

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen

Faculté des sciences

Département de mathématiques

THESE de MASTER

Option : Mathématiques

(Spécialité : Perturbation, moyennisation et applications aux biomathématiques)

Présentée par

Bellouati Mama

**Solution périodique stable d'un système périodique
discret de compétition de Lotka-Volterra**

Soutenue le 21 septembre 2013 devant la commission d'examen composée de :

<i>Messieurs</i>	Mr Senouci Bereksi Ghouti	<i>Président</i>
	Mr Bensalah Hamid	<i>Examineur</i>
	Mr Benchaib Abdellatif	<i>Directeur de thèse</i>

*à mes parents ,
à mes frères et mes soeurs ,

à toute ma famille ,

à tous ceux qui me sont chers .*

*J*e remercie avant tout *ALLAH*, c'est avec l'aide et la bénédiction du bon Dieu le tout puissant que j'ai pu terminer ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont aux mon directeur de mémoire Mr Benchaib Abdellatif pour ses conseils, ses encouragements et son dévouement et l'ouverture d'esprit dont il a su faire preuve tout au long de l'accomplissement de ce travail.

Je remercie tous ceux qui m'ont porté jusque là, par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leur aide, leurs reproches, leur patience.

Merci aux Mr Senouci Bereksi Ghouti , membre du jury .

Je tiens à remercier Mr Bensalah Hamid qui examine mon modeste travail.

Je remercie ma chère copine Imen pour l'intégrité et le support moral dont elle a su faire preuve à mon égard dans les moments difficiles.

Enfin, merci à mes parents. Pour leur loyauté prodigue et leur sacrifice désintéressé .

Merci à tous ...

Table des matières

1	Introduction	9
2	Préliminaires.	11
2.1	Modèle de Lotka-Volterra	11
2.2	Equations aux Différences	11
2.2.1	Etude d'un système dynamique discret en dimension 1	12
2.2.2	Etude d'un système dynamique discret en dimension 2	26
2.3	Notions de Persistance	39
3	Solutions périodiques stables dans une équation logistique périodique discrète.	43
3.1	Persistance	43
3.2	Existence et stabilité de la solution périodique	47
4	Solution périodique stable d'un système périodique discret de compétition de Lotka-volterra	49
4.1	Persistance	50
4.2	Existence et stabilité d'une solution périodique	53
4.3	Conclusion	56
4.3.1	Remarques finales et discussion	56
5	Simulations Numériques	59
6	Bibliographie	63

Table des figures

2.1	$x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$	13
2.2	Représentation de $f(x) = x^3$ et des points fixes de $x_{n+1} = x_n^3$.	15
2.3	x^* est stable, x^* est instable.	15
2.4	x^* est asymptotiquement stable, x^* est globalement asymptotiquement stable.	16
2.5	x^* est répulsif; à chaque itération, on s'éloigne de x^*	16
2.6	Cas $\lambda < -1$: les solutions s'éloignent du point fixe 0 qui est donc instable.	19
2.7	Construction graphique des solutions de l'équation $u_{n+1} = \lambda u_n$ en utilisant le plan (u_{n+1}, u_n) . Cas : $-1 < \lambda < 0$: les solutions s'approchent du point fixe 0 qui est donc stable. . .	19
2.8	Construction graphique des solutions de l'équation $u_{n+1} = \lambda u_n$ en utilisant le plan (u_{n+1}, u_n) . Cas : $0 < \lambda < 1$: les solutions u_n s'approchent du point fixe 0 qui est donc stable.	20
2.9	Construction graphique des solutions de l'équation $u_{n+1} = \lambda u_n$ en utilisant le plan (u_{n+1}, u_n) . Cas : $\lambda > 1$: les solutions un s'éloignent du point fixe 0 qui est donc instable.	20
2.10	Construction graphique des solutions de l'équation (2.9) en utilisant le plan (x_{n+1}, x_n) pour deux conditions initiales différentes	21
2.11	foyer stable	32
2.12	Centre	32
2.13	foyer instable	33
2.14	Solution du système (2.26) avec $\mu = 1.5$ et $\omega = \frac{\pi}{5}$, pour deux conditions initiales différentes.	39

Chapitre 1

Introduction

La dynamique d'un système est en général modélisée par une équation différentielle (système en temps continu) ou par une équation à différence (système en temps discret). Les systèmes en temps continu occupent une large place dans la littérature. Les systèmes discrets sont quant à eux d'un intérêt plus récent mais de plus en plus croissant. Ils ont une grande importance pratique. D'une part ils sont utilisés en tant que modèle approché pour l'étude des systèmes continus, et d'autre part ils sont le modèle de nombreux problèmes dynamiques qui sont d'origine discrète (systèmes économiques, modèles de croissance d'une population ...). Dans ce mémoire, nous traitons le modèle discret de compétition de type Lotka-Volterra qui a été déjà examiné d'ailleurs par R.M.May [4]. Une question fondamentale en biologie mathématique concerne la survie à long terme de chaque espèce. Des nombreux critères ont été utilisés pour définir la notion de survie a long terme, par exemple La stabilité d'un équilibre de coexistence est l'un des critères. Nous on utilise la notion de persistance, qui est défini ci-dessous pour montrer la survie de la population.

Notre mémoire est composé de quatre chapitres.

-Dans le chapitre 1, on présente un rappel sur les équations aux différences, et des notions qu'on les utilisera par la suite.

-Dans le chapitre 2, nous étudions le modèle logistique proposé dans [5]

$$x(n+1) = x(n) \exp \left[r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

où $\{r(n)\}$ et $\{k(n)\}$ sont des suites réelles strictements positives ω périodique pour $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. De plus il existe des constantes positives r_* , r^* , k_* , et k^* telles que

$$0 < r_* \leq r(n) \leq r^*, \quad 0 < k_* \leq k(n) \leq k^*, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Du point de vue biologique, on suppose que $x(0) > 0$. Donc l'équation (1.1) a une solution positive $x(n)$ partant de $x(0)$. Quand $k(\cdot)$ est constante, toute solution positive de (1.1) converge vers un équilibre positif. On est supposé que $\{r(n)\}$ et $\{k(n)\}$ sont périodiques pour refléter les fluctuations saisonnières. Des conditions suffisantes sont obtenues pour assurer dans la première section la persistance, et dans la deuxième section l'existence d'une solution ω périodique globalement asymptotiquement stable.

-Dans le chapitre 3, nous étudions le modèle de compétition donnée par :

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) \exp \left[r_1(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) \right], \\ y(n+1) = y(n) \exp \left[r_2(n) \left(1 - \frac{y(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) x(n) \right) \right], \end{cases} \quad (1.3)$$

où, pour $i = 1$ et 2 , $\{r_i(n)\}$, $\{k_i(n)\}$ et $\{\mu_i(n)\}$ sont des suites positifs bornées telles que

$$0 < k_{i*} \leq k_i(n) \leq k_i^*, \quad 0 < r_{i*} \leq r_i(n) \leq r_i^*, \quad 0 \leq \mu_{i*}. \quad (1.4)$$

Ici, pour toute suites bornées $\{a(n)\}$, $a^* = \sup a(n)$ et $a_* = \inf a(n)$.

Le système (1.3) est un modèle discret de compétition de deux espèces de type Lotka-Volterra (voir [5]). Noter que le système (1.3) est un résultat de l'accouplement de deux équations scalaires de la forme (1.1). Il est normal d'obtenir des résultats similaires pour (1.3) à ceux de [5] quant $\mu_1(n) \equiv \mu_2(n) \equiv 0$. De même, dans la première section on étudie la persistance du système (1.3), après dans la deuxième on montre l'existence et la stabilité globale de la solution ω périodique, et on conclue ce chapitre par quelques remarques et discussions.

-Enfin dans le chapitre 4, on fait une étude numérique.

Chapitre 2

Préliminaires.

2.1 Modèle de Lotka-Volterra

On considère deux espèces x et y . Il y a principalement trois interactions entre les deux espèces :

Compétition : Lorsque les deux espèces interagissent et que cette interaction entraîne la décroissance du taux de reproduction ou du taux de croissance de chaque espèce (par exemple, lorsqu'il y a une concurrence sur la nourriture, l'espace, etc.), on dit qu'on est en présence de compétition.

Mutualisme : Lorsque les interactions entre les deux espèces entraînent une augmentation du taux de croissance ou de reproduction de chaque population et que chaque espèce tire profit.

Prédation : Lorsque le taux de croissance de l'espèce x décroît tandis que le taux de croissance de y croît, on dit qu'on est en présence d'un système proie prédateur avec x proie et y prédateur.

2.2 Equations aux Différences

Définition 2.2.1 *Les équations aux différences (ou équations récurrentes, ou encore modèles discrets) décrivent généralement l'évolution au cours du temps de phénomènes biologiques observés à intervalles de temps réguliers. Par exemple, si une population a des générations discrètes, la taille de la population à la génération $n + 1$, noté x_{n+1} ou bien $x(n + 1)$.*

Ainsi une équation à différence du premier ordre s'écrit :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Définition 2.2.2 *La solution de l'équation (2.1) est une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui satisfait (2.1) pour tout $n = 0, 1, \dots$*

2.2.1 Etude d'un système dynamique discret en dimension 1

Equations aux différences linéaires avec coefficients constants

Considérons l'équation aux différences de la forme :

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$, s'appelle équation aux différences linéaire de premier ordre.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.3 [2] Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour une condition initiale x_0 , il existe une unique solution de l'équation (2.2) qui est donnée par :

$$x_n = \begin{cases} x_0 + bn & \text{si } a = 1 \\ ca^n + \frac{b}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

$$\text{où } c = x_0 - \frac{b}{1-a}.$$

Preuve. Par itération

n	$x_{n+1} = ax_n + b.$
0	$x_1 = ax_0 + b.$
1	$x_2 = ax_1 + b = a^2x_0 + (1+a)b.$
2	$x_3 = ax_2 + b = a^3x_0 + (1+a+a^2)b.$
\vdots	
$n-1$	$x_n = ax_{n-1} + b = a^n x_0 + (1+a+a^2+\dots+a^{n-1})b.$ $= a^n x_0 + \frac{1-a^n}{1-a}b = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$

Par conséquent, pour tout $n = 0, 1, \dots$

$$x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1).$$

Si $a = 1$, $x_n = a^n x_0 + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i = x_0 + bn.$ (C.Q.F.D). ■

Remarque 2.2.4 Quand $b = 0$, l'équation (2.2) devient

$$x_{n+1} = ax_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

et elle s'appelle une équation homogène de solution

$$x_n = a^n x_0.$$

Si $a = 1$, $x_n = x_0$ c'est la solution de l'équation (2.4).

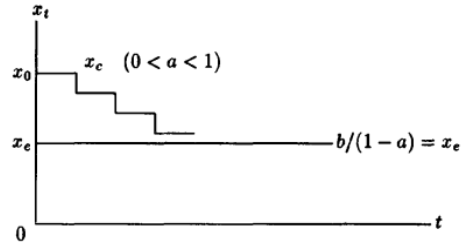


FIG. 2.1 - $x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$.

Remarque 2.2.5 Comme dans le cas d'une EDO la solution de l'équation non homogène (2.2) est composée de deux solutions $x_c(n)$ et x_e , la première solution $x_c(n) \equiv ca^n \equiv \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^n = a^n (x_0 - x_e)$ la solution de l'équation homogène (2.4) et x_p ou l'équilibre x_e la solution particulière de l'équation (2.2), donc $x_p \equiv x_e = \frac{b}{1-a}$ ou $a \neq 1$.

Remarque 2.2.6 - Si $|a| < 1$ i.e. $-1 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \right] = 0 + \frac{b}{1-a} \quad \forall x_0,$$

donc toutes les solutions convergent vers l'équilibre x_e . Alors le système est **stable**.

- Si $|a| > 1$ i.e. $a < -1$ ou $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \pm\infty$, dans ce cas le système est **instable**. (voire le figure (2.1))

Exemple 2.2.7 D'après le théorème (2.2.3), pour $x_0 = d$

- L'équation à différence

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

a pour solution

$$x_n = d2^n$$

- L'équation

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 2, \quad n = 0, 1, \dots$$

a pour solution

$$x_n = (d-4) \left(\frac{1}{2} \right)^n + 4.$$

Dans ce cas $x_e = 4$ et $0 < a = 0.5 < 1$: le système est stable car $x_n \rightarrow 4 \forall n$.

Equations aux différences lineaires avec coefficients variables

Le prochain résultat dans cette section donne une formule explicite pour les solutions de l'équation de premier ordre, linéaire, non homogène avec des coefficients variables :

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Théorème 2.2.8 [1] Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ des suites réelles. Pour une condition initiale x_0 , il existe une unique solution de l'équation (2.5) qui est donnée par :

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} a_i \right) b_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

$$\text{où par définition, } \prod_{i=0}^{-1} a_i = 1, \prod_{i=n}^{n-1} a_i = 1.$$

Stabilité

Dans cette section nous intéressons particulièrement à la stabilité de point fixe.

Définition 2.2.9 1. L'orbite positif en $x_0 = d$ pour le système dynamique (2.1) est la suite

$$\gamma^+(d) := \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{d, f(d), f(f(d)), \dots\}.$$

2. Un point x^* du domaine de définition de f est un point d'équilibre du système dynamique (2.1) ou un point fixe pour l'application f si $f(x^*) = x^*$.

En d'autres termes, x^* est une solution constante de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, puisque si $x(t_0) = x^*$, alors pour tout n , $x_n = x^*$.

Graphiquement, les points fixes de f sont l'intersection de la courbe représentative de f et de la première bissectrice $y = x$.

Exemple 2.2.10 $x_{n+1} = x_n^3$ possède trois points fixes $x_1^* = -1, x_2^* = 0$ et $x_3^* = 1$, (voir figure (2.2)).

Exemple 2.2.11 Soit l'équation à différence logistique

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) =: f(x_n) \quad (2.7)$$

Les points fixes sont solutions de l'équation

$$\begin{aligned} f(x^*) = x^* &\iff x^* = 4x^*(1 - x^*) \\ &\iff x^* [1 - 4(1 - x^*)] = 0 \\ &\iff x^* = 0 \text{ ou } 1 - 4(1 - x^*) = 0 \\ &\iff x^* = 0 \text{ ou } x^* = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

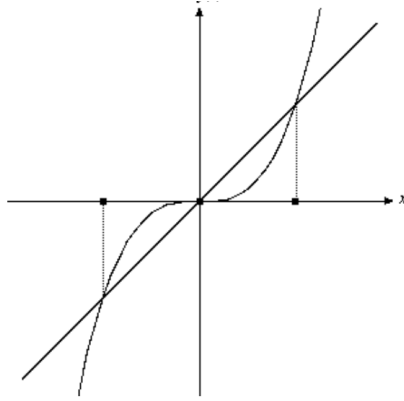


FIG. 2.2 – Représentation de $f(x) = x^3$ et des points fixes de $x_{n+1} = x_n^3$.

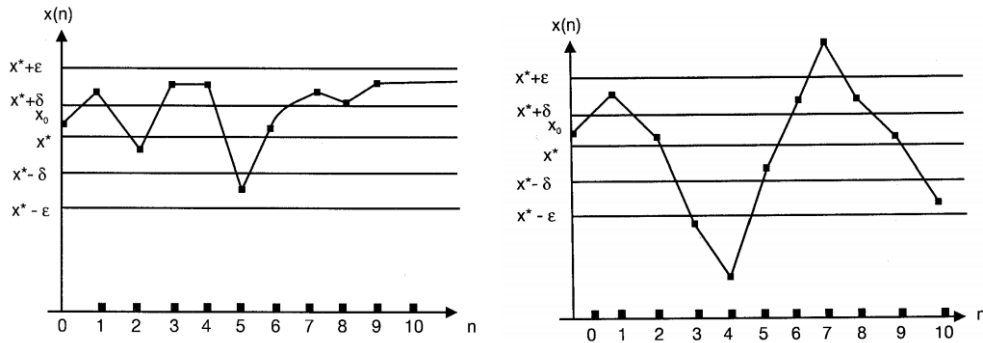


FIG. 2.3 – x^* est stable, x^* est instable.

Donc l'équation (2.7) a deux point fixes, l'origine $x_1^* = 0$ ainsi que le point $x_2^* = \frac{3}{4}$.

- Définition 2.2.12**
1. Le point fixe x^* de l'équation (2.1) est **stable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0, |x_0 - x^*| < \delta$ implique $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ pour tout $n > 0$.
 2. Si x^* n'est pas stable, il est dit **instable**.

Remarque 2.2.13 – x^* est **stable**, c'est-à-dire, si x_0 est dans $]x^* - \delta, x^* + \delta[$, alors $x(n)$ est dans $]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ pour tout n .
 – x^* est **instable**, c'est-à-dire il existe $\varepsilon > 0$ tel que, aussi près que soit x_0 de x^* il y aura au moins un n tel que $x(n)$ soit au moins distant de ε de x^* , (voir figure (2.3)).

3. Le point fixe x^* de l'équation (2.1) est **asymptotiquement stable**

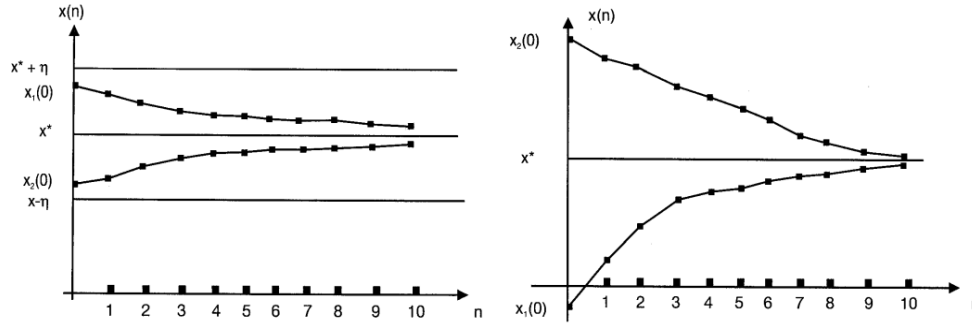


FIG. 2.4 – x^* est asymptotiquement stable, x^* est globalement asymptotiquement stable.

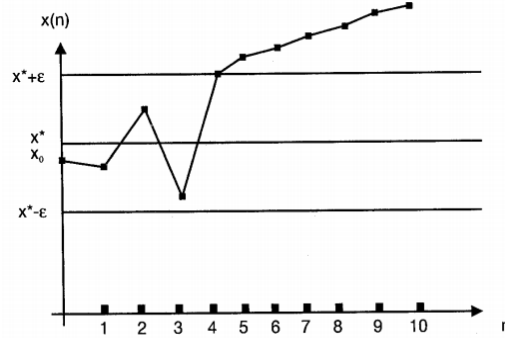


FIG. 2.5 – x^* est répulsif; à chaque itération, on s'éloigne de x^* .

(A.S) s'il est stable et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 satisfait $|x_0 - x^*| < \eta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

4. La solution d'équilibre x^* de (2.1) est **globalement attractive** sur un interval I si $x_0 \in I$ implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.
5. La solution d'équilibre x^* de (2.1) est **globalement asymptotiquement stable** s'il est stable et globalement attractive.

Remarque 2.2.14 – x^* est **asymptotiquement stable**, car x_n est toujours dans $]x^* - \eta, x^* + \eta[\forall n$.

– x^* est **globalement asymptotiquement stable**, car la condition est vérifiée pour tout x_0 , (voir figure (2.4))

6. Le point fixe x^* de (2.1) est dit **répulsif** sur I s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in I$ avec $0 < |x_0 - x^*| < \varepsilon$, il existe $N \geq 1$ tel que $|f^n(x_0) - x^*| > \varepsilon$, (voir figure (2.5)).

Remarque 2.2.15 *Répulsif implique instable mais pas l'inverse.*

Remarque 2.2.16 *Ces définitions ne sont pas d'un intérêt pratique car elles font intervenir les solutions de (2.1). La linéarisation est une méthode pour pallier à ce problème.*

Stabilité locale d'un point fixe

Soit l'équation aux différences du premier ordre

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

admettant un point fixe x^* vérifiant $x^* = f(x^*)$.

posons : $u_n = x_n - x^*$.

Le développement limité d'ordre 1 de la fonction f au voisinage du point fixe x^* est donné par :

$$f(x_n) = f(x^*) + \frac{df}{dx_n}(x^*)(x_n - x^*) + o(x_n - x^*).$$

$$\iff x_{n+1} = f(x^*) + \frac{df}{dx_n}(x^*)(x_n - x^*) + o(x_n - x^*), \text{ voir (2.1)}$$

$$\iff u_{n+1} + x^* \simeq f(x^*) + \frac{df}{dx_n}(x^*)(x_n - x^*), \text{ d'après le changement de variable}$$

$$\iff u_{n+1} \simeq \frac{df}{dx_n}(x^*)u_n, \text{ car } x^* \text{ est un point fixe.}$$

$$\text{Notons } \lambda := \frac{df}{dx_n}(x^*).$$

Le modèle linéaire local s'écrit :

$$u_{n+1} \simeq \lambda u_n \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.17 *Ce modèle linéaire n'est valable qu'au voisinage du point fixe, qui est l'origine du système linéarisé.*

La stabilité locale du point fixe dépend de la valeur de la constante λ . En effet, la solution du système linéarisé s'écrit :

$$u_n = \lambda^n u_0$$

où u_0 est la condition initial.

On distingue plusieurs cas :

Remarque 2.2.18 *i. $\lambda < -1$*

Dans ce cas la solution s'écrit : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$. La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives et négatives et son module augmente avec n (figure (2.6)). Dans ce cas, la solution s'éloigne du point fixe qui est donc instable.

ii. $\lambda = -1$

La solution du système (2.8) s'écrit $u_n = (-1)^n u_0$, elle prend alternativement des valeurs positives u_0 et négatives $-u_0$, donc 0 est un point fixe instable.

iii. $-1 < \lambda < 0$

Ici, la solution est : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$, elle prend alternativement des valeurs positives et négatives et son module diminue avec n (figure (2.7)), la solution s'approche et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, il est donc localement asymptotiquement stable.

iv. Pour $\lambda = 0$, $u_{n+1} = 0$. Dès la première itération on va au point fixe 0.

v. $0 < \lambda < 1$

La solution du système (2.8) est donnée par $u_n = \lambda^n u_0$. Elle est du signe de la condition initiale et son module diminue avec n (figure (2.8)). Alors, la solution s'approche du 0 donc est un point asymptotiquement stable.

vi. $\lambda = 1$

Ici, la solution est $u_n = u_0$. L'équation linéarisée est confondue avec la première bissectrice, i.e. toute condition initiale est un point fixe de l'équation linéarisée (2.8).

vii. $\lambda > 1$

La solution du système linéarisé est $u_n = \lambda^n u_0$ et s'éloigne du point fixe qui est instable. (figure (2.9)).

Conclusion 2.2.19 L'origine est asymptotiquement stable lorsque :

$$-1 < \lambda < 1$$

Théorème 2.2.20 [3] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathbb{C}^1 dans un voisinage de point fixe x^* , alors :

- Si $\left| f'(x^*) \right| > 1$, x^* est instable.
- Si $\left| f'(x^*) \right| < 1$, x^* est localement asymptotiquement stable.

Remarque 2.2.21 Le diagramme en escalier est une méthode permettant d'étudier graphiquement le nombre et la nature des points fixes d'une équation du type $x_{n+1} = f(x_n)$, en représentant f dans le plan (x_{n+1}, x_n) et à partir de la condition initiale x_0 , la valeur x_1 est obtenue sur l'axe des ordonnées grâce à la droite $x_{n+1} = f(x_n)$, puis reportée sur l'axe des abscisses grâce à la droite $x_{n+1} = x_n$. A partir de x_1 on peut alors de la même manière déterminer x_2 et ainsi de suite.

Exemple 2.2.22 Considérons l'équation à différence suivante :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} =: f(x_n) \quad (2.9)$$

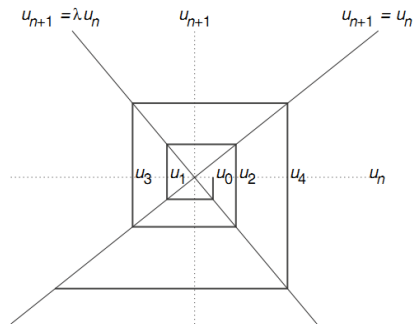


FIG. 2.6 – Cas $\lambda < -1$: les solutions s'éloignent du point fixe 0 qui est donc instable.

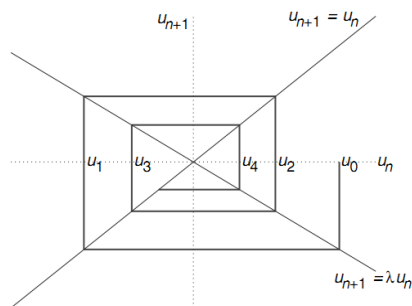


FIG. 2.7 – Construction graphique des solutions de l'équation $u_{n+1} = \lambda u_n$ en utilisant le plan (u_{n+1}, u_n) . Cas $-1 < \lambda < 0$: les solutions s'approchent du point fixe 0 qui est donc stable.

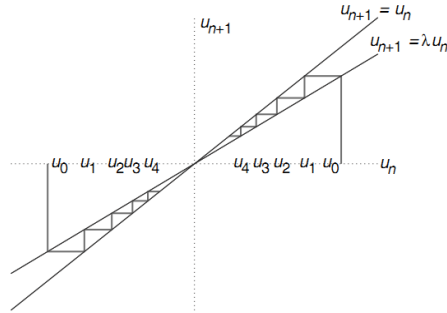


FIG. 2.8 – Construction graphique des solutions de l'équation $u_{n+1} = \lambda u_n$ en utilisant le plan (u_{n+1}, u_n) . Cas : $0 < \lambda < 1$: les solutions u_n s'approchent du point fixe 0 qui est donc stable.

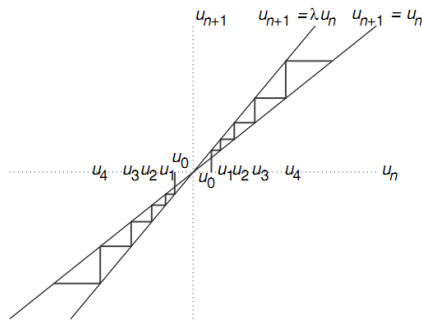


FIG. 2.9 – Construction graphique des solutions de l'équation $u_{n+1} = \lambda u_n$ en utilisant le plan (u_{n+1}, u_n) . Cas : $\lambda > 1$: les solutions u_n s'éloignent du point fixe 0 qui est donc instable.

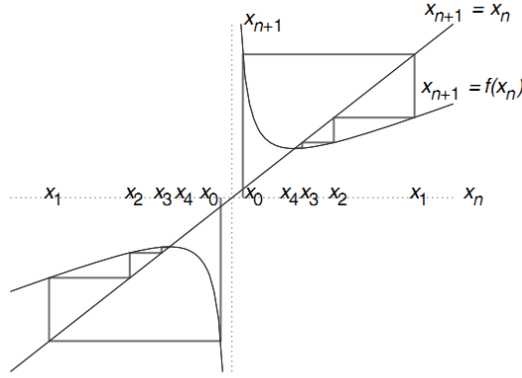


FIG. 2.10 – Construction graphique des solutions de l'équation (2.9) en utilisant le plan (x_{n+1}, x_n) pour deux conditions initiales différentes

Les points fixes sont solution de l'équation

$$\begin{aligned}
 f(x^*) = x^* &\iff x^* = \frac{x^*}{2} + \frac{1}{x^*} \\
 &\iff 2(x^*)^2 = (x^*)^2 + 2 \\
 &\iff (x^*)^2 = 2 \\
 &\iff (x^* - \sqrt{2})(x^* + \sqrt{2}) = 0.
 \end{aligned}$$

L'équation (2.9) admet deux points fixes : $x_1^* = \sqrt{2}$ et $x_2^* = -\sqrt{2}$.

$$\frac{df}{dx_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x_n)^2}, \text{ et } \frac{df}{dx_n}(\pm\sqrt{2}) = 0.$$

D'après le théorème (2.2.20) les deux points fixes de l'équation (2.9) sont localement asymptotiquement stable (figure(2.10)).

Exemple 2.2.23 Considérons le modèle de **Ricker** suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n \exp \left[r \left(1 - \frac{x_n}{k} \right) \right] \quad (2.10)$$

où $r > 0$ et $k > 0$.

x_n est la densité de la population à la génération n , r le taux de croissance de cette population à la génération n , k sa capacité limite.

Calculons les points fixes de l'équation (2.10).

Pour cela on résoud l'équation

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*) \\ \Leftrightarrow x^* &= x^* \exp \left[r \left(1 - \frac{x^*}{k} \right) \right] \\ \Leftrightarrow x^* \left(1 - \exp \left[r \left(1 - \frac{x^*}{k} \right) \right] \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^* &= 0 \text{ ou } x^* = k, \end{aligned}$$

donc l'équation (2.10) admet deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = k$.

Étudions la stabilité de ses points fixes :

On a

$$f(x_n) = x_n \exp \left[r \left(1 - \frac{x_n}{k} \right) \right],$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= \exp \left[r \left(1 - \frac{x_n}{k} \right) \right] - r \frac{x_n}{k} \exp \left[r \left(1 - \frac{x_n}{k} \right) \right] \\ &= \left[1 - r \frac{x_n}{k} \right] \exp \left[r \left(1 - \frac{x_n}{k} \right) \right], \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} f'(x_1^*) &= f'(0) = e^r > 1, \\ f'(x_2^*) &= f'(k) = 1 - r. \end{aligned}$$

$x_2^* = k$ est localement asymptotiquement stable si $-1 < 1 - r < 1$, c'est-à-dire lorsque $0 < r < 2$, sinon x_2^* est instable.

Conclusion 2.2.24 – Le point fixe trivial est toujours instable.

- Si $0 < r < 2$, $x_2^* = k$ est localement asymptotiquement stable sinon x_2^* est instable.
- Dans le cas où $0 < r < 2$, x_2^* est globalement asymptotiquement stable.

Définition 2.2.25 Un point d'équilibre x^* de (2.1) est dit **hyperbolique** si f est différentiable en x^* et $|f'(x^*)| \neq 1$.

Définition 2.2.26 Soit x^* un point fixe asymptotiquement stable d'une application f .

Le **basin d'attraction** $\beta(x^*)$ de x^* est le plus grand ensemble J qui

contient x^* et il est tel que $f^n(x) \rightarrow x^*$, quand $n \rightarrow \infty$ pour tout $x \in J$.

Définition 2.2.27 Un ensemble M est dit **invariant** si $f(M) \subset M$, c'est-à-dire pour tout $x \in M$, $\gamma^+(x) \in M$.

Stabilité dans le cas d'un point fixe non hyperbolique

Soit x^* un point fixe non hyperbolique de (2.1), donc il y a deux cas possible :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f'(x^*) &= 1 \\ \text{(b)} \quad f'(x^*) &= -1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Cas de $f'(x^*) = 1$

Exemple 2.2.28 *Considérons l'équation suivante*

$$x_{n+1} = x_n + (x_n)^3, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.12}$$

Les points fixes de cette équation sont solution de

$$\begin{aligned} x^* &= x^* + (x^*)^3 \\ \implies (x^*)^3 &= 0 \\ \implies x^* &= 0. \end{aligned}$$

Donc l'équation à différence (2.12) admet un seul point fixe qui est 0.

i. Supposons que $x_0 > 0$, alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + (x_0)^3 > x_0, \\ x_2 &= x_1 + (x_1)^3 > x_1, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + (x_{n-1})^3 > x_{n-1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, $x_n > x_{n-1}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, puisque le seul point fixe est zéro, $\{x_n\}$ diverge vers $+\infty$.

ii. Supposons que $x_0 < 0$, alors :

$$x_1 = x_0 + (x_0)^3 < x_0,$$

et par récurrence on peut prouver que $x_n < x_{n-1}$ pour tout n , ceci implique que $\{x_n\}$ diverge vers $-\infty$. Ainsi, l'équilibre est répulsif.

Exemple 2.2.29 *Considérons l'équation suivante*

$$x_{n+1} = x_n - (x_n)^3, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.13}$$

Zéro est le seul point d'équilibre.

a. Supposons que $x_0 \in (0, 1/\sqrt{3})$.

On a : $x_1 = x_0 - (x_0)^3 < x_0$ et $x_1 \in (0, 1/\sqrt{3})$, par récurrence on obtient que $x_n < x_{n-1}$ pour tout n et $x_n \in (0, 1/\sqrt{3})$. Alors $\{x_n\}$ est une suite décroissante des nombres de $(0, 1/\sqrt{3})$. Alors $\{x_n\}$ converge vers l'unique point fixe zéro.

b. Supposons que $x_0 \in (-1/\sqrt{3}, 0)$.

Ici, $x_1 = x_0 - (x_0)^3 > x_0$ et par récurrence on a : $x_n > x_{n-1}$ et $x_n \in (-1/\sqrt{3}, 0)$. Alors $\{x_n\}$ est une suite croissante des nombres de $(-1/\sqrt{3}, 0)$, par conséquent $\{x_n\}$ converge vers zéro.

Exemple 2.2.30 *Considérons l'équation à différence*

$$x_{n+1} = x_n + (x_n)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Zéro est le seul point fixe de (2.14).

- Si $x_0 > 0$, alors $x_1 = x_0 + (x_0)^2 > x_0$, et par récurrence $x_n > x_{n-1}$ pour tout n . Par conséquent $\{x_n\}$ diverge vers $+\infty$.
- Supposons que $x_0 \in (-1/2, 0)$, alors $x_1 = x_0 + (x_0)^2 > x_0$ et $x_1 \in (-1/2, 0)$. Par récurrence $\{x_n\}$ est une suite croissante des nombres de $(-1/2, 0)$, donc elle converge vers l'unique point d'équilibre zéro.

On a les théorèmes suivants :

Théorème 2.2.31 *Si x^* un point fixe du système où $f \in C^2$ et $f'(x^*) = 1$.*

Alors

- $f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ est inférieurement asymptotiquement stable et supérieurement instable (ou répulsif).
- $f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ est supérieurement asymptotiquement stable et inférieurement instable (ou répulsif).

Théorème 2.2.32 *Si x^* un point fixe du système où $f \in C^3$ et $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) = 0$. Alors*

- $f'''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ est instable.
- $f'''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ est stable.

Cas de $f'(x^*) = -1$ Nous avons les résultats suivants :

Théorème 2.2.33 *(stabilité, cas de $f'(x^*) = -1$)[1]*

Soit f une fonction trois fois continument différentiable dans un voisinage de point d'équilibre x^ tel que $f'(x^*) = -1$.*

Soit

$$S_f(x^*) = 2f'''(x^*) + 3\left(f''(x^*)\right)^2. \quad (2.15)$$

Si $S_f(x^) > 0$, alors x^* est asymptotiquement stable, et si $S_f(x^*) < 0$, alors x^* est instable. Où S_f s'appelle **dérivée Schwarzienne** de f .*

Définition 2.2.34 *Soit f une fonction trois fois continument différentiable en un point x tels que le $f'(x) \neq 0$. La dérivée Schwarzienne de f au point x est définie par :*

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2. \quad (2.16)$$

Corollaire 2.2.35 [1] Soit f une fonction trois fois continument différentiable dans un voisinage de point d'équilibre x^* . Supposons que

$f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) = 0$ ou bien $f'(x^*) = -1$, alors :

1. Si $S_f(x^*) < 0$, alors x^* est un nœud stable de (2.1).
2. Si $S_f(x^*) > 0$, alors x^* est un nœud instable de (2.1).

Exemple 2.2.36 Considérons l'équation à différence

$$x_{n+1} = -x_n + (x_n)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

Les points fixes sont solution de l'équation

$$\begin{aligned} x^* &= -x^* + (x^*)^2 \\ \implies (x^*)^2 - 2x^* &= 0 \\ \implies x^*(x^* - 2) &= 0 \\ \implies x^* = 0 \text{ ou } x^* = 2. \end{aligned}$$

Donc l'équation (2.17) admet deux points fixes : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 2$.

1. $f'(x_n) = -1 + 2x_n$, alors :
 - (a) $f'(2) = 3$, donc d'après le théorème (2.2.20) x_2^* est instable.
 - (b) $f'(0) = -1$.

Appliquons le théorème (2.2.33).

On sait que :

$$\begin{aligned} S_f(x_1^*) &= 2f'''(x_1^*) + 3\left(f''(x_1^*)\right)^2 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Alors x_1^* est asymptotiquement stable.

2. Considérons l'équation à différence

$$x_{n+1} = -x_n - (x_n)^3, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.18)$$

Cette équation admet un unique point d'équilibre $x^* = 0$.

$f'(x_n) = -1 - 3(x_n)^2$, alors : $f'(0) = -1$.

On a :

$$\begin{aligned} S_f(0) &= 2f'''(0) + 3\left(f''(0)\right)^2 \\ &= -12. \end{aligned}$$

Alors d'après le théorème (2.2.33) x^* est instable.

2.2.2 Etude d'un système dynamique discret en dimension 2

Considérons le système des équations aux différences de la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.19)$$

où f et g sont des fonctions données.

Théorie linéaire

Dans cette section, on présente des notions et des résultats de la théorie des systèmes linéaires et d'équations.

Systèmes linéaires en dimension 2 Considérons le système

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

Le système (2.20) s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Posons :

$$z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

de ce changement de variable le système (2.20) devient :

$$z_{n+1} = A z_n \quad (2.22)$$

donc

$$\begin{aligned} z_1 &= A z_0 \\ z_2 &= A z_1 = A^2 z_0 \\ &\vdots \\ z_n &= A^n z_0. \end{aligned}$$

Alors la solution de (2.22) est $z_n = A^n z_0$.

Définition 2.2.37 Deux solutions z^1 et z^2 de (2.20) sont **linéairement indépendant** si :

$$c_1 z^1 + c_2 z^2 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0.$$

Si non elles sont **linéairement dépendant**.

Définition 2.2.38 L'ensemble $\{z^1, z^2\}$ de deux solutions linéairement indépendantes s'appelle un **ensemble fondamental** de solutions, et dans ce cas $F = (z^1, z^2)$ est une **matrice fondamentale** de (2.20).

Le système (2.20) s'appelle un système homogène, avec ce système nous pouvons considérer le système non homogène de la forme

$$z_{n+1} = A z_n + b_n, \quad z_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.23)$$

où $b_n \in \mathbb{R}^2$ et $z_0 \in \mathbb{R}^2$ sont donnés.

Le problème à valeur initial (2.23) a une unique solution donnée par :

$$z_n = A^n z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i} b_i, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.24)$$

Si $b_n = b$, alors on obtient

$$z_n = A^n z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i} b, \quad n = 0, 1, \dots$$

Puissance de matrice et la forme de jordan On rappelle quelques notions de base sur l'algèbre linéaire.

Soit A une matrice de deux dimensions

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est : $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, et la trace de A est : $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Le polynôme

$$\mathbf{p}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

s'appelle le **polynôme caractéristique** de A . Les zéros de $\mathbf{p}(\lambda)$ s'appellent les **valeurs propres** de A . Ici I c'est la matrice identité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si λ est une valeur propre de A , un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$ s'appelle **vecteur propre** de A associé à λ . La matrice A est **non singulière** si toutes ses valeurs propres sont différents à 0.

Deux matrice A et B sont **semblable** s'il existe une matrice non singulière P tel que $B = P^{-1}AP$, P^{-1} est la matrice inverse de la matrice de passage P , i.e., une matrice qui satisfait $PP^{-1} = I$.

Remarque 2.2.39 Les matrices semblables A et B ont les mêmes valeurs propres et il y a une correspondance entre les vecteurs propres

$P^{-1}v$ de B et les vecteurs propres v de A .

Théorème 2.2.40 (la forme normale de Jordan)

Toute matrice carrée réelle A est semblable à une matrice J donnée par un des cas suivants :

1. Si A à deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

2. Si A à une valeur propre double réelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

3. Si A à deux valeurs propres complexes $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = \frac{\text{tr} A}{2}$

$$\text{et } \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}, \text{ alors}$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

D'après ce théorème on peut calculer A^n , en utilisant par

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1},$$

où J est donnée par un des trois cas du théorème (2.2.40).

Solution d'équilibre et linéarisation

Supposons que les fonctions f et g de (2.19) sont continument différentiables dans leurs domaine de définition.

Définition 2.2.41 Une solution d'équilibre ou point fixe de (2.19) noté (x^*, y^*) , vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n, \\ y_{n+1} = y_n. \end{cases}$$

On trouve donc les points fixes du système (2.19) en résolvant les équations suivantes :

$$\begin{cases} x^* = f(x^*, y^*), \\ y^* = g(x^*, y^*). \end{cases}$$

Nous définissons une variable locale $u_n = x_n - x^*$ et $v_n = y_n - y^*$.

Pour faire la linéarisation au système (2.19), en réalisant le développement limité du premier ordre de la fonction f et la fonction g au voisinage du point fixe (x^*, y^*) qui est donné par :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(x_n, y_n) = f(x^*, y^*) + (x_n - x^*) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*, y^*) + (y_n - y^*) \frac{\partial f}{\partial y_n}(x^*, y^*) + o(x_n - x^*, y_n - y^*), \\ g(x_n, y_n) = g(x^*, y^*) + (x_n - x^*) \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*, y^*) + (y_n - y^*) \frac{\partial g}{\partial y_n}(x^*, y^*) + o(x_n - x^*, y_n - y^*), \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_{n+1} = x^* + (x_n - x^*) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*, y^*) + (y_n - y^*) \frac{\partial f}{\partial y_n}(x^*, y^*), \\ y_{n+1} = y^* + (x_n - x^*) \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*, y^*) + (y_n - y^*) \frac{\partial g}{\partial y_n}(x^*, y^*), \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_{n+1} + x^* \simeq x^* + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*, y^*) + v_n \frac{\partial f}{\partial y_n}(x^*, y^*), \\ v_{n+1} + y^* \simeq y^* + u_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*, y^*) + v_n \frac{\partial g}{\partial y_n}(x^*, y^*), \end{cases} \quad (\text{d'après le changement de variable}). \end{aligned}$$

Alors la linéarisation du système au voisinage de ce point fixe conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\simeq u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*, y^*) + v_n \frac{\partial f}{\partial y_n}(x^*, y^*), \\ v_{n+1} &\simeq u_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*, y^*) + v_n \frac{\partial g}{\partial y_n}(x^*, y^*), \end{aligned}$$

où (u_n, v_n) sont les coordonnées locales au voisinage du point d'équilibre, $u_n = x_n - x^*$ et $v_n = y_n - y^*$.

Le système s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \simeq A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y_n}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y_n}(x^*, y^*) \end{pmatrix},$$

qui est la matrice Jacobienne calculée au point fixe. Le système précédent est un système linéaire en dimension 2.

Solutions d'un système linéaire

Soit un système linéaire de deux équations :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

où A est la matrice Jacobienne au voisinage d'un point fixe. Les solutions de ce système dépendent des valeurs propres de la matrice A , qui sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

On distingue trois cas différents :

1. Cas de deux valeurs propres réelles distinctes

Dans ce cas la matrice A admet deux valeurs propres réelles $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on pose

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \\ \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'après le théorème (2.2.40), dans ce cas

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

Dans la nouvelle base, le système s'écrit sous la forme simple suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \lambda_1 u_n, \\ v_{n+1} = \lambda_2 v_n. \end{cases}$$

à la solution suivante

$$\begin{cases} u_n = (\lambda_1)^n u_0, \\ v_n = (\lambda_2)^n v_0. \end{cases}$$

Donc, on distingue trois cas :

- $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, les solutions u_n et v_n tendent vers $\pm\infty$. Toutes les trajectoires s'éloignent du point fixe $(0, 0)$ qui est par conséquent instable, dans ce cas $(0, 0)$ est dit **nœud instable**.
- $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, les solutions u_n et v_n tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Toutes les trajectoires tendent vers le point fixe $(0, 0)$ qui est donc stable, $(0, 0)$ est dit **nœud stable**.
- $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, ou inversement, ici quand $n \rightarrow \infty$, une des solutions tend vers $\pm\infty$ et l'autre tend vers 0. Alors le point fixe $(0, 0)$ est instable, ici $(0, 0)$ est dit **un point selle**.

La solution du système dans la base de départ est

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n u_0 \\ (\lambda_2)^n v_0 \end{pmatrix},$$

avec $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ donnée.

2. Cas d'une valeur propre réelle double

Dans la nouvelle base et d'après le théorème (2.2.40) le système linéarisé s'écrit

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

La solution de ce système est

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

de l'algèbre linéaire, on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n(\lambda)^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Deux cas peuvent donc être distingués :

- $|\lambda| > 1$, donc le point fixe est un **nœud instable**.
- $|\lambda| < 1$, $(0, 0)$ est localement **nœud stable**.

La solution du système initial est :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P = P \begin{pmatrix} (\lambda)^n u_0 + n v_0 (\lambda)^{n-1} \\ (\lambda)^n v_0 \end{pmatrix},$$

3. Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées

Dans la nouvelle base et d'après le théorème (2.2.40) le système linéarisé s'écrit

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

on pose : $\alpha = r \cos(\theta)$ et $\beta = r \sin \theta$, donc le système devient :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

où r est le module des valeurs propres et θ leur argument.

D'après l'algèbre linéaire

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

Trois cas peuvent donc être distingués :

- $r > 1$, il s'agit d'un **foyer stable**. La solution tourne autour du point fixe en s'en approchant (figure (2.11)).
- $r = 1$, il s'agit d'un **centre**. La solution tourne autour du point fixe à distance constante de celui-ci (figure (2.12)).

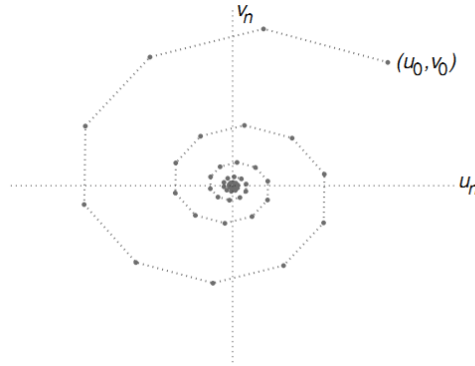


FIG. 2.11 – foyer stable

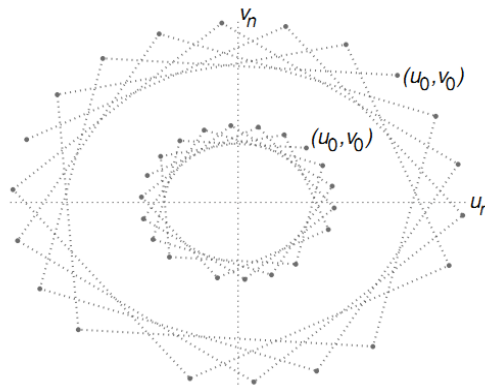


FIG. 2.12 – Centre.

- $r < 1$, il s'agit d'un **foyer instable**. La solution tourne autour du point fixe mais en s'en éloignant (figure (2.13))
la solution du système linéaire dans la base de départ

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

Dans ce cas la matrice de passage P comporte sur sa première colonne le vecteur b associé à la partie imaginaire et sur sa seconde colonne le vecteur a correspondant à la partie réelle des vecteurs propres conjugués $\vartheta_{1,2} = a \pm ib$, donc

$$P = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.42 1. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$

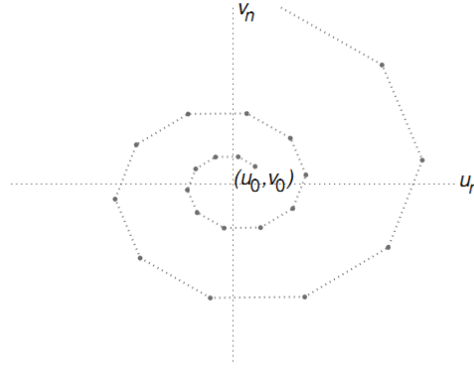


FIG. 2.13 – foyer instable

– L'équation caractéristique est donnée par

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-4) = 25 = (5)^2.$$

Donc on obtient deux valeurs propres réelles, $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.

– Les vecteurs propres ϑ_1 et ϑ_2 associés aux λ_1 et λ_2 vérifient

$$(A - \lambda_i I) \vartheta_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

– Calculons ϑ_1 :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I) \vartheta_1 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+1 & 2 \\ 3 & 1+1 \end{pmatrix} \vartheta_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 3\vartheta_{11} + 2\vartheta_{12} &= 0 \\ \Rightarrow \vartheta_{11} &= -\frac{2}{3}\vartheta_{12}, \end{aligned}$$

pour $\vartheta_{12} = -3$, $\vartheta_{11} = 2$.

Alors,

$$\vartheta_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

– Calculons ϑ_2 :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I) \vartheta_2 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 3 & 1-4 \end{pmatrix} \vartheta_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{21} \\ \vartheta_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -\vartheta_{21} + \vartheta_{22} &= 0 \\ \Rightarrow \vartheta_{21} &= \vartheta_{22}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\vartheta_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_{21} \\ \vartheta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

– La matrice de passage P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{21} \\ \vartheta_{12} & \vartheta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

– La solution de ce système est :

$$\begin{cases} u_n = (-1)^n u_0, \\ v_n = (4)^n v_0. \end{cases}$$

– La solution du système dans la base de départ est :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n u_0 \\ (4)^n v_0 \end{pmatrix},$$

$$2. \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

– L'équation caractéristique est donnée par

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-4)^2 - 4(8) = -16 = (4i)^2$$

Donc, cette équation à deux valeurs propres complexes et distinctes :

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i = \alpha + i\beta,$$

Le module de ces valeurs propres est $r = 2\sqrt{2}$ et leur argument $\theta = \frac{\pi}{4}$.

– Calculons le vecteur propre ϑ_1 associé à cette valeur propre qui vérifie l'équation suivante

$$A\vartheta_1 = \lambda_1\vartheta_1$$

ce qui conduit au système suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{21} \end{pmatrix} = (2 + 2i) \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{21} \end{pmatrix},$$

qui se réduit à l'équation

$$\vartheta_{11} = -2i\vartheta_{21}.$$

On choisit $\vartheta_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ qui peut s'écrire sous la forme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire :

$$\vartheta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Et comme le vecteur propre ϑ_2 associée à λ_2 est le conjugué de ϑ_1 , donc il donné par

$$\vartheta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on peut utiliser la matrice de passage suivante

$$P = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– La matrice de jordan

$$\begin{aligned} J = P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– Il vient donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= J^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= (2\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

– La solution du système dans la base de départ est :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P (2\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \\ &= (2\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Stabilité linéaire

Dans cette section on présente des notions et des définitions de la stabilité des équilibres.

Par $\|\cdot\|$ on dénote la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 donnée par :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 2.2.43 *Un point fixe (x^*, y^*) est dit hyperbolique si la matrice jacobienne A n'admet que des valeurs propres de module différent de 1. Sinon (x^*, y^*) est non hyperbolique.*

Théorème 2.2.44 (*Théorème de la stabilité linéaire*)[1]

Soit $F = (f, g)$ une fonction continument différentiable définie sur un ensemble ouvert W dans \mathbb{R}^2 , et soit (x^*, y^*) un point fixe de f .

- Si les deux valeurs propres de la matrice jacobienne A sont de module inférieur à 1, alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable.
- Si au moins une valeur propre est de module supérieur à 1, alors (x^*, y^*) est instable.

D'après une analyse directe de l'équation caractéristique de la matrice Jacobienne A , on peut obtenir des conditions explicites pour la nature de point d'équilibre.

Théorème 2.2.45 [1]

- (x^*, y^*) est localement asymptotiquement stable $\Leftrightarrow |tr(A)| < 1 + \det(A) < 2$.
- (x^*, y^*) est répulsif $\Leftrightarrow |tr(A)| < 1 + \det(A)$ et $|\det(A)| > 1$.
- (x^*, y^*) est un point selle $\Leftrightarrow |tr(A)| > |1 + \det(A)|$ et $(tr(A))^2 - 4\det(A) > 0$.
- (x^*, y^*) est non hyperbolique $\Leftrightarrow |tr(A)| = |1 + \det(A)|$ ou $\det(A) = 1$ et $|tr(A)| < 2$.

Existence de cycle limite

Soit le système de deux équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\mu - x_n^2 - y_n^2)(x_n \cos \omega - y_n \sin \omega) =: f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = (\mu - x_n^2 - y_n^2)(x_n \sin \omega + y_n \cos \omega) =: g(x_n, y_n), \end{cases} \quad (2.26)$$

où μ est un paramètre strictement positif.

Les points fixes de ce système sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} x^* = \left(\mu - (x^*)^2 - (y^*)^2 \right) (x^* \cos \omega - y^* \sin \omega), \\ y^* = \left(\mu - (x^*)^2 - (y^*)^2 \right) (x^* \sin \omega + y^* \cos \omega), \end{cases}$$

par conséquent $(0, 0)$ est l'unique point fixe du système.

Etudions la stabilité de ce point :

la jacobienne est :

$$\begin{aligned} A(x_n, y_n) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n, y_n) & \frac{\partial f}{\partial y_n}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_n, y_n) & \frac{\partial g}{\partial y_n}(x_n, y_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x_n(x_n \cos \omega - y_n \sin \omega) & -2y_n(x_n \cos \omega - y_n \sin \omega) \\ +(\mu - x_n^2 - y_n^2) \cos \omega & -(\mu - x_n^2 - y_n^2) \sin \omega \\ -2x_n(x_n \sin \omega + y_n \cos \omega) & -2y_n(x_n \sin \omega + y_n \cos \omega) \\ +(\mu - x_n^2 - y_n^2) \sin \omega & +(\mu - x_n^2 - y_n^2) \cos \omega \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la Jacobienne au (x^*, y^*) est donnée par :

$$A(0, 0) = \mu \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - 2\mu \cos \omega \lambda + \mu^2 = 0.$$

Admet deux valeurs propres complexes et conjuguées :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu \exp(i\omega), \\ \lambda_2 &= \mu \exp(-i\omega), \end{aligned}$$

Le module des valeurs propres est : $|\lambda_{1,2}| = \mu$. Par conséquent, l'origine est localement asymptotiquement stable lorsque $0 < \mu < 1$ et instable ailleurs.

Montrons que lorsque $\mu > 1$ l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable :

Pour cela, effectuons le changement de coordonnées polaires (r_n, θ_n) tel que :

$$\begin{aligned} x_n &= r_n \cos(\theta_n), \\ y_n &= r_n \sin(\theta_n). \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} r_n^2 &= x_n^2 + y_n^2, \\ \tan(\theta_n) &= \frac{y_n}{x_n}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
r_{n+1}^2 &= x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \\
&= (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 (x_n \cos \omega - y_n \sin \omega)^2 + (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 (x_n \sin \omega + y_n \cos \omega)^2 \\
&= (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 \left[(x_n \cos \omega - y_n \sin \omega)^2 + (x_n \sin \omega + y_n \cos \omega)^2 \right] \\
&= (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 \left[(x_n)^2 (\cos \omega)^2 + (y_n)^2 (\sin \omega)^2 - 2x_n y_n \cos \omega \sin \omega + (x_n)^2 (\sin \omega)^2 \right. \\
&\quad \left. + (y_n)^2 (\cos \omega)^2 + 2x_n y_n \cos \omega \sin \omega \right] \\
&= (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 \left[(x_n)^2 \left((\cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2 \right) + (y_n)^2 \left((\cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2 \right) \right] \\
&= (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 \left[(x_n)^2 + (y_n)^2 \right] = r_n^2 (\mu - x_n^2 - y_n^2)^2 .
\end{aligned}$$

$$\implies r_{n+1} = r_n (\mu - r_n^2) \quad . \quad (2.27)$$

Et

$$\begin{aligned}
\tan(\theta_{n+1}) &= \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \\
&= \frac{(\mu - x_n^2 - y_n^2) (x_n \sin(\omega) + y_n \cos(\omega))}{(\mu - x_n^2 - y_n^2) (x_n \cos(\omega) - y_n \sin(\omega))} \\
&= \frac{x_n \sin(\omega) + y_n \cos(\omega)}{x_n \cos(\omega) - y_n \sin(\omega)} \\
&= \frac{r_n \cos(\theta_n) \sin(\omega) + r_n \sin(\theta_n) \cos(\omega)}{r_n \cos(\theta_n) \cos(\omega) - r_n \sin(\theta_n) \sin(\omega)} \\
&= \frac{\cos(\theta_n) \sin(\omega) + \sin(\theta_n) \cos(\omega)}{\cos(\theta_n) \cos(\omega) - \sin(\theta_n) \sin(\omega)} \\
&= \frac{\sin(\theta_n + \omega)}{\cos(\theta_n + \omega)} \\
&= \tan(\theta_n + \omega) .
\end{aligned}$$

$$\implies \tan(\theta_{n+1}) = \tan(\theta_n + \omega) \quad . \quad (2.28)$$

a pour solution

$$\theta_n = \theta_0 + n\omega \quad .$$

où θ_0 est l'angle initial.

Les points fixes de l'équation (2.27) sont solution de :

$$\begin{aligned}
r^* &= r^* (\mu - (r^*)^2) , \\
\implies (\mu - (r^*)^2) &= 1 \\
\implies r^* &= \sqrt{\mu - 1} .
\end{aligned}$$

Etudions la stabilité de ce point fixe :

$$\frac{df}{dr_n}(r_n) = (\mu - r_n^2) - 2(r_n)^2 = \mu - 3(r_n)^2 .$$

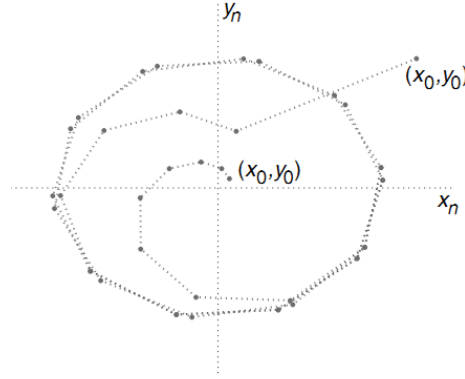


FIG. 2.14 – Solution du système (2.26) avec $\mu = 1.5$ et $\omega = \frac{\pi}{5}$, pour deux conditions initiales différentes.

$$\text{donc, } \frac{df}{dr_n}(r^*) = \mu - 3(\sqrt{\mu - 1})^2 = 3 - 2\mu.$$

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{df}{dr_n}(r^*) < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< 3 - 2\mu < 1 \\ \Leftrightarrow -4 &< -2\mu < -2 \\ \Leftrightarrow 1 &< \mu < 2, \end{aligned}$$

alors le cycle limite de rayon $r^* = \sqrt{\mu - 1}$ est stable si $1 < \mu < 2$ sinon il est instable.

Conclusion 2.2.46 On obtient trois possibilités :

1. $0 < \mu < 1$, le point fixe $(0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.
2. $1 < \mu < 2$, $(0, 0)$ devient instable et il est entouré par un cycle limite stable de rayon $\sqrt{\mu - 1}$.
3. $\mu > 2$, le cycle limite devient instable, (voir figure (2.14))

2.3 Notions de Persistance

Définition 2.3.1 Un système est dit **persistant** [6] s'il existe un ensemble compact E dans l'intérieur de $\mathbb{R}_+^n = \{x_i \in \mathbb{R}_+^n : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$, tel que toutes les solutions dans l'intérieure par la suite entrera et demeurera dans E . De façon équivalente la persistance signifie qu'il existe deux constantes strictement positives M et N , telles que pour $x_i(0) \geq 0$ on a :

$$N \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_i \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_i \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Définition 2.3.2 Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Les suites $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement dans $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$s'_n = \sup \{s_p \mid p \geq n\} \text{ et } s''_n = \inf \{s_p \mid p \geq n\}$$

Définition 2.3.3 pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont respectivement décroissante et croissante. On note par $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

1. On appelle limite supérieure et on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On appelle limite inférieure et on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(s''_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On remarquera que la limite supérieure et la limite inférieure d'une suite de réels existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$ même si la suite n'est pas convergente dans \mathbb{R} .

Exemple 2.3.4 1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$.

$$2. \limsup_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1 \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = -1.$$

Proposition 2.3.5 1. $a \in \mathbb{R}$ vérifie $a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n telles que s_n est supérieur à $a - \varepsilon$.

2. $a \in \mathbb{R}$ vérifie $a \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, pour toutes valeurs de n sauf éventuellement un nombre fini, s_n est inférieur à $a + \varepsilon$.

Corollaire 2.3.6 $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ si et seulement si :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \implies s_n < l + \varepsilon$.
- pour $\varepsilon > 0$ donnée et $m > 0$ donnée, \exists un entier $n > m$ tel que $s_n > l - \varepsilon$.

Proposition 2.3.7 1. $a \in \mathbb{R}$ vérifie $a \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, pour toutes valeurs de n sauf éventuellement un nombre fini, s_n est supérieur à $a - \varepsilon$.

2. $a \in \mathbb{R}$ vérifie $a \geq \liminf s_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n telles que s_n est inférieur à $a + \varepsilon$.

Corollaire 2.3.8 $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$ si et seulement si :

- pour $\varepsilon > 0$ donnée et $m > 0$ donnée, \exists un entier $n > m$ tel que $s_n < l + \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \implies s_n > l - \varepsilon$.

Théorème 2.3.9 Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Alors f a un point fixe dans I .

Preuve. Soit $I = [a, b]$ et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Si $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, alors a ou bien b est un point fixe de f , ainsi la preuve du théorème. Supposons que $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$. Soit $g(x) = f(x) - x$. g est continue car c'est la différence de deux fonctions continues, comme $f(a) \neq a$ et $f(a) \in [a, b]$, alors $f(a) > a$, de même $f(b) < b$. Par conséquent, $g(a) = f(a) - a > 0$ et

$g(b) = f(b) - b < 0$. D'après le théorème de valeur intermédiaire, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$. Mais $g(c) = f(c) - c = 0$, donc $f(c) = c$, la preuve est terminée. ■

Chapitre 3

Solutions périodiques stables dans une équation logistique périodique discrète.

Dans ce chapitre on étudie les conditions qu'il faut imposer pour avoir l'existence d'une solution ω périodique globalement asymptotiquement stable de l'équation logistique discrète (1.1) qui est donnée par :

$$x(n+1) = x(n) \exp \left[r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

où $\{r(n)\}$ et $\{k(n)\}$ sont des suites réelles positives ω périodique pour $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. De plus il existe des constantes positives r_* , r^* , k_* , et k^* telles que

$$0 < r_* \leq r(n) \leq r^*, \quad 0 < k_* \leq k(n) \leq k^*, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

3.1 Persistance

Dans cette section, on étudie la persistance de l'équation (1.1).

Théorème 3.1.1 [5] *Supposons que $\{r(n)\}$ et $\{k(n)\}$ vérifient (1.2). Alors toute solution $\{x(n)\}$ de (1.1) satisfait*

$$u_* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq u^*, \quad (3.3)$$

où

$$u^* = \frac{k^*}{r^*} \exp(r^* - 1), \quad u_* = k_* \exp \left(r^* \left(1 - \frac{u^*}{k_*} \right) \right).$$

Preuve. D'abord, on présente deux cas pour montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq u^*. \quad (3.4)$$

Cas 3.1.2 Supposons qu'il existe un entier positif n_0 tel que $x(n_0) < x(n_0 + 1)$.

Alors d'après (1.1), on a :

$$\begin{aligned} x(n_0 + 1) &= x(n_0) \exp \left[r(n_0) \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) \right] \\ &> x(n_0) \\ \implies \exp \left[r(n_0) \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) \right] &> 1 \\ \implies r(n_0) \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) &> 0 \\ \implies 1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} > 0, \quad r(n_0) > 0 &\text{ car } \{r(n)\} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies x(n_0) < k(n_0) \leq k^*, \text{ voir (1.2) } &k(n) \leq k^*, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} x(n_0 + 1) &= x(n_0) \exp \left[r(n_0) \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) \right] \\ &\leq x(n_0) \exp \left[r^* \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) \right], \text{ voir (1.2) } r(n) \leq r^*, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\leq \frac{k(n_0)}{k(n_0)} x(n_0) \exp \left[r^* \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) \right] \\ &\leq \max_{x(n_0) \in \mathbb{R}} \left(\frac{k(n_0)}{k(n_0)} x(n_0) \exp \left[r^* \left(1 - \frac{x(n_0)}{k(n_0)} \right) \right] \right) \\ &\leq k(n_0) \left[\frac{1}{r^*} \exp(r^* - 1) \right], \text{ car } \max_{x \in \mathbb{R}} x \exp[r(1-x)] = \frac{1}{r} \exp(r-1) \\ &\leq \frac{k^*}{r^*} \exp(r^* - 1) = u^*. \end{aligned}$$

On affirme que

$$x(n) \leq u^*, \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Par absurde, supposons qu'il existe un entier $m \geq n_0$ tel que $x(m) > u^*$ alors $m \geq n_0 + 2$, et soit m^* le plus petit entier compris entre n_0 et m tel que $x(m^*) = \max_{n_0 \leq n \leq m} x(n)$, alors $m^* \geq n_0 + 2$ et $x(m^*) > x(m^* - 1)$.

D'après ce qui précède, on obtient que

$$\begin{aligned} x(m^*) &\leq u^* \\ &< x(m), \text{ voir l'hypothèse} \\ \implies x(m^*) &< x(m) \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

Alors $x(n) \leq u^*$, pour $n \geq n_0$.

Cas 3.1.3 Supposons que $x(n) \geq x(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après (1.1), on remarque que $1 - \frac{x(n)}{k(n)} \leq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ceci implique que $x(n) \geq k(n) \geq k_*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{x(n)\}$ est décroissante et a une borne inférieure k_* , donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) = \bar{x} \geq k_*$. En prenant la limite dans (1.1), on aura

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n+1) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(x(n) \exp \left[r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) \right] \right) \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \left[r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) \right] \right) &= 1 \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) &= 0, \text{ car } r(n) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} k(n) \\ \Rightarrow \bar{x} = \limsup_{n \rightarrow \infty} k(n) &\leq k^* \leq u_* \\ \Rightarrow \bar{x} &\leq u_*. \end{aligned}$$

Conclusion 3.1.4 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq u^*$.

Maintenant on montre que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \geq u_*. \quad (3.5)$$

D'après (3.4), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un grand entier n^* tel que

$$x(n) \leq u^* + \varepsilon, \quad \text{pour } n \geq n^*. \quad (3.6)$$

On considère deux cas.

Cas 3.1.5 Supposons qu'il existe un entier positive $\bar{n}_0 \geq n^*$ tel que $x(\bar{n}_0 + 1) < x(\bar{n}_0)$. D'après (1.1), on a :

$$\begin{aligned} x(\bar{n}_0 + 1) &= x(\bar{n}_0) \exp \left[r(\bar{n}_0) \left(1 - \frac{x(\bar{n}_0)}{k(\bar{n}_0)} \right) \right] \\ &< x(\bar{n}_0) \\ \Rightarrow 1 - \frac{x(\bar{n}_0)}{k(\bar{n}_0)} &< 0 \\ \Rightarrow x(\bar{n}_0) > k(\bar{n}_0) &\geq k_*, \text{ voir (1.2)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x(\bar{n}_0 + 1) &\geq k_* \exp \left[r(\bar{n}_0) \left(1 - \frac{x(\bar{n}_0)}{k(\bar{n}_0)} \right) \right] \\ &\geq k_* \exp \left[r^* \left(1 - \frac{x(\bar{n}_0)}{k(\bar{n}_0)} \right) \right] \\ &\geq k_* \exp \left[r^* \left(1 - \frac{u^* + \varepsilon}{k_*} \right) \right], \text{ voir (3.6)}. \end{aligned}$$

Soit

$$u_\varepsilon = k_* \exp \left[r^* \left(1 - \frac{u^* + \varepsilon}{k_*} \right) \right].$$

On affirme que

$$x(n) \geq u_\varepsilon, \quad \text{pour } n \geq \bar{n}_0.$$

Par absurde, supposons qu'il existe un entier $p \geq \bar{n}_0 + 2$ tel que $x(p) < u_\varepsilon$, et soit p^* le plus petit entier compris entre \bar{n}_0 et p tel que $x(p^*) = \min_{\bar{n}_0 \leq n \leq p} x(n)$, alors $p^* \geq \bar{n}_0 + 2$ et $x(p^* - 1) > x(p^*)$. D'après ce qui précède, on obtient que

$$\begin{aligned} x(p^*) &\geq u_\varepsilon \\ &> x(p), \text{ voir l'hypothèse} \\ \implies x(p^*) &> x(p) \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

donc $x(n) \geq u_\varepsilon$, pour $n \geq \bar{n}_0$, et puisque $\bar{n}_0 \geq n^*$ on obtient que

$$x(n) \geq u_\varepsilon, \quad \text{pour } n \geq n^*.$$

Cas 3.1.6 Supposons que $x(n+1) \geq x(n)$ pour tout $n \geq n^*$. Selon (3.6), on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = l$. En prenant la limite dans (1.1), On aura que

$\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = l$. Alors,

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \geq k_* \geq k_* \exp \left(r^* \left(1 - \frac{u^* + \varepsilon}{k_*} \right) \right), \text{ car } 1 - \frac{u^* + \varepsilon}{k_*} < 0 \text{ donc } \exp \left(r^* \left(1 - \frac{u^* + \varepsilon}{k_*} \right) \right) < 1.$$

En combinant cas (3.1.5) et cas (3.1.6), on voit que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \geq k^* \exp \left(r^* \left(1 - \frac{u^* + \varepsilon}{k_*} \right) \right).$$

Puisque ε est arbitrairement choisie, on pose $\varepsilon = 0$, et on obtient que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = u_*$, donc (3.5) est vérifiée.

En combinant (3.4) et (3.5), la preuve est terminée. ■

Remarque 3.1.7 D'après la preuve du théorème (3.1.1), on remarque que, même si $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)$ n'existe pas ou $r^* \neq 1$, la relation $u_* \leq x(n) \leq u^*$ est vérifiée.

3.2 Existence et stabilité de la solution périodique

Maintenant on considère (1.1) avec $\{r(n)\}$ et $\{k(n)\}$ étant périodique, et on est concerné par l'existence et stabilité d'une solution périodique. D'abord, on a le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.2.1 [5] *Supposons que $\{r(n)\}$ et $\{k(n)\}$ sont des suite positives ω périodique, telles que,*

$$r(n + \omega) = r(n), \quad k(n + \omega) = k(n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Alors il existe une solution ω périodique de l'équation (1.1).

Preuve. Si $k(n) = k$ (constante), alors $x(n) = k$ est une solution de (1.1) ce qui implique que le théorème (3.2.1) est vérifié.

Maintenant supposons que $\{k(n)\}$ n'est pas constante, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)$ n'existe pas. Avec les hypothèses, on voit (1.2) est vérifiée avec $r_* = \min_{n \in \mathbb{N}} \{r(n)\}$, $r^* = \max_{n \in \mathbb{N}} \{r(n)\}$, $k_* = \min_{n \in \mathbb{N}} \{k(n)\}$, et $k^* = \max_{n \in \mathbb{N}} \{k(n)\}$. D'après la preuve du théorème (3.1.1) on remarque que l'ensemble $[u_*, u^*]$ est invariant, c'est-à-dire,

$$x(0) \in [u_*, u^*] \implies x(n) \in [u_*, u^*], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Maintenant, On défini une application F sur $[u_*, u^*]$ par $F(x(0)) = x(\omega)$. de (1.1), on remarque que $x(\omega)$ dépend continument de $x(0)$. Ainsi F est continue de $[u_*, u^*]$ dans $[u_*, u^*]$.

Donc F admet un point fixe p . Soit $x(0) = p$, alors la solution $\{\tilde{x}(n)\}$ du système (1.1) est une solution ω périodique dans $[u_*, u^*]$. ■

Le prochain théorème confirme la stabilité asymptotique globale de la solution périodique obtenue en théorème (3.1.1).

Théorème 3.2.2 [5] *Supposons que (1.2) est vérifiée avec*

$$\frac{k^*}{k_*} \exp(r^* - 1) \leq 2, \quad (3.9)$$

où $r_* = \min_{n \in \mathbb{N}} \{r(n)\}$, $r^* = \max_{n \in \mathbb{N}} \{r(n)\}$, $k_* = \min_{n \in \mathbb{N}} \{k(n)\}$, et $k^* = \max_{n \in \mathbb{N}} \{k(n)\}$. Soit $\{\tilde{x}(n)\}$ la solution périodique de (1.1). Alors pour toute solution positive $\{x(n)\}$ de (1.1), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x(n) - \tilde{x}(n)) = 0. \quad (3.10)$$

Chapitre 4

Solution périodique stable d'un système périodique discret de compétition de Lotka-volterra

Considérons le système des équations aux différences (1.3) donné par :

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) \exp \left[r_1(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) \right], \\ y(n+1) = y(n) \exp \left[r_2(n) \left(1 - \frac{y(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) x(n) \right) \right], \end{cases}$$

où, pour $i = 1$ et 2 , $\{r_i(n)\}$, $\{k_i(n)\}$ et $\{\mu_i(n)\}$ sont des suites positives bornées telles que

$$0 < k_{i*} \leq k_i(n) \leq k_i^*, \quad 0 < r_{i*} \leq r_i(n) \leq r_i^*, \quad 0 \leq \mu_{i*}.$$

Ici, pour toute suites bornées $\{a(n)\}$, $a^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} a(n)$ et $a_* = \inf_{n \in \mathbb{N}} a(n)$.

Le système (1.3) est un modèle discret de compétition de deux espèces de type Lotka-Volterra (voir, par exemple May [5]). $x(n)$ est la densité de proie en n^{eme} génération. $y(n)$ est la densité de prédateur en n^{eme} génération. $r_1(n)$ et $r_2(n)$ est le taux de croissance de proie et celle de prédateur respectivement en n^{eme} génération. $k_1(n)$ et $k_2(n)$ est la capacité limite de proie et celle de prédateur respectivement en n^{eme} génération. $\mu_1(n)$ et $\mu_2(n)$ sont les mesures de l'intensité de la compétition interspécifique.

Noter que le système (1.3) est un résultat de l'accouplement de deux équations scalaires de la forme (1.1) étudiée dans le chapitre précédent. Il est normal d'obtenir des résultats similaires pour (1.3) à ceux de [5] quant

$$\mu_1(n) \equiv \mu_2(n) \equiv 0.$$

4.1 Persistance

Dans cette section, on donne des résultats concernant la persistance pour le système (1.3).

Proposition 4.1.1 [6] *Pour toute solution $(x(n), y(n))$ du (1.3), on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq x^* \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} y(n) \leq y^*, \quad (4.1)$$

$$\text{où } x^* = \frac{k_1^*}{r_1^*} \exp(r_1^* - 1) \text{ et } y^* = \frac{k_2^*}{r_2^*} \exp(r_2^* - 1).$$

Preuve. on montre seulement que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq x^*. \quad (4.2)$$

Pour montrer (4.2), on suppose d'abord qu'il existe un $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x(l_0 + 1) \geq x(l_0)$.

Alors

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2(l_0)y(l_0) &\geq 0 \\ \Rightarrow 1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x(l_0) \leq k_1(l_0) \leq k_1^* \leq x^*$ car $\frac{\exp(r_1^* - 1)}{r_1^*} \geq 1$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} x(l_0 + 1) &= x(l_0) \exp \left[r_1(l_0) \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2(l_0)y(l_0) \right) \right] \\ &\leq x(l_0) \exp \left[r_1(l_0) \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} \right) \right] \\ &\leq x(l_0) \exp \left[r_1^* \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} \right) \right] = k_1(l_0) \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} \exp \left[r_1^* \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} \right) \right] \\ &\leq \frac{k_1^*}{r_1^*} \exp(r_1^* - 1) = x^*, \end{aligned}$$

ici, on a utilisé le fait que $\max_{x \in \mathbb{R}} x \exp[r(1-x)] = \frac{1}{r} \exp(r-1)$ pour $r > 0$. On affirme que

$$x(n) \leq x^* \text{ pour tout } n \geq l_0.$$

Par absurde, supposons qu'il existe un $p_0 \geq l_0$ tel que $x(p_0) > x^*$. Alors $p_0 \geq l_0 + 2$. Soit $\tilde{p}_0 \geq l_0 + 2$ le plus petit entier tel que $x(\tilde{p}_0) > x^*$, alors $x(\tilde{p}_0 - 1) < x(\tilde{p}_0)$. D'après ce qui précède $x(\tilde{p}_0) \leq x^*$, une contradiction. Ceci prouve l'assertion.

Maintenant, supposons que $x(n+1) < x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{x(n)\}$ est décroissante et bornée inférieurement par k_{1*} , alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n)$ existe, on la note par \bar{x} .

On affirme que $\bar{x} \leq k_1^*$. Par absurde, on suppose $\bar{x} > k_1^*$. La limite de la première équation du système (1.3) donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) = 0, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

ce qui est une contradiction car

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} \right) \leq 1 - \frac{\bar{x}}{k_1^*} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ car } \bar{x} > k_1^*.$$

Ceci prouve l'assertion. On note que $k_1^* \leq x^*$, ce qui implique que (4.2) est vérifié.

On fait la même pour montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} y(n) \leq y^*$. Alors (4.1) est vérifié, ainsi la preuve de la proposition. ■

Proposition 4.1.2 [6] *Supposons que $1 - \mu_1^* x^* > 0$ et $1 - \mu_2^* y^* > 0$ où x^* et y^* sont les même comme dans la proposition (4.1.1). Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \geq x_*$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} y(n) \geq y_*$, où*

$$x_* = k_{1*} (1 - \mu_2^* y^*) \exp \left[r_1^* \left(1 - \mu_2^* y^* - \frac{x^*}{k_{1*}} \right) \right] \quad \text{et} \quad y_* = k_{2*} (1 - \mu_1^* x^*) \exp \left[r_2^* \left(1 - \mu_1^* x^* - \frac{y^*}{k_{2*}} \right) \right].$$

Preuve. Encore il suffit de montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \geq x_*. \quad (4.3)$$

D'après la proposition (4.1.1), il existe $\varepsilon > 0$, et $n^* \in \mathbb{N}$ tels que

$$x(n) \leq x^* + \varepsilon \quad \text{et} \quad y(n) \leq y^* + \varepsilon \quad \forall n \geq n^*.$$

Alors

$$1 - \mu_1^* (x^* + \varepsilon) > 0 \quad \text{et} \quad 1 - \mu_2^* (y^* + \varepsilon) > 0.$$

D'abord, supposons qu'il existe un $l_0 \geq n^*$ tel que $x(l_0 + 1) \leq x(l_0)$. On note que, pour $n \geq l_0$,

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) \exp \left[r_1(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) \right] \\ &\geq x(n) \exp \left[r_1(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2^* (y^* + \varepsilon) \right) \right]. \end{aligned}$$

On particulier, avec $n = l_0$, on a

$$\begin{aligned} x(l_0) &\geq x(l_0 + 1) \geq x(l_0) \exp \left[r_1(l_0) \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2^* (y^* + \varepsilon) \right) \right] \\ \Rightarrow \exp \left[r_1(l_0) \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2^* (y^* + \varepsilon) \right) \right] &\leq 1 \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2^* (y^* + \varepsilon) \right) &\leq 0 \\ \Rightarrow x(l_0) &\geq k_1(l_0) (1 - \mu_2^* (y^* + \varepsilon)) \end{aligned}$$

ce qui implique que $x(l_0) \geq k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon))$. Alors

$$\begin{aligned} x(l_0 + 1) &\geq k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon)) \exp \left[r_1(l_0) \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2^*(y^* + \varepsilon) \right) \right] \\ &\geq k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon)) \exp \left[r_1^* \left(1 - \frac{x(l_0)}{k_1(l_0)} - \mu_2^*(y^* + \varepsilon) \right) \right] \\ &\geq k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon)) \exp \left[r_1^* \left(1 - \frac{x^* + \varepsilon}{k_1^*} - \mu_2^*(y^* + \varepsilon) \right) \right]. \end{aligned}$$

Soit

$$x_\varepsilon = k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon)) \exp \left[r_1^* \left(1 - \frac{x^* + \varepsilon}{k_1^*} - \mu_2^*(y^* + \varepsilon) \right) \right].$$

On affirme que

$$x(n) \geq x_\varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq l_0.$$

Par absurde, supposons qu'il existe un $p_0 \geq l_0$ tel que $x(p_0) < x_\varepsilon$. Alors $p_0 \geq l_0 + 2$. Soit $\tilde{p}_0 \geq l_0 + 2$ le plus petit entier tel que $x(\tilde{p}_0) < x_\varepsilon$. Alors $x(\tilde{p}_0 - 1) > x(\tilde{p}_0)$. D'après ce qui précède $x(\tilde{p}_0) \geq x_\varepsilon$, une contradiction. Ceci prouve l'assertion.

Maintenant, supposons que $x(n+1) > x(n)$ pour tout n grand. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n)$ existe, on la note par \underline{x} .

On affirme que $\underline{x} \geq k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon))$.

Par absurde, supposons que $\underline{x} < k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon))$. La limite de la première équation du système (1.3) donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) = 0,$$

ce qui est une contradiction, car

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) \geq 1 - \frac{\underline{x}}{k_{1*}} - \mu_2^*(y^* + \varepsilon) > 0.$$

Ainsi, la preuve de l'assertion. On note que $x^* \geq k_1^* \geq k_{1*}$ implique $k_{1*}(1 - \mu_2^*(y^* + \varepsilon)) \geq x_\varepsilon$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_*$. Alors (4.3) est vérifié. D'où la preuve de la proposition. ■

Théorème 4.1.3 [6] *Supposons que (1.4), $1 - \mu_1^* x^* > 0$ et $1 - \mu_2^* y^* > 0$ sont vérifiées. Alors le système (1.3) est persistant.*

Remarque 4.1.4 *D'après la preuve du proposition (4.1.1) et la proposition (4.1.2), et sous les conditions du théorème (4.1.3) l'ensemble $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*]$ est invariant.*

4.2 Existence et stabilité d'une solution périodique

Dans cette section, on considère le système (1.3) avec $\{r_i(n)\}$, $\{k_i(n)\}$ et $\{\mu_i(n)\}$ sont périodiques et de même période, c'est-à-dire il existe un entier positif ω tel que, pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $i = 1$ et 2 ,

$$\begin{aligned} 0 < r_i(n + \omega) &= r_i(n), \\ 0 < k_i(n + \omega) &= k_i(n), \\ 0 \leq \mu_i(n + \omega) &= \mu_i(n). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Il suit d'après (4.4) que (1.4) est vérifiée, où x^* et y^* sont les même comme dans la proposition (4.1.1). Le premier résultat concerne l'existence d'une solution périodique.

Théorème 4.2.1 [6] *Supposons que (4.4) est vérifié. Si $1 - \mu_1^* x^* > 0$ et $1 - \mu_2^* y^* > 0$, alors le système (1.3) a une solution ω périodique, on la note par $(\tilde{x}(n), \tilde{y}(n))$.*

Preuve. Soit x_* et y_* sont les même comme dans la proposition (4.1.2). et d'après la remarque (4.1.4) l'ensemble $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*]$ est invariant de (1.3), c'est-à-dire,

$$(x(0), y(0)) \in [x_*, x^*] \times [y_*, y^*] \implies (x(n), y(n)) \in [x_*, x^*] \times [y_*, y^*], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, on peut définir une application F sur $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*]$ par

$$F(x(0), y(0)) = (x(\omega), y(\omega)) \quad \text{pour } (x(0), y(0)) \in [x_*, x^*] \times [y_*, y^*].$$

F dépend continument de $(x(0), y(0))$. Ainsi F est une application continue de $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*]$ dans $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*]$. Donc F a une point fixe (\tilde{x}, \tilde{y}) . Par conséquent la solution $(\tilde{x}(n), \tilde{y}(n))$ passant par $(x(0), y(0))$ est une solution ω périodique du système (1.3). ■

Maintenant, sous quelques conditions additionnelles, on étudie la stabilité globale de la solution périodique obtenue en théorème (4.2.1).

Théorème 4.2.2 [6] *Supposons que (4.4) est vérifié, $1 - \mu_1^* x^* > 0$, $1 - \mu_2^* y^* > 0$ et*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max \left\{ \left| 1 - \frac{r_1^*}{k_{1*}} x^* \right|, \left| 1 - \frac{r_{1*}}{k_1^*} x_* \right| \right\} + \mu_2^* r_1^* y^* < 1, \\ \lambda_2 &= \max \left\{ \left| 1 - \frac{r_2^*}{k_{2*}} y^* \right|, \left| 1 - \frac{r_{2*}}{k_2^*} y_* \right| \right\} + \mu_1^* r_2^* x^* < 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Alors pour toute solution $(x(n), y(n))$ de (1.3), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x(n) - \tilde{x}(n)) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (y(n) - \tilde{y}(n)) = 0, \quad (4.6)$$

où $(\tilde{x}(n), \tilde{y}(n))$ est la solution ω périodique obtenue en théorème (4.2.1).

Preuve. Soit

$$x(n) = \tilde{x}(n) \exp(u(n)) \text{ et } y(n) = \tilde{y}(n) \exp(v(n))$$

Alors

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x(n+1) = x(n) \exp \left[r_1(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) y(n) \right) \right] \\ y(n+1) = y(n) \exp \left[r_2(n) \left(1 - \frac{y(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) x(n) \right) \right] \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}(n+1) \exp u(n+1) = \tilde{x}(n) \exp \left[u(n) + r_1(n) \left(1 - \frac{\tilde{x}(n) \exp(u(n))}{k_1(n)} - \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp v(n) \right) \right] \\ \tilde{y}(n+1) \exp v(n+1) = \tilde{y}(n) \exp \left[v(n) + r_2(n) \left(1 - \frac{\tilde{y}(n) \exp(v(n))}{k_2(n)} - \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp u(n) \right) \right] \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exp u(n+1) = \frac{\tilde{x}(n)}{\tilde{x}(n+1)} \exp \left[u(n) + r_1(n) \left(1 - \frac{\tilde{x}(n) \exp(u(n))}{k_1(n)} - \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp v(n) \right) \right] \\ \exp v(n+1) = \frac{\tilde{y}(n)}{\tilde{y}(n+1)} \exp \left[v(n) + r_2(n) \left(1 - \frac{\tilde{y}(n) \exp(v(n))}{k_2(n)} - \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp u(n) \right) \right] \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exp u(n+1) = \exp \left[u(n) + r_1(n) \left(1 - \frac{\tilde{x}(n) \exp u(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp v(n) \right) \right] \\ \quad \times \frac{\tilde{x}(n)}{\tilde{x}(n) \exp \left[r_1(n) \left(1 - \frac{\tilde{x}(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) \tilde{y}(n) \right) \right]} \\ \exp v(n+1) = \exp \left[v(n) + r_2(n) \left(1 - \frac{\tilde{y}(n) \exp v(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp u(n) \right) \right] \\ \quad \times \frac{\tilde{y}(n)}{\tilde{y}(n) \exp \left[r_2(n) \left(1 - \frac{\tilde{y}(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) \tilde{x}(n) \right) \right]} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exp u(n+1) = \exp \left[u(n) + r_1(n) \left(1 - \frac{\tilde{x}(n) \exp u(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp v(n) \right) \right] \\ \quad \times \exp \left[-r_1(n) \left(1 - \frac{\tilde{x}(n)}{k_1(n)} - \mu_2(n) \tilde{y}(n) \right) \right] \\ \exp v(n+1) = \exp \left[v(n) + r_2(n) \left(1 - \frac{\tilde{y}(n) \exp v(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp u(n) \right) \right] \\ \quad \times \exp \left[-r_2(n) \left(1 - \frac{\tilde{y}(n)}{k_2(n)} - \mu_1(n) \tilde{x}(n) \right) \right] \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exp u(n+1) = \exp \left[u(n) - \frac{r_1(n) \tilde{x}(n)}{k_1(n)} (\exp u(n) - 1) - r_1(n) \mu_2(n) \tilde{y}(n) (\exp v(n) - 1) \right], \\ \exp v(n+1) = \exp \left[v(n) - \frac{r_2(n) \tilde{y}(n)}{k_2(n)} (\exp v(n) - 1) - r_2(n) \mu_1(n) \tilde{x}(n) (\exp u(n) - 1) \right]. \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} u(n+1) = u(n) - \frac{r_1(n) \tilde{x}(n)}{k_1(n)} (\exp(u(n)) - 1) - r_1(n) \mu_2(n) \tilde{y}(n) (\exp(v(n)) - 1), \\ v(n+1) = v(n) - \frac{r_2(n) \tilde{y}(n)}{k_2(n)} (\exp(v(n)) - 1) - r_2(n) \mu_1(n) \tilde{x}(n) (\exp(u(n)) - 1). \end{array} \right\} \end{aligned}$$

4.2. EXISTENCE ET STABILITÉ D'UNE SOLUTION PÉRIODIQUE 55

Donc,

$$\begin{cases} u(n+1) = \left(1 - \frac{r_1(n)}{k_1(n)} \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))\right) u(n) - r_1(n) \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n)) v(n), \\ v(n+1) = \left(1 - \frac{r_2(n)}{k_2(n)} \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))\right) v(n) - r_2(n) \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n)) u(n). \end{cases} \quad (4.7)$$

où $\theta_1(n), \theta_2(n) \in [0, 1]$. pour terminer la preuve, il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 0. \quad (4.8)$$

Selon (4.5), on peut choisir un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \lambda_1^\varepsilon &= \max \left\{ \left| 1 - \frac{r_1^*}{k_{1*}} (x^* + \varepsilon) \right|, \left| 1 - \frac{r_{1*}}{k_1^*} (x_* - \varepsilon) \right| \right\} + \mu_2^* r_1^* (y^* + \varepsilon) < 1, \\ \lambda_2^\varepsilon &= \max \left\{ \left| 1 - \frac{r_2^*}{k_{2*}} (y^* + \varepsilon) \right|, \left| 1 - \frac{r_{2*}}{k_2^*} (y_* - \varepsilon) \right| \right\} + \mu_1^* r_2^* (x^* + \varepsilon) < 1. \end{aligned}$$

D'après la proposition (4.1.1) et la proposition (4.1.2), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} x_* - \varepsilon \leq \tilde{x}(n) \leq x^* + \varepsilon, & \quad x_* - \varepsilon \leq x(n) \leq x^* + \varepsilon, \\ y_* - \varepsilon \leq \tilde{y}(n) \leq y^* + \varepsilon, & \quad y_* - \varepsilon \leq y(n) \leq y^* + \varepsilon \end{aligned}$$

pour $n \geq n_0$. Noté que $\theta_1(n) \in [0, 1]$ implique que $\tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))$ compris entre $\tilde{x}(n)$ et $x(n)$.

De même $\tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))$ compris entre $\tilde{y}(n)$ et $y(n)$, d'après (4.7), on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |u(n+1)| = \left| \left(1 - \frac{r_1(n)}{k_1(n)} \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))\right) u(n) - r_1(n) \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n)) v(n) \right| \\ |v(n+1)| = \left| \left(1 - \frac{r_2(n)}{k_2(n)} \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))\right) v(n) - r_2(n) \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n)) u(n) \right| \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} |u(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_1(n)}{k_1(n)} \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))\right) |u(n)| + |r_1(n) \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n)) v(n)| \\ |v(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_2(n)}{k_2(n)} \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))\right) |v(n)| + |r_2(n) \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n)) u(n)| \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} |u(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_1(n)}{k_1(n)} \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))\right) |u(n)| + |r_1(n) \mu_2(n) \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))| |v(n)| \\ |v(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_2(n)}{k_2(n)} \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))\right) |v(n)| + |r_2(n) \mu_1(n) \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))| |u(n)| \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} |u(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_1(n)}{k_1(n)} \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))\right) |u(n)| + r_1^* \mu_2^* y(n) |v(n)| \\ |v(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_2(n)}{k_2(n)} \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))\right) |v(n)| + r_2^* \mu_1^* x(n) |u(n)| \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} |u(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_1(n)}{k_1(n)} \tilde{x}(n) \exp(\theta_1(n) u(n))\right) |u(n)| + r_1^* \mu_2^* (y^* + \varepsilon) |v(n)| \\ |v(n+1)| \leq \left(1 - \frac{r_2(n)}{k_2(n)} \tilde{y}(n) \exp(\theta_2(n) v(n))\right) |v(n)| + r_2^* \mu_1^* (x^* + \varepsilon) |u(n)| \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |u(n+1)| \leq \max \left\{ \left| 1 - \frac{r_1^*}{k_{1*}} (x^* + \varepsilon) \right|, \left| 1 - \frac{r_{1*}}{k_1^*} (x_* - \varepsilon) \right| \right\} |u(n)| + r_1^* \mu_2^* (y^* + \varepsilon) |v(n)| \\ |v(n+1)| \leq \max \left\{ \left| 1 - \frac{r_2^*}{k_{2*}} (y^* + \varepsilon) \right|, \left| 1 - \frac{r_{2*}}{k_2^*} (y_* - \varepsilon) \right| \right\} |v(n)| + r_2^* \mu_1^* (x^* + \varepsilon) |u(n)| \end{cases} \quad (4.9)$$

pour $n \geq n_0$. soit $\lambda = \max \{\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon\}$. Alors $\lambda < 1$. Selon (4.9) on a

$$\begin{cases} |u(n+1)| \leq \left[\max \left\{ \left| 1 - \frac{r_1^*}{k_{1*}} (x^* + \varepsilon) \right|, \left| 1 - \frac{r_{1*}}{k_1^*} (x_* - \varepsilon) \right| \right\} + r_1^* \mu_2^* (y^* + \varepsilon) \right] \max \{|u(n)|, |v(n)|\} \\ |v(n+1)| \leq \left[\max \left\{ \left| 1 - \frac{r_2^*}{k_{2*}} (y^* + \varepsilon) \right|, \left| 1 - \frac{r_{2*}}{k_2^*} (y_* - \varepsilon) \right| \right\} + r_2^* \mu_1^* (x^* + \varepsilon) \right] \max \{|u(n)|, |v(n)|\} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |u(n+1)| \leq \lambda_1^\varepsilon \max \{|u(n)|, |v(n)|\} \\ |v(n+1)| \leq \lambda_2^\varepsilon \max \{|u(n)|, |v(n)|\} \end{cases}$$

donc,

$$\begin{aligned} \max \{|u(n+1)|, |v(n+1)|\} &\leq \max \{\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon\} \max \{|u(n)|, |v(n)|\}, \\ &= \lambda \max \{|u(n)|, |v(n)|\}, n \geq n_0 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \max \{|u(n_0+1)|, |v(n_0+1)|\} &\leq \lambda \max \{|u(n_0)|, |v(n_0)|\} \\ \max \{|u(n_0+2)|, |v(n_0+2)|\} &\leq \lambda \max \{|u(n_0+1)|, |v(n_0+1)|\} \leq \lambda^2 \max \{|u(n_0)|, |v(n_0)|\} \\ \max \{|u(n_0+3)|, |v(n_0+3)|\} &\leq \lambda \max \{|u(n_0+2)|, |v(n_0+2)|\} \leq \lambda^3 \max \{|u(n_0)|, |v(n_0)|\} \\ &\vdots \\ \max \{|u(n_0+(n-n_0))|, |v(n_0+(n-n_0))|\} &= \max \{|u(n)|, |v(n)|\} \leq \lambda^{n-n_0} \max \{|u(n_0)|, |v(n_0)|\}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\max \{|u(n)|, |v(n)|\} \leq \lambda^{n-n_0} \max \{|u(n_0)|, |v(n_0)|\}, n \geq n_0.$$

Quand $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \max \{|u(n)|, |v(n)|\} &\leq 0 \\ \Rightarrow \max \{|u(n)|, |v(n)|\} &= 0 \\ \Rightarrow |u(n)| = |v(n)| &= 0 \\ \Rightarrow u(n) = v(n) &= 0. \end{aligned}$$

Donc (4.8) est satisfait et la preuve est complétée. ■

4.3 Conclusion

4.3.1 Remarques finales et discussion

Dans ce chapitre, on a étudié un système discret de compétition de Lotka-Volterra. Sous certaines conditions raisonnables, on a prouvé que le

système est persistant. De plus, nous assurons un mécanisme qui modélise la propriété oscillatoire de l'espèce. Autrement dit, lorsque les coefficients sont périodiques, le système a une solution périodique qui est globalement asymptotiquement stable sous certaines conditions supplémentaires. Comme mentionné dans l'introduction, le système (1.3) est le résultat de l'accouplement de deux équations scalaires de la forme $x(n+1) = x(n) \exp \left[r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{k(n)} \right) \right]$. Cette équation a été étudié récemment par Zhou et Zou [5]. Quand il n'ya aucun accouplement, c'est-à-dire, $\mu_1(n) \equiv \mu_2(n) \equiv 0$, notre résultat de persistance le théorème (4.1.3), réduit au théorème (3.1.1) dans [5]. D'ailleurs, noter que quand il n'y a aucun accouplement,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{k_1^*}{k_{1*}} \exp(r_1^* - 1) &= 1 - \frac{r_1^*}{k_{1*}} x^* \leq 1 - \frac{r_{1*}}{k_1^*} x_* < 1, \\ 1 - \frac{k_2^*}{k_{2*}} \exp(r_2^* - 1) &= 1 - \frac{r_2^*}{k_{2*}} y^* \leq 1 - \frac{r_{2*}}{k_2^*} y_* < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 < 1$ et $\lambda_2 < 1$ sont équivalents aux

$$\frac{k_1^*}{k_{1*}} \exp(r_1^* - 1) < 2 \text{ et } \frac{k_2^*}{k_{2*}} \exp(r_2^* - 1) < 2.$$

Il est démontré en [5] que la solution périodique de (1.1) est globalement stable si $\frac{k^*}{k_*} \exp(r^* - 1) < 2$. Comparé à ce résultat, le théorème (4.2.2) est réduit ici presque au théorème (3.2.2) dans [5] quand l'accouplement disparaît. Par conséquent, on obtient avec succès quelques critères pour la persistance et l'existence et la stabilité d'une solution périodique pour le système (1.3) qui seront eux aussi réduits presque à ceux (1.1) quand il n'y a aucun accouplement.

Chapitre 5

Simulations Numériques

Exemple 5.0.1 *Considérons l'équation suivante :*

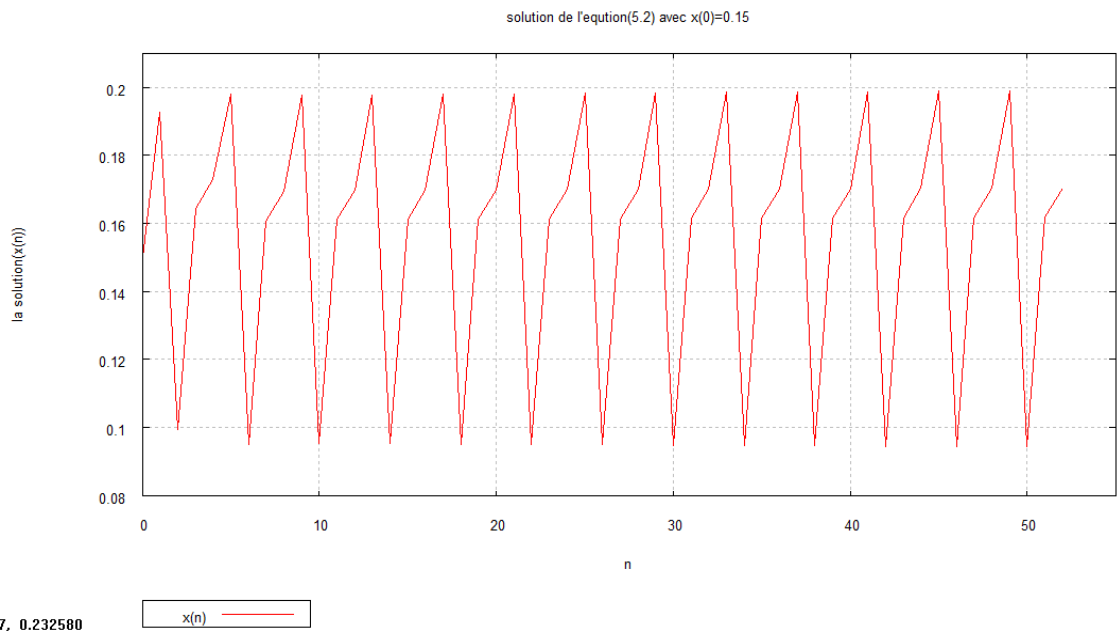
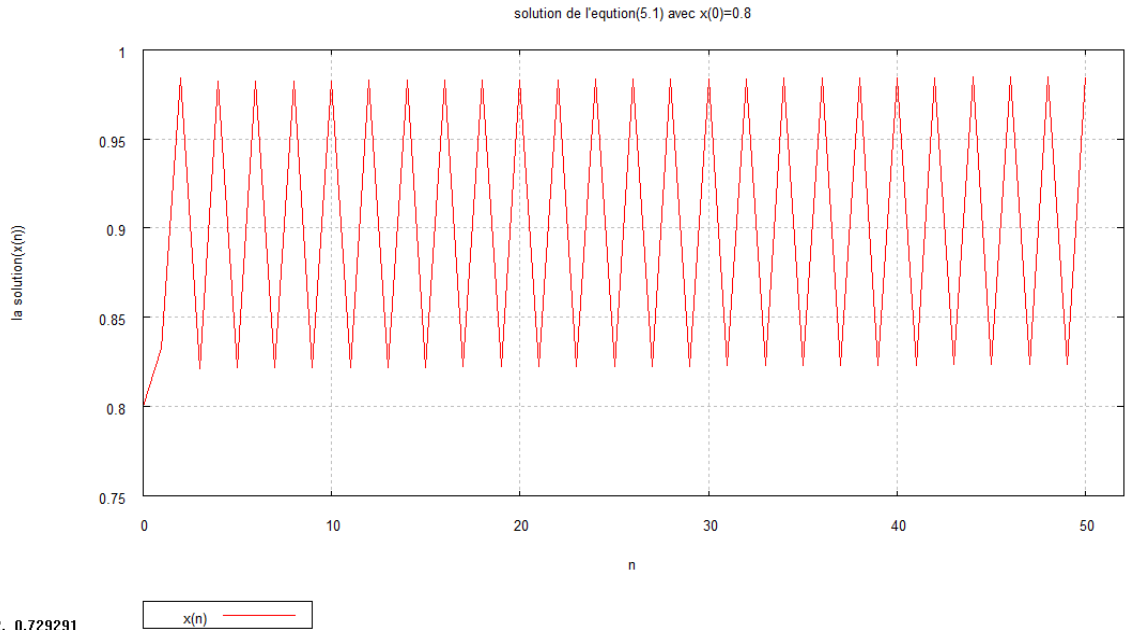
$$x(n+1) = x(n) \exp \left[(1 + 0.2 \sin(\pi n)) \left(1 - \frac{x(n)}{(1.1 + 0.1 \cos(\pi n))} \right) \right] \quad (5.1)$$

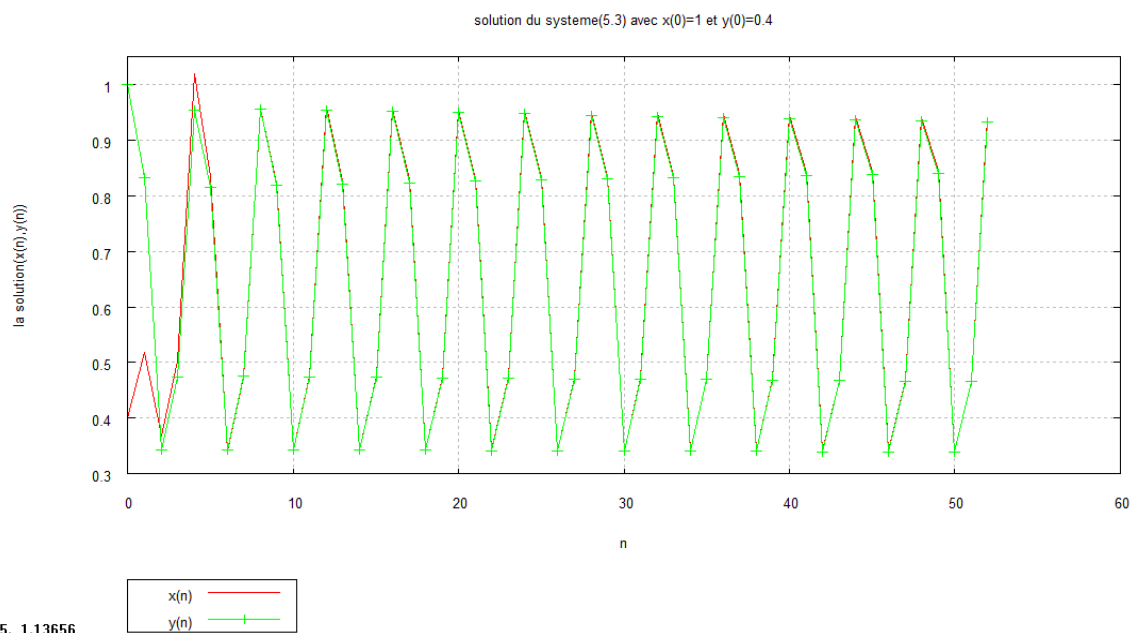
Exemple 5.0.2 *Considérons l'équation suivante :*

$$x(n+1) = x(n) \exp \left[\left(1 + 0.9 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right) \left(1 - \frac{x(n)}{\left(5 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right)} \right) \right] \quad (5.2)$$

Exemple 5.0.3 *Considérons le système des équations aux différences suivants :*

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) \exp \left[0.6 - \left(0.75 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right) x(n) - 0.04y(n) \right], \\ y(n+1) = y(n) \exp \left[0.6 - \left(0.775 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right) y(n) - 0.04x(n) \right], \end{cases}$$





-9.87805. 1.13656

Chapitre 6

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Mustafa. R. S. Kulenovic and O. Merino, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, Chapman Hall/CRC, New York, 2002.
- [2] Pierre N. V. Tu , Dynamical Systems An Introduction with Applications in Economics and Biology, Springer-Verlag Berlin • Heidelberg 1992.1994.
- [3] Pierre Auger, Christophe Lett, et Christophe Lett, Modélisation Mathématique En écologie, Dunod, Paris,2010.
- [4] Robert M.May, Biological populations with nonverlapping generation : stable points, stable cycles and stable chaos, Science, New Series, Vol. **186**, No. 4164, p.**645-647**,(Nov. 15,1974).
- [5] Z. Zhou, X. Zou, Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation, Applied Mathematics Letters. Vol**16**, **165-171**, 2003.
- [6] Yuming Chen and Zhan Zhou, Stable periodic solution of a discrete periodic Lotka-Volterra competition system, J. Math. Anal. Appl. Vol**277**, **358-366**, 2003.

Résumé:

Ce mémoire discute des modèles discrets de compétition de Lotka -Volterra, d'abord on obtient la persistance du système, et en supposant que les coefficients dans le système sont périodiques, on obtient l'existence d'une solution périodique. D'ailleurs, sous certaines conditions supplémentaires, cette solution périodique est globalement stable.

Abstract:

This memory discusses a discrete Lotka-Volterra competition models, we first get the persistence of the system, assuming that the coefficients in the system is periodic, we obtain the existence of a periodic solution. Moreover, under certain additional conditions, this periodic solution is globally stable.

ملخص:

يناقش هذا البحث جملة المنافسة الرجعية من نوع لوتكا فولتيرا، أولاً نحصل على استمرار هذه الجملة، و بافتراض أن معاملات دورية نحصل على حل دوري لها. علاوة على ذلك، تحت شروط معينة إضافية يكون عامة هذا الحل الدوري مستقر.