Table des Matières

-1.1 Introduction

Dans les debut des années quatre vingt **Mr George Adomian** a devellopé une méthode appelée méthode décompositionnelle d'Adomian qui permet de trouver une approximation aussi précise que l'on veut d'une solution d'un probléme il suffit juste qu'on puisse écrire notre équation sous forme $u = N(u)$.
Cette méthode permet de trouver les solutions de toute sorte d'équations fonctionnelles même dans le cas non linéaire comme les équations aux derivées partielles, les équations differentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles fractionnaires.

L'objet de ce travail est la présentation de la méthode décompositionnelle d'Adomian et de résoudre certaines équations aux dérivées partielles et aux dérivées partielles fractionnaires.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions et résultats préliminaires. Dans, le deuxième chapitre on présente la méthode décompositionnelle d'Adomian et on donne des conditions suffisantes pour la convergence de cette méthode. Le troisième chapitre est consacré à la résolution des équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode décompositionnelle d'Adomian et le dernier chapitre est consacré à la résolution de quelques équations aux dérivées partielles fractionnaires par la méthode décompositionnelle d'Adomian.

Chapitre 1

Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utile pour la suite. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3], [5], [11], [12] et [14].

1.1 Dérivée et intégrale fractionnaires

Définition 1.1.1 *On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction notée* Γ *définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$$

où x est un nombre réel strictement positif..

Définition 1.1.2 *On appelle fonction Béta d'Euler la fonction notée B définie par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

où x et y sont deux réels strictement positifs.

Proposition 1.1.3 *On a les propriétés suivantes*

- *Pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$,
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{n!}$,
- *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $y > 0$, $B(x,y) = B(y,x)$,
- *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $y > 0$, $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Définition 1.1.4 *On.appelle fonction de Mittag-Leffler, la fonction* E_α *définie par*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\alpha)},$$

où α *est un réel strictement positif.*
Pour $\alpha = 1$ *on a*

$$E_1(x) = e^x.$$

Définition 1.1.5 *Soit* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction. L'integrale de Riemann-liouville est definie par*

$$J_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,.$$

où α *est un nombre réel strictement positif.*

Remarque 1.1.6 *Pour* $\alpha = 0$, *on pose* $J_0^0 f = f$.

Exemple 1.1.7 *Pour tout* $\beta > -1$, *on a*

$$J_0^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.$$

En effet soit $\beta > -1$, *on a*

$$J_0^\alpha x^\beta = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt.$$

Si on pose le changement de variable $t = x\tau$, *on obtient*

$$
\begin{aligned}
J_0^{\alpha} x^{\beta} &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} dt. \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.1.8 *Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et f une fonction, On a les deux propriétés suivantes:*

i) *L'opérateur integral J_0^q est linéaire;*

ii) $J_0^{\alpha} J_0^{\beta} f(x) = J_0^{\alpha+\beta} f(x)$.

Définition 1.1.9 *Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction. La derivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de f est définie par*

$$
{}^{C}D_0^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n.. \end{cases}
$$

Proposition 1.1.10 *On a les propriétés suivantes*

1. $J^{\alpha C} D_0^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0)$, *pour tout* $0 < \alpha < 1$,

v) ${}^{C}D_0^{\alpha} J_0^{\alpha} f(t) = f(t)$, *pour tout* $\alpha > 0$.

1.2 Nombre de Stirling de second espèce $S(n,k)$, polynômes de Bell et formule de Faà di Bruno.

1.2.1 Nombre de Stirling de second espèce $S(n,k)$.

Définition 1.2.2 *Soit E un ensemble à n éléments, le nombre de k sous-ensembles non vides de E disjoints deux à deux dont la réunion est E s'appelle nombre de Stirling de seconde espéce. On note ce nombre $S(n,k)$. Donc $S(n,k) > 0$ si $1 \leq k \leq n$, et $S(n,k) = 0$ si $1 \leq n < k$.*

Remarque 1.2.3 *On pose* $S(0,0)=1$ *et* $S(0,k)=0$ *si* $k\geq 1$.

On a le résultat suivant

Théorème 1.2.4 *([5]) Le nombre de Stirling de second espèce* $S(n,k)$ *vaut:*

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{0\leq j\leq k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n,\ 1\leq k\leq n.$$

Théorème 1.2.5 *([5]) On a*

$$\Phi_k(t):=\sum_{n\geq 0}S(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(e^t-1\right)^k,\ k\geq 0,$$

et

$$\begin{aligned}\Phi(t,u): &= \sum_{n,k\geq 0}S(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k\\ &= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{1\leq k\leq n}S(n,k)\,u^k\right)\\ &= \exp\left(u\left(e^t-1\right)\right).\end{aligned}$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\Phi_k(t): &= \sum_{n\geq 0}S(n,k)\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq j\leq k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n\frac{t^n}{n!}\ \text{(d'aprés le théorème 1.2.4)}\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{0\leq j\leq k}\left((-1)^j C_k^j\sum_{n\geq 0}\frac{(k-j)^n t^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{0\leq j\leq k}\left((-1)^j C_k^j\left(e^t\right)^{k-j}\right)\\ &= \frac{1}{k!}\left(e^t-1\right)^k\ \text{(d'aprés la formule du binôme de Newton).}\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(t,u) &= \sum_{n,k\geq 0} S(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\left(u^k\sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{t^n}{n!}\right) \text{ (car } S(n,k)=0 \text{ pour } n<k) \\
&= \sum_{k\geq 0}\left(u^k\Phi_k(t)\right) \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{u^k\left(e^t-1\right)^k}{k!} \\
&= \exp\left(u\left(e^t-1\right)\right).
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.2.6 *([5]) On a*

$$x^n = \sum_{0\leq k\leq n} S(n,k)(x)_k, \tag{1.1}$$

où $(x)_k := x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$ *et* $(x)_0 := 1$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\frac{x^n t^n}{n!} &= e^{tx} \\
&= \left(1+\left(e^t-1\right)\right)^x \\
&= \sum_{k\geq 0}(x)_k\frac{\left(e^t-1\right)^k}{k!} \text{ (car } (1+y)^z = \sum_{k\geq 0}(z)_k\frac{y^k}{k!}) \\
&= \sum_{k\geq 0}(x)_k\,\Phi_k(t) \text{ (d'aprés le théorème précédent)} \\
&= \sum_{k\geq 0}(x)_k\sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq k\leq n}(x)_k\, S(n,k)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq k\leq n}(x)_k\, S(n,k)\frac{t^n}{n!}.$$

Par identification, on a

$$x^n = \sum_{0\leq k\leq n} S(n,k)(x)_k.$$

■

Remarque 1.2.7 *La formule (1.1) est souvent prise comme définition des* $S(n,k)$.

1.2.8 Polynômes de Bell

Définition 1.2.9 *Les polynômes de Bell (exponentiels) partiels sont les polynômes* $B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, x_2, ...x_{n-k+1})$,*de la suite infinie d'indéterminées* $x_1,\ x_2, ...,$ *définies par le développement en série double (formelle):*

$$\begin{aligned}\Psi = \Psi(t,u) : &= \exp\left(u \sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right) \\ &= \sum_{n,k\geq 0} B_{n,k} \frac{t^n}{n!} u^k \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{1\leq k\leq n} u^k B_{n,k}(x_1, x_2, ...) \right),\end{aligned}$$

ou bien, ce qui revient au méme, par Ie developpement en serie

$$\frac{1}{k!}(\sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!})^k = \sum_{n\geq k} B_{n,k} \frac{t^n}{n!},\ k = 0, 1, 2, ...$$

On a les résultats suivants

Théorème 1.2.10 *([5]) Les polynômes de Bell ont pour expression exacte*

$$B_{n,k}(x_1, x_2, ...x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{|n.c|=n \\ |c|=k}} \frac{n!}{c_1!c_2!..c_k!} x_1^{c_1} x_2^{c_2} ... x_k^{c_k}.,$$

où $|n.c| = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + ... + nc_n$ *et* $|c| = c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n$.

Théorème 1.2.11 *([5]) On a*

i) $B_{n,k}(1, 1, ..,) = S(n,k)$,

ii) $B_{n,k}(1!, 2!, 3!, ...) = C_{n-1}^{k-1} \frac{n!}{k!}$.

Démonstration : du théorème 1.2.11
i) On pose $x_1 = x_2 = ... = 1$ dans la définition des polynômes de Bell, on obtient

$$\exp\left(u\sum_{m\geq 1}\frac{t^m}{m!}\right)=\sum_{n,k\geq 0}B_{n,k}\left(1,1,..,\right)\frac{t^n}{n!}u^k.$$

Comme

$$\exp\left(u\sum_{m\geq 1}\frac{t^m}{m!}\right)=\exp\left(u\left(e^t-1\right)\right).$$

Alors, il résulte que

$$\sum_{n,k\geq 0}B_{n,k}\left(1,1,..,\right)\frac{t^n}{n!}u^k=\exp\left(u\left(e^t-1\right)\right). \tag{1.2}$$

D'autre part, d'aprés le théorème 1.2.5, la deuxième formule on a

$$\sum_{n,k\geq 0}S\left(n,k\right)\frac{t^n}{n!}u^k=\exp\left(u\left(e^t-1\right)\right). \tag{1.3}$$

Par suite, d'aprés (1.2) et (1.3), il résulte que

$$B_{n,k}\left(1,1,..,\right)=S\left(n,k\right).$$

ii) On pose $x_m=m!$ dans la définition des polynômes de Bell, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n,k\geq 0}B_{n,k}(1!,2!,3!,...)\frac{t^n}{n!}u^k &= \exp\left(u\sum_{m\geq 1}t^m\right)\\ &= \exp\left(u\frac{t}{1-t}\right)\\ &= \exp\left(ut\left(1-t\right)^{-1}\right)\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{u^kt^k}{k!}\left(1-t\right)^{-k}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{u^kt^k}{k!}\sum_{j\geq 0}\frac{k\left(k+1\right)...\left(k+j-1\right)}{j!}t^j\\ &= \sum_{k,j\geq 0}\frac{k\left(k+1\right)...\left(k+j-1\right)}{k!j!}t^{k+j}u^k.\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n,k\geq 0} B_{n,k}(1!,2!,3!,...)\frac{t^n}{n!}u^k = \sum_{k,j\geq 0} \frac{k\,(k+1)\,...\,(k+j-1)}{k!j!}t^{k+j}u^k$$
$$= \sum_{k,j\geq 0} \frac{k\,(k+1)\,...\,(k+j-1)}{k!j!}t^{k+j}u^k$$

Par identification, on obtient

$$\frac{B_{n,k}(1!,2!,3!,...)}{n!} = \frac{k\,(k+1)\,...\,(n-1)}{k!\,(n-k)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!k!\,(n-k)!}$$
$$= \frac{C_{n-1}^{k-1}}{k!}.$$

Par suite, il résulte que

$$B_{n,k}(1!,2!,3!,...) = C_{n-1}^{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

■

On a le résultat suivant

Théorème 1.2.12 *[3], [11], [12] et [14] Pour tout n et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a*

$$B_{n,k}(1^0,2^1,3^2,4^3,..) = C_{n-1}^{n-k}n^{n-k}.$$

Pour montrer cette identité, on a besoin de la formule d'inversion de Lagrange

Théorème 1.2.13 *Si x est une fonction de y et z et d'une fonction f indéfiniment dérivable, telle que*

$$x = z + yf\,(x)\,,$$

Alors pour toute fonction F indéfiniment dérivable, on a

$$F\,(x) = F\,(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[F'\,(z)\,(f\,(z))^n\right]\frac{y^n}{n!}.$$

Démonstration : du théorème 1.2.12
Soit $y \in \mathbb{R}$ et considérons l'équation suivante

$$x - ye^x = 0, \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

Cette équation admet une unique solution $x = g(y)$ autour de zéro
D'aprés la formule d'inversion de Lagrange, on a

$$F(g(y)) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[F'(x) e^{nx}\right]_{x=0} \frac{y^n}{n!}.$$

Pour $F(x) = x$, on obtient

$$\begin{aligned} g(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[F'(x) e^{nx}\right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[e^{nx}\right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{n-1} \frac{y^n}{n!}. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} (g(y))^k &= \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{n-1} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq k} B_{n,k} \left(1, 2^1, 3^2, ...\right) \frac{y^n}{n!} \text{ d'aprés la définition des polynômes de Bell.} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{k!} (g(y))^k = \sum_{n \geq k} B_{n,k} \left(1, 2^1, 3^2, ...\right) \frac{y^n}{n!}. \tag{1.4}$$

D'autre part si on prend $F(x) = \dfrac{x^k}{k!}$, on a d'aprés la formule d'inversion de lagrange

$$F(g(y)) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[F'(x) e^{nx}\right]_{x=0} \frac{y^n}{n!}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{(g(y))^k}{k!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{nx} \right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[x^{k-1} e^{nx} \right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[x^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{n^j x^j}{j!} \right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{n^j}{j!} x^{j+k-1} \right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\sum_{l=k-1}^{+\infty} \frac{n^{l-k+1}}{(l-k+1)!} x^l \right]_{x=0} \frac{y^n}{n!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} (n-1)! \frac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} C_{n-1}^{k-1} n^{n-k} \frac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} C_{n-1}^{k-1} n^{n-k} \frac{y^n}{n!} \text{ car } C_m^l = 0 \text{ si } m < l.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\frac{(g(y))^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_{n-1}^{k-1} n^{n-k} \frac{y^n}{n!} \tag{1.5}$$

D'aprés (1.4) et (1.5), par identification, il résulte que pour tout n et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$B_{n,k}(1^0, 2^1, 3^2, 4^3, ..) = C_{n-1}^{n-k} n^{n-k}.$$

■

Remarque 1.2.14 *La preuve du théorème 1.2.12 est similaire à celle du théorème 3 dans [3] et [14].*

1.2.15 Formule de Faà di Bruno.

Théorème 1.2.16 *([5]) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, g une fonction définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant $f(I)$. On suppose que f est m fois dérivable en $a \in I$ et g est m fois dérivables en $b = f(a)$ et ces dérivées sont finies. Alors $g \circ f$ est m fois dérivable en a et on a la relation*

$$\frac{d^m}{dt^m}(g \circ f)(a) = \sum_{\substack{|mk|=m \\ |k|=m}} \frac{1}{k_1!k_2!...k_m!} g^{(|k|)}(b) \left(\frac{f'(a)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f''(a)}{2!}\right)^{k_2} ... \left(\frac{f^{(m)}(a)}{m!}\right)^{k_m},$$

avec $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_m$ et $|mk| = k_1 + 2k_2 + ... + mk_m$.

La formule de Faà di Bruno est valable aussi dans les espaces de Banach et on a le résultat suivant

Théorème 1.2.17 *Soient E, F et G trois éspaces de Banach.. On suppose que f est une fonction définie sur un ouvert I de E, à valeurs dans F, g une fonction définie sur un ouvert J de F contenant $f(I)$ à valeurs dans G. Si f est m fois différentiable en $a \in I$ et g est m fois différentiable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est m fois différentiable en a et on a la relation*

$$(g \circ f)^{(m)}(a).v_{[m]} = \sum_{\substack{|mk|=m \\ |k|=m}} \frac{1}{k_1!k_2!...k_m!} g^{(|k|)}(b) \left(\left(\frac{f'(a)}{1!}.v_{[1]}\right)_{[k_1]}, ..., \left(\frac{f^{(m)}(a)}{m!}.v_{[m]}\right)_{[k_m]}\right),$$

avec $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_m$, $|mk| = k_1 + 2k_2 + ... + mk_m$ et $v_{[l]} = (v, ..., v)$ l fois.

Chapitre 2

La méthode décompositionnelle d'Adomian

Dans ce chapitre on présente la méthode décompositionnelle d'Adomian et on donne des conditions suffisantes pour la convergence de cette méthode. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [4], [10] et [11].

2.1 Présentation de la méthode

Dans cette section, on présente la méthode décompositionnelle d'Adomian.

On considère l'équation suivante

$$u = f + N(u), \tag{2.1}$$

avec N est un opérateur nonlinéaire analytique définie dans un espace de Banach E à valeurs dans E et f est une fonction donnée dans E et le problème est de chercher u solution de (2.1).

Pour cela on va chercher la solution sous forme d'une série

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \tag{2.2}$$

Pour construire cette série, on suppose que

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \tag{2.3}$$

où chaque A_n est une fonction de u_0,..., u_n.

Comme chaque A_n ne dépent que de u_0,..., u_n, on peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = f, \\ u_1 = A_0\left(u_0\right), \\ \ldots \\ u_{n+1} = A_n\left(u_0, ..., u_n\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

D'aprés (2.4), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_n = f + \sum_{k=0}^{n} A_k\left(u_0, ..., u_k\right). \tag{2.5}$$

En fait tendre n vers $+\infty$ et sachant que $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ et $N\left(u\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_n$, on obtient

$$u = f + N\left(u\right),$$

c'est-à-dire l'équation (2.1).

Remarque 2.1.1 *D'aprés ce qui précède on voit que la méthode est simple mais l'idée de décomposer le terme $N\left(u\right)$ en une série est originale.*

2.1.2 Les polynômes d'Adomian

Proposition 2.1.3 *On suppose que l'opérateur N est analytique et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, alors les polynômes d'Adomian sont définis par*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0), \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i)\right]_{\lambda=0}, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Démonstration : On considère la série entiére suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n,$$

où λ est un paramètre réel.

Comme la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, c'est-à-dire la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n \lambda^n$ converge pour $\lambda = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n \lambda^n$ est supérieur ou égal à 1.

On pose par définition

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n.$$

Comme la somme d'une série entière de rayon de convergence R est analytique sur $B(0, R)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon R, alors h est analytique sur $B\left(0, \widetilde{R}\right)$ avec $\widetilde{R}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n \lambda^n$.

Par suite, comme N est analytique par hypothèse, alors $N \circ h$ est analytique sur $B\left(0, \widetilde{R}\right)$, c'est-à-dire il existe des tels que

$$(N \circ h)(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \lambda^n.$$

Les A_n vérifient

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[(N \circ h)(\lambda)\right]_{|\lambda=0} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i\right) \right]_{|\lambda=0}. \end{aligned}$$

■

On a aussi le résultat suivant

Théorème 2.1.4 *On suppose que N est une fonction scalaire analytique et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, alors les polynômes d'Adomian sont définis par*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \sum\limits_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0) \frac{u^k}{k!}, n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.2.3}$$

où

$$\begin{gathered} u^k = u_1^{k_1} u_2^{k_2} ... u_n^{k_n}, \\ k! = k_1! k_2! ... k_n! \\ k = k_1 + k_2 + ... + k_n \\ |nk| = k_1 + 2k_2 + ... + nk_n \end{gathered}$$

Démonstration : Soit $n \in N^*$, d'aprés le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} A_n(u_0, u_1, ..., u_n) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0} \\ &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(N\circ h)(\lambda)\right]_{|\lambda=0}\text{ , avec } h(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\lambda^n. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Faà di Bruno, on obtient

$$\begin{aligned} A_n(u_0, u_1, ..., u_n) &= \sum_{|nk|=n}\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}N^{(|k|)}(u_0)\left(\frac{u_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{2!u_2}{2!}\right)^{k_2}...\left(\frac{n!u_n}{n!}\right)^{k_n} \\ &= \sum_{|nk|=n}\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}N^{(|k|)}(u_0)u_1^{k_1}u_2^{k_2}...u_n^{k_n} \\ &= \sum_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0)\frac{u^k}{k!},\text{ avec } k! = k_1!k_2!...k_n! \text{ et } u^k = u_1^{k_1}u_2^{k_2}...u_n^{k_n}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.5 *On suppose queN est un opérateur analytique et la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente, alors les polynômes d'Adomian sont définis par*

$$\begin{gathered} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \sum_{|nk|=n}\frac{N^{(|k|)}(u_0)}{k!}.\left(u_{1[k_1]}, ..., u_{n[k_n]}\right), n = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{2.2.3}$$

où $v_{[l]}$ dénote $(v, ..., v)$ l fois.
Démonstration : La preuve est similaire à celle du théorème 2.1.4. ■

2.2 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian

L'objet de cette partie est de donner des conditions suffisantes pour la convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian.

Définition 2.2.1 ***Les nombres de Abbaoui-Cherruault***
Les nombres de Abbaoui-Cherruault sont donnés par

$$C_{k_1,k_2,...,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} \frac{1}{(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}...(n!)^{k_n}} \frac{1}{(n+1-|k|)!}.$$

On a le résultat suivant

Proposition 2.2.2 *On a*

$$\sum_{|nk|=n} C_{k_1,k_2,...,k_n} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\sum_{|nk|=n} C_{k_1,k_2,...,k_n} &= \sum_{|nk|=n} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} \frac{1}{(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}...(n!)^{k_n}} \frac{1}{(n+1-|k|)!} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{|n.k|=n \\ |k|=l}} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} \frac{1}{(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}...(n!)^{k_n}} \frac{1}{(n+1-l)!} \\
&= \sum_{l=1}^{n} B_{n,l}(1,1,..,1) \frac{1}{(n+1-l)!} \\
&= \sum_{l=1}^{n} S(n,l) \frac{1}{(n+1-l)!} \text{ d'aprés le théorème 1.2.11} \\
&= \sum_{l=0}^{n} S(n,l) \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n+2-l)}{n!} \text{ car } S(n,0) = 0 \text{ par définition.} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{n} S(n,l)(n+1) \times n \times (n-1) \times ... \times (n+2-l) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{n} S(n,l)(n+1) \times n \times (n-1) \times ... \times (n+1-l+1) \\
&= \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \text{ d'aprés le théorème 1.2.6.}
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.3 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

i) N est analytique,

ii) la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, *iii) Il existe une constante M positive telle que $\left\| N^{(|k|)}(u_0) \right\| \leq M$, pour tout $|k|$ entier naturel.*

Alors,

$$\|A_n(u_0, ..., u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démonstration : *On distingue deux cas*

Cas 1 : *N est une fonction scalaire.*

La preuve se fait par réccurence.

Pour $n = 0$, on a

$$A_0(u_0) = N(u_0).$$

Comme

$$\|N_0(u_0)\| \leq M.$$

Alors

$$\|A_0(u_0)\| \leq M.$$

Supposons que la relation est vraie j'usqu'à l'ordre $n = p - 1$,c'est à dire

$$\|A_n(u_0, ..., u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \ , \forall n \leq p - 1,$$

et montrons que

$$\|A_p(u_0, ..., u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1}.$$

On a,

$$\begin{aligned} A_p(u_0, u_1, ..., u_p) &= \sum_{|pk|=p} N^{(|k|)}(u_0) \frac{u^k}{k!} \\ &= \sum_{|pk|=p} \frac{1}{k_1! k_2! ... k_p!} N^{(|k|)}(u_0) u_1^{k_1} u_2^{k_2} ... u_p^{k_p} \end{aligned}$$

Comme

$$\left\| N^{(|k|)}(u_0 \right\| \leq M.$$

Alors, il résulte que

$$\|A_p(u_0, u_1, ..., u_n)\| \leq \sum_{|pk|=p} M. \|u_1\|^{k_1} . \|u_2\|^{k_2} ... \|u_p\|^{k_p} .$$

Maintenant comme

$$u_i = A_{i-1}(u_0, ..., u_{i-1}) \ et \ \|A_{i-1}\| \leq \frac{i^{i-1}}{i!} M^i \ \forall i \leq p,$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\|A_p(u_0, u_1, ..., u_p)\| &\leq \sum_{|pk|=p} \frac{1}{k_1!k_2!...k_p!} M.(\tfrac{1^0}{1!}M)^{k_1}(\tfrac{2^1}{2!}M^2)^{k_2}...(\tfrac{p^{p-1}}{p!}M^p)^{k_p} \\
&= \sum_{|pk|=p} \frac{1}{k_1!k_2!...k_p!} M.M^{k_1+2k_2+...+pk_p}(\tfrac{1^0}{1!})^{k_1}(\tfrac{2^1}{2!})^{k_2}...(\tfrac{p^{p-1}}{p!})^{k_p} \\
&= M^{p+1} \sum_{|pk|=p} \frac{1}{k_1!k_2!...k_p!}(\tfrac{1^0}{1!})^{k_1}(\tfrac{2^1}{2!})^{k_2}...(\tfrac{p^{p-1}}{p!})^{k_p} \\
&= M^{p+1} \sum_{j=1}^{p}(\sum_{\substack{|pk|=p \\ k=j}} \frac{1}{k_1!k_2!...k_p!}(\tfrac{1^0}{1!})^{k_1}(\tfrac{2^1}{2!})^{k_2}...(\tfrac{p^{p-1}}{p!})^{k_p}) \\
&= M^{p+1} \sum_{j=1}^{p}(\sum_{\substack{|pk|=p \\ k=j}} \frac{p!}{p!k_1!k_2!...k_p!}(\tfrac{1^0}{1!})^{k_1}(\tfrac{2^1}{2!})^{k_2}...(\tfrac{p^{p-1}}{p!})^{k_p}) \\
&= \frac{M^{p+1}}{p!} \sum_{j=1}^{p}(\sum_{\substack{|pk|=p \\ k=j}} \frac{p!}{k_1!k_2!...k_p!}(\tfrac{1^0}{1!})^{k_1}(\tfrac{2^1}{2!})^{k_2}...(\tfrac{p^{p-1}}{p!})^{k_p}) \\
&= \frac{M^{p+1}}{p!} \sum_{j=1}^{p} B_{p,j}(1^0, 2^1, .., p^{p-1}) \\
&= \frac{M^{p+1}}{p!} \sum_{j=1}^{p} C_{p-1}^{p-j} p^{p-j} \ \ \textit{d'aprés le théorème 1.2.12} \\
&= \frac{M^{p+1}}{p!} \sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^{p-1-l} p^{p-1-l} \\
&= \frac{M^{p+1}}{p!} (p+1)^{p-1} \ \ \textit{d'aprés la formule du binôme de Newton.} \\
&= \frac{M^{p+1}}{(p+1)!} (p+1)^{p}.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\|A_p(u_0, ..., u_p)\| \leq \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} M^{p+1},$$

et par conséquent, il résulte que

$$\|A_n(u_0,...,u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Cas 2 : *N est un opérateur.*
La preuve se fait par réccurence.
Pour $n=0$, on a

$$A_0(u_0) = N(u_0).$$

Comme

$$\|N_0(u_0)\| \leq M.$$

Alors

$$\|A_0(u_0)\| \leq M.$$

Supposons que la relation est vraie j'usqu'à l'ordre $n = p-1$,c'est à dire

$$\|A_n(u_0,...,u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1} \ ,\forall n \leq p-1,$$

et montrons que

$$\|A_p(u_0,...,u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}.$$

On a,

$$\begin{aligned} A_p(u_0,u_1,...,u_p) &= \sum_{|pk|=p} \frac{N^{(|k|)}(u_0)}{k!}.\left(u_{1[k_1]},...,u_{p[k_p]}\right) \\ &= \sum_{|pk|=p} \frac{1}{k_1!k_2!...k_p!}N^{(|k|)}(u_0).\left(u_{1[k_1]},...,u_{p[k_p]}\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\left\|N^{(|k|)}(u_0\right\| \leq M.$$

Alors, il résulte que

$$\begin{aligned} \|A_p(u_0,u_1,...,u_n)\| &\leq \sum_{|pk|=p} M.\left\|u_{1[k_1]}\right\|...\left\|u_{p[k_p]}\right\| \\ &\leq \sum_{|pk|=p} M.\left\|u_1\right\|^{k_1}...\left\|u_p\right\|^{k_p}. \end{aligned}$$

Maintenant comme

$$u_i = A_{i-1}(u_0, ..., u_{i-1}) \text{ et } \|A_{i-1}\| \leq \frac{i^{i-1}}{i!} M^i \;\forall i \leq p,$$

alors en utilisant une preuve similaire à celle du premier cas, on obtient

$$\|A_p(u_0, ..., u_p\| \leq \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} M^{p+1},$$

et par conséquent, il résulte que

$$\|A_n(u_0, ..., u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

■

Lemme 2.2.4 *Pour tout entier naturel n, on a*

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.$$

Démonstration : *Soit n un entier naturel. On distingue deux cas*

Cas 1: $n = 0$.

Pour ce cas, on a

$$e^{0+1} = e^1 > 1 = \frac{(0+1)^0}{(0+1)!}.$$

Cas 2: $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour ce cas, d'aprés la formule de Mac-Laurin, on a

$$e^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1!} + \frac{(n+1)^2}{2!} + ... + \frac{(n+1)^n}{n!} + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(n+1)},$$

où θ est un nombre dépendant de n et qui vérifie la relation $0 < \theta < 1$. D'aprés cette formule, il résulte que

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(n+1)}.$$

Comme $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} > \dfrac{(n+1)^n}{(n+1)!}$ *et* $e^{\theta(n+1)} > 1$, *on obtient*

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.$$

En conclusion, pour tout entier naturel, on a

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.$$

■

Théorème 2.2.5 *Supposons que que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

i) L'opérateur N est analytique,

ii) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente,

iii) Il existe une constante M positive avec $M < \dfrac{1}{e}$ telle que $\left\| N^{(|k|)}(u_0) \right\| \leq M$, pour tout $|k|$ entier naturel.

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites et soit n un entier naturel.*

On a,

$$u_{n+1} = A_n(u_0, ..., u_n).$$

D'aprés le théorème 2.2.3, on a

$$\|A_n(u_0, ..., u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1}.$$

Or d'aprés le lemme précédent, on a

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} < e^{n+1}.$$

Alors, il résulte que

$$\|u_{n+1}\| < (M.e)^{n+1}.$$

Comme la série géométrique $\sum_{n\geq 0} (M.e)^{n+1}$ *est convergente car* $M.e < 1$, *alors d'aprés le critère de comparaison, la série* $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ *est convergente.*

■

Lemme 2.2.6 *On a*

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{(p+1)^p}{(p+1)!}(\exp(1))^{n-p+1};\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n.$$

Démonstration : *Soient n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$..*
On distingue deux cas.
Cas 1: $n = 0$.
Pour ce cas, on a

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{(0+2)^{0+1}}{(0+2)!} = 1 < e^1 = \frac{(0+1)^0}{(0+1)!}(\exp(1))^{0-0+1}.$$

Cas 2 : $n \neq 0$.
On a

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n. \tag{2.6}$$

D'aprés le théorème des accroissements finis, on a

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1+\delta},$$

où δ est un nombre dépendant de n et qui vérifie la relation $0 < \delta < 1$. De cette égalité, il résulte que

$$\frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1},$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{n+2} < \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}.$$

Multiplions les membres de cette double inégalité par n, on obtient

$$\frac{n}{n+2} < \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n < \frac{n.}{n+1}.$$

Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, il résulte que

$$e^{\frac{n}{n+2}} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n < e^{\frac{n.}{n+1}}.$$

Ce qui entraîne que

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n < e. \tag{2.7}$$

Donc d'aprés (2.6) et (2.7), il résulte que

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}e. \tag{2.8}$$

De même, on montre que

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} < \frac{n^{n-1}}{n!}e. \tag{2.9}$$

Alors d'aprés (2.8) et (2.9), on obtient

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{(n)^{n-1}}{n!}(\exp(1))^2.$$

Par récurrence rétrograde, il résulte que

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{(p+1)^p}{(p+1)!}(\exp(1))^{n-p+1}.$$

En conclusion, on a

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{(p+1)^p}{(p+1)!}(\exp(1))^{n-p+1};\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n.$$

■

Théorème 2.2.7 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

i) L'opérateur N est analytique,

ii) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente,

iii) Il existe une constante M positive avec $M < \frac{1}{e}$ telle que $\left\|N^{(|k|)}(u_0)\right\| \leq M$, pour tout $|k|$ entier naturel.
alors, on a la majoration suivante

$$\|u - \varphi_n\| < \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}}{(1 - M.\exp(1))}, \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\varphi_n = \sum_{j=0}^{n} u_j.$

Démonstration : Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites et soit n un entier naturel.

On a,

$$u-\varphi_n=\sum_{j\geq 0}u_j-\sum_{j=0}^{n}u_j=\sum_{j\geq n+1}u_j.$$

Alors

$$\|u-\varphi_n\|\leq\sum_{j\geq n+1}\|u_j\|=\sum_{j\geq n+1}\|A_{j-1}\left(u_0,u_1,...,u_{j-1}\right)\|. \tag{2.10}$$

D'aprés le théorème 2.2.3, on a

$$\|A_{j-1}\left(u_0,u_1,...,u_{j-1}\right)\|\leq\frac{j^{j-1}}{j!}M^j. \tag{2.11}$$

Donc d'aprés (2.10) et (2.11), on obtient

$$\sum_{j\geq n+1}\|A_{j-1}\left(u_0,u_1,...,u_{j-1}\right)\|\leq\sum_{j\geq n+1}\frac{j^{j-1}}{j!}M^j. \tag{2.12}$$

En utilisant le lemme 2.2.6, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq n+1}\frac{j^{j-1}}{j!}M^j &= \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}+\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!}M^{n+2}+\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+3)!}M^{n+3}+.\\ &\quad \frac{(n+4)^{n+3}}{(n+4)!}M^{n+4}+...\\ &< \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}+\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}(\exp(1))M^{n+2}+\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}(\exp(1))^2M^{n+3}+\\ &\quad \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}(\exp(1))^3M^{n+4}\\ &= \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}\left(1+(\exp(1))M+(\exp(1))^2M^2+(\exp(1))^3M^3+...\right)\\ &= \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}\sum_{l\geq 0}\left((\exp(1))M\right)^l\\ &= \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}}{(1-M.\exp(1))}\ \text{car } M.\exp(1)<1 \text{ par hypothèse.}\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\|u-\varphi_n\|<\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}}{(1-M.\exp(1))}.$$

■

Remarque 2.2.8 *On peut appliquer la méthode décompositionnelle d'Adomian à des équations de type* $Lu = f + N(u)$, *où* L *est un opérateur linéaire inversible, il suffit d'envisager la résolution de l'équation* $u = L^{-1}f + L^{-1}N(u)$, *où* L^{-1} *est l'opérateur inverse de* L.

Chapitre 3

Exemples d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

L'objet de ce chapitre est l'application de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1], [2] et [15] .

3.1 Exemple d'équation différentielle ordinaire.

Considérons le problème initial suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - u^2 = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

On pose par définition $L(.) = \frac{d}{dt}$ et $N(u) = u^2$.
On a

$$\begin{cases} u = \sum_{n\geq 0} u_n, \\ N(u) = \sum A_n. \end{cases}$$

Le problème (3.1) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} Lu - N(u) = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Comme

$$Lu = N(u).$$

Alors

$$L^{-1}Lu = L^{-1}N(u),$$

avec L^{-1} est l'opérateur inverse de L défini par

$$L^{-1}(.) = \int_0^t (.)ds.$$

.

Ce qui entraîne que

$$u = u(0) + L^{-1}N(u).$$

Comme $u(0) = 1$ est $N(u) = \sum_{n\geq 0} A_n$, alors il resulte que

$$u = 1 + L^{-1}\sum_{n\geq 0} A_n,$$

et comme $u = \sum_{n\geq 0} u_n$, alors par identification on a

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = L^{-1}A_0, \\ u_2 = L^{-1}A_1, \\ \quad ... \\ u_{n+1} = L^{-1}A_n. \end{cases}$$

Les polynômes d'Adomian sont obtenus grâce à la relation suivante

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0}.$$

On a

$$A_0 = N(u_0) = N(1) = 1,$$

$$u_1 = L^{-1}A_0 = \int_0^t ds = t.$$

Calculons A_1 et u_2.
On a

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}N(u_0 + u_1)_{|\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}N(1 + \lambda t)_{|\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}(1 + \lambda t)^2_{|\lambda=0}$$

$$= 2t,$$

ce qui entraîne que $u_{2:}$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^t 2s\ ds \\ u_2 &= t^2. \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$A_{n-1} = nt^{n-1},$$

et

$$u_n = \int_0^t nt^{n-1} = t^n.$$

Par suite, il résulte que

$$u = \sum_{n \geq 0} t^n.$$

Pour $|t| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} t^n$ est convergente et de plus on a

$$\sum_{n\geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

En conclusion, la fonction u définie par $u(t) = \frac{1}{1-t}$ pour $|t| < 1$ est solution du problème de Cauchy (3.1).

3.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles.

Exemple 3.2.1 *Considérons le probléme hyperbolique*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + g(x,y)f(u(x,y)) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u(0,y) = \psi(y), \end{cases} \tag{3.2}$$

où f, ϕ, ψ sont des fonctions réelles.
L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + g(x,y)f(u(x,y)) = 0,$$

s'écrit sous la forme

$$Lu + gf(u) = 0,$$

avec $L(.) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(.)$.

Si on note par L^{-1} l'opérateur inverse de L on obtient

$$L^{-1}Lu = -L^{-1}gf(u).$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} L^{-1}Lu &= \int_0^x \int_0^y u_{xy}\, dy\, dx \\ &= \int_0^x u_x|_0^y \, dx = \int_0^x \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} \right] dx \\ &= u(x,y) - u(0,y) - u(x,0) + u(0,0). \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$u(x,y) = u(0,y) + u(x,0) - u(0,0) - L^{-1}gf(u).$$

On pose par définition $u_0 = u(0,y) + u(x,0) - u(0,0)$ et utillisant la méthode d'écompositionnelle d'Adomian on obtient par identificaion

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}g(x,y)A_0(u_0), \\ u_2 &= -L^{-1}g(x,y)A_1(u_{0,}u_1), \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}g(x,y)A_n(u_{0,}u_1, ..., u_n).$$

Donc pour $n = 0, 1, 2, ...$ on aura

$$u = u_0 - L^{-1}g(x,y) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f(u)).$$

C'est la solution genéral si les fonctions $f \ et \ g$ sont spécifiés

soit la fonctin $f(u) = u \quad et \quad g(x,y) = -(1 + xy)$ avec les conditions initiales suivantes

$$u(0,y) = u(x,0) = u(0,0) = 1,$$

alors

$$u_0 = 1,$$

maintenant calculons A_0 et u_1

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= -L^{-1}g.u_0 = xy + x^2y^2/4, \\
&= \int_0^x \int_0^y (1+xy)\ dy\ dx, \\
&= xy + x^2y^2/4.
\end{aligned}$$

Pour u_2

$$\begin{aligned}
u_2(x,y) &= A_1, \\
&= \int_0^x \int_0^y \frac{d}{d\lambda} N(u_0 + \lambda u_1) dx dy, \\
&= \int_0^x \int_0^y \frac{d}{d\lambda} (1+xy).(1+\lambda(xy+\frac{1}{4}x^2y^2), \\
&= \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{3.3}x^3y^3 + \frac{1}{4.3.3}x^3y^3 + \frac{1}{4.4.4}x^4y^4.
\end{aligned}$$

La solution est

$$u(x,y) = 1 + xy + \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^2y^2.... = e^{xy}.$$

3.3 Équation de la chaleur homogène

Considerons le probléme suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} - u \quad 0 < x, y < \pi, t > 0, \\ u(0,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = e^{-3t} \sin x, \\ u(x,y,0) = \sin x \cos y. \end{cases} \tag{3.3}$$

On pose par définition

$$\begin{cases} L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \\ L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases}$$

et

$$L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Appliquons $L_t^{-1} = \int\limits_0^t .dt$ aux deux membres de l'équation (3.3), on obtient

$$u(x,y,t) = \sin x \cos y + L_t^{-1}(L_{xx}u + L_{yy}u - u).$$

Si on pose par définition

$$u(x,y,t) = \sum_{n\geq 0} u_n(x,y,t),$$

et

$$\begin{aligned} N(u) &= L_t^{-1}(L_{xx}u + L_{yy}u - u) \\ &= \sum_{n\geq 0} A_n. \end{aligned}$$

Alors par identification, on obtient

$$u_0(x,y,t) = \sin x \cos y,$$

$$u_1(x,y,t) = A_0(u_0).$$

Comme

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) = L_t^{-1}(L_{xx}u_0 + L_{yy}u_0 - u_0) \\ &= -3t \sin x \cos y. \end{aligned}$$

Calculons maintenant u_2 et A_1.
On a

$$\begin{array}{rcl} u_2(x,y,t) & = & A_1(u_0,u_1), \\ A_1(u_0,u_1) & = & \frac{d}{d\lambda}[N(u_0+\lambda u_1)]_{|\lambda=0}, \\ & = & L_t^{-1}(L_{xx}u_1+L_{yy}u_1-u_1) \\ & = & \frac{(3t)^2}{2!}\sin x\cos y. \end{array}$$

Donc

$$u_2(x,y,t)=\frac{(3t)^2}{2!}\sin x\cos y.$$

Pour u_3 on a

$$\begin{array}{rcl} u_3(x,t) & = & A_2(u_2), \\ & = & \dfrac{d^2}{d\lambda^2}\left[N(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)\right]_{|\lambda=0}, \\ & = & \dfrac{d^2}{d\lambda^2}[L_t^{-1}[(L_{xx}(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)]_{|\lambda=0}+\dfrac{d^2}{d\lambda^2}[L_t^{-1}(L_{yy}(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)]_{|\lambda=0} \\ & & -\dfrac{d^2}{d\lambda^2}[L_t^{-1}(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2))(x,t))]_{|\lambda=0}, \\ & = & \dfrac{d^2}{d\lambda^2}[L_t^{-1}(L_{xx}(\lambda^2 u_2))]_{|\lambda=0}+\dfrac{d^2}{d\lambda^2}[L_t^{-1}(L_{yy}(\lambda^2 u_2))]_{|\lambda=0}-\dfrac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^2[L_t^{-1}u_2)(x,t))]_{|\lambda=0}, \\ & = & \displaystyle\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{(3t)^2}{2!}\sin x\cos y)dt+\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{(3t)^2}{2!}\sin x\cos y)dt-2\int_0^t(\frac{(3t)^2}{2!}\sin x\cos y)dt, \\ & = & \displaystyle -\frac{3}{2}\int_0^t(3t)^2\sin x\cos y, \\ & = & -\dfrac{3.3^2}{3!}t^3\sin x\cos y, \\ & = & -\dfrac{1}{3!}(3t)^3\sin x\cos y. \end{array}$$

Par récurrence

$$u_n(x,y,t)=(-1)^n\frac{(3t)^n}{n!}\sin x\cos y.$$

Alors la solution du probléme (3.3) est

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{n\geq 0} u_n(x,y,t) \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(3t)^n}{n!} \sin x \cos y \\ &= e^{-3t} \sin x \cos y. \end{aligned}$$

3.4 Équation d'onde non homogène

Exemple 3.4.1 *Considérons le problème d'équations d'ondes non homogènes suivant*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6t + 2x &= 0, \\ u_x(0,t) &= t^2 + \sin t, \\ u_x(0,t) &= t^2 + \sin t \ , \\ u_x(\pi,t) &= t^2 - \sin t \ , \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= \sin x. \end{cases} \tag{3.4}$$

On pose par définition

$$L_{tt}^{-1}. = \int_0^t \int_0^t .dtdt \ .$$

Appliquant L_{tt}^{-1} aux membres de l'équation on trouve

$$u(x,t) = t^3 + t^2 x + t \ sinx + L_{tt}^{-1}(L_{xx} u(x,t)).$$

Posons par définition

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} u_n(x,t),$$

et

$$\begin{aligned}N(u) &= L_{tt}^{-1}(L_{xx}u(x,t)),\\ &= \sum_{n\geq 0} A_n.\end{aligned}$$

Donc par identification on aura

$$u_0(x,t) = t^3 + t^2x + t\ sinx,$$

Calculons u_1

$$\begin{aligned}u_1(x,t) &= A_0(u_0),\\ &= \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}(t^3+t^2x+t\ sinx)dtdt,\\ &= -\frac{t^3}{3!}\sin x.\end{aligned}$$

Comme

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0} \quad pour\ tout\ n\in\mathbb{N},$$

Maintenant calculons A_1 *et* u_2

$$\begin{aligned}u_2(x,t) &= A_1(u_1),\\ &= \frac{d}{d\lambda}\left[N(u_0+\lambda u_1)\right]_{|\lambda=0},\\ &= \frac{d}{d\lambda}[L_{tt}^{-1}(L_{xx}((u_0+\lambda u_1)(x,t))]_{|\lambda=0},\\ &= \frac{d}{d\lambda}[L_{tt}^{-1}(L_{xx}((u_0))]_{|\lambda=0} + \frac{d}{d\lambda}\lambda[L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_1)(x,t)]_{|\lambda=0},\\ &= L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_1)(x,t),\\ &= \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}(-\frac{t^3}{3!}\sin x)dtdt,\\ &= \frac{t^5}{5!}\sin x.\end{aligned}$$

Pour A_2 et u_3

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) &= A_2(u_2), \\
&= \frac{d^2}{d\lambda^2}\left[N(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)\right]_{|\lambda=0}, \\
&= \frac{d^2}{d\lambda^2}[L_{tt}^{-1}(L_{xx}((u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)(x,t))]_{|\lambda=0} \\
&= \frac{d^2}{d\lambda^2}[L_{tt}^{-1}(L_{xx}((u_0))]_{|\lambda=0}+\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda[L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_1)]_{|\lambda=0}+\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^2[L_{tt}^{-1}(L_{xx}(\lambda^2 u_2)(x,t))]_{|\lambda=0}, \\
&= \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{t^5}{5!}\sin x)dtdt, \\
&= -\frac{t^7}{7!}\sin x.
\end{aligned}$$

Et ainsi de suite par récurrence

$$u_n(x,t)=(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin x$$

$$u(x,t)=\sum_{n\geq 0}u_n(x,t)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin x$$

$$u(x,t)=t^3+t^2x+\sin x\sin t.$$

Chapitre 4

Exemples d'équation aux derivées partielles fractionnaires

L'objet de ce chapitre est l'application de la méthode décompositionelle d'Adomian pour certaines équations aux dérivées partielles. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [6] et [7].

Exemple 4.0.2 *Considérons le problème suivant*

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + hu,\ t > 0,\ x,\ y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.1}$$

avec la condition initiale

$$u(x, y, 0) = \sqrt{xy}.$$

$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ *représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de* u *par rapport à* t.

On pose par définition

$${}^C D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}(.).$$

On pose

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n,$$

le prolème (4.1) est équivalent à

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha} u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + hu, \\ u(x,y,0) &= \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$J_0^{\alpha}\ {}^C D_t^{\alpha} u = J^{\alpha}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + hu],$$

Si on pose par définition

$$N(u) = J_0^{\alpha}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + hu],$$

alors

$$u(x,y,t) = u(x,y,0) + \sum_{n\geq 0} A_n,$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} A_n &= J_0^{\alpha}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + hu] \\ &= N(u). \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$u_0(x,y,t) = \sqrt{xy},$$

calculons A_0 et u_1

$$
\begin{array}{rcl}
A_0(u_0) & = & N(u_0) \\
& = & J_0^\alpha[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_0^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_0^2) + hu_0] \\
& = & J_0^\alpha[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xy) + h\sqrt{xy}] \\
& = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} h\sqrt{xy}d\tau \\
& = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} h\sqrt{xy}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
& = & \frac{h\sqrt{xy}}{\Gamma(\alpha)}\frac{t^\alpha}{\alpha+1} \\
& = & \frac{h\sqrt{xy}t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{array}
$$

Calculons maintenant A_1 *et* u_2

$$
\begin{array}{rcl}
A_1(u_0, u_1) & = & \frac{d}{d\lambda}N(u_0+\lambda u_1) \\
& = & J^\alpha\frac{d}{d\lambda}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_0+\lambda u_1)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_0+\lambda u_1)^2 + h(u_0+\lambda u_1)]_{|\lambda=0} \\
& = & hJ^\alpha[\frac{h\sqrt{xy}t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}] \\
& = & h\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\frac{h\sqrt{xy}t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.d\tau \\
& = & h\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{h\sqrt{xy}}{\Gamma(\alpha+1)}.\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^\alpha d\tau,
\end{array}
$$

on pose $\tau = tv$,

$$\begin{aligned}
u_2 &= h^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\sqrt{xy}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t t^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1} t^{\alpha} v^{\alpha} t dv \\
&= h^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\sqrt{xy}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{2\alpha} \beta(\alpha, \alpha+1) \\
&= \frac{h^2\sqrt{xy}}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Et donc on a par récurrence

$$u_n = \frac{h^n\sqrt{xy}}{\Gamma(n\alpha+1)} t^{n\alpha}.$$

Donc la solution du problème (4.1) est

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sqrt{xy} \sum_{k\geq 0} \frac{(ht)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} \\
&= \sqrt{xy} E_{\alpha}(ht).
\end{aligned}$$

Exemple 4.0.3 *Considérons le modèle de population biologique fractionnaire suivant*

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + u(1-ru), \ x, \ y \in \mathbb{R} \ et \ 0 < \alpha \leq 1, \qquad (4.2)$$

avec

$$u_0(x,y,0) = \exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)).$$

On suppose
$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}$ *représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la dérivée partielle de u par rapport à t.*
on pose

$$D_0^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}(.),$$

on a

$$u = \sum_{n\geq 0} u_n,$$

Ce qui implique que

$$J_0^\alpha D_0^\alpha u = J_0^\alpha [\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + u(1-ru)],$$

posons par définition

$$N(u) = J_0^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) + u(1-ru) \right),$$

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + N(u)$$

$$u_0(x,y,0) = \exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)),$$

et donc

$$\begin{aligned}
u_1 &= A_0(u_0) \\
&= N(u_0) \\
&= J_0^\alpha [\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\exp(\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\exp(\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)) + \\
&\quad \exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)(1 - r\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))] \\
&= J_0^\alpha [u_0] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)) d\tau \\
&= \frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)).\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Pour A_1 *et* u_2

$$
\begin{aligned}
u_2 &= A_1(u_0,u_1)\\
&= \frac{d}{d\lambda}N(u_0+\lambda u_1)_{|\lambda=0}\\
&= J_0^\alpha\left\{\frac{d}{d\lambda}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_0+\lambda u_1)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_0+\lambda u_1)^2+(u_0+\lambda u_1)^2(1-r(u_0+\lambda u_1)^2)]\right\}_{|\lambda=0}\\
&= J_0^\alpha[\frac{d}{d\lambda}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_0^2+\lambda^2u_1^2+2\lambda u_0u_1)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_0^2+\lambda^2u_1^2+2\lambda u_0u_1)\\
&\quad +(u_0+\lambda u_1)(1-r(u_0+\lambda u_1))]]_{|\lambda=0}\\
&= J_0^\alpha\left\{[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_0u_1)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_0u_1)-2ru_0u_1+u_1]\right\}\\
&= J_0^\alpha[ru_0u_1+ru_0u_1-2ru_0u_1+u_1]\\
&= J_0^\alpha[u_1]\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)).\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}d\tau\\
&= \frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}d\tau
\end{aligned}
$$

on pose $\tau = tv$,

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t t^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}t^\alpha v^\alpha t dv,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(\alpha+1)}t^{2\alpha}\beta(\alpha,\alpha+1),\\
&= \frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha}.
\end{aligned}
$$

Et donc par récurrence la solution

$$u_k = \frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(k\alpha+1)}t^{k\alpha}.$$

Alors la solution

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{k\geq 0} u_k = \sum_{k\geq 0} \frac{\exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha} \\ &= \exp(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y))E_\alpha(t^\alpha). \end{aligned}$$

Exemple 4.0.4 *Considérons le problèm suivant*

$$D_t^\alpha u = \frac{1}{2} u u_{xx} - 2u^2 D_x^\beta u + (D_x^\beta u)^2; 0 < \alpha, \beta \leq 1,$$

avec

$$u(x,0) = f(x),$$

où,

D_t^α *représente la dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Caputo de* u *par rapport à* t,

D_x^β *représente la dérivée fractionnaire d'ordre* β *au sens de Caputo de* u *par rapport à* x.

Appliquons l'operateur inverse J_0^α, *on obtient*

$$u(x,t) = f(x) - 2J_0^\alpha \Phi_1(u(x,t)) + \frac{1}{2} J_0^\alpha \Phi_2(u(x,t)) + J_0^\alpha \Phi_3(u(x,t)),$$

où $\Phi_1(u(x,t)) = u^2 D_x^\beta u$, $\Phi_2(u(x,t)) = u u_{xx}$ *et* $\Phi_3(u(x,t)) = (D_x^\beta u)^2$, *par définition on a*

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} u_n(x,t),$$

les opérateurs non linéaire Φ_1 ,Φ_2 *et* Φ_3 *sont decomposés de la maniére suivante*

$$\Phi_1(u) = \sum_{n\geq 0} A_n,$$

$$\Phi_2(u) = \sum_{n\geq 0} B_n,$$

$$\Phi_3(u) = \sum_{n\geq 0} C_n.$$

Où

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\Phi_1(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)^2 D_x^\beta(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0}, \\
B_n &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\Phi_2(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i (u_i)_{xx})\right]_{|\lambda=0}, \\
C_n &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\Phi_3(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(D_x^\beta(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i))^2\right]_{|\lambda=0}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0 D_x^\beta u_0, \\
A_1 &= 2u_0u_1 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_1, \\
A_2 &= u_1^2 D_x^\beta u_0 + 2u_0u_2 D_x^\beta u_0 + 2u_0u_1 D_x^\beta u_1 + u_0^2 D_x^\beta u_2.
\end{aligned}$$

Et pour les B_n

$$\begin{aligned}
B_0 &= u_0(u_0)_{xx}, \\
B_1 &= u_0(u_1)_{xx} + u_1(u_0)_{xx}, \\
B_2 &= u_2(u_0)_{xx} + u_0(u_2)_{xx} + u_1(u_1)_{xx}.
\end{aligned}$$

Pour les C_n

$$\begin{aligned}
C_0 &= (D_x^\beta u_0)^2, \\
C_1 &= 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_1, \\
C_2 &= (D_x^\beta u_1)^2 + 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_2.
\end{aligned}$$

Par identification on a

$$u_0(x,t) = f(x),$$

et

$$u_{n+1}(x,t) = -2J_0^{\alpha}(A_n) + \frac{1}{2}J_0^{\alpha}(B_n) + J_0^{\alpha}(C_n);\ n \geq 0.$$

Bibliographie

[1] G. Adomian, Solving frontiers problem of physics: The decomposition method, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[2] G. Adomian *Nonlinear Hyperbolic Initial Value problem*, Journal of Mathematical Analysi and Applications, Volume 120, Issue 2, December 1986, pp. 730-733..

[3] S. Bouroubi and A. Moncef, *New identities for Bell's polynomials New appproaches*, Rostock Math. Kolloq. 61, (2006), pp. 49-55.

[4] Y. Cherruault, *Sur la convergence de la méthode d'Adomian*, Recherche opérationnelle, Volume 22, N°3, 1988, pp. 291-299.

[5] L. Comtet, Analyse combinatoire, Tomes 1 & 2, Collection Sup, Presse Universitaire de France, Paris, 1970..

[6] Z.Dahmani, M. M. Mesmoudi and R. Bebbouchi, *The foam drainage equation with time and-space-fractional derivatives solved by the Adomian method*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2008, N°30, pp. 1-10.

[7] A. M. A. El-Sayed, S. Z. Rida and A. A. M. Arafa, *Exact solutions of fractional-order biological population model*, Comm. Theor. Phys.(Beijing China), Volume 52, N°6, December 15, 2009, pp. 992-996.

[8] D. Foata & G. N. Han, Principes de combinatoire classique cours et exercices corrigés, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Département de mathématiques 2008.

[9] N. Himoun, K. Abbaoui and Y. Cherruault, *New results of convergence of Adomian's method,* Kybernetes, Volume 28, N°4, 1999, pp. 423-429.

[10] L. Gabet, *Esquisse d'une théorie décompositionnelle*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, Volume 30, N°7, 1996, pp. 799-814.

[11] S. Khelifa and Y. Cherruault, *New results for the Adomian method*, Kybernetes, Volume 29, N°3, 2000, pp. 332-354.

[12] S. Khelifa and Y. Cherruault, *Nouvelle identité pour les polynômes de Bell*, Maghreb Mathematical Review, Vol. 9, N° 1 and 2, June and December 2000, pp. 115-123.

[13] B.O. Konfe Nouvelles méthodes mathématiques Alienor et Adomian pour la Biomédecine, Thèse de Doctorat soutenue le 10/12/2005, Discipline: Mathématiques Appliquées, Spécialité: Biomathématiques, Université de Ouagadougou, Burkina Faso.

[14] A. Moncef and S. Bouroubi, *New identities for Bell's polynomials*, Journal of Disrecte Mathematics, Volume 293 (2005), pp. 5-10.

[15] A.Wazwaz Partial Diferential Equation and Solitary Waves Theory, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.