République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Abou Baker Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité: Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles

Présentée par
Mme Dali Youcef Hafidha née Sebbagh

Etude de l'Existence et la Multiplicité des Solutions de Certains Problèmes aux Limites Non-linéaires

Soutenue devant le jury composé de:

Président	*Mr Mohammed Bouchekif*	*Professeur, Université de Tlemcen.*
Examinateur	*Mr Mustapha Yebdri*	*Professeur, Université de Tlemcen.*
Examinateur	*Mr Mouffak Benchohra*	*Professeur, Université de S.B.A*
Examinateur	*Mr Abdelkader Lakmeche*	*Professeur, Université de S.B.A*
Examinateur	*Mr Azzedine Lansari*	*M.C.A, Université de Tlemcen.*
Directeur de thèse	*Mr Mohammed Derhab*	*Professeur, Université de Tlemcen.*

2013-2014

ma mère et mon père,

ma soeur,

et mon mari.

Remerciements

Je resterai reconnaissante toute ma vie à plusieurs personnes qui m'ont aidée à remettre le pied dans les moments difficiles. Je ne peux qu'être d'accord avec Aristote et dire "Il y a parmi nous des magiciens et magiciennes, mais personne ne le sait...". À ces magiciens et magiciennes, je veux dédier mes remerciements.

Trouver les bons mots pour dire "Merci" est une chose difficile, je tiens tout d'abord à remercier le Dieu tout puissant, sans qui je ne serai jamais arriver là où j'en suis.

Je tiens à manifester ma plus profonde et sincère reconnaissance envers mon directeur de thèse, Mr Mohammed Derhab, pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail, puis pour m'avoir guidé, conseillé et pour son encourageante présence quotidienne.

Je remercie Mr Mohammed Bouchekif, directeur du laboratoire Systèmes Dynamiques et ses Applications, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, et qui m'a toujours encouragé à participer aux manifestations scientifiques en me fournissant tout les moyens possibles et je le remercie aussi de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Je souhaite remercier Mr Mustapha Yebdri , Mr Mouaffak Benchohra, Mr Abdelkader Lakmeche et Mr Azzedine Lansari pour avoir accepté de consacrer un peu de leur temps à la lecture de cette thèse, de même pour leur participation au Jury, et je leur en suis très reconnaissante.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions et leur soutien moral. Je pense ici en particulier à Melle Ibtissem Didi qui à toujours été présente qu'en j'avais besoin d'elle en particulier en Latex et à Mr Bachir Messirdi qui m'a orionté vers le bon chemin en me donnant de bons conseils et de bonnes informations.

Pour leurs encouragements et leur assistance aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions et qui ont toujours cru en moi, je remercie chaudement Mes parents, mon mari, ma sœur Douniazed pour leur soutien et le reste de la famille, sans oublier Mr Amine Attar pour son soutien et son aide.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du Laboratoire SDA, et j'en remercie ici tous les membres.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner les enseignants qui m'ont suivi et encouragé et qui ont toujours cru en moi tout au long de mon cursus.

Tout art et toute recherche, de même que toute action et toute délibération réfléchie, tendent, semble-t-il, vers quelque bien, toutefois il parait bien qu'il y a une différence entre les fins.

Aristote

"Ethique à Nicomaque"

Table des matières

Introduction

L'objet de cette thèse est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives pour des classes de problèmes aux limites quasilinéaires faisant intervenir l'opérateur $p-$Laplacian défini par :

$$u \longmapsto (\varphi_p(u'))' \text{ avec } \varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y, y \in \mathbb{R} \text{ et } p > 1$$

Cet opérateur intervient dans plusieurs domaines tels que la mécanique non-Newtonienne, l'élasticité non linéaire, les milieux poreux, les fluides dilatants, les fluides pseudo-plastiques et la glaciologie (voir [21] et [46]).
On note aussi que ce type de problèmes intervient dans certains problèmes physiques et réactions chimiques (voir [29] et [53].)

Cette thèse est divisée en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on donne quelques résultats préliminaires concernant la méthode de quadrature. Plus précisement on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\,(0) = u\,(1) & = & 0, & \end{cases} \tag{1}$$

où $\varphi_p\,(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

L'idée de cette méthode est de transformer le problème (1) à une équation algébrique du type $T_+(E) = \dfrac{1}{2}$, où T_+ est l'application temps et $E = u'(0)$.

La méthode de quadrature a été considéré pour la première fois par Z. Opial en 1961 (voir [43]), ensuite par T. W. Laetsch en 1971 (voir [35]) et aprés par J. Smoller et A. Wasserman en 1989 (voir [52]).

Pour l'opérateur p-Laplacian, cette méthode a été considéré pour la première fois par M. ôtani en 1984 (voir[44]), ensuite par R. Manasevich en 1993 (voir [40]).

Pour l'opérateur φ-Laplacian défini par : $u \longmapsto (\varphi(u'))'$ avec φ est un homéomorphisme croissant impair de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a été considéré par M. Garcia et P. Ubilla en 1987 (voir[24]).

Le deuxième chapitre est consacré au nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda\left(u^q - u^{-\alpha}\right) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\,(0) = u\,(1) & = & 0, & \end{cases} \tag{2}$$

où $\varphi_p\,(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p - 1$.

Les problèmes aux limites non linéaires singuliers apparaient dans quelques applications, comme les fluides non Newtoniens, les catalystes heterogènes, les catalystes cinétiques et le phénomène des fluides visqueux (voir [8], [26], [39], [47] et [48]).

On note aussi qu'il y'a une relation entre les problèmes aux limites avec une non linéarité singulière et les problèmes aux limites du type suivant

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'))' & = & u^q & \text{dans } (0,1), \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1), \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} u(x) & = & +\infty, & \end{cases} \tag{3}$$

où $p > 1$ et $q > 1$.
Si on considère la transformation de Gelfand $v = u^{-1}$, on obtient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(v'))' & = & 2(1-2p)v^{-1}|v'|^p + v^{2p-q-2} & \text{dans } (0,1), \\ v & > & 0 & \text{dans } (0,1), \\ v(0) = v(1) & = & 0. & \end{cases} \tag{4}$$

Ce problème contient deux singularités non linéaires (v^{-1} et v^{2p-q-2} si $p < \dfrac{q+2}{2}$) (voir[48]).

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [16].

Dans le troisième chapitre on a étudié le nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites quasilinéaire suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1), \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) & = & 0, & \end{cases} \tag{5}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est de classe C^2 et p-convexe.

Dans ce chapitre on prouve que si la non linéarité de f est sur p-linéaire en 0 , $+\infty$ et p-convexe, alors l'application temps est concave.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [17].

Le dernier chapitre est consacré au nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites avec une non linéarité de type effet Allee. Plus précisement, on considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\alpha)\varphi_p(u'))' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1), \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) & = & & 0, \end{cases} \tag{6}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $p > 1$, $\lambda > 0$, $f(u) = u^{p-1}(1-u^{p-1})(u^{p-1}-a)$. et $a > 0$

Pour $p = 2$, ce problème a été étudié dans [9]. Dans ce travail on montre que la structure des solutions positives pour $1 < p \leq 2$ est une généralisation de celle obtenue dans [9], mais par contre pour $p > 2$ elle est différente.

Les résultats de ce chapitre sont une généralisation partielle des résultats obtenus dans [54] et se trouvent dans [18].

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner une présentation de la méthode de quadrature pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires dont le second membre de l'équation est autonome et les conditions aux limites sont de type Dirichlet. Plus précisement on considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right)=u\left(1\right) & = & 0, & \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $p>1$, $\lambda>0$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.

1.2 Définitions et résultats préliminaires

Définition 1.2.1 *On appelle une solution forte du problème (1.1) toute fonction u de classe $C^1\left([0,1]\right)$ telles que*

i) $\varphi_p\circ u'$ est de classe $C^1\left([0,1]\right)$.
ii) u vérifie (1.1).

Si on note par $Z(u')$ l'ensemble suivant

$$Z(u')=\left\{x\in[0,1]\,;\; u'(x)=0\right\}.$$

On a le résultat suivant

Lemme 1.2.2 *Soit u une solution de (1.1). Alors on a*

i) Si $1<p\leq 2$, alors $u\in C^2\left([0,1]\right)$,
ii) Si $p>2$, alors $u\in C^1\left([0,1]\right)\cap C^2\left([0,1]\setminus Z(u')\right)$.

Preuve. Voir la proposition 2.1 dans [45]. ■

Lemme 1.2.3 *Si u est une solution de (1.1), alors*

$$x\to\left|u'(x)\right|^p+p'F(u(x)) \text{ est constante dans } [0,1] \text{ avec } F(u):=\int_0^u f(s)ds.$$

Preuve. Voir [45]. ■

1.3 Méthode de quadrature

Dans cette partie on va donner une condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions positives pour le problème (1.1). Pour cela on note par

$$S^+ = \left\{u \in C^1\left([0,1]\right); u > 0 \text{ dans } (0,1)\,,\ u\,(0) = u\,(1) = 0 \text{ et } u'\,(0) = E \geq 0\right\}.$$

Soit A^+ le sous ensemble de S^+ composé par les fonctions u satisfaisant :

i) $u'(0) = E > 0$.

ii) u est symétrique par rapport à $\dfrac{1}{2}$.

iii) La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

Soit B^+ le sous ensemble de $C^1\left([0,1]\right)$ composé par les fonctions u satisfaisant

i) $u > 0$ dans $(0,1)$ et $u\,(0) = u\,(1) = u'\,(0) = 0$

ii) u est symétrique par rapport à $\dfrac{1}{2}$.

iii) La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

On note aussi par $S_+(E)$ le premier zéro positif de l'équation

$$E^p - p'F(u) = 0.$$

En suite, on définit l'application temps T_+ par

$$E \longmapsto T_+(E) := \int_0^{S_+(E)} \frac{1}{\left[E^p - p'F(u)\right]^{\frac{1}{p}}} du.$$

et

$$D^+ = \left\{E \geq 0/T_+(E) < +\infty\right\}.$$

On a le résultat suivant

Théorème 1.3.1

i) Le problème (1.1) admet une solution dans A^+ si et seulement s'il existe $E > 0$ telle que $E \in D^+$et $T_+(E) = \dfrac{1}{2}$ et dans ce cas la solution est unique.

ii) Le problème (1.1) admet une solution dans B^+si et seulement si $0 \in D^+$et $T_+(0) = \dfrac{1}{2}$ et dans ce cas la solution est unique.

Preuve.

i) Soit u une solution positive du problème (1.1). Alors $u' > 0$ dans $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, $u'(\frac{1}{2}) = 0$ et $u' < 0$ dans $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

D'aprés le lemme 1.2.3, on a

$$u'(x) = \left[(u'(0))^p - p'F(u(x))\right]^{\frac{1}{p}},\ \text{pour tout } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Par suite

$$\frac{u'(x)}{\left[(u'(0))^p - p'F(u(x))\right]^{\frac{1}{p}}} = 1, \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[.$$

À partir de cette égalité, on obtient

$$\int_0^{u(x)} \frac{1}{[(u'(0))^p - p'F(\xi)]^{\frac{1}{p}}} d\xi = x, \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[.$$

On fait tendre x vers $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\int_0^{u(\xi)} \frac{1}{[(u'(0))^p - p'F(\xi)]^{\frac{1}{p}}} d\xi = \frac{1}{2},$$

comme $u'(0) = E$ et $u(\frac{1}{2}) = S_+(E)$, on a

$$\int_0^{S_+(E)} \frac{1}{[E^p - p'F(u)]^{\frac{1}{p}}} du = \frac{1}{2},$$

c'est à dire

$$T_+(E) = \frac{1}{2}.$$

où

$$T_+(E) := \int_0^{S_+(E)} \frac{1}{[E^p - p'F(u)]^{\frac{1}{p}}} du.$$

Montrons maintenant que la condition $T_+(E) = \frac{1}{2}$ est une condition suffisante d'existence d'une solution positive de (1.1).

Pour cela supposons qu'il existe un $E_* > 0$ tel que

$$T_+(E_*) = \frac{1}{2}.$$

On définit la fonction h_+ sur $[0, S_+(E_*)]$ par

$$h_+(u) = \int_0^{u} \frac{1}{[E_*^p - p'F(\xi)]^{\frac{1}{p}}} d\xi.$$

On note que

$$h_+(S_+(E_*)) = T_+(E_*) = \frac{1}{2},$$

et

$$0 \leq h_+(u) \leq T_+(E_*), \text{ pour tout } u \text{ dans } [0, S_+(E_*)].$$

Alors h_+ est bien définie dans $[0, S_+(E_*)]$, de plus h_+ est un difféomorphisme croissant de $[0, S_+(E_*)[$ dans $[0, T_+(E_*)[$,

$$h_+'(u) = [E_*^p - p'F(u)]^{-\frac{1}{p}} > 0, \text{ pour tout } u \in [0, S_+(E_*)[.$$

Soit u_+ la fonction inverse de h_+ définie par

$$u_+(x) = h_+^{-1}(x) \in [0, S_+(E_*)], \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

et on définit la fonction u dans $[0,1]$ par

$$u(x)=\begin{cases} u_+(x) & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ \\ u_+(1-x) & \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

On va montrer maintenant l'unicité de la solution u du problème (1.1) et qui satisfait

$$u'(0)=E_* \text{ et } \max_{x\in[0,1]} u(x)=u(\frac{1}{2})=S_+(E_*).$$

Supposons que v est une autre solution positive du problème (1.1) et qui satisfait

$$v'(0)=E_* \text{ et } \max_{x\in[0,1]} v(x)=v(\frac{1}{2})=S_+(E_*),$$

on a donc

$$x=\int_0^{u(x)}\frac{1}{\left[E_*^p-p'F(\xi)\right]^{\frac{1}{p}}}d\xi=\int_0^{v(x)}\frac{1}{\left[E_*^p-p'F(\xi)\right]^{\frac{1}{p}}}d\xi, \text{ pour tout } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Par suite

$$\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{1}{\left[E_*^p-p'F(\xi)\right]^{\frac{1}{p}}}d\xi=0, \text{ pour tout } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

par conséquent

$$u=v \quad \text{dans } \left[0,\frac{1}{2}\right],$$

et par symétrie on obtient que

$$u=v \quad \text{dans } [0,1].$$

ii) La preuve est similaire à i).

■

Remarque 1.3.2 *La preuve de ce théorème se trouve dans [41].*

1.4 Exemple

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u^\alpha\right)\varphi_p\left(u'\right)\right)' &= \lambda\,\varphi_p\left(u^\alpha\right)\varphi_p\left(u\right) & \text{dans } (0,1), \\ u &> 0 & \text{dans } (0,1), \\ u\left(0\right)=u\left(1\right) &= 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $p>1$, $\lambda>0$ et $\alpha>0$.

On pose

$$v=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Alors

$$v'=u^\alpha u'$$

et par suite le problème (1.2) devient

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(v'\right)\right)' & = \lambda\ (\alpha+1)^{p-1}\varphi_p\left(v\right) & \text{dans } (0,1)\,, \\ v & > 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ v\left(0\right)=v\left(1\right) & = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dans ce cas, on a $f(v)=\lambda\ (\alpha+1)^{p-1}\varphi_p\left(v\right).$
Alors

$$F(v)=\int_0^v f(s)ds=\frac{\lambda}{p}(\alpha+1)^{p-1}v^p.$$

Pour tout $p>1,\lambda>0,\ \alpha>0$ et $E>0$, considérons l'équation par rapport à v :

$$E^p-\frac{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}{p-1}v^p=0.$$

Cette équation admet une unique solution positive

$$S_+(p,\lambda,\alpha,E)=\left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}E.$$

On définit l'application temps T_+ dans $]1,+\infty[\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par

$$\begin{aligned} T_+(p,\lambda,\alpha,E) &= \int_0^{S_+(p,\lambda,\alpha,E)}\frac{1}{\left[E^p-p'F(v)\right]^{\frac{1}{p}}}dv \\ &= \int_0^{S_+(p,\lambda,\alpha,E)}\frac{1}{\left[E^p-\frac{\lambda}{p-1}(\alpha+1)^{p-1}v^p\right]^{\frac{1}{p}}}dv. \end{aligned}$$

Si on pose $v=\left(\dfrac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}Et$, on obtient

$$\begin{aligned} T_+(p,\lambda,\alpha,E) &= \left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}E\int_0^1\frac{1}{\left[E^p-E^pt^p\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\ &= \left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{1}{\left[1-t^p\right]^{\frac{1}{p}}}dt. \end{aligned}$$

Si on pose maintenant $\tau=t^p$, on obtient

$$\begin{aligned} T_+(p,\lambda,\alpha,E) &= \left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{\tau^{\frac{1}{p}-1}}{p\left[1-\tau\right]^{\frac{1}{p}}}d\tau \\ &= \left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}\int_0^1\tau^{\frac{1}{p}-1}\left[1-\tau\right]^{\frac{-1}{p}}d\tau \\ &= \left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}\ B(\frac{1}{p},1-\frac{1}{p}) \quad \text{où } B \text{ est la fonction Béta d'Euler.} \end{aligned}$$

D'aprés le théorème 1.3.1 une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (1.3) admet une solution positive est

$$T_+(p,\lambda,\alpha,E)=\frac{1}{2},$$

ce qui est équivalent à

$$\left(\frac{p-1}{\lambda(\alpha+1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}\ B(\frac{1}{p},1-\frac{1}{p})=\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\lambda &= \left(\frac{p-1}{(\alpha+1)^{p-1}}\right)\left[\frac{2}{p}B\left(\frac{1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\right]^{p}\\ &= \left(\frac{1}{(\alpha+1)^{p-1}}\right)\ (p-1)\left[\frac{2\pi}{p\sin\left(\dfrac{\pi}{p}\right)}\right]^{p}.\end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 $\lambda_1(p)=(p-1)\left[\dfrac{2\pi}{p\sin\left(\dfrac{\pi}{p}\right)}\right]^{p}$ *est la première valeur propre de l'opèrateur $p-$Laplacien.*

Chapitre 2

Le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une singularité non linéaire

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions positives du problème aux limites quasilinéaire suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda\left(u^q - u^{-\alpha}\right) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) & = & 0, & \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p - 1$.

Les problèmes aux limites non linéaires singuliers apparaient dans quelques applications, comme les fluides non Newtoniens, les catalystes heterogènes, les catalystes cinétiques et le phénomène des fluides visqueux (voir [8], [26], [39], [47] et [48]).

Les problèmes aux limites non linéaires singuliers ont été étudié par plusieurs auteurs. Citons quelques uns.

Dans [13], les auteurs ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u & = & u^{-\gamma} - u & \text{dans } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $\gamma > 0$. Ils ont prouvé que (2.2) admet une solution, pour tout $\gamma > 0$.

Dans [12], les auteurs ont considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u & = & u^{-\gamma_1} + \mu u^{\gamma_2} & \text{dans } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\mu \geq 0$ et $0 < \gamma_1 < 1$ et $\gamma_2 > 0$.

Les auteurs ont prouvé que le problème (2.3) admet au moins une solution pour tout $\mu \geq 0$ et $0 < \gamma_2 < 1$. De plus, si $\gamma_2 \geq 1$, alors il existe μ^* tels que

- le problème (2.3) admet une solution pour tout $\mu \in [0, \mu^*)$.
- Le problème (2.3) n'admet aucune de solution pour $\mu > \mu^*$.

Dans [12] le résultat de la non existence a été prouvé. Plus précisément, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{-\gamma} - u & \text{dans } \Omega, \\ u &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

n'admet pas de solution si $0 < \gamma < 1$, $\lambda_1 \geq 1$ où λ_1 est la première valeur propre de $(-\Delta)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Dans [55], l'auteur a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu u^{\gamma_1} - u^{-\gamma_2} & \text{dans } \Omega, \\ u &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\mu > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, et $\omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $C^{2+\gamma}$ avec $\gamma \in (0, 1)$.

En utlilisant la méthode de la sur et sous solution, Z. Zhang [55] a prouvé que si $0 < \gamma_2 < 1$ et $0 < \gamma_1 < 1$, alors il existe $\overline{\mu} \in (0, +\infty)$ tels que

- le problème(2.4) admet au moins une solution $u_\mu \in H_0^1(\Omega) \cap C^{2+\gamma}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ pour tout $\mu > \overline{\mu}$.
- le problème (2.4) n'admet aucune solution dans $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ pour $\mu > \overline{\mu}$.

De plus, il a prouvé que si $\gamma_2 \geq 1$, alors le problème (2.4) n'admet aucune solution dans $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ pour tout $\mu > 0$ et $\gamma_1 > 0$.

Dans [20], les auteurs ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= -u^{-\gamma} + \mu f & \text{dans } \Omega, \\ u &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

où Ω est un domaine régulier ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \geq 0$, $f \in L^1(\Omega)$, $\mu \geq 0$ et $0 < \gamma < 1$.

Les auteurs ont montré qu'il existe $\mu^{**} > 0$ tels que

- Si $\mu > \mu^{**}$, le problème (2.5) admet une solution,
- Si $\mu < \mu^{**}$, le problème (2.5) n'admet aucune solution.

Dans [11], les auteurs ont prouvé que pour $\mu = \mu^{**}$, une solution existe si $N \leq 2$.

Dans [11] les résultats d'existence et de multiplicité pour le problème suivant ont été étudié

$$\begin{cases} -u'' &= -u^{-\gamma} + \mu & \text{dans } (-L, L), \\ u &> 0 & \text{dans } (-L, L), \\ u(-L) &= u(L) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Les auteurs ont prouvé que si $\gamma = \dfrac{1}{2}$, alors il existe $\tilde{\mu} > 0$, tels que

- Si $\mu < \tilde{\mu}$, le problème (2.6) n'admet aucune solution,
- Si $\mu > \tilde{\mu}$, le problème (2.6) admet exactement une solution.

De plus, pour $0 < \gamma < \dfrac{1}{3}$, il existe $\mu_1 < \tilde{\mu}$ tels que

- Si $\mu \in (\mu_1, \tilde{\mu})$, le problème (2.6) admet au moins deux solutions,
- Si $\mu = \mu_1$, le problème (2.6) admet au moins une solution.

Le nombre exact a été déterminé dans [27]. C'était prouvée que pour $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ il existe $\mu_2 > 0$, tels que

- Si $\mu < \mu_2$, alors le problème (2.6) n'admet aucune solution,
- Si $\mu > \mu_2$, le problème(2.6) admet exactement une solution.

De plus, pour $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, il existe, $\mu_3 < \mu_2$ tels que

- Si $\mu < \mu_3$, alors le problème (2.6) n'admet aucune solution,
- Si $\mu_3 < \mu < \mu_2$, le problème (2.6)admet exactement deux solutions,
- Si $\mu > \mu_2$, le problème (2.6) n'admet aucune solution.

Dans [50], l'auteur a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' & = & \mu\left(u^{\gamma_1} - u^{-\gamma_2}\right) & \text{dans } (-1,1), \\ u & > & 0 & \text{dans } (-1,1), \\ u(-1) & = & u(1) = 0, & \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\mu > 0$, $\gamma_1 > 0$ et $0 < \gamma_2 < 1$.

En utlilisant l'application temps, il a prouvé que si $2\gamma_2 - 1 < \gamma_1 < 1$, alors il existe $\mu_{\max} > 0$ et $0 < \mu_{\min} < \mu_{\max}$ tels que

- Si $\mu < \mu_{\min}$,, alors le problème (2.7)n'admet aucune solution,
- Si $\mu = \mu_{\min}$, alors le problème (2.7) admet une seule solution ,
- Si $\mu_{\min} < \mu \leq \mu_{\max}$, alors le problème (2.7) admet exactement deux solutions ,
- Si $\mu > \mu_{\max}$. alors le problème (2.7) admet une seule solution.

De plus si $0 < \gamma_1 \leq 2\gamma_2 - 1$, alors il existe $\hat{\mu} > 0$ tels que

- Si $\mu < \hat{\mu}$, alors le problème (2.7) n'admet aucune solution,
- Si $\mu \geq \hat{\mu}$, alors le problème (2.7) admet une seule solution.

L'objectif de ce travail est de donner une généralisation complète des résultats obtenus dans [27] et le Théorème 3.2 dans [50]. Nos résultats améliorent le Théorème 2 Partie (f) et le Théorème 4 Partie (f) obtenu dans [19] (voir la Remarque 13 dans [19]).

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, on énnonce notre résultat principal. Dans la section 3, on énnonce notre méthode pour prouver notre résultat principal. Quelques lemmes préliminaires sont l'objet de la section 4. Dans la Section 5 on donne la preuve du résultat principal. Finalement dans la section 6, on va donner quelques remarques.

Les résultats de ce travail se trouvent dans [16].

2.2 Résultat principal

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda\left(u^q - u^{-\alpha}\right) & \text{dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases} \tag{2.8}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$.
Pour énnoncer notre résultat, on définit

$$S^+ = \left\{u \in C^1([0,1])\,; u > 0 \text{ dans } (0,1),\ u(0) = u(1) = 0 \text{ et } u'(0) > 0\right\}.$$

Soit A^+ le sous ensemble de S^+ composé par les fonctions u satisfaisant

- u est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.
- La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

Soit B^+ le sous ensemble de $C^1([0,1])$ composé par les fonctions u satisfaisant

- $u>0$ dans $(0,1)$ et $u(0)=u(1)=u'(0)=0$.
- u est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.
- La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

Le principal résultat de ce travail est

Théorème 2.2.1 *Supposons que $p>1$, $\lambda>0$ et $-1<-\alpha<q<p-1$.*

(A) *Si $\alpha \geq \frac{q+1}{p}$, alors il existe $\lambda_*(p,\alpha,q)>0$ tels que*

i) Si $\lambda<\lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) n'admet pas de solutions positives,
ii) Si $\lambda=\lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans B^+,
iii) Si $\lambda>\lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans A^+.

(B) *Si $\alpha<\frac{q+1}{p}$, alors il existe $\lambda_{**}(p,\alpha,q)>0$ et $0<\lambda_*(p,\alpha,q)<\lambda_{**}(p,\alpha,q)$ tels que*

i) Si $\lambda<\lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8)n'admet aucune solution positive,
ii) Si $\lambda=\lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8)admet une unique solution dans A^+,
iii) Si $\lambda_{**}(p,\alpha,q)$, le problème (2.8)admet une unique solution dans A^+,
iv) Si $\lambda>\lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) admet exactement deux solutions positives l'une dans B^+ et l'autre dans A^+,
v) Si $\lambda_*(p,\alpha,q)<\lambda<\lambda_{**}(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) admet exactement deux solutions dans A^+.

2.3 L'application temps

Dans cette section on introduit l'application temps (voir [3]-[25]).
On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = g(u) \text{ dans } (0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $g \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On suppose que pour tout $s>0$, $\int_0^s g(t)\,dt$ est définie et on pose par définition $G(s) := \int_0^s g(t)\,dt$.

Pour tout $E \geq 0$ et $p>1$, soit

$$X_+(p,E) = \left\{ s>0;\ E^p - \frac{p}{p-1}G(\xi)>0,\ \forall\, \xi,\ 0<\xi<s \right\},$$

et

$$S_+(p,E) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_+(p,E)=\varnothing, \\ \text{sinon } \operatorname{Sup} X_+(p,E). \end{cases}$$

Soit

$$D = \{E \geq 0;\ 0<S_+(p,E)<+\infty \text{ et } g(S_+(p,E))>0\},$$

et on définit l'application temps suivante

$$T_+ (p, E) = \int_0^{S_+(p,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1} G(u) \right]^{-\frac{1}{p}} du.$$

On a le résultat suivant.

Théorème 2.3.1 *Supposons que $g \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $E \geq 0$ et $p > 1$. Alors*

- *Le problème (2.9) admet une solution $u \in A^+$ qui satisfait $u'(0) = E$ si et seulement si $E \in D \cap (0, +\infty)$ et $T_+(p, E) = \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas la solution est unique et sa norme sup est égale à $S_+(p, E)$.*
- *Le problème (2.9) admet une solution $u \in B^+$ si et seulement si $0 \in D$ et $T_+(p, 0) = \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas la solution est unique et sa norme sup est égale à $S_+(p, 0)$.*

Preuve. Voir chapitre 1. ■

2.4 Lemmes préliminaires

Lemme 2.4.1 *On considère l'équation dans $s \in \mathbb{R}_+$:*

$$E^p - \frac{p}{p-1} \lambda \left(\frac{s^{q+1}}{q+1} - \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = 0, \tag{2.10}$$

où $\lambda > 0$, $p > 1$, $-1 < -\alpha < q < p - 1$ et $E \geq 0$.

Alors pour tout $E \geq 0$, l'équation (2.10) admet un unique zéro positive $r_+(p, \lambda, E)$. De plus

i) $\forall\ E \geq 0$, $\forall p > 1$ et $\forall \lambda > 0$, $r_+^q(p, \lambda, E) - r_+^{-\alpha}(p, \lambda, E) > 0$.
ii) La fonction $E \mapsto r_+(p, \lambda, E)$ est C^1dans $(0, +\infty)$ et pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E > 0$, on a :

$$\frac{\partial r_+}{\partial E}(p, \lambda, E) = \frac{(p-1) E^{p-1}}{\lambda \left(r_+^q(p, \lambda, E) - r_+^{-\alpha}(p, \lambda, E) \right)} > 0$$

iii) $\lim\limits_{E \to 0^+} r_+(p, \lambda, E) = \left(\dfrac{q+1}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{q+\alpha}}$.
iv) $\lim\limits_{E \to +\infty} r_+(p, \lambda, E) = +\infty$.

Preuve. La preuve de ce lemme est omise car elle est similaire à celle du Lemme 4.1 dans [5] ou le Lemme 8 dans [3]. ■

Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E \geq 0$, on a

$$X_+(p, \lambda, E) =]0, r_+(p, \lambda, E)[\,.$$

Alors

$$S_+(p, \lambda, E) = r_+(p, \lambda, E)\,.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D &= \left\{ E \geq 0,\ 0 < S_+(p, \lambda, E) < +\infty \text{ et } r_+^q(p, \lambda, E) - r_+^{-\alpha}(p, \lambda, E) > 0 \right\} \\ &= [0, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4.1, on a

$$\lim_{E\to 0^+} S_+(p,\lambda,E) = \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, \tag{2.11}$$

$$\lim_{E\to +\infty} S_+(p,\lambda,E) = +\infty, \tag{2.12}$$

et pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $E>0$,

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p,\lambda,E) = \frac{(p-1)\,E^{p-1}}{\lambda\left(S_+^q(p,\lambda,E) - S_+^{-\alpha}(p,\lambda,E)\right)} > 0.$$

A présent, on définit, pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $E\geq 0$, l'application temps T_+ par

$$T_+(p,\lambda,E) = \int_0^{S_+(p,\lambda,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1}\lambda\left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} du. \tag{2.13}$$

Maintenant si on pose le changement de variables $u = S_+(p,\lambda,E)\,t$ dans (2.13), on obtient que

$$T_+(p,\lambda,E) \;=\; \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\tfrac{(S_+(p,\lambda,E))^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \tfrac{(S_+(p,\lambda,E))^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt.$$

On observe que

$$T_+(p,\lambda,E) = G\left(p,\lambda,S_+(p,\lambda,E)\right),\ \text{pour tout } p>1,\ \lambda>0 \text{ et } E\geq 0,$$

où

$$G(p,\lambda,\rho) = \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt, \tag{2.14}$$

pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $\rho \geq \left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}$.

Comme la fonction $E \mapsto S_+(p,\lambda,E)$ est un C^1-difféomorphisme croissant de $(0,+\infty)$ vers lui même cela montre que si on pose, pour tout $p>1$ et $\lambda>0$,

$$J_1(p,\lambda) := \left\{E\in[0,+\infty) : T_+(p,\lambda,E) = \frac{1}{2}\right\},$$

et

$$J_2(p,\lambda) := \left\{\rho \in \left[\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right) : G(p,\lambda,\rho) = \frac{1}{2}\right\},$$

alors

$$Card\left(J_1(p,\lambda)\right) = Card\left(J_2(p,\lambda)\right), \text{pour tout } p>1 \text{ et } \lambda>0.$$

Alors, dés maintenant, on se concentre sur le nombre de solutions de l'équation $G(p,\lambda,\rho) = \dfrac{1}{2}$ dont la variable $\rho \in \left[\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$, au lieu de $T_+(p,\lambda,E) = \dfrac{1}{2}$ dont la variable $E\in[0,+\infty)$.

Proposition 2.4.2 *Si u est une solution positive du problème (2.8), alors $u \in A^+ \cup B^+$.*

Preuve. La preuve est omise car elle est similaire à la Proposition 4.2 dans [15]. ■

Lemme 2.4.3 *Pour tout* $p > 1$, $\lambda > 0$ *et* $-1 < -\alpha < q < p-1$, *on a*

i) $$\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} G(p,\lambda,\rho) = \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{-1}{p}} L(p,q,\alpha)\, B\left(\frac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)}, 1-\frac{1}{p}\right), \text{ où}$$

$$L(p,q,\alpha) = \frac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha},$$

et $B(.,.)$ est une fonction Beta d'Euler définie par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\ x > 0 \text{ et } y > 0.$$

ii) $\lim_{\rho \to +\infty} G(p,\lambda,\rho) = +\infty$.

Preuve. Soit $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$ fixés.

i) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} G(p,\lambda,\rho) &= \lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \left(\tfrac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}} \int_0^1 \left[t^{1-\alpha} - t^{q+1}\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha} \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1+p}{p(\alpha+q)}-1}[1-t]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha} B\left(\frac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)}, 1-\frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

ii) Soit $\rho > 0$, on a

$$\begin{aligned}
G(p,\lambda,\rho) &= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&\geq \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \rho^{\frac{p-q-1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{1-t^{q+1}}{q+1}\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{p-1}{p}} B\left(\frac{1}{q+1}, \frac{p-1}{p}\right) \rho^{\frac{p-q-1}{p}},
\end{aligned}$$

cela signifie que

$$\forall \rho > 0,\ G(p,\lambda,\rho) \geq \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{p-1}{p}} B\left(\frac{1}{q+1}, \frac{p-1}{p}\right) \rho^{\frac{p-q-1}{p}}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to +\infty} G(p,\lambda,\rho) &\geq \lim_{\rho \to +\infty} \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{p-1}{p}} B\left(\frac{1}{q+1}, \frac{p-1}{p}\right) \rho^{\frac{p-q-1}{p}}. \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\rho \to +\infty} G(p,\lambda,\rho) = +\infty.$$

$\blacksquare$

Lemme 2.4.4 *Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$, on a :*

i) Il existe $\rho_1 > 0$ alors la fonction $\rho \longmapsto G(p,\lambda,\rho)$ est strictement croissante sur $(\rho_1, +\infty)$.

ii) S'il existe $\rho_* > 0$ tel que $\dfrac{\partial G}{\partial \rho}(p,\lambda,\rho_*) = 0$, alors $\dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} G(p,\lambda,\rho_*) > 0$.

Preuve. Soit $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$ sont fixés.
i) Dérivant (2.14) par rapport à ρ, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}(p,\lambda,\rho_*) = \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{H(p,\lambda,\rho) - H(p,\lambda,\rho t)}{\left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt$$

où

$$H(p,\lambda,u) = \left(\frac{p-q-1}{q+1}\right) u^{q+1} + \left(\frac{1-p-\alpha}{1-\alpha}\right) u^{1-\alpha}$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,\lambda,u) = (p-q-1)\, u^q + (1-p-\alpha)\, u^{-\alpha}$$

Comme $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$, cela montre qu'il existe $\tilde{\rho} \in \left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$ tel que $\rho \mapsto H(p,\lambda,\rho)$ est strictement croissante sur $(\tilde{\rho}, +\infty)$.

De plus, $\rho \mapsto H(p,\lambda,\rho)$ est strictement négative sur $\left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, \rho_1\right)$, strictement positive sur $(\rho_1, +\infty)$ et s'annule en $\rho_1 = \left(\dfrac{(p+\alpha-1)(q+1)}{(p-q-1)(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}$.

Alors, pour tout $\lambda > 0$, $p > 1$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$, on a $H(p,\lambda,\rho) - H(p,\lambda,u) > 0$, pour tout $\rho \in (\rho_1, +\infty)$ et $u \in (0,\rho)$. Ce qui signifie que $\rho \mapsto G(p,\lambda,\rho)$ est strictement croissante sur $(\rho_1, +\infty)$.

ii) La dérivée seconde de G par rapport à ρ est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}(p,\lambda,\rho) &= \frac{(p+1)}{p^2 \rho}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{\left(H(p,\lambda,\rho) - H(p,\lambda,\rho t)\right)^2}{\left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{2p+1}{p}}} dt \\ &\quad + \frac{1}{p\rho}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{\Phi(p,\lambda,\rho) - \Phi(p,\lambda,\rho t)}{\left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt,\end{aligned}$$

où

$$\Phi(p,\lambda,u) = -p(p+1)\left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + 2p\left(u^{q+1} - u^{1-\alpha}\right) - \left(q u^{q-1} + \alpha u^{1-\alpha}\right)$$

On a

$$p\rho\frac{\partial^2 G}{\partial\rho^2}(p,\lambda,\rho)+p(p+1)\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho) = \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^1 \frac{\Psi(p,\lambda,\rho)-\Psi(p,\lambda,\rho t)}{\left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)-\frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt + \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^1 \frac{\left(H(p,\lambda,\rho)-H(p,\lambda,\rho t)\right)^2}{\left[\frac{\rho^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)-\frac{\rho^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{2p+1}{p}}}dt$$

où

$$\Psi(p,\lambda,u)=\Phi(p,\lambda,u)+(p+1)H(p,\lambda,u)=u\frac{\partial}{\partial u}H(p,\lambda,u)$$

Comme $\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(p,\lambda,u)>0$, pour tout $u\in(0,+\infty)$, cela montre que

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}H(p,\lambda,\rho)>u\frac{\partial}{\partial u}H(p,\lambda,u)\,,\text{ pour tout } u\in(0,\rho)$$

Donc $\Psi(p,\lambda,\rho)>\Psi(p,\lambda,u)$, pour tout $u\in(0,\rho)$, ce qui signifie que

$$p\rho\frac{\partial^2 G}{\partial\rho^2}(p,\lambda,\rho)+p(p+1)\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho)>0, \text{ pour tout } \rho\in\left(\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}},+\infty\right)$$

Alors s'il existe $\rho_*\in\left(\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}},+\infty\right)$ tel que $\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho_*)=0$,

alors

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}G(p,\lambda,\rho_*)>0$$

■

Remarque 2.4.5 *Le lemme 2.4.4 montre que la monotonicité de l'application G est déterminée par le signe de* $\lim\limits_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}\left(p,\lambda,\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}\right)$.

Si $\lim\limits_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}\left(p,\lambda,\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}\right)\geq 0$, *alors l'application temps G est strictement croissante sur* $\left(\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}},+\infty\right)$ *et si* $\lim\limits_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}\left(p,\lambda,\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}\right)<0$, *alors l'application temps G est strictement décroissante sur* $\left(\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}},\tilde{\rho}\right)$ *et strictement croissante sur* $(\tilde{\rho},+\infty)$.

On a le résultat suivant.

Proposition 2.4.6 *Pour tout* $p>1$, $\lambda>0$ *et* $-1<-\alpha<q<p-1$, *on a*

$$\lim_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho)=\begin{cases}-\infty \text{ si } \alpha\leq\frac{1}{p+1},\\ (\alpha p-q-1)\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}M(p,q,\alpha) \text{ si } \alpha>\frac{1}{p+1},\end{cases}$$

où $M(p,q,\alpha) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}\right)}{p(\alpha+q)\ \Gamma\left(\dfrac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}+1\right)}.$

Remarque 2.4.7 *Pour la preuve de cette proposition, on a besoin de quelques propriétés de la fonction Gamma et des propriétés des fonctions hypergéométriques (voir [1] et [42]). On a les définitions et les propriétés suivantes.*

i) La fonction Gamma Γest défini par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} dt, x > 0.$$

ii) Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

iii)Pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

iv) C'est possible d'étendre la fonction Gamma à des valeurs négatives en intervenant l'équation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (laquelle elle devient une définition pour $-1 < x < 0$)

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

v)De la précédente définition, il résulte que si $-1 < x < 0$, alors $\Gamma(x) < 0$.

vi) La fonction hypergéométrique est défini pour $|x| < 1$ par la série de fonctions suivantes

$${}_2F_1(a,b;c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n\, n!} x^n$$

avec $c \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ où $(d)_n$ le symbol de Pochammer défini par

$$(d)_n = d(d+1)\ldots(d+n-1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

vii) Si on suppose que $c > b > 0$, alors la fonction hypergéométrique admet la représentation intégrale suivante

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} dt,\ \ |x| < 1$$

viii) Si $c > a+b$, $c > b > 0$, alors en utilisant la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique, on montre que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} {}_2F_1(a,b;c;x) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\end{aligned}$$

et on pose par définition

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Preuve de la Proposition 2.4.6 Soit $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < \alpha < q < p-1$ fixés, on a

$$\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) = \frac{1}{p(q+\alpha)} \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 A(\tau, p, q, \alpha)\, \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} d\tau$$

où $A(\tau, p, q, \alpha) = (p-q-1)\left(1-\tau^{\frac{q+1}{q+\alpha}}\right) - (p+\alpha-1)\left(1-\tau^{\frac{1-\alpha}{q+\alpha}}\right)$.

Cette intégrale impropre a deux singularités en 0 et en 1. Alors on écrit

$$\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) = \frac{1}{p(q+\alpha)} \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} (I_0 + I_1),$$

où

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} A(\tau, p, q, \alpha)\, \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} d\tau,$$

et

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 A(\tau, p, q, \alpha)\, \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} d\tau.$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'intégrale I_0 est convergente si et seulement si

$\dfrac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)} > 0$, ce qui signifie que $\alpha > \dfrac{1}{p+1}$. Si $\alpha \le \dfrac{1}{p+1}$, on a $I_0 = -\infty$.

Maintenant concernant l'intégrale I_1, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\tau \to 1 \\ <}} \frac{A(\tau, p, q, \alpha)}{1-\tau} &= \lim_{\substack{\tau \to 1 \\ <}} \frac{(p-q-1)\left(1-\tau^{\frac{q+1}{q+\alpha}}\right) - (p+\alpha-1)\left(1-\tau^{\frac{1-\alpha}{q+\alpha}}\right)}{1-\tau} \\
&= (p-q-1)\left(\frac{q+1}{q+\alpha}\right) - (p+\alpha-1)\left(\frac{1-\alpha}{q+\alpha}\right) \\
&= \frac{(p-q-1)(q+1) - (p+\alpha-1)(1-\alpha)}{q+\alpha} := L
\end{aligned}$$

Alors, dans le voisinage gauche de 1, on a

$$A(\tau, p, q, \alpha)\, \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} \sim L \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\frac{1}{p}}$$

Comme $\int_{\frac{1}{2}}^1 \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\frac{1}{p}} d\tau$ est convergente, ça montre que I_1 est aussi convergente.

Alors $\displaystyle\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) = -\infty$ si $\alpha \le \dfrac{1}{p+1}$, et est convergente si $\alpha > \dfrac{1}{p+1}$.

Maintenant, on va prouver que pour tout $\lambda > 0$ et $\alpha > \dfrac{1}{p+1}$, on a

$$\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) = (\alpha p - q - 1)\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}\right)}{p(\alpha+q)\,\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}+1\right)}.$$

Soit $\lambda > 0$ et $\alpha > \dfrac{1}{p+1}$, on a

$$\lim_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) = \frac{1}{p(q+\alpha)} \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 A(\tau, p, q, \alpha)\, \tau^{\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}-1} (1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} d\tau.$$

Comme $1-\dfrac{p+\alpha-1}{q+\alpha}=\dfrac{p-q-1}{q+\alpha}$ et $1+\dfrac{1-\alpha}{q+\alpha}=\dfrac{q+1}{q+\alpha}$ et si on pose par définition

$A_1=\dfrac{p+\alpha-1}{q+\alpha}$ et $A_2=\dfrac{1-\alpha}{q+\alpha}$,on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho) &= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1\left[A_1\tau^{A_2}-(1-A_1)\,\tau^{A_2+1}-1\right]\tau^{\frac{A_1}{p}-A_2-1}(1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}d\tau\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1\left[A_1\tau^{A_2}-(1-A_1)\,\tau^{A_2+1}-1\right]\tau^{\frac{A_1}{p}-A_2-1}(1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}d\tau\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ -\int_0^1\left(1-\tau^{A_2}\right)\tau^{\frac{A_1}{p}-A_2-1}(1-\tau)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}d\tau\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\int_0^1\left(-1+(1-v)^{A_2}\right)(1-v)^{\frac{A_1}{p}-A_2-1}v^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}dv\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-A_2)_n}{n!}v^n(1-v)^{\frac{A_1}{p}-A_2-1}v^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}dv\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-A_2)_n}{n!}\int_0^1 v^{n-\frac{1}{p}-1}(1-v)^{\frac{A_1}{p}-A_2-1}dv\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-A_2)_n}{n!}B\left(n-\frac{1}{p},\frac{A_1}{p}-A_2\right)\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-A_2)_n}{n!}\dfrac{\Gamma\left(n-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(n+\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-A_2)_n}{n!}\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{p}\right)_n\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)_n\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho) &= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-A_2)_n\left(-\frac{1}{p}\right)_n}{n!\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)_n}\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\left({}_2F_1\left(-A_2,-\frac{1}{p},\frac{A_1-1}{p}-A_2,1\right)-1\right)\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}-1\right)\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{A_1}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}+1\right)}\\ +\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}\right)}-\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,B\left(\frac{A_1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ +\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}\right)}-\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}(A_1-1)\,\dfrac{\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{A_1-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}\right)}\\ +\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\dfrac{A_1}{p}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{A_1-1}{p}\right)}-\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[-\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{A_1}{p}-A_2\right)}{\Gamma\left(\frac{A_1-1}{p}-A_2\right)}\right]\\
&= -\frac{1}{p}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}\right)}\\
&= \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}\right)}
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\lim_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}\frac{\partial G}{\partial\rho}(p,\lambda,\rho) = \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}\right)}. \tag{2.15}$$

D'autre côté comme $\dfrac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)} > -1$, pour $\alpha > \dfrac{1}{p+1}$ et en utilisant l'identité $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x > -1$ et la notation $\Gamma(0) = \infty$, on a

$$\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}\right) = \frac{p(\alpha+q)}{\alpha p-q-1}\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}+1\right) \tag{2.16}$$

Alors d'aprés (2.15) et (2.16), on obtient que

$$\lim_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} \frac{\partial G}{\partial \rho}(p,\lambda,\rho) = (\alpha p-q-1)\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{\frac{-1}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha(p+1)-1}{p(\alpha+q)}\right)}{p(\alpha+q)\Gamma\left(\frac{\alpha p-q-1}{p(\alpha+q)}+1\right)}.$$

Remarque 2.4.8 *La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 5.1 dans [50].*

Lemme 2.4.9 *Si $\alpha \geq \dfrac{q+1}{p}$, alors la fonction $\rho \mapsto G(p,\lambda,\rho)$ est strictement croissante sur $\left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$ et si $\alpha < \dfrac{q+1}{p}$, alors il existe un unique $\widetilde{\rho} \in \left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$ tel que la fonction $\rho \mapsto G(p,\lambda,\rho)$ est strictement décroissante sur $\left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, \widetilde{\rho}\right)$ et strictement croissante sur $(\widetilde{\rho}, +\infty)$.*

Preuve. La preuve de ce lemme est une conséquence immédiate de la Proposition 2.4.6 et de la remarque 2.4.7. ■

2.5 Preuve du théorème principal

Preuve du théorème 2.2.1

Supposons que $p > 1$, $\lambda < 0$ et $-1 < -\alpha < q < p-1$.

Peuve de l'Assertion (A)

Supposons que $\alpha \geq \dfrac{q+1}{p}$. Par les lemmes 2.4.3 et 2.4.9, on a

- $\displaystyle\lim_{\rho\to\left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} G(p,\lambda,\rho)$
$$= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha} B\left(\tfrac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)}, 1-\tfrac{1}{p}\right) := H,$$
- $\displaystyle\lim_{\rho\to+\infty} G(p,\lambda,\rho) = +\infty$.
- La fonction $\rho \mapsto G(p,\lambda,\rho)$ est strictement croissante sur $\left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$.

Alors, l'équation dans la variable ρ, $G(p,\lambda,\rho) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution dans $\left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$ si et seulement si $\lambda \geq \lambda_*(p,\alpha,q)$, où

$$\lambda_*(p,\alpha,q) := \frac{p-1}{p}\left(2\frac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha}B\left(\frac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)},1-\frac{1}{p}\right)\right)^p$$

Donc, par le théorème 2.3.1, on a que

i) Si $\lambda < \lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) n'admet aucune solution, (voir fig. 2.1),

ii) Si $\lambda = \lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans B^+, (voir fig. 2.2),

iii) Si $\lambda > \lambda_*(p,\alpha,q)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans A^+, (voir fig. 2.3).

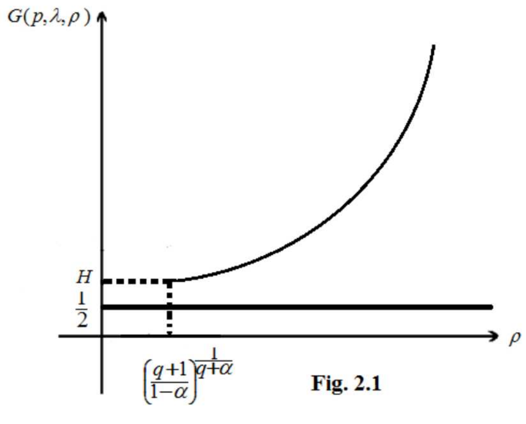

Fig. 2.1

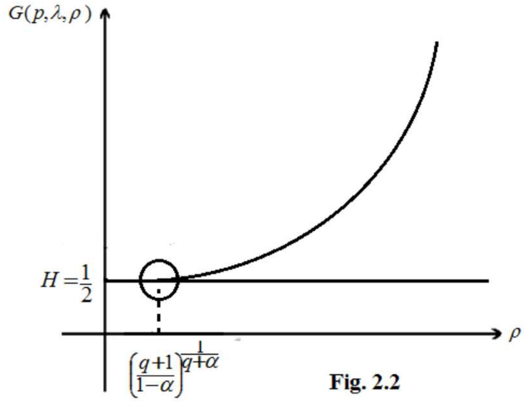

Fig. 2.2

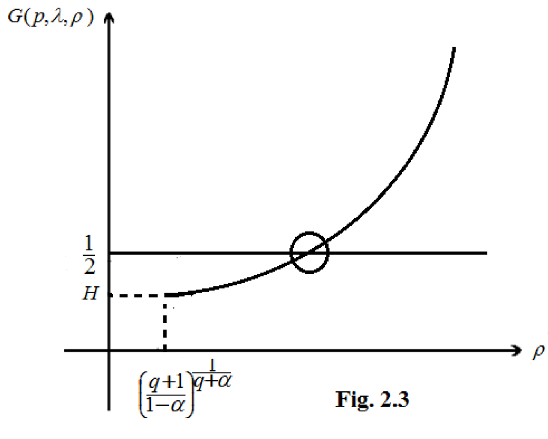

Fig. 2.3

Preuve de l'Assertion (B)

Supposons que $\alpha < \dfrac{q+1}{p}$. Par les lemmes 2.4.3 et 2.4.9, on a

– $\lim\limits_{\rho \to \left(\frac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}} G(p, \lambda, \rho)$

$$= \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha} B\left(\tfrac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)}, 1-\tfrac{1}{p}\right),$$

– $\lim\limits_{\rho \to +\infty} G(p, \lambda, \rho) = +\infty$.

La fonction $\rho \mapsto G(p, \lambda, \rho)$ admet une unique valeur minimale ρ_* dans $\left(\left(\dfrac{q+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}, +\infty\right)$.

Donc,

– Si $G(p, \lambda, \rho_*) > \dfrac{1}{2}$, alors l'équation scalaire dans la variable ρ, $G(p, \lambda, \rho) = \dfrac{1}{2}$ n'admet pas de solution.

– Si $G(p, \lambda, \rho_*) = \dfrac{1}{2}$ ou $\left(\dfrac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \dfrac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha} B\left(\tfrac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)}, 1-\tfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{2}$, alors l'équation scalaire dans la variable ρ, $G(p, \lambda, \rho) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution.

– Si $G(p, \lambda, \rho_*) < \dfrac{1}{2}$ et $\left(\dfrac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \dfrac{\left((q+1)^{p+\alpha-1}(1-\alpha)^{q+1-p}\right)^{\frac{1}{p(q+\alpha)}}}{q+\alpha} B\left(\tfrac{\alpha-1+p}{p(q+\alpha)}, 1-\tfrac{1}{p}\right) \geq \dfrac{1}{2}$, alors l'équation scalaire dans la variable ρ, $G(p, \lambda, \rho) = \dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions.

Maintenant comme

$$G(p, \lambda, \rho_*) = \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{\rho_*^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho_*^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$

alors si on pose par définition

$$\lambda_{**}(p, \alpha, q) := \frac{p-1}{p}\left(2\int_0^1 \left[\frac{\rho_*^{q+1-p}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) - \frac{\rho_*^{1-\alpha-p}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt\right)^p$$

et en utilisant le théorème 2.3.1, on obtient que

i) Si $\lambda < \lambda_*(p, \alpha, q)$, le problème (2.8) n'admet aucune de solution (voir Fig. 2.4),

ii) Si $\lambda = \lambda_*(p, \alpha, q)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans A^+, (voir Fig. 2.5),

(iii) Si $\lambda > \lambda_{**}(p, \alpha, q)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans A^+, (voir Fig. 2.6),

iv) Si $\lambda > \lambda_*(p, \alpha, q)$, le problème (2.8) admet exactement deux solutions dans B^+ et l'autre dans A^+, (voir Fig.2.7),

v) Si $\lambda_*(p, \alpha, q) < \lambda < \lambda_{**}(p, \alpha, q)$, le problème (2.8) admet exactement deux solutions dans A^+.(voir Fig. 2.8).

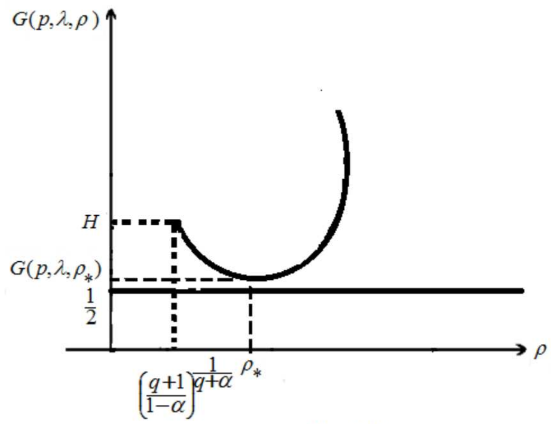

Fig. 2.4

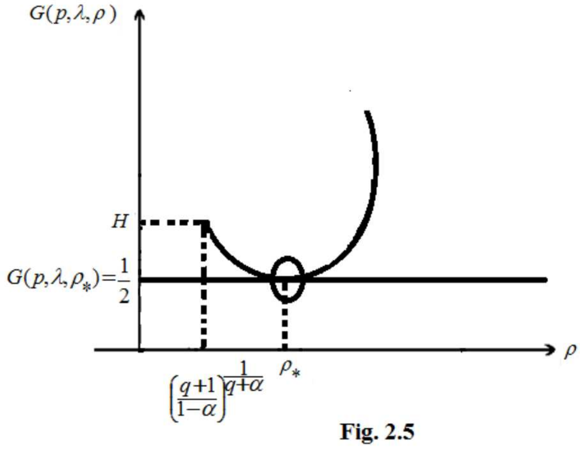

Fig. 2.5

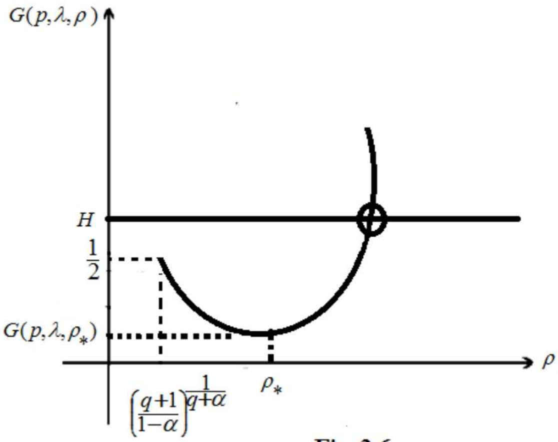

Fig. 2.6

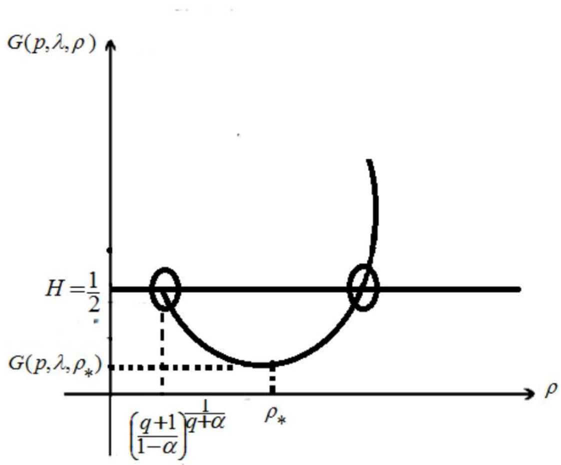

Fig. 2.7

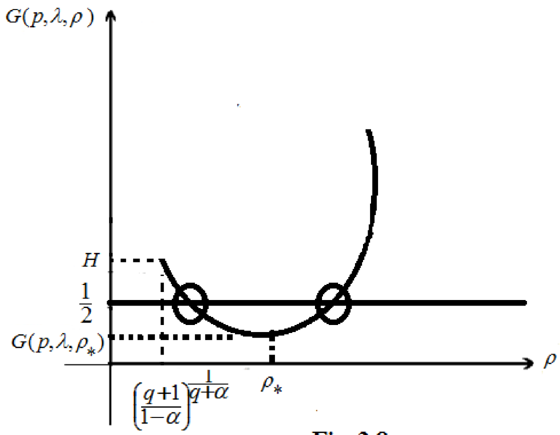

Fig. 2.8

2.6 Conclusion

– On note par $\lambda_1(p)$ la première valeur propre du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda\varphi_p(u) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On a

$$\lambda_1(p) := (p-1)\left(2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}\right)^p = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^p$$

Quand $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < p-1 \leq q$, alors en utilisant l'application temps, on montre le résultat suivant.

Théorème 2.6.1 *Supposons que $p > 1$, $\lambda > 0$ et $-1 < -\alpha < p-1 \leq q$.*

(A) *Si $q = p-1$, alors il existe $\widetilde{\lambda}(p,\alpha) > 0$ tel que*

i) Si $\lambda > \widetilde{\lambda}(p,\alpha)$ ou $\lambda \leq \dfrac{\lambda_1(p)}{p^p}$, le problème (2.8) n'admet aucune solution,
ii) Si $\lambda = \widetilde{\lambda}(p,\alpha)$, le problème(2.8) admet une unique solution dans B^+,
iii) Si $\dfrac{\lambda_1(p)}{p^p} < \lambda < \widetilde{\lambda}(p,\alpha)$, le problème(2.8) admet une unique solution dans A^+.

(B) *Si $q > p-1$, alors il existe $\widetilde{\lambda}(p,\alpha) > 0$ tel que*

i) Si $\lambda > \widetilde{\lambda}(p,\alpha)$, le problème (2.8)n'admet aucune solution,
ii) Si $\lambda = \widetilde{\lambda}(p,\alpha)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans B^+,
iii) Si $\lambda < \widetilde{\lambda}(p,\alpha)$, le problème (2.8) admet une unique solution dans A^+.

– On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' & = & \lambda(u^{-\alpha} - u^q) & \text{dans } (0,1), \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) & = & 0, & \end{cases} \tag{2.17}$$

où $p > 1$, $\lambda > 0$, $-1 < -\alpha < p-1 \leq q$.
En utlilisant l'application temps, c'est facile de montrer le résultat suivant.

Théorème 2.6.2 *Supposons que $p > 1$, $-1 < -\alpha < p-1 \leq q$, alors pour tout $\lambda > 0$, le problème (2.17) admet une unique solution dans A^+.*

Chapitre 3

Le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité p-convexe

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier le nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites quasilinéaire suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) & = & 0, & \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est de classe C^2 et p-convexe.

Les problèmes aux limites avec une non linéarité convexe ou une non linéarité p-convexe ont été étudié par plusieurs auteurs. Ennoçant quelques un.

Dans [35], l'auteur a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) & = & 0. & \end{cases} \tag{3.2}$$

En utilisant la méthode de quadrature, il a prouvé que quand f est convexe, $f\left(0\right) > 0$, alors (3.2) a pour tout $\lambda > 0$, soit zéro, une ou deux solutions positives dans l'intervale $(0,1)$. Pour tout f, l'auteur a déterminé un nombre $\mu_1 \geq 0$ et il a prouvé l'existence d'un nombre $\lambda^* \geq \mu_1$ tels que

(i) Si $\mu_1 = 0$, alors $\lambda^* > 0$ et (3.2) admet deux solutions pour $0 < \lambda < \lambda^*$, une pour $\lambda = \lambda^*$, et l'autre pour $\lambda > \lambda^*$;

(ii) Si $0 < \mu_1 < \lambda^*$, alors (3.2) admet une unique solution pour $0 < \lambda \leq \mu_1$, et $\lambda = \lambda^*$, deux pour $\mu_1 < \lambda < \lambda^*$, et une autre pour $\lambda > \lambda^*$;

(iii) Si $0 < \mu_1 = \lambda^* < +\infty$, alors (3.2) admet une unique solution positive pour $0 < \lambda < \lambda^*$ et une pour $\lambda > \lambda^*$;

iv) Si $\mu_1 = +\infty$, alors $\lambda^* = +\infty$ e (3.2) admet des solutions positives pour tout $\lambda > 0$.

L'auteur a donné aussi une condition nécéssaire et suffisante pour $\lambda^* > \mu_1$.

Dans [30], les auteurs ont étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' & = & f(u) & \text{dans } (-R,R), \\ u & > & 0 & \text{dans } (-R,R), \\ u(-R) = u(R) & = & 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où f est strictement convexe et de classe C^2 dans $[0,+\infty)$ et $R > 0$.

En utilisant l'application temps, les auteurs ont montré que si $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f(u)}{u} = +\infty$, alors on a le résultat suivant

(i) Si $f(u) > 0$ $(u \in [0,+\infty))$, alors il existe $R_{\text{sup}} > 0$ tel que (3.3) admet deux solutions pour $R < R_{\text{sup}}$, une sloution pour $R = R_{\text{sup}}$, et une autre pour $R > R_{\text{sup}}$,

(ii) Si $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$, alors il existe $R_{\text{sup}} > 0$ tel que (3.3) admet une unique solution pour $R < R_{\text{sup}}$ et une pour $R \geq R_{\text{sup}}$;

(iii) Si $f(0) < 0$, alors il existe $R_{\text{sup}} > 0$ tel que (3.3) admet une solution pour $R \leq R_{\text{sup}}$ et une pour $R \geq R_{\text{sup}}$.

Les auteurs ont étudié aussi le cas où $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f(u)}{u} = L$, avec $L > 0$.

Dans [31], les auteurs ont obtenu le nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites quasilinéaire suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' & = & f(u) & \text{dans } (-R,R), \\ u & > & 0 & \text{dans } (-R,R), \\ u(-R) = u(R) & = & 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 2$ et f est une fonction de classe C^1 dans $[0,+\infty)$ dont les racines sont isolées et $p-$convexe.

En utilisant l'aplication temps, les auteurs ont prouvé que si f est strictement $p-$convexe et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f(u)}{\varphi_p(u)} = +\infty$, alors on a les résultats suivants

(i) Si $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(u)}{\varphi_p(u)} = 0$, alors pour tout $R > 0$ le problème (3.4) admet une unique solution,

(ii) Si $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(u)}{\varphi_p(u)} = m \in (0,+\infty)$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que (3.4) admet une unique solution pour $R < R_0$ et une pour $R \geq R_0$;

(iii) Si $f(0) = 0$ et $f'(0) < 0$ ou $f(0) < 0$, alors il existe $R_1 > 0$ tel que (3.4)admet une unique solution pour $R < R_1$ et une pour $R \geq R_1$.

Les auteurs ont donnée aussi une classification des solutions positives quand la non linéarité de f est strictement $p-$convexe, $f(0) > 0$ et admet une racine ou deux racines et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f(u)}{\varphi_p(u)} = +\infty$.

L'une des méthodes utilisée pour étudier les problèmes de type (3.1) est l'application temps. Cette méthode est utilisée pour étudier la multliplicité des solutions pour les problèmes aux limites du types (3.1).

On note que si l'application temps est monotone, alors le problème (3.1) admet au plus une solution positive et si l'application temps est convexe, ou concave, alors le problème (3.1) admet au plus deux solutions positives.

Dans ce travail on prouve que si la non linéarité de f est sur $p-$linéaire en 0 et en $+\infty$ et p-convexe, alors l'application temps est concave. Nos résultats prouve et généralise ceux qui ont été obtenu dans la litérature.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, on énnonce notre résultat principal. Dans la section 3, on énnonce la méthode utilisée pour prouver notre résultat principal. Quelques lemmes préliminaires sont l'objet de la section 4. La section 5 est consacrée à la preuve de notre résultat principal. Finalement dans la section 6, on donne un exemple.

Les résultats de ce travail se trouvent dans [17].

3.2 Le résultat principal

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right)=u\left(1\right) & = & 0, & \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est de classe C^2 et p-convexe satisfaisant les hypothèses suivantes

(H1) $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{\varphi_p\left(u\right)} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{\varphi_p\left(u\right)} = +\infty,$

(H2) $f'(u) > 0$, pour tout $u > 0$,

(H3) $f''(u) > 0$,

(H4) $\lim\limits_{u \to +\infty} ((p-1)f(u) - uf'(u)) < 0,$

(H5) $(p-2)f'(u) - uf''(u) < 0$, pour tout $u > 0$ et $p > 2$.

(H6) $\lim\limits_{u \to +\infty} (pF(u) - uf(u)) < 0,$

Remarque 3.2.1 *On note que si $1 < p \leq 2$, alors d'aprés **(H2)** et **(H3)**, on a*

$$(p-2)f'(u) - uf''(u) < 0, \text{ pour tout } u > 0.$$

Avant d'énnoncer notre résultat principal, on pose par définition

$$S^+ = \left\{ u \in C^1\left([0,1]\right); u > 0 \text{ dans } \left(0,1\right),\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0 \text{ et } u'\left(0\right) > 0 \right\}.$$

Soit A^+ le sous ensemble de S^+ composé par les fonctions u satisfaisant

- u est symétrique par rapport à $\dfrac{1}{2}$.
- La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

Le principal résultat de ce chapitre est

Théorème 3.2.2 *On suppose que $p = 2$ ou $p \geq 4$, $\lambda > 0$ et f satisfait les hypothèses **(H1)-(H6)**, alors il existe $\lambda_* > 0$ tels que*

i) Si $\lambda > \lambda_*$, alors le problème (3.5) n'admet aucune solution,
ii) Si $\lambda = \lambda_*$, alors le problème (3.5) admet une unique solution dans A^+,
iii) Si $\lambda < \lambda_*$, alors le problème (3.5) admet exactement deux solutions dans A^+.

3.3 Lemmes préliminaires

Lemme 3.3.1 *Considérons l'équation en $s \in \mathbb{R}_+$:*

$$E^p - \frac{p}{p-1}\lambda F(s) = 0, \tag{3.6}$$

où $E > 0$, $p > 1$, $\lambda > 0$ et $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, pour tout $s \geq 0$.

Alors pour tout $E > 0$, l'équation (3.6) admet un unique zéro positif $r_+(p, \lambda, E)$. De plus

i) La fonction $E \mapsto r_+(p, \lambda, E)$ est C^1dans $(0, +\infty)$ et

$$\frac{\partial r_+}{\partial E}(p, \lambda, E) = \frac{(p-1)\, E^{p-1}}{\lambda f(s_+(E))} > 0, \ \forall p > 1, \ \forall \lambda > 0 \text{ et } \forall E > 0$$

ii) $\lim\limits_{E \to 0^+} r_+(p, \lambda, E) = 0$.
iii) $\lim\limits_{E \to +\infty} r_+(p, \lambda, E) = +\infty$.

Preuve. La preuve de ce lemme est omise car elle est similaire à celle du Lemme 4.1 dans [5] ou le Lemme 8 dans [3]. ■

Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E > 0$, pour calculer $X_+(p, \lambda, E)$, on a

$$X_+(p, \lambda, E) = \left]0, r_+(p, \lambda, E)\right[.$$

Alors

$$S_+(p, \lambda, E) = r_+(p, \lambda, E).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D &= \{E > 0, \ 0 < S_+(p, \lambda, E) < +\infty \text{et } f(s_+(p, \lambda, E) > 0\} \\ &= \left]0, +\infty\right[. \end{aligned}$$

D'aprés le lemme 3.3.1, on a

$$\lim_{E \to 0^+} S_+(p, \lambda, E) = 0, \tag{3.7}$$

$$\lim_{E \to +\infty} S_+(p, \lambda, E) = +\infty, \tag{3.8}$$

et

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p, \lambda, E) = \frac{(p-1)\, E^{p-1}}{\lambda f(s_+(p, \lambda, E)} > 0, \ \forall p > 1, \ \forall \lambda > 0 \text{ et } \forall E > 0.$$

A présent, on définit, pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E > 0$, l'application temps T_+ par

$$T_+(p,\lambda,E)=\int_0^{S_+(p,\lambda,E)}\left[E^p-\frac{p}{p-1}\lambda F(s)\right]^{-\frac{1}{p}}du. \tag{3.9}$$

Maintenant si on pose le chagement de variables $u=S_+(p,\lambda,E)\cdot t$ dans (3.9), on obtient que

$$T_+(p,\lambda,E)=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1[F(s_+(p,\lambda,E))-F(s_+(p,\lambda,E)t)]^{-\frac{1}{p}}\,dt.$$

On observe que

$$T_+(p,\lambda,E)=G(p,\lambda,S_+(p,\lambda,E)),\ \text{pour tout } p>1,\ \lambda>0 \text{ et } E>0,$$

où

$$G(p,\lambda,\rho)=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1[F(\rho)-F(\rho t)]^{-\frac{1}{p}}\,dt, \tag{3.10}$$

pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $\rho>0$.

Puisque la fonction $E\mapsto S_+(p,\lambda,E)$ est un C^1 difféomorphisme croissant de $(0,+\infty)$ vers elle même cela montre que si on pose, pour tout $p>1$ et $\lambda>0$

$$J_1(p,\lambda):=\left\{E>0:T_+(p,\lambda,E)=\frac{1}{2}\right\},$$

et

$$J_2(p,\lambda):=\left\{\rho>0:G(p,\lambda,\rho)=\frac{1}{2}\right\},$$

alors

$$Card\,(J_1(p,\lambda))=Card\,(J_2(p,\lambda)),\text{pour tout } p>1 \text{ et } \lambda>0$$

Alors, dés maintenat, on se concentre sur le nombre de solutions de l'équation $G(p,\lambda,\rho)=\dfrac{1}{2}$ dont la variable $\rho>0$, au lieu de l'équation $T_+(p,\lambda,E)=\dfrac{1}{2}$ dont la variable $E>0$.

Proposition 3.3.2 *Si u est une solution positive du problème (3.5), alors $u\in A^+$.*

Preuve. La preuve est omise car elle est similaire à la Prposition 4.2 dans [15]. ■

Lemme 3.3.3 *Pour tout $p>1$ et $\lambda>0$, on a*

i) $\lim\limits_{\rho\to0^+}G(p,\lambda,\rho)=0.$
ii) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}G(p,\lambda,\rho)=0.$

Preuve. Soit $p>1$ et $\lambda>0$ fixés.
i) D'aprés l'hypothèse (**H1**), on a pour tout $A_1>0$, il existe $A_2>0$ tel que

$$f(u)>A_1\varphi_p(u),\ \text{pour tout } 0<u<A_1$$

Soit $t \in (0,1)$ et $\rho > 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{F(\rho) - F(\rho t)}{\rho^p} & = & \int_{\rho t}^{\rho} \dfrac{f(u)}{\rho^p} du \\ & = & \int_t^1 \dfrac{f(\rho\tau)}{\varphi_p(\rho)} d\tau \\ & = & \int_t^1 \dfrac{f(\rho\tau)}{\varphi_p(\rho\tau)} \tau^{p-1} d\tau \\ & > & A_1 \int_t^1 \tau^{p-1} d\tau, \text{ pour tout } 0 < \rho < A_2 \\ & = & \dfrac{A_1}{p}(1 - t^p). \end{array}$$

Par suite pour tout $0 < \rho < A_2$, on a

$$\frac{F(\rho) - F(\rho t)}{\rho^p} < \frac{A_1}{p}(1 - t^p). \tag{3.11}$$

D'aprés (3.10) et (3.11), on a

$$\begin{array}{rcl} G(p, \lambda, \rho) & \leq & \left(\dfrac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \left[\dfrac{A_1}{p}(1 - t^p)\right]^{-\frac{1}{p}} dt, \text{ pour tout } 0 < \rho < A_2 \\ & = & A_1^{-\frac{1}{p}} \dfrac{(p-1)^{\frac{1}{p}}}{p} B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right), \text{ pour tout } 0 < \rho < A_2, \end{array}$$

où $B(.,.)$ est une fonction Beta d'Euler définie par

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt, \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } y > 0$$

Alors pour tout $A_1 > 0$, il existe $A_2 > 0$ tel que

$$G(p, \lambda, \rho) \leq A_1^{-\frac{1}{p}} \frac{(p-1)^{\frac{1}{p}}}{p} B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right), \text{pour tout } 0 < \rho < A_2$$

Ce qui signifie que

$$\lim_{\rho \to 0^+} G(p, \lambda, \rho) = 0.$$

ii) La preuve est omise car elle est similaire à celle de i).

■

Lemme 3.3.4 *Pour tout $p > 1$ et $\lambda > 0$, on a*

i) Il existe $\rho_1 > 0$ tel que la fonction $\rho \mapsto G(p, \lambda, \rho)$ est strictement croissante sur $(0, \rho_1)$.
ii) Il existe $\rho_2 > \rho_1$ tel que $\rho \mapsto G(p, \lambda, \rho)$ est strictement décroissante sur $(\rho_2, +\infty)$.

Preuve. Soit $p > 1$ et $\lambda > 0$ fixés.
Dérivons (3.10) par rapport à ρ, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) = \frac{1}{p\rho} \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^{\rho} \frac{H(\rho) - H(u)}{[F(\rho) - F(u)]^{\frac{p+1}{p}}} dt, \tag{3.12}$$

où

$$H(u) = pF(u) - uf(u).$$

On a

$$H'(u) = (p-1) f(u) - uf'(u),$$

et

$$H''(u) = (p-2) f'(u) - uf''(u).$$

Comme f satisfait les hypothèses (**H3**), (**H4**), (**H5)** et (**H6**) et d'aprés la remarque 3.2.1, il résulte qu'il existe deux nombres réels ρ_1 et ρ_2 avec $0 < \rho_1 < \rho_2$ tels que

$$H'(u) > 0 \text{ dans} (0, \rho_1), \; H'(\rho_1) = 0 \text{ et } H'(u) < 0 \text{ dans } (\rho_1, +\infty),$$

et

$$H(u) > 0 \text{ dans } (0, \rho_2), \; H(\rho_2) = 0 \text{ et } H(u) < 0 \text{ dans } (\rho_2, +\infty).$$

Alors, on a

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) > 0, \text{pour tout } p > 1, \; \lambda > 0 \text{ et } \rho \in (\rho_1, +\infty),$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho) < 0, \text{pour tout } p > 1, \; \lambda > 0 \text{ et } \rho \in (\rho_2, +\infty).$$

Ce qui signifie que pour tout $p > 1$ et $\lambda > 0$, la fonction $\rho \mapsto G(p, \lambda, \rho)$ est strictement croissante dans $(0, \rho_1)$ et strictement décroissante dans $(\rho_2, +\infty)$. ■

Maintenant, on va prouver que l'application temps $\rho \mapsto G(p, \lambda, \rho)$ admet un unique point critique dans (ρ_1, ρ_2).

Pour cela, on considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda f(u), \\ u\left(\frac{1}{2}\right) = \rho, \; u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\rho > 0$.

On note que chaque solution positive du problème (3.5) appartient à A^+, alors on peut définir l'application temps $G(p, \lambda, \rho)$ par l'équation implicite suivante

$$u(G(\rho), \lambda, \rho) = 0 \text{ et } u(x, \lambda, \rho) > 0, \text{ pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, G(\rho)\right)$$

où $x \mapsto u(x, \lambda, \rho)$ est une solution positive du problème de Cauchy (3.13) et $G(\rho) := G(p, \lambda, \rho)$.

Maintenant si on pose par définition $v(x) := \frac{\partial u}{\partial \rho}(x, \lambda, \rho)$, $w(x) := \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(x, \lambda, \rho)$ et puisque $(\varphi_p(u'))' = (p-1)|u'|^{p-2} u''$ pour tout $p \geq 2$, alors si $p = 2$ ou $p \geq 3$, on a

$$\begin{cases} -(p-1)(|u'|^{p-2} v')' &= \lambda f'(u) v, \\ v\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \; v'(\frac{1}{2}) &= 0, \end{cases}$$

et si $p = 2$ ou $p \geq 4$, on a

$$\begin{cases} (p-1)(|u'|^{p-2} w')' + (p-1)(p-2)(|u'|^{p-4} u' v'^2)' + \lambda f''(u) v^2 + \lambda f'(u) w &= 0, \\ w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \; w'(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

On a les résultats suivants.

Proposition 3.3.5 *On suppose que* $p = 2$ *ou* $p \geq 3$ *et* f *satisfait les hypothèses* ***(H1)-(H6)****, alors* v *a au plus une racine dans* $[0, G(\rho)]$ *.*

Preuve. La preuve est omise car elle est similaire à la Proposition 11 dans [31]. ■

Proposition 3.3.6 *On suppose que* $p = 2$ *ou* $p \geq 4$*,* f *satisfait les hypothèses* ***(H1)-(H6)*** *et que* $v\left(G\left(\rho\right)\right) = 0$*, alors* $w\left(G\left(\rho\right)\right) < 0$*.*

Preuve. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} (p-1)(\left|u'\right|^{p-2} w')' \\ +(p-1)(p-2)(\left|u'\right|^{p-4} u'v'^2 + \lambda f''(u)v^2 + \lambda f'(u)w = 0, \\ w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \ w'(\dfrac{1}{2}) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Multiplions l'équation dans (3.14) par u' et on intègre le résultat entre $(\dfrac{1}{2}, x)$, on obtient

$$\begin{aligned} J: &= (p-1)\int_{\frac{1}{2}}^{x} (\left|u'\right|^{p-2} w')'u'(t)dx + (p-1)(p-2)\int_{\frac{1}{2}}^{x} (\left|u'\right|^{p-4} u'v'^2)'u'(t)dt \\ &\quad +\lambda \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(u)v^2u'(t) + \lambda \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(u)u'(t)wdt \\ &= (p-1)I_1 + (p-1)(p-2)I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

où

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{x} (\left|u'\right|^{p-2} w')'u'(t)dt,$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{x} (\left|u'\right|^{p-4} u'(t)v'^2u'(t)dt,$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(u)v^2(t)u'(t)dt,$$

et

$$I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(u)u'(t)w(t)dt.$$

Un calcul simple nous montre que

$$\begin{aligned} I_1 &= \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)w'(x) - \frac{1}{p-1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} (\left|u'\right|^{p-2} u'(t))'w'(t)dt \\ &= \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)w'(x) - \frac{\lambda}{p-1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(u(t))w'(t)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \left|u'(x)\right|^{p-2} v'^2(x) - \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left|u'(t)\right|^{p-4} u'(t)u''(t)v'^2(t)dt \\ &= \left|u'(x)\right|^{p-2} v'^2(x) - \frac{1}{p-2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} (\left|u'(t)\right|^{p-2})'v'^2(t)dt, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \lambda v^2(x)f'(u(x)) - \lambda f'(\rho) - 2\lambda \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(u(t))v(t)v'(t)dt \\
&= \lambda v^2(x)f'(u(x)) - \lambda f'(\rho) + 2(p-1)\int_{\frac{1}{2}}^{x} (|u'(t)|^{p-2} v'(t))'v'(t)dt \\
&= \lambda v^2(x)f'(u(x)) - \lambda f'(\rho) + 2(p-1)\int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[|u'(t)|^{p-2})v'^2(t) + |u'(t)|^{p-2} v''(t)v'(t)\right] dt,
\end{aligned}
$$

et

$$
I_4 = \lambda f(u(x))w(x) - \lambda \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(u(t))w'(t)dt.
$$

Alors, on a

$$
\begin{aligned}
J &= (p-1)|u'(x)|^{p-2} u'(x)w'(x) + (p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-2} v'^2(x) + \lambda v^2(x)f'(u(x)) - \lambda f'(\rho) \\
&\quad + \lambda f(u(x))w(x) + (p-1)|u'(x)|^{p-2} v'^2(x).
\end{aligned}
$$

Comme $J = 0$ et en utilisant l'égalité précédente, on obtient

$$
\tilde{E}(x) = \bar{E}(x), \tag{3.15}
$$

où $\tilde{E}(x)$ et $\bar{E}(x)$ sont définis dans $\left[\frac{1}{2}, G(\rho)\right]$ par

$$
\tilde{E}(x) = (p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-2} v'(x) + \lambda f'(u(x))v^2 + (p-1)|u'(x)|^{p-2} v'^2(x), \tag{3.16}
$$

et

$$
\bar{E}(x) = (p-1)|u'(x)|^{p-2} u'(x)w'(x) - \lambda f'(\rho) + \lambda f(u(x))w(x).
$$

Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, G(\rho)\right]$ fixé, on a

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}'(x) &= (p-1)(p-2)^2|u'(x)|^{p-4} u'(x)u''(x)v'(x) + (p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-2} v''(x) \\
&\quad + \lambda f''(u(x))u'(x)v^2(x) + 2\lambda f'(u(x))v(x)v'(x) + (p-1)(p-2)|u''(x)|^{p-4} u'(x)u''(x)v'^2(x) \\
&\quad + 2(p-1)|u'(x)|^{p-2} v'(x)v''(x) \\
&= (p-1)(p-2)^2|u'(x)|^{p-4} u'(x)u''(x)v'(x) + (p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-2} v''(x) \\
&\quad + \lambda f''(u(x))u'(x)v^2(x) - (p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-4} u'(x)u'(x)v'^2(x) \\
&= -(p-2)\lambda f'(u(x))v(x) + \lambda f''(u(x))u'(x)v^2(x) - (p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-4} u'(x)u''(x)v'^2(x)
\end{aligned}
$$

Comme $p \geq 2$, $u'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, G(\rho)\right]$ et en utilisant les hypothèses (**H2**) et (**H3**) et d'aprés la proposition 3.3.5 , on obtient que

$$
\tilde{E}'(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [\frac{1}{2}, G(\rho)],
$$

ce qui implique que

$$
\tilde{E}'(x) \leq \tilde{E}'(\frac{1}{2}), \text{ pour tout } x \in [\frac{1}{2}, G(\rho)].
$$

Ce qui signifie que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, G(\rho)]$, on a

$$
(p-1)(p-2)|u'(x)|^{p-2} v'(x) + \lambda f'(u(x))v^2 + (p-1)|u'(x)|^{p-2} v'^2(x) \leq \lambda f'(\rho)
$$

En utilisant cette inégalité, (3.14), (3.15) et (3.16), on obtient

$$(p-1)\left|u'(x)\right|^{p-2}u'(x)w'(x)+\lambda f(u(x))w(x)\geq 0,\ \text{ pour tout } x\in[\frac{1}{2},G(\rho)].$$

Divisant cette dernière inégalité par $\left|u'(x))\right|^{p-2}u'(x)$ et comme $u'<0$ dans $(\frac{1}{2},G(\rho)]$, on a

$$(p-1)w'(x)+\frac{\lambda f(u(x))}{\left|u'(x))\right|^{p-2}u'(x)}w(x)\leq 0, \text{ pour tout } x\in\left(\frac{1}{2},G(\rho)\right] \tag{3.17}$$

Maintenant en utilisant l'égalité de l'énergie suivante

$$\frac{p-1}{p}\left[\left|u'(x)\right|^{p}-\left|u'(\frac{1}{2})\right|^{p}\right]=F(\rho)-F(u(x)), \text{pour tout } x\in[\frac{1}{2},G(\rho)],$$

on obient que

$$u'(x)=-\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[F(\rho)-F(u(x))\right]^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } x\in[\frac{1}{2},G(\rho)]. \tag{3.18}$$

D'aprés (3.17) et (3.18), on obtient

$$(p-1)w'(x)-\frac{\lambda f(u(x))}{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[F(\rho)-F(u(x))\right]^{\frac{p-1}{p}}}w(x)\leq 0, \text{ pour tout } x\in\left(\frac{1}{2},G(\rho)\right].$$

ce qui entraîne que,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)}.w(x)\right)\leq 0,\ \text{ pour tout } x\in\left(\frac{1}{2},G(\rho)\right], \tag{3.19}$$

où

$$A(x)=\frac{1}{p-1}\int_{\epsilon}^{x}\frac{f(u)}{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[F(\rho)-F(u)\right]^{\frac{p-1}{p}}}du, \text{ pour tout } \ (\epsilon,x)\subset\left(\frac{1}{2},G(\rho)\right].$$

Maintenant, on va prouver que $w(G(\rho))<0$.
D'aprés (3.14), on a

$$(p-1)(\left|u'\right|^{p-2}w')'(x)+(p-1)(p-2)(\left|u'\right|^{p-4}u'v'^{2})'(x)+\lambda f''(u(x))v^{2}(x)+\lambda f'(u(x))w(x)=0$$

pour tout $x\in\left(\frac{1}{2},G(\rho)\right]$.

C'est- à dire

$$\begin{aligned}(p-1)(\left|u'\right|^{p-2}w')'(x) &= -(p-1)(p-2)\left[(p-3)\left|u'(x)\right|^{p-4}u''(x)v'^{2}(x)+2\left|u'(x)\right|^{p-4}u'(x)v'(x)v''((x))\right]\\ &\quad -\lambda f''(u(x))v^{2}(x)-\lambda f'(u(x))w(x),\ \text{ pour tout } x\in\left(\frac{1}{2},G(\rho)\right)\end{aligned}$$

Comme $p=2$ ou $p\geq 4$, $u'\left(\frac{1}{2}\right)=w\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et $v\left(\frac{1}{2}\right)=1$, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{1}{2}^{+}}(p-1)(\left|u'\right|^{p-2}w')'(x) &= -\lambda f''(\rho)v^{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\lambda f'(\rho)w\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= -\lambda f''(\rho)<0.\end{aligned}$$

Ce qui implique qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(p-1)(|u'|^{p-2}\, w')'\,(x) < 0, \text{ pour tout } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right).$$

Alors, on a

$$|u'\,(x)|^{p-2}\, w'\,(x) < \left|u'\left(\frac{1}{2}\right)\right|^{p-2} w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ pour tout } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right).$$

Ce qui implique que

$$w'(x) < 0, \text{ pour tout } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right).$$

Comme $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on obtient

$$w(x) < 0, \text{ pour tout } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right).$$

Maintenat, si on choisit $\epsilon \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right)$, on obtient que

$$w(\epsilon) < 0. \tag{3.20}$$

D'aprés (3.19) et (3.20), il résulte que

$$e^{-A(x)} w(x) \leq w(\epsilon) < 0, \text{ pour tout } x \in \left(\frac{1}{2}, G\,(\rho)\right].$$

Si on pose $x = G(\rho)$, on obtient que $w(G\,(\rho)) < 0$. ■

Remarque 3.3.7 *La preuve de cette proposition est une généralisation du lemme 2.4 dans [23].*

Théorème 3.3.8 *S'il existe un $\rho_* \in (0, +\infty)$ tel que $G'(\rho_*) = 0$, alors $G''(\rho_*) < 0$.*

Preuve. Comme l'application temps G est définie par l'équation implicite suivante

$$u(G(\rho), \lambda, \rho) = 0 \text{ et } u(x, \lambda, \rho) > 0, \text{ pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, G\,(\rho)\right),$$

alors en dérivant l'équation $u(G(\rho), \lambda, \rho) = 0$ par rapport à ρ, on obtient

$$\frac{\partial u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial x} G'(\rho) + \frac{\partial u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial \rho} = 0.$$

En dérivant cette dernière équation, on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial x^2} G'(\rho) + \rho \frac{\partial^2 u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial \rho \partial x}\right) G'(\rho)$$
$$+ \frac{\partial u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial x} G''(\rho) + \frac{\partial^2 u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial x \partial \rho} G'(\rho) + \frac{\partial^2 u(G(\rho), \lambda, \rho)}{\partial \rho^2} = 0$$

Maintenant s'il existe $\rho_* \in (0, +\infty)$ tel que $G'(\rho_*) = 0$, on a

$$\frac{\partial u(G(\rho_*), \lambda, \rho_*)}{\partial x} G''(\rho_*) + \frac{\partial^2 u(G(\rho_*), \lambda, \rho_*)}{\partial \rho_*^2} = 0.$$

Comme $\dfrac{\partial u(G(\rho_*), \lambda, \rho_*)}{\partial x} < 0$ et d'aprés la proposition 3.3.6, on obtient

$$w(G(\rho_*)) = \frac{\partial^2 u(G(\rho_*), \lambda, \rho_*)}{\partial \rho_*^2} < 0,$$

ce qui nous montre que

$$G''(\rho_*) < 0.$$

■

3.4 Preuve du théorème principal

Preuve du théorème 3.2.2

Supposons que $p = 2$ ou $p \geq 4$ et $\lambda > 0$.

D'aprés les lemmes la fonction $\rho \to G(p, \lambda, \rho)$ satisfait les propriétés suivantes

- $\lim\limits_{\rho \to 0^+} G(p, \lambda, \rho) = \lim\limits_{\rho \to +\infty} G(p, \lambda, \rho) = 0,$

  et

- $G(p, \lambda, .)$ admet un unique point critique ρ_* lequel il atteint sa valeur maximale $G(p, \lambda, \rho_*)$.

Alors, d'aprés le théorème 2.3.1, on a

i) Si $G(p, \lambda, \rho_*) < \dfrac{1}{2}$, le problème (3.5) n'admet aucune solution,

ii) Si $G(p, \lambda, \rho_*) = \dfrac{1}{2}$, le problème (3.5) admet une unique solution dans A^+,

iii) Si $G(p, \lambda, \rho_*) > \dfrac{1}{2}$, le problème (3.5) admet exactement deux solutions dans A^+.

Si on pose $\lambda_* = \left(\dfrac{p-1}{p}\right) \left[2 \int_0^1 [F(\rho_*) - F(\rho_* t)]^{-\frac{1}{p}} \, dt\right]^p$, alors d'aprés le théorème 2.3.1, il résulte que

i) Si $\lambda < \lambda_*$, le problème (3.5) n'admet aucune solution, (voir Fig. 3.1),

ii) Si $\lambda = \lambda_*$, le problème (3.5) admet une unique solution dans A^+, (voir Fig. 3.2),

iii) Si $\lambda > \lambda_*$, le problème (3.5) admet exactement deux solutions dans A^+. (voir Fig. 3.3).

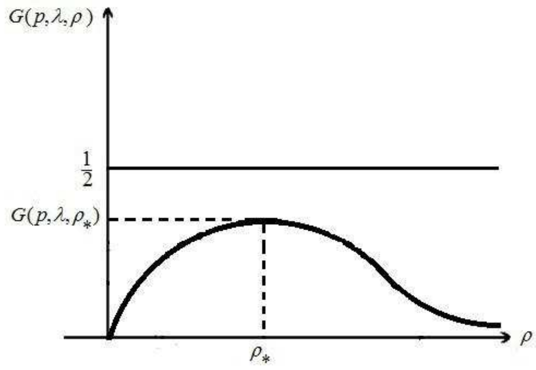

Fig. 3.1

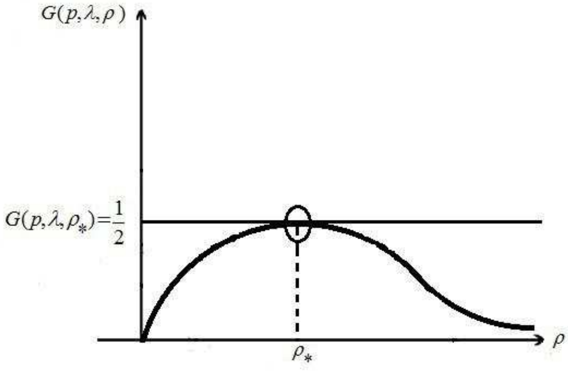

Fig. 3.2

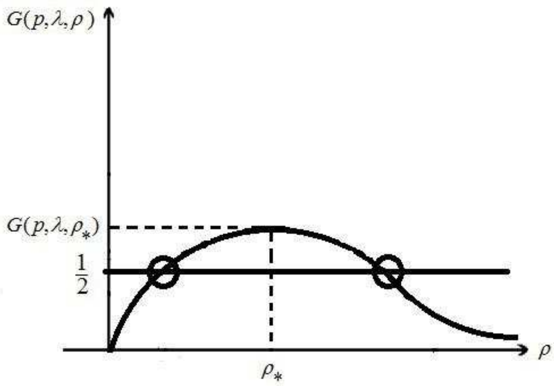

Fig. 3.3

3.5 Exemple

Dans cette section, on applique le résultat précédent au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & u^\alpha + c & \text{dans } (0,1), \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) & = & 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p = 2$ ou $p \geq 4$, $\alpha > p-1$ et $c > 0$.

Il est facile de vérifier que

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{\varphi_p(u)} = \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{\varphi_p(u)} = +\infty,$$

$$f'(u) = \alpha u^{\alpha-1} > 0, \text{ pour tout } u > 0,$$

$$f''(u) = \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2} > 0, \text{ pour tout } u > 0,$$

$$(p-1)f(u) - uf'(u) = (p-1-\alpha)u^\alpha + (p-1)c, \text{ pour tout } u > 0.$$

Alors

$$\lim_{u \to +\infty} (p-1)f(u) - uf'(u) = -\infty.$$

$$(p-2)f'(u) - uf''(u) = \alpha(p-\alpha-1)u^{\alpha+1}, \text{ for all } u > 0,$$

on a

$$(p-2)f'(u) - uf''(u) < 0, \text{ pour tout } u > 0,$$

et

$$pF(u) - uf(u) = \left(\frac{p-\alpha-1}{\alpha+1}\right) u^{\alpha+1} + (p-1)cu, \text{ pour tout } u > 0.$$

Alors

$$\lim_{u \to +\infty} pF(u) - uf(u) = -\infty.$$

Alors par le théorème 2.3.1, cela montre qu'il existe $\lambda_* > 0$ tels que

i) Si $\lambda > \lambda_*$, alors le problème (3.21) n'admet aucune solution,

ii) Si $\lambda = \lambda_*$, alors le problème (3.21) admet une unique solution dans A^+,

iii) Si $\lambda < \lambda_*$, alors le problème (3.21) admet exactement deux solutions dans A^+.

Chapitre 4

Le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier le nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u^\alpha\right)\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ \quad u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right)=u\left(1\right)=0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $p>1$, $\lambda>0$ et $f(u)=u^{p-1}(1-u^{p-1})(u^{p-1}-a)$ avec $a>0$.

Pour $p=2$, ce problème a été étudié dans [9]. Dans ce travail on montre que la structure des solutions positives pour $1<p\leq 2$ est une généralisation de celle obtenue dans [9], mais par contre pour $p>2$ elle est différente.

Ce chapitre est divisé en quatre parties, dans la première partie on énnonce le résultat principal, la deuxième partie est consacrée à l'application temps. Dans la troisième partie on donne quelques lemmes préliminaires et en fin dans la dernière partie on démontre le résultat principal.

Les résultats de ce chapitre sont en cour de préparation.

4.2 Résultat principal

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u^\alpha\right)\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ \quad u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right)=u\left(1\right)=0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $p>1$, $\lambda>0$ et $f(u)=u^{p-1}(1-u^{p-1})(u^{p-1}-a)$ avec $a>0$.

Pour énnoncer notre résultat, on définit

$$S^{+}=\left\{u\in C^{1}\left([0,1]\right);u>0 \text{ dans } (0,1)\,,\ u\left(0\right)=u\left(1\right)=0 \text{ et } u'\left(0\right)>0\right\}.$$

Soit A^+ le sous ensemble de S^+ composé par les fonctions u satisfaisant

- u est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.
- La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

Soit B^+ le sous ensemble $C^1([0,1])$ composé par les fonctions u satisfaisant

- $u>0$ dans $(0,1)$ et $u(0)=u(1)=u'(0)=0$.
- u est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.
- La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

Le résultat principal de ce travail est

Théorème 4.2.1 *Supposons que* $p>1$, $0<a<min\left(\frac{p+\alpha}{3p+\alpha-2},\frac{(\alpha+1)p+\alpha+2}{3(\alpha+1)p+4+\alpha}\right)$ *et* $\alpha>0$.

(A) Si $1<p\leq 2$, alors il existe $\lambda_*(p,\alpha,a)>0$ et $\lambda_{**}(p,\alpha,a)$ tels que

i) Si $\lambda>\lambda_*$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans A^+,
ii) Si $\lambda=\lambda_*$, alors le problème (4.2) admet deux solutons, une dans A^+ et l'autre dans B^+,
iii) Si $\lambda<\lambda_{**}$, alors le problème (4.2) n'admet aucune solution,
iv) Si $\lambda_{**}<\lambda<\lambda_*$, alors le problème (4.2) admet exactement deux solutions dans A^+,
v) Si $\lambda=\lambda_{**}$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans B^+.

(B) Si $p>2$, alors il existe $\lambda_{***}(a,p,\alpha)$,$\tilde{\lambda_1}(a,p,\alpha)$,$\tilde{\lambda_2}(a,p,\alpha)$ et $\tilde{\alpha}$ tels que

i) Si $\lambda<\lambda_{**}$, alors le problème (4.2) n'admet aucune solution,
ii) Si $\lambda=\lambda_{**}$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans A^+,
iii) Si $\lambda>\lambda_{**}$, et $\alpha>\tilde{\alpha}$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans A^+,

si $\lambda>max(\tilde{\lambda_1},\tilde{\lambda_2},\lambda_{**})$, alors le problème (4.2) admet exactement deux solutions dans A^+.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u^\alpha\right)\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

où $\varphi_p(y)=|y|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $p>1$, $\lambda>0$ et$f(u)=u^{p-1}(1-u^{p-1})(u^{p-1}-a)$ avec $0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$,

Si on pose $v=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,on obtient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(v'))' & = & \lambda h(v) & \text{dans } (0,1)\,, \\ v & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ v(0)=v(1)=0, \end{cases}$$

où

$$h(v)=(\alpha+1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}}v^{\frac{p-1}{\alpha+1}}\left[(\alpha+1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}}v^{\frac{p-1}{\alpha+1}}(1+a-(\alpha+1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}}v^{\frac{p-1}{\alpha+1}})-a\right].$$

4.3 Les lemmes préliminaires

Lemme 4.3.1 *Considérons l'équation en* $s \in \mathbb{R}_+$:

$$E^p - \frac{p}{p-1}\lambda H(s) = 0, \tag{4.3}$$

où $E \geq 0$, $p > 1$, $0 < a < \dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$, $\lambda > 0$ *et* $H(s) = \int_0^s h(t)dt$, *pour tout* $s \geq 0$.

Alors il existe $E_* = \left(\dfrac{\lambda p}{p-1} H\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$ *tel que pour tout* $E \in (0, E_*)$ *l'équation (4.3) admet un unique zéro positif* $r_+(p, \lambda, a, E)$. *De plus*

i) La fonction $E \mapsto r_+(p, \lambda, a, E)$ est C^1 dans $(0, +\infty)$ et

$$\frac{\partial r_+}{\partial E}(p, \lambda, a, E) = \frac{(p-1)\, E^{p-1}}{\lambda h(s_+(E))} > 0, \;\; \forall p > 1, \forall \lambda > 0, \;\; \forall a > 0 \text{ et } \;\; \forall E \geq 0.$$

ii) $\lim\limits_{E \to 0^+} r_+(p, \lambda, a, E) = \dfrac{(\tilde{w}_1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}}}{\alpha+1}$,

où

$$\tilde{w}_1 = \frac{3p+\alpha-2}{2}\left[\frac{1+a}{2p+\alpha-1} - \sqrt{\frac{(1+a)^2}{(2p+\alpha-1)^2} - \frac{4a}{(3p+\alpha-2)(p+\alpha)}}\right]$$

iii) $\lim\limits_{E \to E_*} r_+(p, \lambda, a, E) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

Preuve. La preuve de ce lemme est omise car elle est similaire à celle du lemme 4.1 dans [5] ou le Lemme 8 dans [3]. ∎

Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$, $0 < a < \dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$ et $E \geq 0$, on a

$$X_+(p, \lambda, a, E) =]0, r_+(p, \lambda, a, E)[\,.$$

Alors

$$s_+(p, \lambda, a, E) = r_+(p, \lambda, a, E)\,.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} D &= \{E \geq 0,\; 0 < s_+(p, \lambda, a, E) < +\infty \text{ et } h(s_+(p, \lambda, a, E) > 0\} \\ &= [0, E_*[\,. \end{aligned}$$

Par le lemme 4.3.1, on a

$$\lim_{E \to 0^+} s_+(p, \lambda, a, E) = \frac{(\tilde{w}_1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}}}{\alpha+1}, \tag{4.4}$$

$$\lim_{E \to +E_*} s_+(p, \lambda, a, E) = \frac{1}{\alpha+1}, \tag{4.5}$$

et

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p, \lambda, a, E) = \frac{(p-1)\, E^{p-1}}{\lambda f(s_+(p, \lambda, a, E)} > 0, \;\; \forall p > 1, \;\; \forall \lambda > 0, \forall a > 0, \;\; \text{et } \forall E \geq 0.$$

A présent, on définit, pour tout $p>1$, $\lambda>0$, $0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$ et $E\geq 0$, l'application temps T_+ par :

$$T_+(p,\lambda,a,E)=\int_0^{s_+(p,\lambda,a,E)}\left[E^p-\frac{p}{p-1}\lambda H(s)\right]^{-\frac{1}{p}}du. \tag{4.6}$$

Maintenant si on pose le changement de variables $u=s_+(p,\lambda,a,E)\,t$ dans (4.6), on obtient que

$$T_+(p,\lambda,a,E)=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1[H(s_+(p,\lambda,a,E))-H(s_+(p,\lambda,a,E)t)]^{-\frac{1}{p}}dt.$$

On observe que

$$T_+(p,\lambda,a,E)=\tilde{T}(p,\lambda,s_+(p,\lambda,a,E)),\ \text{pour tout } p>1,\ \lambda>0 \text{ et } E\geq 0,$$

où

$$\tilde{T}(p,\lambda,a,\rho)=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1[H(\rho)-H(\rho t)]^{-\frac{1}{p}}dt, \tag{4.7}$$

pour tout $p>1$, $\lambda>0$, $0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$ et $\rho>0$.

Comme la fonction $E\mapsto s_+(p,\lambda,a,E)$ est un C^1-difféomorphisme de $(0,+\infty)$ vers lui même, cela nous montre que, si on pose, pour tout $p>1$ et $\lambda>0$,

$$J_1(p,\lambda,a):=\left\{E\geq 0:T_+(p,\lambda,a,E)=\frac{1}{2}\right\},$$

et

$$J_2(p,\lambda,a):=\left\{\rho>0:\tilde{T}(p,\lambda,a,\rho)=\frac{1}{2}\right\},$$

alors

$$Card\,(J_1(p,\lambda,a))=Card\,(J_2(p,\lambda,a)),\ \text{pour tout } p>1, a>0 \text{ et } \lambda>0.$$

Alors, dés maintenant, on se concentre sur le nombre de solutions de l'équation $\tilde{T}(p,\lambda,a,\rho)=\dfrac{1}{2}$ dont la variable $\rho>0$, au lieu de l'équation $T_+(p,\lambda,a,E)=\dfrac{1}{2}$ dont la variable $E\geq 0$.

Proposition 4.3.2 *Si u est une solution positive du problème (4.2), alors $u\in A^+\cup B^+$.*

Preuve. La preuve a été omise car elle est similaire à celle de la Proposition 4.2 dans [15]. ■

Lemme 4.3.3 *Pour tout $p>1,\alpha>0,0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$ et $\lambda>0$, on a*

i) $\lim\limits_{\rho\to\rho_*}\tilde{T}(p,\lambda,a,\rho)=M(a,p,\alpha)$,

où

$$M(a,p,\alpha)=\left(\lambda\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}\frac{\tilde{w}_1^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}{\alpha+1}\tilde{w}_1^{\frac{-(p+\alpha)}{p}}\int_0^1\left[\begin{array}{l}\dfrac{-\tilde{w}_1^2}{3p+\alpha-2}\left(1-t^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1}+1}\right)\\ +\tilde{w}_1\left(\dfrac{1+a}{2p+\alpha-1}\right)(1-t^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1})-\\ \left(\dfrac{a}{p+\alpha}\right)(1-t^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1})\end{array}\right]^{-\frac{1}{p}}dt,$$

et $\rho_* = \dfrac{\tilde{w}_1^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}{\alpha+1}$.

ii) $\lim\limits_{\rho\to+\frac{1}{\alpha+1}} \tilde{T}(p,\lambda,a,\rho) = \begin{cases} M_1\left(\dfrac{1}{\alpha+1},p\right) & si \;\; p>2, \\ +\infty & sinon, \end{cases}$

où

$$M_1\left(\frac{1}{\alpha+1},p\right) = \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^{\frac{1}{\alpha+1}} \left[H\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) - H(u)\right] du.$$

Preuve. Soit $p>1$, $0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$, $\alpha>0$ et $\lambda>0$ fixés.

i) $\lim\limits_{\rho\to\rho_*} \tilde{T}(p,\lambda,a,\rho) = \lim\limits_{\rho\to\rho_*} \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \rho\left[H(\rho)-H(\rho t)\right]^{\frac{-1}{p}} dt.$

Si on pose $w = (\alpha+1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}} \rho^{\frac{p-1}{\alpha+1}}$, on obtient

$$H(w)-H(wt) = w^{p+\alpha}\left[\begin{array}{c} \dfrac{-w^2}{3p+\alpha-2}\left(1-t^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1}+1}\right) + w\left(\dfrac{1+a}{2p+\alpha-1}\right)(1-t^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1}) - \\ \left(\dfrac{a}{p+\alpha}\right)(1-t^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1}) \end{array}\right],$$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to\rho_*} \tilde{T}(p,\lambda,a,\rho) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{-1}{p}} \frac{\tilde{w}_1^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}{\alpha+1} \tilde{w}_1^{\frac{-(p+\alpha)}{p}} \int_0^1 \left[K(\tilde{w}_1)\right]^{\frac{-1}{p}} dt \\ &= M(a,p,\alpha), \end{aligned}$$

où

$$K(\tilde{w}_1) = \frac{-\tilde{w}_1^2}{3p+\alpha-2}\left(1-t^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1}+1}\right) + \tilde{w}_1\left(\frac{1+a}{2p+\alpha-1}\right)(1-t^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1}) - \left(\frac{a}{p+\alpha}\right)(1-t^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1}).$$

ii) On a

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to\frac{1}{\alpha+1}} \tilde{T}(p,\lambda,a,\rho) &= \lim_{\rho\to\frac{1}{\alpha+1}} \int_0^{\rho} \left[H(\rho)-H(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\ &= \left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^{\frac{1}{\alpha+1}} \left[H\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) - H(u)\right] du \\ &= \begin{cases} M_1\left(\dfrac{1}{\alpha+1},p\right) & \text{si} \;\; p>2, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

■

Lemme 4.3.4 *Pour tout* $p>1$, $0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$, *on a*

i) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} M(a,p,\alpha)=0.$
ii) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} M_1(\frac{1}{\alpha+1},p)=+\infty.$

Preuve. Pour tout $p>1$, $0<a<\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2}$, on a

i) $M(a,p,\alpha)=$
$$\left(\lambda\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}\frac{\tilde{w}_1^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}{\alpha+1}\tilde{w}_1^{-\frac{p+\alpha}{p}}\int_0^1\left[\tilde{w}_1\frac{1+a}{2p+\alpha-1}\left(1-t^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1}\right)-\frac{\tilde{w}_1^2}{3p+\alpha-2}\left(1-t^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1}+1}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{a}{p+\alpha}\left(1-t^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}dt.$$

Comme $\tilde{w}_1=\dfrac{3p+\alpha-2}{2}\left[\dfrac{1+a}{2p+\alpha-1}-\sqrt{\dfrac{(1+a)^2}{(2p+\alpha-1)^2}-\dfrac{4a}{(3p+\alpha-2)(p+\alpha)}}\right]$

alors

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\tilde{w}_1=\frac{1+a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(1+a)^2}=0,$$

et par suite

$$\lim_{\alpha\to+\infty}M(a,p,\alpha)=0.$$

ii) On a

$$M_1\left(\frac{1}{\alpha+1},p\right)=\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1\left[H\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)-H(u)\right]^{-\frac{1}{p}}du,$$

si on pose le changement de variables, $u=\dfrac{1}{\alpha+1}\tau$, on obtient
$\displaystyle\int_0^1\left[H\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)-H\left(\frac{1}{\alpha+1}\tau\right)\right]^{-\frac{1}{p}}(\alpha+1)d\tau$

$$=\left(\lambda\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}(\alpha+1)\int_0^1\left[\begin{array}{l}\frac{1+a}{2p+\alpha-1}\left(1-\tau^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1}\right)-\frac{1}{3p+\alpha-2}\left(1-\tau^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1}+1}\right)-\\ \frac{a}{p+\alpha}\left(1-\tau^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1}\right)\end{array}\right]^{-\frac{1}{p}}d\tau$$

$$=\left(\lambda\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1\left[\frac{(\alpha+1)^p}{\begin{array}{l}\frac{1+a}{2p+\alpha-1}\left(1-\tau^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1}\right)-\frac{1}{3p+\alpha-2}\left(1-\tau^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1+1}}\right)-\\ \frac{a}{p+\alpha}\left(1-\tau^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1}\right)\end{array}}\right]^{\frac{1}{p}}d\tau.$$

Alors

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} M_1(\frac{1}{\alpha+1},p)=+\infty.$

■

Lemme 4.3.5

Pour tout $p>1$, $0<a<min\left(\dfrac{p+\alpha}{3p+\alpha-2},\dfrac{(\alpha+1)p+\alpha+2}{3(\alpha+1)p+4+\alpha}\right)$, $\alpha>0$ et $\lambda>0$, on a

i) Il existe $\rho_1>0$ tel que la fonction $\rho\mapsto\tilde{T}\left(p,\lambda,a,\rho\right)$ est strictement décroissante sur $\left(\rho_*,\rho_1\right)$.

ii) Il existe $\rho_2>\rho_1$ tel que la fonction $\rho\mapsto\tilde{T}\left(p,\lambda,a,\rho\right)$ est strictement croissante sur $\left(\rho_2,\dfrac{1}{\alpha+1}\right)$.

Preuve. Soit $p>1$, $\alpha>0$ et $\lambda>0$ fixés.

En dérivant (4.7) par rapport à ρ, on obtient

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\rho}\left(p,\lambda,\rho\right)=\frac{1}{p\rho}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\int_0^{\rho}\frac{L\left(\rho\right)-L\left(u\right)}{\left[H(\rho)-H(u)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du, \tag{4.8}$$

où

$$L\left(u\right)=pH\left(u\right)-uh\left(u\right).$$

Si on pose le changement de variable $w=(\alpha+1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}}u^{\frac{p-1}{\alpha+1}}$, on obtient

$$\tilde{L}(w)=\left(\frac{\alpha+1}{p-1}\right)w^{\frac{\alpha+1}{p-1}+1}\left[\left(\frac{2-\alpha}{3p+\alpha-2}\right)w^2+\frac{\left(1+a\right)\left(\alpha-1\right)}{2p+\alpha-1}w-\frac{a\alpha}{p+\alpha}\right],$$

avec $\tilde{L}(w)=L(u)$.

Un calcul simple montre que

$$\tilde{L}(1)=p\left[-a\left[3(\alpha+1)p+(4+\alpha)\right]+(\alpha+1)p+(\alpha+2)\right].$$

On a

$$\tilde{L}(1)>0 \text{ à condition que } a<\frac{(\alpha+1)p+\alpha+2}{3(\alpha+1)p+4+\alpha}.$$

On a

$$\tilde{L}'(w)=\frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[(2-\alpha)w^2+(1+a)(\alpha-1)w-a\alpha\right].$$

Si on pose

$$G(w)=(2-\alpha)w^2+(1+a)(\alpha-1)w-a\alpha,$$

on a

$$G(0)=-a\alpha<0 \text{ et } G(1)=1-a>0,$$

et on a

$$G'(w)=2(2-\alpha)w+(1+a)(\alpha-1).$$

Le signe de $\tilde{L}'(w)$ est le signe de $G(w)$, donc on distingue quatre cas

Premier cas : $\alpha\in[0,1[$

Dans ce cas, il existe deux nombres réels $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$ avec $0 < \tilde{\rho}_2 < \tilde{\rho}_1$ tel que

$$G(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), \, G(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } G(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1).$$

Alors, on a

$$\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), \, \tilde{L}(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } \tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

et comme $\tilde{L}(1) > 0$, alors

$$\tilde{L}(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_1), \tilde{L}(\tilde{\rho}_1) = 0 \text{ et } \tilde{L}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_1, 1).$$

Second cas : $\alpha \in [1, 2[$ On a

$$G(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), \, G(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } G(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

donc,

$$\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), \, \tilde{L}(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } \tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

et par conséquent

$$\tilde{L}(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_1), \tilde{L}(\tilde{\rho}_1) = 0 \text{ et } \tilde{L}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_1, 1).$$

Troisième cas : $\alpha = 2$ On a

$$G(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), G(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } G(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

alors,

$$\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), \tilde{L}(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } \tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

et par conséquent

$$\tilde{L}(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_1), \tilde{L}(\tilde{\rho}_1) = 0 \text{ et } \tilde{L}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_1, 1).$$

Quatrième cas : $\alpha > 2$

On a deux sous cas :

Premier sous cas : $\alpha \in \left]2, \dfrac{3}{1-a}\right]$ On a

$$G(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), G(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } G(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

alors, on a

$$\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), \tilde{L}(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } \tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

par suite, il résulte que

$$\tilde{L}(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_1), \tilde{L}(\tilde{\rho}_1) = 0 \text{ et } \tilde{L}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_1, 1).$$

Second sous cas : $\alpha \in \left]\dfrac{3}{1-a}, +\infty\right[$

Il existe $\tilde{\rho}_2 < \rho_* < \tilde{\rho}_1$ tel que

$$G'(w) > 0 \text{ sur } (0, \rho_*), G'(\rho_*) = 0 \text{ et } G'(w) < 0 \text{ sur } (\rho_*, 1),$$

ce qui entraîne que

$$G(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), G(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } G(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1),$$

alors,

$$\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2)\,,\, \tilde{L}(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } \tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1)\,,$$

et par conséquent

$$\tilde{L}(w) < 0 \text{ sur } \ (0, \tilde{\rho}_1)\,,\, \tilde{L}(\tilde{\rho}_1) = 0 \text{ et } \tilde{L}(w) > 0 \text{ sur } \ (\tilde{\rho}_1, 1)\,.$$

Dans tous les cas, on a

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho, a) < 0 \text{ pour tout } p > 1, \lambda > 0, \alpha > 0 \text{ et } \rho \in (0, \rho_2)\,,$$

et

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \rho}(p, \lambda, \rho, a) > 0 \text{ pour tout } p > 1, \lambda > 0, \alpha > 0 \text{ et } \rho \in \left(\rho_1, \frac{1}{\alpha+1}\right).$$

Ce qui signifie que pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$, la fonction $\rho \mapsto \tilde{T}(p, \lambda, \rho, a)$ est strictement décroissante sur (ρ_*, ρ_1) et strictement croissante sur $\left(\rho_2, \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$. ■

Maintenant on va prouver que l'application temps $\rho \mapsto \tilde{T}(p, \lambda, a, \rho)$ admet un unique point critique sur (ρ_2, ρ_2).

Proposition 4.3.6 *Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$, s'il existe $\tilde{\rho} \in (\rho_1, \rho_2)$ tel que $\tilde{T}'(\tilde{\rho}) = 0$, alors $\tilde{T}''(\tilde{\rho}) > 0$.*

Preuve. Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$, on a

$$\tilde{T}(p, \lambda, a, \rho) = \left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 [H(\rho) - H(\rho t)]^{-\frac{1}{p}}\, dt,$$

et

$$\tilde{T}'(p, \lambda, a, \rho) = \frac{1}{p\rho}\left(\frac{\lambda p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^\rho \frac{L(\rho) - L(u)}{[H(\rho) - H(u)]^{\frac{p+1}{p}}} dt,$$

et

$$\tilde{T}''(p, \lambda, a, \rho) = \frac{1}{p}\int_0^\rho \frac{(\Delta H)(\rho L'(\rho) - uL'(u)) - \left(\dfrac{p+1}{p}\right)\Delta L(\Delta\tilde{h})}{\rho^2(H(\rho) - H(u))^{\frac{2p+1}{p}}} du,$$

où

$$\Delta H = H(\rho) - H(u),$$

et

$$\Delta\tilde{h} = \rho h(\rho) - uh(u),$$

et on a

$$\tilde{T}''(p, \lambda, a, \rho) + \left(\frac{p+1}{\rho}\right)\tilde{T}'(p, \lambda, a, \rho) = \int_0^\rho \frac{\left(\dfrac{p+1}{p}\right)(\Delta L)^2 + (\Delta H)(\Delta\tilde{L}')}{p\rho^2(\Delta H)^{\frac{2p+1}{p}}} du,$$

où

$$\Delta\tilde{L}' = \rho L'(\rho) - uL'(u).$$

Maintenant, on va étudier le signe de $\Delta\tilde{L}'$.

On pose le changement de variable $w = (\alpha+1)^{\frac{p-1}{\alpha+1}} \rho^{\frac{p-1}{\alpha+1}}$,on obtient

$$(w\tilde{L}'(w))' = \frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[(2-\alpha)(\alpha+4)w^2 + (1+a)(\alpha-1)(\alpha+3)w - a\alpha(\alpha+2)\right].$$

On pose

$$\tilde{G}(w) = (2-\alpha)(\alpha+4)w^2 + (1+a)(\alpha-1)(\alpha+3)w - a\alpha(\alpha+2),$$

on a

$$\tilde{G}(0) = -a\alpha(\alpha+2) < 0 \text{ et } \tilde{G}(1) = 5 - 3a > 0,$$

on a

$$\tilde{G}'(w) = (2-\alpha)(\alpha+4)w + (1+a)(\alpha-1)(\alpha+3).$$

Le signe de $(w\tilde{L}'(w))'$ est le signe de $\tilde{G}(w)$, donc on distingue quatre cas :

Premier cas : $\alpha \in [0,1[$
Dans ce cas, il existe $\tilde{\rho}_3$ avec $0 < \tilde{\rho}_3 < \tilde{\rho}_2 < \tilde{\rho}_1$ tel que

$$\tilde{G}(w) < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_3), \tilde{G}(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } \tilde{G}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

donc, on a

$$(w\tilde{L}'(w))' < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_3), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } (w\tilde{L}'(w))' > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

et par conséquent

$$w\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_2), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } w\tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1).$$

Second cas : $\alpha \in [1,2[$
Dans ce cas, il existe $\tilde{\rho}_3$ avec $0 < \tilde{\rho}_3 < \tilde{\rho}_2 < \tilde{\rho}_1$ tel que

$$\tilde{G}(w) < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_3), \tilde{G}(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } \tilde{G}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

donc, on a

$$(w\tilde{L}'(w))' < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_3), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } (w\tilde{L}'(w))' > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

et par conséquent

$$w\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_2), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } w\tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1).$$

Troisième cas : $\alpha = 2$
Dans ce cas, il existe $\tilde{\rho}_3$ avec $0 < \tilde{\rho}_3 < \tilde{\rho}_2 < \tilde{\rho}_1$ tel que

$$\tilde{G}(w) < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_3), \tilde{G}(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } \tilde{G}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1).$$

Alors, on a

$$(w\tilde{L}'(w))' < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_3), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } (w\tilde{L}'(w))' > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

et par conséquent

$$w\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0,\tilde{\rho}_2), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } w\tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1).$$

Quatrième cas : $\alpha > 2$
Dans ce cas on montre que la fonction $\tilde{G}$ est strictement croissante, alors il existe $\tilde{\rho}_3$ avec $0 < \tilde{\rho}_3 < \tilde{\rho}_2 < \tilde{\rho}_1$ tel que

$$\tilde{G}(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_3), \tilde{G}(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } \tilde{G}(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

donc, on a

$$(w\tilde{L}'(w))' < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_3), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_3) = 0 \text{ et } (w\tilde{L}'(w))' > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

et par conséquent

$$w\tilde{L}'(w) < 0 \text{ sur } (0, \tilde{\rho}_2), w\tilde{L}'(\tilde{\rho}_2) = 0 \text{ et } w\tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1).$$

Ainsi, il résulte que

$$w\tilde{L}'(w) > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_2, 1).$$

Maintenant comme

$$(w\tilde{L}'(w))' > 0 \text{ sur } (\tilde{\rho}_3, 1),$$

on obtient

$$\tilde{T}''(p, \lambda, a, \rho) + \left(\frac{p+1}{\rho}\right)\tilde{T}'(p, \lambda, a, \rho) > 0 \text{ sur } (\rho_2, \rho_1),$$

et par conséquent s'il existe $\tilde{\rho} \in (\rho_2, \rho_1)$ tel que $\tilde{T}'(\tilde{\rho}) = 0$, alors $\tilde{T}''(\tilde{\rho}) > 0$. ■

4.4 La preuve du théorème principal

Preuve du théorème 4.2.1

Supposons que $p > 1, \alpha > 0$ et $\lambda > 0$.

Preuve de l'assertion (A)
Supposons que $p \in]1, 2]$, d'aprés le lemme 4.3.3 et 4.3.5, on a

- $\lim\limits_{\rho \to \rho_*} \tilde{T}(p, \lambda, a, \rho) = M(a, p, \alpha)$,
- $\lim\limits_{\rho \to \frac{1}{\alpha+1}} \tilde{T}(p, \lambda, a, \rho) = +\infty$.

 et
- La fonction $\rho \mapsto \tilde{T}(p, \lambda, a, \rho)$ est strictement décroissante sur (ρ_*, ρ_1) et strictement croissante sur $\left(\rho_1, \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$.

Donc, l'équation dont la variable ρ, $\rho \mapsto \tilde{T}(p, \lambda, a, \rho) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\left(\rho_*, \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$ si et seulement si $\lambda > \lambda_*(a, p, \alpha)$ et $\lambda = \lambda_{**}(a, p, \alpha)$,

où

$$\lambda_*(a, p, \alpha) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\tilde{w}_1^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}{\alpha+1}\tilde{w}_1^{\frac{-(p+\alpha)}{p}} \int_0^1 \begin{bmatrix} \dfrac{-\tilde{w}_1^2}{3p+\alpha-2}\left(1 - t^{\frac{3(p-1)}{\alpha+1}+1}\right) + \\ \tilde{w}_1\left(\dfrac{1+a}{2p+\alpha-1}\right)(1 - t^{\frac{2(p-1)}{\alpha+1}+1}) - \\ \left(\dfrac{a}{p+\alpha}\right)(1 - t^{\frac{p-1}{\alpha+1}+1}) \end{bmatrix}^{-\frac{1}{p}} dt,$$

et

$$\lambda_{**} = \tilde{T}\left(p, \lambda, a, \rho_1\right) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[H(\rho_1) - H(\rho_1 t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt.$$

Alors d'aprés le théorème 2.3.1, il résulte que

i) Si $\lambda > \lambda_*$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans A^+,

ii) Si $\lambda = \lambda_*$, alors le problème (4.2) admet deux solutions l'une dans A^+ et l'autre dans B^+,

iii) Si $\lambda < \lambda_{**}$, alors le problème (4.2) n'admet aucune solution,

iv) Si $\lambda_{**} < \lambda < \lambda_*$, alors le problème (4.2) admet exactement deux solutions dans A^+,

v) Si $\lambda = \lambda_{**}$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans B^+.

Preuve de l'assertion (B)

Supposons que $p > 2$,, d'aprés le lemme 4.3.3 et le lemme 4.3.5, on a

- $\lim\limits_{\rho \to \rho_*} \tilde{T}\left(p, \lambda, a, \rho\right) = M(a, p, \alpha)$,
- $\lim\limits_{\rho \to \frac{1}{\alpha+1}} \tilde{T}\left(p, \lambda, a, \rho\right) = M_1\left(\frac{1}{\alpha+1}, p\right)$.

  et
- La fonction $\rho \mapsto \tilde{T}\left(p, \lambda, a, \rho\right)$ est strictement décroissante sur (ρ_*, ρ_1) et strictement croissante sur $\left(\rho_1, \frac{1}{\alpha+1}\right)$.

Donc, l'équation dont la variable ρ, $\rho \mapsto \tilde{T}\left(p, \lambda, a, \rho\right) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique dans $\left(\rho_*, \frac{1}{\alpha+1}\right)$ si et seulement si $\lambda = \lambda_{***}$.

Où

$$\lambda_{***}(a, p, \alpha) = \int_0^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha+1} - u\right)^{-\frac{2}{p}} \left[\theta(\frac{1}{\alpha+1}, u)\right]^{-\frac{1}{p}} du.$$

Alors d'aprés le théorème 2.3.1, il résulte que

i) Si $\lambda < \lambda_{**}$, alors le problème (4.2) n'admet aucune solution,

ii) Si $\lambda = \lambda_{**}$, alors le problème (4.2) admet une unique solution dans A^+.

iii) Maintenant si $\lambda > \lambda_{**}$, on considère les deux cas suivants

- D'aprés le lemme 4.3.3, il existe un $\tilde{\alpha}$ tel que pour tout $\alpha > \tilde{\alpha}$ on a, $M(a, p, \alpha) < \frac{1}{2}$ et $M_1(a, p, \alpha) > \frac{1}{2}$. Par suite l'équation $\tilde{T}(p, \lambda, a, \rho)$ admet une unique solution et par conséquent le problème (4.2) admet une unique solution dans A^+.

-Le problème (4.2) admet deux solutions dans A^+ si $M(a, p, \alpha) > \frac{1}{2}$ et $M_1(a, p, \alpha) > \frac{1}{2}$.

Cette condition est satisfaite si on choisit $\lambda > max(\tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2})$ avec

$$\tilde{\lambda_1} = 2^p \left(\frac{p}{p-1}\right) \left(\frac{\alpha+1}{\tilde{w_1}^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}\right)^{-p} \tilde{w_1}^{-(p+\alpha+1)} \left(\frac{2p+\alpha-1}{1+a}\right) \left(\frac{2p+\alpha-1}{\alpha+1}\right) B\left(\tfrac{\alpha+1}{2p+\alpha-1}, \tfrac{p-1}{p}\right)^{-p},$$

et

$$\tilde{\lambda_2} = 2^p \left(\frac{p}{p-1}\right) (\alpha+1)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2p+\alpha-1}{1+a}\right) \left(\frac{2p+\alpha-1}{\alpha+1}\right) B\left(\tfrac{1}{2p+\alpha-1}, \tfrac{p-1}{p}\right)^{-p}.$$

conclusion

Dans cette thèse on a étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives de certains problèmes aux limites non linéaires. Plus précisement on a étudié :
-Le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une singularité non linéaire.
-Le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité p-convexe.
-Les problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité du type effet Allee.
Pour les perspectives on présente quelques problèmes ouverts

Problème1
L'étude de l'existence du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' & = & \lambda f(u) & \text{dans } (0,1)\,, \\ u & > & 0 & \text{dans } (0,1)\,, \\ u\left(0\right)=u\left(1\right) & = & 0 & \end{cases}$$

où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $p\in\left]1,2\right[\cup\left]2,4\right[$, $\lambda>0$ et $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est de classe C^2 et p-convexe.

Problème2
L'étude d'existence, d'unicité, de comparaison et de régularité des solutions positives pour des problèmes aux limites paraboliques. Plus précisement, on considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \left(\varphi_p\left(u^\alpha\right)\varphi_p\left(u'\right)\right)'+f(u) & \text{dans } (0,1)\times R^+, \\ u(0,t)=u(1,t) & = & 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+, \\ u(x,0)=u(x,1) & = & u_0 & \end{cases}$$

où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $p>1$, $\lambda>0$, $\alpha>0$, $u_0:[0,1]\to R$ une fonction continue et $f(u)=u^{p-1}(1-u^{p-1})(u^{p-1}-a)$ avec $0<a<1$.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover, New-York, **1972.**

[2] T.Adamowicz, P.Korman, Remarks on time map quasilinear equations, J. Math. Anal. and Appl. **376 2 15 (2011) 686-695.**

[3] I. Addou, A. Benmezai, Boundary value problems for the one-dimensional $p-$Laplacian with even superlinearity, Electronic J. Diff. Eqns. **9 (1999) 1-29.**

[4] I. Addou, S. M. Bouguima, A. Benmezai, M. Derhab, Exactness results for generalized Ambrosetti-Brezis-Cerami and related one-dimensional elliptic equations, Electronic J. Diff. Eqns. **66 (2000) 1-34.**

[5] I. Addou, S. M. Bouguima, M. Derhab, Y. S. Raffed, On the number of solutions of a quasilinear elliptic class of B. V. P. with jumping nonlinearities, Dynam Systems Appl. **7 (4) (1998) 575-599.**

[6] H. Amann, T. Laetsch, positive solutions of convex Nonlinear Eigenvalue problems, Indiana Univ. Math. J. **25 (1976) 259-270.**

[7] A. Ambrosetti, On the exact number of positive solution of convex nonlinear problem, Boll. Unione Mat. Ital. **(5) 15-A 610-615.**

[8] R. Aris, The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts, Clarendon Press, Oxford, **I and II 1975**.

[9] D. Aronson, M. G. Crandall, L. A. Peletier, Stabilization of solutions of degenerate nonlinear diffusion problem, Nonlinear Anal. **6 10 (1982)** 1001-1022.

[10] A. Callegari, A. Nachman, A nonlinear singular boundary value problem arising in the theory of pseudoplastic fluids, SIAM J. Appl. Math. **38 (1980) 275-281**.

[11] Y. S. Choi, A. C. Lazer, P. J. Mckenna, Some remarks on a singular elliptic boundary value problem, Nonlinear Anal. **32 (1998) 305-314**.

[12] M. M. Coclite, G. Palmieri, On a singular nonlinear Dirichlet problem, Comm. Partial Differential Equations, **14 (1989) 1315-1327**.

[13] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, L. Tartar, On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, Comm. Partial Differential Equations, **2 (1977) 149-176**.

[14] S. Cui, Existence and nonexistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems, Nonlinear Anal.**41 (2000) 305-314**.

[15] M. Derhab, M. Meghnafi, Exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **15 (2008) 4 15-37.**

[16] M. Derhab, H. Sebbagh, Exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with a singular nonlinearity, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **19 (2012) 3 103-125.**

[17] M. Derhab, H. Sebbagh, Exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with p-convex nonlinearity, Filomat, **27 3 (2013) 499-513.**

[18] M. Derhab, H. Sebbagh, Exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems,(en cour de préparation).

[19] J. I. Díaz, J. Hernández, F. J. Mancebo, Branches of positive solutions and free boundary solutions for some singular quasilinear elliptic problems, J. Math. Anal. Appl. **352 (2009) 449-474.**

[20] J. I. Díaz, J. M. Morel, L. Oswald, An elliptic equation with singular nonlineari, Comm. Partial Differential Equations, **12 (1987) 1333-1344**.

[21] J. I. Díaz, Nonlinear partial differential equations and free boundaries, Res. Notes Math. **I 106 (1985) 323.**

[22] W. Fulkus, J. S. Maybee, A singular nonlinear equation, Osaka J. Math. **12 (1960) 1-19**.

[23] S.Gadam, Joseph A. Iaia, Exact multiplicity of positive solutions in semipositone problems with concave-convex type nonlinearities, Electron. J. Qual. Theory differ. Equ. **4 (2001) 1-9.**

[24] M. Garcia-Huidobro, P. Ubilla, Multiplicitu of solutions for a class of nonlinear second-order equations, Nonlinear. Anal. **28 9 (1987) 1509-1520.**

[25] M. Guedda, L. Veron, Bifurcation phenomena associate to the p-Laplacian operator, Trans. Amer. Math. Soc. **310 (1988) 419-4310.**

[26] J. Hernández, F. J. Mancebo, Singular elliptic and parabolic equations, (M. Chipot and P. Quittner, eds.), Handb. Differ. Equ. **3 (2006) 317-400.**

[27] T. Horváth, P. L. Simon, On the exact number of solutions of a singular boundary value problems, J. Differential Equations, **22 (2009) 787-796**.

[28] D. D. Joseph, Non-linear heat generation and stability of the temperature distribution in conducting solids, Int. J. Heat Mass Transfer. **8 (1965) 281-288.**

[29] L. S. Kalashnikova, I. N. Taganov, V. P. Volkova, Variational solution of equation of nonlinear mass and energy transfer, J. Engrg. Phys. **33 (1977) 1197-1202.**

[30] J. Karàtson, P.L Simon, Bifurcation for semilinear elliptic equations with convex nonlinearity, Electron J. Differential Equations, **43 (1999) 1-16.**

[31] J. Karàtson, P.L Simon, Exact multiplicity for degenerate two-point boundary value problems with $p-$convex nonlinearity, Nonlinear Anal. **52 (2003) 1569-1590.**

[32] H. B. Keller, D. S. Cohen, Some positone problems suggested by nonlinear heat generation, J. Math. Fluid Mech. **16 (1967) 1361-1376.**

[33] E. Ko, E. K. Lee, R. Shivaji, On S-shaped and reversed S-shaped bifurcation curves for singular problems, Electron. J. Qual. Theory Differ Equ. **31 (2011) 1-12.**

[34] P.Korman, Global solution branches and exact multiplicity of solutions for two point boundary value problems, Handb. Differ. Equ. **3 (2006) 547-606.**

[35] T. Laetsch, The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem, Indiana Univ. Math. J. **20 (1971) 1-13.**

[36] T. Laetsch, The theory of forced, convex, autonomous two point boundary value problems, Rocky Mountain J. Math. **15 (1985) 133-154.**

[37] A. Lakmeche, A. Hammoudi, Multiple positive solutions of the one-dimensional p-Laplacian, J. Math. Anal. Appl. **317 (2006) 43-49**.

[38] A. Lakmeche, A. Lakmech, M. Yebdri, Positive solutions of a nonlinear problem involving the p-Laplacian with nonhomogenious boundary conditions, Electron. J. Differential Equations, **25 (2007) 1-7**.

[39] C. D. Luning, W. L. Perry, An iterative method for solution of a boundary value problem in non-Newtonian fluid flow, Non-Newtonian Fluid. Mech. **15 (1984) 145-154.**

[40] R. Manasevich, F. Zanolin, Time-mappings and Multiplicity of Solutions for the one-dimensional p-Laplacian, Nonlinear Anal. **21 (1993) 269-291**.

[41] M. Meghnafi, Sur le nombre de solutions positives d'une classe de problèmes aux limites quasilinéaires, Mémoire de Magister, **2004-2005.**

[42] A. Nikoforov, V. Ouvarov, Fonctions Spéciales de la Physique Mathématique, Editions Mir, Moscou, **1983.**

[43] Z. Opial, Sur l'exsitence des solutions périodiques de l'équation différentielle $x'' + f(x, x')x' + g(x) = p(t)$, Ann. Polon. Math. **XI (1961)**.

[44] M. ôtani, A remark on certain nonlinear elliptic equations, Proceedings of the Faculty of Sciences, Tokai University. **XIX (1984) 23-28**.

[45] M. ôtani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré type inequalities, Nonlinear Anal. **8 11 (1984) 1255-1270**.

[46] M. C. Pelissier, Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie, publication Mathématique d'Orsay, **110 75-24**.

[47] W. L. Perry, A monotone iterative technique for solution of p^{th} order $(p < 0)$ reaction-diffusion problem in permeable catalysis, J. Comput. Chemistry, **5 (1984) 353-357.**

[48] V. Rădulescu, Combined effects in nonlinear singular elliptic problems with convection, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **53 5 6 (2008) 543-553.**

[49] R.Schaaf, Global Solution Branches of Two Point Boundary Value Problems, Lecture Notes in Math, **1458 (1990)**.

[50] P. L. Simon, Exact multiplicity of positive for a class of singular semilinear equations, Differ. Equ. Dyn. Syst. **17 1 2 (2009) 147-161**.

[51] J. A. Smoller, A. G. Wassemann, Global bifurcation of steady state solutions, J. Differential Equations, **39 (1981) 269-290.**

[52] J. A. Smoller, A. G. Wassemann, On the monotonicity of the time-map, J. Differential Equations, **77 (1989) 287-303.**

[53] K. M. Sundaram, G. Nath, Flow and heat transfer for a power-law electrically conducting fluid flowing between parallel plates under traverse magnetic field with viscous dissipation, Proc. Indian Acad. Sci. **83 A (1976) 188-201.**

[54] Y. H. Lee, L. Sherbakov, J. Taber, J. Shi, Bifurcation diagrams of population models with nonlinear diffusion, J. Comput. Appl. Math. **149 (2006) 357-367.**

[55] Z. Zhang, On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, J. Math. Anal. Appl. **194 (1995) 103-113.**

L’important est de faire en sorte que tout soit aussi simple que possible mais pas plus simple.

Albert Einstein

Résumé:

L'objet de cette thèse est l'étude de l'existence et la mulitiplicité des solutions positives pour des classes de problèmes aux limites quasilinéaires faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien .

Cette thèse est divisée en quatres chapitres. Dans le premier chapitre on présente la méthode de quadrature. Le deusième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité singulière. Dans le troisième chapitre on a étudié le nombre exact des solutions positives pour des problèmes aux limites quasilinéaires dont le second membre est une fonction p-convexe et dans le dernier chapitre on s'est interessé aux nombre exact des solutions positive pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité du type effet Allee.

Mots clés: p-Laplacien, solutions positives, méthode de quadrature, singulier et fonction p-convexe.

Abstract:

The object of this thesis is to study the existence and multiplicity of positive solutions for a class of quasilninear boundary value problems involving the operator p-Laplacien.

This thesis is divides into four chapters. In the first chapter we present the quadrature method. The second chapter is devoted to the study of existence and uniqueness of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with a singular nonlinearity. In the third chapter we were studies the exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with p-convex nonlinearity and in the last chapter we were interessted to the exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems of type Allee effect.

Key words: p-Laplacien, positive solutions, quadrature method, singular and p-convex function.

ملخص:

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة عدد الحلول الموجبة للمسائل الحدّية شبه خطيّة بتدخل المتعامل p- Laplacien .

هذه الأطروحة مجزّئة إلى أربعة فصول. في الفصل الأوّل نقدّم طريقة التّربيع. الفصل الثّاني مخصّص لدراسة عدد الحلول الموجبة لنوع من المسائل الحدّية الشّبه خطّية مع دالّة غير خطّية معتلّة. في الفصل الثّالث قمنا بدراسة عددالحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدّية الشّبه خطّية بحيث الطرف الثّاني للمعادلة هو دالّة p- محدّبة و في الفصل الأخير نهتمّ بدراسة عدد الحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدّية الشّبه خطّية من نوع تأثيرAllee القويّ.

الكلمات المفتاحية: p-Laplacien، الحلول الموجبة، طريقة التّربيع، معتلّ و دالّة p - محدّبة.