الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DU MASTER EN MATHEMATIQUES

Option : Perturbations, moyennisation et applications aux biomathématiques (PeMAB)

Sujet **Application du principe de LaSalle pour l'étude de la stabilité d'une classe de systèmes épidémiologiques(SIR)**

Candidat : **Lotfi Fethi Belbachir**
Date : **11/09/2013**

Membres du Jury :

Président: Mr.T.Touaoula Professeur
Examinatrice: C.Benosman Maitre de conference
Encadreur: Mme D.Hadje slimane Professeur

Année Universitaire 2012/2013

Table de matières

Remerciements

J’adresse mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu’à la réussite de cette formidable année universitaire.
Je tiens à remercier sincèrement MadameHadj-Slimane, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.
Mes remerciements s’adressent également à Monsieur Mebkhout ,chef de département des mathématiques, pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles, à Monsieur Yadi, chef de la promotion perturbations, moyennisation et application aux mathematiques,à Monsieur Touaoula, président du jury et à Mlle Benosman, membre du jury.
Je n'oublie pas mes parents et mes sœurs pour leur contribution, leur soutien et leur patience.
Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.
Merci à tous et à toutes.

Introduction générale

Dans ce mémoire, on présente en premier lieu le principe d'invariance de LaSalle pour les systèmes dynamiques autonomes.
Ensuite une analyse de stabilité globale au sens de Lyapuno pour une classe de systèmes épidémiologiques du type SIR est présentée, cette étude est un travail donné par P.Adda et D.Biachara dans leur article 'Global stability for SIR and SIRS models with differential mortality'

Chapitre1

Rappels sur les équations différentielles ordinaires (Existence et unicité des solutions)

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base de la théorie d'existence, d'unicité et de prolongement des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Cette partie est largement inspirée du cours donné par Mr. Lakrib.[6]

1/Définitions :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}x\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$

Définition 1.1 :

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation du type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad (1)$$

Où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, que l'on note

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (2)$$

Définition 1.2 :

Soit x une fonction définie d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1/La fonction x est dite solution de l'équation (2) sur l'intervalle I $\subset\mathbb{R}$, si elle est définie et continûment dérivable sur I, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et si x satisfait la relation (1) sur I

2/Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné. La fonction x est dite solution du problème à valeur initiale (on dit aussi problème de Cauchy) associé à l'équation (2) s'il existe un intervalle I contenant t tel que x soit solution de l'équation (2) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$

Remarque 1 :

Pour $(x_0, t_0) \in U$ donné, un problème à valeur initial (problème de Cauchy) associé à l'équation (2) est généralement exprimé sous l'écriture suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Définition 1.3 :

Pour $(x_0, t_0) \in U$ donné, une solution du problème (3) est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.

Remarque 2 :

Si le problème (3) admet une solution unique, celle-ci est (généralement) notée

$$x = x(: t_0, x_0)$$

Proposition 1 :

Pour tout $(x_0, t_0) \in U$, le problème (3) est équivalent à

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad (4)$$

Remarque 3 :

Pour sa maniabilité, l'équation (4) est souvent utilisée au lieu du problème (3), par exemple dans les preuves de résultats d'existence et d'unicité des solutions.

Théorème 1 : ***Existence de solution***

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout (x_0, t_0) □ U, le problème (3) admet au moins une solution.

Corollaire 1 :

Soient U une ouvert de $\mathbb{R}$ x$\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue .Si W □ V □ U sont tels que W est fermé et borné (i.e. compact) et V un ouvert avec $\bar{V} \subset U$, alors il existe $L > 0$ tel que pour toute condition initiale(x_0, t_0) □ W, il existe une solution x de (3) définie au moins sur l'intervalle $[t_0 - L, t_0 + L]$

Définition 1.4 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f est localement lipchitzienne en x pour tout fermé borné (i.e. compact) K dans U , s'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|F(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

Pour tout (t, x_1), (t, x_2) dans U.

Théorème 2 : *existence et unicité*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}^n$. $Si\ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipchitzienne en x alors pour tout(x_0, t_0) □ U, le problème (3) admet une solution unique.

Définition 1.5 :

Soient x une solution de (2) et I□ℝ un intervalle sur lequel x est définie.

1/Une fonction $\breve{x}$ est appelée prolongement de x si elle est definie sur un intervalle $\breve{I}$ contenant strictement I , coïncide avec x sur I et verifie la relation (1) sur $\breve{I}$

2/La solution x est dite maximale (on dit aussi non prolongeable) si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que l'intervalle I est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.

Remarque 4:

Le système (1) est dit non autonome, il peut se réécrire sous la forme d'un système autonome en posant $X = \binom{t}{x}$.

Dans toute la suite du travail on considère le cas des systèmes autonomes

Chapitre 2

Notions de stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov

On représente dans cette partie les notions de stabilité pour les systèmes dynamiques autonomes
Considérons alors le système (P) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(o) = x0 \end{cases}$$

Avec f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

On suppose que les conditions d'existence et d'unicité des solutions de (P) sont vérifiées de sorte que le système (P) admette une unique solution x(t,x_0) définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$

1/Définitions : [5]

Définition 1.1:

On dit que $x^{\square}$ est un point d'équilibre du système (P) s'il vérifie :

$$f(x^{\square}) = 0$$

On suppose que $x^{\square}$=0 est un point d'équilibre du système (P), sinon, on se ramène à 0 par translation en posant y=x-$x^{\square}$.

Définition 1.2 :

L'origine de (P) est attractif si :

$$\square\delta > 0, \square\, x_0 \,\square\, B_\delta \text{ on a } \lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0)\| = 0$$

Définition 1.3 :

L'origine de (P) est stable si :

$$\square\xi > 0, \square\delta = \delta(x_0) > 0, \text{ tel que pour } x_0 \,\square\, B_\delta \text{ on a la solution de (P) : } x(t,x_0)\square\; B_\delta$$

Définition 1.4 :

L'origine de (P) asymptotiquement stable si :

Il est à la fois stable et attractif

Définition 1.5 :

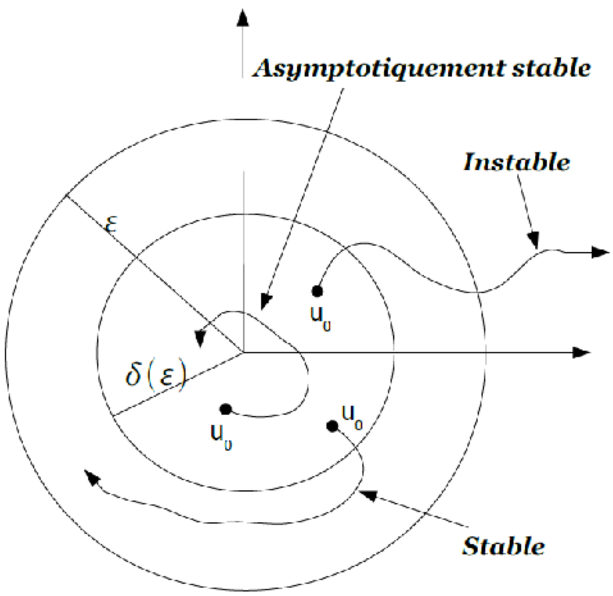
L'origine de (p) est globalement asymptotiquement stable si :

$$\square x_0, x(t) \rightarrow 0 \; quand \; t \rightarrow \infty$$

Définition 1.6 :

L'origine de (P) est instable si :

$$Il\ n'est\ pas\ stable$$



Remarque :
La stabilité n'implique pas l'attractivité, ni l'inverse, en effet, considérons le système suivant

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

L'origine est un point d'équilibre stable car tout point au voisinage de 0 reste dans le voisinage de 0, mais 0 n'est pas attractif car la solution ne converge pas vers l'équilibre $x^{*} = 0$, elle reste immobile

Exemple : *Equation du pendule simple*
L'équation du pendule simple est donnée par

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta} \qquad (1)$$

Où m:represente la masse du corps, k:represente l'angle à l'instant t, l:represente la longueur du fil
Avec $\theta(0) = 0$
En posant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$ l'équation (1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

On remarque que $(0,0)$ est un point d'équilibre du système
Pour voir la stabilité de l'origine, une méthode consiste à calculer la solution du système et ensuite vérifier si les propriétés de stabilité données précédemment sont assurées, dans ce cas on remarque que l'utilisation de la définition de la stabilité représente certains inconvénients comme :
-Le calcul d'une manière explicite de la solution : ceci peut présenter de grandes difficultés dépendant de la complexité du modèle considéré et de la dimension du système.
-L'application directe de la définition : où la détermination du δ peut s'avérer ardu

Dans ce cas la méthode de Lyapunov permet d'étudier la stabilité globale des systèmes sans avoir recours au calcul de la solution explicite des équations différentielles non linéaires.
La procédure consiste à trouver une fonction dite fonction de Lyapunov et d'examiner sa dérivée temporelle le long d'une trajectoire quelconque du système considéré
On présente dans ce qui suit, les principaux résultats liés à cette méthode qui s'inspirent essentiellement de [5]

2/Méthode de Lyapunov :

2.1/Définitions :

Soit $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $v(0) = 0$

a/ On dit que v est définie positive si

$$v(x) > 0 \text{ Pour tout } x \neq 0$$

b/ On dit que v est semi-définie positive si

$$v(x) \geq 0 \text{ Pour tout } x \neq 0$$

2.2/ Théorème 1 : *théorème de stabilité de Lyapunov*

Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de (P) et D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0

Soit $v\colon D \to R$ une fonction continument différentiable telle que :

$i/\ v(0) = 0$ Et $v(x) > 0$ dans $D - \{0\}$

$ii/\ \dot{v}(x) \leq 0$ Dans D

Alors

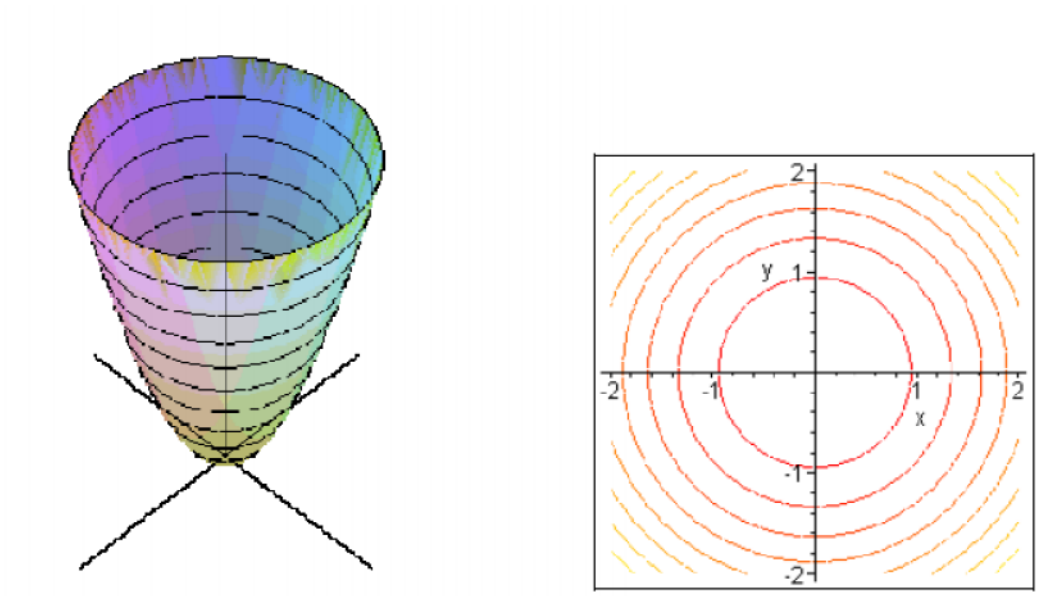
$$x_0 = 0 \text{ est stable}$$

Si de plus on a :

$iii/\ \dot{v}(x) < 0$ dans $D - \{0\}$

Alors

$$x_0 = 0 \text{ est asymptotiquement stable}$$



Courbes d'une fonction de Lyapunov [3]

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $r \in (0, \varepsilon]$ tel que $B_r := \{x \in R^n, \|x\| \leq r\} \subset D$

Soit $\alpha := \min_{\|x\|=r} V(x)$

Alors d'après $i/$ on a :

$$\alpha > 0$$

Soit $\beta \in (0, \alpha)$ et soit $\Omega_\beta := \{x \in B_r, V(x) \leq \beta\}$

Alors Ω_β est à l'intérieur de B_r.

L'ensemble Ω_β est invariant i.e. il a la propriété que toute trajectoire commençant dans Ω_β à l'instant $t = 0$ reste dans $\Omega_\beta, □t \geq 0$: Cela résulte de $ii/$ puisque $\dot{V}\,(x(t)) \leq 0$ □ $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0$
Et puisque Ω_β est un compact (fermé par définition et borné puisqu'il est inclus dans B_r) alors le problème (P) admet une unique solution définie pour tout $t \geq 0$ avec $x(0)$ □ Ω_β
Comme V est continue, $V(0) = 0$ alors □$\delta > 0$ tel que :

$$\|x\| \leq \delta \;□\; V(x) < \beta$$

Alors :

$$B_\delta \;□\; \Omega_\beta \;□\; B_r \;□\; D$$

Et :

$$x(0) \;□\; B_\delta \;□\; x(0) \;□\; \Omega_\beta \;□\; x(t) \;□\; \Omega_\beta \;□\; x(t) \;□\; B_r, □t \geq 0$$

Alors :

$$\|x(0)\| < \delta \;□\; \|x(t)\| < r < \varepsilon, □t \geq 0$$

Donc :

$$x_0 = 0 \; est \; stable$$

Pour montrer la stabilité asymptotique avec l'hypothese iii) en plus, on a besoin de montrer que $x(t) \to 0$ quand $t \to \infty$
Or :

$$□a > 0, □T > 0 \; tel \; que \; \|x(t)\| < a, □t > T$$

On sait que pour tout $a > 0$
$on \; peut \; choisir \; b > 0 \; tel \; que \; \Omega_b \;□\; B_a$ (D'après ce qui précède i/ et ii/)
Où $\Omega_b = \{x \;□\; B_r, V(x) \leq b\}$ et $B_a = \{x \;□\; R^n, \|x\| \leq a\}$
Donc, il suffit de montrer :

$$V(x(t)) \to 0 \; quand \; t \to \infty$$

Puisque $V(x(t))$ est décroissante et minorée par 0 alors :

$$V(x(t)) \to c \geq 0 \; quand \; t \to \infty$$

Montrons que $c = 0$, pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $c > 0$
Par continuité de V, on a :

$$□d > 0 \; tel \; que \; B_d \;□\; \Omega_c$$

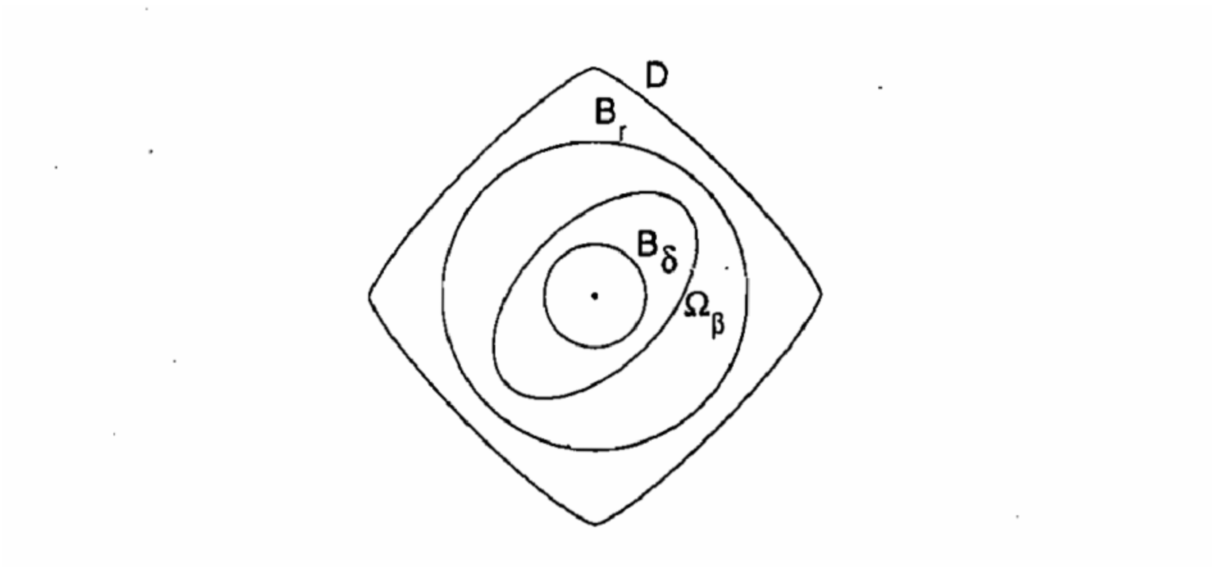
$V(x(t)) \to c \; quand \; t \to \infty$ implique que la trajectoire $x(t)$ sort de B_d pour tout $t \geq 0$
Soit $-\gamma := \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}$
D'après $iii/$

$$-\gamma < 0$$

Donc :

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}\,(x(r))dr \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Puisque le membre droit peut être négatif, l'inégalité contredit l'hypothèse $c > 0$, d'où $c = 0$.
Donc, l'origine est asymptotiquement stable .D'ou le résultat.



Représentation géométrique des ensembles de la démonstration du théorème de Lyapunov

Revenons à l'exemple du pendule donné par :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} sinx_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

Soit la fonction de Lyapunov sur $D_p = \{x : -2\pi \leq x_1 \ \leq 2\pi\}$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} ml^2 x^2{}_2 + ml(1 - cosx_1)$$

$$V(0,0) = 0, V(x_1, x_2) \neq (0,0), \forall(x_1, x_2) \neq (0,0)$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -klx^2{}_2 \leq 0$$

$\dot{V}(x_1, x_2)$ est semi-définie négative seulement car $\dot{V}(x_1, 0) = 0$,$\forall x_1$
Alors on peut conclure que l'origine est stable seulement

Il arrive souvent qu'on trouve des fonctions de Lyapunov telle que $\dot{V}$ soit semi définie négative seulement, ce qui ne permet pas de conclure à la stabilité asymptotique du point d'équilibre étudié.
Dans les années 60, J.P.LaSalle a étudié ce problème en détail et a formulé un principe connu sous le nom de *principe d'invariance de LaSalle* .Ce principe permet d'analyser la stabilité asymptotique des équilibres dans le cas où $\dot{V}$ est seulement semi définie négative. C'est ce qu'on présente dans cette partie :

3/Principe d'invariance de LaSalle :[5],

Avant de présenter ce principe, rappelons d'abord quelques notions essentielles :
Notons par $x(t, x_0)$ la solution de (P) partant de $x_0 \in \mathbb{R}^n$
$d_M(S)$ désigne la distance d'un point S de $\mathbb{R}^n$ à un ensemble M de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$d_M(S) = inf_{m \in M} \| S - m \|$$

3.1/Définitions :

a/ Pour $x_0 \in R^n$,on appelle orbite l'ensemble $O(x_0)$ défini par :

$$O(x_0) = \{x(t, x_0), t \geq 0\}$$

b/ On dit qu'un point $z \in R^n$ est un point limite de $x(t, x_0)$ s'il existe une suite $(\theta_i)_i \in R^n$ avec $\theta_i \to \infty$ telle que $x(\theta_i, x_0) \to z$
L'ensemble des points limites de $x(t, x_0)$ est appelé ensemble limite de $x(t, x_0)$ noté L
c/ Un sous ensemble M de R^n est dit invariant par rapport au système (P) si

$$\forall x_0 \in M \Rightarrow x(t, x_0) \in M$$

3.2/ Lemme 1 :

Si une solution $x(t)$ de (P) est bornée alors l'ensemble L est un ensemble non vide, compact et invariant. De plus on a

$$\lim_{t \to \infty} d_L(x(t, x_0)) = 0$$

La démonstration du lemme 1 est basée sur le théorème de Bolzano-Weistrass que nous rappelons dans ce qui suit :

***3.3/ Théorème de Bolzano-Weistrass* :[4]**

a/ De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous suite convergente

b/ Toute suite bornée de réelle admet un point d'adhérence

Revenons au lemme :

Preuve du lemme 1 :

a/ Montrons que L est borné

On a $x(.)$ bornée par hypothèse alors d'après le théorème de Bolzano-Weistrass elle a un point d'accumulation quand $t \to \infty$. Par conséquent L est non vide.

D'autre part, pour chaque $y \in L$, il existe une suite (t_i) avec $t_i \to \infty$ quand $i \to \infty$ telle que $x(t_i) \to y \; quand \; i \to \infty$

Comme $x(.)$ est uniformément bornée sur son domaine de définition alors la limite y est bornée aussi, c'est-à-dire L est borné

b/ Montrons que L est fermé :

Soit $(y_i) \in L$ une suite telle que $y_i \to y \; quand \; i \to \infty$

Montrons que $y \in L$

On a pour chaque i, il existe une suite $(t_{ij}) avec \; t_{ij} \to \infty \; quand \; j \to \infty$ telle que $x(t_{ij}) \to y_i quand \; j \to \infty$

Maintenant, on construit une suite particulière (θ_i) qui nous permettra de prouver que L est fermé :

$$\theta_2 > t_{12} \; tel \; que \; \|x(\theta_2) - y_2\| < \frac{1}{2}$$

$$\theta_3 > t_{13} \; tel \; que \; \|x(\theta_3) - y_3\| < \frac{1}{3}$$

$$\theta_i > t_{1i} \; tel \; que \; \|x(\theta_i) - y_i\| < \frac{1}{i}$$

Avec $\theta_i \to \infty \; quand \; i \to \infty$

Maintenant $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in N$ tels que :

$$\|x(\theta_i) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i > N_1$$

Et :

$$\|y_i - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i > N_2$$

Ainsi :

$$\|x(\theta_i) - y\| < \varepsilon \quad \forall i > N = \max(N_1, N_2)$$

Ce qui montre que :

$$x(\theta_i) \to y \; quand \; i \to \infty$$

Donc :

$$y \in L$$

Alors :

$$L \; est \; fermé$$

L est un fermé borné en dimension fini i.e. $L \; est \; un \; compact$

c/ Montrons que L est invariant

Soit $y \in L$ et soit $\varphi(t; y)$la solution de (P) qui traverse y à l'instant $t_0 = 0$

Montrons que $\varphi(t; y) \in L, \forall t \in R$:

Il existe une suite $(t_i) avec\ t_i \to \infty\ quand\ i \to \infty$ telle que $x(t_i) \to y\ quand\ i \to \infty$

$$x(t_i) = \varphi(t_i; x_0)$$

Or par unicité de la solution on a :

$$\varphi(t + t_i; x_0) = \varphi\big(t; \varphi(t_i; x_0)\big) = \varphi(t; x(t_i))$$

Et par continuité :

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(t + t_i; x_0) = \lim_{i\to\infty} \varphi(t; x(t_i)) = \varphi(t; y)$$

C'est-à-dire :

$$\varphi(t; y) \in L \text{ i.e } L \text{ est invariant}$$

Il reste à monter que $\lim_{t\to\infty} d_L(x(t, x_0)) = 0$

On utilise un raisonnement par l'absurde pour montrer que $x(t) \to L\ quand\ t \to \infty$

Supposons que $x(t)$ ne tend pas vers $L\ quand\ t \to \infty$

Alors, il existe ε et une suite (t_i) avec $t_i \to \infty\ quand\ i \to \infty$ telle que $d_L(x(t_i)) > \varepsilon$

$x(t_i)$ est bornée, donc on peut extraire une sous suite convergente $x(\acute{t}_i) \to \breve{x}\ quand\ i \to \infty$

$\breve{x}$ appartient à L et est à une distance ε de L…..Contradiction. D'où le résultat

3.4/ Théorème: *Théorème d'invariance de LaSalle :*

Soit Ω un compact invariant de $D \subset \mathbb{R}^n$ et soit V une fonction $C^1(D, \mathbb{R})$ telle que la fonction $\dot{V}$ est semi définie négative sur Ω.

Soit $M \subset R^n$ le plus grand sous ensemble invariant de E avec $E := \{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\}$.

Alors $\lim_{t\to\infty} d_M\,(x(t, x_0)) = 0$ i.e. toute solution commençant dans Ω converge vers $M\ quand\ t \to \infty$

Preuve :

Soit $x(.)$ une solution de (P) commençant dans Ω

$\dot{V}(x)$est semi-définie négative sur Ω Alors $V(x(t))$ est une fonction décroissante

De plus $V(x)$ est continue sur le compact Ω alors $V(x)$ est minorée sur Ω

Donc :

$$V(x) \to a\ quand\ t \to \infty$$

Notons que l'ensemble limite L est inclus dans Ω (car Ω est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$)

Pour chaque $p \in L$, il existe une suite $(t_n)\ avec\ t_n \to \infty\ et\ x(t_n) \to p\ quand\ n \to \infty$

Par continuité de V, on a :

$$V(p) = \lim_{n\to\infty} V(x(\,t_n) = a$$

Donc :

$$V(x) = a\ sur\ L$$

Or d'après le lemme 1, L est ensemble invariant,$\dot{V}(x) = 0\ sur\ L$

Ainsi :

$$L \subset M \subset E \subset \Omega$$

Puisque $x(.)$ est bornée, $x(.)$ est proche de L quand $t \to \infty$ d'après le lemme 1

Donc :

$$x(t) \to M quand\ t \to \infty, \text{ ce qui achève la démonstration}$$

3.5/ Corollaire de Slotine et Li [5]:

Le point d'équilibre $x = 0\ de\ (P)$ est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x)$ □ $C^1(D,\mathbb{R})$ telle que :

a/ $V(x)$ définie positive sur D

b/ $\dot{V}(x)$ semi-définie positive sur D

c/ L'ensemble $E = \{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\} = \{0\}$

Preuve du corollaire :

La preuve se déduit directement du théorème d'invariance de LaSalle, et puisque dans ce cas E se réduit à $\{0\}$ on aura la stabilité asymptotique du système.

Revenons encore une fois à l'exemple du pendule simple modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\dfrac{g}{l} sinx_1 - \dfrac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

Avec $(0,0)$ le point d'équilibre étudié

Rappelons que dans ce cas la fonction de Lyapunov considérée est :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} ml^2 {x_2}^2 + ml(1 - cosx_1)$$

Et que :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -kl^2 {x_2}^2 \leq 0, □ x_1, x_2$$

Les hypothèses a/ et b/ du corollaire sont vérifiées sur D_p alors d'après le théorème de Lyapunov l'origine est stable

Pour montrer la stabilité asymptotique, il reste à vérifier l'hypothèse c/ du corollaire de Stoline et Li ce qui revient à montrer l'attractivité de la solution $x(t, x_0)$ vers le point d'équilibre $x = 0$.

C'est-à-dire nous allons montrer que :

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t, x_0) \| = 0$$

D'après le théorème d'invariance de LaSalle on déduit que :

$$\lim_{t \to \infty} d_M\, x(t, x_0) = 0$$

Comme :

$$E = \{0\}$$

On obtient que :

$$\lim_{t \to \infty} d_E\, x(t, x_0) = \lim_{t \to \infty} d_{\{0\}}\, x(t, x_0) = 0$$

D'où l'attractivité de la solution $x(t, x_0)$ vers x_0 et par conséquent la stabilité asymptotique du point d'équilibre $x_0 = 0$

Remarque 1:

Contrairement aux théorèmes de Lyapunov, le principe d'invariance de LaSalle ne requiert pas que la fonction $V(x(t))$ soit définie positive. Si le plus grand ensemble invariant M, contenu dans l'ensemble E des point où $\dot{V}$ est nulle, est réduit au point d'équilibre i.e. si $M = \{x_0\}$, le principe de LaSalle permet de conclure que l'équilibre est attractif.

Chapitre 3

Application du principe d'invariance de LaSalle à l'étude de stabilité des modèles épidémiologiques SIR

1/Introduction :

Le modèle SIR est un classique en épidémiologie mathématique. On présente dans cette partie les résultats d'étude de stabilité de P.Adda et D. Biachara proposé dans l'article Global stability for SIR and SIRS models with differential mortality[1], cette analyse est basée sur le principe d'invariance de LaSalle présenté dans le chapitre précédent.
En effet l'analyse de la stabilité des modèles SIR classiques est connue depuis 1976. La raison en est que l'étude de la stabilité de ces modèles se réduit aux systèmes plans, et donc les méthodes de plans de phases peuvent être utilisées ; le théorème de Poincaré-Bendixon. Les orbites périodiques peuvent être exhibées en utilisant le critère de Dulac ou le critère de Busenberg et Van Den Driessche [9].
Dans la littérature récente, la méthode de Lyapunov a été utilisée avec succès pour prouver la stabilité globale de l'équilibre endémique. La méthode consiste à trouver une fonction de Lyapunov notée V, définie positive telle que sa derivée le long des trajectoires est définie négative. Si la dérivée $\dot{V}$ est seulement semi-définie négative, le principe d'invariance de LaSalle étend le principe de Lyapunov dans certains cas.

2/Présentation du modèle :

On présente d'abord le modèle étudié, ensuite une analyse de stabilité est détaillée

On considère une population N répartie en classes d'individus susceptibles, infectieux et réfractaires avec $S(t), I(t) et\ R(t)$ leurs nombres au temps t, c'est-à-dire :

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

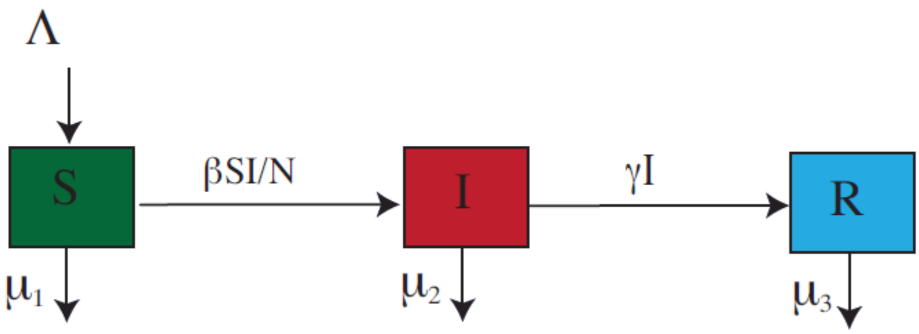
On suppose qu'il n'y a pas de transmission verticale ; donc tous les nouveaux nés sont susceptibles
On suppose aussi que la natalité λ compense les mortalités donc :

$$\lambda = \mu_1 S + \mu_2 I + \mu_3 R \ \ avec\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$$

On note par γ le taux de guérison, et on suppose que la maladie confère une immunité permanente.

Le paramètre β est le taux de contact effectif des infectieux par personne

Nous avons le graphe suivant :



La dynamique de ce modèle est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = \lambda - \frac{\beta SI}{N} - \mu_1 S \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases} \qquad (1)$$

Qui se réduit en remplaçant λ par sa définition à :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 R \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases} \qquad (2)$$

La taille de la population est constante, i.e.

$$N = S + I + R$$

On peut donc omettre l'équation des guéris et s'intéresser aux deux groupes des susceptibles et des infectés donnés par :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3(N - S - I) \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu_2 + \gamma)I \end{cases} \qquad (3)$$

Par raison de simplicité, on considére les prévalences i.e. les proportions et donc si on note $\frac{S}{N}, \frac{I}{N}$ les proportions des susceptibles et infectieux encore par S et I, pour simplifier alors le système (3) se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3 S - \beta SI) \\ \dot{I} = \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I \end{cases} \qquad (4)$$

D'autre part on a

$$S \geq 0 \; et \; I \geq 0 \; et \; S + I \leq 1.$$

Le domaine biologique de ce système est le simplexe standard noté Ω

L'ensemble

$$\Omega = \{(S, I), S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$$

est un compact positivement invariant [8]

Le système est bien posé

3/Le taux de reproduction de base [2]:

Étant donnée une maladie, une question fondamentale est de savoir si elle peut se propager dans la population. Ceci revient à calculer le nombre moyen d'individus qu'une personne infectieuse pourra infecter, tant qu'elle sera contagieuse. Ce nombre est appelé le taux de reproduction de base, et est noté R_0. Il est considéré dans une population où tous les individus sont sains, sauf l'individu infectieux introduit. Si $R_0 < 1$, alors un individu en infecte en moyenne moins d'un, ce qui signifie que la maladie disparaîtra de la population à terme. À l'opposé, si $R_0 > 1$, alors la maladie peut se propager dans la population.
Déterminer R_0 en fonction des paramètres du modèle permet ainsi de calculer les conditions dans lesquelles la maladie se propage.

3.1/Calcul de $\mathbf{R_0}$:

R_0 est souvent trouvé à travers l'étude et le calcul des valeurs propres de la matrice jacobienne dy système considéré au point d'équilibre endémique. La méthode 'next generation matrix' (matrice de la génération suivante) consiste à définir R_0 comme le rayon spectral de cette matrice.
On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(X,Y,Z) \\ \dfrac{dY}{dt} = g(X,Y,Z) \\ \dfrac{dZ}{dt} = h(X,Y,Z) \end{cases}$$

Avec $X \in \mathbb{R}^r$, $Y \in \mathbb{R}^s$, $Z \in \mathbb{R}^n, r, s, n \geq 0$ et $h(X, 0{,}0) = 0$

X représente le nombre d'individus susceptibles, réfractaires et autres catégories de personnes non infectées

Y représente le nombre d'individus infectés qui ne transmettent pas la maladie (individus en periode de latence par exemple)

Z représente le nombre d'individus infectés capable de transmettre la maladie

Soit $U_0 = (X^*, 0{,}0) \in \mathbb{R}^{r+s+n}$ le point d'équilibre sans maladie tel que

$$f(X^*, 0{,}0) = g(X^*, 0{,}0) = h(X^*, 0{,}0) = 0$$

Supposons que l'équation $g(X^*, Y, Z) = 0$ determine implicitement une fonction $Z = \tilde{g}(X^*, Y)$

Soit $A = \frac{dH}{dZ}(X^*, \tilde{g}(X^*, 0), 0)$ et supposons que A peut s'écrire de la forme $A = M - D$ avec $M \geq 0$ $(i.e. m_{ij} \geq 0)$ et $D > 0$ une $matrice$ $diagonale$

3.2/ Définition :

Le rayon spectral d'une matrice B noté $m(B)$ est :

$$m(B) = \sup\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(B)\}$$

Où le rayon spectral de B est

$$\rho(B) := \lim_{n \to \infty} \|B^n\|^{1/n}$$

Donc :

$$m(A) < 0 \Leftrightarrow \rho(MD^{-1}) < 1$$

Ou :

$$m(A) > 0 \Leftrightarrow \rho(MD^{-1}) > 1$$

Le taux de reproduction de base est défini comme étant le rayon spectral (la valeur propre dominante) de la matrice MD^{-1} i.e.

$$R_0 = \rho(MD^{-1})$$

Appliquons cette méthode pour le système qu'on étudie
Rappelons que le système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{S} = \lambda - \dfrac{\beta SI}{N} - \mu_1 S \\ \dot{I} = \dfrac{\beta SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases}$$

Dans ce cas $X = (S, R), Z = I$, $U_0 = (\frac{\lambda}{\mu_2}, 0{,}0)$ et $A = \beta - (\mu_2 + \gamma) i.e. M = \beta\ et\ D = (\mu_2 + \gamma)$

Donc :

$$R_0 = MD^{-1} = \frac{\beta}{(\mu_2 + \gamma)}$$

4/Etude du modèle SIR:

Rappelons que nous étudions un modèle SIR définie par (4) :

4.1/ Calcul des points d'équilibre :

On résoud alors le système :

$$\begin{cases} \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3 S - \beta SI = 0 & (4.1) \\ \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I = 0 & (4.2) \end{cases}$$

De l'équation on a :

$$I\big(\beta S - (\mu_2 + \gamma)\big) = 0$$

D'où :

$$I^{*} = 0\ ou\ \bar{S} = \frac{(\mu_2 + \gamma)}{\beta}$$

On remplace dans (4.1) par $I^{*} = 0$ on obtient :

$$S^{*} = 1$$

L'équilibre sans maladie (DFE) est donné par :

$$(S^{*}, 0) = (1{,}0)$$

Remarquons que :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{(\mu_2 + \gamma)}{\beta} = \frac{1}{R_0}$$

Maintenant, remplaçons dans (4.1) :

$$(4.1) \Rightarrow \bar{\bar{I}} = \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

L'équilibre endémique (EE) est donné par

$$(\bar{S}, \bar{I}) = \left(\frac{(\mu_2 + \gamma)}{\beta}, \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right)$$

4.2/ Etude de la stabilité de l'équilibre sans maladie (DFE) :

Théorème :

Si $R_0 \leq 1$ alors (DFE) est globalement asymptotiquement stable sur Ω

Preuve :

On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(S, I) = I \text{ sur } \Omega_0 = \{(S, I), S = S^{*}\}$$

Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(S, I) &= \dot{I} \\
&= \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I \\
&= I(\beta S - ((\mu_2 + \gamma)) \\
&= I\big(R_0(\mu_2 + \gamma)S - (\mu_2 + \gamma)\big) \\
&= I(R_0 S - 1)(\mu_2 + \gamma)
\end{aligned}$$

On a :

$$\dot{V}(S, I) \leq 0, \forall S, I \in \Omega$$

De plus :

$$\dot{V} = 0 \; si \; (I = 0) ou \; (S = S^{*} \text{ et } R_0 = 1)$$

Donc le plus grand ensemble invariant contenu dans cet ensemble est

$$L = \{(S, I) \in \Omega_0, \dot{V}(S, I) = 0\}$$

L se réduit au point d'équilibre sans maladie (DFE)

Puisque on est dans un compact positivement invariant, par le principe de LaSalle, le (DFE) est globalement asymptotiquement stable.

4.3/ Etude de la stabilité de l'équilibre endémique (EE) :

$$(\bar{S},\bar{I}) = \left(\frac{(\mu_2+\gamma)}{\beta}, \frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right)$$

Cet équilibre est dans Ω i.e.

$$\bar{S} \geq 0\,, \bar{I} \geq 0\ et\ \bar{S} + \bar{I} \leq 1\ ssi\ R_0 > 1$$

Clairement $\bar{I} \geq 0$ est équivalent à $R_0 > 1$

Quand $R_0 = 1$ cet équilibre coïncide avec le (DFE).Alors il existe un unique équilibre dans l'intérieur du simplexe si et seulement si $R_0 > 1$

Théorème :

Si $R_0 > 1$, le (DFE) est instable et il existe un unique équilibre endemique $(\bar{S},\bar{I})$ qui est globalement asymptotiquement stable sur le domaine Ω\[0,1]x{0}.

Preuve :

Soit Ω_1 l'ensemble défini par :

$$\Omega_1 := \{(S,I), S \geq \frac{\mu_2}{\beta} - \frac{\mu_3}{\beta}\ , I \geq 0, S + I \leq 1\}$$

L'ensemble $\Omega_1$est un compact positivement invariant.[8],[7]

On considère sur Ω_1 la fonction de Lyapunov définie par :

$$V(S,I) = (S-\bar{S}) - \frac{\mu_3+\gamma}{\beta}\log(-\mu_2+\mu_3+\beta S)/(-\mu_2+\mu_3+\beta\bar{S}) + (I-\bar{I})\text{-}\bar{I}\log I/\bar{I}$$

V est définie positive, c'est-à-dire $V(S,I) \geq 0$ et $V(S,I) = 0\ ssi\ (S,I) = (\bar{S},\bar{I})$

Calculons sa dérivée le long des trajectoires du système :

$$\dot{V}(S,I) = \dot{S} - \frac{(\mu_3+\gamma)[\mu_3+(\mu_2-\mu_3)I-\mu_3 S-\beta SI]}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)} + \beta SI - (\mu_2-\gamma)I - \bar{I}\big(\beta S-(\mu_2-\gamma)\big)$$

$$\dot{V}(S,I) = \dot{S} - \frac{(\mu_3+\gamma)(\mu_3-\mu_3 S)}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)} + (\mu_3+\gamma)I + \beta SI - (\mu_2-\gamma)I - \bar{I}\big(\beta S-(\mu_2-\gamma)\big)$$

$$\dot{V}(S,I) = \mu_3(1-S) - \frac{(\mu_3+\gamma)(\mu_3-\mu_3 S)}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)} - \bar{\bar{I}}\big(\beta S - (\mu_2-\gamma)\big)$$

$$\dot{V}(S,I) = \mu_3(1-S)\left[1 - \frac{(\mu_3+\gamma)}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)}\right] - \bar{\bar{I}}\big(\beta S - (\mu_2-\gamma)\big)$$

$$\dot{V}(S,I) = \frac{\mu_3(1-S)(-\beta\bar{\bar{S}}+\beta S)}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)} - \frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}(1-\bar{\bar{S}})(\beta S - \beta\bar{\bar{S}})$$

$$\dot{V}(S,I) = -\mu_3\beta(S-\bar{\bar{S}})\left[\frac{1-S}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)} - \frac{1-\bar{\bar{S}}}{\mu_3+\gamma}\right]$$

$$\dot{V}(S,I) = -\mu_3\beta(S-\bar{\bar{S}})\left[\frac{1-S}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)} - \frac{1-\bar{\bar{S}}}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)}\right]$$

$$\dot{V}(S,I) = -\frac{\mu_3\beta}{\mu_3+\gamma}\left[\frac{-\mu_2+\beta+\mu_3}{(-\mu_2+\mu_3+\beta S)}\right](S-\bar{\bar{S}})^2$$

Donc

$$\dot{V}(S,I) \leq 0, \qquad \forall S, I \in \Omega_1$$

Ainsi on conclut que $\dot{V}$ est semi définie négative. L’équilibre endémique est donc stable par les théorèmes de Lyapunov. On prouve l’attractivité de cet équilibre en utilisant le principe d’invariance de LaSalle.

L’ensemble sur lequel $\dot{V}(S,I) = 0$ est donné par :

$$E = \{(S,I) \in \Omega_1, S = \bar{\bar{S}}\}$$

Sur cet ensemble, on a :

$$\dot{S} = \mu_3 + (\mu_2-\mu_3)I - \mu_3\bar{\bar{S}} - \beta\bar{\bar{S}}I = 0$$

D’où :

$$I = \frac{(\mu_3 - \mu_3\bar{\bar{S}})}{\beta\bar{S} - \mu_2 + \mu_3} = \bar{\bar{I}}$$

Donc, le plus grand ensemble invariant contenu dans $\{(S, I) \in \Omega_1, \dot{V}(S, I) = 0\}$ est réduit à l'équilibre endémique

Donc :

$$(\bar{S}, \bar{I})\ est\ attractif$$

et l'équilibre endémique est asymptotiquement stable sur Ω_1

Conclusion

Le principe d'invariance de LaSalle a été présenté (démonstration détaillé et figures pour compléter la compréhension de ce principe)
Ce résultat a été ensuite appliqué à un système épidémiologique SIR pour montrer la stabilité de l'équilibre sans maladie pour $R_0 < 1$ et la stabilité asymptotique de l'équilibre endémique pour $R_0 > 1$

Références

[1] P.ADDa et D. BIACHARA *Global stability for SIR and SIRS models with differential mortality.International journal of Pure and Applied MathematicsVolume 80,N°30,2012,524-433*

[2] **C.CATILLO-CHAVEZ, Z.FENG, W.HUANG** *On the computation of R_0 and its role on global stability*

[3] S.CHARLES, C.LOPES *Biologie mathématiques et modélisation, chapitre 3 ; Fonctions de Lyapunov-Notion de cycle limite 16/05/2008*

[4] **J.T DESSANTI** *Fondement de mathématiques*

[5] H.KHALIL *nonlinear systems, Third Edition, Prentice Hall, 2002. ISBN 0-13-0673897*

[6] M.LAKRIB *équation à retard, moyennisation et applications cours Master PeMAB, année 2012/2013*

[7] **M.W.HIRSCHE, S.SMALE** *Differential equations, Dynamical systems and linear algebra, Pure and Applied Mathematics, vol XI, Academic Press, 1974*

[8] **T.SARI** *Introduction aux systèmes dynamiques et application à un modèle cosmologique*

[9] **S. Busenberg,P. Van Den Driessche** *A method for prouving the nonexistence of limit cycles*