Etude de l'Existence et de l'Unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires continues en x et discontinues en t

LACHACHI Ghazala

septembre 2013

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction

Dans ce mémoire , on présente quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions au sens de Carathéodory pour les problèmes de Cauchy classiques, le cas continu en x et discontinu en t est considéré ainsi que la dépendance par rapport à un paramétre.

Le cas d'équations différentielles avec distributions est aussi considéré

La modélisation mathématique de nombreux phénomèmes physiques peut conduire à l'étude des systèmes dynamiques à second membre discontinu par exemple pour des systèmes modélisant des contacts avec interactions,des circuits éléctroniques , etc...

Ce travail s'inspire largement du livre de référence de Filippov ("Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides")

Chapitre 2

Existence et unicité de solutions au sens de Caratheodory

On présente dans ce chapitre quelques résultats connus sur l'existence et l'unicité de solutions au sens de Carathéodory d'un problème de Cauchy.

2.1 Quelques définitions:

2.1.1 Problème de Cauchy :

Définition 2.1.2 *[2]:Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue , on appelle solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

une application $t \to x(t)$ continue , differentiable en tout point $t \in I \subset \mathbb{R}^+$ telle que $x(0) = x_0$ et qui sur l'intervalle $[0,T]$ satisfait la relation $x' = f(t,x)$.

une fonction $t \to x(t)$ est solution du probleme de Cauchy si et seulement si

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds \text{ pour tout } t \in [0,T] \tag{2.2}$$

Remarquons que si la fonction $f(t,x)$ est discontinue en t et continue en x alors la fonction qui satisfait l'équation (2.2) ne peut pas être une solution de l'équation $x' = f(t,x)$, dans ce cas en utilisant la notion de l'integrale de Lebesgue on obtient la définition d'une solution qui est à la base de la théorie des equations differentielles au sens de Carathéodory

Avant d'aborder la question , rappelons tout d'abord quelques notions et résultats qui nous seront utiles par la suite:

2.1.3 Fonction équicontinue:

Définition 2.1.4 *soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) est équicontinue si:*

$$\forall u \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in I \quad |u - v| < \delta \Rightarrow |f_n(u) - f_n(v)| < \varepsilon$$

2.1.5 Fonction mesurable:

Définition 2.1.6 *$f : E \to Y$ est dite mesurable si et seulement si:*

$$\forall V \in \tau \ \textit{(ouvert de } Y\textit{)} \Longrightarrow f^{-1}(V) \cap E \in \Sigma$$

où E et Y sont des ensembles et Σ est une tribu de partie de E

(Une tribu de partie de E est une algèbre de partie de E stable pour la réunion dénombrable)

2.1.7 Théorème d'Ascoli-Arzela :

Théorème 2.1.8 *[3]Soit K un espace compact et (F, d) un espace métrique*

Une partie A de $C(K, F)$ (l'ensemble des fonctions continues , définies sur K à valeurs dans F) et relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées:

i/ A est equicontinue

ii/Pour tout $x \in K$, l'ensemble $A(x) = \{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact.

Dans ce qui suit on présente les résultats d'existence et d'unicité des solutions au sens de Carathéodory.

On considère que $x(.)$ et $f(., x)$ sont des fonctions vectorielles de dimension n et que la fonction $f(., x) \in D$ (Domaine D) satisfait les conditions suivantes qu'on appelle les conditions de Carathéodory

1/ $f(t, x)$ est définie et continue en x pour presque tout t.

2/ $f(t, x)$ est mesurable en t pour chaque x.

3/ $\exists m(.)$ une fonction définie et integrable sur I (sur tout intervalle fini si t n'ést pas bornée dans le domaine D) telle que :

$$|f(t, x)| \leqslant m(t), \forall t \in I$$

Définition 2.1.9 *L'équation* $x' = f(t,x)$ *où* $x(t)$ *est un scalaire ou un vecteur et la fonction* f *satisfait les conditions de Carathéodory est appelée l'équation de Carathéodory.*

Définition 2.1.10 *Une fonction* $x(.)$ *définie sur un intervalle(fermé et borné)* I *est une solution de l'équation de Carathéodory si elle est absolument continue sur chaque intervalle* $[\alpha,\beta] \subset I$ *et elle satisfait l'équation* $x' = f(t,x)$ *presque partout sur* I *ou si elle satisfait l'équation integrale (2.2) pour* $t_0 \in I$ *en satisfaisant les conditions de Carathéodory.*

Lemme 2.1.11 *Soit la fonction* f *qui satisfait les conditions de Carathéodory et soit la fonction* $x(.)$ *qui est mesurable sur* $I = [a,b]$ *alors la fonction composée* $f(.,x(.))$ *est integrable sur* I.

Théorème 2.1.12 *(Théorème d'existence de solutions au sens de Carathéodory).*

Pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ *et* $|x - x_0| \leqslant b$ *supposons que la fonction* $f(t,x)$ *satisfait les conditions de Carathéodory , alors il existe une solution du problème de Cauchy (2.1) dans un intervalle fermé* $[t_0, t_0 + d]$ *où* $d > 0$.

dans ce cas on définie un nombre arbitraire d *qui satisfait l'inégalité:*

$$\varphi(t_0 + d) \leqslant b \quad \text{où} \quad 0 < d < a \quad \text{avec} \;\; \varphi(t) \doteqdot \int_{t_0}^{t} m(s)ds. \tag{2.3}$$

Preuve : Pour tout entier $k \geq 1$, on prend $h = \dfrac{d}{k}$ sur l'intervalle:

$$t_0 + ih \leq t \leq t_0 + (i+1)h \ , \ i = 0, ..., k-1.$$

Considerons une solution approchée :

$$\begin{cases} x_k(t) \doteqdot x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s-h))ds & \text{pour} \quad t_0 < t \leq t_0 + d \\ x_k(t) = x_0 & \text{pour} \quad t \leq t_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

En vertu du lemme 2.1.11 et de l'estimation (2.3) , on montre que $|x_k(t) - x_0| \leq b$ comme suit:

on a d'aprés (2.4): $x_k(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s-h))ds$

$$\begin{aligned}
\text{donc } |x_k(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s-h))ds \right| \\
|x_k(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s-h))| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} m(s)ds \quad \text{(d'aprés la condition 3/ de Carathéodory)} \\
&\leq \varphi(t) \\
&\leq b \qquad \text{(d'aprés l'estimation (2.3))}
\end{aligned}$$

Par ailleurs , pour $\alpha, \beta \in [t_0, t_0 + d]$ (arbitrairement choisis) , on a:

$$|x_k(\beta) - x_k(\alpha)| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} m(t)dt \right| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| \tag{2.5}$$

La fonction $\varphi(.)$ est continue dans $[t_0, t_0 + d]$ et donc elle est uniformement continue sur cet intervalle fermé , par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } |\beta - \alpha| < \delta \text{ alors } |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon$$

D'où la suite de fonction $x_k(.)$, $k \in \mathbb{N}^*$ est equicontinue et uniformement bornée.

D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela , on peut choisir une sous suite uniformement convergente , sa limite sera notée $x(.)$ et donc :

$$|x_k(s-h) - x(s)| \leq |x_k(s-h) - x_k(s)| + |x_k(s) - x(s)|$$

et

$$|x_k(s-h) - x_k(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad h = \frac{d}{k} < \delta$$

Il s'ensuit que $|x_k(s-h)|$ tend vers $x(s)$.Comme $f(t,x)$ est continue en x et $|f(t,x)| \leq m(t)$ on peut passer à la limite sous le signe de l'integrale (2.4) d'où la fonction $x(.)$ satisfait l'équation (2.2) pour $x(t_0) = x_0$, i.e. $x(.)$ est solution du problème (2.1). ■

Théorème 2.1.13 *Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soit $\varphi(.)$ une fonction intégrable définie sur I à valeurs positives tel que $\forall (t,x)$ et $(t,y) \in D$ on a:*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \varphi(t) |x - y| \tag{2.6}$$

Alors il existe au plus une solution au problème (2.1) dans D.

Preuve : Supposons qu'il existe deux solutions du problème (2.1) notées $x(.)$ et $y(.)$ et posons $z(t) \doteqdot x(t) - y(t)$ pour $t_0 \leq t \leq t_0 + d$, où d est défini dans le théorème 2.1.12

On a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left|z(t)\right|^2 &= 2z.\frac{dz}{dt} = 2(x-y).(\frac{dx}{dy} - \frac{dy}{dt}) \\
&= 2(x-y).(f(t,x) - f(t,y)) \\
&\leq 2\left|x-y\right|^2 \varphi(t) \quad \text{(par hypothèse)} \\
&\leq 2\varphi(t)\left|z\right|^2 \quad \text{(d'aprés l'inégalité (2.6))}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left|z(t)\right|^2 - \varphi(t)\left|z\right|^2 &\leq 0 \\
\frac{dU}{dt} - \varphi(t)U &\leq 0 \quad \text{avec } U = \left|z(t)\right|^2 \\
\frac{dU}{dt} &\leq \varphi(t)U \\
\int_{t_0}^{t}\frac{dU}{U} &\leq \int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt \\
\ln U &\leq \int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt \\
U &\leq e^{\int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt} \\
Ue^{-\int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt} &\leq 0
\end{aligned}$$

D'où:

$$(\left|z\right|^2 e^{-L(t)}) \leq 0 \qquad \text{avec} \quad L(t) \doteqdot \int_{t_0}^{t}\varphi(s)ds \ , \forall t \in [t_0, t_1]$$

Comme la fonction absolument continue $\left|z\right|^2 e^{-L(t)}$ est décroissante et $z(t_0) = 0$, il résulte que $z(t) = 0$ pour $t \geq t_0$, ainsi l'unicité est prouvée pour $t \geq t_0$. ■

Remarque 2.1.14 *Le cas $t \leq t_0$ est ramené au cas $t \geq t_0$ en remplaçant $-t$ par t.*

2.2 Cas linéaire:

Considerons le système linéaire

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{2.7}$$

Théorème 2.2.1 *Supposons que tous les éléments de la matrice A et du vecteur b sont intégrables sur chaque segment contenu dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (α et β sont arbitrairement choisis dans $[t_0, t_0 + d]$) , alors pour $t_0 \in [\alpha, \beta]$ la solution du système (2.7) existe sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et elle est unique avec des données initiales fixées $x(t_0) = x_0$*

Preuve : *Tout d'abord passons de l'équation (2.7) à une équation intégrale et utilisons les approximations successives suivantes:*

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_k(s) + b(s)]ds \qquad k = 0, 1, ... \tag{2.8}$$

A partir de l'hypothèse du théorème 2.2.1 , il s'ensuit que les fonctions $\gamma(t) \doteqdot |A(t)|$ et $\eta(t) \doteqdot |b(t)|$ sont intégrables sur chaque intervalle $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$

et puisque pour n'importe quel vecteur z on a:

$$|A(s)z| \leq |A(s)| \,.\, |z| = \gamma(s)\, |z|$$

Toutes les approximations existent et sont continues sur $[a, b]$ et vérifient:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq |\int_{t_0}^{t} \gamma(s) \;\; |x_k(s) - x_{k-1}(s)|\, ds| \quad , \forall t \in [\alpha, \beta] \quad , \quad k = 1, 2, ...$$

Posons $\varepsilon \doteqdot \max\limits_{t \in [\alpha_1, \beta_1]} |x_1(t) - x_0(t)|$ et $\psi(t) \doteqdot \left| \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds \right|$

Et montrons par récurrence que:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \varepsilon \frac{(\psi(t))^k}{k!} \quad \text{pour} \;\; k = 1, 2, ... \tag{2.9}$$

On a :

$$\begin{aligned}
|x_2(t) - x_1(t)| &\leq |\int_{t_0}^{t} \gamma(s) \;\; |x_1(s) - x_0(s)|\, ds| \\
&\leq |\int_{t_0}^{t} \gamma(s) \;\; \max_{s \in [\alpha, \beta]} |x_1(s) - x_0(s)|\, ds| \\
&\leq \; |\int_{t_0}^{t} \gamma(s)\varepsilon ds| \\
&\leq \varepsilon |\int_{t_0}^{t} \gamma(s) \; ds| \\
&\leq \varepsilon \psi(t)
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité (2.9) est vraie pour $k = 1$

Maintenant supposons que l'inégalité (2.9) est vraie à un ordre k fixé et montrons que :

$$|x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)| \leq \varepsilon \frac{(\psi(t))^{k+1}}{(k+1)!}$$

On a :

$$\begin{aligned} |x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)| &\leq |\int_{t_0}^{t} \gamma(s) \ \ |x_{k+1}(s) - x_k(s)|\, ds| \\ &\leq \ \ |\int_{t_0}^{t} \gamma(s)\varepsilon \frac{(\psi(t))^k}{k!} ds| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{k!} \frac{(\psi(t))^k}{(k+1)} (|\int_{t_0}^{t} \gamma(s) \ ds|) \\ &\leq \varepsilon \frac{(\psi(t))^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

et donc:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \varepsilon \frac{(\psi(t))^k}{k!} \quad \text{pour tout } k = 1, 2, ...$$

Le second membre de l'inégalité (2.9) est le $k^{\text{ème}}$ terme d'une série uniformément convergente dans un intervalle fermé borné $[\alpha_1, \beta_1]$ donc

$\lim_{k \to +\infty} x_k(t) = x(t)$ existe , et la limite de $x_{k+1}(.)$ quand $k \to +\infty$ existe aussi

Cette fonction $x(.)$ est solution de l'équation intégrale (2.8) et par conséquent $x(.)$ est solution de l'équation (2.7) sur l'intervalle $[\alpha_1, \beta_1]$ et elle est unique d'aprés le théorème 2.1.13 , de plus , comme $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$ alors la solution $x(.)$ existe et elle est unique dans cet intervalle .

Lemme 2.2.2 *Dans l'intervalle fermé , borné $c \leq t \leq d$, toutes les solutions de l'équation de Carathéodory $x' = f(t, x)$ sont équicontinues*

Preuve : *Soit la fonction $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$, (où $t_0 = c$ pour chaque intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$) et pour toute solution $x(.)$*

$$|x(\beta) - x(\alpha)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x(t))dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} m(t)dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

et comme $\varphi(.)$ est uniformément continue sur $[c, d]$, alors il s'ensuit que toutes les solutions de l'équation de Carathéodory $x' = f(t, x)$ sont équicontinues sur $[c, d]$ ■

Remarque 2.2.3 *Les solutions des équations de Carathéodory possèdent plusieurs propriétés analogues à celles des équations différentielles avec second membre continu et généralement elles sont étudiées avec les mêmes méthodes .*

■

Exemple 2.2.4 *Soit l'équation* $x' = f(t,x)$ *où la fonction* f *est définie par:*

$$f(t,x) = \begin{cases} 1 & si \ \ t > 0 \\ -1 & si \ \ t < 0 \end{cases}$$

Pour $t < 0$ *la solution de l'équation* $x' = f(t,x)$ *est donnée par:*

$$x(t) = -t + c_1 \ , \ c_1 \in \mathbb{R}$$

Pour $t > 0$ *la solution de l'équation est donnée par:*

$$x(t) = t + c_2 \ , \ c_2 \in \mathbb{R}$$

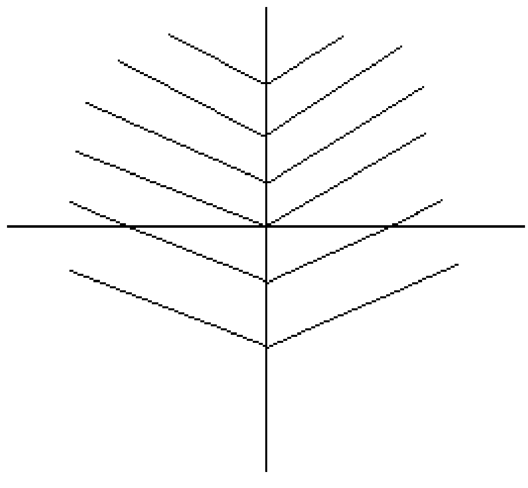
Et pour $t = 0$ *la solution est donnée par:*

$$x(0) = \lim_{t \to 0^-} (-t + c_1) = \lim_{t \to 0^+} (t + c_2)$$
$$x(0) = c_1 = c_2$$

d' où la solution générale de l'équation $x' = f(t,x)$ *est:*

$$x(t) = |t| + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$

On remarque que pour $t = 0$ *la dérivée* x' *n'existe pas.*



Pour les équations différentielles avec second membre continu en x et discontinu en t la dérivée x' n'est pas équivalente à la dérivée $\dfrac{dx}{dt}$.

Chapitre 3

Dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales et à un paramétre

Reprenons notre problème de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

On présente dans cette partie quelques résultats sur la dépendance continue par rapport à un paramétre μ défini sur un éspace métrique , on sait aussi que pour les équations differentielles ordinaires et les équations de Carathéodory l'unicité d'une solution conduit à sa dépendance continue par rapport aux conditions initiales .

Les résultats présentés dans ce qui suit généralisent ces notions

Lemme 3.0.5 *Soient le point* (t_0, a_0) , $t_1 > t_0$, $\varepsilon_0 > 0$, *le domaine* D *des* (t, x) *fini et ouvert , l'ensemble* M *des valeurs du paramétre* μ *et la famille* S *des fonctions continues* $\xi(.)$ *dont chacune correspond à sa valeur initiale* $a = \xi(t_0)$ *et d'une certaine valeur du paramètre* $\mu \in M$.

Supposons que:

H1)Pour chaque fonction $\xi(.)$ *définie sur un intervalle* I *, sa trajectoire se situe dans le domaine* D *et les éxtrémités du graphe de cette trajectoire sont deux points de la frontière du domaine* D.

H2) $\forall$ $a, \mu \in M$, *tel que* $|a - a_0| < \delta$ *pour un certain* $\delta > 0$ *, il existe au moins une fonction* ξ *qui correspond à* a *et* μ.

H3)Pour chaque suite de fonctions $\xi_i(.) \in S, (i = 1, 2, ...)$ *, tel que* $a_i \to a_0$ *et* $\mu_i \to \mu_0$*,toutes les fonctions sont équicontinues.*

H4)La limite de chaque suite de famille de fonctions uniformement convergente pour la quelle $a = a_i \to a_0$ *et* $\mu = \mu_i \to \mu_0$ *est aussi une fonction de cette famille pour* $\mu = \mu_0$

H5)Toutes les fonctions de la famille S *pour les quelles* $\mu = \mu_0$ *et* $a = a_0$ *sont définies sur* $[t_0, t_1]$ *, l'ensemble de ces fonctions sera défini par* X_0.

H6)$\forall \xi_0(.) \in X_0$,

$$\{(t, x) : t_0 < t < t_1 \text{ et } |x - \xi_0(t)| < \varepsilon_0\} \subset D \tag{3.1}$$

Alors on a:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *et* $\eta > 0$ *tel que pour tout* a *et* μ *qui satisfont les deux conditions suivantes:*

$$|a - a_0| < \delta \quad \text{et} \quad \rho(\mu - \mu_0) < \eta \tag{3.2}$$

chacune des fonctions $\xi(.)$ *qui correspond à* a *et* μ *est définie sur* $[t_0, t_1]$ *et pour* $\varepsilon > 0$ *, on a:*

$$|\xi(t) - \xi_0(t)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{3.3}$$

Preuve : Supposons que pour certains $a_i \to a_0$ et $\mu_i \to \mu_0$, il existe une suite de fonctions $\xi_i(.) \in S$ définies sur $[t_0, t_1]$, selon la condition H1) chacune accède à la frontière du domaine D en un point $q_i\,(t_i, x_i)$ où $t_i \in [t_0, t_1]$.

Il s'ensuit des conditions H3) et H6) que $t_i \ge t_0$ pour tout $i > i_1$

De la suite (q_i) on choisit une sous suite qui converge vers un certain q et de même pour la suite $\xi_i(.)$ on choisit une autre sous suite qui converge vers $\xi_0(.)$ dont le graphe de sa trajectoire joint les points (t_0, a_0) et q .

En vertu de H4) , la fonction $\xi_0(t) \in X_0$ et en vertu de H6) on a que $\{(t, x) : t_0 < t < t_1$ et $|x - \xi_0(t)| < \varepsilon_0\} \subset D$ et q est le point $(t_1, \xi_1(t_1))$

Ceci contredit la convergence de la sous suite des points $q_i\,(t_i, x_i)$ vers le point q car $t_i < t_1$

Par conséquent pour un certain $\delta > 0$ et $\eta > 0$ et pour tout a et μ qui satisfont (3.2) le graphe de la fonction $\xi(.)$ reste toujours dans le domaine D pour $t_0 < t < t_1$

Raisonnons par l'absurde et supposons que le lemme n'est pas vrai , alors pour un certain $\varepsilon > 0$ il existe une suite de fonctions $x_k(.) \in S$, tel que $x_k(t_0) = a_k \to a_0, \mu_k \to \mu_0$ et les graphes de ces fonctions se situent dans D pour $t_0 < t < t_1$, et pour chaque k et pour chaque fonction $\xi(.) \in X_0$

$$|x_k(t_k) - \xi(t_k)| \ge \varepsilon \ \text{ avec } \quad t_k \in [t_0, t_1] \quad \text{et } k = 2, 3, ... \tag{3.4}$$

Les points t_k dépendent du choix de $\xi \in X_0$

En vertu de H3) et H4) , on peut choisir une sous suite de $(x_k(.))$ qui converge uniformement vers une certaine fonction $x_0(.) \in X_0$ et c'est contradictoire avec (3.4) pour $\xi(t) \equiv x_0(t)$ d'où le résultat. ■

Corollaire 3.0.6 *Supposons que les conditions H1) - H4) du lemme précédent sont vérifiées , et que*

Pour $a = a_0$ et $\mu = \mu_0$ il existe une fonction unique $\xi_0(.)$ dans la famille S tel que $\{(t, x) : t_0 < t < t_1$ et $|x - \xi_0(t)| < \varepsilon_0\} \subset D$,

alors l'affirmation du lemme précédent est valable et chaque suite de fonctions $\xi_i(.)$ de S pour laquelle $a_i \to a_0$ et $\mu_i \to \mu_0$, converge uniformement vers $\xi_0(.)$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$

Preuve : La démonstration de ce corollaire se fait de la même manière que celle du lemme 3.0.5. ■

Remarque 3.0.7 *Pour la famille de solutions des équations de Carathéodory $x' = f(t, x)$ les conditions H1) et H2) du lemme 3.0.5 sont satisfaites en vertu du théorème 2.1.12 et les conditions H3) et H4) sont satisfaites aussi en vertu du lemmes 2.2.2 et du fait que la limite de toute suite de solution de l'équation de Carathéodory qui converge sur $[\alpha, \beta]$ est aussi solution de la même équation de Carathéodory , par conséquent si une solution avec la condition initale $x(t_0) = a_0$ est unique ,elle dépend continument des données initiales .*

Et pour l'équation de Carathéodory $x' = f(t, x, \mu)$ qui dépend du parametre μ les conditions H1) et H2) sont satisfaites et il suffit de vérifier les conditions H3) et H4) et l'unicité de la solution pour $x(t_0) = a_0$ et $\mu = \mu_0$

On a aussi le résultat suivant:

Théorème 3.0.8 *Soit pour $(t, x) \in D$ et $\mu \in M$:*

H1'/ $f(t, x, \mu)$ est mesurable en t

H2'/ $|f(t, x, \mu)| \leq m(t)$, où $m(.)$ est integrable , $t \in [t_0, t_1]$

H3'/ Pour presque tout $t \in [t_0, t_1]$, la fonction $f(t, x, \mu)$ est continue en x et pour $\mu = \mu_0$ elle est continue en x et μ

H4'/ La solution $x = \xi_0(t)$ du problème

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = a \end{cases} \tag{3.5}$$

est unique $\forall t \geq t_0$ pour $a = a_0$ et $\mu = \mu_0$ on suppose que cette solution est définie sur $[t_0, t_1]$ et que son graphe vérifie aussi l'hypothèse H6)

Alors pour tout a et μ assez proches de a_0 et μ_0 , la solution du problème (3.5) existe sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et elle converge uniformement vers $\xi_0(.)$ quand $a \to a_0$ et $\mu \to \mu_0$

Preuve : En vertu de H1'/ - H3'/ l'équation du modèle (3.5) est une équation de Carathéodory et les conditions H1) - H3) du lemme 3.0.5 sont satisfaites et les conditions H5) et H6) sont aussi satisfaites en vertu de H4'/

La solution $x = \xi(t, a, \mu)$ du problème (3.5) vérifie l'équation intégrale :

$$\xi(t, a, \mu) = a + \int_{t_0}^{t} f(s, \xi(t, a, \mu); \mu) ds \tag{3.6}$$

Si la suite de fonctions $\xi(t, a_i, \mu_i)$ converge uniformément quand $a_i \to a_0$ et $\mu_i \to \mu_0$ alors de H3'/, pour presque tout $s \in [t_0, t_1]$, on a:

$$f(s, \xi(s, a_i, \mu_i); \mu_i) \to f(s, \xi(s, a, \mu_0); \mu_0)$$

Et grâce à H2') , on peut passer à la limite sous l'intégrale pour $\xi(t, a_i, \mu_i)$

Ainsi la fonction $\xi(t, a_0, \mu_0)$ satisfait l'équation (3.6) pour $a = a_0$ et $\mu = \mu_0$ et elle est une solution du problème (3.5).

Autrement dit la condition H4) du lemme 3.0.5 est satisfaite , alors les résultats obtenus dans ce théorème découlent de ce lemme . ■

Le résultat suivant est une généralisation du théorème précédent où on remplace la convergence $f(s, x; \mu) \to f(s, x; \mu_0)$ par la convergence de $\int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu) ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu_0) ds$

Théorème 3.0.9 *Soit pour $\mu \in M$, $t_0 \le t \le t_1$ et $x \in B$,où B est une région ouverte fini dans $\mathbb{R}^n$:*

H1"/ La fonction $f(t, x, \mu)$ est mesurable en t

H2"/ $|f(t, x, \mu)| \le m(t, \mu)$, où $m(., \mu)$ est integrable en t

H3"/ Il existe une fonction integrable $l(.)$ et une fonction monotone $\psi(r) \to 0$ pour $r \to 0$ tel que pour chaque $r > 0$ tel que $|x - y| \le r$ et pour presque tout $t \in [t_0, t_1]$ on a:

$$|f(t, x, \mu) - f(t, y, \mu)| \le l(t)\psi(r) \tag{3.7}$$

H4"/ pour tout $x \in B$ et pour $\mu \to \mu_0$

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu) ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu_0) ds$$

H5"/ La solution $x = \xi_0(.)$ du problème (3.5) pour $a = a_0$, $\mu = \mu_0$ est unique pour $t_0 \leq t \leq t_1$ et appartient au domaine B (B étant une région bornée de $\mathbb{R}^n$)

Alors , pour tout a et μ suffisament proches de a_0 et μ_0 , la solution du problème (3.5) existe sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et elle converge uniformément vers $\xi_0(.)$ quand $a \to a_0$ et $\mu \to \mu_0$

Preuve : On montre tout d'abord que pour chaque suite $\mu_i \to \mu_0$ et que pour chaque suite de fonctions continues $x_i(t) \in B$ $(i = 1, 2, ...)$ qui converge uniformement vers $x_0(t)$ on a:

pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t} [f(s, x_i(s); \mu_i) - f(s, x_0(s); \mu_0)]ds = 0 \tag{3.8}$$

En effet:

Puisque la fonction $x_p(.)(p = 1, 2, ..., 2^q, ...)$est continue , la suite de fonctions constante par morceaux $y_{p,q}(t) = x_p(t_0 + jh_q)$ où $h_q = 2^{-q}(t_1 - t_0)$ et $j = 1, 2, ...,$ converge uniformement vers $x_p(t)$ pour $t_0+(j-1)h_q \leq t < t_0+jh_q$

Alors pour un certain $q(p)$ il existe une fonction $z_p(t) = y_{p,q(p)}(t)$ tel que :

$$|z_p(t) - x_p(t)| < 2^{-p} \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

Puisque $x_p(t) \to x_0(t)$ quand $p \to +\infty$, alors de même pour $z_p(t)$ elle converge uniformément vers $x_0(t)$ quand $p \to +\infty$ d'où d'aprés H1"/ et H2"/:

$$\lim_{p\to\infty} \int_{t_0}^{t} [f(s, z_p(s); \mu_0) - f(s, x_0(s); \mu_0)]ds = 0$$

De H4"/ , il s'ensuit qu'on peut remplacer x par z_p dans H4"/ sur tout intervalle contenu dans $[t_0, t_1]$ où la fonction $z_p(.)$ est constante , d'où pour $p = const$ on a:

$$J_{i,p}(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, z_p(s); \mu_i) - f(s, z_p(s); \mu_0)]ds \quad \text{quand } i \to \infty$$

et

$$\lim_{i\to\infty} J_{i,p}(t) = 0$$

Ainsi $\forall t \in [t_0, t_1]\,, \forall p \geq 1, \exists\ i_p(t)$ tel que

$$|J_{i,p}(t)| < 2^{-p} \qquad \text{pour tout} \quad i > i_p(t)$$

$i_p(.)$ peut être croissante donc on peut supposer que $i_p(t) < i_{p+1}(t)$.

Supposons que:

$$\upsilon(i,t) \doteqdot p \quad \text{pour} \quad i_p(t) < i \leq i_{p+1}(t) \text{ et } p = 1, 2, ...$$

Alors si $i \to +\infty$, on a pour chaque $t = const$

$$\upsilon(i,t) \to +\infty \quad \text{ et } \quad \left|J_{i,\upsilon(i,t)}(t)\right| < 2^{-\upsilon(i,t)} \to 0$$

Et donc en vertu de la condition H3"/ pour tout $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned} \left|f(s, x_i(s); \mu_i) - f(s, z_{\upsilon(i,t)}(s); \mu_i)\right| &\leq l(s)\psi(\left|x_i(s) - z_{\upsilon(i,t)}(s)\right|) \\ &\leq l(s)\psi(d) \quad \textit{où } d \text{ est le diamétre de } B \end{aligned}$$

De plus $\forall s \to 0$ et $i \to 0$ on a $x_i(s) \to x_0(s)$ et $x_{\upsilon(i,t)}(s) \to x_0(s)$
D'où

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{t_0}^{t} \left|f(s, x_i(s); \mu_i) - f(s, z_{\upsilon(i,t)}(s); \mu_i)\right| ds = 0$$

Maintenant soit $x_i(.)$ solution du problème (3.5) avec $a = a_i \to a_0$ et $\mu = \mu_i \to \mu_0$ quand $i \to +\infty$ et soit f une fonction qui satisfait les conditions de ce théorème 3.0.9 , alors:

$$x_i(t) = a_i + \int_{t_0}^{t} f(s, x_i(s); \mu_i)ds \tag{3.9}$$

Si $x_i(.)$ converge uniformément vers $x_0(.)$ sur un intervalle $[t_0, t^*]$ alors de (3.8) , on peut passer à la limite dans l'équation (3.9) et la fonction $x_0(.)$ et une solution du problème (3.5) pour $a = a_0$ et $\mu = \mu_0$ et donc la condition H4) du lemme 3.0.5 est satisfaite pour la famille de solutions du problème (3.5) avec de différentes valeurs de a et μ

Maintenant vérifions la condition H3) du lemme 3.0.5 :

Puisque les fonctions $f(s, a_0, \mu_0)$ et $l(s)$ sont integrables alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall \alpha, \beta \in [t_0, t_1]$, $|\beta - \alpha| < \delta$ on a:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(s, a_0, \mu_0)ds\right| < \varepsilon \quad , \quad \left|\int_{\alpha}^{\beta} l(s)ds\right| < \frac{\varepsilon}{\psi(d)} \tag{3.10}$$

où d est le diamètre du domain B

Pour certain $\rho_1(\varepsilon)$ tel que $\rho(\mu, \mu_0) < \rho_1(\varepsilon)$ et $\forall t \in [t_0, t_1]$ on a:

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu)ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu_0)ds\right| < \varepsilon$$

de cette relation et de (3.10) il s'ensuit que :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(s, a_0, \mu) \right| < 3\varepsilon \quad \text{avec } \rho(\mu, \mu_0) < \rho_1(\varepsilon) \tag{3.11}$$

Soit $x_i(.)$ $(i = 1, 2, ...)$ une suite de solutions du problème (3.5) avec $a = a_i \to a_0$ et $\mu = \mu_i \to \mu_0$.

De l'équation (3.9) on a:

$$x_i(\beta) - x_i(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(s, x_i(s); \mu_i) ds \tag{3.12}$$

En vertu de (3.7) les integrales dans (3.11) pour $\mu = \mu_0$ et dans (3.12) ne diffèrent pas de $l(s)\psi(d)$ et donc en tenant compte (3.10) les integrales ne diffèrent pas de plus de ε

Maintenant pour $\rho(\mu, \mu_0) < \rho_1(\varepsilon)$ on a de (3.11) et (3.12) que:

$$|x_i(\beta) - x_i(\alpha)| < 4\varepsilon \tag{3.13}$$

Puisque $\mu_i \to \mu_0$, l'inégalité $\rho(\mu, \mu_0) < \rho_1(\varepsilon)$ peut etre fausse pour un nombre fini de i et comme la fonction $x_i(.)$ est continue sur $[t_0, t_1]$, $\exists\ \delta_1$ pour ces valeurs de i tel que (3.13) est vraie pour tout $\alpha, \beta \in [t_0, t_1]$, $|\beta - \alpha| < \delta_1$ et pour $|\beta - \alpha| < \min\limits_{\alpha,\beta \in [t_0,t_1]} \{\delta, \delta_1\}$ l'inégalité (3.13) est donc vraie pour tout i

et puisque ε est arbitraire , les solutions sont équicontinues et la condition H3) du lemme 3.0.5 est satisfaite

les conditions H1) et H2) du lemme sont aussi satisfaites en vertu de H1"/ , H2"/ , H3"/ et des résultas précédents et donc le théorème est vrai en vertu du corollaire précédent ■

Chapitre 4

Les équations avec distributions

On traite ici des équations différentielles avec des distributions dans le second membre , on va étudier les méthodes de réduction de ces équations qui permettent de prouver l'existence et à étudier les propriétés des solutions .

Soit l'équation:

$$x' = f(t,x) + p(t) \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction f satisfait les conditions de Carathéodory et la fonction $p(.)$ est une distribution non intégrable.

$p(.)$ est supposée être une dérivée d'une fonction intégrable $q(.)$ bornée sur chaque intervalle fini i.e.:

$$p(t) = q'(t) \text{ où } |q(t)| \leq \gamma \quad (\alpha < t < \beta) \tag{4.2}$$

En particulier $p(.)$ peut être intégrable dans un autre sens et $q(.)$ est dite la primitive de $p(.)$

Dans ce cas on peut réduire l'équation (4.1) à une équation de Carathéodory

$$y' = f(t, y + q(t)) \tag{4.3}$$

en posant $x = y + q(t)$

Une solution de l'équation (4.1) est une fonction de la forme $x(t) = y(t) + q(t)$ où $y()$ est une solution de l'équation (4.3) .Une telle fonction $x(.)$ satisfait l'équation (4.1).

Puisque l'équation (4.3) a une solution avec des données initiales de la forme $y(t_0) = a$, l'équation (4.1) a une solution pour des données initiales sous la forme

$$x(t_0) - q(t_0) = a \tag{4.4}$$

i/Si la fonction q est continue au point t_0 alors la condition (4.4) est équivalente à la condition initiale

$$x(t_0) = b \qquad \text{où} \quad b = a + q(t_0) \tag{4.5}$$

ii/Si la fonction q est discontinue au point t_0 , toutes les solutions de l'équation (4.1) sont aussi discontinues au point t_0 et donc la condition (4.5) n'aura plus de sens

iii/Si $\lim_{t\to t_0-0} q(t) = q(t_0-0)$ ou $\lim_{t\to t_0+0} q(t) = q(t_0+0)$ alors la condition (4.5) peut etre remplacée par la condition :

$$x(t_0-0) = a + q(t_0-0) \quad \text{ou} \quad x(t_0+0) = a + q(t_0+0)$$

Dans d'autres cas on doit se contenter de fixer les données initiales sous la forme (4.4)

En connaissant les propriétés des solutions des équations de Carathéodory et en utilisant le changement de variables $x = y + q(t)$, on obtient les propriétés correspondantes aux solutions de l'équation (4.1)

Faisons une analyse plus détaillée des équations avec les distributions

On considère l'équation suivante:

$$x' = f(t,x) + p_\varepsilon(t) \tag{4.6}$$

où $f(t,x)$ est une fonction donnée , et pour la fonction $p_\varepsilon(t)$ on sait seulement qu'elle est nulle à l'éxterieur de l'intervalle $[t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon]$ et sa primitive est égale à v

Ces équations représentent les problèmes de mouvement d'un corps en présence de pousse et de frappe

Pour éxclure de l'étude les valeurs inconnues de la fonction $p_\varepsilon(t)$ sur l'intervalle $[t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon]$ il faut passer à la limite $(\varepsilon \to 0)$ avec la valeur de la primitive de $p_\varepsilon(t)$ cerrespondante

à la limite , on obtient l'équation :

$$x' = f(t,x) + v\delta(t-t_1) \tag{4.7}$$

où δ est la fonction delta qui est définie par $\delta(t) = \eta'(t)$ où:

$$\begin{cases} \eta(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \eta(t) = 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

par conséquent , pour le changement de variables $x = y + v\eta(t-t_0)$ l'équation (4.7) est réduite à l'équation (4.3) avec $q(t) = v\eta(t-t_0)$

Les solutions de l'équation (4.3) sont absolument continues donc les solutions de l'équation (4.7) sont des fonctions qui pour $t < t_1$ et $t > t_1$ sont absolument continues et elles satisfont l'équation $x' = f(t,x)$ presque partout et pour $t = t_1$ elles ont un saut $x(t+0) - x(t-0) = v$, de même , aux point t_i toutes les solutions de l'équation suivante:

$$x' = f(t,x) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - t_i) \tag{4.8}$$

ont des sauts v_i $(i = 1, 2, ...)$ et dans l'intervalle entre ces sauts elles sont absolument continues et elles satisfont l'équation $x' = f(t,x)$

Le théorème suivant justifie le passage de l'équation (4.6) à l'équation (4.7)

Théorème 4.0.10 *Dans un domaine fermé borné D , on considère les équations*

$$x'_k = f(t, x_k) + p_k(t) \qquad (k = 1, 2, ...) \tag{4.9}$$

où la fonction f satisfait les conditions de Carathéodory et $p_k(t) = q'_k(t)$,tel que:

$$|q_k(t)| \leq m_0 \qquad (k = 1, 2, ...) \text{ , } q_k(t) \to q(t) \tag{4.10}$$

Alors chaque fonction $x(.)$ qui est la limite d'une certaine suite de solutions $x_k(.)$ de l'équation (4.9) est une solution de l'équation (4.1) avec $p(t) = q'(t)$.

Preuve : On passe de l'équation (4.1) à l'équation (4.3) et en utilisant le changement de variables $x_k = y_k + q_k(t)$ on passe de l'équation (4.9) à l'équation

$$y'_k = f(t, y_k, q_k(t)) \qquad k = 1, 2, ... \tag{4.11}$$

Pour ces équations , la condition de Carathéodory 2/ est vérifiée en vertu du lemme 2.1.11 et la condition 3/ est vérifiée aussi avec une seule et même fonction $m(t)$ pour tout k

pour presque tout t la fonction $f(t,x)$ est continue en x et en prenant compte (4.10) et en passant à la limite $(k \to +\infty)$ dans l'équation integrale équivalente à l'équation (4.11) , on trouve que la fonction $y(t) = \lim_{k\to\infty} y_k(t)$ satisfait cette équation integrale mais avec la fonction $q(t)$ plutôt que la fonction $q_k(t)$ et donc $y(t)$ est une solution de l'équation (4.3) d'où $x(t) = y(t) + q(t)$ est une solution de l'équation (4.1). ■

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce travail , on a présenté des résultats d'existence et d'unicité des solutions des problèmes de Cauchy au sens de Carathéodory , la dépendance par rapport à la condition initiale et à un paramétre μ est aussi étudiée.

Le cas des équations avec déstributions est ensuite considéré.

Bibliographie

[1] A. F. Filippov, “Differential equations with discontinuous right-hand side”, Mat. Sb. (N.S.), 51(93):1 (1960), 99–128

[2] C Lobry , T Sari - Contrôle non linéaire et Applications, (2005) - academia.edu

[3] L. Schwartz , Analyse1 : Theorie des ensembles et topologie , T1 , Hermann,(1997)