Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

REPUBLIQUE *ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE*
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
FACULTE DES SIENCES

Département des mathématiques

Mémoire de fin d'études

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques
Option : probabilités statistiques

Présenter par

BELLOUATI Imène

Thème

Noyaux non-négatifs Irréductibilité - Cycles

Soutenu le 26/09/2013 devant le jury composé de:

Président *: T. Mourid Professeur à l'université Abou Bekr Belkaid*

Encadreur *: A. Allam Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid*

Examinateur *: F. Boukhari Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid*

Année universitaire 2012-2013

Table des matières

Remerciements

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à ***ALLAH*** Tout Puissant, de m'avoir permis d'arriver là, car sans Lui rien n'aurait été possible.
La première personne que je tiens à remercier est mon encadreur Monsieur A. Allam maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.
J'exprime mes sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et particulièrement Monsieur T. Mourid professeur à l'université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen , et Monsieur F. Boukhari qui par leurs compétences m'ont soutenue dans la poursuite de mes études.

j'adresse mes remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.
Enfin,je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

- A mes très chers parents, Aucune dédicace, aucun mot ne pourrait exprimer à leur juste valeur la gratitude et l'amour que je vous porte, Je mets entre vos mains, le fruit de longues années d'études, de longs mois de distance de votre amour de votre tendresse, de longs jours d'apprentissage, votre soutien et votre encouragement m'ont toujours donné de la force pour persévérer et pour prospérer dans la vie.
- A mes belles soeurs
Amel , Nour el Houda , Ayet el Rahmen ,n'oublie pas la jumelle Ikram et Manel
-A mon très cher frère Ayoub
-A toute ma famille et surtout mon oncle Hakim pour les encouragements et les conseils qu'il m'a consenti.
- A ma copine et ma sur Mama qui a été un soutien moral généreux et précieux pendant toute ma vie.

Introduction

La théorie des chaînes de Markov à valeurs dans un espace d'état quelconque est basée sur l'étude des opérateurs non-négatifs induits par les noyaux de transition non-négatifs, dits souvent les noyaux non- négatifs. La relation étroite entre ces deux axes est analogue à celle entre les chaînes de Markov à valeurs dans un espace d'état discret et les matrices non négatives.
L'étude des noyaux non-négatifs nécessite des techniques avancées et fait intervenir souvent des arguments de la théorie de la mesure plus élaborés. En dépit de ces difficultés, au début des années 1970, la théorie générale sur cette classe et plus généralement sur les chaînes de Markov avait été développé à un état de maturité où tous les problèmes fondamentaux avaient été resolus d'une manière satisfaisante. A cette époque plusieurs monographies ont été publiés. Sans être exaustif, nous pouvons citer Foguel (1969), Orey (1971), Rosenblatt (1971), Revuz (1975).
Nous developpons dans ce mémoire quelques résultats présentés dans [3] sur les noyaux non-négatifs. Nous nous interessons plus particulièrement aux concepts de l'irréductibilité, les ensembles petits , les fonctions petites , et les cycles.
Ce document est composé de trois chapitres.
Dans le premier, nous introduisons les noyaux de transition non-négatifs et les ensembles clos , le noyau potentiel et la notion de communication induite par un noyau. Nous établissons ensuite un théorème important qui porte sur l'existence d'un noyau sous stochastique équivalent à un noyau $\sigma - fini$.
Nous traitons dans le deuxième chapitre la notion de l'irréductibilié. Nous donnons quelques propriétés de l'ensembles des états qui communiquent avec un ensemble de mesure strictement positive et nous élaborons un théorème sur l'existence et l'unicité de la mesure d'irréductibilité maximale. Nous présentons ensuite la condition minimale et nous montrons que pour un noyau irréductible, il existe toujours un ensemble petit .
Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement périodique d'un noyau possédant la condition minimale. Nous établissons,sous cette condition, l'existence et l'unicité d'un cycle.

Chapitre 1

Préliminaires.

1.1 Noyaux

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.
Dans toute la suite, nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables réelles définies sur $(E, \mathcal{E})$, par $\mathcal{M}_+$ la classe des fonctions non-négatives de $(E, \mathcal{E})$, et par $\mathcal{E}_b$ la partie des fonctions bornées de $(E, \mathcal{E})$.
Nous notons aussi par M la classe des mesures signées sur $(E, \mathcal{E})$, par M_+ le sous ensemble de M des mesures positives ou nulles et par M^+ la partie des mesures positives *i.e* :

$$M^+ = \{\lambda \in M_+ \ : \ \lambda(E) > 0\}$$

Définition 1.1 *Un noyau non-négatif sur $(E, \mathcal{E})$ est une application*

$$K : E \times \mathcal{E} \to \bar{I\!R}_+$$

qui possède les deux conditions suivantes :
1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $K(., A)$ est mesurable.
2) Pour tout $x \in E$, $K(x, .)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

La définition suivante donne une classification des noyaux non-négatifs.

Définition 1.2 *Un noyau K est dit :*
a) $\sigma - fini$ s'il existe une fonction mesurable réelle f de $E \times E$ telle que pour tout $x \in E$

$$\int_E K(x, dy) f(x, y) < \infty$$

b) Fini si pour tout $x \in E$:

$$K(x, E) < \infty$$

c) Borné si :

$$\sup_{x \in E} K(x, E) < \infty$$

d) Sous-stochastique si pour tout $x \in E$:

$$K(x, E) \leq 1$$

e) Stochastique si pour tout $x \in E$:

$$K(x, E) = 1$$

Exemple 1.1

1) Pour $x \in E, A \in \mathcal{E}$, posons

$$K(x, A) = I(x, A) = 1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in A \\ 0 & si \; x \notin A \end{cases}$$

K ainsi défini est un noyau appelé le noyau identité.

2) Soient φ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$ et k une fonction non-négative mesurable définie sur $E \times E$ munie de sa tribu produit $\mathcal{E} \bigotimes \mathcal{E}$.
Posons

$$K(x, dy) := k(x, y)\varphi(dy)$$

K est un noyau dit noyau intégral de base φ et de densité k.
Clairement K est σ-fini si et seulement si pour tout $x \in E$, $k(x, y)$ est finie φ.p.s pour tout $y \in E$.

La définition suivante montre comment un noyaux K peut agir comme un opérateur sur les espaces $\mathcal{E}_+$ et M_+.

Définition 1.3

1) Tout noyau K peut engendrer un opérateur linéaire non-négatif sur $\mathcal{M}_+$, défini par :

$$Kf\,(x) = \int\limits_E K\,(x, dy)\, f\,(y) \;\; , f \in \mathcal{M}_+$$

2) De même K agit comme un opérateur sur M_+ :

$$\lambda K\,(A) = \int\limits_E \lambda\,(dx)\, K\,(x, A) \;\; , \lambda \in M_+$$

Définition 1.4

1) Si K_1 et K_2 sont deux noyaux , alors leur produit $K_1\, K_2$ est défini par

$$\begin{aligned} K_1\, K_2 : E \times \mathcal{E} \;\; &\rightarrow \;\; \bar{I\!\!R}_+ \\ K_1\, K_2\;(x, A) \;\; &= \;\; \int\limits_E K_1\;(x, dy)\, K_2\,(y, A) \end{aligned}$$

2) *Les itérations K^n, $n \geq 0$, du noyau K sont données par :*

$$\begin{cases} K^0 = I \\ K^n = KK^{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Remarque 1.1 *Si le noyau K est sous-stochastique, on utilise le symbole P au lieu de K. Notons que dans ce cas , toutes les itérations $(P^n, n \geq 1)$ sont sous-stochastiques.*

Dans toute la suite, K est un noyau sur $(E, \mathcal{E})$. Nous supposons en plus que toute les itérations $K^n, n \geq 1$ de K sont $\sigma - finies$.

1.2 Ensembles clos

Nous introduisons maintenant la notion des ensembles clos.

Définition 1.5 *1. Un ensemble non vide $F \in \mathcal{E}$ est dit clos si pour tout $x \in F$:*

$$K(x, F^c) = 0$$

2. Un ensemble B est dit indécomposable s'il n'existe pas deux ensembles clos disjoints $F_1, F_2 \subset B$

3. Un ensemble non vide F est dit absorbant si pour tout $x \in F$

$$K(x, F) = 1 = K(x, E)$$

Remarques 1.1 *a) Un ensemble absorbant est toujours clos. Réciproquement si F est clos et si $K(x, F) \neq 1$, alors pour tout $x \in F$ on a*

$$K(x, F) = K(x, E) \neq 1$$

et donc F n'est pas absorbant.

b) Si K est stochastique, alors tout ensemble clos est absorbant et inversement .

Si F est clos, nous pouvons définir la réstriction de K comme le montre la définition suivante :

Définition 1.6 *Soit F un ensemble clos.*
La restriction du noyau K sur l'espace d'état restreint $(E, \mathcal{E} \cap F)$ et donnée par :

$$K|_F(x, A) = K(x, A \cap F), \quad x \in F$$

1. Il est claire que les itérations de $K|_F$ coïncident avec celles de K sur F ie :

$$(K|_F)^n = K^n|_F \qquad n \geq 1$$

2. Il est à noté aussi que la réstriction de K sur un ensemble absorbant est une probabilité de transition.

Proposition 1.1 *Si F est clos alors pour tout $n \geq 1$ et $x \in F$*

$$K^n(x, F^c) = 0$$

ie : pour tout $n \geq 1$ $\quad F$ est clos pour le noyau K^n.

Preuve. Par récurrence.

- Pour $n = 2$.
  Soit $x \in F$, on a

$$\begin{aligned} K^2(x, F^c) &= \int K(x, dy)K(y, F^c) \\ &= \int_F K(x, dy)K(y, F^c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Supposons que F^c est clos pour le noyau K^n et montrons que F^c est clos pour K^{n+1}.
  on a

$$\begin{aligned} K^{n+1}(x, F^c) &= \int K(x, dy)K^n(y, F^c) \\ &= \int_F K(x, dy)K^n(y, F^c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3 Noyau potentiel

Nous définissons maintenant le noyau potentiel.

Définition 1.7 *Soit K un noyau*
Le noyau potentiel G de K est donné par

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} K^n$$

La proposition suivante résume quelques propriétés du noyau potentiel.

Proposition 1.2

1. *Pour tout* $n \geq 1$
$$G = \sum_{m=0}^{n-1} K^m + K^n G = \sum_{m=0}^{n-1} K^m + GK^n \tag{1.3.1}$$
En particulier
$$G = I + KG = I + GK \tag{1.3.2}$$
2. *Si* $f \in \mathcal{E}_+$ *alors sur* $\{Gf < \infty\}$, *nous avons*
$$\lim_{n\to\infty} \downarrow K^n G f = 0 \tag{1.3.3}$$

où
$$\{Gf < \infty\} = \{x \in E \ : Gf(x) < \infty\}$$

.

Preuve.

1. Nous avons
$$\begin{aligned} G &= \sum_{n=0}^{\infty} K^n \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} K^m + \sum_{m=n}^{\infty} K^m \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} K^m + \sum_{j=0}^{\infty} K^n K^j \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} K^m + K^n \sum_{j=0}^{\infty} K^j \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} K^m + K^n G \end{aligned}$$
De la même manière on obtient la deuxième relation dans (1.3.1).
Pour les égualités dans (1.3.2), il suffit de prendre $n = 1$ dans les ralations (1.3.1).
2. Soit $y \in E$, nous avons
$$\begin{aligned} K^n G f(y) &= \int K^n (y, dx) \, Gf(x) \\ &= \int \int K^n (y, dx) \, G(x, dz) \, f(z) \end{aligned}$$

Si

$$Gf(y) < \infty$$

alors

$$\sum_{n \geq 0} K^n f(y) < \infty$$

par suite

$$K^n f(y) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui donne

$$\int K^n(y, dx) f(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque $f \in \mathcal{E}_+$ alors

$$K^n(y, E) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} \downarrow K^n Gf(y) = 0$$

■

Nous abordons maintenant la notion de "communication" induite par un noyau K sur l'espace d'état $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.8 *Soient $x \in E$ et $A \in \mathcal{E}$.*
On dit que x communique avec A ou A est atteignable de x et on note $x \to A$ s'il existe $n \geqslant 0$ tel que :

$$K^n(x, A) > 0$$

Quand $x \nrightarrow A$ on dit que A n'est pas atteignable de x.
Pour tout $A \in \mathcal{E}$, nous dénotons par A^0 l'ensemble des états de A^c qui ne communiquent pas avec A :

$$A^0 = \{x \in A^c / x \nrightarrow A\}$$

Proposition 1.3 *1. Nous avons $A^0 = \{G\mathbb{1}_A = 0\}$*

2. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, A^0 est soit vide soit clos .

Preuve.

1. Soit

$$x \in \{G\mathbb{1}_A = 0\}$$

on a

$$G\mathbb{1}_A(x) = 0$$

soit
$$\int G(x,dy)\,\mathbb{I}_A(y)=0$$
par conséquent
$$\int_A G(x,dy)=0$$
on obtient
$$G(x,A)=0$$
d'où
$$\sum_{n\geq 0} K^n(x,A)=0$$
ce qui donne que pour tout $n\geq 0$
$$K^n(x,A)=0$$
soit
$$x\nrightarrow A$$
d'autre part et pour $n=0$
$$K^0(x,A)=I(x,A)=0$$
il découle que
$$x\in A^c$$
ce qui implique que
$$x\in A^0$$
inversement, si $x\in A^0$ ie $x\in A^c$ et $x\nrightarrow A$, alors
$$K^0(x,A)=I(x,A)=0$$
et pour tout $n\geq 1$
$$K^n(x,A)=0$$
par suite
$$\begin{aligned} G\mathbb{I}_A(x) &= G(x,A) \\ &= \sum_{n\geq 0} K^n(x,A) \\ &= 0 \end{aligned}$$
ainsi
$$x\in\{G\mathbb{I}_A=0\}$$

2. Remarquons d'abord que $KG(x,A) \leq G(x,A)$. En effet :

$$\begin{aligned} KG(x,A) &= K\sum_{n\geq 0} K^n(x,A) \\ &= \sum_{n\geq 1} K^n(x,A) \\ &\leq K^0(x,A) + \sum_{n\geq 1} K^n(x,A) \\ &= G(x,A) \end{aligned}$$

Supposons que A^0 est non vide.
Soit $x \in A^0$ et posons $B = \{y \in A^c : y \nrightarrow A\}$
Nous avons $G(x,A) = 0$ et par la remarque ci-dessus $KG(x,A) = 0$, c'est à dire :

$$\int K(x,dy)G(y,A) = 0$$

ceci donne

$$\int_{A^0} K(x,dy)G(y,A) + \int_{A^{0^c}} K(x,dy)G(y,A) = 0$$

où A^{0^c} désigne le complémentaire de A^0.
D'aprés 1), pour tout $y \in A^0$, on a

$$G(y,A) = 0$$

on obtient

$$\int_{A^{0^c}} K(x,dy)G(y,A) = 0$$

et puisque pour tout $y \in A^{0^c}$, $G(y,A) > 0$ alors

$$K(x, A^{0^c}) = 0$$

on conclut que A^0 est clos.

■

1.4 Existence d'un noyau sous-stochastique équivalent à K

Définition 1.9 *Soient λ, μ deux mesures de M_+ .*

1. *On dit que λ est absolument continue par rapport à μ , (on note $\lambda \ll \mu$) si pour tout $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a $\lambda(A) = 0$*
2. *On dit que λ et μ sont étrangères (on note $\lambda \perp \mu$) s'il existe une partition $\{A_\lambda, A_\mu\}$ de E , $(A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset, A_\lambda \cup A_\mu = E)$ telle que ,*
   Pour tout $B \in \mathcal{E}$, $B \cap A_\mu$ et $B \cap A_\lambda$ soient deux éléments de $\mathcal{E}$ et vérifient :
   $$\mu(B \cap A_\lambda) = 0 \quad et \quad \lambda(B \cap A_\mu) = 0$$
   On dit que μ est concentrée sur A_μ et λ est concentrée sur A_λ
3. *On dit que λ et μ sont équivalentes (on note $\lambda \sim \mu$) si elles sont mutuellement absolument continues ($\lambda \ll \mu$ et $\mu \ll \lambda$).*
4. *Un noyau $\sigma - fini$ $\tilde{K}$ est dit équivalent au noyau K si*
   pour tout $x \in E$, $K(x,.) \sim \tilde{K}(x,.)$.

Nous énnonçons le théorème de *Radon-Nikodym* :

Théorème 1.1 *[2] Soient λ, μ deux mesures de M_+ σ-finies.*
Si $\lambda \ll \mu$, alors il existe une unique (pour la relation d'équivalence d'égalité μ- presque partout) fonction mesurable f telle que pour tout $A \in \mathcal{E}$, si $\mu(A) < \infty$ alors

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu$$

Le théorème suivant concerne la décomposition de *Lebesgue* d'une mesure positive σ-finie .

Théorème 1.2 *[2] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré , la mesure μ étant positive σ-finie , et soit λ une mesure positive σ-finie définie sur $\mathcal{E}$.*
Il existe un couple unique λ_1 et λ_2 de mesures positives σ-finies , telles que

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \ ; \ \lambda_1 \ll \mu \ ; \ \lambda_2 \perp \mu$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.1 *[3] Il existe une fonction mesurable f définie sur $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ qui satisfait les conditions suivantes :*

- *Pour tout $(x, y) \in E \times E$,* $0 < f(x, y) \leq 1.$
- *Pour tout $(x, y) \in (E \times E)$,*

$$0 < f(x, y) \leq Kf(x) = \int f(x, y) K(x, dy)$$

Théorème 1.3 *Il existe un noyau sous-stochastique $\tilde{K} \leq K$ équivalent à K, avec une version de la dérivée de Radon-Nikodym, $\tilde{f}$*

$$\tilde{K}(x, dy)\tilde{f} = K(x, dy)$$

$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$-mesurable telle que $0 < \tilde{f} \leq 1$ partout

De plus , les noyaux itératifs K^n et $\tilde{K}^n(A)$ sont équivalents pour tout $n \geq 0$.

Preuve. *Soit f la fonction donnée par le lemme 1.1 .*
Nous avons pour tout $x \in E$

$$Kf(x) = \int K(x, dy)f(x, y) > 0$$

posons

$$\tilde{f}(x, y) = \mathbb{1}_{\{K(x,E)>0\}}(Kf(x))^{-1}f(x, y) + \mathbb{1}_{\{K(x,E)=0\}}$$

il est claire que le noyau désiré $\tilde{K}$ est donné par

$$\tilde{K}(x, dy) = \tilde{f}(x, y)K(x, dy)$$

Il existe une mesure $\psi \in M^+$ telle que ψK soit absolument continue par rapport à ψ.
Preuve. *Soit $\varphi \in M^+$ une mesure $\sigma - finie$ et posons*

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)}\tilde{\varphi}\tilde{K}^n \tag{1.4.4}$$

Où $\tilde{\varphi}$ est la mesure de probabilité équivalente à φ et $\tilde{K}$ est le noyau sous-stochastique équivalent à K. (voir théorème 1.3).
Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $\psi(A) = 0$. Donc pour tout $n \geq 0$,

$$\tilde{\varphi}\tilde{K}^n(A) = 0$$

soit

$$\int \tilde{\varphi}(dx)\tilde{K}^n(x, A) = 0$$

ceci n'est valable que si pour tout $n \geq 0$,

$$\tilde{K}^n(A)(x, A) = 0 \quad \tilde{\varphi} - p.s$$

or

$$K^n \sim \tilde{K}^n, \quad n \geq 0$$

alors

$$\psi K(A) = 0$$

Chapitre 2

$\varphi-$irréductibilité

2.1 Définitions

Soient $\varphi \in M^+$ *une mesure* $\sigma - finie$ *sur* $(E, \mathcal{E})$ *et* $B \in \mathcal{E}$ *un ensemble* $\varphi-$ *positif c'est à dire* $\varphi(B) > 0$.

Définitions 2.1 *Un ensemble* B *est dit* $\varphi-$ *communiquant (pour le noyau* K *) si tout sous ensemble* $A \subseteq B$ φ*-positif est atteignable de* B *ie : pour tout* $x \in B$ $A \subseteq B$ *avec* $\varphi(A) > 0$, *on a*

$$x \to A$$

En d'autres termes :

$$Si \ \ \varphi(A) > 0 \ \ et \ A \subseteq B \ \ alors \ \ G(x, A) > 0 \ \ pour \ tout \ \ x \in B$$

Si E *tout entier est* $\varphi-$*communiquant alors le noyau* K *est dit* $\varphi-$*irréductible .*

Un noyau K *est dit irréductible s'il existe une mesure* $\varphi \in M^+$ $\sigma-$ *finie telle que* K *est* $\varphi-$*irréductible, dans ce cas on dit que* φ *est une mesure d'irréductibilité pour le noyau* K *.*

Exemple 2.1 *Quand* E *est discret , la mesure d'irréductibilité correspondante est la mesure de comptage sur* B *, définie par*

$$Card_B(A) = Card(B \cap A), \ \ A \subseteq E.$$

Donc K *est irréductible dans ce cas signifie que pour tout sous ensemble non-vide* $B \subseteq E$ *et pour tout* $x \in E$ *:*

$$x \to y \ \ pour \ tout \ \ x \in E, y \in B$$

On note par : $B^+ = B \cup \{x \in E, x \to B\} = \{G1\!\!1_B > 0\}$

Proposition 2.1 *Soient* $A, B \in \mathcal{E}$ *et* $x \in B^+$. *Si pour tout* $y \in B$, $\;y \to A$ *alors* $x \to A$.

Preuve. *Si* $x \in B^+$ *alors* $\;G\mathbb{1}_B(x) > 0.$ *.* $\;$ *Ceci donne* $G(x, B) > 0$,
donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$K^n(x, B) > 0$$

d'autre part

$$\begin{aligned} K^nG(x, A) &= \int K^n(x, dy)G(y, A) \\ &\geq \int_B K^n(x, dy)G(y, A) \end{aligned}$$

par hypothèse , pour tout $y \in B$, *nous avons* $y \to A$, *donc pour tout* $y \in B$

$$G(y, A) > 0$$

il s'en suit

$$K^nG(x, A) > 0$$

ainsi

$$x \to A$$

Proposition 2.2 1. *Si* B *est* $\varphi-$*communiquant alors il est indécomposable.*

2. *Si* B *est* $\varphi-$*communiqué alors* $K|_{B^+}$ *la réstriction de* K *à* B^+ *est* $\varphi\mathbb{1}_B$ *-irréductible.*

Preuve.

1. *Par l'absurde. Supposons qu'il existe deux sous ensembles clos de* B F_1 *et* F_2.
Puisque $B = (B \setminus F_1) \bigcup F_1$ *et* $F_1 \subset B \setminus F_2$ *alors*

$$B = (B \setminus F_1) \bigcup (B \setminus F_2)$$

Comme $\varphi(B) > 0$ *alors* $B \setminus F_1$ *ou* $B \setminus F_2$ *doit être* $\varphi-$ *positif.*
Supposons que $B \setminus F_1$ *est* φ*-positif.* B *est* $\varphi-$ *communiqué, donc pour* $x \in F_1$, $x \to B \setminus F_1$.
Mais F_1 *est clos, d'où la contradiction.*

Soient $x \in B^+$ *et* $A \subseteq B^+$ *tel que* $\varphi\,(A \cap B) > 0$.
B *est* $\varphi-$*communiqué donc pour tout* $y \in B$, *on a* $y \to A \cap B$. *En appliquant la proposition* 2.1, *on obtient* $x \to A \cap B$.
D'où $x \to A$ *et* $K|_{B^+}$ *est* $\varphi\mathbb{1}_B$ *-irréductible*

D'aprés la proposition précédente, s'il existe un sous ensemble B *de l'espace d'état qui est* $\varphi-$ *communiqué et si nous ne sommes pas interessés au sous espace à partir duquel* B *n'est pas atteignable alors sans perte de généralité, on peut supposer que* K *est irréductible.*

2.2 Mesure d'irréductibilité maximale

Il est clair que toute mesure ψ absolument continue par rapport à une mesure d'irréductibilité φ est une mesure d'irréductibilité. La proposition suivante montre qu'à partir d'une mesure d'irréductibilité $\varphi-$, nous pouvons construire une mesure d'irréductibilité maximale ψ dans le sens où toute autre mesure d'irréductibilité est absolument continue par rapport à ψ.

Le lemme suivant sera utile dans la suite

Lemme 2.1 *1. Si $\psi K \ll \psi$ alors $\psi G \sim \psi$.*

2. Si $\psi K \ll \psi$ et E est indécomposable alors $\psi(F) > 0$ pour tout ensemble F clos de $\mathcal{E}$.

Preuve.

1. *Supposons que $\psi K \ll \psi$ et montrons que $\psi K^n \ll \psi$ pour tout $n \geq 0$.*
   a) Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $\psi(A) = 0$.
   Montrons par récurrence que $K^n(, A) = 0$ $\psi.p.p$, pour $n \geq 1$.

   Nous avons par hypothèse $\psi K(A) = 0$ soit

   $$\int \psi(dx)\, K(x, A) = 0$$

   il s'en suit

   $$K(., A) = 0 \quad \psi.p.p$$

   suppospns maintenant que $K^n(., A) = 0$ $\psi.p.p$, et posons

   $$B_n = \{K^n(., A) > 0\}$$

   nous avons

   $$\begin{aligned} K^{n+1}(x, A) &= \int K(x, dy)\, K^n(y, A) \\ &= \int_{B_n} K(x, dy)\, K^n(y, A) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

   comme $\psi(B_n) = 0$, alors $\psi K(B_n) = 0$. On conclut que $K^{n+1}(., A) = 0$ $\psi.p.p$, soit $\psi K^n(A) = 0$.
   b) $\psi \leq \psi G$, donc $\psi \ll \psi G$

2. *Soit F un ensemble clos . E est indécomposable, et*
   $F^0 \subset F^c$.
   On déduit par la proposition 1.3 que
   F^0 *est vide, c'est à dire*
   $F^{0^c} = E$ *ce qui donne* $G(x, F) > 0$ *pour tout* $x \in E$
   or
   $$\psi G(F) = \int \psi(dx)G(x, F) > 0$$
   on déduit par 1) que $\psi(F) < 0$

■

Proposition 2.3 *Supposons que K est $\varphi-$irréductible . Alors :*

i) Il existe une mesure d'irréductibilité maximale.

ii) ψ est une mesure d'irréductibilité maximale si et seulement si $\psi K \ll \psi$

iii) Soit ψ une mesure d'irréductibilité maximale. Si $\psi(B) = 0$ alors $\psi(B^+) = 0$.

Preuve.

ii) *Supposons que ψ est une mesure d'irréductible qui vérifie $\psi K \ll \psi$*
Par le lemme 2.1 nous avons $\psi G \ll \psi$
Soit φ une mesure d'irréductibilité et $A \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(A) > 0$.
Nous avons $G(x, A) > 0$ pour tout $x \in E$.
Comme
$$\psi G(A) = \int \psi(dx)G(x, A)$$
alors
$$\psi G(A) > 0$$
on déduit par l'hypothèse que $\psi(A) > 0$, ce qui donne $\varphi \ll \psi$.
Inversement, si ψ est une mesure d'irréductibilité , alors ψK est une mesure d'irrédictibilité.
En effet :
Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que
$$\psi K(A) > 0 \int \psi(dx)K(x, A) > 0$$
donc $K(., A) > 0$ sur une partie A_1 de A^c telle que $\psi(A_1) > 0$.
nous avons
$$\begin{aligned} GK(x, A) &= \int G(x, dy)K(y, A) \\ &\geq \int_{A^1} G(x, dy)K(y, A) \end{aligned}$$

K est irréductible, $\psi(A_1) > 0$ donc $G(x, A_1) > 0$, d'où

$$GK(x, A) > 0$$

ainsi

$$G(x, A) > 0$$

ψK est donc une mesure d'irréductibilié. Comme ψ est maximale alors $\psi K \ll \psi$.

iii) *Si ψ est une mesure d'irrédictibilité maximale , on a par (ii) $\psi K \ll \psi$.*
Par le lemme 2.1 , on a $\psi G \sim \psi$ donc $\psi(B) = 0$ ce qui implique que $\psi G(B) = 0$ c'est à dire

$$\int \psi(dx) G(x, B) = 0$$

par conséquent , $G(x, B) = 0$ $\psi.p.p$, mais par la proposition 2.1

$$B^+ = \{x \in E : G(x, B) > 0\} = \{G\mathbb{1}_B > 0\}$$

il découle

$$\psi(B^+) = 0$$

i) *Soit ψ la mesure finie définie par l'équation 1.4.4 , soit ψ une mesure d'irréductibilité que vérifie $\psi K \ll \psi$, donc ψ est maximale.*

$\blacksquare$

Définition 2.1 *Soit K un noyau irréductible avec une mesure d'irréductibilité maximale ψ. On dit que l'ensemble $B \in \mathcal{E}$ est plein si $\psi(B^c) = 0$.*

Proposition 2.4 *Supposons que K est irréductible avec une mesure d'irréductibilité maximale ψ. Nous avons :*

1. *Tout ensemble clos F est plein .*
2. *Si B est un ensemble plein alors il existe un ensemble clos F tel que $F \subseteq B$.*
3. *Si $(F_i)_{i\geq 1}$ est une famille d'ensembles clos alors $\bigcap\limits_{i\geq 1} F_i$ est clos.*

Preuve.

1. *Supposons que F est un ensemble clos qui n'est pas plein donc on aura $\psi(F^c) > 0$. Comme K est irréductible nous avons particulièrement pour tout $x \in F$*

$$G(x, F^c) > 0$$

contradiction avec la propproposition 1.1, ainsi F est plein.

2. *Soit B un ensemble plein. Posons $F = (B^c)^0$.*
Il est clair que $F \subset B$.
D'autre part, nous avons $F^c = (B^c)^+$.
Or $\psi(B^c) = 0$, par la proposition 2.3 on obtient $\psi(B^{c+}) = 0$ i.e : $\psi(F^c) = 0$ ce qui donne $F \neq \emptyset$, ainsi par la proposition 1.3 on conclut que F est clos .
3. *Soit $x \in \underset{i\geq 1}{\cap} F_i$, puisque pour tout $i \geq 1, F_i$ est clos , alors*

$$K(x, (\underset{i\geq 1}{\cap} F_i)^c = K(x, \bigcup_{i\geq 1} F_i^c) \leq \sum_{i\geq 1} K(x, F_i^c) = 0$$

En plus

$$0 < \psi\left(E\right) = \psi\left(\underset{i\geq 1}{\cap} F_i\right) + \psi\left(\left(\underset{i\geq 1}{\cap} F_i\right)^c\right) = \psi\left(\underset{i\geq 1}{\cap} F_i\right)$$

Donc $\underset{i\geq 1}{\cap} F_i$ n'est pas vide .

■

Remarque 2.1 *En général l'intersection d'une famille dénombrable $(F_i)_{i\geq 1}$ d'ensembles clos est encore un ensemble clos ou vide , mais sous l'hypothèse d'irréductibilité tout $i \geq 1$, F_i est plein et ainsi leurs intersection est un ensemble clos.*

2.3 La condition minimale

2.3.1 Fonctions petites

Dans cette partie nous définissons la classe des fonctions petites .
Dans tous ce qui suit , nous supposons que K est un noyau irréductible , ψ est la mesure d'irréductibilité maximale .

Nous désignons par $\mathcal{A}^+$ la classe des éléments de $\mathcal{E}_+$ qui sont ψ -positives i.e

$$\mathcal{A}^+ = \{f \in \mathcal{E}_+ \ , \psi\left(f\right) > 0\}$$

Où $\psi\left(f\right) = \int f\left(x\right)\psi\left(dx\right)$

Définition 2.2 *On dit que le noyau K possède la condition minimale*

$$M\left(m_0, \beta, s, \upsilon\right) \tag{2.3.2}$$

s'il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$, une constante $\beta > 0$, une fonction $s \in \mathcal{E}^+$ et une mesure $\upsilon \in M^+$ tels que la condition

$$K^{m_0}\left(x, A\right) \geq \beta s\left(x\right)\upsilon\left(A\right) \tag{2.3.3}$$

soit réalisée pour tous $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$.
On écrit $s \otimes \upsilon\left(x, A\right) = s\left(x\right)\upsilon\left(A\right)$ et l'inégalité 2.3.3 devient :

$$K^{m_0} \geq \beta s \otimes \upsilon \tag{2.3.4}$$

Définition 2.3

1. *Une fonction* $s \in \mathcal{E}^+$ *est dite "une fonction petite " s'ils existent* $m_0 \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0$, *une mesure* $\upsilon \in M^+$ *tels que* K *possède la condition* $M\left(m_0, \beta, s, \upsilon\right)$.
2. *Une mesure* $\upsilon \in M^+$ *est dite "une mesure petite " s'ils existent* $m_0 \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0$, *et une fonction* $s \in \mathcal{E}^+$ *tels que* K *possède la condition* $M\left(m_0, \beta, s, \upsilon\right)$.
3. *Un ensemble* C *est dit* "un ensemble petit " *si* $\mathbb{I}_c$ *est une petite fonction i.e s'ils existent* $m_0 \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0$, *une mesure* $\upsilon \in M^+$ *tels que pour tout* $x \in C$

$$K^{m_0}\left(x, .\right) \geq \beta \upsilon\left(A\right)$$

Dorénavant on dénote :

- *La classe des fonctions petites par* Γ^+.
- *Les fonctions petites par* s.
- *Les mesures petites par* υ.

Proposition 2.5 **1)** *Une mesure petite est toujours une mesure d'irréductibilité , par conséquent elle est absolument continue par rapport à* ψ.

2) $K^m s$ *est une fonction petite pour tout* $m \geq 0$.

3) υK^m *est une mesure petite .*

pour tout $m \geq 0$ *et sans perte de généralité on peut supposer que* $\nu\left(s\right) > 0$.

Preuve.

2) *En multipliant les deux cotés de 2.3.3 par* K^m *, on obtient*

$$\begin{aligned} K^m K^{m_0}(x, A) &= \int K^m(x, dy) K^{m_0}(y, A) \\ &\geq \int K^m(x, dy) \beta \nu(A) s(y) \\ &\geq \beta \nu(A) \int K^m(x, dy) s(y) \end{aligned}$$

3) *En multipliant à droite les deux cotés de 2.3.3 par* K^m *, on obtient*

$$\begin{aligned} K^{m_0} K^m(x, A) &= \int K^{m_0}(x, dy) K^m(y, A) \\ &\geq \int \beta s(x) \nu(dy) K^m(y, A) \\ &\geq \beta s(x) \int \nu(dy) K^m(y, A) \end{aligned}$$

Remarque 2.2 **1)** *Une fonction petite ou une mesure petite reste petite si on multiplie par une constante $\gamma > 0$. Ainsi dans la plus part des cas , on peut supposer que $\beta = 1$.*

2) *Pour toute constante $\gamma > 0$, l'ensemble $\{s \geq \gamma\}$ est petit . En effet , pour tout $x \in \{s \geq \gamma\}$,*
on a

$$K^{m_0}(x,.) \geq \gamma \upsilon(A)$$

2.4 Existence d'une fonction petite

Nous établissons dans cette partie un théorème qui assure l'existence d'une fonction petite pour un noyau irréductible.
Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.1 *Supposons que K est un noyau irréductible alors $\Gamma^+ \neq \varnothing$*

Nous avons les lemmes suivants :

Lemme 2.2 *Il existe des versions non-négatives et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ -mesurables , des densités $k^{(n)}$ et des itérations K^n qui satisfont*

$$\begin{aligned} k^{(m+n)}(x,z) &\geq \int K^{(m)}(x,dy)\, k^{(n)}(y,z) \\ &\geq \int k^{(m)}(x,y) k^{(n)}(y,z)\, \varphi(dy) \end{aligned}$$

pour tout $m, n \geq 1$ et $x, y, z \in E$.

Preuve. *Soit $k_0^{(n)}$ une version non-négative et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable de la densité de K^n.*

Définissons $k^{(n)} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, $n \geq 1$ par :

$$\begin{cases} k^{(1)} = k_0^{(1)} \\ k^{(n)}(x,z) = k^{(n)}(x,z) \vee \max\limits_{1 \leq m \leq n-1} \int K^m(x,dy)\, k^{(n-m)}(y,z) \quad ; \; n \geq 2 \end{cases}$$

Donc pour tout m, $n \geq 1$ et $x, y, z \in E$

$$\begin{aligned} k^{(m+n)}(x,z) &\geq \max_{1 \leq j \leq n+m-1} \int K^j(x,dy)\, k^{(n+m-j)}(y,z) \\ &\geq \int K^m(x,dy)\, k^{(n)}(y,z) \\ &= \int k^{(m)}(x,y) k^{(n)}(y,z)\, \varphi(dy) \quad \text{car } K^{(m)}(x,y) \end{aligned}$$

∎

Soient $A, B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ *et* $A_1(x)$ *et* $B_2(z)$ *les sections respectives de* x *et* y *définies par :*

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \{y \in E : (x,y) \in A\} \\ B_2(z) &= \{y \in E : (y,z) \in B\} \end{aligned}$$

La composition de A *et* B*, notée par* $A \circ B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ *est définie par*

$$\begin{aligned} A \circ B &= (A \times E) \cap (E \times B) \\ &= \{(x,y,z) \in E \times E \times E : (x,y) \in A, \quad (y,z) \in B\} \end{aligned}$$

On note φ^n *le produit de la mesure* $\varphi \times \varphi \times \varphi \times ... \times \varphi$ n *fois.*

Lemme 2.3 *[3] Si* $\varphi^3(A \circ B) > 0$ *alors il existe deux ensembles* C *et* D *de* $\mathcal{E}$ $\varphi-$*positifs tels que :*

$$\gamma = \inf_{x \in C, z \in D} \varphi(A_1(x) \cap B_2(z)) > 0$$

Lemme 2.4 *Soit* φ *une mesure de probabilité qui est équivalente à* ψ *.*
Par l'irréductibilité on a pour tout $x \in E$

$$\sum_{m=1}^{\infty} k^{(m)}(x,y) > 0 \qquad \varphi.p.s \qquad y \in E$$

Preuve. *Soient* φ *une mesure de probabilité qui est équivalante à* ψ *et* $x \in E$
Etant donner un noyau K $, \sigma - finie$ *alors par théorème 1.2 pour tout* $x \in E$ *et* $m \geq 1$, $K^m(x,.)$ *admet la décomposition de Lebesgue :*

$$K^m(x,dy) = K_a{}^m(x,y)\,\varphi(dy) + K_s{}^m(x,dy)$$

où $K_a{}^m(x,y)$ *est la partie absolument continue par rapport* φ *et* $K_s{}^m(x,dy)$ *est la partie singulière.*
Soit N_m *le support de* K_s^m*, donc pour tout* $m \geq 1$, $\varphi(N_m) = 0$
Posons

$$N_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$$

on a $\varphi(N_1) = 0$
soit $A \in \mathcal{E} \cap N^c$ *tel que* $\varphi(N_1) > 0$
Par l'irréductibilité , on a

$$G(x,A) > 0$$

ce qui donne

$$\sum_{m=1}^{\infty} K^m(x,A) > 0$$

soit

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_A k^{(m)}(x,y)\varphi(dy) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_A K_s^m(x,A) > 0$$

or

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_s^m(x,A) = 0$$

il s'en suit

$$\int_A \sum_{m=1}^{\infty} k^{(m)}(x,y)\varphi(dy) > 0$$

par suite, il existe $N_2 \in \mathcal{E}\cap N_1^c$ *avec* $\varphi(N_2) = 0$ *et* $k^{(n)}(x,y) > 0$ *sur* $E \setminus N_2$. *Posons* $N = N_1 \bigcup N_2$. *On a* $\varphi(N) = 0$ *et pour tout* $x\ inE \setminus N$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} k^n(x,y) > 0 \quad \varphi.p.p$$

Maintenant on peut démontrer le théorème 2.1 :

Preuve.

D'aprés le lemme 2.4 il existe des entiers $m_1, m_2 \geq 1$ *tels que*

$$\int\int\int k^{(m_1)}(x,y)\, k^{(m_2)}(y,z)\,\varphi(dx)\,\varphi(dy)\,\varphi(dz) > 0$$

donc il existe $M \subset E^3$, φ*-positif , tel que pour tout* $x, y, z\ inM$

$$k^{(m_1)}(x,y)\, k^{(m_2)}(y,z) > 0$$

posons

$$A_i = \{(x,y) \in E^2 / k^{(m_1)}(x,y) \geq \frac{1}{i}\}$$

$$B_j = \{(y,z) \in E^2 / k^{(m_2)}(y,z) \geq \frac{1}{j}\}$$

nous avons

$$M \subset \bigcup_i \bigcup_j (A_i \circ B_j)$$

par conséquent , il existent $i, j \geq 1$ *tel que* $\varphi^3(A_i \circ B_j) > 0$
posons

$$\delta = inf(\frac{1}{i}, \frac{1}{j})$$

$$A = \{k^{m_1} \geq \delta\}$$

$$B = \{k^{m_2} \geq \delta\}$$

Il est claire que $A_i \subset A$ *et* $B_j \subset B$ *, et donc* $\varphi^3(A \circ B) > 0$
Soit C, D, γ *définis comme dans le lemme 2.3 , nous avons pour tout* $x \in c, \quad z \in D,$

$$\begin{aligned}
k^{(m_1+m_2)}(x,z) &= \int k^{(m_1}(x,y)k^{(m_2}(y,z)\varphi(dy) \\
&\geq \int_{A_1(x)\bigcap B_2(z)} k^{(m_1)}(x,y)\,k^{(m_2)}(y,z)\,\varphi(dy) \\
&\geq \gamma\delta^2
\end{aligned}$$

Finalement, si $A \in \mathcal{E}$ *tel que* $\mathbb{1}_D(A) > 0$ *et* $x \in C$

$$\begin{aligned}
K^{m_1+m_2}(x,A) &\geq \int_A k^{(m_1+m_2)}(x,z)\,\varphi(dz) \\
&\geq \gamma\delta^2\varphi(A \cap D)
\end{aligned}$$

D'où la condition minimale $M(m_0, \beta, s, \nu)$ *, avec* $m_0 = m_1 + m_2$ *,* $\beta = \gamma\delta^2$ *,* $s = \mathbb{1}_C$ *, et* $\nu = \varphi\mathbb{1}_D$ ■

Les deux résultas suivants seront nécéssaires dans la suite.

Proposition 2.6 *Pour tout* $B \in \mathcal{E}^+$ *, il existe un ensemble petit* $C \in \Gamma^+$ *tel que* $C \subseteq B$*.*

proposition 3.1

Preuve. *Soit* $C^{'}$ *un ensemble petit et* $x \in B$*. Par l'irréductibilité , il existe* $m \geq 1$ *tel que*

$$K^m(x, C^{'}) > 0$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
K^{m+m_0}(x,A) &= \int K^m(x,dy)K^{m_0}(y,A) \\
&\geq \int_{C^{,}} K^m(x,dy)K^{m_0}(y,A) \\
&\geq \int_{C'} K^m(x,dy)\beta\nu(A) \\
&= \beta\nu(A)K^m(x,C^{'})
\end{aligned}$$

posons

$$s = \mathbb{1}_B K^m \mathbb{1}_{C'}$$

On a

$$\begin{aligned} s(x) &= \mathbb{1}_B(x)K^m \mathbb{1}_C(x) \\ &= \mathbb{1}_B(x)\int K^m(x,dy\mathbb{1}_C(y) \\ &= \mathbb{1}_B(x)K^m(x,C^{'}) \end{aligned}$$

En prenant $C = \{s > 0\}$ *on obtient ,* $C \subset D$ *et* C *est un ensemble petit .*

■

Proposition 2.7 *1. Pour tout* $f \in \mathcal{E}^+, s \in \Gamma^+$ *, il existent* $m \geq 1$ *et une constante* $\gamma > 0$ *tel que*

$$K^m f \geq \gamma s \tag{2.4.5}$$

En particulier pour tout $f \in \mathcal{E}^+$ *,* $C \in \Gamma^+$*, il existe* $m \geq 1$ *tel que :*

$$\inf_C K^{(m)} f > 0$$

2. Pour tout $f \in \mathcal{E}^+, s \in \Gamma^+$ *, il existe* $\gamma > 0$ *tel que :*

$$Gf \geq \gamma Gs$$

3. Pour tout $x \in E$ *et toute mesure petite* $\nu \in M^+$ *il existe* $\gamma > 0$ *tel que :*

$$G(x,.) \geq \gamma \nu Gs(x)$$

Preuve.

1. Soit m_0 *tel que pour tout* $x \in E$ *:*

$$K^{m_0}(x,.) \geq \beta s(x)\nu(.)$$

Nous avons pour tout $m \geq m_0$

$$\begin{aligned} K^m f(x) &= \int K^m(x,dy)f(y) \\ &= \int (\int K^{m-m_0}(z,dy)K^{m_0}(x,dz))f(y) \\ &\geq \int (\int K^{m-m_0}(z,dy)\beta s(x)\nu(dz))f(y) \\ &= \beta s(x)\int (\int K^{m-m_0}(z,dy)f(y))\nu(dz) \\ &= \beta s(x)(\nu K^{m-m_0} f)(z) \end{aligned}$$

d'autre part $f \in \mathcal{E}^+$, *donc il existe* $A \in \mathcal{E}$ *tel que* $\psi(A^c) = 0$ *et* $f(y) > 0$ *pour tout* $y \in A$.
Par suite

$$\begin{aligned}(\nu K^{m-m_0} f) &= \int (\int K^{m-m_0}(z,dy) f(y))\nu(dz) \\ &\geq \int (\int_A K^{m-m_0}(z,dy) f(y))\nu(dz)\end{aligned}$$

posons

$$h_m(z) = \int_A K^{m-m_0}(z,dy) f(y)$$

K *est irréductible ,* *donc pour tout* $z \in E$, *il existe* $m \geq m_0$ *tel que*

$$K^{m-m_0}(z,A) > 0$$

ainsi pour tout $z \in E$ *,* *il existe* $m \geq m_0$ *tel que*

$$h_m(z) > 0$$

par conséquent il existe $m \geq m_0$ *tel que*

$$\int h_m(z)\nu(dz) > 0$$

en effet , *si pour tout* $m \geq m_0$

$$\int h_m(z)\nu(dz) = 0$$

Alors pour tout $m \geq m_0, h_m(z) = 0$ $\nu.p.p$

$$\begin{gathered}B_1 = \{z \in E : h_1(z) \neq 0\} \\ B_2 = \{z \in E : h_2(z) \neq 0\} \\ . \\ . \\ . \\ B_m = \{z \in E : h_m(z) \neq 0\}\end{gathered}$$

et

$$B = \bigcup_i B_i$$

Nous avons $\nu(B) = 0$ *et pour tout* $z \in B^c$ *on a :*

$$h_m(z) = 0$$

d'où contradiction.
Ainsi

$$\nu K^{m-m_0} f = \int h_m(z)\nu(dz) > 0$$

2. *Soit* m *tel que (1) soit vérifiée . Nous avons :*

$$K^n K^m f(x) \geq K^n \gamma s(x)$$

il se decoule que

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} K^n f(x) &\geq \sum_{n\geq 0} K^n K^m f \\ &\geq \sum_{n\geq 0} K^n \gamma s(x) \end{aligned}$$

soit

$$Gf \geq \gamma Gs$$

3. *De la preuve de (1) , on a pour tout* $m \geq m_0$ *et* $f \in \mathcal{E}$

$$K^m f \geq \beta(\nu K^{m-m_0})s \tag{2.4.6}$$

on a aussi

$$\nu K^{m-m_0} f = \int \nu K^{m-m_0}(dx) f(x)$$

et

$$\nu K^{m-m_0}(dx) = \int (dy) K^{m-m_0}(y, dx)$$

ainsi

$$\nu K^{m-m_0} f = \int \int \nu(dz) K^{m-m_0}(y, x) f(x)$$

prenons $f = \mathbb{1}_A$ *avec* $A \in \mathcal{E}$

2.4.6 nous donne

$$\begin{aligned} K^m(x, A) &\geq \beta s(x) \int (\int K^{m-m_0}(y, dx) f(x)) \nu(dy) \\ &= \beta s(x) \int K^{m-m_0}(y, A)\nu(dy) \end{aligned}$$

il s'en suit que

$$\sum_{m\geq m_0} K^m(x,A) \geq \beta s(x) \sum_{m\geq m_0} \int K^{m-m_0}(y,A)\nu(dy)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} G(x,A) &\geq \beta s(x) \int \sum_{n\geq 0} K^n(y,A)\nu(dy) \\ &\geq \beta s(x) \int G(x,A)\nu(dy) \\ &\geq \beta s(x)\nu G(A) \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Cycles

Nous étudions , dans ce chapitre , le comportement périodique d'un noyau irréductible possédant la propriétè minimale.

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1 *Une famille* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *de* m *ensembles non vides et disjoints de* E *est appelée un* $m - cycle$ *(pour le noyau* K*) si pour tout* $0 \leq i \leq m-1$ *et* $x \in E_i$ *on a*

$$K\left(x, E_j^c\right) = 0; \quad j = i + 1(mod\ m)$$

Notons que si les ensembles $E_0, E_1, ..., E_{m-1}$ *forment un* $m - cycle$*, alors leurs union* $E_{01} \bigcup ..._{m-1}$ *est un ensemble clos et par la proposition 2.4 cette union est aussi pleine .*

La proposition suivante donne une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une famille $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *soit un m-cycle.*

Proposition 3.1 *(3.1) Une famille d'ensembles* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *forme un m-cycle si et seulement si pour tout* $0 \leq i \leq m-1$, $K(x, E_j) > 0$ *implique que* $x \in E_{j-1}$.

Preuve. *Supposons que* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *est un* $m-$*cycle.*
Soit x *tel que* $K(x, E_j) > 0$.
Supposons que $x \in E_i$ *avec* $i \neq j-1$. $i \neq j-1$ *nous donne* $i+1 \neq j$ *et* $E_{i+1}^c \supset E_j$*, il en resulte*

$$K(x, E_{i+1}^c) \geq K(x, E_j) > 0$$

Ce qui mène à une contradiction , donc $i = j-1$.
Inversement , pour $x \in E_j$ *on tire par hypothèse*

$$K(x, E_i) = 0 \quad ,$$

Preuve. *Si* $j = i + n(mod\ m)$ *alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = km + j - i$*, il en decoule :*

$$K^n(x, E_j^c) = \int_{E_{i+1}} ... \int_{E_i} \int_{E_{i+1}} ... \int_{E_i} \int_{E_{i+1}} ... \int_{E_{j-1}} K(x, dy_1)...K(y_m, dz_{m+1})...K(y_{km}, dy_{km+1})...K(y_{km+j-i-1}, E_j^c)$$

Comme pour $y_{km+j-i-1} \in E_{j-1}$ $K(y_{km+j-i-1}, E_j^c) = 0$ *on conclut que* $K^n(x, E_j^c) = 0$.

d'où la contradiction, donc $x \in E_{j-1}$.

Proposition 3.2 *Soit* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *un m-cycle.*
Si $K^d(x, E_j) > 0$, *alors* $x \in E_{j-d}$

Preuve. *Par l'absurde. Supposons que* $x \in E_{j'}$ *avec* $j' \neq j - d$.
Par le proposition 3.1 on a

$$K^d(x, E_{j'+d}^c) = 0$$

d'autre part $j' + d \neq j$ *donc* $E_{j'+d}^c \supset E_j$
et alors

$$K^d(x, E_{j'+d}^c) \geq K^d(x, E_j) > 0$$

d'où la contradiction .

Corollaire 3.1 *Soient* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *un m-cycle,* $x \in E_i$ *et* $m \in I\!N^*$.
Si $K^n(x, E_j) > 0$ *, alors* $n = j - i(mod\ m)$.

Proposition 3.3 *Une petite fonction s ne peut pas être strictement positive sur deux ensembles différents* E_i, E_j *du cycle* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *avec* $\nu(E_i) > 0$ *et* $\nu(E_j) > 0$.

Preuve. *Par l'absurde. Soit* $x \in E_i$ *, on a*

$$K^{m_0}(x, E_i) \geq \beta s(x)\nu(E_i) > 0$$

Par le corollaire 3.1, m_0 *est multiple de* m*, ainsi il existe* $h \in I\!N$ *tel que*

$$m_0 = hm \tag{3.1.1}$$

D'autre part

$$K^{m_0}(x, E_j) \geq \beta s(x)\nu(E_j) > 0$$

par le corollaire 3.1, $m_0 = j - i(mod\ m)$*, donc il existe* $d \in I\!N$ *qui vérifie*

$$m_0 = i - j + dm \tag{3.1.2}$$

Par les équations (3.1.1) et (3.1.2), on tire

$$i - j = m(h - d)$$

ce qui donne que $j - i$ *divise* m. *Comme* $0 \leq i, j \leq m - 1$*, alors* $i - j = 0$ *soit* $i = j$.
D'où la contradiction.

Proposition 3.4 *Soient* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *un* $m-$ *cycle et*
N *le* $\psi-$ *nul ensemble* $N = (E_0 + E_1 + ...E_{m-1})^c$.
Il existe un indice $i, \quad 0 \leq i \leq m-1$ *tel que*

$$s > 0 \subseteq E_i + N$$

et

$$\nu({E_j}^c) = 0; \quad j = i + m_0(mod\ m)$$

Preuve. *Supposons que* j *est tel que* $\upsilon(E_j) > 0$ *alors pour tout* $x \in E$, $s(x) > 0$ *implique que*

$$K^{m_0}(x, E_j) \geq \beta s(x)\upsilon(E_j) > 0$$

par la proposition 3.2 ceci n'est possible que si $x \in E_{j-m_0}$ *ou* $x \in I\!N$.
Par conséquent i *doit être égal à* $j - m_0(mod\ m)$, *soit* $j = i + m_0(mod\ m)$.
Par la proposition 3.2, il n'existe pas un autre indice $j' \neq j$ *tel que* $\nu(E_{j'}) > 0$

■

3.2 Existence et l'unicité du cycle

En utilisant la proposition 2.5, on peut supposer que $\upsilon(s) > 0$.
Soit $m =$ *le plus grand diviseur commun (p.g.c.d) de l'ensemble :*

$$I = \{d \geq 1/\exists\beta_d \text{ tel que } M(d, \beta_d, s, \upsilon)\} \tag{3.2.3}$$

Il est claire que I *est fermé pour l'addition et alors il contient des multiples suffisament grands de* d.

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.1 *Supposons que* K *est un noyau irréductible, et soient* $m \geq 1 \quad s \in \Gamma^+$ *et* $\upsilon \in M^+$ *tel que* $\upsilon(s) > 0$
alors

1. *Il existe un* $m-cycle$ $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *et l'entier* m *ne dépend pas du choix de la petite fonction* s *et de la petite mesure* υ.
2. *Si* $\left(E'_0, E'_1, ..., E'_{m'-1}\right)$ *est un cycle alors* m' *divise* m, *et tout* E'_i
estuneunion$(\psi.p.p)$ *de* $\frac{m}{m'}$ *ensembles de la famille* $\{E_0, E_1, ..., E_{m-1}\}$.

En particulier :
Si $\left(E'_0, E'_1, ..., E'_{m-1}\right)$ *est un autre* $m-cycle$ *alors il existe* $0 \leq r < m$ *tel que*
$E'_i = E_j \quad (\psi.p.s)$ *où* $j = i + r(mod\ m)$

Preuve. *2.1 Posons pour* $i = 0, ..., m-1$

$$\widetilde{E_i} = \left\{ x \in E / \sum_{n=1}^{\infty} K^{nm-i} s\,(x) > 0 \right\}$$

et

$$B = \{s > 0\}$$

Les lemmes suivants seront utiles pour la démonstration de ce théorème.

Lemme 3.1 *Nous avons*

$$\widetilde{E_0} \cup ... \cup \widetilde{E_{m-1}} = E$$

Preuve. *Soit* $x \in E$
Puisque $\nu(B) > 0$ *alors* $\psi(B) > 0$.
Par l'irréductibilité , il existe $d \in I\!N^*$ *tel que* $K^d(x, B) > 0$
Nous obtenons

$$\begin{aligned} K^d s(x) &= \int K^d(x, dy) s(y) \\ &\geq \int_B K^d(x, dy) s(y) \\ &> 0 \end{aligned}$$

par conséquent

$$x \in \{K^d s > 0\}$$

$d \in I\!N^*$ *, donc il existe* $n \in I\!N^*$, $0 \leq i \leq d-1$ *tels que*

$$d = nm - i$$

ainsi

$$x \in \{\sum_{n=1}^{\infty} K^{nm-i} > 0\}$$

Lemme 3.2 *Si* $i \neq j$, *alors pour tout* $n, n' \in I\!N$

$$\psi(\{K^{nm-i} s > 0\} \cap \{K^{n'm-j} s > 0\}) = 0$$

et les ensembles $\widetilde{E_i}$, $\widetilde{E_j}$ *sont disjoints* $(\psi p.p)$.

Preuve. *Par l'absurde.*
Posons

$$A = \{K^{nm-i}s > 0\} \cap \{K^{n'm-j}s > 0\}$$

et supposons $\psi(A) > 0$
Par l'irréductibilité, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $K^q(x, A) > 0$, *ceci nous donne*

$$\begin{aligned} \nu K^{q+nm-i}s &= \int\int K^{q+nm-i}(x, dy)s(y)\nu(dx) \\ &= \int\int\int K^q(x, dz)K^{nm-i}(z, dy)s(y)\nu(dx) \\ &\geq \int_B [\int_A (\int_B K^{nm-i}(z, dy)s(y))K^q(x, dz)]\nu(dx) \\ &> 0 \end{aligned}$$

de la même façon , nous obtenons

$$\nu K^{q+n'm-j}s > 0$$

d'autre part

$$K^{q+nm-i+2m_0}(x, A) = \int K^{q+nm-i}(x, dy)K^{2m_0}(y, A)$$

or

$$\begin{aligned} K^{2m_0}(y, A) &= \int K^{m_0}(y, dz)K^{m_0}(z, A) \\ &\geq \beta\nu(A)\int K^{m_0}(y, dz)s(z) \\ &\geq \beta\nu(A)\int \beta s(y)s(z)\nu(dz) \\ &= \beta^2 s(y)\nu(A)\int s(z)\nu(dz) \\ &= \beta^2\gamma s(y)\nu(A) \end{aligned}$$

Où $\gamma = \int s(z)\nu(dz)$
par conséquent ,

$$\begin{aligned} K^{q+nd-i+2m_0}(x, A) &\geq \int K^{q+nm-i}(x, dy)\beta^2\gamma s(y)\nu(A) \\ &\geq \beta^2\gamma\nu(A)\int K^{q+nm-i}(x, dy)s(y) \\ &= \beta^2\gamma\nu(A)(K^{q+nm-i}s) \end{aligned}$$

de même ,on obtient :

$$K^{q+n'm-j+2m_0}(x,A) \geq \beta^2\gamma\nu(A)(K^{q+n'd-j}s)$$

ainsi
$q+n'd-i+2m_0$ *et* $q+n'm-j+2m_0$ *doivent être dans* I.
Donc $q+n'm-i+2m_0$ *et* $q+n'm-j+2m_0$ *sont des multiples de* m ,
cependant

$$(q+nm-i+2m_0)-(q+n'm-j+2m_0) = j-i$$

qui n'est pas multiple de m *car* $j \neq i$ *d'où* $\psi(A) = 0$.
D'autre part

$$\widetilde{E}_i \bigcap \widetilde{E}_j = \bigcup_{n\geq 0}\bigcup_{n'\geq 0}\{K^{nm-i}s > 0\} \cap \{K^{n'm-j}s > 0\}$$

soit $\widetilde{E}_i$ *et* $\widetilde{E}_j$ *sont disjoints d'aprés la proposition 2.4, il existe un ensemble* F *clos* $F \subset E$.

Posons pour tout $0 \leq j \leq m-1$

$$E_i = \tilde{E}_i \cap F$$

sont disjoints . on a pour $i \neq j$, E_i *et* E_j *sont disjoints*

Lemme 3.3 *Si*

$$K(x,E_j) > 0$$

alors $x \in E_{j-1}$

Preuve. *Supposons que* $K(x,E_j) > 0$ *, nous avons ;*

$$\sum_n K^{nm-j+1}s(x) = \sum_n \int K^{nm-j+1}(x,dy)s(y)$$

Or

$$K^{nm-j+1}(x,dy) = \int K^{nm-j}(x,dz)K(z,dy)$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_n K^{nm-j+1}s(x) &= \sum_n \int (\int K^{nm-j}(z,dy)s(y))K(x,dz) \\
&= \int (\int \sum_n K^{nm-j}(z,dy)s(y))K(x,dz) \\
&\geq \int_{E_j} (\int \sum_n K^{nm-j}(z,dy)s(y))K(x,dz) \\
&> 0
\end{aligned}$$

donc $x \in E_{j-1}$

Lemme 3.4 *posons*

$$B_{i,r} = E_i \cap E_r^{'}$$

pour tout $0 \leq j, l \leq d^{'} - 1$ *avec* $j \neq l$ *; nous avons*

$$\psi(B_{i,j}) = \psi(B_{i,l}) = 0$$

Preuve. *Par l'absurde. Supposons qu'ils existent* $0 \leq j, l \leq m-1$ *avec* $j \neq l$ $(j > l)$ *tels que*

$$\psi(B_{i,j}) > 0$$

et

$$\psi(B_{i,l}) > 0$$

soit $x \in B_{i,l}$.
Par l'irréductibilité , il existe $d \geq 1$ *tel que*

$$K^d(x, B_{i,j}) > 0$$

$x \in B_{i,l} \subset E_l^{'}$ *et* $B_{i,j} \subset E_j^{'}$, *par le 3.1 il existe* $h \in I\!N$ *tel que*

$$d = hm^{'} + j - l \tag{3.2.4}$$

comme $B_{i,j} \subset E_i$, *alors*

$$K^m(x, B_{i,j}) > 0$$

$x \in B_{i,l} \subset E_i$, *par le corollaire 3.1 il existe* $n \in I\!N^*$ *tel que*

$$d = nm \tag{3.2.5}$$

or m *est un multiple de* $m^{'}$, *donc il existe* $k \in I\!N$ *tel que* $m = km^{'}$. *Ainsi 3.2.5 donne*

$$d = nkm^{'}$$

soit $m^{'}$ *divise* d .
ceci n'est valable que si :

$$j - l = 0$$

donc

$$j = l$$

d'où la contradiction. ■

Preuve du théorème *Par les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3 et la prop. 3.1, on conclut que* $(E_0, E_1, ..., E_{m-1})$ *est un m-cycle .*
D'aprés la proposition 3.4 il existent $0 \leq m-1 \quad 0 \leq m' - 1$ *j tels que*

$$B = \{s > 0\} \subset E_i$$

et $B = \{s > 0\} \subset E_l^{'}$

Soit $x \in E_i$ *, nous avons*

$$\begin{array}{rcl} K^m(x, E_l^{'}) & \geq & K^m(x, B) \\ & \geq & \beta s(x)\nu(B) \\ & > & 0 \end{array}$$

le corollaire 3.1 nous donne $m = nm^{'}$.

◇ *Supposons que l'un des* $E_i^{'}$, $0 \leq i \leq d^{'} - 1$ *contient un nombre différent de* $\frac{d}{d'}$ *d'ensembles* $(E_j^{'})$.
Donc ils existent $0 \leq k, l \leq d^{'} - 1$ *tels que*

$$E_j^{'} = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup ... \cup E_{i_k}$$

et

$$E_{j+1}^{'} = E_{j_1} \cup E_{j_2} \cup ... \cup E_{i_l}$$

comme $k > l$, *alors il existe* $1 \leq h \leq k$ *tel que pour tout* $1 \leq t \leq l$ *et* $x \in E_{i_k}$, *nous avons*

$$K(x, E_{j_t}) = 0$$

par conséquent

$$\begin{array}{rcl} K(x, E_{j+1}^{'}) & = & \sum_{t=1}^{l} K(x, E_{j_t}) \\ & = & 0 \end{array}$$

d'où la contradiction.

■

Bibliographie

[1] A. REVUZ : *Markov Chains. North Holland Mathematical Labrary, Amsterdam, (1984).*

[2] C.MICHEL MARLE. *Mesures et Probabilités . Hermann,(1974),*

[3] E. NUMMELIN. *General irreductible Markov chains and non-negative operators . Cambridge University Press ,(1984),*

[4] S.P.MEYN AND R.L.TWEEDIE. *Markov Chains and Stochastic Stability . Cambridge University Press , (2008),*

Résumé :

Ce mémoire développe quelques résultats sur les noyaux de transition, non- négatifs, il s'intéresse plus particulièrement aux concepts de l'irréductibilité, les ensembles petits , les fonctions petites , et le cycle d'un noyau non-négatif.

Summary:

This thesis develops some results on the non-negative transition kernels , he is particularly interested in the concepts of irreducibility, small ensembles, small functions, and the cycle of a non-negative kernel.

ملخص:

يناقش هذا البحث بعض النتائج حول الأنوية الغير سالبة، و هو يهتم بشكل خاص بمفاهيم عدم قابلية الاختزال، المجموعات الصغرى والدوال الصغرى ودور النواة الغير سالبة