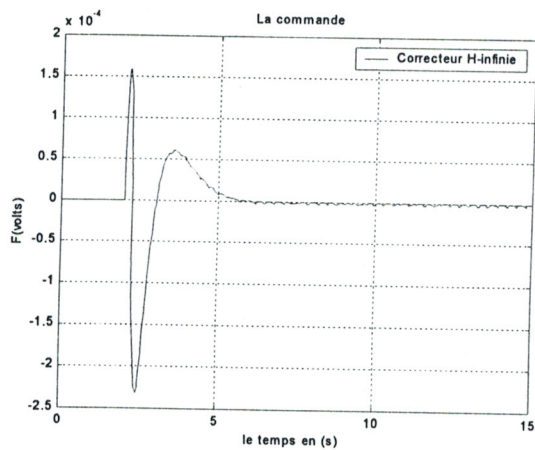
Fig.5.3 : Les résultats d'une commande H_∞ -optimale.
Cas d'un pendule initialisé à l'angle $\theta_i = 0.1 \text{ rad}$.



(a) : Position du chariot.



(b) : Position du pendule.

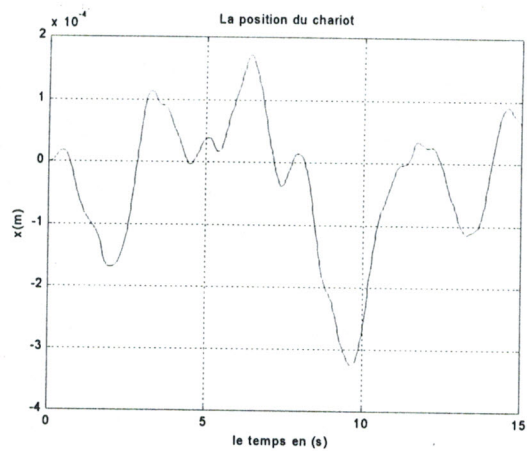


(c) : La commande appliquée sur le chariot.

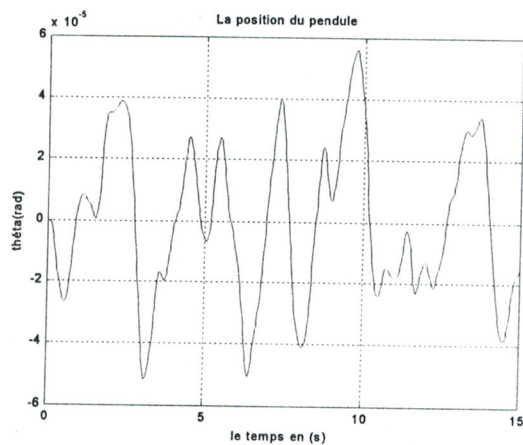
Fig.5.4 : Les résultats d'une commande H_∞ -optimale comparés

à ceux d'une commande LQR $q_c = 1000$.

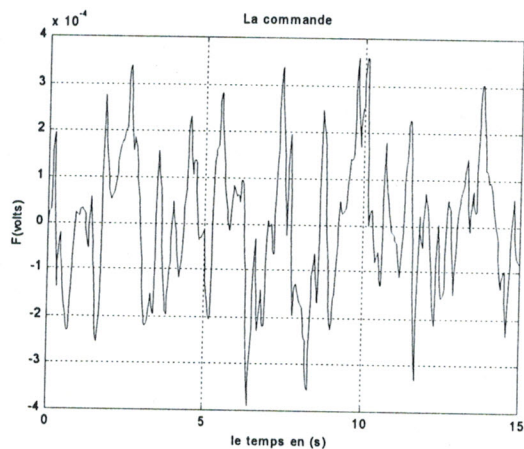
Cas d'une perturbation $d_\theta = 0.1 \text{ rad}$ à $t = 2s$ durant $1s$.



(a) : *Position du chariot.*



(b) : *Position du pendule.*



(c) : *La commande appliquée sur le chariot.*

Fig.5.5 : Les résultats d'une commande H_∞ -optimale avec bruits de mesures.
Cas d'un bruit Blanc avec une puissance (PSD) = 1.

✦ Des résultats de simulation illustrés par les figures ci-dessus nous retenons les remarques suivantes :

- Pour le cas d'un système initialisé à $\theta_i = 0.1 \text{ rad}$, les réponses temporelles sont moins bonnes comparées à celles données par le régulateur LQR. Le chariot fait un long parcours avant de revenir au point de départ, et cela en un temps d'établissement relativement long.

Par contre, en répétant les simulations pour différents angles initiaux, on trouve que le correcteur H_∞ est capable de stabiliser un système lancé avec un angle initial θ_i allant jusqu'à 0.785 rad (44.977°) alors que le correcteur LQR n'arrive à le faire que pour les $\theta_i \leq 0.49 \text{ rad}$ (28.075°).

Le régime transitoire de ces réponses peut être amélioré en ajoutant les entrées des consignes de x et θ dans le vecteur w . Elles seront alors considérées comme des perturbations et vont donc être minimisées.

On constate aussi que l'amplitude de la commande H_∞ est nettement plus faible que celle de la commande LQR. (voir figure 5.3)

- Pour le cas où à $t = 2s$ une perturbation $d_\theta = 0.1 \text{ rad}$ intervient durant $1s$, celle-ci est complètement éliminée par le correcteur H_∞ -optimal, sans même déployer une forte commande. (voir figure 5.4)

- Pour tester la présence de bruits de mesures, on a introduit aux variables mesurées un bruit Blanc de densité spectrale de puissance égale à 1. A notre surprise on a constaté que le correcteur H_∞ -optimal s'est chargé avec seulement une faible commande de l'éliminer complètement. (voir figure 5.5)

5.5 Analyse de la fragilité du correcteur H_∞ -optimal

Quelle que soit la méthode de synthèse, la forme ou la nature du correcteur, le principe d'analyse de la fragilité reste toujours le même.

Alors, pour analyser la fragilité de notre correcteur, l'équation caractéristique à étudier sera prise avec des incertitudes sur le correcteur. c'est-à-dire que les matrices A_c , B_c et C_c du correcteur doivent s'écrire :

$$A_c = A_c^\circ + \Delta A_c ; B_c = B_c^\circ + \Delta B_c ; C_c = C_c^\circ + \Delta C_c \quad (5.5)$$

avec A_c° , B_c° et C_c° les matrices nominales du correcteur de tailles respectives (4×4) , (4×4) ,

(1 × 4).

De (5.3) et (5.5) l'équation caractéristique est donnée par :

$$E_p = \det \{sI - A_{BF\text{perturbée}}\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} sI - A & B_2(C_c^\circ + \Delta C_c) \\ (B_c^\circ + \Delta B_c)C_2 & sI - (A_c^\circ + \Delta A_c) \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (5.6)$$

ce qui fait que :

$$E_p = f(A, B_2, C_2, A_c^\circ, B_c^\circ, C_c^\circ, \underbrace{\Delta A_c, \Delta B_c, \Delta C_c}_{\text{inconnus}})$$

Pour juger si le correcteur trouvé est fragile ou pas, nous devons avoir la valeur de sa marge de stabilité paramétrique. Pour calculer celle-ci, il convient de :

1. Rassembler tous les paramètres du correcteur, à savoir les éléments des matrices A_c , B_c et C_c dans un seul vecteur de paramètres K de dimension (1 × 36) on a alors :

$$K = K^\circ + \Delta K$$

avec K° le vecteur qui contient tous les paramètres nominaux du correcteur

et ΔK le vecteur qui contient toutes les perturbations correspondantes aux paramètres du correcteur.

2. De trouver la quantité de perturbations ΔK capable de mener le système vers l'instabilité ou à la rigueur vers la limite de stabilité. Ce qui fait que nous avons besoin de résoudre l'équation (5.6).

Sachant que (5.6) est une équation à 36 variables inconnues! La détermination de ces dernières va devoir se faire au moyen d'une méthode d'optimisation (aux sens des moindres carrés par exemple).

Afin de poursuivre la procédure d'analyse habituelle, nous avons essayé, à l'aide du logiciel de calcul symbolique MAPLE, de développer l'équation caractéristique perturbée, donnée par (5.6). Malheureusement, il se trouve que nos calculs ont abouti à une équation caractéristique à 36 variables, multi linéaire et de surcroît de taille qu'on peut qualifier de colossale.

Il est clair alors, qu'une telle forme d'équation caractéristique est impossible à manier. Il va devoir à présent, trouver d'autres méthodes d'analyse, tout en respectant le même principe.

Dans le but de trouver une solution au problème qu'on a en mains nous avons pensé à deux choses :

- faire une linéarisation de l'équation caractéristique, autour du point nominal.
- utiliser l'approche de Lyapunov [6].

Deux points qui vont faire l'objet des deux sections suivantes :

5.5.1 Analyse de la fragilité avec linéarisation de l'équation caractéristique

La méthode d'analyse

Comme on la déjà vu, l'analyse de la fragilité à besoin d'introduire dans l'équation caractéristique les paramètres du correcteur, accompagnés de leurs perturbations. En supposant toujours, que tous les paramètres du correcteur sont rassemblés dans un vecteur K , et que les perturbations correspondantes seront également rassemblées dans le vecteur ΔK (vecteur à 36 éléments), il s'est avéré que l'équation caractéristique E_p obtenue - en plus du fait qu'elle soit de taille très importante - est en fonction des Δk_i , ($i = 1..36$) d'une manière multilinéaire. Ce qui rend son étude très difficile, même impossible d'après sa forme.

Si les paramètres de K s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_i &= k_i^\circ + \Delta k_i \quad \text{pour } i = 1..36 \\ &= k_i^\circ (1 + \delta_i) \end{aligned} \tag{5.7}$$

L'équation caractéristique E_p sera :

$$E_p = f(s, A, B_2, C_2, K^\circ, \delta) \tag{5.8}$$

avec δ le vecteur formé par les éléments :

$$\delta_i = \frac{\Delta k_i}{k_i^\circ}, \quad i = 1..36. \tag{5.9}$$

Il est clair d'après (5.9) que les valeurs des δ_i sont faibles. il serait alors possible de linéariser l'équation E_p autour du point nominal de δ ; qui dans ce cas est $\delta^\circ = 0$.

En remplaçant dans (5.8) les valeurs des matrices A , B_2 et C_2 et du vecteur K° on aura :

$$E_p = f(s, \delta)$$

La linéarisation de la fonction $f(s, \delta)$ autour de la valeur nominale δ° de δ est donnée par :

$$f(s, \delta) = f(s, \delta^\circ) + \underbrace{\frac{\partial f(s, \delta)}{\partial \delta}}_{\text{Le jacobien}} \Big|_{\delta=\delta^\circ} \cdot \delta \quad (5.10)$$

L'équation caractéristique devient :

$$f(s, \delta^\circ) + \underbrace{\frac{\partial f(s, \delta)}{\partial \delta}}_{\text{Le jacobien}} \Big|_{\delta=\delta^\circ} \cdot \delta = 0$$

sachant que :

$$\frac{\partial f(s, \delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=\delta^\circ} = \frac{\partial f(s, \delta)}{\partial K} \Big|_{K=K^\circ} \cdot \frac{\partial K}{\partial \delta} \quad (5.11)$$

de (5.7), (5.10) et (5.11) nous allons avoir une équation de la forme :

$$\frac{\partial f(s, \delta)}{\partial K} \Big|_{K=K^\circ} \cdot \text{diag} \left[k^\circ_1 \quad k^\circ_2 \quad \dots \quad k^\circ_{36} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{36} \end{bmatrix} = -f(s, \delta^\circ)$$

il vient alors que :

$$\frac{\overbrace{\frac{\partial f(s, \delta)}{\partial K}}^{E_p}} \Big|_{K=K^\circ} \cdot \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \vdots \\ \Delta k_{36} \end{bmatrix} = -f(s, \delta^\circ) \quad (5.12)$$

Nous constatons bien, qu'après linéarisation de (5.6), l'équation (5.12) obtenue est une

équation matricielle linéaire de la forme :

$$\tilde{A} X = \tilde{B} \quad (5.13)$$

avec :

$$\tilde{A} = \left. \frac{\partial \overbrace{f(s, \delta)}^{E_p}}{\partial K} \right|_{K=K^\circ} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = -f(s, \delta^\circ)$$

plus facile à résoudre. Par la même occasion, sa solution aux sens des moindres carrés est donnée par :

$$X_{sol} = \tilde{A}^T [\tilde{A} \tilde{A}^T]^{-1} \tilde{B}$$

Dans ce cas la marge de stabilité paramétrique M_{sp} sera alors

$$M_{sp} = \|X_{sol}\|_2$$

Les résultats d'analyse :

Une fois l'analyse faite en utilisant la méthode de linéarisation, les résultats suivants ont été obtenus :

- La norme- l_2 du vecteur contenant tous les paramètres nominaux du correcteur :

$$\|K^\circ\|_2 = 429.752865$$

- Le coefficient du plus haut degré dans E_p est constant quelque soit ΔK :

$$M_d = \infty$$

- La marge de stabilité paramétrique pour $\omega = 0$ dans (5.13) :

$$M_0 = 0.0333$$



- La marge de stabilité paramétrique pour $\omega \neq 0$ dans (5.13) :

$$M_\omega = 0.04057$$

Le croisement de frontière a eu lieu en $\omega = 0.875 \text{ rad/s}$.

- La marge de stabilité paramétrique finale :

$$\begin{aligned} M_{sp} &= \min \{M_d, M_0, M_\omega\} \\ &= 0.0333 \end{aligned}$$

- La marge de stabilité paramétrique normalisée :

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|K^o\|_2} = 7.76668 \times 10^{-5}$$

Une telle valeur indique que le correcteur issu d'une synthèse H_∞ -optimale est très très fragile. Car une perturbation de l'ordre de 10^{-5} près, sur les paramètres du correcteur mène le système en boucle fermée à l'instabilité.

5.5.2 L'analyse de la fragilité par l'approche de Lyapunov

La méthode habituelle avec laquelle on analysait la fragilité d'un correcteur nécessitait toujours la disponibilité de l'équation caractéristique perturbée. Or, celle-ci, dans le cas d'un correcteur H_∞ -optimal était impossible à étudier vu son importante taille. Dans ce cas, il serait intéressant de trouver un moyen pour analyser la fragilité de ce correcteur sans que nous ayons besoin d'avoir l'équation caractéristique. Pour se faire, nous avons eu recours à l'approche de Lyapunov.

La méthode d'analyse [6] :

Considérons la description du système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

avec une commande par retour de sortie :

$$u = K y$$

La stabilité du système en boucle fermée est déterminée par la stabilité de la matrice

$$M = A + B K C$$

On suppose que les paramètres des matrices A , B , K et C sont sujets à des perturbations.

Soit

$$p = [p_1, p_2, \dots, p_r]$$

le vecteur des paramètres sujets à des incertitudes, et soit

$$P = P^\circ + \Delta P$$

où P° sont les paramètres nominaux et ΔP les incertitudes. On écrit

$$\begin{aligned} M(P) &= M(P^\circ + \Delta P) \\ &= M(P^\circ) + \Delta M(P^\circ, \Delta P) \end{aligned}$$

En supposant que les éléments de $\Delta M(P^\circ, \Delta P)$ sont des fonctions linéaires de ΔP , on peut écrire

$$\Delta M(P^\circ, \Delta P) = \Delta p_1 E_1 + \Delta p_2 E_2 + \dots + \Delta p_l E_l$$

On dit que la structure de cette perturbation est de rang unité si chaque matrice E_i a un rang égale à 1.

En posant $M(P^\circ) = M^\circ$, la matrice en boucle fermée perturbée s'écrit :

$$M_p = M^\circ + \sum_{i=1}^r \Delta p_i E_i$$

L'équation d'état du système perturbé est donnée par

$$\dot{x}(t) = \left(M^o + \sum_{i=1}^r \Delta p_i E_i \right) x(t) \quad (5.14)$$

Pour décider de la fragilité, nous devons dans ce cas évaluer le rayon de la sphère de stabilité dans l'espace de paramètres $P \in \mathfrak{R}^r$.

Soit Q une matrice symétrique et définie positive et soit S l'unique solution symétrique et définie positive de l'équation de Lyapunov suivante :

$$M^{oT} S + S M^o + Q = 0 \quad (5.15)$$

Théorème 5.3 *Le système (5.14) est stable pour les Δp_i satisfaisant*

$$\sum_{i=1}^r |\Delta p_i|^2 < \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^r \mu_i^2}$$

$$\text{où } \mu_i = \|E_i^T S + S E_i\|_2$$

Ce théorème permet de déterminer pour un correcteur donné K , la quantité

$$\rho_s(K, Q) = \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^r \mu_i^2} = \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^r \|E_i^T S + S E_i\|_2^2}$$

qui détermine l'étendue des perturbations pour laquelle la stabilité est garantie. ρ_s est le rayon de stabilité de l'hypersphère de stabilité dans l'espace des paramètres du correcteur.

D'après le théorème précédent, on voit que la limite de stabilité est atteinte pour les paramètres Δp_i vérifiant

$$\sum_{i=1}^r |\Delta p_i|^2 = \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^r \mu_i^2} \quad (5.16)$$

Par ailleurs, on sait que :

$$\|\Delta P\|_2^2 = \sum_{i=1}^r |\Delta p_i|^2 \quad (5.17)$$

Par conséquent, nous trouvons que cette quantité est un bon indicateur pour l'analyse de

la fragilité. Celle-ci étant égale à $\|\Delta P\|_2^2$, il découle de (5.16) et (5.17) que :

$$M_{sp} = \|\Delta P\|_2 = \left(\frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^r \mu_i^2} \right)^{1/2} \quad (5.18)$$

Le résultat d'analyse :

Dans notre cas, le système du pendule inversé est décrit par un modèle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2u \\ y = C_2x \end{cases}$$

Le correcteur H_∞ -optimal synthétisé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + B_c y \\ u = C_c \xi \end{cases}$$

Pour faire l'analyse de fragilité posons :

$$A_c = A^\circ_c + \Delta A_c ; B_c = B^\circ_c + \Delta B_c ; C_c = C^\circ_c + \Delta C_c$$

avec A°_c, B°_c et C°_c les matrices nominales du correcteur synthétisé.

et $\Delta A_c, \Delta B_c$ et ΔC_c les matrices d'incertitudes représentées par :

$$\Delta A_c = \begin{bmatrix} \delta a_{11} & \delta a_{12} & \delta a_{13} & \delta a_{14} \\ \delta a_{21} & \delta a_{22} & \delta a_{23} & \delta a_{24} \\ \delta a_{31} & \delta a_{32} & \delta a_{33} & \delta a_{34} \\ \delta a_{41} & \delta a_{42} & \delta a_{43} & \delta a_{44} \end{bmatrix} ; \Delta B_c = \begin{bmatrix} \delta b_{11} & \delta b_{12} & \delta b_{13} & \delta b_{14} \\ \delta b_{21} & \delta b_{22} & \delta b_{23} & \delta b_{24} \\ \delta b_{31} & \delta b_{32} & \delta b_{33} & \delta b_{34} \\ \delta b_{41} & \delta b_{42} & \delta b_{43} & \delta b_{44} \end{bmatrix}$$

$$\Delta C_c = \begin{bmatrix} \delta c_1 & \delta c_2 & \delta c_3 & \delta c_4 \end{bmatrix}$$

La matrice en boucle fermée est alors prise avec des perturbations sur les paramètres du correcteur. Elle sera de la forme :

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} A & B_2(C^\circ_c + \Delta C_c) \\ (B^\circ_c + \Delta B_c)C_2 & (A^\circ_c + \Delta A_c) \end{bmatrix} \\ &= M^\circ + \Delta M \end{aligned} \quad (5.19)$$

Si nous supposons que tous les paramètres du correcteur sont rassemblés dans un vecteur paramètre P

M° : sera une matrice fonction des valeurs nominales de P , à savoir P° .

ΔM représentera la partie incertaine de la matrice en boucle fermée. Elle est fonction des éléments de ΔP , tel que :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \begin{bmatrix} \delta a_{11} & \delta a_{12} & \dots & \delta a_{44} & \delta b_{11} & \delta b_{12} & \dots & \delta b_{44} & \delta c_1 & \dots & \delta c_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta p_1 & \Delta p_2 & \Delta p_3 & \dots & \Delta p_{36} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En substituant dans (5.19) les valeurs des matrices A , B_2 , C_2 et celles du correcteur nominal, A°_c , B°_c , et C°_c , nous distinguons les matrices M° et ΔM , telles que :

$$M^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.6245 & -1.8757 & 0 & -0.07301 & -1.3137 & -7.7536 & 12.0173 \\ 0 & 11.9110 & 1.9539 & 0 & 0.0756 & 1.3612 & 8.0340 & -12.4519 \\ 0.0016 & 0.0006 & 12.0878 & -12.0899 & -18.2275 & 14.7072 & -10.6904 & 13.9188 \\ -0.0016 & -0.0035 & -39.0715 & 39.0767 & 52.4387 & -51.0520 & 8.1727 & -4.5680 \\ 0.0415 & 0.0016 & 59.9516 & -59.9948 & -79.3245 & 74.0643 & -13.3747 & 8.0799 \\ 0.2424 & 0.0028 & -171.5012 & 171.2564 & 227.0442 & -210.6763 & 31.6203 & -12.0021 \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.5316 \delta c_1 & 5.5316 \delta c_2 & 5.5316 \delta c_3 & 5.5316 \delta c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.7316 \delta c_1 & -5.7316 \delta c_2 & -5.7316 \delta c_3 & -5.7316 \delta c_4 \\ \delta b_{11} & \delta b_{12} & \delta b_{13} & \delta b_{14} & \delta a_{11} & \delta a_{12} & \delta a_{13} & \delta a_{14} \\ \delta b_{21} & \delta b_{22} & \delta b_{23} & \delta b_{24} & \delta a_{21} & \delta a_{22} & \delta a_{23} & \delta a_{24} \\ \delta b_{31} & \delta b_{32} & \delta b_{33} & \delta b_{34} & \delta a_{31} & \delta a_{32} & \delta a_{33} & \delta a_{34} \\ \delta b_{41} & \delta b_{42} & \delta b_{43} & \delta b_{44} & \delta a_{41} & \delta a_{42} & \delta a_{43} & \delta a_{44} \end{bmatrix}$$

donnée en fonction des Δp_i par :

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.531 \Delta p_{33} & 5.531 \Delta p_{34} & 5.531 \Delta p_{35} & 5.531 \Delta p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.731 \Delta p_{33} & -5.731 \Delta p_{34} & -5.731 \Delta p_{35} & -5.731 \Delta p_{36} \\ \Delta p_{17} & \Delta p_{18} & \Delta p_{19} & \Delta p_{20} & \Delta p_1 & \Delta p_2 & \Delta p_3 & \Delta p_4 \\ \Delta p_{21} & \Delta p_{22} & \Delta p_{23} & \Delta p_{24} & \Delta p_5 & \Delta p_6 & \Delta p_7 & \Delta p_8 \\ \Delta p_{25} & \Delta p_{26} & \Delta p_{27} & \Delta p_{28} & \Delta p_9 & \Delta p_{10} & \Delta p_{11} & \Delta p_{12} \\ \Delta p_{29} & \Delta p_{30} & \Delta p_{31} & \Delta p_{32} & \Delta p_{13} & \Delta p_{14} & \Delta p_{15} & \Delta p_{16} \end{bmatrix}$$

On rappelle que le calcul de la marge de stabilité paramétrique par l'approche de Lyapunov nécessite d'écrire la matrice ΔM sous forme de :

$$\Delta M = \sum_{i=1}^r \Delta p_i E_i$$

avec E_i des matrices de rang unitaire.

Pour calculer la marge de stabilité paramétriques donnée par la formule :

$$M_{sp} = \left(\frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^r \mu_i^2} \right)^{1/2}$$

avec $\mu_i = \|E_i^T S + S E_i\|_2$

on doit disposer de la matrice S qui est symétrique, définie positive et solution de l'équation de Lyapunov :

$$M^{\circ T} S + S M^{\circ} + Q = 0 \quad (5.20)$$

Cette solution S peut être calculé à l'aide de la fonction **lyap** disponible dans la boîte à outils **Control Toolbox** de MATLAB.

Ayant M° ainsi que les matrices E_i , il nous reste maintenant à choisir une matrice Q , symétrique et définie positive pour pouvoir calculer la marge de stabilité paramétrique (M_{sp}); et par la suite décider de la fragilité ou pas du correcteur.

Pour les calculs, à part la contrainte d'avoir $Q > 0$ et $Q^T = Q$, nous n'avons pas de critères spécifiques pour choisir la matrice Q . On va donc faire un choix plus ou moins aléatoire; mais

pour respecter les contraintes définies ci-dessus on prend $Q = L^T L$. La matrice L sera choisie par la fonction **rand** de MATLAB.

Pour un premier choix de la matrice Q , on trouve :

$$M_{sp} = 1.047898 \times 10^{-6}$$

Mais cette marge doit être normalisée par les valeurs nominales du correcteur. Ce qui donne le rapport normalisé suivant :

$$\rho = \frac{M_{sp}}{\|K^\circ\|_2} = 2.438374 \times 10^{-9}$$

avec K° le vecteur des paramètres nominaux du correcteur synthétisé.

Le problème maintenant, c'est que pour chaque matrice Q , on va trouver d'autres résultats pour M_{sp} et ρ . Chose qui n'est pas intéressante, surtout lorsqu'on fait de l'analyse.

Cependant, si on choisit Q égale à la matrice identité dans ce cas :

$$Q = I_8$$

ou à

$$Q = c I_8 \quad \text{avec } c > 0 \quad (5.21)$$

La marge de stabilité paramétrique que nous obtenons est la plus grande parmi toutes les autres correspondant à un choix aléatoire de la matrice Q (L). Elle est égale à :

$$M_{sp} = 6.322036 \times 10^{-4}$$

normalisée, on a :

$$\rho = 1.471086 \times 10^{-6}$$

Une telle valeur de marge de stabilité paramétrique normalisée montre que le correcteur correspondant est très fragile.

Afin de confirmer ce résultat plutôt heuristique, nous avons établi un problème d'optimi-

sation qui consiste à maximiser le rayon de stabilité paramétrique sur l'ensemble des matrices Q diagonales et définies positives.

✠ Le problème d'optimisation est formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_Q \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum \mu_i^2} \\ Q \text{ définie positive et diagonale} \end{array} \right.$$

A l'aide de la fonction `fmincon` de Matlab et quelles que soient les conditions initiales sur la matrice Q , nous avons toujours trouvé une marge de stabilité paramétrique $M_{sp} \simeq 6.322036 \times 10^{-4}$ et cela pour toutes les matrices Q ayant la même forme choisie en (5.21).

Par ailleurs nous avons $M_{sp} = \sqrt{\rho_s}$ avec ρ_s étant le rayon de stabilité de l'hypersphère de stabilité dans l'espace des paramètres du correcteur

$$\rho_s = 3.996815 \times 10^{-7}$$

On trouve que ce ρ_s qui détermine l'étendue des perturbations pour laquelle la stabilité est garantie est très très limité. Donc, il est impossible d'envisager un réajustement ou de se permettre une erreur, même très petite, sur les paramètres d'un tel correcteur, car elle sera sûrement néfaste. Un résultat qui confirme encore que le correcteur H_∞ -optimal est très fragile.

Les résultats obtenus par cette méthode, sont très conservatifs, ce qui est le propre des méthodes de Lyapunov. Une fois la fragilité analysée - par cette méthode - il serait souhaitable de vérifier cette marge par d'autres méthodes si c'est possible.

5.6 Conclusion

L'intérêt de ce chapitre était d'analyser la fragilité d'un correcteur H_∞ -optimal. Avant de faire la synthèse de celui-ci nous avons commencé par établir un modèle augmenté. Une opération qui s'est avérée délicate à cause du choix des matrices de pondération qui doivent vérifier certaines hypothèses et refléter la nature du système final désiré.

Après La synthèse du correcteur H_∞ -optimal, les résultats de simulation ont montré qu'il est très performant, surtout en rejet de perturbations et de bruits de mesures.

Ce correcteur étant disponible sous forme de représentation d'état, l'ensemble des para-

mètres à implémenter en pratique et donc à utiliser pour l'analyse de sa fragilité est composé des éléments de sa matrice d'état, d'entrée et de sortie. Des éléments qui sont au nombre de 36.

Pour analyser la fragilité du correcteur avec un tel nombre de paramètres, nous avons besoin d'étudier une équation caractéristique, qui dans le cas échéant, était une fonction multi-linéaire en ces paramètres et encore de taille colossale. Ce qui nous rendait la tâche excessivement difficile.

Pour y remédier nous avons eu recours à deux méthodes :

- La première consistait à linéariser cette équation caractéristique autour des paramètres nominaux du correcteur.
- La deuxième par contre, nous épargnait l'utilisation de l'équation caractéristique dans l'analyse de la fragilité, car elle était basée sur l'approche de Lyapunov. L'inconvénient c'est que le résultat ainsi trouvé dépendait du choix de la matrice Q de l'équation de Lyapunov, sauf pour le cas où la matrice Q est choisie diagonale avec les mêmes éléments sur sa diagonale. Pour un tel choix, nous avons remarqué que nous obtenons la plus grande marge de stabilité paramétrique normalisée ρ . Cette constatation a été même confirmée par la résolution d'un problème d'optimisation dans lequel on a essayé de maximiser cette marge sur l'ensemble des matrices Q diagonales et définies positives.

Il est connu que les méthodes de Lyapunov sont très conservatives car elles donnent des résultats généralement pessimistes ; donc il vaut mieux comparer leurs résultats à ceux d'autres méthodes avant de décider sur une éventuelle fragilité.

Malheureusement, la synthèse H_∞ -optimale qui a tant d'avantages s'est avérée très fragile. Un résultat qui découle des méthodes d'analyse citées ci-dessus et dans lesquelles nous avons trouvé qu'une erreur de l'ordre de 10^{-6} près, dans les paramètres d'un correcteur H_∞ -optimal, est capable de déstabiliser le système en boucle fermée.

Conclusion Générale :

Il est bien connu que ces deux dernières décennies ont été marquées par l'important volume théorique qui porte sur les synthèses des correcteurs robustes et optimaux. Mais ce qui n'était pas soupçonné c'est que de tels correcteurs pourraient être fragiles. Dans le sens où il arrive qu'une très petite perturbation dans les paramètres du correcteur pourrait entraîner la déstabilisation de la boucle fermée.

Le but de notre travail était d'analyser une fragilité éventuelle des synthèses optimales. La fragilité d'un correcteur étant liée aux incertitudes commises sur les paramètres de celui-ci, nous nous sommes alors intéressés à l'approche paramétrique pour faire l'analyse, dont l'outil de base est la marge de stabilité paramétrique (M_{sp}). Cette marge se calcule toujours en vertu du théorème de croisement de frontière; que se soit pour le cas d'un système continu ou d'un système discret.

Il est à signaler ici, que le théorème de Kharitonov n'est pas applicable, car les polynômes caractéristiques obtenus ne sont pas des polynômes intervalles.

Parmi les synthèses optimales, nous avons étudié les deux synthèses suivantes :

- La synthèse optimale LQR .
- La synthèse H_∞ -optimale.

S'agissant de la première synthèse, trois cas ont été étudiés :

1. La synthèse LQR seule.
2. La synthèse LQR avec observateur d'ordre complet.
3. Et La synthèse LQR avec observateur d'ordre réduit.

Après présentation du modèle de notre système d'application qui est le benchmark "pendule inversé", nous avons donné quelques détails sur la théorie des méthodes de synthèses citées ci-dessus.

Les trois types de synthèses déjà présentées, ont été faites pour différents choix de matrices de pondération. Les résultats de simulation ont montré qu'avec l'augmentation des pondéra-

tions les temps de réponses et les écarts transitoires du chariot ont tendance à diminuer au détriment d'une élévation dans les écarts transitoires du pendule et les amplitudes de la commande.

Analyser la fragilité de tels types de synthèses revient à étudier l'équation caractéristique perturbée du système bouclé par le correcteur perturbé correspondant. Dans le cas d'une synthèse *LQR* sans estimation des états, cette équation caractéristique perturbée est fonction linéaire en ces paramètres. Donc, le calcul de la marge de stabilité paramétrique normalisée ρ était plus ou moins simple. Par contre, pour les lois de commande *LQR* avec observateur d'ordre complet ou réduit, on se retrouvait avec une équation caractéristique fonction multilinéaire des paramètres incertains considérés. Ce qui nous a poussé à utiliser une méthode d'optimisation non-linéaire qui a l'inconvénient de donner une solution locale.

Les valeurs de ρ généralement trouvées dans notre analyse sont de l'ordre du 1 à 8% environ, ce qui montre que les gains de la commande ou de l'observateur n'admettent pas des erreurs plus grandes que ces valeurs. Par conséquent, les lois de commande trouvées avec ou sans observateur sont assez fragiles.

Il a été constaté que la fragilité est liée au plus faible amortissement du système bouclé. Car nous avons remarqué que la valeur de la marge de stabilité paramétrique diminuait avec l'augmentation des pondérations. Nous avons d'ailleurs confirmé graphiquement - en suivant l'évolution des pôles lorsque l'équation caractéristique est perturbée - que ce sont les pôles ayant le coefficient d'amortissement le plus faible qui causent la fragilité.

Pour la commande *LQR*, nous avons constaté dans les trois cas traités, que plus les performances augmentaient, plus la fragilité augmentait aussi, et que par conséquent, il ne faut rechercher des performances extrêmes sous peine d'avoir une synthèse très fragile.

Quant au cas d'une synthèse H_∞ -optimale, nous avons établi un correcteur destiné à commander le système pendule inversé. La synthèse H_∞ nécessite que ce système soit représenté par un modèle augmenté. Cette représentation s'est avérée une opération assez délicate à cause du choix des matrices de pondération qui doivent vérifier certaines hypothèses et refléter la nature du système final désiré. Les résultats de simulation ont montré que ce correcteur est très performant, surtout en rejet de perturbations et de bruits de mesures.

Le correcteur issu d'une synthèse H_∞ -optimale est donné sous forme de représentation d'état. Donc l'ensemble des paramètres à implémenter en pratique et à utiliser pour l'analyse de sa fragilité est composé des éléments de sa matrice d'état, d'entrée et de sortie. Des éléments

qui sont au nombre de 36.

Pour analyser la fragilité d'un correcteur avec un tel nombre de paramètres, nous étions confrontés au besoin d'étudier une équation caractéristique, qui dans le cas présent, était une fonction multi-linéaire en ces paramètres et encore de taille colossale. Ce qui nous a rendu la tâche excessivement difficile.

Pour y remédier nous avons eu recours à deux méthodes :

1. La première consistait à linéariser cette équation caractéristique autour des paramètres nominaux du correcteur.

2. La deuxième par contre, nous épargnait l'utilisation de l'équation caractéristique dans l'analyse de la fragilité, car elle était basée sur l'approche de Lyapunov. L'inconvénient c'est que le résultat ainsi trouvé dépendait du choix de la matrice Q de l'équation de Lyapunov, sauf pour le cas où la matrice Q est choisie diagonale avec les mêmes éléments sur sa diagonale. Pour un tel choix, nous avons remarqué que nous obtenons la plus grande marge de stabilité paramétrique normalisée ρ . Cette constatation a été même confirmée par la résolution d'un problème d'optimisation dans lequel on a essayé de maximiser cette marge sur l'ensemble des matrices Q diagonales et définies positives.

Il est connu que les méthodes de Lyapunov sont très conservatives car elles donnent des résultats généralement pessimistes. Donc il vaut mieux comparer ses résultats à ceux d'autres méthodes avant de décider sur une éventuelle fragilité.

Malheureusement, d'après les valeurs numériques de ρ , nous avons trouvé que la synthèse H_∞ -optimale qui a tant d'avantages est très fragile. Car les méthodes d'analyse citées ci-dessus ont montré qu'une erreur de l'ordre de 10^{-6} près, dans les paramètres du correcteur H_∞ -optimal est capable de déstabiliser un système en boucle fermée.

Comme on l'a déjà constaté, la marge de stabilité paramétrique d'un correcteur LQR variait de 1 à 8% des paramètres de ce correcteur. Donc, il arrive que le correcteur LQR ne puisse pas tolérer une erreur supérieure à 1% dans ses paramètres.

Par ailleurs, nous savons que les composants électroniques utilisés pour l'implémentation des correcteurs ne peuvent avoir une telle précision. Par exemple, les résistances sont généralement données avec des incertitudes allant de 5 à 10%.

Il arrive aussi que dans plusieurs applications, en particulier dans les applications aérospatiales, le correcteur soit implémenté par un calculateur numérique. Le besoin de réduire la

taille et le coût de tels correcteurs digitaux entraîne des limitations de la mémoire disponible sur le calculateur et des limitations sur la longueur des mots binaires du micro processeur. Donc, il va y avoir des erreurs d'arrondi dans les calculs, ce qui nous donne à la fin une implémentation imprécise du correcteur.

Par conséquent, que le correcteur soit implémenté par un matériel physique ou numérique, il faut toujours prévoir une marge de stabilité paramétrique pour assurer la sécurité de l'ensemble du système commandé. Or, les marges trouvées dans l'analyse de la commande LQR étant très faibles, de l'ordre de 10^{-2} près. Encore pire, dans la synthèse H_∞ -optimale, elle est de l'ordre de 10^{-6} près. Ces marges sont loin d'être atteintes en pratique. En optant pour de telles synthèses optimales, l'ingénieur de commande est obligé de : soit accepter une conception avec le risque qu'elle soit fragile ou de la rejeter entièrement.

Vu le rôle important des synthèses optimales, telles qu'elles ont été développées durant ces dernières décennies dans les applications pratiques, il serait judicieux de comprendre, encore mieux, les raisons fondamentales de leur fragilité afin de la surmonter.

Ce travail nous a permis de voir plusieurs aspects de la commande optimale, en particulier sa fragilité. D'autres sujets de réflexion peuvent être évoqués et qui sont, dans le réalité persistents. Il serait intéressant de :

- Chercher à établir des algorithmes de synthèses de correcteurs qui tiennent compte - à priori - d'une marge de stabilité paramétrique convenable et réaliste.
- et de réexaminer la forme des correcteurs, afin de les implémenter d'une manière qu'ils soient le moins sensibles aux erreurs d'arrondie.

Des travaux qui pourraient parcourir un long chemin vers le rapprochement entre la théorie et la pratique.

Bibliographie

- [1] J. Ackermann, *Robust Control : Systems with Uncertain Physical Parameters*. New-York, NY : Springer-Verlag, 1997.
- [2] D. Kaesbauer & J. Ackermann, “ How to Escape From the Fragility Trap ”, Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, Juin 1998.
- [3] F.M. AL-Sunni & S.H. AL-Amer, “ Parametric Uncertainty Bounds for Guaranteed H_∞ -Norm Specifications ”, Proc. American Control Conference, San Diego, California, pg 2723-2726, Juin 1999.
- [4] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit & G. Ferreres, *Robustesse et Commande Optimale*. Edition Cépaduès, 1999.
- [5] J. Bernussou (coordonnateur), *Commande Robuste : Développement et Applications*. Paris : Hermès, 1996.
- [6] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat & L.H. Keel, *Robust Control : The Parametric Approach*. Prentice Hall , 1995.
- [7] F. Blanchini, R.L. Cigno & R. Tempo, “ Control of ATM Networks : Fragility and Robustness Issues ”, Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, Juin 1998.
- [8] P. Borne, G. Dauphin, J.P. Richard, F. Rotella & I. Zambettakis, *Commande et Optimisation des Processus*. Edition Technip, 1998.
- [9] B. M. Chen, *H_∞ Control and Its Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 235 : Springer-Verlag, 1998.
- [10] R.Y. Chiang & M.G. Safonov, *Robust Control Toolbox*. Release Notes : The Math Works Inc, 1994.
- [11] A. Choukchou-Braham, *Stabilisation des Systèmes Lagrangiens : Cas du Pendule Inversé*. Mémoire de Magister, 1998.

- [12] J.R. Corrado & W.M. Haddad, " Static Output Feedback Controllers for systems with Parametric Uncertainty and Controller Gain Variation ", Proc. American Control Conference, San Diego, California, pg 915-919, Juin 1999.
- [13] P. De Larminat, *Automatique, Tome 1*. Ecole centrale de Nantes, 1993.
- [14] P. De Larminat, *Automatique, Tome 2*. Ecole centrale de Nantes, 1993.
- [15] P. De Larminat, *Automatique, Tome 3*. Ecole centrale de Nantes, 1993.
- [16] J.E. Dennis & R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, 1983.
- [17] P. Dorato, " Non-Fragile Design : An Overview ", Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, pg 2859-2831, Juin 1998.
- [18] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar & B.A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol 34, pg. 831-847, 1989.
- [19] J.C. Doyle, B.A. Francis & A.R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New-york : MacMillan 1992.
- [20] G. Duc, *Robustesse des Systèmes Linéaires Multivariables*. Polycopié de l'Ecole Supérieure d'Electricité : Gif sur Yvette, 1993.
- [21] G. Duc & S. Font, *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*. Edition Hermes, 1999.
- [22] N. Elia & M.A. Dahleh, *Computational Methods for Controller Design*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 238 : Springer-Verlag, 1998.
- [23] D. Famularo, C.T. Abdallah, A. Jadbabaie, P. Dorato, & W.M. Haddad, " Robust non-fragile LQ controllers : the static state feedback case ", Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, pg. 1109-1113,1998.
- [24] C. Gomez, B. Salvy & P. Zimmermann, *Calcul Formel : Mode d'Emploi, Exemple en Maple*. Edition Masson, Paris, 1995.
- [25] W.M. Haddad & J.R. Corrado , " Robust Resilient Dynamic Controllers for Systems with Parametric Uncertainty and Controller Gain Variations ", Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, Juin 1998.

- [26] A. Jadbabaie, C.T. Abdallah, D. Famularo & P. Dorato, "Robust, Non-Fragile and Optimal Controller Design Via linear Matrix Inequalities", Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, pg 2842-2846, Juin 1998.
- [27] L.H. Keel, & S.P. Bhattacharyya, "Robust, Fragile or Optimal?", IEEE Transactions on Automatic Control, vol AC-42, N° 8, pg. 1098-1105, Aout 1997.
- [28] L.H. Keel, & S.P. Bhattacharyya, "Stability Margins and Digital Implementation of Controllers", Proc. American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, pg 2852-2856, Juin 1998.
- [29] L.H. Keel, & S.P. Bhattacharyya, "Authors' Reply", IEEE Transactions on Automatic Control, vol 43, N° 9, pg. 1268, Septembre 1998 .
- [30] M. Lavrentiè & B. Chabat, *Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe*. Moscou : édition Mir, 1977.
- [31] F.L. Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation : Digital Design & Implementation*. New jersey : Texas instruments, Prentice Hall, 1992.
- [32] Z. Lin, *Low Gain Feedback*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 240 : Springer-Verlag, 1999.
- [33] P.M. Mäkilä, "Comments on 'Robust, Fragile or Optimal?'", IEEE Transactions on Automatic Control, vol 43, N° 9, pg. 1265-1267, Septembre 1998.
- [34] P.M. Mäkilä, "Fragility and Robustness Puzzles", Proc. American Control Conference, San Diego, California, Juin 1999.
- [35] R.S. Mangoubi, *Robust Estimation and Failure Detection*, Springer-Verlag, 1998.
- [36] D.C. McFarlane & K. Glover, *Robust Controller Desing Using Normalised Coprime Factor Plant Descriptions*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 138 : Springer-Verlag, 1991.
- [37] M. Minoux, *Programmation Mathématique : Théorie et Algorithmes*, Tome 1, Edition Dunod, 1984.
- [38] A. Ouis, *Synthèse de régulateurs robustes par placement de pôles et par modèle interne*. Mémoire d'ingénieur, 1998.
- [39] A. Oustaloup (coordonnateur), *La Robustesse : Analyse et Synthèse de Commandes Robustes*. Ecole d'Eté d'Automatique de Grenoble : Hermès, 1993.

- [40] J.Paattilammi & P.M. Mäkilä, "Fragility and Robustness : a Case Study on PM Headbox Control ", Proc. American Control Conference, San Diego, California, pg 2898-2903, Juin 1999.
- [41] J.Paattilammi & P.M. Mäkilä, "Fragility and Robustness : a Case Study on PM Headbox Control ", IEEE Control Systems Magazine, Vol 20, N° 1, pg 13-22, fevrier 2000.
- [42] A. Rachid & D. Mehdi, *Réalisation, Réduction et Commande des Systèmes Linéaires*. Edition Technip, Paris, 1997.
- [43] K. Schittkowski, *Numerical Optimization and Parameter Estimation in Dynamical Systems*. The 10 th Jyväskylä Summer School, Finland, August 2000.
- [44] M. Seron , J. Braslavsky & G. Goodwin, *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [45] B. Shahian & M. Hassul, *Control System Design Using Matlab*. New jersey : Prentice Hall, 1992.
- [46] S.G. Tzafestas & G. Schimdt(Eds), *Progress in System and Robot Analysis and control Design*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 243 : Springer-Verlag, 1999.
- [47] G.W. Van der linden & P.F. Lambrechts, " H_∞ Control of an Experimental Inverted Pendulum with Dry Friction", IEEE Control Systems, pg 44-50, Aout 1993.
- [48] G.H.Y Yang, J.L. Wang & C. Lin " H_∞ Control for Linear Systems with Controller Uncertainty", Proc. American Control Conference, San Diego, California, pg 3377-3381, Juin 1999.
- [49] G.H.Y Yang, J.L. Wang & C. Lin " H_∞ Control for Linear Systems with Additive Controller Gain Variations ", Article personnel , janvier 2000.
- [50] G.H.Y Yang & J.L. Wang , " Non-Fragile H_∞ Control for Linear Systems with Multiplicative Controller Gain Variations ", Article personnel , janvier 2000.
- [51] K. Zhou, J.C. Doyle & K. Glover, *Robust and Optimal Control*. New Jersey : Prentice Hall, 1996.