

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université De Tlemcen
Faculté De Technologie
Département De Génie Civil



Mémoire Pour L'Obtention Du Diplôme
De Master En Génie Civil
Spécialité : Ingénierie Des Structures

Thème

**LES ÉCOULEMENTS DANS LES MILIEUX POREUX
PARTIELLEMENT SATURÉ**

Soutenu le Jeudi 03 Octobre 2013 par :

HAMZA CHERIF Othman

Devant le jury composé de :

Mr : BEDJAOUI. M.C.

Président

Mme : DJAFOUR.N.

Examineur

Mme : BENADLA.Z.

Examineur

Mr : BENYELLES.Z.

Encadreur

Remerciements.

Je veux remercier en premier lieu mon dieu qui m'a donnée la puissance pour achever ce modeste travail.

Un grand remerciement à mon encadreur, Zoheir BENYELLES pour son soutien scientifique, ses conseils importants durant mon mémoire. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans lui, qui a toujours su me consacrer un peu de leur temps à mes travaux et aussi à ma rédaction. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitude.

J'exprime également mes plus sincères remerciements aux mes juges: Mr BEDJAOUI. A.C, Mme DJAFOUR.N et Mme BENADLA.Z qui m'ont fait l'honneur de examiner mon travail par les critiques et les commentaires ainsi que des questions d'encouragent à poursuivre ce travail.

Dédicace.

Je dédie ce travail en premier lieu à ma mère .et non père.

A mes frères.

A mes meilleurs amis.

A tous mes enseignants durant ma vie scolaire.

RESUME.

Le but de l'étude est d'analyser l'écoulement d'eau dans les milieux poreux non saturés à partir de la résolution de l'équation aux dérivés partielles celle de (Richard) par la méthode des éléments finis, à cette raison nous utilisons un programme numérique réalisé pendant le travail en langage (Pascal), il permet de calculer la pression interstitielle d'eau qui s'écoule durant un temps donné dans le milieu poreux.

Mots clés :

Sol non saturé, milieux poreux, équations aux dérivés partiels, éléments finis, méthodes numériques.

المخلص.

إن الهدف من هذه الدراسة هو تحليل تدفق المياه في الأوساط المسامية الغير مشبعة بالماء من خلال حل المعادلة ذات الاشتقاق الجزئي والتي هي (معادلة ريتشارد) بواسطة طريقة العناصر المحددة، ولهذه الغاية استخدمنا برنامج رقمي أنشأ خلال هذا العمل بلغة البرمجة (باسكال)، البرنامج يتيح لنا حساب ضغط المياه المتدفقة خلال زمن معين في الوسط المسامي.

الكلمات المفتاحية

التربة الغير مشبعة، الأوساط المسامية، المعادلات ذات الاشتقاق الجزئي، العناصر المحددة، الطرق العددية.

Abstract.

The aim of the study is to analyze the flow of water in unsaturated from solving the equation for the partial derivatives of (Richard) by the finite element method porous media, this is why we use a digital program conducted by (Pascal) language, it can calculate the pore water pressure flowing during a given time in the porous medium.

Key words:

Partly saturated soil, porous media, the partial derivative equations, finite elements, numerical methods.

Notations utilisées :

- ρ : Masse volumique.
- θ : La teneur en eau.
- γ : Le poids volumique.
- n : La porosité du milieu.
- S_r : Degré de saturation
- \vec{n} : Le vecteur normal à la surface.
- u : Pression interstitiel.
- g : La gravité.
- v : Vitesse d'écoulement.
- v' : Vitesse effectif.
- Q : Le débit d'écoulement.
- S : La section.
- H : La charge.
- z : La cote d'un point par rapport à une référence.
- K : La perméabilité.
- Re : Le nombre de Reynolds
- ν : La viscosité dynamique
- σ_{aw} : La tension superficielle.
- $\langle \Psi \rangle$: Fonctions de pondération.
- $\langle N \rangle$: Fonctions d'interpolation.
- λ : La densité du flux.
- Ω_e : domaine élémentaire.
- $c(s)$: Le coefficient d'emmagasinement.
- s : La succion.

<u>INTRODUCTION GÉNÉRALE.</u>	-	-	-	-	-	-	-	1
<u>CHAPITRE 1 : Définitions générales et rappel théorique.</u>								
I-1.	<u>DEFINITION DES MILIEUX POREUX.</u>	-	-	-	-	-	-	2
I-2.	<u>PARAMETRES PHYSIQUE DES MILIEUX POREUX.</u>	-	-	-	-	-	-	2
I-3.	<u>DEFINITION DES SOLS.</u>	-	-	-	-	-	-	4
I-3-1.	La phase solide ou squelette solide.	-	-	-	-	-	-	4
I-3-2.	La phase liquide.	-	-	-	-	-	-	5
I-3-3.	La phase gazeuse,	-	-	-	-	-	-	7
I-4.	<u>L'ÉCOULEMENT DANS LES SOLS SATURÉ.</u>	-	-	-	-	-	-	7
I-5.	<u>DEFINITION GÉNÉRALE.</u>	-	-	-	-	-	-	8
I-5-1.	Charge hydraulique.	-	-	-	-	-	-	8
I-5-2.	Vitesse d'écoulement.	-	-	-	-	-	-	8
I-5-3.	Gradient hydraulique.	-	-	-	-	-	-	9
I-5-4.	Perméabilité.	-	-	-	-	-	-	9
I-5-4-1.	Définition.	-	-	-	-	-	-	9
I-5-4-2.	Détermination de la perméabilité.	-	-	-	-	-	-	9
I-5-5.	Milieux homogène.	-	-	-	-	-	-	10
I-5-6.	Milieux isotrope et anisotrope.	-	-	-	-	-	-	10
I-5-7.	Trajectoire de la particule.	-	-	-	-	-	-	10
I-5-8.	Ligne de courant.	-	-	-	-	-	-	10
I-5-9.	Ligne équipotentielle.	-	-	-	-	-	-	10
I-5-10.	Ligne équipression.	-	-	-	-	-	-	11
I-6.	<u>LA LOI DE DARCY.</u>	-	-	-	-	-	-	11
I-6-1.	Limite de validité de la loi de darcy	-	-	-	-	-	-	12
I-6-2.	Généralité de la loi Darcy en 3D.	-	-	-	-	-	-	12
<u>CHAPITRE 2 : Les sols non saturés.</u>								
II-1.	<u>INTRODUCTION.</u>	-	-	-	-	-	-	14
II-2.	<u>INTERACTION EAU-SOLIDE : L'ADSORPTION.</u>	-	-	-	-	-	-	14
II-3.	<u>INTERACTION GAZ-EAU.</u>	-	-	-	-	-	-	17
II-3-1.	Interface Gaz-Eau : Tension superficielle.	-	-	-	-	-	-	17
II-3-2.	Humidité relative (Diagramme D'état de l'eau).	-	-	-	-	-	-	18
II-4.	<u>INTERACTIONS AIR-EAU-SOLIDE : CAPILLARITE.</u>	-	-	-	-	-	-	20
II-5.	<u>SUCCION.</u>	-	-	-	-	-	-	21
II-5-1.	Succion matricielle.	-	-	-	-	-	-	21

II-5-2.	Succion osmotique.	-	-	-	-	-	-	22
II-5-3.	Succion totale.	-	-	-	-	-	-	22
II-6.	<u>EFFETS DE LA SUCCION SUR LES PARTICULES SOLIDES.</u>	-						24
II-7.	<u>ASPECTS HYDRIQUES FONDAMENTAUX DES SOLS NON SATURES.</u>							24
II-7-1.	Perméabilité à l'eau.	-	-	-	-	-	-	24
II-7-2.	Courbes de rétention d'eau	-	-	-	-	-	-	26
II-7-3.	Phénomène d'hystérésis.	-	-	-	-	-	-	28

CHAPITRE 3 : Résolution de l'équation de Richard par la méthode des éléments finis.

III-1.	<u>INTRODUCTION.</u>	-	-	-	-	-	-	30
III-2.	<u>PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.</u>	-	-					30
III-3.	<u>MISE EN EQUATION DU PROBLEME D'ECOULEMENT.</u>	-	-					31
III-3-1.	Conservation de la masse.-	-	-	-	-	-	-	31
III-3-2.	Loi de Darcy généralisée.	-	-	-	-	-	-	32
III-3-3.	Equation de Richards.	-	-	-	-	-	-	32
III-4.	<u>CONDITION AUX LIMITES.</u>	-	-	-	-	-	-	33
III-4-1.	Condition de Dirichlet.	-	-	-	-	-	-	33
III-4-2.	Condition de Neumann.	-	-	-	-	-	-	33
III-4-3.	Différent condition aux limites.	-	-	-	-	-	-	33
III-5.	<u>RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION.</u>	-	-	-	-	-	-	34
III-6.	<u>APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENT FINIS.</u>	-	-					35
III-6-1.	Formulation intégrale : (Résidu pondéré).	-	-	-	-	-	-	35
III-6-2.	Détermination des fonctions de pondération.	-	-	-	-	-	-	36
III-6-3.	Forme intégrale faible : (Intégration par partie).	-	-	-	-	-	-	36
III-6-4.	Notion d'élément finie.	-	-	-	-	-	-	38
III-6-5.	Calcul sur un élément de référence.	-	-	-	-	-	-	39
III-7.	<u>CALCUL DES INTEGRALES.</u>	-	-	-	-	-	-	40
III-8.	<u>INTEGRATION DANS LE TEMPS.</u>	-	-	-	-	-	-	42
III-9.	<u>LA NON LINEARITE.</u>	-	-	-	-	-	-	43

CHAPITRE 4 : Technique de programmation.

V-1.	<u>INTRODUCTION.</u>	-	-	-	-	-	-	44
V-2.	<u>POURQUOI DELPHI.</u>	-	-	-	-	-	-	44
V-3.	<u>PRESENTATION GENERAL.</u>	-	-	-	-	-	-	45

Liste des tableaux :

<u>Tableau II-1</u> : Quelques lois de perméabilité (K_w) en fonction de la succion (s) ou de la saturation (S_{rw}).	26
<u>Tableau II-2</u> : Quelques lois de saturation (S_{rw}) en fonction de la succion (s).	27
<u>Tableau III-1</u> : Abscisses et poids d'intégration de GAUSS.	42

Liste des figures :

<u>Figure I-1</u> : Portions des volumes dans un sol.	2
<u>Figure I-2</u> : les différents états d'eau dans le sol.	5
<u>Figure I-3</u> : L'eau dans les sols.	6
<u>Figure I-4</u> : schéma représentative d'expérience de Darcy.	11
<u>Figure II-1a</u> : Structure de la molécule d'eau.	15
<u>Figure II-1b</u> : Couche d'eau adsorbée (d'après Andrei, 1977).	15
<u>Figure II-2</u> : Cohésion (d'après Andrei, 1977)	16
<u>Figure II-3</u> : Retrait et gonflement (d'après Andrei, 1977)	16
<u>Figure II-4</u> : Présentation schématique de la consistance d'un sol à différents niveaux de saturation (d'après Tang, 1979)	17
<u>Figure II-5</u> : Tension superficielle (Fredlund, 1993)	18
<u>Figure II-6</u> : sollicitation de l'interface (d'après Chen, 1987)	18
<u>Figure II-7</u> : Diagramme d'état de l'eau.	19
<u>Figure II-8</u> : Modèle physique du phénomène d'effet capillaire	20
<u>Figure II-9</u> : Succion (Ψ) en fonction de l'humidité relative (RH) de l'air (à 20 °C).	23
<u>Figure II-10</u> : Les composantes de la succion totale ($\Psi = s + \pi$).	23
<u>Figure II-11</u> : Effets de la succion sur les grains du sol.	24
<u>Figure II-12</u> : Perméabilité (K_w) d'un sol non saturé.	25
<u>Figure II-13</u> : Courbe de rétention d'eau d'un sol non saturé en cours de séchage.	27
<u>Figure II-14</u> : Hystérésis de ($K_w(s)$).	28
<u>Figure II-15</u> : Manifestation physique de l'hystérésis (Bear et Verruijt, 1987). (Expérience de la goutte d'eau).	28

<u>Figure III-1</u> : Ecoulement à travers un volume élémentaire de sol.	31
<u>Figure III-2</u> : Schéma d'intégrale numérique.	41
<u>Figure III-3</u> : Schéma représentatif de la méthode de Newton-Raphson	43
<u>Figure IV-1</u> : Fenêtre principale de Win-Flow.	45
<u>Figure IV-2</u> : Boite de dialogue propriétés des matériaux.	46
<u>Figure IV-3</u> : Message d'avertissement.	46
<u>Figure IV-4</u> : Tableau en mode affichage les coordonnées des nœuds.	47
<u>Figure IV-5</u> : Tableau en mode affichage la connectivité des éléments.	47
<u>Figure IV-6</u> : Fenêtre texte.	47
<u>Figure IV-7</u> : Boite de dialogue Ouvrir.	48
<u>Figure IV-8</u> : Fenêtre paramètre de calcul.	48
<u>Figure IV-9</u> : Organigramme de calcul par la méthode d'éléments finis.	52
<u>Figure IV-10</u> : Structure mailler en 6 éléments quadrilatères.	55

Introduction générale.

INTRODUCTION.

Les écoulements souterrains notamment dans les milieux non saturé est un phénomène qui fait partie de nombreuses disciplines s'il n'est pas la base.

Si on parle dans la gestion de ressource d'eau, le phénomène est un facteur déterministe dans la charge et décharge des nappes souterraine et par conséquent le changement de leur niveau au revanche ce changement qui provoque les tassements ainsi que l'effet de cet écoulement sur le comportement des sols peuvent être fatal pour les structures posé sur sol.

L'équation de Richard qui décrit l'écoulement dans les milieux poreux non saturé est une équation aux dérivés partiels non linéaire non stationnaire dont la résolution est difficile, seul les méthodes d'approximations telles que les méthodes numériques qui peuvent être efficace.

But :

Le but de ce travail est d'établir un programme numérique pour résoudre le problème d'écoulement dans un milieu poreux partiellement saturé par la méthode des éléments finis, en adoptant des techniques qui améliore la modélisation ainsi que l'optimisation dans les calculs.

Organisation.

Le présent document est composé de deux parties :

La première : encapsule les définitions les plus essentielles dans la compréhension du phénomène ainsi un rappel théorique sur les écoulements en milieu poreux. La partie contient :

Chapitre 1 : Il contient un bref rappel et définition concernant la théorie des écoulements dans les milieux poreux.

Chapitre 2 : Contient des définitions détaillé des facteurs qui définissent et caractérisent l'écoulement dans les milieux poreux non saturés.

La seconde partie elle détaille les différentes étapes suivies pour la résolution du problème d'écoulement en milieux poreux non saturés.

Chapitre 3 : Une démonstration de la discrétisation de l'équation en question un système d'équation algébrique par la méthode des éléments finis

Chapitre 4 : une présentation du programme établit ainsi que leur caractéristique, de but de mise en service de la méthode des éléments finis dans la résolution de l'équation de Richard.

Chapitre 1 :

Définitions générales et rappel théorique.

I-1. DEFINITION DES MILIEUX POREUX.

Les milieux poreux désignent des matériaux constitués de particules imbriquées l'une sur l'autre d'une manière à laisser du vide entre elles appelé pore, ce vide est occupé par un fluide ou plus comme l'air, l'eau, l'huile, etc., qu'ils ont le pouvoir d'écouler librement à l'intérieur.

On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants.

Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique pour la mousse isolante par exemple).

I-2. PARAMETRES PHYSIQUES DES MILIEUX POREUX.

Afin de pouvoir bien commencer l'étude des milieux poreux, il est nécessaire d'enseigner leurs paramètres d'état.

a) . Volume. [1]

Il est clair que le volume des milieux poreux est occupé essentiellement par la matrice solide qui possède des pores ou vides, ce volume de vide aussi est rempli par un seul ou plusieurs fluides généralement on rencontre l'eau et l'air.

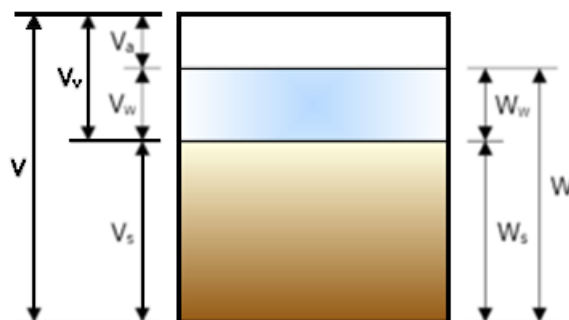


Figure I-1 : Portions des volumes dans un sol.

V_s : Volume des grains solide.

V_a : Volume de l'aire.

V_w : Volume de l'eau.

b) . Poids. [1]

C'est le poids des constituants du milieu

W_s : Poids des grains solide.

W_w : Poids du liquide.

c) . Poids volumique des milieux poreux. [1]

Concernant le calcul du poids volumique des milieux poreux, on a différentes définitions.

Poids volumique totale ou apparent : c'est le poids de l'ensemble par unité de volume totale et on a deux cas.

- Poids volumique humide : quand l'eau existe est leur poids sera incluse :

$$\gamma_h = \frac{W_w + W_s}{V_a + V_w + V_s}$$

- Poids volumique sec : le sol est sec le poids mesuré que pour les grains solides puisque l'air est plus lège :

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_a + V_w + V_s}$$

Cette propriété ce n'est pas un caractère intrinsèque puisque elle dépend du réarrangement des grains.

Poids volumique absolu ou des grains : il défini réellement le poids de la matière constitutive des grains solides. Cette propriété est un caractère intrinsèque des sols.

$$\gamma_s = \frac{\text{Poids du solide}}{\text{Volume du solide}} = \frac{W_s}{V_s}$$

d) . Teneur en eau. [1]

C'est un rapport entre le poids de l'eau et le poids des grains solides.

$$\omega = \frac{\text{Poids de l'eau}}{\text{Poids du solide}} = \frac{W_w}{W_s}$$

e) . Porosité. [1]

C'est un rapport entre le volume des vides et le volume total, désignée par le nombre (n).

$$n = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume de sol total}} = \frac{V_V}{V_T}$$

f) . L'indice des vides. [1]

C'est un rapport entre le volume des vides et le volume des grains, désigné par le nombre (*e*).

$$e = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume de solide}} = \frac{V_v}{V_s}$$

g) . Degré de saturation. [1]

Une grandeur qui exprime la quantité d'eau par rapport aux vides :

$$S_r = \frac{\text{Volume de l'eau}}{\text{Volume des vides}} = \frac{V_W}{V_T}$$

Si : $S_r = 1 \rightarrow$ Le sol est dite saturé.

Si : $S_r = 0 \rightarrow$ Le sol est dite sec.

$0 < S_r < 1 \rightarrow$ Le sol est partiellement saturé.

I-3. DEFINITION DES SOLS. [2]

C'est la couche superficielle, meuble, de la couche terrestre d'épaisseur variable, qui résulte de l'altération des roches sous-jacentes (roche-mère) et de la dégradation des matières organiques, sous l'influence d'agents biologique (végétation, faune du sol), chimiques et physique (précipitation, variations de température).

Le sol autant qu'un milieu poreux, c'est un matériau à trois phases : agrégats de particules minérales dont les vides peuvent être remplis de fluide. On distingue globalement :

I-3-1. La phase solide ou squelette solide. [2]

Constituée par les particules qu'ils sont le résidu de l'altération de différents types de substrats, et ce sont des corps formés de particules solides non cimentées, de composition minéralogique très varié dépend directement de celle de la roche mère, s'ils ne sont pas subit à des altérations qui peuvent toucher leur composition chimique. Ces particules sont souvent classées en quatre catégories suivant leur composition, mode de formation et cause de formation en : minéraux primaires, minéraux secondaires, sels et matières organiques.

Les minéraux primaires : Ce sont les minéraux résiduels qui ont échappé à l'altération parce qu'ils sont stables ils conservent la composition minéralogique et géochimique des matériaux parents ou instables n'ayant pas subi suffisamment les effets de l'altération. Comme le quartz, les feldspaths et les micas, qui se retrouvent dans diverses fractions granulométriques, sont les minéraux primaires les plus abondants

dans les sols. Ils peuvent résulter d'une simple érosion des substrats avec tris granulométriques au cours du transport, surtout par l'eau, et au cours de la sédimentation. Cette catégorie de minéraux se retrouve souvent dans les sols granuleux : sables grossiers, graviers, etc.

Les minéraux secondaires : Ils résultent de la transformation (ou dégradation) géochimique et impliquent donc un changement de statut minéralogique aux dépens des minéraux primaires, accompagné d'une réduction de taille. Ils comprennent divers types de minéraux argileux (simples ou inter-stratifiés). Les minéraux argileux se cantonnent dans une gamme granulométrique comprise entre le micron et quatre microns.

Les sels solubles : Les solutions qui résultent de l'altération par hydrolyse transportent des éléments chimiques actifs tels que (K, Na, Ca, Mg). Soit ces éléments quittent définitivement les sites de l'altération, soit ils y demeurent en constituant des phases minérales neuves (carbonates, sulfates, sels). Les carbonates peuvent jouer un rôle de ciment temporaire ou définitif scellant les minéraux argileux. (K) et (Na) peuvent aussi subsister dans ou à proximité des minéraux argileux. Par conséquent, ces sels peuvent influencer fortement le comportement hydromécanique des sols.

Les matières organiques : Elles résultent de la transformation hydrolytique ou biologique des résidus végétaux à la surface des sols. Ces résidus peuvent être réincorporés plus bas dans le matériau argileux du sol. La matière organique, à raison de quelques pour-cent, peut être présente dans les sédiments. Elle se caractérise par une forte capacité de rétention d'eau et par là agit sensiblement sur le comportement géomécanique d'un matériau argileux.

I-3-2. La phase liquide. [2]

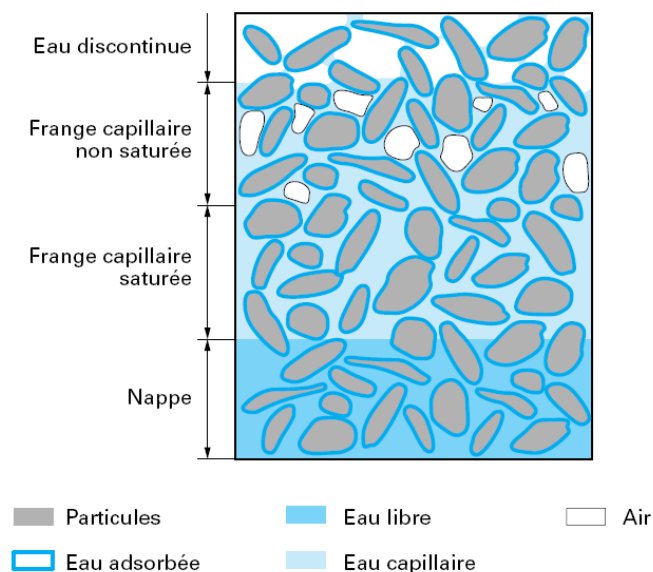


Figure I-2 : les différents états d'eau dans le sol.

Constituée par l'eau qui occupe les vides de l'agrégat. Si tous les vides sont remplis d'eau, le sol est saturé; sinon, il est non saturé ou partiellement saturé ; Les interstices du squelette solide sont occupés en partie ou en totalité par de l'eau. Cette eau n'est en général pas pure : elle contient des électrolytes dissociés en cations et anions (son pH est alors acide ou basique), des matières organiques en suspension et, dans certains cas, des gaz dissous.

L'eau a un effet considérable sur le comportement des sols, et le schéma (figure I-3) ci-dessous montre les diverses formes de l'eau présente dans un sol.

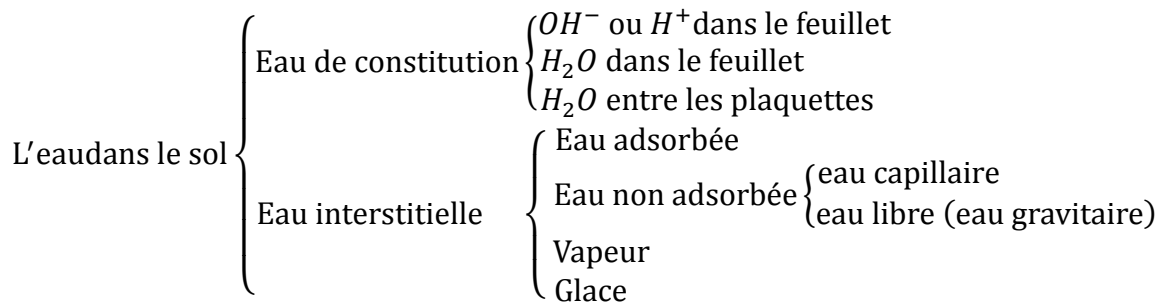


Figure I-3 : L'eau dans les sols.

L'eau interstitielle est de l'eau présente dans les pores du sol. Son état, ses caractéristiques physico-chimiques, ses interactions avec les autres phases du sol, etc., influencent fortement les propriétés mécaniques de résistance, l'état de plasticité, la résistance au frottement, la consistance, etc.

a) . L'eau de constitution :

L'eau de constitution se trouve dans la structure du minéral à une position fixe, soit sous forme d'ions OH^- et H^+ , soit sous forme de molécules H_2O . Elle fait partie de la composition chimique du minéral. En général, ce type d'eau influence peu le comportement du sol, sauf lorsqu'il est soumis à une température très élevée : Si la température est supérieure à $400^\circ C$.

b) . L'eau adsorbée :

À la surface des grains (surtout dans les particules fins) qui orienté par les forces électrostatique et les forces d'attraction moléculaire, elle une viscosité élevée et ne transmet pas les pressions.

c) . L'eau capillaire :

Que l'on rencontre dans les sols non saturés et que se maintient au contact des particules solides dans les canaux les plus fins du sol, sous l'action des tensions superficielles qui prennent naissance à l'interface eau-air, cette eau malgré la pesanteur ne peut s'écouler librement.

d) . L'eau libre :

Ou l'eau non adsorbée est susceptible de s'écouler. L'eau libre ou l'eau gravifique obéit à la loi de Darcy.

Le principal effet de l'eau libre sur le comportement du sol se manifeste par la pression hydraulique exercée sur le sol. En outre, lorsque l'eau s'écoule, un effet hydrodynamique se traduit en un effort physique sur les particules : certaines particules extrêmement fines peuvent être emportées par le courant d'eau. Enfin, l'eau peut dissoudre certains sels et modifier la composition chimique des minéraux. Ces effets physiques et chimiques peuvent être la cause de certaines instabilités du terrain. Du point de vue de l'interaction hydromécanique, la pression d'eau est un facteur capital pour les relations contraintes déformations d'un sol.

Lorsqu'un sol est soumis à des températures inférieures à 0°C, l'eau non adsorbée est susceptible de geler. La glace ainsi formée peut fournir une cimentation temporaire et, en conséquence, améliorer certains aspects du comportement du sol, par exemple, augmenter sa résistance, diminuer sa perméabilité, etc., Par contre, elle peut détériorer son comportement au dégel.

I-3-3. La phase gazeuse,

Dans un sol non saturé, une partie des vides de l'agrégat est remplie par du gaz, essentiellement de l'air. Dans les sols non saturés, la phase gazeuse est présente dans tout ou partie des pores sous forme d'un mélange d'air, de vapeur d'eau, de gaz carbonique et d'autres gaz. Les sols saturés peuvent aussi contenir du gaz, mais sous forme de bulles ou en dissolution dans l'eau.

I-4. L'ÉCOULEMENT DANS LES SOLS SATURÉ.

Du point de vue physique, les pores du sol ne ressemblent pas à des tubes uniformes et lisses mais très irréguliers, tortueux et interconnectés. L'écoulement à travers les pores est limité par de nombreuses constriction, ou étranglements. En conséquence, la configuration réelle de la géométrie et l'écoulement au sein d'un spécimen de sol typique est très compliquée pour être décrite dans ces détails microscopiques, car la vitesse du fluide varie considérablement d'un point à un autre et même le long d'un même parcours. Pour cette raison, l'écoulement dans les milieux poreux complexes est généralement décrit en termes d'un vecteur de vitesse d'écoulement macroscopique, qui représente la moyenne globale des vitesses microscopiques dans le volume total de sol.

I-5. DEFINITION GENERALE.**I-5-1. Charge hydraulique. [1]**

Considérons un point situé dans un massif saturé siège d'un écoulement permanent. Soit (u) la pression de l'eau en ce point et (z) sa cote par rapport à un repère quelconque. La charge hydraulique en ce point, est par définition :

$$H = \frac{u}{\gamma_w} + \frac{V^2}{2g} + z$$

Avec :

- u : Pression de l'eau.
- ρ_w : Masse volumique de l'eau.
- g : Accélération de la pesanteur.
- V : Vitesse d'écoulement de l'eau.
- z : Cote (altitude) du point considéré, comptée positivement vers le haut à partir d'un niveau de référence donné (convention de l'hydraulique).
- γ_w : Poids volumique de l'eau.

Or les vitesses dans les sols sont toujours faibles rendant négligeable le terme en

$$\frac{V^2}{2g} \simeq 0$$

Donc on obtient

$$H \simeq \frac{u}{\gamma_w} + z$$

I-5-2. Vitesse d'écoulement. [1]

Soit Q le débit d'eau à travers une canalisation de section S . la vitesse apparente v de l'eau est par définition :

$$v = \frac{Q}{S}$$

Cette définition bien que la plus utilisée, donne une vitesse fictive car en réalité l'eau ne circule que dans les pores de surface ($n * S$) (n étant la porosité du sol) d'une part et d'autre part, les trajectoires sont vraisemblablement tortueuses. On définit la vitesse moyenne v' par le rapport :

$$v' = \frac{Q}{n * S}$$

I-5-3. Gradient hydraulique. [1]

Dans un écoulement uniforme et unidirectionnel, le gradient i est par définition le rapport de la différence de charge h à la longueur L du trajet de l'eau dans le sol

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L}$$

I-5-4. Perméabilité.

I-5-4-1. Définition.

C'est une propriété caractéristique du milieu poreux elle désigne la capacité à laisser passer un fluide à s'écouler. Ces écoulement se font par des chemins complexes et tortueuse à travers les pores interconnecté et de différent taille et de forme, cette perméabilité elle est influencé par de nombreuse facteur, principalement sont :

- Forme des pores (la taille et la distribution de ces pores)
- La température influe sur la viscosité par conséquence le comportement du fluide change.

I-5-4-2. Détermination de la perméabilité.

La mesure de la perméabilité se fait par deux types d'essai.

a) . Au laboratoire :

C'est l'application d'un écoulement sur un échantillon du sol et on mesure le débit qui travers le sol saturé à des charge connu et on déduire la perméabilité et à cette occasion on a 2 types d'essai :

- Essai à charge constante : pour les sols de perméabilité grand environ de ($K > 10^{-5}$ m/s) en générale les sols grossie.
- Essai à charge variable : pour les sols de perméabilité petit environ de ($K < 10^{-5}$ m/s) en générale les sols fins.

b) . In situe :

Il existe plusieurs paramètre dans le choix de type d'essai comme le type du sol, type d'ouvrage parmi ses essai on a :

- Essai Lefranc.
- Essai Lugeon.
- Essai Nasperg.
- Essai de pompage.

La perméabilité peut être influencée par de nombreux facteurs :

- Forme des grains
- Grosseur des grains
- Structure des sols
- Porosité
- Indice des vides
- Degré de saturation
- Gradient hydraulique
- Température et caractéristiques du fluide

I-5-5. Milieux homogène.

Un milieu dit homogène quand il représente les mêmes propriétés physiques et mécaniques dans n'importe quel point dans une seule direction donnée.

I-5-6. Milieux isotrope et anisotrope.

Un milieu isotrope il représente les mêmes propriétés mécaniques et physiques dans toutes les directions, dans le cas contraire le milieu est considéré comme *anisotrope*. Concernant la perméabilité elle n'est pas la même dans les différentes directions est par conséquence les fluide ne s'écoule pas avec les mêmes vitesses dans n'importe quelle sens.

I-5-7. Trajectoire de la particule.

C'est les positions successives aux différents instants prise par la particule au cours d'écoulement.

I-5-8. Ligne de courant.

On appelle ligne de courant une couche tangente en chacun de ses points au vecteur de la vitesse. C'est une ligne qu'aucun débit ne peut traverser perpendiculairement. Les lignes de courant permettent de voir où l'eau circule réellement dans le domaine en question.

I-5-9. Ligne équipotentielle.

Ligne équipotentielle c'est une courbe relié les points du milieu qu'ils ont la même valeur de la charge hydraulique.

I-5-10. Ligne équipression.

C'est une courbe où les pressions prennent une valeur constante.

I-6. LA LOI DE DARCY. [3]

La figure I-4 montre une colonne de sol horizontale au travers de laquelle l'eau s'écoule sous un régime permanent de gauche à droite, entre deux réservoirs, l'un surélevé par rapport à l'autre. Le niveau dans ces deux réservoirs étant maintenu constant, les hauteurs piézométriques s'alignent à des niveaux décroissants, dans le sens de l'écoulement, et ils font une droite qui implique qu'il y a une perte de charge pendant l'écoulement.

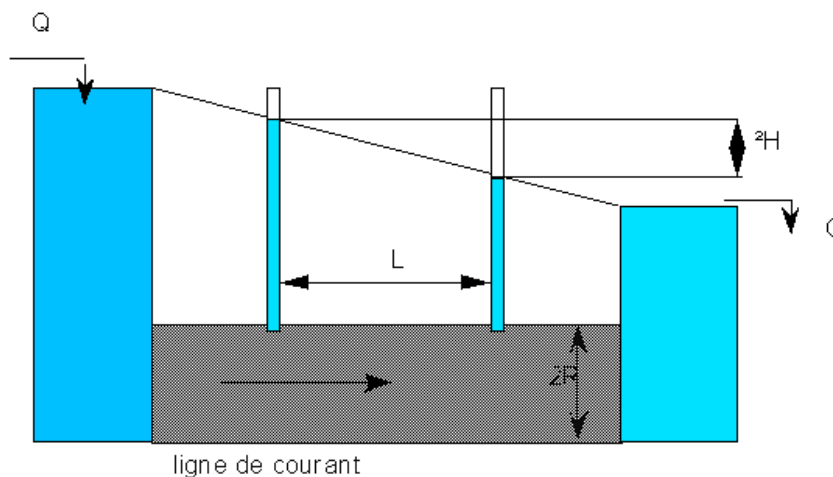


Figure I-4 : schéma représentative d'expérience de Darcy.

L'expérience montre que la vitesse (v), ou le débit d'eau (Q) d'eau écoulé à travers la colonne par unité de surface, est directement proportionnel à la perte de charge hydraulique (ΔH) indiqué par les niveaux, et inversement proportionnel à la longueur de la colonne (L) ce qui permis d'écrire la formule empirique suivante :

$$v = \frac{Q}{A} = K \frac{h_1 - h_2}{L}$$

Le facteur de proportionnalité (K) est généralement appelé la conductivité hydraulique

$$v = -K \cdot \frac{\Delta H}{L} = -K \cdot i$$

Cette équation est connue sous le nom de *loi de Darcy*, du nom de l'ingénieur français **Henry Darcy** qui le premier l'a établi (en 1856) il y a plus d'un siècle au cours de ses

travaux classiques de recherche sur la percolation à travers des filtres de sables pour la ville de Dijon.

I-6-1. Limite de validité de la loi de darcy. [3]

Dans les travaux de but de connaître les paramètres influencés sur la perméabilité (K) le chercheur remarque que la loi commence à suivre un comportement non linéaire et ça pour les vitesses élevées, et par conséquent les trajectoires d'écoulement sont très tortueuses, les écoulements entrent dans le régime turbulent et les forces d'inertie augmentent et par conséquent la perte de charge tendance à prendre un comportement non linéaire est la loi de Darcy qui exprime la relation linéaire entre la vitesse et le gradient hydraulique, devenu non applicable.

Pour que la loi de Darcy soit applicable c'est évident que l'écoulement reste en régime laminaire et de ne pas dépasser le seuil d'apparition de turbulence, il est nécessaire que le nombre de Reynolds (Re) qui mesure l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité soit supérieur à 1.

$$Re = \frac{vD}{\nu}$$

ρ : La masse volumique de l'eau.

v : La vitesse moyenne de l'écoulement.

ν : La viscosité dynamique.

Aussi que la loi de Darcy soit valide, il est nécessaire que la matrice solide est homogène, isotrope et stable, ainsi que le fluide aussi est homogène isotherme et incompressible.

I-6-2. Généralité de la loi Darcy en 3D. [2]

La loi de Darcy telle qu'elle est introduite par la direction donc elle traite que les écoulements en une seule dimension.

$$\vec{v} = -K \cdot \vec{i}$$

La formule précédente c'est l'équation de Darcy généralisée pour les écoulements en volume dans des milieux anisotropes. Avec que

$$\vec{i} = \overrightarrow{Grad(H)} = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

Et le tenseur de perméabilité :

$$K = \begin{bmatrix} K_x & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_y & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_z \end{bmatrix}$$

Et pour les axes de coordonnées se sont les directions principales du tenseur de perméabilité :

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

On peut écrire donc :

$$\begin{aligned} v_x &= -K_x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \\ v_y &= -K_y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \\ v_z &= -K_z \cdot \frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}$$

Chapitre 2 :

Les sols non saturés.

II-1. INTRODUCTION.

Les sols non saturés sont considérés comme des milieux tri-phasiques (solide-liquide-gazeux) et non pas bi-phasique quand ils sont saturés, pores sont partiellement remplis d'air, ou éventuellement de gaz de pétrole, ..., et dans notre travail on considère en général que l'eau représente la phase liquide, tandis que la phase gazeuse est considérée d'air sec ou remplie de vapeur d'eau.

L'interaction gaz-eau-solide rend le comportement mécanique d'un sol non saturé beaucoup plus complexe que celui d'un sol saturé. En outre, la pression d'eau est toujours inférieure à la pression de gaz dans un sol non saturé. Cette différence de pression entre le gaz et l'eau, appelée succion, est à l'origine de certains comportements hydromécaniques particuliers du sol non saturé.

Le comportement hydromécanique d'un sol dépend non seulement de sa nature (composition minéralogique, état de l'eau et du gaz qui y sont présents, etc.) mais aussi, dans une large mesure, de sa microstructure.

Le but de ce chapitre est de faire une synthèse des caractéristiques les plus importantes des sols non saturés afin de disposer d'une base saine pour l'analyse.

II-2. INTERACTION EAU-SOLIDE : L'ADSORPTION. [4]

Concernant les particules de très petite taille, il existe certains atomes et ions libres sur leur surface qui leur rendent dans un champ électrostatique non symétrique. Et par conséquent les particules tendent à attirer des molécules polaires ou des ions venant du milieu là où se trouve afin d'atteindre un équilibre électrique. On appelle cette capacité par la charge surfacique et le phénomène en général est connu sous le nom de l'adsorption. C'est essentiellement cette charge surfacique qui provoque, autour des particules des sols, le phénomène d'adsorption qui influence fortement le comportement hydromécanique des sols argileux.

Les minéraux argileux ont une autre caractéristique importante : une partie de Si et /ou Al (ou Mg) peut être remplacée par certains cations de basse valence. La conséquence directe de cette substitution isomorphe est de créer un déficit de charges positives dans la structure des minéraux. Ce déficit peut être compensé par l'adsorption d'un nombre équivalent de cations (Ca, Mg, K, Na etc...) présents dans la solution. Cette capacité d'échange d'ions est la deuxième cause du phénomène d'adsorption autour des plaquettes d'argile. [4]

Comme il est connu que les grains d'argile sont constitués d'empilement de minéraux argileux qui sont des phyllo-silicates. À cause de la structure de ceux-ci, les grains ainsi

formés sont de forme aplatie. Leurs faces sont généralement chargées négativement. Dans certaines conditions, des charges positives peuvent exister localement.

Les théories les plus couramment utilisés conduisent à représenter les plaquettes d'argile avec des charges négatives sur les grandes faces et des charges positives sur les petites faces (Andrei 1977), ce qui permet de neutraliser la charge globale. Certains ions sont attirés et retenus à proximité immédiate de la plaquette et constituent ainsi une couche d'ions. Les charges négatives sur les faces de la plaquette sont alors équilibrées par ces ions. La concentration de cette couche diminue avec la distance par rapport à la surface de plaquette. De ce fait, on peut distinguer deux couches d'ions. La première est très dense et bien fixée sur la surface : on l'appelle *la couche fixe*. La deuxième est maintenue à une certaine distance : on la nomme *la couche diffuse*. L'ensemble des charges négatives sur les faces de la plaquette et la couche d'ions est connu sous le nom *de double couche électrique*. C'est ainsi qu'on parvient à expliquer la présence, à proximité de la plaquette, d'une couche d'eau adsorbée constituée par une auréole d'ions et de molécules d'eau. Il y a deux raisons pour lesquelles l'eau est adsorbée sur les faces de la plaquette : la première est que la structure de la molécule d'eau est dipolaire (figure II-1a) et, en conséquence, elle peut s'orienter facilement dans un champ électrique et peut être adsorbée par les plaquettes ; la deuxième est qu'elle peut aussi être attirée par d'autres ions présents dans la solution, formant ainsi des ions hydratés qui, à leur tour, sont attirés par les plaquettes.

La figure II-1b représente schématiquement la présence d'une couche d'eau adsorbée autour d'une plaquette. Plus la distance des ions ou dipôles par rapport à la plaquette est petite, plus grandes sont les forces de rétention qui empêchent leurs mouvements. Par conséquent, le mouvement de l'eau adsorbée est plus ou moins restreint. Dans leurs propriétés sont proches de celles d'un solide du point de vue mécanique.

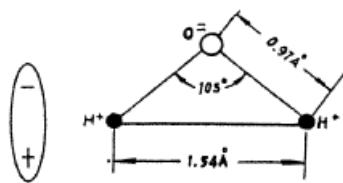


Figure II-1a :
Structure de la molécule d'eau

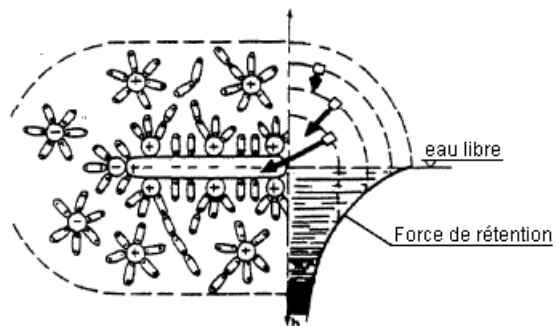


Figure II-1b : Couche d'eau adsorbée
(d'après Andrei, 1977)

L'épaisseur de la couche d'eau dépend de la nature et de la charge électrique des ions. Plus les charges sont grandes, plus l'épaisseur est réduite.

Les propriétés hydromécaniques des sols fins sont fortement influencées par la présence des couches d'eau adsorbée. Le phénomène provoque.

Le phénomène d'adsorption facilite l'établissement de ponts de liaison constitués par les ions et les dipôles d'eau. Ces ponts sont l'origine principale de la cohésion des sols fins (figure II-2), grâce à laquelle ils ont la capacité de résister à des contraintes de traction ou de cisaillement.

La présence de couches d'eau adsorbée peut également influencer la microstructure des sols fins. La modification de l'épaisseur des couches d'eau adsorbée est aussi la cause essentielle du gonflement et du retrait des sols fins soumis à mouillage ou à séchage (figure 2-3).

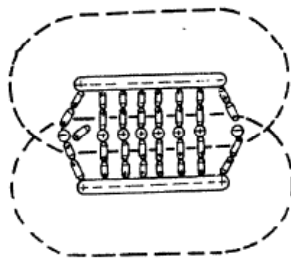


Figure II-2 : Cohésion
(d'après Andrei, 1977)

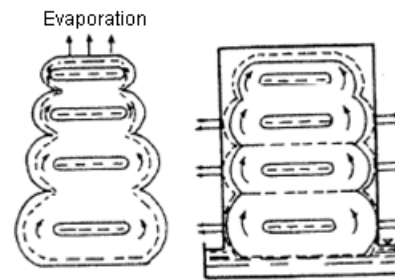
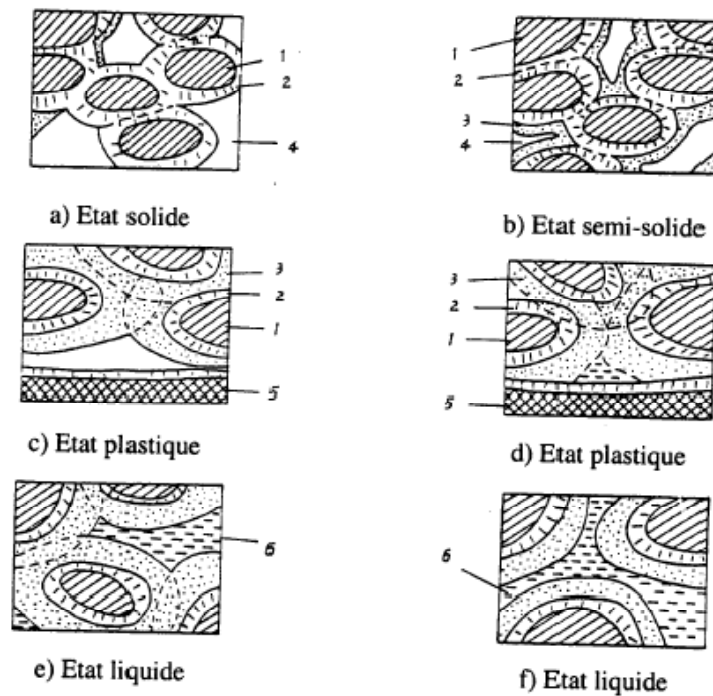


Figure II-3 : Retrait et gonflement
(d'après Andrei, 1977)

D'une manière analogue, on peut expliquer le fait que la consistance d'un sol fin soit conditionnée par la variation de la saturation (et de la teneur en eau) (figure II-4, Tang etc., 1979).

Lorsque la teneur en eau est extrêmement basse, il n'y a que l'eau adsorbée de la couche fixe dans le sol et l'épaisseur de celle-ci est extrêmement fine ; les liaisons constituées par les couches d'eau d'adsorbée communes entre les grains sont extrêmement fortes : le sol se comporte alors comme un solide. Quand la teneur en eau est très grande, les particules sont écartées complètement par l'eau libre, il n'y a plus aucun contact entre les particules, c'est presque une suspension. Le sol ne présente alors aucune résistance et se comporte comme un liquide : c'est l'état liquide. Entre l'état solide et liquide, il y a l'état semi-solide et l'état plastique. Dans l'état semi solide, la teneur en eau est encore faible, mais les couches d'eau adsorbée de la couche diffuse sont présentes et elles sont mises en commun. Les liaisons entre les particules sont encore suffisamment fortes ce qui rend le sol difficilement déformable. Si la teneur en eau continue à augmenter, le sol entre en état plastique.

Au niveau macroscopique. La compressibilité, la résistance au cisaillement, la perméabilité varient selon la consistance qui peut être caractérisée par les limites d'Atterberg. [4]



- 1)- Particules solides (assemblage de plaquettes).
- 2)- Eau adsorbée de la couche fixe.
- 3)- Eau adsorbée de la couche diffuse
- 4)- Air
- 5)- Autres matériaux solides
- 6)- Eau non adsorbée

De [a à f] : la teneur en eau augmente, la consistance du sol varie)

Figure II-4 : Présentation schématique de la consistance d'un sol à différents niveaux de saturation (d'après Tang, 1979) [4]

II-3. INTERACTION GAZ-EAU.

II-3-1. Interface Gaz-Eau : Tension superficielle. [4]

Du point de vue moléculaire dans un fluide quelconque leurs molécules exerces entre eux des forces *d'attraction moléculaire* dont leur résultante est nul sur une molécule situer à l'intérieur du volume de fluide, tandis que dans un point sur l'interface entre deux fluides non miscibles les molécules ne subissent pas les mêmes forces moléculaires qui donnent une résultant n'est pas nul (figure II-5-a) perpendiculaire en chaque point de l'interface et orienté vers l'intérieur du fluide dont les forces d'attraction sont grandes comme l'eau pour l'interface Eau-Air. Pour l'équilibrer, une tension superficielle (σ_{aw}) se produit le long de l'interface (figure II-5b). Elle agit tangentiellement à l'interface. Elle a la dimension d'une force par unité de longueur [N/m] (Fredlund etc., 1993).

Du point de vue macroscopique, l'interface est soumise à une pression différente de ses deux côtés : pression d'air (u_a) d'un côté, pression d'eau u de l'autre. Dans un sol non saturé, la pression d'eau est toujours plus faible que la pression de l'air (si l'air est à pression nulle, l'eau est sous tension). Donc, il faut une force supplémentaire pour équilibrer l'interface. Grâce à la tension superficielle, l'équilibre est assuré.

Considérons une petite portion de l'interface. La résultante des tensions superficielles (σ_{aw}) sur cette petite surface fournit l'effort supplémentaire nécessaire pour l'équilibre de l'interface (figure II-6a). L'interface se comporte comme une membrane souple à cause de la tension superficielle : elle prend une forme concave. On trouve une similitude dans le comportement d'une bulle de savon pour laquelle la pression à l'intérieur est plus grande qu'à l'extérieur. La forme concave de la bulle assure, grâce aux tensions superficielles, une force supplémentaire vers l'intérieur et maintient l'équilibre (figure II-6b) (Chen, 1987).

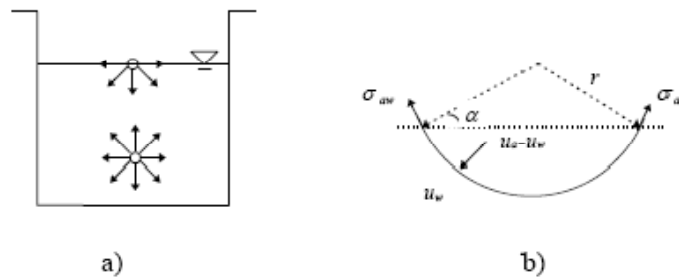


Figure II-5 : Tension superficielle (Fredlund, 1993)

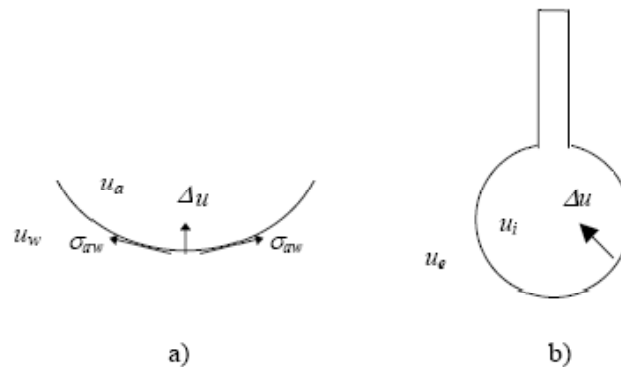


Figure II-6 : sollicitation de l'interface (d'après Chen, 1987)

II-3-2. Humidité relative (Diagramme D'état de l'eau). [4]

Dans la nature, l'état de l'eau varie en fonction de la pression et de la température. Le diagramme de la figure II-7 montre que l'eau peut exister sous 3 états : solide (glace), liquide (eau) et gazeux (vapeur d'eau). Les trois courbes dans le diagramme représentent les états d'équilibre du système. Deux états peuvent coexister en équilibre lorsque les variables d'état se trouvent sur l'une des trois courbes dans le diagramme : l'état solide et l'état liquide peuvent coexister sur la courbe AC (courbe de fusion), les états solide et

gazeux coexistent sur la courbe **AD** (courbe de sublimation), et enfin, lorsque l'état se trouve sur la courbe **AB** (courbe de vaporisation), un équilibre s'établit entre les états liquide et gazeux. On dit alors que le système est en état saturant. L'eau, dans un tel système, s'appelle eau saturante, tandis que la vapeur d'eau s'appelle vapeur d'eau saturante. La pression correspondante s'appelle la pression de la vapeur d'eau saturante que l'on note (u_{v0}). Bien entendu, lorsque la pression et la température se trouvent au point A, les trois états peuvent coexister en équilibre.

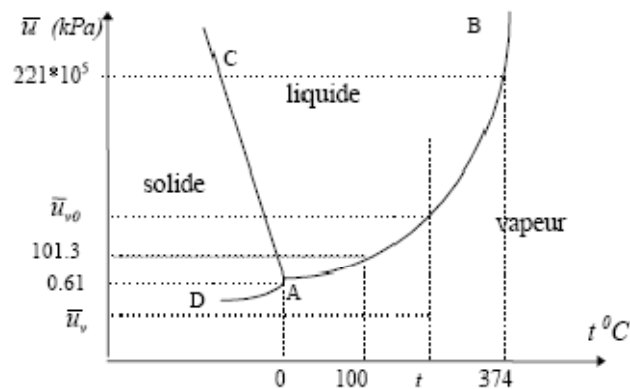


Figure II-7 : Diagramme d'état de l'eau.

Dans la nature, la vapeur d'eau est mélangée à l'air. Mais la vapeur d'eau dans l'air n'est pas toujours en équilibre avec l'eau environnante et dès lors, la pression partielle de la vapeur (u_v) n'est pas nécessairement égale à celle de la vapeur saturante (u_{v0}) à la température correspondante. La quantité de vapeur d'eau dans l'air peut être modifiée soit par condensation, soit par vaporisation. Dès lors, la pression partielle de la vapeur d'eau (u_v) à une température donnée traduit en quelque sorte l'état d'humidité de l'air. C'est ainsi qu'on définit l'humidité relative de l'air par :

$$RH = \frac{u_v}{u_{v0}} (\%) \quad (\text{II.1})$$

Remarquons que la notion d'humidité relative de l'air ainsi définie constitue une mesure relative, alors que la pression de vapeur saturante (u_{v0}) au-dessus d'une surface plane est une pression de référence mesurée dans un système qui ne contient que de l'eau pure.

La présence d'air dans l'atmosphère n'a pas d'effet sur le comportement de la vapeur d'eau d'après la loi de Dalton. Cette loi déclare que la pression d'un mélange de plusieurs gaz est égale à la somme des pressions partielles que chacun des gaz exercerait s'il occupait, seul, la totalité du volume. Si le gaz considéré est un mélange d'air sec et de vapeur d'eau, la loi de Dalton s'écrit :

$$u_g = u_{as} + u_v \quad (\text{II.2})$$

Où (u_g) est la pression de gaz (un mélange d'air sec et de vapeur d'eau), (u_{as}) est la pression partielle de l'air sec.

Autrement dit, le comportement de chacun des gaz dans un mélange est indépendant de celui des autres. Par conséquent, la présence de l'air ne change pas l'état d'équilibre de l'eau (courbe **AB** de la figure II-7).

La pression partielle de la vapeur d'eau dépend de nombreux facteurs physico-chimiques du système qui contient la vapeur et l'eau. On abordera ce sujet plus tar.

II-4. INTERACTIONS AIR-EAU-SOLIDE : CAPILLARITE.

Se produit le long de la ligne de contact au solide à cause de la différence entre les pressions de l'eau (u) et de l'air agissant sur l'interface. Physiquement, cette tension superficielle se traduit par le phénomène de capillarité qu'illustre la figure II-8 : [5]

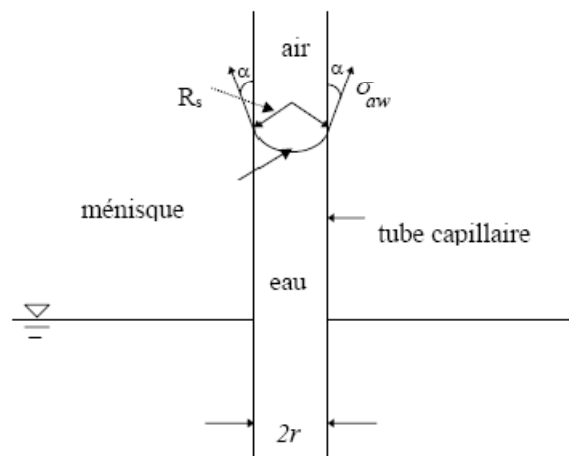


Figure II-8 : Modèle physique du phénomène d'effet capillaire.

Un tube de rayon (r) est plongé dans un bassin d'eau. Sous l'effet de la tension superficielle, l'eau monte dans le tube et a tendance à mouiller la paroi du tube. Ainsi, l'interface Air-Eau dans le tube prend une courbure et forme un ménisque. La différence entre la pression de l'air et celle de l'eau est généralement appelée pression capillaire. La relation entre la tension superficielle et la pression capillaire peut être décrite par la loi de Jurin (simplification de la loi de Laplace basée sur l'hypothèse que l'interface est de forme sphérique) (figure II-8) :

$$u_a - u_w = \frac{2\sigma_{aw}}{R_s} = \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha}{r} \quad (\text{II.3.a})$$

(R_s) est le rayon de courbure du ménisque et (α) l'angle de raccordement (ou de contact) du ménisque avec la surface du solide. L'angle de contact (α) est égal à zéro lorsque l'eau est pure. Dans ce cas, le ménisque forme une demi sphère parfaite, le rayon de courbure du ménisque (R_s) est égal à celui du tube (r) , on a alors :

$$u_a - u_w = \frac{2\sigma_{aw}}{r} \quad (\text{II.3.b})$$

De manière plus générale, l'angle de contact est l'angle de l'interface de contact des deux fluides non miscibles avec la surface du solide. Il dépend des caractéristiques physico-chimiques et de la composition chimique des fluides et du solide, de la mouillabilité, etc. Dès lors, dans un sol non saturé, la pression capillaire n'est pas seulement influencée par les fluides, mais aussi par les caractéristiques physico-chimiques du sol lui-même.

II-5. SUCCION.

La notion de la succion a été initialement introduite par les agronomes. Dans le domaine de la mécanique des sols, elle est utilisée de plus en plus pour l'étude des sols non saturés. La succion est une mesure de l'affinité entre le sol et l'eau. En général, plus le sol est sec, plus la succion est grande. Pour des raisons pratiques, on considère deux contributions : la succion matricielle et la succion osmotique. La somme des deux est appelée la succion totale.

II-5-1. Succion matricielle. [5]

En absence de contrainte mécanique, le volume du sol peut varier si l'on soumet l'eau contenue dans l'échantillon à un état de tension (l'air restant à la pression atmosphérique). Plus généralement, c'est la différence entre les pressions de l'air et de l'eau ou la pression capillaire, qui est le paramètre déterminant des mouvements de fluides dans les milieux poreux. Comme décrit ci avant, à l'échelle d'un pore, cette différence de pression se traduit par l'existence d'un ménisque entre l'air et l'eau. Elle est caractérisée par la loi de Jurin (2.3). Pour les agronomes, la succion matricielle est, en fait, identique à la pression capillaire lorsque les contraintes externes sont nulles. Elle est notée (s) . Donc on a :

$$s = u_a - u_w = \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha}{r} \quad (\text{II.4})$$

Cette définition a été généralisée à n'importe quel état de contrainte mécanique. Aujourd'hui, en Mécanique des Sols, les deux notions de pression capillaire et de succion sont équivalentes.

Il est à noter que la notion de succion ou pression capillaire est une notion globale. Elle est définie dans un domaine de dimensions très supérieures aux dimensions moléculaires, qui

intègre à la fois les propriétés capillaires du milieu (caractérisées par la dimension des pores) et les propriétés d'adsorption de l'argile par l'intermédiaire de l'angle de contact Solide-Liquide-Air. En effet, compte tenu de l'existence d'une couche diffuse d'eau adsorbée au voisinage des particules d'argile, l'angle de contact doit être considéré comme un paramètre macroscopique (Biarez, 1987). [4]

II-5-2. Succion osmotique. [4]

La succion osmotique (π) est identique à *la pression osmotique*. Elle est créée par la force liée à la répulsion osmotique lorsque des sels solubles sont présents dans l'eau. Elle dépend de leur concentration. On a :

$$\pi = -\frac{\rho_w RT}{\omega_v} \ln x_w \quad (\text{II.5})$$

Avec :

- R : La constante des gaz parfaits ($R = 8,31432 \text{ (J/mol K)}$).
- T : La température absolue ($^{\circ}\text{K}$).
- ρ_w : La masse volumique de l'eau (kg/m^3).
- ω_v : La masse molaire de la vapeur d'eau ($18,016 \text{ g/mol}$).
- x_w : La fraction molaire d'eau dans la solution.

La succion osmotique existe donc dans les sols lorsque la phase liquide est une solution saline. En outre, dans les sols fins, les phénomènes d'adsorption sont liés à la succion osmotique puisqu'ils sont contrôlés par la concentration des ions présents dans la solution.

II-5-3. Succion totale.

La succion dans un milieu non saturé représente, en fait, une des composantes de l'énergie libre de l'eau interstitielle. Elle peut être exprimée en fonction de la pression partielle de la vapeur d'eau. La relation correspondante est donnée par la loi de Kelvin :

$$\Psi = -\frac{\rho_w RT}{\omega_v} \ln \left(\frac{u_v}{u_{v0}} \right) = -\frac{\rho_w RT}{\omega_v} \ln(RH) \quad (\text{II.6})$$

Avec :

- Ψ : La succion totale.
- u_v : La pression partielle de la vapeur d'eau.
- u_{v0} : La pression de la vapeur d'eau saturante sur une surface plane d'eau pure.

En vertu de la loi de Kelvin, la succion représente l'énergie libre dans un sol non-saturé sans contrainte extérieure lorsque l'humidité relative de l'air est inférieure à 100%. Si l'humidité relative de l'air atteint 100%, la succion s'annule. La figure II-9 ci-dessous montre que la succion à 20°C peut déjà atteindre une valeur relativement grande lorsque l'humidité relative est inférieure ou égale à 90%. Par contre, en pratique, la succion maximale à cette température ne dépasse pas 1 GPa.

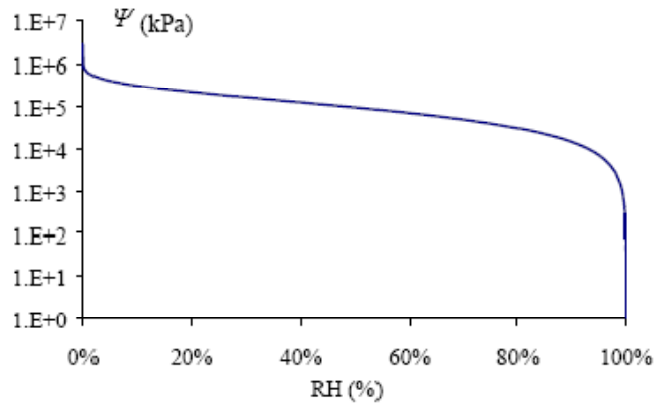


Figure II-9 : Succion (Ψ) en fonction de l'humidité relative (RH) de l'air (à 20 °C).

Dans la nature, la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air résulte de la totalité des facteurs environnants. Alors la succion ainsi définie est évidemment une mesure globale et est appelée *la succion totale*.

Les facteurs influençant la pression partielle de la vapeur d'eau sont nombreux, les deux principaux à température constante sont la géométrie de la surface d'eau (effet capillaire) et la composition chimique de l'eau (l'effet osmotique) (figure II-10). [5]

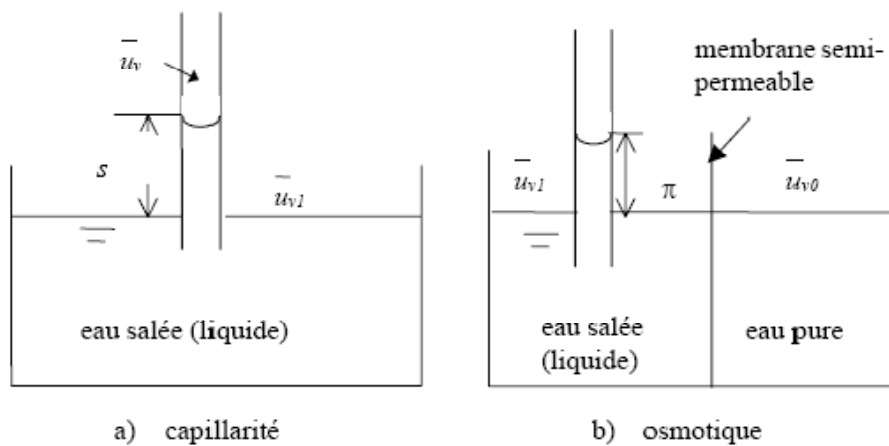


Figure II-10 : Les composantes de la succion totale ($\Psi = s + \pi$).

II-6. EFFETS DE LA SUCCION SUR LES PARTICULES SOLIDES.

Dans un sol non saturé, on peut admettre que les pores jouent un rôle semblable aux tubes capillaires. Les tensions superficielles dues aux ménisques trouvent une réaction sur les particules solides (figure II-11). Ces réactions engendrent certaines contraintes supplémentaires sur le squelette du sol. Elles modifient le champ de déformations et le comportement mécanique en général.

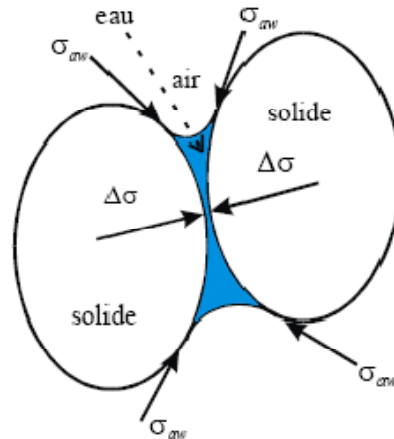


Figure II-11 : Effets de la succion sur les grains du sol.

II-7. ASPECTS HYDRIQUES FONDAMENTAUX DES SOLS NON SATURÉS.

Les aspects hydriques dans un sol non saturé sont beaucoup plus compliqués que dans un sol saturé, à savoir :

- Le coefficient de perméabilité dépend fortement de la saturation,
- La saturation varie considérablement lorsque la succion varie. Par conséquent, le problème hydraulique dans un sol non saturé est fortement non linéaire.

II-7-1. Perméabilité à l'eau.

Dans un sol saturé, le coefficient de perméabilité est essentiellement fonction de l'indice des vides et de la distribution des pores. Dans une analyse d'écoulement transitoire, il est souvent supposé être constant. Mais, dans un sol non saturé, le coefficient de perméabilité n'est pas constant, il varie en fonction de la combinaison de l'indice des vides et de la saturation. Physiquement, au fur et à mesure que le sol se déshydrate, l'air occupe de plus en plus le volume des pores de sorte que le trajet de l'eau devient de plus en plus étroit et tortueux. Par conséquent, la perméabilité diminue fortement lorsque la saturation diminue. Cette dernière est fortement influencée par la variation de la succion, mais peu influencée

par la variation de la contrainte nette. L'effet de la variation de l'indice des vides sur le coefficient de perméabilité est faible par rapport à l'effet de la saturation. L'effet de la contrainte nette sur la saturation est secondaire par rapport à l'effet de la succion. Dès lors, pour l'analyse d'écoulements transitoires dans un sol non saturé, le coefficient de perméabilité est souvent exprimé soit en fonction de la saturation qui est liée à la succion, soit directement en fonction de la succion elle-même.

En conséquence, la loi d'écoulement pour un sol saturé, loi de Darcy, a été généralisée à un milieu non saturé comme suit :

$$\mathbf{v}_w = -K_w(s)\nabla h_w \quad (\text{II.7})$$

Avec :

- v_w : La vitesse de Darcy dans un sol non saturé.
- $K_w(s)$: La perméabilité du sol non saturé.
- h_w : La charge hydraulique totale.
- ω_v : La masse molaire de la vapeur d'eau (**18,016 g/mol**).
- x_w : La fraction molaire d'eau dans la solution.

La figure II-12 montre schématiquement la variation de la perméabilité dans un sol non saturé.

Diverses lois ont été proposées pour décrire les variations de la perméabilité. Quelques équations fréquemment utilisées sont données au tableau II-1 : [5]

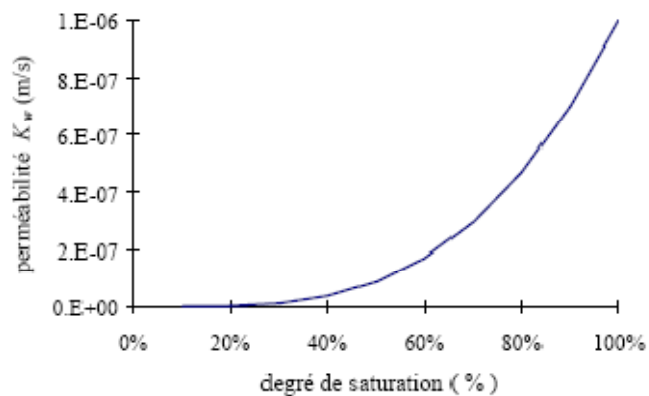


Figure II-12 : Perméabilité (K_w) d'un sol non saturé.

Auteurs	Equations
Imray (1954)	$\left\{ \begin{aligned} K_w &= K_{w0} \left(\frac{S_{rw} - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right)^3 \\ S_{ru} &\text{ est la saturation résiduelle} \end{aligned} \right.$
Gardner (1958)	$K_w = \frac{K_{w0}}{1 + (a * s)^b}$ <p>K_{w0} est la perméabilité en état saturé a, b sont des paramètres du sol</p>
Scott (1963)	$\left\{ \begin{aligned} K_w &= K_{w0} (1 - n(1 - S_{rw})) \\ n &\text{ est la porosité} \end{aligned} \right.$
Brooks et Corey (1966)	$\left\{ \begin{aligned} K_w &= K_{w0} & si & s \leq s_b \\ K_w &= K_{w0} \left(\frac{s}{s_b} \right)^\eta & si & s > s_b \end{aligned} \right.$ <p>s_b, η sont des paramètres</p>

Tableau II-1 : Quelques lois de perméabilité (K_w) en fonction de la succion (s) ou de la saturation (S_{rw}).

II-7-2. Courbes de rétention d'eau

Pour un sol donné, des variations du degré de saturation vont entraîner des variations de succion. On appelle courbe de rétention d'eau la courbe donnant la succion en fonction du degré de saturation (ou de la teneur en eau).

La figure II-13 montre une courbe typique pour un sol en cours de séchage. Le point (C) indique une valeur de succion critique (Cs). Si l'on impose une succion inférieure à celle-ci, on observe qu'il n'y a presque pas d'eau qui sort du sol. Il n'y a pas d'air qui pénètre dans le sol avant que la succion, n'atteigne la succion critique. Dès que la succion dépasse cette valeur critique, la saturation diminue. Cette valeur critique est en fait une mesure de la taille maximale des pores d'un sol, car ce sont les plus grands pores qui drainent d'abord l'eau. Cette valeur critique de la succion est souvent appelée pression d'entrée d'air. Si le séchage continu, on observe qu'une certaine quantité d'eau reste dans le sol même si la succion est très grande. Cette eau reste dans le sol sous forme de ménisques isolés ou de couches immobiles adsorbées sur les particules de sol. L'écoulement d'eau est tellement difficile que l'on n'arrive pas à extraire cette quantité d'eau. Aussi l'appelle-t-on teneur en eau résiduelle et la saturation correspondante s'appelle la saturation résiduelle notée.

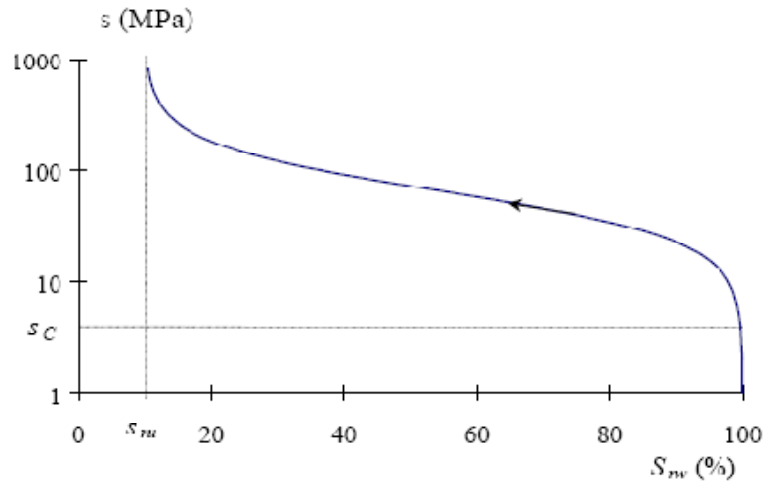


Figure II-13 : Courbe de rétention d’eau d’un sol non saturé en cours de séchage.

La courbe de rétention d’eau varie selon les types de sols. Plus le sol est fin, plus la pression d’entrée d’air est grande et plus les variations de succion sont importantes. Pour une argile, la succion peut atteindre des valeurs très importantes. Ceci est lié, d’une part, à l’adsorption qui crée une succion osmotique et, d’autre part, à la faible dimension des particules d’argile. Les pores sont alors plus petits, les rayons de courbure des ménisques plus faibles et, d’après la loi de Jurin (II-3), la succion peut atteindre des valeurs plus élevées. La teneur en eau résiduelle d’une argile est souvent plus grande que celle d’un sable. Cela est lié essentiellement aux phénomènes d’adsorption, la couche d’eau adsorbée étant plus difficile à extraire et la surface spécifique plus grande. [4]

Diverses lois ont été proposées pour décrire la courbe de rétention d’eau (tableau II-2).

Auteurs	équations
Vauclin et al (1976)	$S_{rw} = S_{ru} + \frac{(S_{r0} - S_{ru})A}{A + (C * s)^B}$ <p>A, B, C sont des paramètres</p>
Van Genuchten (1980)	$S_{rw} = S_{ru} + \frac{S_{r0} - S_{ru}}{(1 + (\alpha * s)^\beta)^\delta}$ <p>$\delta = 1 - 1/\beta$ S_{r0} est la saturation naturelle α, β sont des paramètres</p>

Tableau II-2 : Quelques lois de saturation (S_{rw}) en fonction de la succion (s).

II-7-3. Phénomène d'hystérésis.

Si l'on trace la courbe de rétention d'eau lors de cycles de dessiccation-humidification (séchage-mouillage), une caractéristique fondamentale du comportement hydraulique des milieux poreux non saturés est l'hystérésis des courbes de perméabilité ($K_w(s)$) et de teneur en eau volumique ($\theta_w(s)$) en fonction de la succion. La figure II-14 en donne un exemple.

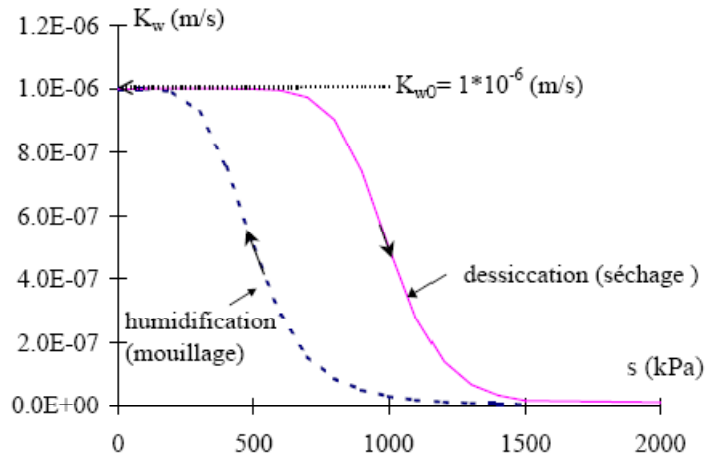


Figure II-14 : Hystérésis de ($K_w(s)$).

L'origine de l'hystérésis peut être illustrée par une goutte d'eau glissant sur une vitre (figure II-15). La forme dissymétrique de la goutte résulte du fait que la pression capillaire est différente suivant que l'eau pousse l'air (point bas) ou que l'air pousse l'eau (point haut), car l'angle de contact est différent dans ces deux cas.

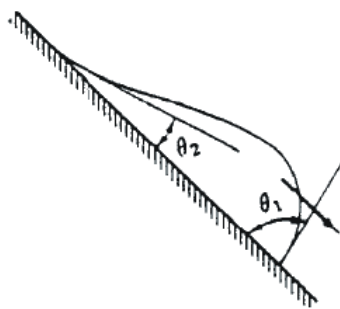


Figure II-15 : Manifestation physique de l'hystérésis (Bear et Verruijt, 1987).
(Expérience de la goutte d'eau).

Ces phénomènes d'hystérésis ont été éclairés par Biarez et Verruijt(1987) en considérant un modèle de sol composé de tubes capillaires rigides identiques, parallèles, et placés

verticalement. Si l'échantillon de sol est suffisamment haut par rapport à la remontée capillaire, le niveau d'eau s'établira à une hauteur donnée par la loi de Jurin :

$$h_{max} = \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha}{\gamma_w r} \quad (\text{II.8})$$

Où (α) est l'angle de contact, (r) le rayon du tube capillaire et (γ_w) le poids volumique de l'eau.

Si cette hauteur (h_{max}) est supérieure à la hauteur (h) de l'échantillon, l'équilibre sera obtenu par un ajustement de l'angle de contact, qui prendra une valeur (α_1) telle que :

$$h = \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha_1}{\gamma_w r} \Rightarrow s = \gamma_w h \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha_1}{r} \quad (\text{II.9})$$

Par conséquent, une augmentation de la succion ne se traduira pas immédiatement par un séchage, mais d'abord par une variation de l'angle de contact de (α) à (α_1) , avant que l'eau ne se mette en mouvement. En fait, l'angle de contact correspondant à un déplacement relatif des phases l'une par rapport à l'autre n'est pas le même suivant que l'eau pousse l'air ou que l'air pousse l'eau : lors du séchage, qui correspond à un mouvement relatif provoqué par l'air qui pousse l'eau, l'angle de contact (α_s) est inférieur à l'angle de mouillage (α_M) , correspondant au mouvement relatif provoqué par l'eau qui pousse l'air.

En conséquence, la succion en séchage (s_s) est :

$$s_s = \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha_s}{r} \quad (\text{II.10})$$

En mouillage, la succion correspondante (s_M) est :

$$s_M = \frac{2\sigma_{aw} \cos \alpha_M}{r} \quad (\text{II.11})$$

On trouve bien que la succion est différente suivant le chemin de drainage ou d'humidification, à savoir :

$$(s_s > s_M) \text{ car } (\alpha_s < \alpha_M) \quad (\text{II.12})$$

Chapitre 3 :

Résolution de l'équation de Richard par la
méthode des éléments finis.

CHAPITRE

(III)

Écoulement dans les milieux poreux non saturé.

Résolution de l'équation de Richard par la méthode des éléments finis.

III-1. INTRODUCTION.

A la science de l'ingénieur, on modélise les phénomènes physiques par des systèmes d'équation aux dérivées partielles qu'il faut résoudre après pour bien comprendre ou estimé le comportement de ces phénomènes, mais le problème que leur résolution d'une manière exacte est impossible. Avant les ingénieurs ont été soit simplifier ou remplacer ces équation par d'autre plus simple à manipuler mais pour des cas spéciaux et limité, ou des abaques assemblant des résultats expérimentale effectuer préalable mais tous ces méthode ont ses limites notamment pour les problèmes exceptionnel et complexes a cette raison les spécialise utilise actuellement les méthodes numérique, ce type de méthode offre des solution d'une manière approché mais suffisante pour être exploité par les ingénieure.

Parmi ces méthodes on a *la méthode des différences finies* et *la méthode des éléments finie*, la méthode des différences finies a des limites dans l'analyse pour les problèmes de géométrie irrégulier, elle a subit des améliorations pour pouvoir dépasser le problème de la géométrie dans la méthode des volumes finis.

En revanche la méthode des éléments ses premier application ont été orienté vers la résolution des équations en élasticité, mais il est très vite apparu que la méthode puisse aussi être utilisé pour de nombreuse problème physique, comme les écoulements dans les milieux poreux, cette méthode peut prendre en considération plusieurs problème (anisotropie, hétérogénéité, non linéarité,...), elle adapte bien aux géométries complexe, et permet la prise en compte de divers condition aux limite.

III-2. PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

La méthode des éléments finis elle base sur les étapes suivantes :

- 1) : Transformation d'équation aux dérivées partielles en une forme intégrale par les méthodes Résidu Pondéré ou Formulation Variationnelle.
- 2) : Discrétiser le domaine en sous domaine de forme simple appelé éléments finis
- 3) : Calculer les valeurs d'intégrale aux nœuds.
- 4) : Déterminer les matrices élémentaires pour chaque élément.
- 5) : Assemblage les matrices pour former une matrice globale de tout le système
- 6) : Introduction des conditions aux limites.
- 7) : Résolution du système d'équation globale.

Dans ce chapitre nous allons montrer le passage d'une équation aux dérivés partiels à un système d'équation algébrique facile à résoudre à l'aide de la méthode des éléments finis, en commençant par la démonstration de l'équation qui décrit le système physique.

III-3. MISE EN EQUATION DU PROBLEME D'ECOULEMENT.

III-3-1. Conservation de la masse. [5]

Dans un volume élémentaire, par unité de temps, la variation de volume d'eau est égale à la différence entre les volumes d'eau entrant et sortant (Figure III-1).

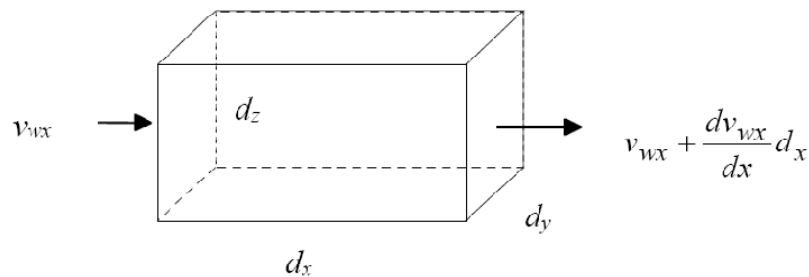


Figure III-1 : Ecoulement à travers un volume élémentaire de sol.

Ainsi, on obtient l'équation de continuité :

$$-\nabla v_w = \frac{1}{V_T} \frac{\partial V_w}{\partial t} \quad (\text{III-1})$$

Avec :

- $V_T = d_x d_y d_z$: le volume total de l'élément
- v_w : la vitesse d'écoulement (débit par unité de surface du sol)
- V_w : le volume d'eau
- $\frac{\partial V_w}{\partial t}$: le volume d'eau emmagasiné dans l'élément par unité de temps

III-3-2. Loi de Darcy généralisée.

Dans un sol saturé, l'écoulement est dû au gradient de la charge hydraulique totale. La vitesse d'écoulement est donnée par la loi de Darcy :

$$\mathbf{v}_w = -K_w \nabla h_w \quad (\text{III-2})$$

avec :

K_w : le coefficient de perméabilité à l'eau

h_w : la charge hydraulique totale (potentiel de l'eau)

Pour un sol saturé, le coefficient de perméabilité (K_w) est supposé constant, et ceci est vérifié dans la plupart des cas.

Dans un sol non saturé, l'écoulement est également dû au gradient de la charge hydraulique totale.

Dans les deux cas, l'eau s'écoule d'un point de haute charge hydraulique vers un point de basse charge hydraulique, que la pression d'eau soit positive (dans un sol saturé) ou négative (dans un sol non saturé).

La loi de Darcy est aussi valable pour décrire l'écoulement dans un sol non saturé. Cependant, le coefficient de perméabilité est fortement dépendant de la saturation et cette dernière varie considérablement lorsque la succion varie. Par conséquent, le coefficient de perméabilité varie en fonction de la succion.

C'est donc une loi de Darcy généralisée qui s'applique aux sols non saturés :

$$\mathbf{v}_w = -K_w(s) \nabla h_w \quad (\text{III-3})$$

Avec le coefficient de perméabilité ($K_w(s)$) variable en fonction de la succion (s) ou de la saturation (S_{rw}).

III-3-3. Equation de Richards.

En combinant l'équation de continuité et la loi de Darcy généralisée, on obtient l'équation de Richards gouvernant les écoulements dans les sols non saturés :

$$c(s) \frac{\partial h_w}{\partial t} = \nabla(K_w(s) \nabla h_w) \quad (\text{III-4})$$

avec:

$$c(s) = \frac{\partial \theta_w}{\partial h_w} \quad \text{le coefficient d'emmagasinement}$$

$$\theta_w = n S_{rw} \quad \text{la teneur en eau volumique}$$

$$n \quad \text{la porosité}$$

$$S_{rw} \quad \text{le degré de saturation}$$

On remarque que le coefficient d'emmagasinement et le coefficient de perméabilité sont exprimés en fonction de la succion.

III-4. CONDITION AUX LIMITES.

Avant de pouvoir étudier une équation aux dérivé partielle qui décrit un système physique données on doit définir ses conditions aux limites pour trouver la solution unique qui satisfait à la fois l'équation et les conditions aux limites.

III-4-1. Condition de Dirichlet.

Une condition aux limites de Dirichlet est imposée à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution (u_w) doit vérifier sur les frontières (limites) du domaine.

III-4-2. Condition de Neumann.

Une condition aux limites de Neumann est imposée à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine.

III-4-3. Différent condition aux limites.

a) . La surface filtrante. [6]

C'est une surface en contact avec une masse d'eau libre. Les pertes de charge sont négligeables, la charge hydraulique (u_w) est constante. Les surfaces filtrantes sont des surfaces équipotentiels.

b) . La surface imperméable. [6]

Aucun débit ne la traverse, la composant de la vitesse de décharge selon la normale (\vec{n}) à la surface imperméable est nulle : le gradient hydraulique transversal est nul.

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, le dérivé normal est nulle (Condition de Neumann)

c) . La surface libre. [6]

Le débit qui la traverse est nul ; le gradient hydraulique transversal est nul : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$

C'est une ligne de courant. Elle n'est soumise qu'à la pression atmosphérique, en négligeant l'action de la capillarité $h = z$

On a donc double condition $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ et $h = z$.

L'écoulement limité dans sa partie supérieur par une surface libre, est dite écoulement à surface libre.

III-5. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION.

L'équation de Richards (Equation III.4) est une équation aux dérivées partielles non linéaire de par la nature des fonctions caractéristiques des sols. Ce type d'équation n'a pas de solution analytique sauf dans des cas extrêmement simples. Dans la plupart des cas, il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour la résolution. Depuis le début des années 1970, un grand nombre de travaux ont été réalisés sur la résolution numérique de l'équation de Richards et de nombreuses méthodes ont été implémentées. Les différences finies, les éléments finis classiques [Neuman, 1973], les éléments finis mixtes hybrides [Mosé et al, 1994] [Le Potier et al, 1998] et les volumes finis sont autant de formulations numériques existantes pour la résolution. Les méthodes de Picard et de Newton sont deux algorithmes de résolution du problème très souvent utilisés [Paniconi et Putti, 1994]. Les travaux de [Freeze, 1972a, Freeze, 1972b] [Celia et al, 1990] [Huyakorn et al, 1986] [Therrien et Sudicky, 1996] font référence dans le domaine de la modélisation des écoulements (saturés/non saturés). [5]

III-6. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENT FINIS.**III-6-1. Formulation intégrale : (Résidu pondéré).**

Au but de passer d'une équation aux dérivés partiels à une forme intégrale dite forte deux méthodes sont mise en service, la méthode de variation du fonctionnel et la méthode des résidus pondérés dont laquelle sera utilisé dans notre travail. [7]

a) . Principe.

Soit un système physique décrive par le système d'équation aux dérivés partiels suivant :

$$L(\mathbf{u}) - f_{\Omega} = \mathbf{0} \quad \text{Sur le domaine } \Omega \quad \text{(III-5.a)}$$

$$B(\mathbf{u}) - f_{\Gamma} = \mathbf{0} \quad \text{Sur la frontière } \Gamma \quad \text{(III-5.b)}$$

Avec : **L** et **B** sont des opérateurs différentiels.

f_{Ω} et f_{Γ} sont des fonctions connues appelé sollicitation.

\mathbf{u} : est la fonction inconnue, dite solution ou variable.

On appel résidus la quantité $R(x)$ tel que :

$$R(x) = L(\mathbf{u}) - f_{\Omega} \quad \text{(III-6)}$$

Ce résidu s'annule quand $\mathbf{u}(x)$ est une solution du système d'équation (III-5).

L'objectif de la méthode des résidus pondérés consiste à trouver des fonctions $\mathbf{u}(x)$ qui annulent la formule intégrale : [10]

$$W(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \{ R(\mathbf{u}) \} d\Omega = \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \{ L(\mathbf{u}) - f_{\Omega} \} d\Omega \quad \text{(III-7)}$$

Avec Ψ sont les fonctions de pondération.

b) . Application :

Application sur l'équation de Richard, à partir de l'équation (III-6) on écrit l'expression de résidu :

$$R(h) = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(u_w) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(u_w) * \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{(III-8)}$$

Donc l'équation (III-7) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[k(u_w) * \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(u_w) * \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] d\Omega = 0 \quad (\text{III-9})$$

III-6-2. Détermination des fonctions de pondération.

La méthode de résidu pondéré consiste à trouver les fonctions de pondération qui résulte un résidu minimal pour la solution approché $u(x)$. *La méthode de GALERKIN* propose de prendre les fonctions de forme comme fonction de pondération. [7]

$$\langle \Psi \rangle = \langle N \rangle \quad (\text{III-10})$$

III-6-3. Forme intégrale faible : (Intégration par partie).

Nous allons intégrer la formule pour affaiblir l'ordre de dérivé de la formule et pour faire apparaitre les conditions aux limites celle de Neumann, pour cela on utilise l'intégration par partie on utilise la formule (III-11) : [8]

$$\int f g' = f g - \int f' g \quad (\text{III-11})$$

a) . Application :

Selon X :

$$\int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) \left[\frac{\partial}{\partial X} \left[k(u_w) \frac{\partial h}{\partial X} \right] \right] d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left[\Psi(X, Z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial X} \right] - k(u_w) \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} \right] d\Omega^e \quad (\text{III-12a})$$

Selon Z :

$$\int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left[k(u_w) \frac{\partial h}{\partial Z} \right] \right] d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left[\Psi(X, Z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial Z} \right] - k(u_w) \frac{\partial h}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} \right] d\Omega^e \quad (\text{III-12b})$$

L'équation (III-9) devienne :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi(x, z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial x} \right] d\Omega^e - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial x} d\Omega^e \\
& + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Psi(x, z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial z} \right] d\Omega^e - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial z} d\Omega^e \\
& - \int_{\Omega^e} \Psi(x, z) \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega^e = 0
\end{aligned} \tag{III-13}$$

Sachant que : $\theta = n * S_r$

D'après le théorème de divergence de GREEN-GAUSS appliqué avec un vecteur normal au contour de l'élément pour avoir : [8]

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi(x, z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial x} \right] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Psi(x, z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial z} \right] d\Omega^e = \oint_{\Gamma} \Psi(x, z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial \eta} d\Gamma \tag{III-14}$$

On aura alors une nouvelle expression de l'équation (III-12).

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \Psi(X, Z) k(u_w) \frac{\partial h}{\partial \eta} d\Gamma - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial h}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} d\Omega^e \\
& - \int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t} d\Omega^e = 0
\end{aligned} \tag{III-15}$$

Tel que : $\lambda = k(u_w) * \frac{\partial h}{\partial \eta}$

λ : C'est la densité du flux.

Donc l'équation (III-15) devienne :

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \Psi(X, Z) \lambda d\Gamma - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial h}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} d\Omega^e \\
& - \int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t} d\Omega^e = 0
\end{aligned} \tag{III-16}$$

III-6-4. Notion d'élément finie.

L'approximation par éléments finis de la solution demande le choix des fonctions d'interpolation et de pondération les mieux adapté pour minimiser l'erreur entre la solution trouvé et la solution exacte, la méthode des éléments finis nous donne des solutions approché que aux nœuds et on peut calculer la pression interstitiel au n'importe quel point du milieu discrétisé selon la formule d'interpolation suivant : [9]

$$U_w = \sum_{i=1}^P N_i \cdot U_i \quad (\text{III-17})$$

Avec :

- P : Nombre de nœuds par élément.
- N_i : Fonction d'interpolation de nœud (i).
- U_i : Valeur de la fonction solution au nœud d'interpolation (i) de l'élément.

Après les dérivés partiels de l'équation de Bernoulli :

Selon X :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\gamma_w} * \frac{\partial u_w}{\partial x} \quad (\text{III-18a})$$

Selon Z :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w} * \frac{\partial u_w}{\partial z} + 1 \quad (\text{III-18b})$$

On remplace les résultats précédents dans l'équation (III-16) :

$$\oint_{\Gamma} \Psi(X, Z) \lambda d\Gamma - \int_{\Omega^e} \frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} u_w \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} u_w \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega^e - n \int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) \frac{\partial S_r}{\partial u_w} N_s \frac{\partial u_w}{\partial t} d\Omega^e = 0 \quad (\text{III-19})$$

Cette équation correspond à un seul élément, on écrit l'équation pour M élément c'est-à-dire en forme matriciel :

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} \frac{\partial N_r}{\partial X} + \frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} \frac{\partial N_r}{\partial Z} \right) u_w d\Omega^e + n \int_{\Omega^e} N_r \frac{\partial S_r}{\partial u_w} N_s \frac{\partial u_w}{\partial t} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega^e - \oint_{\Gamma} N_r \lambda d\Gamma = 0 \quad (\text{III-20})$$

Sous la forme d'une équation différentielle de premier ordre : [10]

$$([K] * \{U\}) + ([C] * \{\dot{U}\}) + \{J\} = 0 \quad (\text{III-21})$$

[10]

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} \frac{\partial N_r}{\partial X} + \frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} \frac{\partial N_r}{\partial Z} \right) d\Omega^e \quad (\text{III-22a})$$

$$[C]^e = n \int_{\Omega^e} N_r \frac{\partial S_r}{\partial u_w} N_s d\Omega^e \quad (\text{III-22b})$$

$$\{J\}^e = \int_{\Omega^e} k(u_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega^e - \oint_{\Gamma} N_r \lambda d\Gamma \quad (\text{III-22c})$$

III-6-5. Calcul sur un élément de référence. [9]

La transformation d'une intégrale d'un élément réel à un élément de référence se fait par.

$$\int_{\Omega} f(x, z) dx dz = \int_{\Omega'} f(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta \quad (\text{III-23})$$

Où les bornes d'intégral seront :

$$\int_{\Omega} f(x, z) dx dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta \quad (\text{III-24})$$

Où : $\det(J)$: déterminant de la matrice JACOBIENNE (noté [J]).

Cette dernière permet d'écrire les dérivées par rapport à (x, y) à d'autres par rapport à (ξ, η).

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{III-25})$$

Ou encore :

$$\{ \partial_{\xi} \} = [J] * \{ \partial_X \} \quad (\text{III-26})$$

[J] la matrice de JACOBIENNE est égale à :

$$[J] = [B_e] [\{ X_n \}; \{ Z_n \}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

Avec que :

La matrice $[B_e]$: C'est la matrice des dérivés des fonctions de pondération par rapport aux différents axes du repère de référence.

On peut définir aussi l'inverse de la matrice JACOBIENNE (noté[j]) par :

$$[j] = \frac{1}{\det(J)} * \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{III-28})$$

Cette transformation nous permis de passer d'un élément réel à un élément de référence pour effectuer les calculs, puisque se sont de forme uniforme. On peut à partir de ce dernier connaitre les coordonnées de l'élément réel remplacé.

Ce concept c'est comme un changement de variable utilisé pour éliminé les difficultés pendant les calculs, dans notre cas est de rendre les calculs indépendant de la géométrie des éléments.

III-7. CALCUL DES INTEGRALES.

La forme ainsi obtenu du paragraphe précédent est sous forme intégral qui sera calculé afin de trouvé un système d'équation algébrique, à cette raison deux manière sont prit en considération lors du calcul : soit déterminé la primitive de la fonction en question puis calculer leur résultats ou déterminer la surface formé entre la courbe, l'axe des abscisses et les borne d'intégrale, que la seconde est prise le principe des méthodes d'intégrale numérique que nous avons utilisé dans notre travail.

a) . Principe :

Comme cité avant les méthodes numérique consiste à décomposé la surface formé par la courbe en plusieurs partie simple à calculer puis les cumuler pour avoir l'intégrale mais d'une manière proche à la valeur réel à cause de la manière de calcul de ces surfaces élémentaires suivant la formule suivante. [11]

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N W_i f(x_i) \quad (\text{III-29})$$

Avec :

W_i : Les poids d'intégral.

x_i : Les abscisses des points d'intégration.

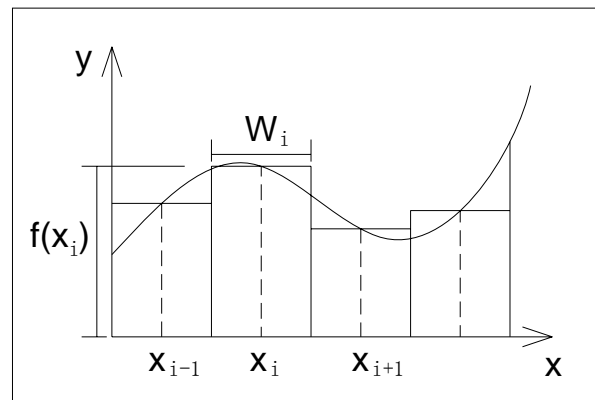


Figure III-2 : Schéma d'intégrale numérique.

Sachant que l'erreur diminue jusqu'au s'annule quand le nombre de point d'intégration augmente jusqu'au l'infini, ce qui n'est pas agréable. Mais *la méthode de Gauss* pour l'intégrale numérique dit le contraire. Elle est basée sur les principes des méthodes précédentes mais elle propose d'utiliser un (r) points et poids d'intégration définie préalablement de tel sorte de pouvoir intégrer un polynôme d'ordre ($2r-1$) d'une manière exacte. [11]

L'intégration numérique à deux dimension est le même que l'intégration analytique à variable séparé, il s'agira donc d'intégrer suivant (x), par exemple en considère que (z) est constant et inversement.

Nous obtenons une expression sous la forme

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, z) dx dz = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M W_i W_j f(x_i, z_j) \tag{III-30}$$

(N) et (M) : représente les point d'interpolation respectivement suivant (x), (z). Les coefficients (W_i), (W_j) et les abscisses (ξ_i), (η_j) sont donnés dans le tableau suivant : [7]

R = N x M	(ξ _i)	(η _j)	(W _i)
2 x 2	0	0	0.8888888888888889
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	0.5555555555555556

Tableau III-1 : Abscisses et poids d'intégration de GAUSS.

III-8. INTEGRATION DANS LE TEMPS.

La discrétisation en espace nous conduit à une équation différentielle de premier ordre

$$([K] * \{U\}) + ([C] * \{\dot{U}\}) + \{J\} = 0 \tag{III-31a}$$

Ou plutôt :

$$([K] * \{U\}) + \left([C] * \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \right) + \{J\} = 0 \tag{III-31b}$$

On discrétise l'intervalle de temps total dont lequel l'équation doit satisfaire à des sous intervalle de temps connu identique de (Δt) et l'équation doit être calculé dans ces sous domaine. Qui nous permet d'écrire : [8]

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} = \frac{\{U^i\} - \{U^{i-1}\}}{\Delta t} \tag{III-32}$$

Avec :

- { Uⁱ } : Pression à l'instant en cours.
- { Uⁱ⁻¹ } : Pression à l'instant précédent.

Donc on obtient :

$$([K] * \{U^i\}) + \left([C] * \frac{\{U^i\} - \{U^{i-1}\}}{\Delta t} \right) + \{J\} = 0 \quad (\text{III-33})$$

Après simplification :

$$\left([K] + \frac{[C]}{\Delta t} \right) * \{U^i\} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} * \{U^{i-1}\} \right) - \{J\} \quad (\text{III-34})$$

III-9. LA NON LINEARITE. [7]

C'est le fait que les propriétés du système physique et qu'ils ont supposé être indépendant du variable (fonction inconnu) ce n'est pas le cas, comme notre problème ici la perméabilité (K) et le degré de saturation (S_r) sont fonction de la pression interstitielle (u_w), selon la courbe de rétention des sols. Cette courbe représente une fonction non linéaire qui complique la solution du problème.

Selon *la méthode de Newton-Raphson* la résolution du système non linéaire consiste à construire une suite de solution $\{U_{(m)}\}$ étant calculé a partir d'une solution initiale arbitraire $\{U_{(m-1)}\}$ en résolvant le système linéaire.

$$\left([K(\{U_{(m-1)}^i\})] + \frac{[C]}{\Delta t} \right) * \{U_{(m)}^i\} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} * \{U^{i-1}\} \right) - \{J\} \quad (\text{III-35})$$

On obtient un système d'équation algébrique facile à résoudre. [7]

$$[K] * \{U\} = \{F\} \quad (\text{III-36})$$

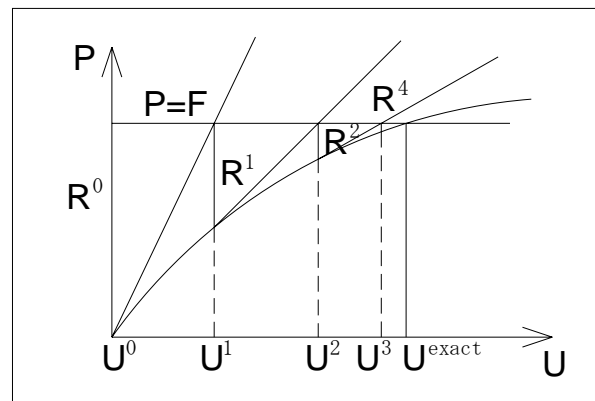


Figure III-3 : Schéma représentatif de la méthode de Newton-Raphson.

Chapitre 4 :

Technique de programmation.

IV-1. INTRODUCTION.

L'utilisation des méthodes numériques telles que l'élément finie pour la discrétisation dans l'espace et la différence finie pour l'intégration dans le temps, nous permet de passer d'une équation au dérivé partielle celle de Richard.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(P_w) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(P_w) \frac{\partial h}{\partial z} \right]$$

Qui d'écrit le système physique non stationnaire non linéaire de l'écoulement dans les milieux poreux non saturés à un système d'équation algébrique linéaire simple.

$$\left([K(\{U_{(m-1)}^i\})] + \frac{[C]}{\Delta t} \right) * \{U_{(m)}^i\} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} * \{U^{i-1}\} \right) - \{J\}$$

Sous la forme générale :

$$[K] * \{U\} = \{F\}$$

Qu'on peut le résoudre facilement avec les méthodes mathématiques classiques utilisées. Mais leur résolution c'est une tâche long est probable à l'erreur donc l'utilisation d'un outil numérique est indispensable.

A cette raison nous avons développé un programme informatique utilisant l'environnement *Delphi* pour le maintient en service.

IV-2. POURQUOI DELPHI.

Nous avons prit Delphi comme un langage de programmation dans notre travail parce qu'il offre plusieurs avantages qu'ils sont représentés par la simplicité d'utilisation, mais aussi de coté fonctionnels qu'on ne peut pas les dépasser comme la location dynamique des tableaux apparue dans sa version(3), et en plus Delphi basé sur le langage *Pascal* qui est un *langage compiler* génère des applications plus optimiser en codage binaire et très performante de coté calcul, contrairement au d'autre *langage interprété* tels que *Java*, *Visual Basic* ou plutôt *Matlab* qu'ils sont plus facile à manipuler et riche de commandes qui peuvent être très utile dans les différents domaines de programmation, mais ils produisent des programmes très long dans les calculs et nécessitent plus de taille de mémoire puisque ces programmes ne sont par indépendants et leur exécution se fait à partir du langage lui-même donc une grande partie du capacité de la machine est déjà occupé, ce problème est immense qu'on ne peut pas le négligé quand les calculs et les commandes devenues importants c'est le cas des calcul itérative comme notre problème.

IV-3. PRESENTATION GENERAL.

Le programme développé pendant ce travail nommé *Win-Flow* est écrit en langage Pascal et compilé en environnement Delphi, c'est pour but de calculer la pression interstitielle de l'écoulement dans un milieu poreux non saturé considéré continu, il résoudre l'équation de *Richard* utilisant la méthode des éléments finis comme outils numérique.

IV-3-1. Les fenêtres de l'application.

Le programme est une application *Windows* multifenêtre dont leur interface graphique supporte plusieurs fenêtres. Principalement sont : Fenêtre principale, propriétés des matériaux, tableaux, texte, dialogue (Ouvrir/Enregistrer), paramètres de calcul et la fenêtre A propos.

a) . Fenêtre principale.

Au lancement de l'application s'apparaître en plein écran la fenêtre principale montré dans la (Figure IV-1) si dessous.

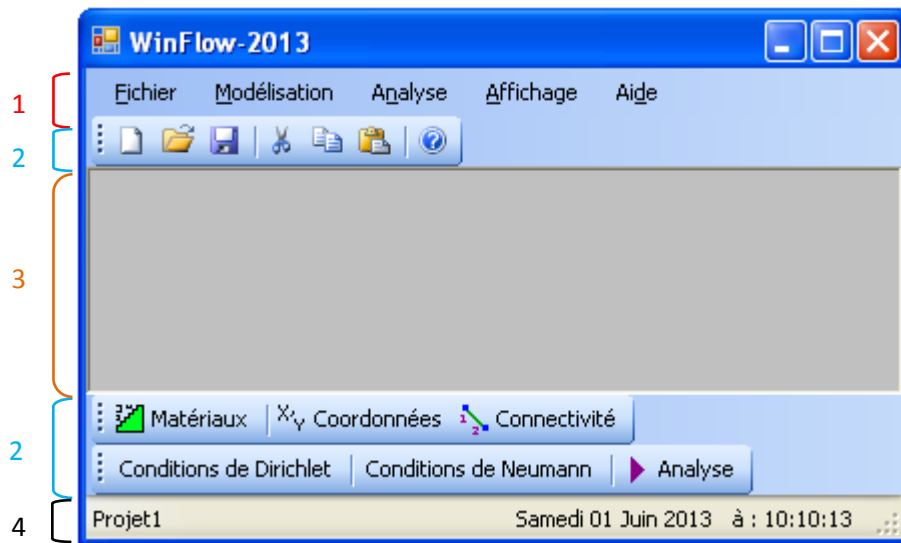


Figure IV-1 : Fenêtre principale de **Win-Flow**.

Cette fenêtre représente le programme principal elle reste tout le temps de l'ouverture d'application et elle exécute presque la totalité des procédures de cette dernière. On première vue on remarque qu'elle englobe les composant suivants :

- (1) Un menu principal regroupe toutes les fonctions du programme et qu'ils sont accessible par l'utilisateur.
- (2) Barres d'outils regroupe des accès rapide aux fonctions couramment utilisé.
- (3) Une zone graphique pour afficher les graphismes désiré et qu'ils sont programmés auparavant comme le maillage.
- (4) Une barre d'états pour afficher des informations supplémentaires la date, l'heure, et le nombre de maille.

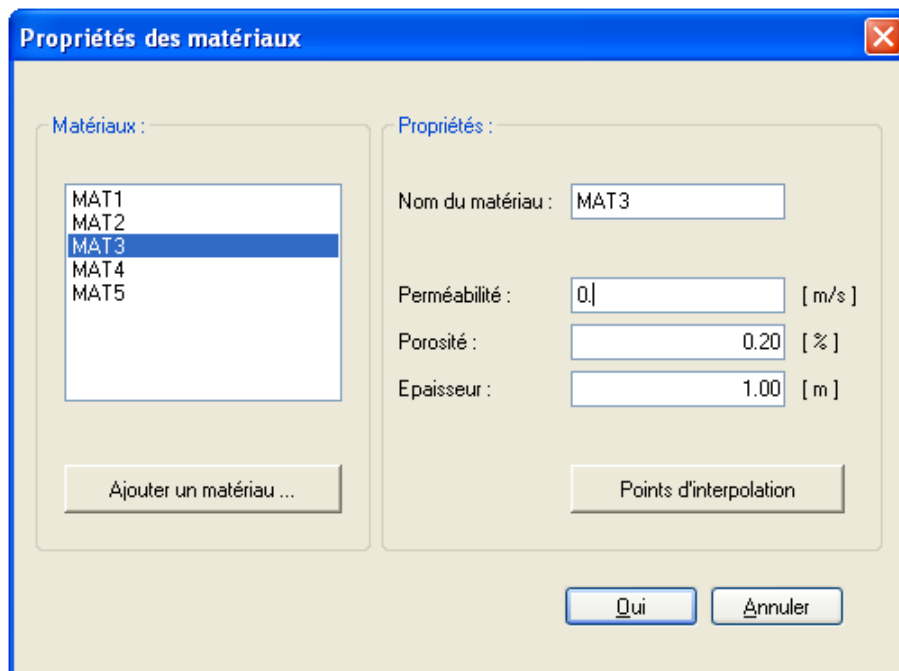
b) . Fenêtre propriétés des matériaux.

Figure IV-2 : Boite de dialogue propriétés des matériaux.

Cette fenêtre pour définir les matériaux nécessaire pour l'étude ainsi que leurs propriétés d'une manière visuelle. Et elle contient :

- ◆ **A gauche** : Une liste pour afficher toutes les matériaux définie dans le projet.
- ◆ **A droite** : Zones de saisie de texte étiqueté pour afficher ou modifier les propriétés du matériau sélectionner dans la liste.

Cette fenêtre a son propre sous programme qui serve à vérifier au n'importe quel moment et d'une manière automatique la validité des valeurs écrit dans les zones de saisie les limites par exemple avant de les stocker dans les variables, et dans le car d'erreur le programme averti l'utilisateur par des messages.

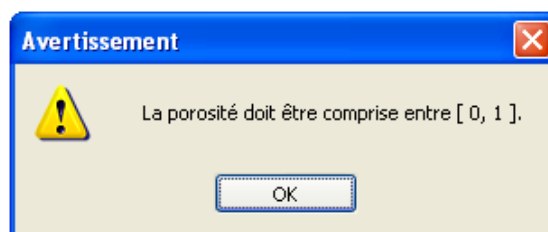
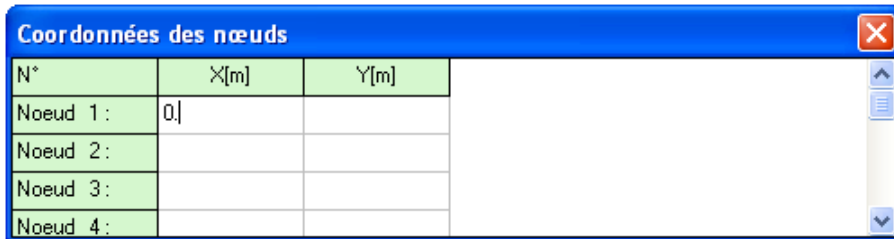


Figure IV-3 : Message d'avertissement.

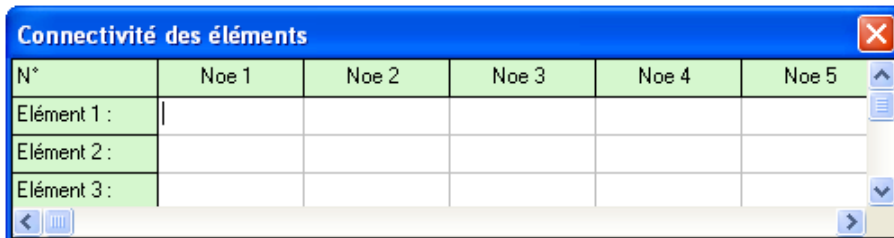
c) . **Fenêtre tableau.**

La fenêtre contient une organisation graphique qui affiche les données sous forme tabulaire, tableau des coordonnées, connectivité, pression interstitielle nodale, etc., la fenêtre aussi elle a ses propres procédures pour vérifier la conformité des données ainsi que pour lui reprendre aux différents modes d'appel du programme à cette fenêtre.



N°	X[m]	Y[m]
Noeud 1 :	0	
Noeud 2 :		
Noeud 3 :		
Noeud 4 :		

Figure IV-4 : Tableau en mode affichage les coordonnées des nœuds.

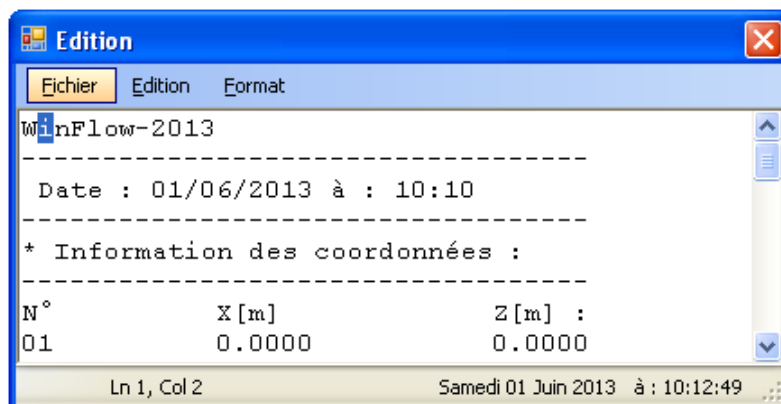


N°	Noe 1	Noe 2	Noe 3	Noe 4	Noe 5
Elément 1 :					
Elément 2 :					
Elément 3 :					

Figure IV-5 : Tableau en mode affichage la connectivité des éléments.

d) . **Fenêtre texte.**

C'est une fenêtre qui asservie comme un éditeur de texte elle permet d'afficher, modifier ou d'enregistrer un texte. Le programme rédige ses données dans un texte sous forme d'une liste qu'on peut l'édité et modifier grâce à cette fenêtre pour les réutiliser après dans un autre programme par exemple.



```

WinFlow-2013
-----
Date : 01/06/2013 à : 10:10
-----
* Information des coordonnées :
-----
N°          X [m]          Z [m] :
01          0.0000          0.0000
  
```

Ln 1, Col 2 Samedi 01 Juin 2013 à : 10:12:49

Figure IV-6 : Fenêtre texte.

e) . Dialogue (Ouvrir/Enregistrer) un fichier.

En programmation on a besoin de connaître le nom du fichier qu'il est une chaîne de caractère composé de (Chemin + Identificateur + Extension) pour pouvoir écrire ou lire leur contenu. Ces deux boîtes de dialogue ouvrir et enregistrer sont semblable et standard fourni par le système lui-même qu'on peut les prêter pour définir avec toutes une maniabilité le nom du fichier.

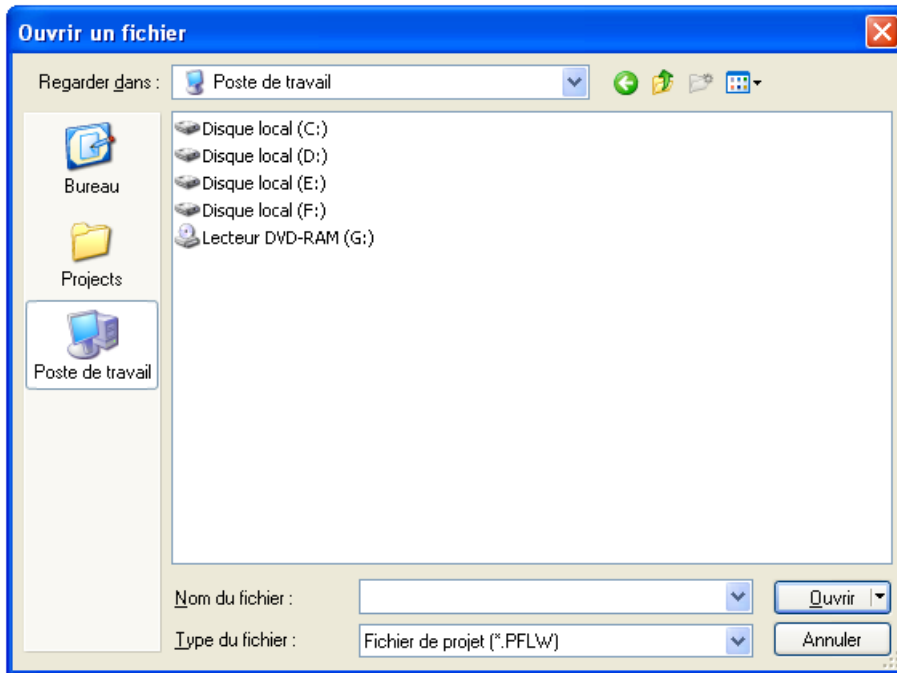


Figure IV-7 : Boite de dialogue Ouvrir.

f) . Fenêtre paramètre de calcul.

Elle apparaît juste avant le lancement définitive des calculs. C'est pour introduire les paramètres qui contrôlent l'algorithme de calcul (le nombre d'itération la précision etc.).

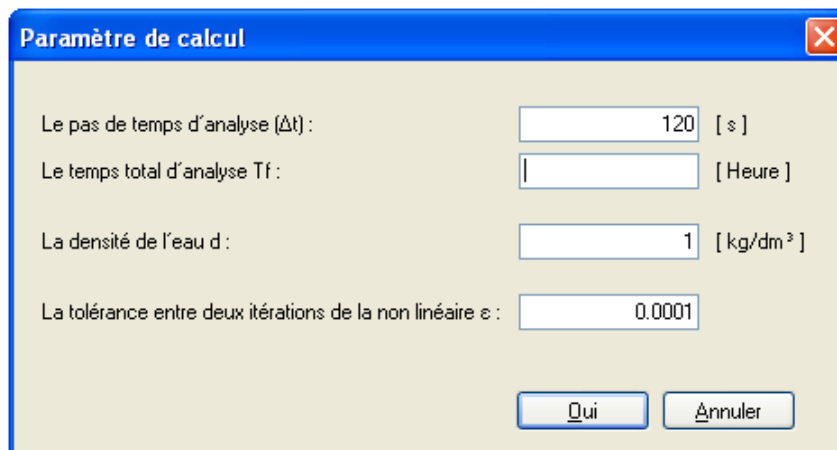


Figure IV-8 : Fenêtre paramètre de calcul.

g) . Fenêtre A propos.

C'est une fenêtre qui contient que des informations générale sur l'application comme : le nom, la version, la date de création, etc.

IV-3-2. Les données du problème.

Pour effectuer une analyse avec le programme il faut introduire les données suivantes :

Les coordonnées des nœuds :

(X, Z) puisque l'étude est suivant le plans (OXZ).

La connectivité des éléments :

De N°1 à N°8 car l'élément utilisé est un quadrilatère a huit nœuds.

Les propriétés des matériaux :

La perméabilité (k), la porosité (n) et l'épaisseur (e).

Les conditions aux limites :

Condition de Dirichlet : Pression imposé et les nœuds considérés.

Condition de Neumann : Flux d'écoulement et les nœuds considérés.

Les paramètres d'analyse :

Δt : Le pas de temps d'analyse.

T_f : Le temps total d'analyse.

d : La densité de l'eau.

ϵ : La tolérance entre deux itérations de résolution du système non linéaire.

Ces données ainsi les résultats obtenus sont enregistrés dans le même fichier de type binaire de format bien spécifique configuré comme un fichier de type réel sous le langage Pascal. Ce type de fichier est caractérisé par sa taille réduite et offre une rapidité d'accès aux données. Mais leur contenu ne sont ni écrire ni déchiffré qu'à partir du programme lui-même puisque il offre une toute organisation qu'il peut être efficace lors d'introduction des données et le faite d'édité un texte de données respectant la mise en forme proposé n'est pas envisagé.

IV-4. ETAPES D'ANALYSE ET UTILISATION DU PROGRAMME.

On a choisi les étapes couramment suivaient par de nombreux logiciel d'éléments finis dans l'analyse ce choix nous facilite la programmation et nous donne une utilisation standard au autre programme.

IV-4-1.Près-traitement.

Cette étapes est préservé pour la définition de la géométrie est le maille du problème a étudié, le programme dispose des outils qui peuvent nous aider pendant cette tache.

a) . Définition les propriétés des matériaux utilisés :

Dans cette étapes on défini les matériaux et leur propriétés dans la fenêtre de définition des matériaux (Figure IV-2).

Pour l'appeler en sélectionnant la rubrique *Modélisation > Définition des matériaux* dans le menu principal ou la touche raccourcie *Ctrl + M*.

On appuya sur le bouton *Ajouter un matériau...* le programme ajoute un nouveau matériau au données.

b) . Définition de la géométrie :

Cette partie est laissée pour définir le maillage de la géométrie à étudier.

On dispose trois méthodes qu'ils sont les suivants.

➤ Introduction manuel.

C'est dans la fenêtre tableau que nous aurons introduit les coordonnées et la connectivité. Le programme appel la fenêtre en deux modes différents, le mode (coordonnés des nœuds) le tableau a deux colonnes le premier pour les composants selon l'axe (*X*) et l'autre les composants selon l'axe (*Z*), et le mode (connectivité des éléments) le tableau possède huit colonnes pour les nœud de l'élément.

On utilise les rubriques suivant de menu principal :

Modélisation > Coordonnées des nœuds : pour le mode (coordonnés des nœuds).

Modélisation > Connectivité des éléments : pour le mode (connectivité des éléments).

Cette méthode devenu désagréable pour les maillages assez grands.

➤ Maillage semi-automatique.

Le programme possède des procédures qui nous aident de mailler automatiquement des géométries simples comme les quadrilatères, avec cette méthode nous pouvons avoir un maillage plus fin.

➤ Importation du maillage.

C'est la possibilité d'utilisé d'autre programme a des outils plus sophistiqué de générer le maillage automatique d'une géométrie données.

De nombreux programmes de calcul par éléments finis rédigent des fichiers texte de format spécifique contenant des informations du maillage qu'on peut les modifier facilement pour les utiliser comme *ANSYS* par exemple.

c) . Vérification de la compatibilité du model :

On peut vérifier la conformité de la géométrie à l'aide d'une représentation graphique du maillage avec une indication des nœuds et les éléments par leur numérotation.

IV-4-2. Solveur.**a) . Introduction des conditions aux limites :**

Les conditions aux limites celle de Dirichlet et de Neumann pratiquement ont les mêmes outils pour les définir.

➤ Introduction manuel.

On appelle la fenêtre tableau (Figure IV-3) en mode condition de Dirichlet ou de Neumann en appuyant sur la rubrique :

Analyse > Conditions de Dirichlet ou *Analyse > Conditions de Neumann*.

Le tableau qui s'apparaît dans les deux modes est de deux colonnes, la première pour mentionner le numéro du nœud conditionné et la seconde pour les valeurs imposées.

➤ La ligne de condition.

On définit un segment entre deux points et la valeur imposée à cette condition et le programme détermine les nœuds appartenant à ce segment et les introduit dans le vecteur de stockage des conditions aux limites.

b) . Définition des paramètres de calcul :

On appelle la fenêtre paramètre de calcul pour définir (Δt , T_f , d , ϵ) en appuyant sur le menu *Analyse > Paramètre de calcul* ou directement sur *Analyse > Lancement calcul*, si ne sont pas encore définis.

c) . Lancement de calcul :

Cette partie une fois relancée elle ne subit aucune intervention par l'utilisateur, en appuyant sur la rubrique *Analyse > Lancement de calcul*.

Le programme commence les dernières vérifications concernant les données introduites puis il exécute le sous-programme d'analyse par éléments finis selon l'organigramme suivant.

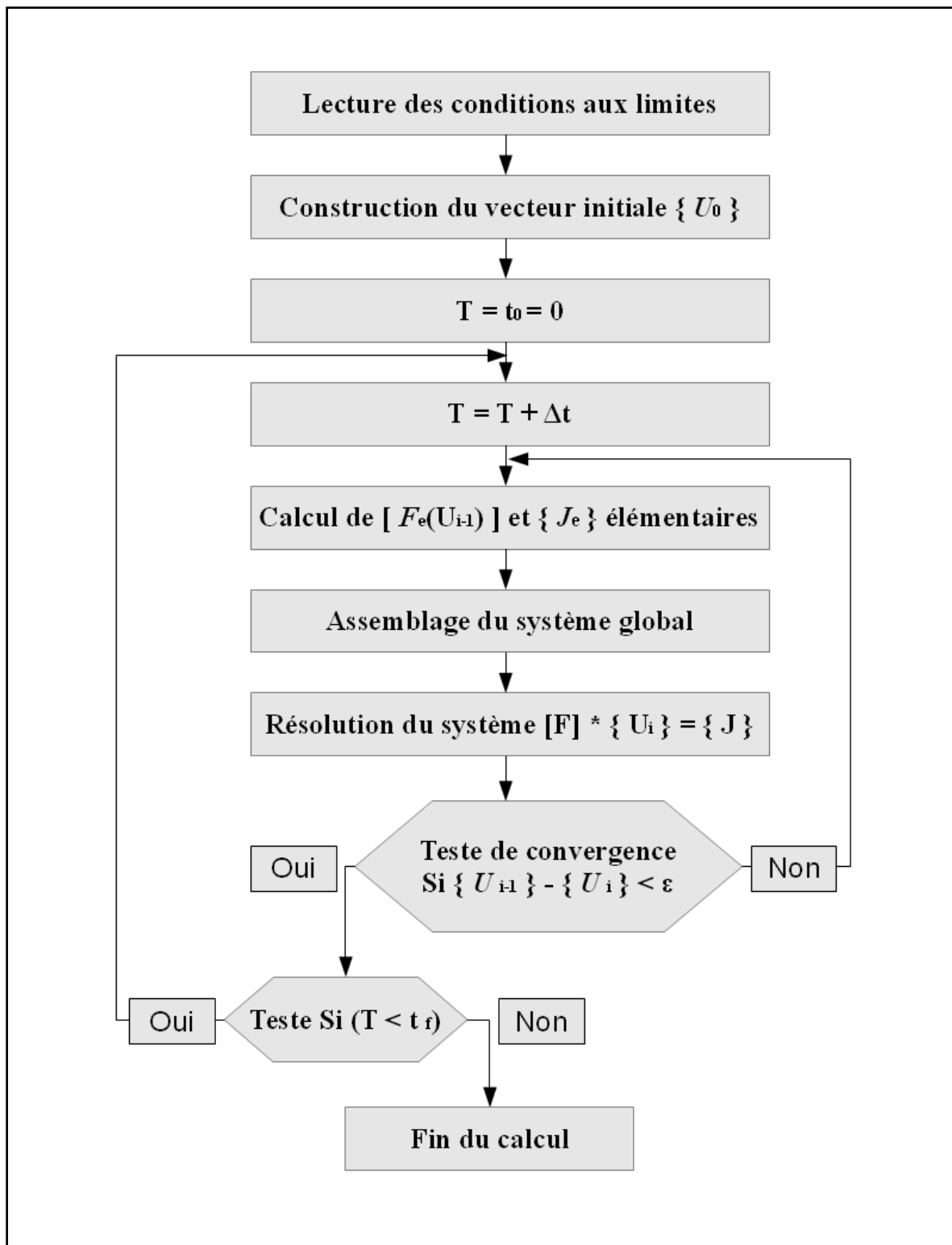


Figure IV-9 : Organigramme de calcul par la méthode d'éléments finis.

IV-4-3. Poste-traitement.

Pour analyser les résultats obtenus d'une façon organisée sous forme tabulaire ou visuel sous une représentation graphique des isovaleur.

IV-5. ORGANISATION DU PROGRAMME.

On a introduire de nombreuse algorithme supplémentaire au calcul qui rendre l'application plus optimisé et plus fonctionnel mais elle devenu un programme très compliqué donc le travail nous demande un niveau plus élevé d'organisation pendant la programmation, en premier démarche on a regroupé leur procédure dans des blocs assemblent les procédures qui participent dans la même fonction. Et aussi l'idée de multifenêtre elle participe dans la décomposition du programme puisque chaque fenêtre elle est indépendante par ses fonctionnalité et elle allégé encore le texte principale du programme.

Cette décomposition au niveau du programme pour simple raison c'est de rendre le texte du programme bien organisé elle nous permet de détecté facilement les erreurs et les manquant, leur amélioration avec efficacité et surtout d'additionner des fonctionnalités assez compliqué au programme facilement et sans aucun problème.

a) . Procédures de gestion des fichiers :

On a choisi un fichier binaire de mise en forme bien spécifique comme un fichier de données au lieu d'un fichier texte qui rendre la lecture et l'écriture n'est possible qu'à partir le programme lui-même, ce choix aussi rendre le fichier probable à subir des problèmes de mal enregistrer les données ou l'écrasement des fichiers si ne sont pas pris en considération pendant la programmation.

Donc le regroupement de ces procédures est indispensable pour pouvoir ajouter les manquants plu tard.

b) . Procédures de Calcul :

Cette famille contient tous les procédures participant dans l'analyse par élément finie tel que le calcul des matrices élémentaires, l'assemblage et la résolution de système d'équation pour construire le vecteur des inconnus $\{U\}$, réellement cette famille est le programme principal et l'objectif de tout ce travail. Cette famille occupe la majorité du programme et lui rendre illisible après pour la modification si elle est confondu avec les autres procédures.

c) . Procédures de gestion des messages et des erreurs :

Cet ensemble de procédure a pour but de détection de toute sorte d'erreur concernant l'entrer des données jusqu'au lancement des calculs et d'avertir l'utilisateur par des messages, pour évité toute sorte de problème logique qui conduisant à un arrêt brutal du programme pondant les calculs et la perte des données, puisque on traite un système non linéaire et non stationnaire de taux de calcul plus élevé.

d) . Procédures de gestion des fenêtres :

Le nombre relativement élevé des fenêtres nécessite tout un programme accompli pour une bonne gestion pour assurer le fonctionnement correct de l'application.

e) . Procédures d'affichage graphique :

Regroupant toutes les procédures qui contrôlent le composant responsable du traitement graphique dans l'application.

f) . Procédures des événements :

Au Delphi ces procédures se sont les commandes exécutées directement par l'utilisateur après l'application des événements sur les composants graphiques de l'interface utilisateur comme un clic de souris par exemple.

IV-6. TECHNIQUES DE PROGRAMMATION.**IV-6-1. Stockage de la matrice globale. [12] [13]**

Les matrices de propriété [K] provenant de l'approximation par éléments finis ont la particularité d'être creux, dont lesquels un grand nombre de ses éléments sont nuls, donc faire stocker ses termes sous d'autre organisation de tel sorte qu'on élimine le maximum de ce vide est indispensable pour rendre le programme plus optimisé dans l'utilisation de la mémoire des ordinateurs, à ce contexte de nombreux méthode sont mise en service dont leur gain dans la place mémoire dépend de leur principe de reformulation des matrices de propriétés [K], actuellement la méthode la plus performante c'est *la méthode compacte*, dont leur principe consiste à enregistrer que les termes non nuls de la matrice et l'algorithme qu'on a développé pendant ce travail il est adapté aux matrices carrées soit symétries ou non, cet algorithme stocke la matrice suivante :

\	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	D_{2,2}	E _{2,3}		E _{2,6}	E _{2,7}				
2	E _{3,2}	D_{3,3}	E _{3,4}	E _{3,6}	E _{3,7}	E _{3,8}			
3		E _{4,3}	D_{4,4}		E _{4,7}	E _{4,8}			
4	E _{6,2}	E _{6,3}		D_{6,6}	E _{6,7}		E _{6,10}	E _{6,11}	
5	E _{7,2}	E _{7,3}	E _{7,4}	E _{7,6}	D_{7,7}	E _{7,8}	E _{7,10}	E _{7,11}	E _{7,12}
6		E _{8,3}	E _{8,4}		E _{8,7}	D_{8,8}		E _{8,11}	E _{8,12}
7				E _{10,6}	E _{10,7}		D_{10,10}	E _{10,11}	
8				E _{11,6}	E _{11,7}	E _{11,8}	E _{11,10}	D_{11,11}	E _{11,12}
9					E _{12,7}	E _{12,8}		E _{12,11}	D_{12,12}

Obtenu d'une structure mailler en 6 éléments quadrilatère à 4 nœuds comme il montre la figure ci-après, avec que les nœuds 1, 5 et 9 ont une valeur imposée de la pression interstitielle (**h**) (conditions aux limites).

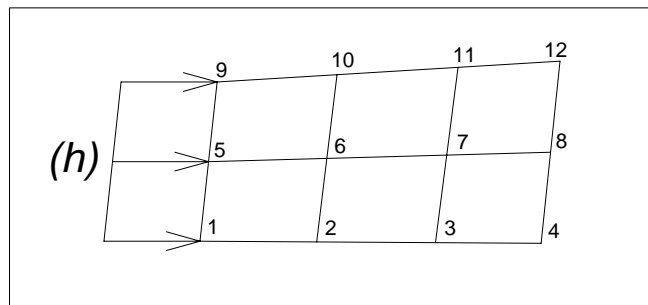


Figure IV-10 : Structure mailler en 6 éléments quadrilatères.

La matrice donné ci-avant se stocke dans les trois vecteurs {VDK}, {VSK} et {VIK} comme suit :

VDK	D _{2,2}	D _{3,3}	D _{4,4}	D _{6,6}	D _{7,7}	D _{8,8}	D _{10,10}	D _{11,11}	D _{12,12}			
VSK	E _{2,3}	E _{2,6}	E _{2,7}	E _{3,4}	E _{3,6}	E _{3,7}	E _{3,8}	E _{4,7}	E _{4,8}	E _{6,7}	E _{6,10}	E _{6,11}
	E _{7,8}	E _{7,10}	E _{7,11}	E _{7,12}	E _{8,11}	E _{8,12}	E _{10,11}	E _{11,12}				
VIK	E _{3,2}	E _{6,2}	E _{7,2}	E _{4,3}	E _{6,3}	E _{7,3}	E _{8,3}	E _{7,4}	E _{8,4}	E _{7,6}	E _{10,6}	E _{11,6}
	E _{8,7}	E _{10,7}	E _{11,7}	E _{12,7}	E _{11,8}	E _{12,8}	E _{11,10}	E _{12,11}				

{VDK} : Pour les termes de la diagonale dans le même ordre on décrit.

{VSK} : Pour les termes non nuls de la partie du triangle supérieur ligne après ligne on accumule leurs termes non nuls dans l'ordre croissant.

{VIK} : Pour les termes non nuls de la partie du triangle inférieur colonne après colonne on accumule les termes non nuls dans l'ordre croissant.

Concernant les matrice symétrie, quelque soit (I) et (J) on a $K(I, J) = K(J, I)$ donc le vecteur {VIS} n'est pas nécessaire car il contient que les valeurs de {VSK}.

Pour pouvoir marqué l'ordre d'enregistrement de ces termes on fait intervenir deux vecteur {VIC} et {VLL} suivants :

{VIC} : possède la même dimension que {VSK} et {VIK} et il stocke les indications des colonnes dans la matrice [K] pour les éléments stocké dans le vecteur {VSK}, ou encore sont considéré comme les indices des lignes pour les termes du {VIK}.

VIC	2	4	5	3	4	5	6	5	6	5	7	8
	6	7	8	9	8	9	8	9				

{VLL} : enregistre le nombre des termes non nuls par ligne pour la partie supérieur.

VLL		3	4	2	3	4	2	1	1
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---

Dans le cas d'exploitation de données, pour chercher la valeur du terme $K(I,J)$, dont le (I) est l'indice de ligne et (J) l'indice de colonne on a 3 cas à prendre en considération :

(I=J) : Le terme se trouve sur la diagonale donc il se trouve dans {VDK} et la valeur chercher est dans la case (I) ($K(I,J) = VDK(I)$).

(I<J) : Le terme se trouve sur la partie supérieur, donc on cherche dans {VSK}, on a deux paramètre qu'on doit les calculer, où il commence l'enregistrement de la ligne (I) par la somme des valeur de $VLL(1)$ à $VLL(I-1) + 1$, ainsi que la longueur d'enregistrement par la valeur $VLL(I)$, puis on vérifie l'existence du (J) dans le vecteur {VIC} le long d'enregistrement, puis on retient la valeur de {VSK}. Si (J) n'existe pas donc le terme cherche vaux zéro.

(I>J) : Le terme se trouve sur la partie inférieur, cette partie est stocké colonne par colonne dans le vecteur {VIK}, avec la somme de $VLL(1)$ à $VLL(J-1) + 1$ nous donne le début d'enregistrement et $VLL(J)$ donne la longueur et dans {VIC} on cherche l'existence de (I), si (I) existe, on retire la valeur de {VIK}, par contre si [K] est symétrie {VIK} n'existe pas est la valeur vienne de {VKS}.

Exemple pour trouver la valeur de $K(4,7)$:

$$VLL(1) + VLL(2) + VLL(3) + 1 = 3 + 4 + 2 + 1 = 10$$

$$VLL(4) = 3$$

Donc l'enregistrement de la 4^{ème} ligne commence de la 10^{ème} case du vecteur {VSK} sur le long de 3 case donc on a :

VIC	5	7	8
VSK	$E_{6,7}$	$E_{6,10}$	$E_{6,11}$

Donc le terme rechercher $K(4,7) = E_{6,10}$

Pour effectuer ce genre de stockage l'algorithme utilisé assemble les matrices élémentaires directement sous la forme compacte en respectant les règles suivantes : pour chaque terme d'une matrice élémentaire $[K^{(e)}]$ on note $k^{(e)}(I^{(e)}, J^{(e)})$:

* L'écriture au système globale $(I^{(e)}, J^{(e)}) \rightarrow (I^{(G)}, J^{(G)})$.

* Introduction des conditions aux limites de Dirichlet : pour le système finale à résoudre on enlève les équations de degré de liberté dont leur variable (u) est imposé comme (h) à cette raison on fait intervenir le vecteur {VCAL} :

Dans ce vecteur les degrés de liberté touchée par les conditions aux limites de Dirichlet porte une valeur nulle et les autres reprennent la numérotation croissante et ces valeurs seront les nouveaux degrés de liberté du système.

VCAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	1	2	3	0	4	5	6	0	7	8	9

On transforme $(I^{(G)}, J^{(G)}) \rightarrow (I^{(D)}, J^{(D)})$, on note (I, J).

Exemple : $K^{(e)}(3, 8) \rightarrow K^{(e)}(2, 6)$.

* Après le programme positionne le terme dans leur nouveau degré de liberté mais qu'ils ont un (I) ou (J) nul ne seront pas inclut dans l'assemblage.

* Recherche de l'endroit d'enregistrement de la ligne (I) :

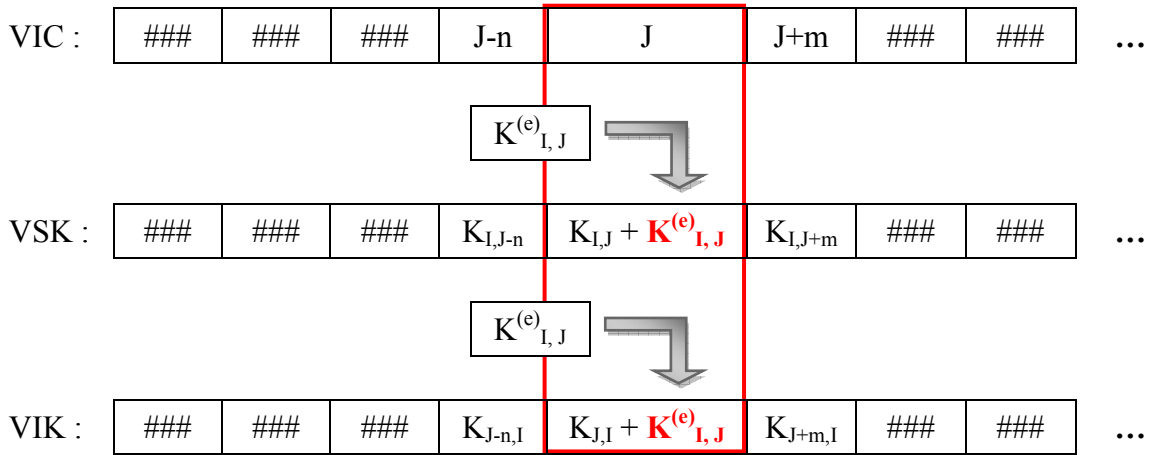
Après avoir les termes de leur indication finale,

Si $(I = J)$: seront assemblé dans {VDK}.

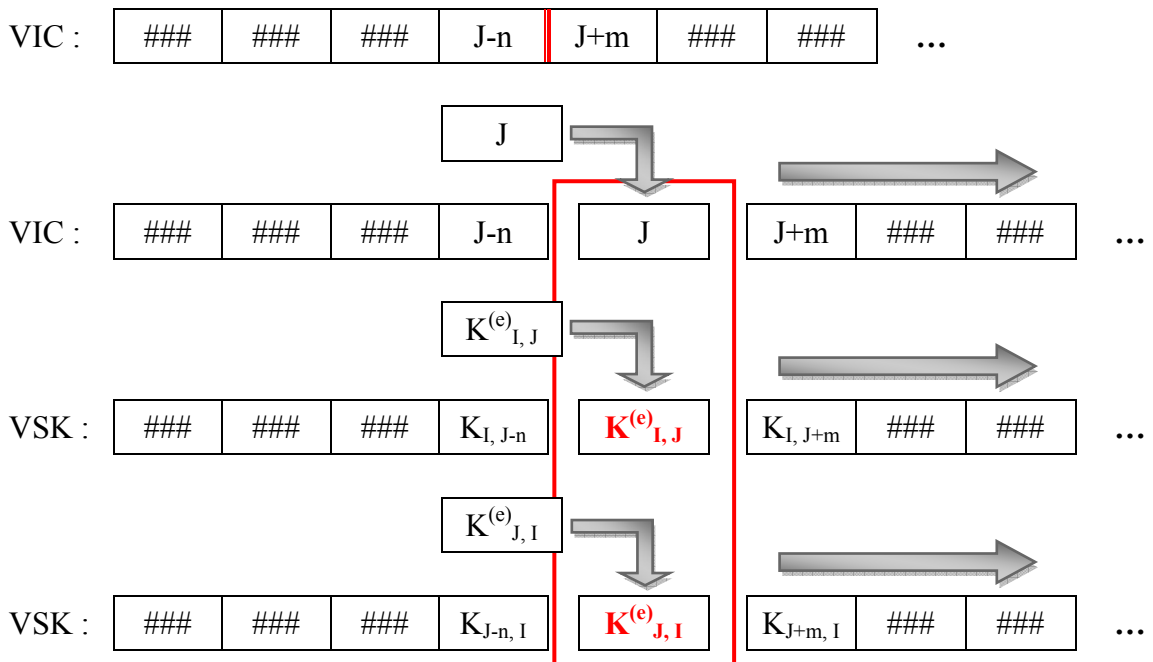
Si $(I > J)$: dans ce cas ce terme est de la partie inférieure, à ce moment aucune opération ni effectuée quelque soit la matrice symétrie ou non est le programme recommence les opérations avec d'autre terme $K^{(e)}(I^{(e)}, J^{(e)})$.

Si $(I < J)$: prenant $K^{(e)}(I, J)$ et $K^{(e)}(J, I)$ pour effectuer en parallèle les mêmes opérations sur {VSK} et {VIK} respectivement, de la même manière que la recherche des terme stocké on cherche où il commence l'enregistrement de la ligne (I) puis sa longueur après on vérifié l'existence de (J) dans le vecteur {VIC} :

Si (J) existe on additionne les termes $K^{(e)}(I, J)$ et $K^{(e)}(J, I)$ au valeur trouvé dans {VSK} et {VIK} respectivement.



Si (J) n'existe pas on écarte les éléments du {VIC} par une case en commençant par ce qui est supérieur à (J) pour pouvoir le placer avant, en parallèle et de la même manière on écarte les éléments de {VSK} et {VIK} pour pouvoir intégrer $K^{(e)}(I,J)$ et $K^{(e)}(J,I)$.



IV-6-2. La résolution du système d'équation linéaire. [12]

La résolution du système d'équation linéaire se fait par une méthode de résolution itératif c'est la méthode de *Gauss-Seidel*.

Pour un système d'équation à résoudre représenté par la forme matriciel suivante :

$$[A] * \{X\} = \{B\}$$

Où : [A] : une matrice carré de dimension (N x N).

{B} : un vecteur du second membre de longueur (N).

{X} : un vecteur des inconnus (x_i).

Selon l'algorithme de la méthode suivant :

$$X_i^{k+1} = \frac{1}{A_{ii}} \left(B_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^N A_{ij} X_j^k \right)$$

On suppose une valeur initiale quelconque de $\{X^0\}$ de préférence nul, et on doit calculer une suite de solution $\{X^{k+1}\}$ sur la base de la solution précédente $\{X^k\}$. Et quand la différence $\{X^k\}$ et $\{X^{k+1}\}$ tend vers zéro donc on peut dire que $\{X^k\}$ est la solution du système.

Dans notre cas [A] représente la matrice de propriété [K], {X} c'est la pression {U}.

Sachant que la matrice [K] sera stockée sous la forme compacte donc pour connaître la valeur des termes $\mathbf{K}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ et $\mathbf{K}(\mathbf{i}, \mathbf{i})$, on doit utilisé l'algorithme d'extraction de terme du vecteur {VSK} et {VSK} dont le principe est expliqué dans le paragraphe précédant.

Conclusion générale.

CONCLUSION.

L'élaboration et l'exploitation du programme de calcul des écoulements dans les milieux poreux non saturé ont permis de tirer les conclusions suivantes :

1. L'utilisation d'un programme rend les études paramétriques aisées. Il sera alors très facile de faire varier : les propriétés physiques, les conditions aux limites, etc.
 - Les études avec des logiciels donnent des résultats précis, mais la compréhension du phénomène est essentielle pour l'interprétation des résultats.
 - Les écoulements en milieux poreux jouent un rôle important dans différents domaines des sciences et de l'ingénierie.
2. La méthode des éléments finis constitue un puissant moyen que l'ingénieur peut l'utiliser pour résoudre des différents problèmes physiques souvent rencontrés.
3. Delphi forme un excellent outil dans le cadre d'automatisation des tâches assez complexes et long sur les ordinateurs tel que l'utilisation de la méthode des éléments finis.
4. Le stockage de matrice de rigidité globale par la méthode compacte nous permet d'économiser énormément dans la place mémoire notamment dans les problèmes assez gros.

Pour un éventuel développement futur de ce travail, nous faisons les suggestions suivantes :

La prise en compte de la viscosité du fluide, par l'étude des écoulements des liquides polluants.

L'effet de la température sur les paramètres physiques telle que la densité, etc.

Et de côté programmation :

Réécriture du programme sous d'autre langage encore plus populaire et plus standardisé tel que le C++.

Introduction des procédures de maillage automatique qui peuvent être très utiles pour la modélisation des géométries assez complexes.

Références bibliographiques.

- [1] **Jean COSTET, Guy SANGLERAS, (1975)**, *Cours pratiques de mécanique des sols*, Tome 1, Ed. Dunod, Paris, France.
- [2] **R. Holtz, W. Kovacs, (1992)**, *Introduction à la géotechnique*, Ed. L'école polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.
- [3] **G. Schneebeli, (1966)**, *Hydraulique souterraine*, Ed. Eyrolles, Paris, France.
- [4] **LI. Youd-Xiang, (1990)**, *Comportement hydromécanique des milieux poreux de l'état saturé à l'état non saturé*, Thèse : Doctorat, Université de Liège.
- [5] **Sylvain WEILL, (2006)**, *Modélisation des échanges surface/subsurface par une approche Darcéenne multi domaine*. Thèse : Doctorat, Mines, Paris.
- [6] **N. BORSALI, M. DJEZERI, (1993)**, *Analyse des écoulements dans le milieu poreux par la méthode des éléments finis*, Thèse : Ingénieur, Université de Tlemcen.
- [7] **A. Le Pouriet, (1988)**, *Résolution numérique des équations aux dérivés partiels*, Ed. CEPADUES, Paris, France.
- [8] **J. QUINET, (1977)**, *Cours élémentaire de mathématiques supérieures*, Ed. Dunod, Paris, France.
- [9] **Jean-Charles Craveur, (2008)**, *Modélisation des éléments finis*, Ed. Dunod, Paris, France.
- [10] **Z. BENYELLES, (2006)**, *Cours écoulement dans les milieux poreux*, Université de Tlemcen.
- [11] **Jean-Pierre DEMAILLY, (2006)**, *Analyse numérique*, Ed. EDP Science, Paris, France.
- [12] **Alexandre Ern, (2005)**, *Aide-mémoire Éléments finis*, Ed. Dunod, Paris, France.
- [13] **J Michel HERVOUET, (2002)**, *Hydraulique des écoulements Modélisation numérique avec la MEF*, Ed. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, France.