Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

pour obtenir le diplôme de

Master

Option: Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Sur le Thème :

Méthode des sous et sur solutions pour une classe de problèmes aux limites non locales hyperboliques.

Présenté par :

KHATER Siham

Devant le jury composé de :

Présidente : **Mme. D. Hadj Slimane** Prof. Université de Tlemcen.
Examinateur: **Mr. A. Moussaoui.** M.C.A Université deTlemcen.
Encadreur : **Mr. M.Derhab** Prof. Université de Tlemcen.
.

Année universitaire : 2012 - 2013

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

Mes très chers parents pour leurs sacrifices,

et qui n'ont jamais cessé de m'encourage

que ALLAH me les garde.

Mes très chers frères et ma très chère sœur

Nadjia.

Mes très chers tantes, mes oncles tous mes

cousins et cousines.

Tous les membres de ma famille, petits et grands.

Mes chères amies et mes collègues pour les

moments qu'on a passé ensemble.

A tous ceux qui me sont chers.

SIHAM

Remerciements

Tout d'abord Je remercie Dieu qui m'a donné la volonté, la patience et surtout la santé durant toutes mes années d'études.

Je tiens en tout deuxième lieu à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur ***Mr. M.DERHAB*** *pour son orientation, ses conseils ainsi que ses précieuses directions.*

J'exprime ma profonde et respectueuse gratitude à Madame ***D.HADJ SLIMANE*** *qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.*

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à ***MR. A.MOUSSAOUI*** *pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail et faire partie du jury.*

J'exprime également ma gratitude à Mr. ***MEBKHOUT*** *et Mr.****K. YADI*** *mon professeur et responsable de notre option* ***Pe. M. A. B*** *et tous mes enseignants.*

Enfin, merci à tous.

Méthode des sous et sur solutions pour une classe de problèmes aux limites non locales hyperboliques

Khater Sihem

19 Septembre 2013

Table des Matières

Notations

Ω: ouvert de $\mathbb{R}^n$.
u_t : la dérivée de la variable u par rapport à t.
$L^p(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω et $\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty,\ 1 \leq p < \infty\}$.
$L^\infty(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω et il existe C tel que $|u| \leq C$ p.p sur $\Omega\}$.
$H = L^2((a,b))$.
H^1 : l'espace de sobolev muni de la norme

$$\|u\|_{H^1} = (\int_a^b |u|^2 + |u_x|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

$C_0(\Omega)$: l'espace des fonctions continues a support compact dans Ω.

$C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω pour tout k entier avec $k \geq 0$.

$C^\infty(\Omega) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\Omega)$.

$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

$C_B(\Omega)$ l'espace des fonctions continues et uniformément bornées sur Ω.

Introduction générale

L'étude des équations aux dérivées partielles se trouve à l'interface de nombreux problèmes scientifiques. En effet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la construction des solution pour les problèmes aux limites de type hyperbolique non linéaire en utilisant la méthode des sous-solutions et sur-solutions et la méthode itérative pour construire les solutions. Cette méthode a été introduite par Picard en 1890 pour les équations aux dérivées partielles et en 1893 pour les équations différentielles ordinaires, c'est le point de départ d'utilisation de la méthode des sous-solutions et des sur-solutions et les technique itératives.

Ce travail est constitué de deux chapitres:

Dans le premier chapitre, l'objectif est la construction de la solution en utilisant la méthode des sous-solutions et sur-solutions et la technique itérative et la méthode des caractéristique pour le problème initial hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_t + (g(t,x)u)_x = F(t,x,u,\varphi(u)(t)),\ 0 < t < T,\ 0 < x < b, \\ g(t,a)u(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,x)u(t,x)dx,\ 0 < t < T, \\ u(0,x) = u_0(x),\ a \leq x \leq b, \end{cases}$$

avec $\varphi(u)(t) = \displaystyle\int_a^b u(t,x)dx$, $F : [0,T] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions.

Ce type de problème intervient en dynamique de populations, par exemple, dans le cas où $F(t,x,u,\varphi(u(t)) = -m(t,x,\varphi(u)(t))u$, qui décrit la dynamique de populations structurées en âge où les individus sont en compétion pour la même ressource. Dans ce cas u désigne la densité de population a l'instant t ayant d'age x, g est le taux de croissance à l'instant t, η est le taux de reproduction et m est le taux de mortalité.

Le second chapitre est consacré à la construction de l'unique solution en utilisant la méthode des sous-solutions et sur-solutions et la technique itérative du problème initial suivant

$$\begin{cases} u_t + (g(t,x)u)_x = F(t,x,u,\varphi(u)(t),\ \text{dans}\ D_T, \\ g(t,a)u(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,x)u(t,x)dx,\ \text{sur}\ (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x),\ \text{dans}\ [a,b], \end{cases}$$

avec $D_T = (0, T) \times (a, b)$ pour $T > 0$, et $\varphi(u)(t) = \displaystyle\int_a^b u(t, x)dx$.

Dans ce chapitre on montre que la définition de la sous et sur solution et la construction des solution dépend de la monotonie de F_φ qui représente la dérivée partielle de F par rapport à φ.

Chapitre 1

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la construction de la solution du problème initial hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_t + (g(x)u)_x = F(t, x, u, \varphi(u)(t)),\ 0 < t < T,\ 0 < x < b, \\ g(a)u(t, a) = \displaystyle\int_a^b \eta(x)u(t, x)dx,\ 0 < t < T, \\ u(0, x) = u_0(x),\ a \leq x \leq b, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\varphi(u)(t) = \displaystyle\int_a^b u(t, x)dx$, $F : [0, T] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Dans ce chapitre on construit l'unique solution du problème (1.1) en utilisant la méthode des sous-solutions et sur-solutions combinée avec la méthode des approximations successives.

Ce chapitre est divisé en quatre parties. Dans la première partie on présente quelques outils nécessaires pour la suite. Dans la deuxième partie, on présente un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.1) et on construit deux suites monotones qui convergent vers l'unique solution du problème (1.1). Dans la troisième partie, on présente un schéma praticable pour avoir une solution explicite du problème (1.1) et finalement dans la dernière partie on donne un exemple d'application. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [2, 4, 8].

1.2 Préliminaires

Définition 1.2.1 [8] *Soient* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $\{S(t), t \geq 0\}$ *une famille d'opérateurs linéaires et continus de* X *vers* X. *On appelle un semi-groupe continu sur* X *lorsque les conditions suivantes sont réalisées*

$i) S(0) = I_d$,

$ii) S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$, *pour tout* $t_1 \geq 0$ *et pour tout* $t_2 \geq 0$.

Si de plus

$$\lim_{t \to 0} \|S(t)x - x\| = 0, \text{ pour tout } x \in X,$$

alors $\{S(t), t \geq 0\}$ *est un semi-groupe fortement continu où bien on l'appelle* C_0 *semi-groupe.*

Définition [8]1.2.2 *Soit* $\{S(t), t \geq 0\}$ *un semi-groupe fortement continu sur* X. *On appelle un générateur infinitésimal du semi-groupe l'opérateur non borné* $(A, D(A))$ *défini par*

$$D(A) = \{x \in X, \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(S(t)x - x) \textit{ existe dans } X\ \},$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(S(t)x - x), \textit{ pour tout } x \in X.$$

Proposition 1.2.1 [8] *Soit* $\{S(t), t \geq 0\}$ *un* C_0 *semi-groupe, alors il existe* $w \geq 0$, $M \geq 1$ *telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \textit{ pour tout } t \geq 0.$$

Théorème 1.2.1 [8] *Soit* $(A, D(A))$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{S(t), t \geq 0\}$ *fortement continu sur* X.

Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ *le système*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \textit{ pour tout } t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

a une unique solution $u \in C^1([0, \infty[; X) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ *donnée par*

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Théorème 1.2.2 [8] *Soit* $T > 0$, $u_0 \in X$ *et* f *est une application de* $[0, T]$ *a valeur dans* X.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \textit{ dans } (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Si $f \in L^p(0,T;X)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors l'équation (1.2) admet une solution unique dans $L^p(0,T;X)$ donnée par

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Théorème 1.2.3 [7] *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t,u),\, t > t_0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

avec A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ dans X et f :$[0,T] \times X \to X$ une fonction continue sur $[t_0,T]$ et uniformèmnt lipschitzienne dans X, alors pour tout $u_0 \in X$ notre problème admet une unique solution $u \in C([t_0,T];X)$.

Lemme 1.2.1 *(Gronwall) Soit Ψ et Y $[a,b] \to \mathbb{R}^+$, deux fonctions vérifiant*

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ Y(t) \leq c + \int_a^t \Psi(s)Y(s)ds,$$

alors

$$\forall t \in [a,b],\ Y(t) \leq c\exp(\int_a^t \Psi(s)ds).$$

Théorème 1.2.4 *(convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions complexes mesurables sur X. On suppose que:*

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ converge presque partout vers une limite $f(x)$.*
2. Il existe *$g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$* on ait : $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ *presque partout en x.*

Alors *$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans cet espace*

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

1.3 Résultats principaux

1.3.1 Existence, unicité et construction de la solution

On considère le problème initial hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_t + (g(x)u)_x = F(t, x, u, \varphi(u)(t)),\ 0 < t < T,\ 0 < x < b, \\ g(a)u(t, a) = \displaystyle\int_a^b \eta(x)u(t, x)dx,\ 0 < t < T, \\ u(0, x) = u_0(x),\ a \leq x \leq b. \end{cases} \tag{1.1}$$

On met les hypothèses suivantes sur les fonctions g, η, F, u_0

$(H1)$ $g \in C^1([a, b])$, $g > 0$ dans $[a, b)$ et $g(b) = 0$.

$(H2)$ $\eta \in C([a, b])$ et $\eta \geq 0$ dans $[a, b]$.

$(H3)$ $u_0 \in H^1((a, b))$ et $\lim\limits_{\substack{t \to b \\ <}} (gu_0)(x) = 0$ et u satisfait la condition de compatibilité

$$g(a)u_0(a) = \int_a^b \eta(x)u_0(x)dx.$$

$(H4)$ Soit $\mathcal{F}(t, u) = F(t, ., u, \varphi(u)(t))$, alors $\mathcal{F}(t, u) : [0, T] \times H((a, b)) \rightarrow H((a, b))$ est continûment différentiable.

$(H5)$ $F \in C^1([0, T] \times [a, b] \times R \times R)$ et $F_\varphi \leq 0$.

Par suite on introduit l'opérateur $A : Dom\ A \subset H \rightarrow H$, défini par $A\Psi = -\frac{\partial}{\partial x}(g\Psi)$ avec

$$DomA = \{\ \Psi \in H/\ g\Psi \in H^1,\ \lim_{\substack{x \to b \\ <}}(g\Psi)(a) = \int_a^b \eta(x)\Psi(x)dx\}.$$

Le problème (1.1) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au + \mathcal{F}(t, u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

On montre que A est un est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ sur H ([7]).

On a le résultat suivant

Théorème 1.3.1 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(H1)$ à $(H4)$, *alors le problème* (1.1) *possède une unique solution pour* $0 \leq t \leq T$.

Preuve : Comme A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ sur H et $\mathcal{F}(t, u)$ est une fonction continûment différentiable dans $[0, T] \times H \rightarrow H$, alors d'après le théoréme 1.2.3 notre problème admet une unique solution dans H. ■

On pose $D_T = (0,T) \times (a,b)$. Maintenant, on donne les définitions de la solution, la sous-solution et la sur-solution du problème (1.1).

Définition 1.3.1 *On entend par solution du problème (1.1) toute fonction u vérifiant*

i) $u \in C(D_T)$,

ii) $u(0,x) = u_0(x)$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b u(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)u(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b u(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,u,\varphi(u)(\tau))dxd\tau.\end{aligned}$$

Définition 1.3.2 *On entend par une paire de sous-solution et sur-solution du problème* (1.1) *tout couple* (v,w) *vérifiant*

i) $v, w \in C(D_T)$,

ii) $v(0,x) \leq u_0(x) \leq w(0,x)$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ et $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx &\leq \int_a^b v(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)v(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b v(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,v,\varphi(w)(\tau))dxd\tau,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx &\geq \int_a^b w(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)w(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b w(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,w,\varphi(v)(\tau))dxd\tau.\end{aligned}$$

On a le résultat suivant:

Théorème 1.3.2 (Principe de comparaison) *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H5) sont satisfaites. Soient* (v,w) *une paire de sous-solution et sur-solution du problème (1.1), alors* $w \geq v$ *dans* $\overline{D_T}$.

Preuve : Pour $t \in [0,T]$ et $x \in [a,b]$, on pose par définition

$$\omega(t,x) = v(t,x) - w(t,x),$$

Pour $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = v(0,x) - w(0,x) \leq 0 \text{ dans } [a,b].$$

Maintenant soit ξ un élément quelconque de $C^1(\overline{D_T})$ avec $\xi(t,x) \geq 0$ pour tout $t \in (0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx - \int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx \\
&\leq \int_a^b v(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)v(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b v(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,v,\varphi(w)(\tau))dxd\tau \\
&\quad - \int_a^b w(0,x)\xi(0,x)dx - \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)w(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b w(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,w,\varphi(v)(\tau))dxd\tau \\
&\leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F_u(\tau,x,\theta_1,\varphi(v)(\tau))\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F_\varphi(\tau,x,w,\theta_2(t))\int_a^b \omega(\tau,y)dydxd\tau,
\end{aligned}$$

avec $w \leq \theta_1 \leq v$ et $\varphi(w)(t) \leq \theta_2(t) \leq \varphi(v)(t)$.

Maintenant si on pose $\xi(t,x) = e^{\lambda t}\zeta(t,x)$ avec $\zeta \in C^1(\overline{D_T})$ et on choisit $\lambda \geq 0$, tel que $\lambda + F_u \geq 0$ dans $\overline{D_T}$, alors on a

$$e^{\lambda t}\int_a^b \omega(t,x)\zeta(t,x)dx \leq A(t), \tag{1.4}$$

avec

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_a^b \omega(0,x)\zeta(0,x)dx + \int_0^t e^{\lambda\tau}\zeta(\tau,a)\int_a^b \eta(x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b e^{\lambda\tau}\omega(\tau,x)[\zeta_\tau(\tau,x)+g(x)\zeta_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b e^{\lambda\tau}\zeta(\tau,x)[\lambda+F_u(\tau,x,\theta_1,\varphi(v)(\tau))]\omega(\tau,x)dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_a^b e^{\lambda\tau}\zeta(\tau,x)F_\varphi(\tau,x,w,\theta_2(\tau))\int_a^b \omega(\tau,y)dydxd\tau. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \zeta_\tau + g\zeta_x = 0,\ 0<\tau<t,\ a<x<b, \\ \zeta(\tau,b)=0,\ \ 0<\tau<t, \\ \zeta(t,x)=\chi(x),\ a\le x\le b, \end{cases}$$

où $\chi \in C_0^\infty((a,b))$, avec $0 \le \chi \le 1$.

Alors, pour voir l'existence de ζ dans $C^1(\overline{D_T})$, on pose le changement $s = t-\tau$, donc le problème ci-dessus peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \zeta_s - g\zeta_x = 0,\ 0<s<t,\ a<x<b, \\ \zeta(s,b)=0,\ 0<s<t, \\ \zeta(0,x)=\chi(x),\ a\le x\le b, \end{cases}$$

On remarque que $0 \le \zeta \le 1$ dans $\overline{D_T}$.

On remplace dans (1.4), ce qui donne

$$\int_a^b \omega(t,x)\chi(t,x)dx \le \int_a^b \omega^+(0,x)dx + m_1\int_0^t\int_a^b \omega^+(\tau,x)dxd\tau,$$

avec $m_1 = \max\limits_{\overline{D_T}}[\eta(x)+\lambda+F_u(t,x,\theta_1,\varphi(u)(t))+(a-b)F_\varphi(t,x,u,\theta_2(t))]$.

Comme par hypothèse $\omega(0,x)\le 0$, alors

$$\int_a^b \omega(t,x)\chi(t,x)dx \le m_1\int_0^t\int_a^b \omega^+(\tau,x)dxd\tau.$$

Si on choisit χ comme suit

$$\chi = \begin{cases} 1,\ \text{si } \omega(t,x)>0, \\ 0,\ \text{ailleurs}. \end{cases}$$

Alors il résulte que

$$\int_a^b \omega(t,x)^+ dx \leq m_1 \int_0^t \int_a^b \omega(\tau,x)^+ dx d\tau.$$

D'après l'inégalité de *Gronwall*, on obtient

$$\int_a^b \omega(t,x)^+ dx = 0,$$

c'est-à-dire $\omega(t,x) \leq 0$. ■

1.3.2 La convergence des suites auxiliaires monotones

On commence par la construction des suites monotones des sous-solutions et sur-solutions. Pour cela, on suppose que α_0 et β_0 sont la sous-solution et la sur-solution du problème (1.1) respectivement et sont continûment différentiables en t .D'après l'hypothèse $(H5)$, il existe une constante réelle positive M telle que $F_u(t,x,\theta_1,\varphi(u)(t)) + M \geq 0$, pour tout $(t,x) \in \overline{D_T}$.

Considérons les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} \alpha_0 = v, \\ (\alpha_k)_t + (g(x)\alpha_k)_x = F(t,x,\alpha_{k-1},\varphi(\beta_{k-1})) - M(\alpha_k - \alpha_{k-1}), \text{ dans } D_T,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ g(a)\alpha_k(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(x)\alpha_k(t,x)dx, \text{ sur } (0,T), \\ \alpha_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]\ , \end{cases} \tag{1.5}$$

et

$$\begin{cases} \beta_0 = w, \\ (\beta_k)_t + (g(x)\beta_k)_x = F(t,x,\beta_{k-1},\varphi(\alpha_{k-1})) - M(\beta_k - \beta_{k-1}), \text{ dans } D_T,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ g(a)\beta_k(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(x)\beta_k(t,x)dx, \text{ sur } (0,T), \\ \beta_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Comme $\alpha_0$et β_0 sont continûment différentiables en t, alors d'après le théorème (1.3.1) les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

On a le résultat suivant

Théorème 1.3.4 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(H1)$ *à* $(H5)$. *Soit* (α_0, β_0) *une paire de sous-solution et de sur-solution du problème* (1.1) *et sont continûment différentiable en t, alors il existe deux suites monotones* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *qui convergent uniformément vers l'unique solution u du problème* (1.1) *dans* $[0,T]$.

Preuve : La preuve se fait en deux étapes.

1$^{\text{er}}$ étape: Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on montre que

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq ... \leq \beta_1 \leq \beta_0, \text{ dans } \overline{D_T}.$$

Pour cela on utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $k = 0$, montrons que $\alpha_0 \leq \alpha_1$ dans $\overline{D_T}$.

On pose par définition

$$\omega(t,x) = \alpha_0(t,x) - \alpha_1(t,x), \text{ pour } t \in [0,T] \text{ et } x \in [a,b].$$

Pour $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = \alpha_0(0,x) - \alpha_1(0,x) \leq u_0(x) - u_0(x) = 0.$$

Par suite

$$\omega(0,x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx \quad \leq \quad & \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\ & + \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ & - M\int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau.\end{aligned}$$

En utilisant une preuve similaire à celle du théorème (1.3.2), on obtient

$$\omega(t,x) \leq 0, \text{ dans } \overline{D_T}.$$

C'est-à-dire

$$\alpha_0(t,x) \leq \alpha_1(t,x), \text{ dans } \overline{D_T}.$$

En utilisant une preuve similaire, on montre que $\beta_1 \leq \beta_0$, $\alpha_1 \leq \beta_0$, et $\alpha_0 \leq \beta_1$ dans $\overline{D_T}$.

Maintenant on montre que $\alpha_1$et β_1 est une paire de sous-solution et sur-solution du problème (1.1).

D'après l'hypothèse $(H5)$ et comme $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_0$, alors le second membre de l'équation (1.5) satisfait à

$$\begin{aligned}& F(t,x,\alpha_0,\varphi(\beta_0)) - M(\ \alpha_1 - \alpha_0) \\ = \ & -[F_u(t,x,\theta_0,\varphi(\beta_0)) + M](\ \alpha_1 - \alpha_0) + F(t,x,\alpha_1,\varphi(\beta_0)) \leq F(t,x,\alpha_1,\varphi(\beta_1)),\end{aligned}$$

où $\alpha_0 \leq \theta_0 \leq \beta_0$.

De même d'après l'hypothèse $(H5)$ et comme $\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \beta_0$, le second membre de l'équation (1.6) satisfait à

$$\begin{aligned} & F(t,x,\beta_0,\varphi(\alpha_0)) - M(\ \beta_1 - \beta_0) \\ = \ & [F_u(t,x,\theta_1,\varphi(\alpha_0)) + M](\ \beta_0 - \beta_1) + F(t,x,\beta_1,\varphi(\alpha_0)) \geq F(t,x,\beta_1,\varphi(\alpha_1)), \end{aligned}$$

où $\alpha_0 \leq \theta_1 \leq \beta_0$.

Alors il résulte que $\alpha_1$et β_1 est une paire de sous-solution et sur-solution du problème (1.1) et par suite d'après le principe de comparaison, on trouve $\alpha_1 \leq \beta_1$.

Supposons pour k entier naturel fixé, on a

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_k,$$

et en utilisant une preuve similaire a celle qui a été donnée précédemment on montre que

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k.$$

En conclusion, il résulte que

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq ... \leq \beta_1 \leq \beta_0 \text{ dans } \overline{D_T}.$$

2[eme] étape: Les deux suites de fonctions $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers l'unique solution du problème (1.1).

On note par $\alpha_k(t) = \alpha_k(t,.)$, $\beta_k(t) = \beta_k(t,.)$ et $u(t) = u(t,.)$.

D'après la première étape la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elles convergent ponctuellement.

D'après le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (\|\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)\| + \left\|\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)\right\|)d\tau = 0. \tag{1.7}$$

Maintenant on montre que les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers l'unique solution du problème (1.1).

D'après (1.3), on a

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)\mathcal{F}(\tau,u(\tau))d\tau, \tag{1.8}$$

avec $S(t)$ est un C_0 -semi-groupe.

De même on a

$$\alpha_k(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)[F(\tau, x, \alpha_{k-1}, \varphi(\beta_{k-1})(\tau)) - M((\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau))]d\tau, \tag{1.9}$$

et

$$\beta_k(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)[F(\tau, x, \beta_{k-1}, \varphi(\alpha_{k-1})(\tau)) - M((\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau))]d\tau. \tag{1.10}$$

Comme $S(t)$ est un C_0 -semi-groupe, alors il existe deux constantes réelles positives M_0 et a telles que $\|S(t)\| \leq M_0 e^{at}$ et comme F est continue alors d'après (1.8) et (1.9), il résulte que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_k(t) - u(t)\| &\leq \int_0^t ||S(t-\tau)[F(\tau, x, \alpha_{k-1}, \varphi(\beta_{k-1})(\tau)) - F(\tau, x, \beta_{k-1}, \varphi(\beta_{k-1})(\tau))||d\tau \\
&\quad + \int_0^t ||S(t-\tau)[\mathcal{F}(\tau, \beta_{k-1}(\tau)) - \mathcal{F}(\tau, u(\tau))]||d\tau \\
&\quad + \int_0^t ||S(t-\tau)M\ [\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)]||d\tau \\
&\leq M_0 e^{at} \int_0^t M_1\ ||\alpha_{k-1}(\tau) - u(\tau)||d\tau\ + M_0 e^{at} \int_0^t M_2 ||\beta_{k-1}(\tau) - u(\tau)||d\tau \\
&\quad + M_0 e^{at} \int_0^t M\ ||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)||d\tau \\
&\leq M_0 M_3 e^T \int_0^t [||\alpha_k(\tau) - u(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - u(\tau)||]d\tau \\
&\quad + M_0 M_4 e^T \int_0^T [||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)||]d\tau,
\end{aligned}$$

avec $M_1 = \underset{D_T}{Sup} F(t, x, \alpha_{k-1}, \varphi(\beta_{k-1})(t))$, $M_2 = \underset{D_T}{Sup}\, F(t, x, \beta_{k-1}, \varphi(\beta_{k-1})(t))$, $M_3 = M_1 + M$ et $M_4 = M_1 + M_2$.

De même, d'après (1.8) et (1.10), on a

$$\begin{aligned}
||\beta_k(t) - u(t)|| &\leq M_0 M_5 e^T \int_0^t [||\alpha_k(\tau) - u(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - u(\tau)||]d\tau \\
&\quad + M_0 M_6 e^T \int_0^T [||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)||]d\tau.
\end{aligned}$$

avec M_5 et M_6 deux constantes..

Par suite il résulte que

$$\begin{aligned}\|\alpha_k(t)-u(t)\|+||\beta_k(t)-u(t)|| &\leq M_7\int_0^t [||\alpha_k(\tau)-u(\tau)||+||\beta_k(\tau)-u(\tau)||]d\tau \\ &+M_8\int_0^T [||\alpha_k(\tau)-\alpha_{k-1}(\tau)||+||\beta_k(\tau)-\beta_{k-1}(\tau)||]d\tau.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de *Gronwall* et on déduit que

$$\|\alpha_k(t)-u(t)\|+||\beta_k(\tau)-u(\tau)|| \leq M_8 e^{M_7 T}\int_0^T [||\alpha_k(\tau)-\alpha_{k-1}(\tau)||+||\beta_k(\tau)-\beta_{k-1}(\tau)||]d\tau.$$

Par passage à la limite et d'après (1.7), il résulte que

$$\lim_{k\to\infty}\|\alpha_k(t)-u(t)\|=0,$$

et

$$\lim_{k\to\infty}||\beta_k(t)-u(t)||=0.$$

C'est-à-dire les deux suites de fonctions convergent uniformément vers l'unique solution du problème (1.1). ■

1.3.3 Un autre schéma de convergence

D'un point de vue numérique, les deux suites monotones qui sont introduite dans la deuxième partie, ne peut être calculé facilement en raison de la condition initiale non locale. Ce pendant, ces deux suites peuvent être modifié pour avoir une représentation explicite de la solution. Alors on peut modifier ces suites où on conserve les propriétés de la monotonie et la convergence.

Pour cela, on suppose que (α_0,β_0) une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (1.1).

Considérons maintenant les deux suites $(\tilde{\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et $(\tilde{\beta}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases}\tilde{\alpha}_0=\alpha_0,\\ (\tilde{\alpha}_k)_t+(g(x)\tilde{\alpha}_k)_x=F(t,x,\tilde{\alpha}_{k-1},\varphi(\tilde{\beta}_{k-1})(t))-M(\tilde{\alpha}_k-\tilde{\alpha}_{k-1}),\ \text{dans } D_T,\ k\in\mathbb{N}^*,\\ g(a)\tilde{\alpha}_k(t,a)=\displaystyle\int_a^b \eta(x)\tilde{\alpha}_{k-1}(t,x)dx,\ 0<t<T,\\ \tilde{\alpha}_k(0,x)=u_0(x),\ 0\leq x\leq b,\end{cases} \tag{1.11}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_0 = \beta_0, \\ (\tilde{\beta}_k)_t + (g(x)\tilde{\beta}_k)_x = F(t, x, \tilde{\beta}_{k-1}, \varphi(\tilde{\alpha}_{k-1})(t)) - M(\tilde{\beta}_k - \tilde{\beta}_{k-1}) \text{ , dans } D_T, \ k \in \mathbb{N}^*, \\ g(a)\tilde{\beta}_k(t, a) = \displaystyle\int_a^b \eta(x)\tilde{\beta}_{k-1}(t, x)dx, \ 0 < t < T, \\ \tilde{\beta}_k(0, x) = u_0(x), \ 0 \leq x \leq b. \end{cases} \tag{1.12}$$

On remarque que la seul défférence entre les deux suites qu'on a défini avant et les suites $(\tilde{\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et $(\tilde{\beta}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ c'est le premier condition initial qui ne dépend que des $\widetilde{\alpha}_{k-1}$ et $\widetilde{\beta}_{k-1}$, donc les conditions au bord sont toujours calculables.

On peut résoudre ce schéma par la méthode des caractéristiques qui permet de réduire une équation différentielle partielle en une équation différentielle ordinaire. Elle consiste à chercher des courbes du plan (t, x) paramétrées par le temps $t \to X(t)$, le long desquelles les solutions classiques. Alors pour commencer, calculons la dérivée de $\tilde{\alpha}(x(s), t(s))$ par rapport à s.

$$\frac{d}{ds}(\tilde{\alpha}(x(s), t(s))) = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\alpha}(x(s), t(s))\frac{d}{ds}x(s) + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(x(s), t(s))\frac{dt}{ds}.$$

Par identification on a

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}t(s) = 1, \\ \frac{d}{ds}x(s) = g. \end{cases}$$

Maintenant, on définit une courbe caractéristique de (1.11) passant par le point (t, x) notéé $(C_{t,x})$ comme suit

$$(C_{t,x}) = \{s, X(s; t, x), s \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche une courbe caractéristique avec la variable t, la courbe caractéristique passant par le point $(\hat{t}, \hat{x})$ est $(t, X(t; \hat{t}, \hat{x}))$, avec X satisfait:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}X(t; \hat{t}, \hat{x})) = g(X(t; \hat{t}, \hat{x})), \\ X(\hat{t}; \hat{t}, \hat{x}) = \hat{x}, \end{cases}$$

D'après l'hypothèse $(H1)$, l'existence et l'unicité des $X(t; t, x)$ sont assurées par le théorème de *Cauchy-Lipschitz*, donc X est une fonction strictement croissante et son inverse $\Gamma(x; \hat{t}, \hat{x})$ existe et unique (l'hypothèse $(H1)$).

On défini le graphe $G(x) = \Gamma(x; 0, a)$ et $(G(x), x)$ représente la courbe caractéristique passant par le point $(0, a)$ et le plan sera divisé en deux parties.

Par suite, pour tout point (t, x), la fonction $\tilde{\alpha}_k(t, x)$ satisfait à

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_k(t,x) &= u_0(X(0;t,x))B(t;0)+\int_0^t B(t;\tau)[F(\tau,X(\tau;t,x),\tilde{\alpha}_{k-1}(\tau,X(\tau;t,x),\varphi(\tilde{\beta}_{k-1})(\tau)) \\ &\quad +M\tilde{\alpha}_{k-1}(\tau,X(\tau;t,x))]d\tau,\end{aligned}$$

pour $t \leq G(x)$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_k(t,x) &= R(\Gamma(a;t,x))B(t;\Gamma(a;t,x))+\int_{\Gamma(a;t,x)}^t B(t;\tau)[F(\tau,X(\tau,t,x),\tilde{\alpha}_{k-1}(\tau,X(\tau,t,x),\varphi(\tilde{\beta}_{k-} \\ &\quad +M\tilde{\alpha}_{k-1}(\tau,X(\tau,t,x))]d\tau,\end{aligned}$$

pour $t > G(x)$

où

$$B(t;\tau)=\exp(-M(t-\tau)-\int_\tau^t g_x(X(s;t,x))ds,$$

et

$$R(t)=g^{-1}(a)\int_a^b \eta(x)\tilde{\alpha}_{k-1}(t,x)dx.$$

De même on peut trouver une représentation explicite pour $\widetilde{\beta}_k$.

Maintenant on a le résultat suivant

Théorème 1.3.5 *Supposons que les hypothèses du théorème* (1.3.4) *sont satisfaites. Alors les deux suites monotones* $(\widetilde{\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\tilde{\beta}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *qui convergent uniformément vers l'unique solution u dans* $[0,T]$.

Preuve : Comme les deux suites de fonctions $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergent uniformément vers l'unique solution du problème (1.1), alors pour démontrer la convergence uniforme des$(\widetilde{\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\widetilde{\beta}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ il suffit de montrer l'inégalité suivante:

$$\alpha_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \ \leq \alpha_1 \leq \widetilde{\alpha}_2 \leq \alpha_2 \ldots \leq \alpha_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \leq \alpha_{k+1}$$

$$\leq \beta_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1} \leq \beta_k \leq \ldots \leq \beta_2 \leq \tilde{\beta}_2 \leq \beta_1 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \beta_0.$$

Pour cela on utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $k=0$, montrons que $\alpha_0 \ \leq \tilde{\alpha}_1$ dans $\overline{D_T}$.

On pose par définition

$$\omega(t,x)=\alpha_0(t,x)-\tilde{\alpha}_1(t,x),\ \text{pour tout } t\in[0,T],\ x\in[a,b]\,.$$

Pour $t=0$, on a

$$\omega(0,x)=\alpha_0(0,x)-\tilde{\alpha}_1(0,x)\leq 0,\ \text{pour tout } x\in[a,b]\,.$$

Par suite

$$\omega(0,x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx &\leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + + \int_0^t \int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &-M\int_0^t \int_a^b \xi(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau.\end{aligned}$$

En utilisant une preuve similaire à celle du théorème (1.3.2), on obtient

$$\omega(t,x) \leq 0, \text{ dans } \overline{D_T},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0(t,x) \leq \alpha_1(t,x), \text{ dans } \overline{D_T}.$$

Par un raisonnement similaire, on montre que $\tilde{\beta}_1 \leq \beta_0$ dans $\overline{D_T}$.

Maintenant comme $\alpha_0 \leq \alpha_1$ et $\beta_1 \leq \beta_0$, en utilisant un raisonnement similaire on montre que $\tilde{\alpha}_1 \leq \alpha_1$ et $\beta_1 \leq \tilde{\beta}_1$ dans $\overline{D_T}$.

Supposons pour k entier naturel fixé, on a

$$\alpha_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \leq \alpha_{k+1},$$

et

$$\beta_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1} \leq \beta_k.$$

En utilisant une preuve similaire a celle qui a été donnée précédemment, on montre que

$$\tilde{\alpha}_{k+1} \leq \alpha_{k+1} \leq \tilde{\alpha}_{k+2},$$

et

$$\beta_{k+2} \leq \tilde{\beta}_{k+2} \leq \beta_{k+1}.$$

Comme $\alpha_k \leq \beta_k$, il résulte que

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \alpha_1 \leq \tilde{\alpha}_2 \leq \alpha_2 \ldots \leq \tilde{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \leq \alpha_{k+1}$$

$$\leq \beta_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1} \leq \beta_k \leq \tilde{\beta}_k \ldots \leq \beta_2 \leq \tilde{\beta}_2 \leq \beta_1 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \beta_0, \text{ dans } \overline{D_T}.$$

■

1.4 Exemple d'application

Dans cette partie, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t + (g(x)u)_x = -e^{\varphi(u)(t)}u(t,x),\ 0 < t < 1,\ 0 \le x \le 1, \\ g(a)u(t,0) = \displaystyle\int_0^1 \eta(x)u(t,x)dx,\ 0 < t < 1\ , \\ u(0,x) = 3x+1,\ 0 \le x \le 1, \end{cases} \tag{1.15}$$

où $g(x) = 1 - x$, $\eta(x) = 2x$.

On remarque qu'il est facile de vérifier les conditions $(H1)$ à $(H5)$.

Maintenant on choisit $\alpha_0(t,x) = 0$, β_0(t,x)=4e^t, ce choix satisfait la définition (1.3.2). Donc α_0 et β_0 une paire de sous-solution et sur-solution du (1.15). Alors, notre problème admet une unique solution u, telle que $0 < u(t,x) \le 4e^t$.

Chapitre 2

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la construction de l'unique solution en utilisant la méthode des sous-solutions et des sur-solutions et la technique itérative du problème initial suivant

$$\begin{cases} u_t + (g(t,x)u)_x = F(t,x,u,\varphi(u)(t), \text{ dans } D_T, \\ g(t,a)u(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,x)u(t,x)dx, \text{ sur } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b], \end{cases} \tag{2.1}$$

où $D_T = (0,T) \times (a,b)$ pour $T > 0$, et $\varphi(u)(t) = \displaystyle\int_a^b u(t,x)dx$.

Sur les fonctions g, η, F, u_0 on met les hypothèses suivantes

$(H1)$ $g \in C_B^1(D_T)$, et $g > 0$ dans $[0,T] \times [a,b)$. De plus, si $b < \infty$, alors $g(t,b) = 0$.

Autrement dit $\lim\limits_{x\to\infty} g(t,x) = 0$, $t \in [0,T]$.

$(H2)$ $\eta \in C_B(D_T)$ avec $\eta \geq 0$.

$(H3)$ $F \in C_B(D_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

$(H4)$ $u_0 \in C_B(a,b)$, avec $u_0 \geq 0$ et satisfait la condition de compatibilité

$$g(0,a)u_0(a) = \int_a^b \eta(0,x)u_0(x)dx.$$

La définition de la sous-solution et la sur-solution et l'utilisation de la méthode itérative dépend de la monotonie de F par rapport à φ. Dans ce travail on traite les cas suivants

$F_\varphi \geq 0$, $F_\varphi \leq 0$ et F_φ change de signe.

Dans ce chapitre on considére aussi un modèle d'application spécial pour construire une sous-solution et une sur-solution dans un domaine non bornée. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3, 4, 7].

2.2 Résultats principaux

2.2.1 Le cas où $F_\varphi(t,x,u,\varphi(u)) \geq 0$

Dans cette partie, on suppose que g et η deux fonctions dépend que de $x, b<\infty$, $\varphi(u)(t) = \displaystyle\int_a^b u(t,y)dy$, $F_\varphi \geq 0$ et $F_u + M \geq 0$ pour toute constante réelle positive M. Les résultats de cette partie se trouvent dans [3].

Maintenant on va donner les définitions de la solution, la sous-solution et la sur-solution du problème (2.1)

Définition 2.2.1 *On entend par solution du problème (2.1), toute fonction u vérifiant*

i) $u \in C(D_T)$,

ii) $u(0,x) = u_0(x)$ *dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b u(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)u(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b u(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,u,\varphi(u)(\tau))dxd\tau\end{aligned}$$

Définition 2.2.2 *On entend par sous-solution du problème (2.1), toute fonction v vérifiant*

i) $v \in C(D_T)$,

ii) $v(0,x) \leq u_0(x)$ *dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx &\leq \int_a^b v(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)v(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b v(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,v,\varphi(v)(\tau))dxd\tau\end{aligned}$$

Définition 2.2.3 *On entend par sur-solution du problème (2.1), toute fonction w vérifiant*

i) $w \in C(D_T)$,

ii) $w(0,x) \geq u_0(x)$ *dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ et $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx \quad &\geq \quad \int_a^b w(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(x)w(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t \int_a^b w(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t \int_a^b \xi(\tau,x)F(\tau,x,w,\varphi(w)(\tau))dxd\tau\end{aligned}$$

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.1 *Soient v et w une sous-solution et une sur-solution du problème (2.1) respectivement, alors v et w sont comparables, c'est –à-dire $w \geq v$ dans $\overline{D_T}$.*

Preuve : La preuve est similaire à celle du théorème 1.3.2. ■

Maintenant on va construire deux suites monotones. Pour cela on suppose que α_0 et β_0 sont la sous-solution et la sur-solution du problème (2.1) respectivement.

Considérons les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} \alpha_0 = v, \\ (\alpha_k)_t + (g(x)\alpha_k)_x = F(t,x,\alpha_{k-1},\varphi(\alpha_{k-1})) - M(\alpha_k - \alpha_{k-1}), \text{ dans } D_T,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ g(a)\alpha_k(t,a) = \int_a^b \eta(y)\alpha_k(t,y)dy, \text{ sur}(0,T), \\ \alpha_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta_0 = w, \\ (\beta_k)_t + (g(x)\beta_k)_x = F(t,x,\beta_{k-1},\varphi(\beta_{k-1})) - M(\beta_k - \beta_{k-1}), \text{ dans } D_T,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ g(a)\beta_k(t,a) = \int_a^b \eta(y)\beta_k(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\ \beta_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]. \end{cases}$$

Les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.2 *Soient v et w une sous-solution et une sur-solution du problème (2.1) respectivement, qui sont continûment différentiables en t. Alors les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers l'unique solution u pour $t \in [0,T]$.*

Preuve : La preuve est similaire à celle du théorème 1.3.5. ■

2.2.2 Le cas où $F_\varphi(t,x,u,\varphi(u)) \leq 0$

Dans cette partie, on suppose que $F(t,x,u,\varphi(u)) = -m(t,x,\varphi)u$, $b < \infty$, $\varphi(u)(t) = \int_a^b u(t,y)dy$ et $m_\varphi \geq 0$.

On introduit dans ce qui suite les définitions de la solution, la sous-solution et la sur-solution.

Définition 2.2.4 *On entend par solution du problème (2.1) toute fonction u vérifiant*

i) $u \in L^\infty(D_T)$,

ii) $u(0,x) = u_0(x)$ *dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b u(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b u(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(u)(\tau))u(\tau,x)dxd\tau.\end{aligned}$$

Définition 2.2.5 *On entend par une paire de sous-solution et sur-solution du problème (2.1) tout couple* (v,w) *vérifiant*

i) $v, w \in L^\infty(D_T)$,

ii) $v(0,x) \leq u_0(x) \leq w(0,x)$ *dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$,*on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx &\leq \int_a^b v(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)v(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b v(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(w)(\tau))v(\tau,x)dxd\tau,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx &\geq \int_a^b w(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)w(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b w(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(v)(\tau))w(\tau,x)dxd\tau.\end{aligned}$$

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.3 ***(Principe de comparaison)*** *Soit (v,w) une paire de sous-solution et sur-solution du problème (2.1) avec $v \geq 0$ et $w \geq 0$, alors v et w sont comparables, c'est-à-dire $w \geq v$ dans $\overline{D_T}$.*

Preuve : On pose par définition

$$\omega(t,x) = v(t,x) - w(t,x), \ t \in [0,T] \text{ et } x \in [a,b]$$

Pour $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = v(0,x) - w(0,x) \leq 0, \, x \in [a,b]$$

D'autre part, soit ξ un elément quelconque de $C^1(\overline{D_T})$ avec $\xi(t,x) \geq 0$, pour tout $t \in (0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx - \int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx \\
&\leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(w)(\tau))v(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(v)(\tau))w(\tau,x)dxd\tau \\
&\leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_a^b \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(v)(\tau))\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m_\varphi(\tau,x,\theta(\tau))v(\tau,x)\int_a^b \omega(\tau,y)dydxd\tau,
\end{aligned}$$

avec $\varphi(v)(t) \leq \theta(t) \leq \varphi(w)(t)$.

Maintenant si on pose $\xi(t,x) = e^{\lambda t}\zeta(t,x)$, avec $\zeta \in C^1(\overline{D_T})$ et on choisit $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda - m(\tau,x,\varphi) \geq 0$ dans $\overline{D_T}$, alors on a

$$e^{\lambda t}\int_a^b \omega(t,x)\zeta(t,x)dx \leq A(t), \tag{2.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
A(t) &= \int_a^b \omega(0,x)\zeta(0,x)dx + \int_0^t e^{\lambda\tau}\zeta(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&+ \int_0^t\int_a^b e^{\lambda\tau}\omega(\tau,x)[\zeta_\tau(\tau,x)+g(\tau,x)\zeta_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&+ \int_0^t\int_a^b e^{\lambda\tau}\zeta(\tau,x)[\lambda - m(\tau,x,\varphi(v)(\tau))]\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&+ \int_0^t\int_a^b e^{\lambda\tau}\zeta(\tau,x)m_\varphi(\tau,x,w,\theta(\tau))\int_a^b \omega(\tau,y)dydxd\tau.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \zeta_\tau + g\zeta_x = 0,\ 0<\tau<t,\ a<x<b, \\ \zeta(\tau,b)=0,\ \ 0<\tau<t, \\ \zeta(t,x)=\chi(x),\ a\le x\le b, \end{cases}$$

où $\chi \in C_0^\infty((a,b))$, avec $0\le\chi\le 1$.

Alors pour voir l'existence de ζ dans D_T, on pose le changement de variable $s=t-\tau$, donc le problème ci-dessus peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \zeta_s - g\zeta_x = 0,\ 0<s<t,\ a<x<b, \\ \zeta(s,b)=0,\ 0<s<t, \\ \zeta(0,x)=\chi(x),\ a\le x\le b. \end{cases}$$

On remarque que $0\le\zeta\le 1$ dans $\overline{D_T}$.
Maintenant on remplace dans (2.2), on obtient

$$\int_a^b \omega(t,x)\chi(t,x)dx \le \int_a^b \omega^+(0,x)dx + m_1\int_0^t\int_a^b \omega^+(\tau,x)dxd\tau,$$

avec $m_1 = \max\limits_{\overline{D_T}}[\eta(t,x)+\lambda-m(t,x,\varphi(v)(t))+(b-a)m_\varphi(t,x,w,\theta(t))]$.
Comme par hypothèse $\omega(0,x)\le 0$, alors on obtient

$$\int_a^b \omega(t,x)\chi(t,x)dx \le m_1\int_0^t\int_a^b \omega^+(\tau,x)dxd\tau.$$

Si on choisit χ comme suit

$$\chi = \begin{cases} 1,\ \text{si } \omega(t,x)>0, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Alors, il résulte que

$$\int_a^b \omega(t,x)^+ dx \leq m \int_0^t \int_a^b \omega(\tau,x)^+ dx d\tau.$$

D'après l'inégalité de *Gronwall*, on obtient

$$\int_a^b \omega(t,x)^+ dx = 0,$$

Ce qui entraîne que $\omega(t,x) \leq 0$ dans $\overline{D_T}$.

C'est-à-dire $w \geq v$ ce qui achève la démonstration. ■

Par conséquent on a

Corollaire 2.2.1 *Si u une solution du problème (2.1) avec $u \geq 0$ et $\varphi(u) \in C([0,T])$. Alors u est unique.*

Preuve : Pour montrer l'unicité, on suppose que le problème (2.1) admet deux solutions positives ou nulles u_1 et u_2 et on suppose qu'il existe un $t_0 \in [0,T]$ tel que $u_1(t_0) \neq u_2(t_0)$.

Soit t_0 est le premier point, alors on a

$$\begin{cases} u_1(t) = u_2(t), \text{ pour } 0 \leq t < t_0, \\ u_1(t_0) \neq u_2(t_0). \end{cases}$$

Par continuité il existe une constante strictement positive δ tel que $u_1(t) \neq u_2(t)$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$.

Alors, on a deux situations possibles

i) $u_1(t) > u_2(t)$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$,

ii) $u_1(t) < u_2(t)$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$.

1^{er} cas: supposons que i) a lieu alors on a

$$\varphi(u_1)(t) \geq \varphi(u_2)(t), \text{ pour } t \in [0, t_0 + \delta[,$$

et comme par hypothèse $m_\phi \geq 0$ alors il résulte que

$$-m(t,x,\varphi(u_1)(t)) \leq -m(t,x,\varphi(u_2)(t)).$$

En utilisant la définition de la solution, on obtient que u_1 et u_2 est une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1), et d'aprés le théorème (2.3.1), il en résulte que $u_1 \leq u_2$ dans $[0, t_0 + \delta[$ ce qui est en une contradiction avec i).

D'une façon similaire on montre que si on a ii), on obtient une contradiction. ■

Maintenant, on construit deux suites monotones des sous-solutions et des sur-solutions. Pour cela, soit $(\alpha_0,\ \beta_0)$ une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1) avec $\alpha_0 \geq 0$ et $\beta_0 \geq 0$.

On considére les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} \alpha_0 = v, \\ (\alpha_k)_t + (g(t,x)\alpha_k)_x = -m(t,x,\varphi(\beta_{k-1}))\alpha_k, \text{ dans } D_T, k \in \mathbb{N}^*, \\ g(t,a)\alpha_k(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,y)\alpha_{k-1}(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\ \alpha_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

et

$$\begin{cases} \beta_0 = w, \\ (\beta_k)_t + (g(t,x)\beta_k)_x = -m(t,x,,\varphi(\alpha_{k-1}))\beta_k, \text{dans } D_T, k \in \mathbb{N}^*, \\ g(t,a)\beta_k(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,y)\beta_{k-1}(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\ \beta_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.4 *Si* (α_0,β_0) *est une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1) avec* $\alpha_0 \geq 0$ *et* $\beta_0 \geq 0$. *Alors les suites* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *convergent uniformément vers l'unique solution u du problème (2.1) dans* $\overline{D_T}$.

Preuve : La preuve de ce résultat se fait en deux étapes.

1$^{\text{er}}$ étape: On montre la monotonie des deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que pour tous $k \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_k \leq \beta_k$ dans $\overline{D_T}$.

Pour cela on utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $k = 0$, montrons que $\alpha_0 \leq \alpha_1$ dans $\overline{D_T}$.

On pose par définition

$$\omega(t,x) = \alpha_0(t,x) - \alpha_1(t,x), \text{ dans } \overline{D_T},$$

Pour $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = \alpha_0(0,x) - \alpha_1(0,x) \leq 0,$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx \ &\leq \ \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(\beta_0)(\tau))\omega(\tau,x)dxd\tau. \end{aligned}$$

En utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour démontrer le théorème (1.3.2), on obtient
$$\omega(t,x) \leq 0, \text{ dans } \overline{D_T},$$
c'est-à-dire que
$$\alpha_0(t,x) \leq \alpha_1(t,x).$$
En utilisant une preuve similaire, on montre que $\beta_1 \leq \beta_0$, $\alpha_1 \leq \beta_0$, et $\alpha_0 \leq \beta_1$ dans $\overline{D_T}$.

Maintenant on montre que (α_1,β_1) est une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1).

Comme $m_\varphi \geq 0$ et $\beta_1 \leq \beta_0$, alors le second membre de l'équation (2.2) satisfait à
$$-m(t,x,\varphi(\beta_0))\alpha_1 \leq -m(t,x,\varphi(\beta_1))\alpha_1.$$

De même, comme $m_\varphi \geq 0$ et $\beta_1 \leq \beta_0$, alors le second membre de l'équation (2.3) satisfait à
$$-m(t,x,\varphi(\alpha_0))\beta_1 \ \geq -m(t,x,\varphi(\alpha_1))\beta_1.$$

Donc il en résulte que (α_1,β_1) est une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1) et d'après le principe de comparaison, on a $\alpha_1 \leq \beta_1$.

Supposons pour k entier naturel fixé, on a
$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_k,$$
et en utilisant un raisonnement similaire a celui qui a été donné précédemment on montre que
$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k.$$
En conclusion pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient
$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq ... \leq \beta_1 \leq \beta_0 \quad \text{dans } \overline{D_T}.$$

2$^{\text{eme}}$étape: D'abord, on va noter par $\alpha_k(t) = \alpha_k(t,.)$, $\beta_k(t) = \beta_k(t,.)$ et $u(t) = u(t,.)$.

Maintenant on va montrer que les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniforémement vers l'unique solution du problème (2.1).

D'après (1.3), la solution s'écirit sous la forme suivante
$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)m(\tau,x,\varphi(u)(\tau))u(\tau)d\tau, \tag{2.4}$$

avec $S(t)$ est un C_0 semi-groupe.

De même on a

$$\alpha_k(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)m(\tau, x, \varphi(\beta_{k-1})(\tau))\alpha_k(\tau)d\tau, \qquad (2.5)$$

et

$$\beta_k(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)m(\tau, x, \varphi(\alpha_{k-1})(\tau))\beta_k(\tau)d\tau. \qquad (2.6)$$

Comme $S(t)$ est un C_0 semi-groupe, alors il existe deux constante réelles positives M_0 et a telle que $\|S(t)\| \leq M_0e^{at}$ et comme F est une fonction continue en t, et lipschitzienne en $u$et comme $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ alors d'aprés (2.4) et (2.5), alors on obtient

$$\begin{aligned}
\|\alpha_k(t) - u(t)\| &\leq ||-\int_0^t S(t-\tau)m(\tau, x, \varphi(\beta_{k-1})(\tau))\alpha_k(\tau)d\tau \\
&\quad + \int_0^t S(t-\tau)m(\tau, x, \varphi(u)(\tau))u(\tau)d\tau|| \\
&\leq ||-M_0e^{at}\int_0^t m(\tau, x, \varphi(u)(\tau))\alpha_k(\tau)d\tau + M_0e^{at}\int_0^t m(\tau, x, \varphi(u)(\tau))u(\tau)d\tau|| \\
&\leq M_0e^{at}\int_0^t ||-m(\tau, x, \varphi(u)(\tau))\alpha_k(\tau) + m(\tau, x, \varphi(u)(\tau))u(\tau)||d\tau \\
&\leq M_0M_1e^{at}\int_0^t \|\alpha_k(\tau) - u(\tau)\|\, d\tau. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

De façon similaire, d'aprés (2.4) et (2.6) on obtient

$$\|\beta_k(t) - u(t)\| \leq M_0M_2e^{at}\int_0^t \|\beta_k(\tau) - u(\tau)\|\, d\tau. \qquad (2.8)$$

Par suite il résulte que

$$\|\alpha_k(t) - u(t)\| + \|\beta_k(t) - u(t)\| \leq M_3\int_0^t (\|\alpha_k(\tau) - u(\tau)\| + \|\beta_k(\tau) - u(\tau)\|)d\tau. \qquad (2.9)$$

Par passage à la limite et d'après *Gronwall,* il résulte que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)\|\, d\tau = 0,$$

et

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)\|\, d\tau = 0,$$

c'est-à-dire on a la convergence uniforme des $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $u(t)$ dans D_T. $\blacksquare$

2.2.3 Le cas où $F_\varphi(t,x,u,\varphi(u))$ change de signe

Dans cette partie, on suppose que $b<\infty$,$\varphi(u)(t)=\displaystyle\int_a^b u(t,y)dy$ et on considère que $F(t,x,u,\varphi(u))=-m(t,x,\varphi)u$ avec $m_\varphi+M\geq 0$ tel que M une constante réelle positive.

Maintenant on donne les définitions de la solution, la sous-solution et la sur-solution.

Définition 2.2.6 *Une fonction u est dite solution du problème (2.1) si elle vérifie*

i) $u\in L^\infty(D_T)$,

ii) $u(0,x)=u_0(x)$, *dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t\in(0,T)$ *et* $\xi\in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x)\geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b u(0,x)\xi(0,x)dx+\int_0^t\xi(\tau,a)\int_a^b\eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau\\&+\int_0^t\int_a^b u(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau\\&-\int_0^t\int_a^b\xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(u)(\tau))u(\tau,x)dxd\tau.\end{aligned}$$

Définition 2.2.7 *On entend par une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1) tout couple (v,w) vérifiant*

i) $v,w\in L^\infty(D_T)$,

ii) $v(0,x)\leq u_0(x)\leq w(0,x)$,*dans* $[a,b]$,

iii) Pour tout $t\in(0,T)$ *et* $\xi\in C^1(\overline{D_T})$ *avec* $\xi(t,x)\geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx &\leq \int_a^b v(0,x)\xi(0,x)dx+\int_0^t\xi(\tau,a)\int_a^b\eta(\tau,x)v(\tau,x)dxd\tau\\&+\int_0^t\int_a^b v(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau\\&-\int_0^t\int_a^b\xi(\tau,x)[m(\tau,x,\varphi(w)(\tau))+M\varphi(w)(\tau)-M\varphi(v)(\tau)]v(\tau,x)dxd\tau,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx &\geq \int_a^b w(0,x)\xi(0,x)dx+\int_0^t\xi(\tau,a)\int_a^b\eta(\tau,x)w(\tau,x)dxd\tau\\&+\int_0^t\int_a^b w(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau\\&-\int_0^t\int_a^b\xi(\tau,x)[m(\tau,x,\varphi(v)(\tau))+M\varphi(v)(\tau)-M\varphi(w)(\tau)]w(\tau,x)dxd\tau.\end{aligned}$$

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.5 *Soit* (v, w) une paire de *sous-solution et de sur-solution du problème (2.1) avec* $v \geq 0$ *et* $w \geq 0$*, alors* $w \geq v$ *dans* $\overline{D_T}$.

Preuve : On pose par définition

$$\omega(t,x) = v(t,x) - w(t,x), \text{ pour tout } t \in [0,T] \text{ et } x \in [a,b].$$

Pout $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = v(0,x) - w(0,x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [a,b]$$

D'autre part, pour tout $t \in (0,T)$ et $\xi \in C^1(\overline{D_T})$ avec $\xi(t,x) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_a^b v(t,x)\xi(t,x)dx - \int_a^b w(t,x)\xi(t,x)dx \\
&\leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)[m(\tau,x,\varphi(w)(\tau)) + M\varphi(w)(\tau) - M\varphi(v)(\tau)]v(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)[m(\tau,x,\varphi(v)(\tau)) + M\varphi(v)(\tau) - M\varphi(w)(\tau)]w(\tau,x)dxd\tau \\
&\leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,a)\int_a^b \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m(\tau,x,\varphi(v)(\tau))\omega(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)m_\varphi(\tau,x,\theta(\tau)(\tau))v(\tau,x)\int_a^b \omega(\tau,y)dydxd\tau \\
&\quad + \int_0^t\int_a^b \xi(\tau,x)M[v(\tau,x) + w(\tau,x)]\int_a^b \omega(\tau,y)dydxd\tau,
\end{aligned}$$

où $\varphi(v)(t) \leq \theta(t) \leq \varphi(w)(t)$

On utilise ensuite une preuve similaire à celle du théorème (2.2.3) on montre que $w \geq v$. ■

Corollaire 2.2.2 *Soient u une solution du problème (2.1) avec* $u \geq 0$ *et* $\varphi(u) \in C([0,T])$*. Alors u est unique.*

Preuve : La preuve est analogue à celle du corollaire 2.2.1. ■

Maintenant, on va construire une paire de sous-solution et sur-solution du problème (2.1).

Il n'est pas difficile de vérifier que $v(t,x) = 0$ est une sous-solution du problème (2.1).

Par suite, pour construire une sur-solution $w(t,x)$, on commence par les conditions aux limites,

pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in [a,b]$, on a

$$g(t,a)w(t,a) \geq \int_a^b \eta(\tau,x)w(\tau,x)dxd\tau.$$

On choisit γ assez grand tel que

$$\gamma \geq \max_{\overline{D_T}} \eta(t,x) / \min_{t\in[0,T]} g(t,a) \ ,$$

et

$$w(0,x) \geq u_0(x), \text{ dans } [a,b].$$

On va fixer γ et on choisit δ assez grand tel que

$$\delta e^{-b\gamma} \geq \|u_0(x)\|_\infty .$$

Donc on prend comme sur-solution la fonction définie par

$$w(t,x) = \delta e^{\sigma t} e^{-\gamma x}, \text{ pour tout } t \in [0,T] \text{ et } x \in [a,b],$$

avec

$$\sigma \geq \gamma \max_{\overline{D_T}} g(t,x) + \max_{\overline{D_T}} |g_x(t,x)| + 2M\delta e^{-\gamma a}/\gamma.$$

Maintenant, on considère les suites des sous-solutions et sur-solutions. Soit (α_0,β_0) une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (2.1) avec $\alpha_0 \geq 0$ et $\beta_0 \geq 0$.

On considére les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} \alpha_0 = v, \\ (\alpha_k)_t + (g(t,x)\alpha_k)_x = -[m(t,x,\varphi(\beta_{k-1})) + \ M\varphi(\beta_{k-1}) - M\varphi(\alpha_{k-1})] \ \alpha_k \text{ ,dans } D_T, k \in \mathbb{N}^*, \\ g(t,a)\alpha_k(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,y)\alpha_{k-1}(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\ \alpha_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]\,, \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{cases} \beta_0 = w, \\ (\beta_k)_t + (g(t,x)\beta_k)_x = -[m(t,x,\varphi(\alpha_{k-1})) \ + M\varphi(\alpha_{k-1}) - M\varphi(\beta_{k-1})]\beta_k, \text{ dans } D_T, k \in \mathbb{N}^*, \\ g(t,a)\beta_k(t,a) = \displaystyle\int_a^b \eta(t,y)\beta_{k-1}(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\ \beta_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [a,b]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

Maintenant on a le résultat suivant

Théorème 2.2.6 *Supposons que* $(\alpha_0,\ \beta_0)$ *est une paire de sous-solution et sur-solution du problème (2.1) avec* $\alpha_0 \geq 0$ *et* $\beta_0 \geq 0$. *Alors les suites* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *convergent uniformément vers l'unique solution u du problème (2.1) dans* $\overline{D_T}$ *.*

Preuve : La démonstration se fait en deux étapes.

1^er^étape: Pour $k \in \mathbb{N}$, montrons que

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ ... \ \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \ ... \ \leq \beta_1 \leq \beta_0 \ , \text{ dans } \overline{D_T}.$$

Pour cela, on utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $k = 0$, montrons $\alpha \leq \alpha_1$ dans $\overline{D_T}$.

On pose par définition

$$\omega(t,x) = \alpha_0(t,x) - \alpha_1(t,x), \text{ dans } \overline{D_T}.$$

Pour $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = \alpha_0(0,x) - \alpha_1(0,x) \leq 0, \ x \in [a,b].$$

Par suite on a

$$\int_a^b \omega(t,x)\xi(t,x)dx \leq \int_a^b \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \int_a^b \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau$$
$$- \int_0^t \int_a^b \xi(\tau,x)[m(\tau,x,\varphi(\beta_0)(\tau)) + M\varphi(\beta_0)(\tau) - M\varphi(\alpha_0)(\tau)]\omega(\tau,x)dxd\tau,$$

En utilisant une preuve similaire que celle du théorème (1.3.2), on obtient

$$\omega(t,x) \leq 0, \text{ dans } \overline{D_T},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0(t,x) \leq \alpha_1(t,x), \text{ dans } \overline{D_T}.$$

De même, montrons que $\beta_1 \leq \beta_0$, $\alpha_1 \leq \beta_0$ et $\alpha_0 \leq \beta_1$ dans $\overline{D_T}$.

Maintenant montrons que (α_1,β_1) est une paire de sous-solution et sur-solution du problème (2.1).

Comme $m_\varphi + M \geq 0$ et $\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \beta_0$, alors le second membre de l'équation (2.10) satisfait à

$$-[m(t,x,\varphi(\beta_0))+M\varphi(\beta_0)-M\varphi(\alpha_0)]\alpha_1 \leq -[m(t,x,\varphi(\beta_1))+M\varphi(\beta_1)-M\varphi(\alpha_1)]\alpha_1.$$

De même comme $m_\varphi + M \geq 0$ et $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_0$, alors le second membre de l'équation (2.11) satisfait à

$$-[m(t,x,\varphi(\alpha_0))+M\varphi(\alpha_0)-M\varphi(\beta_0)]\ \beta_1 \ \geq -[m(t,x,\varphi(\alpha_1))+M\varphi(\alpha_1)+M\varphi(\beta_1)]\beta_1.$$

Alors il résulte que (α_1,β_1) est une paire de sous-solution et sur-solution du problème (2.1) et par suite d"après le principe de comparaison, on a $\alpha_1 \leq \beta_1$.

Supposons pour k entier naturel fixé, on a

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_k,$$

et en utilisant un preuve similaire a celle qui a été donnée précédemment on montre que

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k.$$

En conclusion, il résulte que,

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq ... \leq \beta_1 \leq \beta_0 \quad \text{dans } \overline{D_T}.$$

2^{eme} étape: D'après la première étape les deux suites convergent ponctuellement de nos suites, maintenant montrons que les deux suites de fonctions $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers l'unique solution du problème (2.1).

D'abord, on note par $\alpha_k(t) = \alpha_k(t,.)$, $\beta_k(t) = \beta_k(t,.)$ et $u(t) = u(t,.)$.

D'après le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on montre que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (\|\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)\| + \left\|\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)\right\|)d\tau = 0. \tag{2.12}$$

Maintenant on va montrer la convergence uniforme vers l'unique solution du problème (2.1).

D'après (1.3), on a

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)m(\tau,x,\varphi(u)(\tau))u(\tau)||d\tau, \tag{2.13}$$

avec $S(t)$ est un C_0 -semi-groupe.

De même on a

$$\alpha_k(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)[m(t,x,\phi(\beta_{k-1})(\tau)) + M\phi(\beta_{k-1})(\tau) - M\phi(\alpha_{k-1})(\tau)]\ \alpha_k(\tau)d\tau, \tag{2.14}$$

et

$$\beta_k(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)[m(t,x,\phi(\alpha_{k-1})(\tau)) + M\phi(\alpha_{k-1})(\tau) - M\phi(\beta_{k-1})(\tau)]\ \beta_k(\tau)d\tau, \tag{2.15}$$

Comme $S(t)$ est un C_0-semi-groupe, alors il existe deux constantes réelles positives M_0 et a telles que $\|S(t)\| \leq M_0 e^{at}$, et comme F est continue et $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$, alors d'après (2.13) et (2.14), il résulte que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_k(t) - u(t)\| \leq\ & \int_0^t || - S(t-\tau)[m(\tau,x,\phi(\beta_{k-1})(\tau)) + M\phi(\beta_{k-1})(\tau) \\
& -M\phi(\alpha_{k-1})(\tau)]\ \alpha_k(\tau)||d\tau + \int_0^t ||S(t-\tau)m(\tau,x,\varphi(u)(\tau))u(\tau)||d\tau \\
\leq\ & M_0 e^{at} \int_0^t || - [m(\tau,x,\phi(u)(\tau)) + M\phi(u)(\tau) - M\phi(\alpha_{k-1})(\tau)]\ \alpha_k(\tau)||d\tau \\
& +M_0 e^{at} \int_0^t ||m(\tau,x,\varphi(u)(\tau))u(\tau)||d\tau \\
\leq\ & M_0 M_1 e^{at} \int_0^t ||\alpha_k(\tau) - u(\tau)||d\tau + M_0 M_2 e^{aT} \int_0^T \|\alpha_{k-1}(\tau) - u(\tau)\|\, d\tau \\
\leq\ & M_0 M_1 e^{at} \int_0^t ||\alpha_k(\tau) - u(\tau)||d\tau \\
& +M_0 M_2 e^{aT} \int_0^T (\|\alpha_{k-1}(\tau) - \alpha_k|| + ||\alpha_k(\tau) - u(\tau)\|)d\tau \\
\leq\ & M_3 \int_0^t ||\alpha_k(\tau) - u(\tau)||d\tau + M_4 \int_0^T ||\alpha_{k-1}(\tau) - \alpha_k(\tau)||d\tau,
\end{aligned}$$

avec $M_1 = \underset{D_T}{Sup} m(\tau,x,\phi(u)(t))$, $M_3 = (MM_1 + M_0M_2)e^{aT}$ et $M_4 = M_0M_2e^{aT}$.De même, d'après (2.13) et (2.15), on a

$$\|\beta_k(t) - u(t)\| \leq M_5 \int_0^t ||\beta_k(t) - u(\tau)||d\tau + M_6 \int_0^T ||\beta_{k-1}(\tau) - \beta_k(\tau)||d\tau. \tag{2.16}$$

Par suite il résulte que

$$\begin{aligned}\|\alpha_k(t)-u(t)\|+||\beta_k(t)-u(t)|| &\leq M_7\int_0^t[||\alpha_k(\tau)-u(\tau)||+||\beta_k(\tau)-u(\tau)||]d\tau\\ &+M_8\int_0^T[||\alpha_k(\tau)-\alpha_{k-1}(\tau)||+||\beta_k(\tau)-\beta_{k-1}(\tau)||]d\tau.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de *Gronwall* on déduit que

$$\|\alpha_k(t)-u(t)\|+||\beta_k(\tau)-u(\tau)||\leq M_8e^{M_7T}\int_0^T[||\alpha_k(\tau)-\alpha_{k-1}(\tau)||+||\beta_k(\tau)-\beta_{k-1}(\tau)||]d\tau.$$

Par passage à la limite et d'après (2.12), il résulte que

$$\lim_{k\to\infty}\|\alpha_k(t)-u(t)\|=0,$$

et

$$\lim_{k\to\infty}||\beta_k(t)-u(t)||=0,$$

c'est-à-dire les deux suites de fonctions $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers l'unique solution du problème (2.1). ■

2.2.4 Existence des solution dans un domaine non borné

Dans cette partie, on s'intéresse à un modèle spécial qui décrit l'agrégation du phytoplancton qui représente l'ensemble des planctons de type végétal. Ils ont donc la capacité de transformer la matière inorganique en matière organique. Pour ce faire, ils retiennent l'énergie solaire et absorbent les sels minéraux ainsi que le carbone, puis réussissent à produire de l'oxygène. En d'autres mots, ils effectuent la photosynthèse. La moitié de l'oxygène qu'utilisent les vivants hétérotrophes est produit par les phytoplanctons. Ils ont donc une très grande importance dans les réseaux trophiques des océans ainsi que pour le contrôle naturel du climat. Le modèle considéré ici est le suivant:

$$\begin{cases} u_t+(g(t,x)u)_x=F(t,x,u,\varphi(u)(t), \text{ dans } D_T,\\ g(t,a)u(t,a)=\displaystyle\int_a^b\eta(t,x)u(t,x)dx, \text{ sur } (0,T),\\ u(0,x)=u_0(x), \text{ dans } [0,\infty),\end{cases}\tag{P}$$

avec $D_T=(0,T)\times(0,\infty)$ et

$$F(t,x,u,\phi)=\phi(u)(t,x)+f(t,x)u(t,x),$$

et

$$\phi(u)(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^x \psi(y,x-y)u(t,x-y)u(t,y)dy - \int_0^\infty \psi(y,x)u(t,x)u(t,y)dy,$$

où ψ et f sont deux fonctions continues et bornées

On prend aussi

$$C^1_{0,r}(D_T) = \{\xi \in C^1(D_T), \exists x_\xi \in (0,\infty), \text{ tel que } \xi \equiv 0, \text{ pour } x > x_\xi\}.$$

On introduit dans ce qui suite la définition de la solution, la sous-solution et la sur-solution pour le problème (P).

Définition 2.2.8 *Une fonction u est dite solution du problème (P), si elle vérifie*

i) $u \in L^\infty((0,T); L^1(0,\infty))$,

ii) $u(0,x) = u_0(x)$, *dans* $(0,\infty)$ presque par tout,

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1_{0,r}(D_T)$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(t,x)\xi(t,x)dx &= \int_0^\infty u(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,0)\int_0^\infty \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty u(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\mathcal{F}(u)(\tau,x)dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,x)u(\tau,y)dydxd\tau.\end{aligned}$$

Définition 2.2.8 *On entend par une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (P) tout couple* (v,w) *vérifiant*

i) $v, w \in L^\infty((0,T); L^1(0,\infty))$,

ii) $v(0,x) \leq u_0(x) \leq u(0,x)$ *dans* $(0,\infty)$ *presque par tout,*

iii) Pour tout $t \in (0,T)$ *et* $\xi \in C^1_{0,r}(D_T)$ *avec* $\xi(t,x) \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v(t,x)\xi(t,x)dx &\leq \int_0^\infty v(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,0)\int_0^\infty \eta(\tau,x)v(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty v(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\mathcal{F}(v)(\tau,x)dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^\infty \psi(y,x)v(\tau,x)w(\tau,y)dydxd\tau,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\infty w(t,x)\xi(t,x)dx \;\; &\geq \;\; \int_0^\infty w(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,0)\int_0^\infty \eta(\tau,x)w(\tau,x)dxd\tau \\ &+\int_0^t\int_0^\infty w(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\mathcal{F}(w)(\tau,x)dxd\tau \\ &-\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^\infty \psi(y,x)w(\tau,x)v(\tau,y)dydxd\tau,\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{F}(u)(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^x \psi(y,x-y)u(t,x-y)u(t,y)dy + f(t,x)u(t,x).$$

Théorème 2.2.7 (Principe de comparaison) *Soit (v,w) une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (P) avec $v \geq 0$ et $w \geq 0$, alors $w \geq v$ dans D_T.*

Preuve : On pose par définition

$$\omega(t,x) = v(t,x) - w(t,x), \text{ pour } t \in (0,T) \text{ et } x \in]0,\infty[.$$

Pout $t = 0$, alors

$$\omega(0,x) = v(0,x) - w(0,x) \leq 0, \;\; x \in (0,\infty) \text{ p.p}$$

D'autre part, pour tout $t \in (0,T)$ et ξ est un elément de $C^1_{0,r}((0,T)\times(0,n))$ avec

$$C^1_{0,r}((0,T)\times(0,n)) = \{\xi \in C^1((0,T)\times(0,n)), \exists x_\xi \in (0,n), \text{ tel que } \xi \equiv 0, \text{ pour } x > x_\xi\}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^n \omega(t,x)\xi(t,x)dx \;\; &\leq \;\; \int_0^\infty \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,0)\int_0^\infty \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\ &+\int_0^t\int_0^\infty \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x)+g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^x \psi(y,x-y)v(t,x-y)v(t,y)dydxd\tau \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^x \psi(y,x-y)w(t,x-y)w(t,y)dydxd\tau \\ &+\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)f(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\ &-\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^\infty \psi(y,x)[w(\tau,x)v(\tau,y)-v(\tau,x)w(\tau,y)]dydxd\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \int_0^\infty \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,0)\int_0^\infty \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\
& + \int_0^t\int_0^\infty \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^x \psi(y,x-y)\omega(t,x-y)v(t,y)dydxd\tau \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\int_0^x \psi(y,x-y)w(t,x-y)\omega(t,y)dydxd\tau \\
& + \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)w(\tau,x)\int_0^\infty \psi(y,x)\omega(\tau,y)dydxd\tau \\
& - \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)\omega(\tau,x)\int_0^\infty \psi(y,x)w(\tau,y)dydxd\tau
\end{aligned}
$$

On utilise une preuve similaire à celle du théorème (2.2.3) et on fait tendre n vers $+\infty$, on montre que $w \geq v$. ■

On a le résultat suivant

Corollaire 2.2.3 *Soient* (α_0,β_0) *est une paire de sous-solution et de sur-solution du problème* (P) *avec* $\alpha_0 \geq 0$ *et* $\beta_0 \geq 0$. *Si* u *une solution du problème* (P), *alors* $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ *dans* D_T.

Preuve : La preuve est similaire à celle de démonstration du théoreme 2.2.3. ■

Maintenant, on va considérer les suites des sous-solutions et des sur-solutions. Soit (α_0, β_0) une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (P) avec $\alpha_0 \geq 0$ et $\beta_0 \geq 0$.

Comme f et ψ sont deux fonctions continues bornées, on peut choisir une constante réelle positive M telle que $M - \displaystyle\int_0^\infty \psi(x,y)u(t,y)dy + f(t,y) \geq 0$ dans $\overline{D_T}$ et $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$, par suite on défini les suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$
\begin{cases}
\alpha_0 = v, \\
(\alpha_k)_t + (g(t,x)\alpha_k)_x = \mathcal{F}(\alpha_{k-1}) - M(\alpha_k - \alpha_{k-1}) - \alpha_{k-1}\displaystyle\int_0^\infty \psi(x,y)\beta_{k-1}(t,y)dy, \text{dans } D_T, k \in \mathbb{N} \\
g(t,0)\alpha_k(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty \eta(t,y)\alpha_{k-1}(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\
\alpha_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [0,\infty),
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

et

$$\begin{cases} \beta_0 = w, \\ (\beta_k)_t + (g(x)\beta_k)_x = \mathcal{F}(\beta_{k-1}) - M(\beta_k - \beta_{k-1}) - \beta_{k-1}\displaystyle\int_0^\infty \psi(x,y)\alpha_{k-1}(t,y)dy, \text{ dans } D_T, k \in \mathbb{N}^* \\ g(a)\beta_k(t,a) = \displaystyle\int_0^\infty \eta(t,y)\beta_{k-1}(t,y)dy, \text{ sur } (0,T), \\ \beta_k(0,x) = u_0(x), \text{ dans } [0,\infty), \end{cases} \tag{2.18}$$

Les deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.8 *Supposons que* (α_0,β_0) une paire de *sous-solution et de sur-solution du problème (P) avec* $\alpha_0 \geq 0$ *et* $\beta_0 \geq 0$. *Alors les suites* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *convergent uniformément vers l'unique solution u du problème (P) dans* D_T.

Preuve : La preuve de ce résultat se fait en deux étapes.

1[er] étape: On montre la monotonie des deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que pour tous $k \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_k \leq \beta_k$ dans D_T.

Pour cela on utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $k = 0$, montrons que $\alpha_0 \leq \alpha_1$ dans D_T.

On pose par définition

$$\omega(t,x) = \alpha_0(t,x) - \alpha_1(t,x), \text{ dans } D_T.$$

Pour $t = 0$, on a

$$\omega(0,x) = \alpha_0(0,x) - \alpha_1(0,x) \leq 0,$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega(t,x)\xi(t,x)dx \quad &\leq \quad \int_0^\infty \omega(0,x)\xi(0,x)dx + \int_0^t \xi(\tau,0)\int_0^\infty \eta(\tau,x)\omega(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty \omega(\tau,x)[\xi_\tau(\tau,x) + g(\tau,x)\xi_x(\tau,x)]dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_0^\infty \xi(\tau,x)M(\omega)(\tau,x)dxd\tau, \end{aligned}$$

En utilisant un raisonnement similaire du théorème (1.3.2), on obtient

$$\omega(t,x) \leq 0, \text{ dans } D_T,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha_0(t,x) \leq \alpha_1(t,x), \text{ dans } D_T.$$

En utilisant une preuve similaire, on montre que $\beta_1 \leq \beta_0$, $\alpha_1 \leq \beta_0$, et $\alpha_0 \leq \beta_1$ dans D_T.

Maintenant on montre que (α_1,β_1) une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (P).

Comme $\alpha_0 \leq \alpha_1$ et $\beta_1 \leq \beta_0$ le second membre de l'équation (2.17) satisfait à

$$\mathcal{F}(\alpha_0)-[M(\alpha_1-\alpha_0)-\alpha_0\int_0^{\infty}\psi(x,y)\beta_0(t,y)dy] \leq \mathcal{F}(\alpha_1)-\alpha_1\int_0^{\infty}\psi(x,y)\beta_1(t,y)dy,$$

et le second membre de l'équation (2.18) satisfait à

$$\mathcal{F}(\beta_0)-M(\beta_1-\beta_0)-\beta_0\int_0^{\infty}\psi(x,y)\alpha_0(t,y)dy \geq \mathcal{F}(\beta_1)-\beta_1\int_0^{\infty}\psi(x,y)\alpha_1(t,y)dy.$$

Donc il en résulte que (α_1,β_1) une paire de sous-solution et de sur-solution du problème (P) et d'après le principe de comparaison, on a $\alpha_1 \leq \beta_1$.

Supposons pour k entier naturel fixé, on a

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_k,$$

et en utilisant un raisonnement similaire a celui qui a été donnée précédemment, on montre que

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k.$$

En conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq ... \leq \beta_1 \leq \beta_0 \quad \text{dans } D_T.$$

2^{eme}étape: On note par $\alpha_k(t) = \alpha_k(t,.)$, $\beta_k(t) = \beta_k(t,.)$ et $u(t) = u(t,.)$.

Comme les suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent ponctuellement et d'après le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on montre que

$$\underset{k\to\infty}{\underline{Lim}}\int_0^T (\|\alpha_k(t)-\alpha_{k-1}(t)\| + \|\beta_k(t)-\beta_{k-1}(t)\|)d\tau = 0. \tag{2.19}$$

D'après (1.3), la solution s'écirit sous la forme suivante

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)[\mathcal{F}(u)(t,x) - \int_0^{\infty}\psi(x,y)u(\tau,x)u(\tau,y)dy]d\tau, \tag{2.20}$$

avec $S(t)$ est un C_0 semi-groupe.

De même on a

$$\alpha_k(t) = S(t)u_0-\int_0^t S(t-\tau)[\mathcal{F}(\alpha_{k-1})-M(\alpha_k-\alpha_{k-1})-\alpha_{k-1}\int_0^{\infty}\psi(x,y)\beta_{k-1}(t,y)dy]d\tau, \tag{2.21}$$

et

$$\beta_k(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)[\mathcal{F}(\beta_{k-1}) - M(\beta_k - \beta_{k-1}) - \beta_{k-1}\int_0^\infty \psi(x,y)\alpha_{k-1}(t,y)]dyd\tau, \tag{2.22}$$

Comme $S(t)$ est un C_0 semi-groupe, alors il existe deux constante réelles positives M_0 et a telle que $\|S(t)\| \leq M_0 e^{at}$ et comme F est une fonction continue en t, lipschitzienne en u et comme $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ alors d'aprés (2.20) et (2.21), alors on obtient

$$\begin{aligned}
\|\alpha_k(t) - u(t)\| &\leq \int_0^t ||S(t-\tau)[\mathcal{F}(\alpha_{k-1}) - M(\alpha_k - \alpha_{k-1}) - \alpha_{k-1}\int_0^\infty \psi(x,y)\beta_{k-1}(t,y)dy]||d\tau \\
&\quad - \int_0^t ||S(t-\tau)[\mathcal{F}(u)(t,x) - \int_0^\infty \psi(x,y)u(\tau,x)u(\tau,y)dy]||d\tau \\
&\leq M_0 M_1 e^{at}\int_0^t ||\alpha_k(\tau) - u(\tau)||d\tau + M_0 M_2 e^{aT}\int_0^T ||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)||d\tau \\
&\quad + M_0 M_2 e^{at}\int_0^t ||\beta_{k-1}(\tau) - u(\tau)||d\tau \\
&\leq M_0 M_3 e^{aT}\int_0^t (||\alpha_k(\tau) - u(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - u(\tau)||)d\tau \\
&\quad + M_0 M_4 e^{aT}\int_0^T (||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)||)d\tau,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De façon similaire, d'aprés (2.20) et (2.22) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\beta_k(t) - u(t)\| &\leq M_0 M_5 e^{aT}\int_0^t (||\beta_k(\tau) - u(\tau)||d\tau + ||\alpha_k(\tau) - u(\tau)||)d\tau \\
&\quad + M_0 M_6 e^{aT}\int_0^T (||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)||)d\tau.
\end{aligned}$$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_k(t) - u(t)\| + \|\beta_k(t) - u(t)\| &\leq M_6\int_0^t (||\alpha_k(\tau) - u(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - u(\tau)||)d\tau \\
&\quad + M_7\int_0^T (||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)||)d\tau,
\end{aligned}$$

D'après le lemme de *Gronwall,* on obtient que

$$\|\alpha_k(t) - u(t)\| + \|\beta_k(t) - u(t)\| \leq M_7 e^{M_6 T}\int_0^T (||\alpha_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau)|| + ||\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)||)d\tau$$

Par passage à la limite et d'après (2.19), il résulte que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|\alpha_k(\tau)-\alpha_{k-1}(\tau)\|\,d\tau=0,$$

et

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \left\|\beta_k(\tau)-\beta_{k-1}(\tau)\right\|\,d\tau=0,$$

c'est-à-dire on a la convergence uniforme vers $u(t)$ dans $\overline{D_T}$. ■

Exemple 2.2.5 *On donne un exemple autour de notre résultat. On considère le problème aux limites (P) avec $u_0(x)=e^{-x}$ et $D_T=(0,1)\times(0,\infty)$, on peut construire une paire de sous et sur-solution positive pour notre problème .Alors d'une part, la fonction constante $\underline{u}(t,x)=0$ est une sous-soltion du (P) .D'autre part, on choisit une constante réelle positive assez grande c_1 telle que*

$$c_1\geq\ \max_{\overline{D_T}}\eta(t,x)/\min_{[0,1]}g(t,0),$$

On fixe c_1 et on choisit c_3 assez grand telle que

$$(1+c_1^2x^2)/c_3\leq e^x\text{ , pour }x[0,\infty[,$$

autrement dit:

$$c_3/(1+c_1^2x^2)\geq u_0(x),\text{ pour }x[0,\infty[.$$

Donc la sur-solution qu'on a construit est $\overline{u}(t,x)=c_3e^{c_2t}/(1+c_1^2x^2)$, ou c_2 est une constante réelle positive assez grand,avant de la déterminer, on calcule l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{dy}{[1+c_1^2(x-y)^2][1+c_1^2y^2]} &= \frac{2}{c_1^2x}\left[\frac{c_1x\arctan(c_1x)+\log(1+c_1^2x^2)}{4+c_1^2x^2}\right]\\ &\leq \frac{4}{1+c_1^2x^2},\end{aligned}$$

Par suite, on choisit c_2 telle que:

$$c_2\geq\frac{2c_3}{c_1}\|\eta\|_\infty+\max_{\overline{D_T}}|g_x(t,x)|+2c_1^2\max_{\overline{D_T}}g(t,x)+\max_{\overline{D_T}}|f(t,x)|\,.$$

On montre que la solution de (P) a la propriété suivante

Théorème 2.2.9 *Comme u est une solution du* (P), *alors $P(t)=\int_0^\infty u(t,x)dx$ est continu dans l'intervalle existence.*

Preuve : Pour montrer la continuité du P, il suffit d'établir l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(t,x)dx &= \int_0^\infty u(0,x)dx + \int_0^t\int_0^\infty \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty \mathcal{F}(u)(\tau,x)dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,x)u(\tau,y)dydxd\tau,\end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour cela, on va choisir $\xi(t,x) = \xi(x)$ défini comme suite

$$\xi(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x \le n, \\ -1 \le \xi' \le 0,\ n \le x \le n+2, \\ 0\ ,\ n+2 \le x \le \infty, \end{cases}$$

Par définition de la solution du notre problème on a

$$\begin{aligned}&|\int_0^\infty u(t,x)dx - \int_0^\infty u(0,x)dx - \int_0^t\int_0^\infty \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau - \int_0^t\int_0^\infty \mathcal{F}(u)(\tau,x)dxd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,x)u(\tau,y)dydxd\tau| \\ = \ &|\int_0^\infty [u(t,x)dx - u(0,x)][1-\xi(x)+\xi(x)]dx - \int_0^t\int_0^\infty \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau \\ &- \int_0^t\int_0^\infty \mathcal{F}(u)(\tau,x)dxd\tau + \int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,x)u(\tau,y)dydxd\tau|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ |\int_0^\infty [u(t,x)dx - u(0,x)][1-\xi(x)]dx + \int_0^\infty u(0,x)\xi(x)dx + \int_0^t \int_0^\infty \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^\infty u(\tau,x)g(\tau,x)\xi'(\tau,x)dxd\tau + \int_0^t \int_0^\infty \zeta(\tau,x)\mathcal{F}(u)(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t \int_0^\infty \zeta(x) \int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,x)u(\tau,y)dydxd\tau \\
&\quad - \int_0^\infty u(0,x)\xi(x)dx - \int_0^t \int_0^\infty \eta(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau - \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{F}(u)(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,x)u(\tau,y)dydxd\tau| \\
&= \ |\int_n^\infty [u(t,x)dx - u(0,x)][1-\xi(x)]dx + \int_0^t \int_n^\infty u(\tau,x)g(\tau,x)\xi'(\tau,x)dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t \int_n^\infty \mathcal{F}(u)(\tau,x)[1-\xi(x)]dxd\tau + \int_0^t \int_n^\infty u(\tau,x)[1-\xi(x)] \int_0^\infty \psi(y,x)u(\tau,y)dydxd\tau| \\
&\leq \ (2 + T\|g\|_\infty + T\|\psi\|_\infty)\sup_{[0,T]} \int_n^\infty u(t,x)dx,
\end{aligned}
$$

Comme $u \in L^\infty((0,T);L^1(0,\infty))$, alors $\sup\limits_{[0,T]} \int_n^\infty u(t,x)dx \to 0$ quand $n \to \infty$,ce qui donne (2.24). ■

Conclusion

La méthode des sous solutions et des sur solutions et la technique itératives est efficace pour construire les solutions des problèmes aux limites non locales hyperboliques.

Bibliographie

[1] A. S. Ackleh et K. Deng, A monotone approximation for a nonlinear nonautonomous size-structured population model, Appl. Math. Comp., 108 (2000), 103-113.

[2] A. S. Ackleh et K. Deng, A monotone method for first order nonlocal hyperbolic initial-boundary value problems, Appl. Anal., 67 (1997), 173-183.

[3] A. S. Ackleh et K. Deng, Monotone method for nonlinear nonlocal hyperbolic problems, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 10 (2003), 11-22.

[4] A. S. Ackleh et K. Deng, Monotone scheme for nonlinear first order hyperbolic initial-boundary value problems, Appl.Math. Lett., 13 (2000), 111-119.

[5] A. S. Ackleh, K. Deng et Xubo Wang, Existence-uniqueness and monotone approximation for a phytoplankton-zooplankton aggregation model, Z. angew. Math. Phys. 57 (2006) 733–7490044-2275/06/050733-17.

[6] H.T. Banks, F. Kappel and C. Wang, Weak solutions and differentiability for size structured population models, Internat. Ser. Numer. Math. 100, 35-50, (1991).

[7] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983).

[8] J-P Raymond, Equations d'évolution - Introduction aux semigroupes - Master 2R de Mathématiques appliquées.

Résumé

Dans ce mémoire, nous présenterons la méthode des sous solutions et des sur solutions et la méthode itérative pour construire des solutions pour les problèmes aux limites non locales hyperboliques.

Mots clés : méthode monotone, sous-solution, sur-solution, problèmes aux limites non locales hyperboliques.

Abstract

In this memory , we will present upper and lower solutions the method to construct solutions for nonlocal nonlinear hyperbolic initial boundary value problem.

Key words: monotone method, lower solution, super solution, nonlocal hyperbolic initial-boundary value problems.

ملخص

في هذه المذكرة نقدم طريقة الحل الادنى والحل الأعلى وطريقة تكرارية لإيجاد حلول للمشاكل الحدية غير قطعية .

الكلمات المفتاحية : الحل الأدنى ، الحل ألأعلى ، الطريقة التكرارية.