

Table des matières

Introduction	3
I Rappels	4
1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	4
1.1 Convergences faible et faible* dans les espaces de Banach	4
1.2 Fonctions périodiques rapidement oscillantes	6
1.3 Quelques classes des espaces de Sobolev	8
1.4 Quelques problèmes variationnels elliptiques	13
II Exemples en homogénéisation	15
2 Position du problème :	15
2.1 Remarque (A constante, A non constante)	17
2.1.1 Le cas A constante	17
2.1.2 Le cas A non constant	18
2.2 Quelques modèles physiques	19
2.3 Le cas unidimensionnel	22
2.4 Les matériaux multicouches	25

Notations

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$	Elément de \mathbb{R}^N
$r = x = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)}$	Module de x
$\partial\Omega$	Le bord de Ω
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradient de u
$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$	Laplacien de u
$\ \cdot\ _X$	La norme dans l'espace de Banach X
\rightarrow	La convergence forte dans X
\rightharpoonup	La convergence faible dans X
X'	Le dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit dans la dualité X, X'
p.p.	Presque partout
p'	Le conjugué harmonique de p ; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$L^p(\Omega)$	$u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ u mesurable et que $\int_{\Omega} f ^p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ u mesurable et que $ u(x) \leq C$ p.p.

partie

Introduction

L'homogénéisation est une méthode mathématique qui se base énormément sur des connaissances en analyse fonctionnelle, théorie du contrôle, de l'optimisation des EDP et EDO, des semi groupes ...etc. Elle a beaucoup d'applications en industrie (Mécanique, Electronique, Médecine, Géologie, Economie... etc.).

L'intérêt principal de cette méthode est la modélisation de phénomènes concrets où ces derniers se déroulent dans des milieux fortement hétérogènes, donc par la présence de microstructures. Les méthodes numériques dans le cas où on a un nombre élevé d'hétérogénéités, sont très difficiles à implémenter à cause des discontinuités qui existent. Pour cela, on essaye d'obtenir une représentation macroscopique du phénomène. La répartition des microstructures est soit périodique ce qui est rare dans le cas réel, soit presque périodique ou aléatoire ce qui est prépondérant dans le cas général.

Dans notre travail on s'intéresse au cas périodique où le paramètre ε désigne la taille de la cellule où vit l'hétérogénéité. Ce paramètre est mis à l'échelle pour obtenir le cas macroscopique puis tendra vers zéro pour homogénéiser le phénomène.

Notre travail est divisé en deux parties, un rappel de quelques notions en analyse fonctionnelle et en deuxième partie on présentera la méthode d'homogénéisation dans le cas périodique et on le fera dans les cas 1D puis 2D dans le cas EDP linéaire Pour plus de détails le lecteur est envoyé aux deux références principales citées vers la fin du mémoire. On fait savoir au lecteur que la seconde partie est prise de la seconde référence en traduisant en français et en explicitant les calculs pour compréhension.

Première partie

Rappels

1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Convergences faible et faible* dans les espaces de Banach

Dans ce qui suit, E est un espace de Banach et E' son dual.

Definition 1 Une suite $\{x_n\}$ dans E est dite faiblement convergente vers x ssi

$$\forall x' \in E', \quad \langle x', x_n \rangle_{E', E} \longrightarrow \langle x', x \rangle_{E', E}.$$

Cette convergence faible est notée

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{faiblement dans } E.$$

Theorem 2 (Eberlein-Smuljan). On suppose que E est réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans E . Alors

i) il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ et $x \in E$ tels que, quand $k \rightarrow \infty$,

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{faiblement dans } E.$$

ii) si toute sous-suite faiblement convergente de $\{x_n\}$ a la même limite x , alors la suite entière $\{x_n\}$ converge faiblement vers x , i.e.

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{faiblement dans } E.$$

Proposition 3 Soient $\{x_n\} \subset E$ et $\{y_n\} \subset E'$ telles que

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x & \text{faiblement dans } E \\ y_n \rightarrow y & \text{fortement dans } E'. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x_n \rangle_{E', E} = \langle y, x \rangle_{E', E}.$$

Definition 4 Soit F un espace de Banach et on pose $E = F'$. Une suite $\{x_n\}$ dans E est dite faiblement* convergente vers x ssi

$$\langle x_n, x' \rangle_{F', F} \longrightarrow \langle x, x' \rangle_{F', F}, \quad \forall x' \in F.$$

Cette convergence faible* est notée :

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement* dans } E.$$

Theorem 5 *Soit F un espace de Banach séparable et soit $E = F'$. Si $\{x_n\}$ est une suite bornée dans E , alors*

i) il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, et $x \in E$ tels que, quand $k \rightarrow \infty$,

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ faiblement* dans } E.$$

ii) si toute sous-suite faiblement* convergente de $\{x_n\}$ a la même limite x , alors la suite entière $\{x_n\}$ converge faiblement* vers x , i.e.

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement* dans } E.$$

Proposition 6 *L'espace $L^p(\mathcal{O})$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et uniformément convexe pour $1 < p < +\infty$.*

Theorem 7 (Théorème de représentation). *Soient $1 \leq p < +\infty$ et p' son conjugué. Soit $f \in [L^p(\mathcal{O})]'$. Alors, il existe un unique $g \in L^{p'}(\mathcal{O})$ tel que*

$$\langle f, \varphi \rangle_{[L^p(\mathcal{O})]', L^p(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in L^p(\mathcal{O}).$$

De plus

$$\|g\|_{L^{p'}(\mathcal{O})} = \|f\|_{[L^p(\mathcal{O})]'}$$

Remark 8 *Dû à ce théorème, l'espace $[L^p(\mathcal{O})]'$ peut être identifié avec $L^{p'}(\mathcal{O})$ pour $1 \leq p < +\infty$, et donc en particulier $[L^1(\mathcal{O})]' = [L^\infty(\mathcal{O})]$. On mentionne que, dans le cas contraire $[L^\infty(\mathcal{O})]' \neq L^1(\mathcal{O})$. On a en effet, $L^1(\mathcal{O}) \subset [L^\infty(\mathcal{O})]'$ strictement.*

Theorem 9 *$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $L^p(\mathcal{O})$, pour $1 \leq p < +\infty$.*

Definition 10 *Soit A un ensemble mesurable dans \mathbb{R}^N . La fonction caractéristique de A est la fonction χ_A définie par*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus A. \end{cases}$$

Theorem 11 Si $f \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$ est telle que

$$\int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),$$

alors $f = 0$, p.p. sur \mathcal{O} .

Remark 12 L'espace $L^1(\Omega)$ étant séparable (voir Proposition 6), Théorème 5 implique que de toute suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite faiblement* convergente dans $L^\infty(\Omega)$.

1.2 Fonctions périodiques rapidement oscillantes

Tout au long de ce mémoire, Y désigne l'intervalle dans \mathbb{R}^N défini par

$$Y =]0, l_1[\times \dots \times]0, l_N[.$$

où l_1, \dots, l_N sont des nombres positifs donnés. On va considérer Y comme étant la période référence.

La définition suivante introduit la notion de périodicité pour les fonctions qui sont définies presque partout.

Definition 13 Soient Y défini ci dessus, et f une fonction définie p.p. sur \mathbb{R}^N . La fonction f est dite Y -périodique ssi

$$f(x + kl_i e_i) = f(x) \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

où $\{e_1, \dots, e_N\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^N .

Dans le cas $N = 1$, on dit simplement que f est l_1 -périodique.

La valeur moyenne d'une fonction périodique est essentielle en étudiant les fonctions périodiques rapidement oscillantes. Rappelons sa définition :

Definition 14 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et f une fonction dans $L^1(\Omega)$. La valeur moyenne de f sur Ω est le nombre réel $M_\Omega(f)$ donné par :

$$M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(y) dy.$$

Theorem 15 (Limites faibles des fonctions périodiques rapidement oscillantes). Soient $1 \leq p \leq +\infty$ et f une fonction Y -périodique dans $L^p(Y)$. On pose

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N.$$

Alors, si $p < +\infty$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_I f(y) dy \quad \text{faiblement dans } L^p(\omega),$$

pour tout ouvert borné de \mathbb{R}^N .

Si $p = +\infty$, on a

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Remark 16 Soit E un espace de Banach. Théorème 15 montre, qu'en particulier, si $\{u_\varepsilon\} \subset E$ et $\{v_\varepsilon\} \subset E'$ sont deux suites telles que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup u && \text{faiblement dans } E, \\ v_\varepsilon &\rightharpoonup v && \text{faiblement dans } E', \end{aligned}$$

alors, en général

$$\langle v_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_{E', E} \not\rightarrow \langle v, u \rangle_{E', E}.$$

En effet, soit f, g deux fonctions Y -périodiques dans $L^2(Y)$, et on pose

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N, \\ v_\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Théorème 15 implique que, si ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , alors

$$u_\varepsilon v_\varepsilon = (fg)\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M_Y(fg) \quad \text{faiblement in } L^1(\omega).$$

D'où en utilisant Remarque 8 on a, en particulier,

$$\langle v_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_{L^2(Y), L^2(Y)} = \int_\omega u_\varepsilon v_\varepsilon \rightarrow |\omega| M_Y(fg)$$

Tandis que, en utilisant encore Théorème 15

$$\langle v, u \rangle_{L^2(Y), L^2(Y)} = \int_\omega M_Y(f) M_Y(g) = |\omega| M_Y(f) M_Y(g).$$

En général, on a

$$M_Y(fg) \neq M_Y(f) M_Y(g).$$

Remark 17 La convergence donnée par Théorème 15 n'est pas forte, à moins que f est soit constante et $|Y| = 1$. En effet, la convergence forte impliquera que $M_Y(f^p) = [M_Y(f)]^p$.

1.3 Quelques classes des espaces de Sobolev

Definition 18 Une application $T : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \mapsto \mathbb{R}$ est dite une distribution sur \mathcal{O} , ssi

i) T est linéaire, i.e.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2),$$

ii) T est continue, i.e.

$$(\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\mathcal{O})) \implies (T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)).$$

Definition 19 Une suite $\{T_n\}$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ est dite convergente (au sens des distributions) vers un élément $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ ssi

$$\langle T_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{O}), \mathcal{D}(\mathcal{O})} \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{O}), \mathcal{D}(\mathcal{O})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

On note cette convergence par

$$T_n \longrightarrow T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}).$$

Definition 20 (La dérivée au sens des distributions). Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Pour tout $i = 1, \dots, N$, la dérivée $\partial T / \partial x_i$ de T par rapport à x_i est définie par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{O}), \mathcal{D}'(\mathcal{O})} = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{O}), \mathcal{D}(\mathcal{O})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}).$$

Definition 21 Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathcal{O})$ est défini par

$$W^{1,p}(\mathcal{O}) = \left\{ u \mid u \in L^p(\mathcal{O}), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathcal{O}), i = 1, \dots, N \right\},$$

où les dérivées sont prises au sens des distributions (Définition 20).

Pour $p = 2$, on note $W^{1,2}(\mathcal{O}) = H^1(\mathcal{O})$, i.e.

$$H^1(\mathcal{O}) = \left\{ u \mid u \in L^2(\mathcal{O}), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathcal{O}), i = 1, \dots, N \right\}.$$

Proposition 22

i) L'espace $W^{1,p}(\mathcal{O})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} = \|u\|_{L^p(\mathcal{O})} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathcal{O})}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, cette norme est équivalente à la suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} = \left(\|u\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{O})}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

où on a les notations suivantes

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right),$$

et

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{O})} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathcal{O})}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ii) L'espace $W^{1,p}(\mathcal{O})$ est séparable pour $1 \leq p \leq +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

iii) L'espace $H^1(\mathcal{O})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(v, w)_{H^1(\mathcal{O})} = (v, w)_{L^2(\mathcal{O})} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{L^2(\mathcal{O})}, \quad \forall v, w \in H^1(\mathcal{O}).$$

Theorem 23 (Les injections de Sobolev). *On suppose que $\partial\Omega$ est Lipschitz-continu. Alors*

- i) si $1 \leq p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ de manière :
 - compacte pour $q \in]1, p^*[$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
 - continue pour $q = p^*$,
- ii) si $p = N$, $W^{1,N}(\Omega) \in L^q(\Omega)$ de manière compacte si $q \in]1, +\infty[$,
- iii) si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ de manière compacte.

Definition 24 *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$. On pose*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega).$$

Il est clair que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ alors $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini dans Proposition 22.

Theorem 25 *On a les inclusions suivantes*

- i) si $1 \leq p < N$, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec
 - de manière compacte pour $q \in]1, p^*[$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
 - de manière continue pour $q = p^*$,
- ii) si $p = N$, $W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec injection compacte si $q \in [1, +\infty[$,

Theorem 26 (Formule de Green). *On suppose que $\partial\Omega$ est Lipschitz continu. Soient $u, v \in L^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u) \gamma(v) n_i ds,$$

pour $1 \leq i \leq N$ et où $n = (n_1, \dots, n_N)$ désigne le vecteur unité de la normal extérieure à Ω .

Le prochain résultat donne le sens de la trace pour les fonctions de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 27 *On suppose que $\partial\Omega$ est Lipschitz continu. Alors*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \mid u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}.$$

Rappelons maintenant que par définition, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme de H_0^1 . L'inégalité suivante permet l'introduction d'une norme équivalente dans $H_0^1(\Omega)$ définie par :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 28 (L'inégalité de Poincaré). *Il existe une constante C_{Ω} telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

où la constante C_{Ω} est une constante dépendante du diamètre de Ω .

Proposition 29 *Soit F dans $H^{-1}(\Omega)$. Alors, il existe $N+1$ fonctions f_0, f_1, \dots, f_N dans $L^2(\Omega)$ telles que*

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

dans le sens des distributions. De plus

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \inf \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où l'infimum est pris sur les vecteurs (f_0, f_1, \dots, f_N) dans $[L^2(\Omega)]^{N+1}$.

Inversement, si (f_0, f_1, \dots, f_N) est un vecteur dans $[L^2(\Omega)]^{N+1}$, alors on a un élément F de $H^{-1}(\Omega)$ qui satisfait

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Remark 30 *En mettant ensemble Remarque 8, Théorème 9, et Définition 24, et en tenant compte Proposition 27 et les injections de Sobolev (Théorème 25), on a que les injections suivantes sont compactes :*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

On note aussi que, si $u \in H_0^1(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors du Théorème 7 on a

$$\langle v, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

On rappelle maintenant quelques résultats concernant les espaces des fonctions à valeurs vectorielles :

Definition 31 *Soit X un espace de Banach et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. L'application $T : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto X$ est dite distribution sur Ω avec valeurs dans X , ssi*

i) T est linéaire, i.e.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2).$$

ii) T est continue, i.e.

$$(\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)) \Rightarrow (T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi) \text{ dans } X).$$

On note par $\mathcal{D}'(\Omega; X)$ l'espace des distributions sur Ω avec valeurs dans X .

Si $\Omega =]a, b[$, $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ désigne l'ensemble des distributions sur $]a, b[$ avec valeurs dans X .

De façon similaire on peut définir l'espace L^p pour les fonctions à valeurs vectorielles.

Definition 32 *Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p \leq \infty$. On note par $L^p(\Omega, X)$, l'ensemble des fonctions mesurables $u : x \in \Omega \rightarrow u(x) \in X$ tel que $\|u(x)\|_X \in L^p(\Omega)$.*

Proposition 33 *La quantité suivante :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega, X)} = \left(\int_{\Omega} \|u(x)\|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

définit une norme sur $L^p(\Omega, X)$, qui est un espace de Banach.

Si X est réflexif et $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega, X)$ est aussi réflexif. De plus, si X est séparable et $1 \leq p < \infty$, alors $L^p(\Omega, X)$ est aussi séparable.

Proposition 34 *Soient $B_0 \subset B \subset B_1$, trois espaces de Banach tels que B_0 et B_1 sont réflexifs. On suppose aussi que l'injection $B_0 \subset B$ est compacte. On définit*

$$W = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}(a, b; B_0), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p_1}(a, b; B_1) \right\},$$

avec $1 < p_0, p_1 < +\infty$. Alors

i) W est un espace de Banach par rapport à la norme définie par

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(a, b; B_0)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(a, b; B_1)},$$

ii) l'injection $W \subset L^{p_0}(a, b; B)$ est compacte.

Le théorème suivant joue un rôle important dans l'étude des équations aux dérivées partielles :

Theorem 35

On va définir les espaces de Banach

$$\begin{aligned} W &= \left\{ v \mid v \in L^2(a, b; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)) \right\}, \\ W_1 &= \left\{ v \mid v \in L^2(a, b; L^2(\Omega)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)) \right\}, \end{aligned}$$

munis la norme du graphe. Alors, les propriétés suivantes sont vraies :

i) les injections

$$W \subset L^2(a, b; L^2(\Omega)), \quad W_1 \subset L^2(a, b; H^{-1}(\Omega))$$

sont compactes,

ii) on a les inclusions

$$\begin{aligned} W &\subset C([a, b]; L^2(\Omega)), \\ W_1 &\subset C([a, b]; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

où, pour $X = L^2(\Omega)$ ou $X = H^{-1}(\Omega)$, on désigne par $C([a, b]; X)$ l'espace des fonctions mesurables sur $\Omega \times [a, b]$ tel que $u(\cdot, t) \in X$ pour tout $t \in [a, b]$ et tel que l'application $t \in [a, b] \mapsto u(\cdot, t) \in X$ est continue,

iii) pour tout $u, v \in W$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)v(x, t) \, dx &= \langle u'(\cdot, t), v(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \langle v'(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Proposition 36 Soient H un espace de Hilbert et $1 \leq p < \infty$. On a l'identification suivante :

$$[L^p(a, b; H)]' = L^{p'}(a, b; H'),$$

où p' est le conjugué de p .

En particulier, $[L^2(a, b; H_0^1(\Omega))]' = L^2(a, b; H^{-1}(\Omega))$, et si $f \in L^2(a, b; H^{-1}(\Omega))$, on a

$$\langle f, u \rangle_{L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(a, b; H_0^1(\Omega))} = \int_a^b \langle f(t), u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt,$$

pour tout $u \in L^2(a, b; H_0^1(\Omega))$.

1.4 Quelques problèmes variationnels elliptiques

Soit a une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H et $F \in H'$. On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle_{H', H}, \quad \forall v \in H \end{cases}$$

cette équation est dite équation variationnelle et $v \in H$ est appelée fonction test.

Theorem 37 Theorem 38 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit a une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H et $F \in H'$. On suppose que a est H -elliptique avec une constante α_0 . Alors l'équation variationnelle précédente a une unique solution $u \in H$.*

De plus,

$$\|u\|_H = \frac{1}{\alpha_0} \|F\|_{H'}.$$

Theorem 39 *Soient a une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert H et $F \in H'$. On suppose que a est positive et symétrique. Soit J la fonctionnelle sur H définie par*

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle_{H', H}, \quad \forall v \in H.$$

Alors u est solution de l'équation variationnelle si et seulement si u est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ J(u) = \inf_{v \in H} J(v). \end{cases}$$

Corollary 40 *On suppose que la forme a satisfait les hypothèses du Théorème 38 et qu'elle est symétrique. Soit $f \in H^1$ et J définie ci-dessus. Alors le problème précédent admet une unique solution.*

Definition 41 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que $0 < \alpha < \beta$. On note par $M(\alpha, \beta, \mathcal{O})$ l'ensemble des matrices $N \times N$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in (L^\infty(O))^{N \times N}$ tel que*

$$\begin{cases} \text{i) } & (A(x)\lambda, \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2 \\ \text{ii) } & |A(x)\lambda| \leq \beta |\lambda|, \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et p.p. sur \mathcal{O} .

Theorem 42 (Problème de Dirichlet Homogène).

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et on considère le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La formulation variationnelle correspondante est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i, j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} A\nabla u \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On suppose que la matrice A appartient à $M(\alpha, \beta, \Omega)$. Alors, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème. De plus,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad (1.1)$$

où $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution satisfait l'estimation

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_{\Omega}}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2)$$

où C_{Ω} est la constante de Poincaré donnée par Théorème 28.

Remark 43 *Si la matrice A est symétrique alors, du Corollaire 40 il s'en suit que la solution u donnée par Théorème 42, est un point minimum unique pour la fonctionnelle d'énergie J définie par*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\nabla v \nabla v dx - \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Deuxième partie

Exemples en homogénéisation

2 Position du problème :

Dans ce qui suit, Ω dénote, un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $\varepsilon > 0$ un paramètre prenant ses valeurs dans une suite qui tend vers zéro.

Soit

$$A^\varepsilon(x) = (a_{i,j}^\varepsilon(x))_{1 \leq i,j \leq n} \quad p.p. sur \Omega, \quad (2.1)$$

une suite de matrices non constantes telles que

$$A^\varepsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega). \quad (2.2)$$

Ceci signifie (voir Définition 41) que A^ε vérifie les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} (A^\varepsilon(x)\lambda, \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2 \\ |A^\varepsilon(x)| \leq \beta |\lambda|, \end{cases} \quad (2.3)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et p.p. sur Ω .

On introduit l'opérateur

$$A^\varepsilon = -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla) = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}). \quad (2.4)$$

Comme nous allons le voir, la théorie de l'homogénéisation permet de décrire le comportement asymptotique quand $\varepsilon \rightarrow 0$ des équations aux dérivées partielles de plusieurs types.

Pour commencer, on étudie l'équation

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = f \quad (2.5)$$

avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$.

Cette équation est un cas modèle, en particulier, pertinente à la fois du point de vue mathématique et celui des applications. En effet, les principales difficultés mathématiques survenant dans la théorie de l'homogénéisation, sont déjà présentes dans ce problème modèle.

D'une autre part, comme on va voir dans Section 2.2, les équations de type (2.5) modélisent les propriétés thermiques ainsi que les propriétés électriques ou linéaires élastiques des matériaux. Quand on traite de tels problèmes pour les matériaux composites, le paramètre ε décrit les hétérogénéités du matériau.

Un problème classique du type (2.5) est le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

où f est donnée dans $H^{-1}(\Omega)$. Du Théorème 42 il s'en suit que pour tout ε fixé, il existe une unique solution $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

De plus, l'estimation (1.1) est vérifiée, i.e.

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Par conséquent, du Théorème 2(i) et Proposition 22, il s'en suit qu'il existe une sous-suite, dénotée par $\{u^{\varepsilon'}\}$, et un élément u^0 tels que

$$u^{\varepsilon'} \rightharpoonup u^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (2.9)$$

On observe qu'à priori la limite u^0 dépend de la sous-suite pour laquelle (2.9) est vérifiée.

À ce stade deux questions naturelles se posent :

- u^0 satisfait-il quelques problèmes à valeurs aux bords dans Ω ?
- et si c'est le cas, u^0 est-il déterminé de façon unique ?

Dans le but d'étudier ces questions, nous allons introduire le vecteur

$$\xi^\varepsilon = (\xi_1^\varepsilon, \dots, \xi_N^\varepsilon) = \left(\sum_{j=1}^N \alpha_{1j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^N \alpha_{Nj}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon, \quad (2.10)$$

qui (voir (2.7)) satisfait

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.11)$$

Evidemment, de (2.2) et (2.8) il s'en suit que

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad (2.12)$$

Donc, toujours du Théorème 2(i) il existe une sous-suite, encore dénotée par $\{\xi^{\varepsilon'}\}$, et un élément $\xi^0 \in L^2(\Omega)$, tels que

$$\xi^{\varepsilon'} \rightharpoonup \xi^0 \text{ faiblement dans } (L^2(\Omega))^N. \quad (2.13)$$

D'où, on peut passer à la limite dans (2.11) écrite pour la sous-suite ε' , pour donner

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.14)$$

i.e.

$$-\operatorname{div} \xi^0 = f \quad \text{in } \Omega. \quad (2.15)$$

Par conséquent, la première question au dessus a une réponse positive si on peut écrire ξ^0 en fonction de u^0 .

2.1 Remarque (A constante, A non constante)

À ce stade on a deux cas différents, à savoir A constante et A non constante

2.1.1 Le cas A constante

Si A^ε est telle que

$$A^\varepsilon \longrightarrow \hat{A} \quad \text{fortement dans } [L^\infty(\Omega)]^{NxN}$$

on peut facilement donner une relation entre u^0 et ξ^0 . En effet, en vue de (2.9) et Proposition 3, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon'} \nabla u^{\varepsilon'} \varphi \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left\langle {}^t A_{\varepsilon'} \varphi, \nabla u^{\varepsilon'} \right\rangle_{[L^2(\Omega)]^N, [L^2(\Omega)]^N} \\ &= \left\langle {}^t \hat{A} \varphi, \nabla u^0 \right\rangle_{[L^2(\Omega)]^N, [L^2(\Omega)]^N} = \int_{\Omega} \hat{A} \nabla u^0 \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in [L^2(\Omega)]^N, \end{aligned}$$

où, pour toute matrice B , ${}^t B$ dénote sa transposée. Donc,

$$\xi^0 = \hat{A} \nabla u^0.$$

D'où, de (2.9) et (2.15) on déduit que u^0 est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\hat{A} \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Dû au théorème de Lax-Milgram, ce problème a une unique solution u^0 puisqu'évidemment, $\hat{A} \in M(\alpha, \beta, \Omega)$. Ainsi, dans ce cas on a aussi que la suite entière u^ε converge.

On signale que le cas considéré dans Remarque 2.1 est très particulier et n'est pas pertinent pour l'étude des matériaux composites. En effet, comme nous allons voir dans Section 2.3, pour des matériaux composites, une convergence forte pour la matrice A^ε ne peut jamais avoir lieu. Pour une suite de matrices satisfaisant (2.2) (périodique ou pas), on peut seulement déduire une compacité faible* dans $L^\infty(\Omega)$ (voir Remarque 12) de quelques matrices A^* .

D'une autre partie, le fait que A^ε satisfait (2.2) pour tout ε , implique l'existence d'une matrice A_0 (dépendant de la sous-suite ε'), telle que $\xi^0 = A_0 \nabla u^0$ et donc u^0 est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

avec

$$A_0 \in M(\alpha, \beta', \Omega) \quad (2.17)$$

pour quelques $\beta' \geq \beta$.

En général, A_0 est différente de A^* . De plus, on peut pas identifier uniquement la matrice A_0 et donc on peut pas dire que la suite entière u^ε converge vers u^0 .

Dans certaines situations, en particulier dans le cas périodique, on peut donner des formules explicites pour la matrice A_0 qui montrent que A_0 est indépendante de la sous-suite ε' .

Par conséquent, du Théorème 2(ii) il s'en suit que la suite entière u^ε converge vers u^0 . Dans ce cas le problème (2.16) est dit le problème homogénéisé, A_0 la matrice homogénéisée (ou efficace) et u^0 la solution homogénéisée.

2.1.2 Le cas A non constant

Nous allons maintenant introduire le cadre périodique général dans lequel nous allons travailler. On pose

$$Y =]0, l_1[\times \dots \times]0, l_N[.$$

où l_1, \dots, l_N sont des nombres positifs donnés. Y est dit la période référence ou la cellule de référence.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que $0 < \alpha < \beta$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice $N \times N$ telle que

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ est } Y\text{-périodique,} & \forall i, j = 1, \dots, N \\ A \in M(\alpha, \beta, Y), \end{cases} \quad (2.18)$$

où la périodicité est prise dans le sens de Définition 13 et la classe $M(\alpha, \beta, Y)$ est donnée par Définition 41 pour $\theta = Y$. i.e.

$$\begin{cases} (A(y)\lambda, \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2 \\ |A(y)\lambda| \leq \beta |\lambda|. \end{cases} \quad (2.19)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et p.p. sur Y .

On pose

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

et

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N. \quad (2.21)$$

Il est facile de vérifier que A^ε satisfait (2.2) et (2.3) pour tout ε . Alors, toutes les considérations au dessus restent vraies pour le problème (2.6) écrit pour A^ε donné par (2.21).

On observe que du Théorème 15 il s'en suit que si $\varepsilon \rightarrow 0$ alors

$$A^\varepsilon \rightharpoonup M_Y(A), \quad \text{faible* dans } L^\infty(\Omega), \quad (2.22)$$

où la matrice $(M_Y(A))_{ij}$ est définie par

$$(M_Y(A))_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ij}(y) dy. \quad (2.23)$$

De plus, de Remarque 17 nous savons qu'en général, la convergence (2.22) n'est pas forte. D'où, en vue des convergences (2.9) et (2.22), $A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ est le produit de deux suites qui convergent faiblement. De Remarque 16 nous allons savoir qu'en général

$$\xi^0 \neq M_Y(A) \nabla u^0,$$

avec ξ^0 est donné par (2.13).

2.2 Quelques modèles physiques

Dans cette section nous montrons comment quelques problèmes physiques classiques peuvent être modélisés par le problème de Dirichlet 2.6), introduit dans Section 2, aussi bien qu'avec des problèmes de valeurs aux bords que nous allons considérer dans ce mémoire.

Un matériau composite est un matériau contenant deux ou plusieurs composants finement mixés. Les matériaux composites sont largement utilisés actuellement dans n'importe quel type d'industrie, puisqu'ils ont des propriétés intéressantes. Il est connu dans la pratique qu'ils montrent en général un comportement meilleur (selon la performance qu'on cherche), que le comportement moyen de ses composants, des exemples classiques sont les céramiques ou les matériaux supraconducteurs multifilamentaires.

Dans une bonne composite, l'hétérogénéité est très petite comparée avec la dimension globale de l'échantillon. Plus les hétérogénéités sont petites plus le mélange est mieux, qui apparaît alors, à première vue, comme un matériau homogène. C'est pour cette raison qu'on peut supposer que les hétérogénéités sont uniformément réparties.

Du point de vue mathématique, on peut modéliser cette répartition en supposant qu'elle est périodique. Cette périodicité peut être représentée par un petit paramètre, ε .

En pratique, on est intéressé à connaître le comportement global du matériau composite lorsque les hétérogénéités sont très très petites. Ceci signifie que ε est trop petit, ce qui signifie mathématiquement faire tendre ε vers zéro.

Dans le modèle mathématique les principales caractéristiques constantes d'un matériau sont les coefficients d'une équation aux dérivées partielles. Pour un composite avec une répartition ε -périodique, ces coefficients dépendront clairement du paramètre ε , de sorte qu'ils sautent entre les différentes valeurs de la caractéristique de ses composants.

Ceci rend l'étude du modèle très difficile, en particulier du point de vue numérique. Egalement, la connaissance ponctuelle de la caractéristique de ses

composants du matériau ne fournit pas de manière simple toutes les informations sur le comportement global.

Comme nous allons voir à travers ce mémoire, quand nous passons à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, nous obtenons des problèmes limites "homogénéisés" avec coefficients constants. Ceci est très intéressant dans les applications puisque, comme il est bien connu des ingénieurs et physiciens, ces coefficients sont de bonnes approximations de la caractéristique globale du matériau composite, considérée comme homogène. De plus, en remplaçant le problème par le problème limite, on arrive à des calculs numériques faciles.

Nous allons introduire le modèle géométrique d'un mélange périodique correspondant aux problèmes que nous traitons dans ce mémoire. Pour simplifier, nous décrivons ici le cas d'un mélange de deux composants.

Soit Ω un domain occupé par le matériau, Y la cellule référence, $Y_1 \subset Y$ and $Y_2 \subset Y$ tels que

$$\bar{Y} = \bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$$

Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre prenant ses valeurs dans une suite qui tend vers zéro et on pose

$$\Omega_1^\varepsilon = \{x | x_1(\frac{x}{\varepsilon}) = 1\}, \quad \Omega_2^\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1^\varepsilon = \{x | x_2(\frac{x}{\varepsilon}) = 1\},$$

où x_i pour $i = 1, 2$, est la fonction caractéristique de l'ensemble Y_i (voir Définition 10) prolongé par périodicité avec période Y .

Par cette construction, l'ensemble Ω est recouvert par des pavés de cellules de la forme $\varepsilon Y = \varepsilon Y_1 \cup \varepsilon Y_2$ (voir Figure. 2.1).

On Remarque, en particulier, que si nous avons

$$Y_1 =]0, \frac{l_1}{2}[\times \dots \times]0, l_N[, \quad Y_2 =]\frac{l_1}{2}, l_1[\times \dots \times]0, l_N[$$

nous sommes dans le cas d'un matériau multicouche. (voir Fig. 2.2).

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, les cellules εY couvrant Ω sont de plus en plus petites et leurs nombre va à l'infini. Ceci signifie que, dans cette procedure, nous allons mélanger les deux matériaux (de mieux en mieux) dans le sens que les hétérogénéités sont de plus en plus fines (voir Figures 2.1 et 2.2). C'est pourquoi cette procedure est dite homogénéisation. En effet, dans ce processus d'homogénéisation, la proportion des matériaux est gardée constante. En fait, la proportion θ_i^ε du matériau occupant l'ensemble Ω_i^ε est donnée par

$$\theta_i^\varepsilon = \frac{|\Omega_i^\varepsilon|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} x_i(\frac{x}{\varepsilon}) dx, \quad (\theta_1^\varepsilon + \theta_2^\varepsilon = 1),$$

et de l'ordre d'une constante C_i , indépendamment de ε . En effet, de Théorème 15 on a, pour $\varepsilon \rightarrow 0$

$$x_i(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \rightarrow M_Y(x_i) = \frac{1}{|Y|} \int_Y x_i(y) dy = \frac{|Y_i|}{|Y|} \quad \text{faible* dans } L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

FIG. 2.1 -

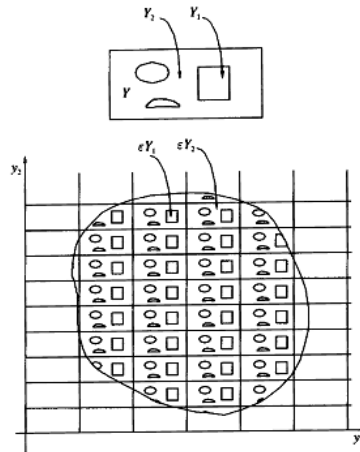
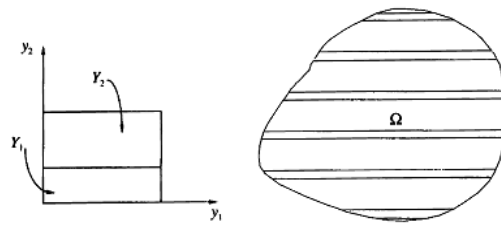


FIG. 2.2 -



Donc,

$$\theta_i^\varepsilon \longrightarrow C_1 = \frac{|Y_1|}{|Y|}, \quad \theta_2^\varepsilon \longrightarrow C_2 = \frac{|Y_2|}{|Y|}.$$

2.3 Le cas unidimensionnel

Dans cette Section nous présentons un problème unidimensionnel qui a été étudié par Spagnolo (1967).

Soit $\Omega =]d_1, d_2[$ un intervalle dans \mathbb{R} et considérons le problème

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f & \text{dans }]d_1, d_2[\\ u^\varepsilon(d_1) = u^\varepsilon(d_2) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Nous supposons ici que a est une fonction positive dans $L^\infty(0, l_1)$ telle que

$$\begin{cases} a \text{ est } l_1\text{-périodique,} \\ 0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < +\infty, \end{cases} \quad (2.25)$$

où α et β sont des constantes. La forme a^ε de (2.24) est la fonction définie par

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.26)$$

On a

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(d_1, d_2)} \leq \frac{d_2 - d_1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En effet, de la preuve de la Proposition 28, il est évident que pour $\Omega =]d_1, d_2[$, la constante de Poincaré C_Ω est égale à $d_2 - d_1$. Alors, on a toujours les convergences (2.9) pour une sous suite encore notée par ε , qui se lit

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } L^2(d_1, d_2) \\ \frac{du^\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{du^0}{dx} & \text{faiblement dans } L^2(d_1, d_2). \end{cases} \quad (2.27)$$

On définit

$$\xi^\varepsilon = \alpha^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}$$

qui satisfait

$$-\frac{d\xi^\varepsilon}{dx} = f \quad \text{dans }]d_1, d_2[. \quad (2.28)$$

De plus, de l'estimation sur u^ε et (2.25) on a

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(d_1, d_2)} \leq \frac{\beta(d_2 - d_1)}{\alpha} \|f\|_{L^2(d_1, d_2)}.$$

D'où, du Théorème 2 on a la convergence (modulo une sous-suite)

$$\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 \text{ faiblement dans } L^2(d_1, d_2). \quad (2.29)$$

De plus, la limite ξ^0 satisfait (voir (2.15))

$$-\frac{d\xi^0}{dx} = f \quad \text{dans }]d_1, d_2[. \quad (2.30)$$

Clairement, de la première estimation sur ξ^ε et de l'équation (2.28), nous avons

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(d_1, d_2)} + \left\| \frac{d\xi^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(d_1, d_2)} \leq \frac{\beta(d_2 - d_1)}{\alpha} \|f\|_{L^2(d_1, d_2)} + \|f\|_{L^2(d_1, d_2)}.$$

D'où, ξ^ε est borné dans $H^1(d_1, d_2)$, et donc compact dans $L^2(d_1, d_2)$ du au théorème 23. Par conséquent, il existe une sous suite, encore notée par ε , telle que

$$\xi^\varepsilon \longrightarrow \xi^0 \quad \text{fortement dans } L^2(d_1, d_2). \quad (2.31)$$

Nous allons maintenant établir la relation entre ξ^0 et u^0 .

Par définition

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{a^\varepsilon} \xi^\varepsilon. \quad (2.32)$$

L'hypothèse (2.25) implique que $\frac{1}{a^\varepsilon}$ est borné dans $L^\infty(d_1, d_2)$, puisque

$$0 < \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{a^\varepsilon} \leq \frac{1}{\alpha} < +\infty. \quad (2.33)$$

Ainsi, Théorème 15 s'applique à $1/a^\varepsilon$ et donne

$$\frac{1}{a^\varepsilon} \rightharpoonup M_{(0, l_1)} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{1}{a(x)} dx \quad \text{faiblement* dans } L^\infty(d_1, d_2),$$

où, dû à (2.33),

$$M_{(0, l_1)} \left(\frac{1}{a} \right) \neq 0. \quad (2.34)$$

D'où, en utilisant (2.31) et en vue de Proposition 3, on peut passer à la limite dans le produit 'faible-fort' sur la partie droite dans (2.32), pour obtenir

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \rightharpoonup M_{(0, l_1)} \left(\frac{1}{a} \right) \xi^0 \quad \text{faiblement dans } L^2(d_1, d_2).$$

Par conséquent, de (2.27) on a

$$\frac{du^0}{dx} = M_{(0, l_1)} \left(\frac{1}{a} \right) \xi^0.$$

En utilisant maintenant (2.30), il s'en suit que u^0 est solution de l'équation limite 'homogénéisée' :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{M_{(0,t_1)}(\frac{1}{a})} \frac{du^0}{dx} \right) = f & \text{dans }]d_1, d_2[\\ u^0(d_1) = u^0(d_2) = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Dû à (2.34), ce problème a une unique solution. D'où, d'après le théorème 2(ii), la suite entière $\{u^\varepsilon\}$ converge faiblement dans $H_0^1(d_1, d_2)$ vers u^0 .

Et donc on a le théorème suivant :

Theorem 1

Soient $f \in L^2(d_1, d_2)$ et a^ε définie par (2.25) et (2.26). Soit $u^\varepsilon \in H_0^1(d_1, d_2)$ la solution du problème (2.24). Alors,

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(d_1, d_2).$$

où u^0 est l'unique solution dans $H_0^1(d_1, d_2)$ du problème

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{M_{(0,t_1)}(\frac{1}{a})} \frac{du^0}{dx} \right) = f & \text{dans }]d_1, d_2[\\ u^0(d_1) = u^0(d_2) = 0. \end{cases}$$

Remark 2 Dans ce cas particulier de dimension une, puisque $M_{(0,t_1)}(1/a)$ est une constante, on peut calculer explicitement la solution limite u^0 . Par exemple, si $]d_1, d_2[=]0, 1[$, on a

$$u^0(x) = -M_{(0,t_1)} \left(\frac{1}{a} \right) \int_0^x dy \int_0^y f(t) dt + M_{(0,t_1)} \left(\frac{1}{a} \right) \left(\int_0^1 dy \int_0^y f(t) dt \right) x.$$

Remark 3 On observe que le coefficient de l'équation limite (2.35) dépend seulement de a .

Remark 4 Puisqu'en général, la valeur moyenne $1/[M_{(0,t_1)}(1/a)]$ de a est différente de sa valeur moyenne arithmétique $M_{(0,t_1)}(a)$, on a clairement

$$\frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} \frac{du^0}{dx} \neq M_{(0,l_1)}(a) \frac{du^0}{dx},$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(a^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \neq \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a^\varepsilon \right) \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{du^\varepsilon}{dx} \right),$$

dans le sens de la convergence faible dans L^2 .

Remark 5 *On a considéré ici le cas périodique. On suppose maintenant que $\{u^\varepsilon\}$ est une suite (pas forcément périodique) telle que*

$$0 < \alpha \leq a^\varepsilon(x) \leq \beta < +\infty.$$

Alors, dû au Théorème 5, il existe une sous-suite ε' telle que

$$\frac{1}{a^{\varepsilon'}} \rightharpoonup a^0 \quad \text{faiblement* dans } L^\infty(d_1, d_2).$$

Soit u^ε une solution de (2.24). Les mêmes arguments que dans la du Théorème 2.5, montrent que

$$u^{\varepsilon'} \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(d_1, d_2).$$

où u^0 est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a_0} \frac{du^0}{dx} \right) = f & \text{dans }]d_1, d_2[\\ u^0(d_1) = u^0(d_2) = 0. \end{cases}$$

2.4 Les matériaux multicouches

Le résultat obtenu par le cas unidimensionnel pourra suggérer que dans le cas N-dimensionnel le problème limite peut être décrit en fonction de la valeur moyenne de la matrice inverse A^{-1} de A . Ceci n'est pas vrai, comme il peut être déjà vu dans le cas des matériaux en couches qu'on traite dans cette section, où les coefficients homogénéisés sont à nouveau la valeur principal des expressions algébriques des composants de A (mais pas seulement ceux de A^{-1}).

Dans le cas des matériaux en couches les coefficients dans le système (2.6) dépendent d'une seule variable. Pour simplifier, on se restreint au cas bidimensionnel périodique. Donc, dans cette section, Ω désigne un ouvert borné dans \mathbb{R}^2 et

$$Y =]0, l_1[\times]0, l_2[.$$

où l_1, l_2 sont des nombres positifs donnés.

On suppose alors que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ est une matrice 2×2 telle que

$$a_{ij}(y) = a_{ij}(y_1, y_2) = a_{ij}(y_1), \quad \forall i, j \in \{1, 2\}, \quad (2.36)$$

et satisfait (2.18), cela dit

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ est } l_1\text{-périodique,} & \forall i, j \in \{1, 2\} \\ A \in M(\alpha, \beta, Y). \end{cases}$$

On pose, comme précédemment,

$$\begin{cases} a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}^\varepsilon(x_1) = a_{ij}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^2, \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \\ A^\varepsilon(x) = A^\varepsilon(x_1) = A\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq 2} & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Le problème (2.6) se lit

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^\varepsilon(x_1) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.38)$$

Toutes les considérations dans Section 2 concernant le problème (2.6) tiennent toujours pour ce cas particulier.

On observe du problème (2.38) que l'estimation (1.2) reste vraie, i.e.

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_Ω est la constante de Poincaré donnée par Proposition 28. On a également,

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\beta C_\Omega}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.39)$$

où (voir (2.10)) ξ^ε est défini par

$$\xi^\varepsilon = (\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon) = \left(\sum_{j=1}^2 a_{1j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^2 a_{2j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (2.40)$$

et satisfait

$$-\frac{\partial \xi_1^\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2^\varepsilon}{\partial x_2} = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.41)$$

Comme il a été prouvé dans Section 2 (voir (2.9) et (2.13)) on a les convergences suivantes pour une sous-suite encore notée par ε ,

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^2. \end{cases}$$

De plus $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ satisfait

$$-\frac{\partial \xi_1^0}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2^0}{\partial x_2} = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.42)$$

La question est de relier ξ^0 à la fonction limite u^0 . En effet, on ne peut pas calculer directement la limite de (2.40) puisque, comme remarqué avant, dans cette formule on a des produits de suites convergentes seulement au sens faible; ni utiliser l'équation (2.41) pour obtenir, comme on a fait pour le cas unidimensionnel, plus d'informations sur $\partial \xi_1^\varepsilon / \partial x_1$ ou $\partial \xi_2^\varepsilon / \partial x_2$ séparément. L'idée est donc d'utiliser un résultat de compacité dans le but d'obtenir une convergence forte dans quelques espaces fonctionnels. C'est à ce point que le fait que les coefficients dépendent d'une variable seulement est essentiel puisque, dû à cette propriété, on prouve une convergence forte pour la suite ξ_1^0 . Les outils pour faire ça sont la Proposition 34 et Théorème 35 traitant les fonctions vectorielles.

on va identifier ξ^0 sur tout intervalle ouvert I de Ω de la forme

$$I =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\subset \Omega.$$

Dû à la forme particulière de I , l'espace $L^2(I)$ peut être vu comme un espace vectoriel puisque le théorème de Fubini implique

$$L^2(I) = L^2(a_1, b_1; L^2(a_2, b_2)). \quad (2.43)$$

Par conséquent, de (2.39) on a en particulier

$$\|\xi_i^\varepsilon\|_{L^2(a_1, b_1; L^2(a_2, b_2))} \leq C, \quad i = 1, 2, \quad (2.44)$$

où C est une constante indépendante de ε .

On va maintenant prouver que

$$\left\| \frac{\partial \xi_1^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2))} \leq C. \quad (2.45)$$

À partir de 2.41), on a

$$-\frac{\partial \xi_1^\varepsilon}{\partial x_1} = f + \frac{\partial \xi_2^\varepsilon}{\partial x_2} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.46)$$

et on va estimer le coté des termes de droite.

D'une part, puisque f appartient à $L^2(\Omega)$, alors à partir de (2.43) il s'en suit que $f \in L^2(a_1, b_1; L^2(a_2, b_2)) \subset L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2))$ avec

$$\|f\|_{L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2))} \leq \|f\|_{L^2(a_1, b_1; L^2(a_2, b_2))}, \quad (2.47)$$

qui est une conséquence de la Proposition 29.

D'une autre part, de Proposition 36, pour tout $v \in L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2))$, on a

$$\left\{ \left\langle \frac{\partial \xi_2^\varepsilon}{\partial x_2}, v \right\rangle_{L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2)), L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2))} \right\} = - \int_{a_1}^{b_1} \left\langle \frac{\partial \xi_2^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, \cdot), v(x_1, \cdot) \right\rangle_{H^{-1}(a_2, b_2), H_0^1(a_2, b_2)} dx_1.$$

Par ailleurs, Remarque 30, la formule de Green (Théorème 26) et Proposition 27 mènent à

$$\int_{a_1}^{b_1} \left\langle \frac{\partial \xi_2^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, \cdot), v(x_1, \cdot) \right\rangle_{H^{-1}(a_2, b_2), H_0^1(a_2, b_2)} dx_1 = - \int_{a_1}^{b_1} \left\langle \xi_2^\varepsilon(x_1, \cdot), \frac{\partial v(x_1, \cdot)}{\partial x_2} \right\rangle_{L^2(a_2, b_2), L^2(a_2, b_2)} dx_1. \quad (2.48)$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.44), on a successivement

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \frac{\partial \xi_2^\varepsilon}{\partial x_2}, v \right\rangle_{L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2)), L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2))} \right| \\ & \leq \int_{a_1}^{b_1} \|\xi_2^\varepsilon\|_{L^2(a_2, b_2)} \|v\|_{H_0^1(a_2, b_2)} dx_1 \\ & \leq C \|v\|_{L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2))}. \end{aligned}$$

Ceci, avec (2.46) et (2.47), donne (2.45). Les estimations (2.44) et (2.45) impliquent que ξ_1^ε est bornée dans l'espace W_1 défini par

$$W_1 = \left\{ v \mid v \in L^2(a_1, b_1; L^2(a_2, b_2)), \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2)) \right\}.$$

Par Théorème 35 on sait que l'injection suivante est compacte :

$$W_1 \subset L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2)).$$

Donc, la suite ξ_1^ε est compacte dans $L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2))$. Ceci, en combinaison avec sa convergence faible vers ξ^0 dans $L^2(I)$, donne

$$\xi_1^\varepsilon \longrightarrow \xi_1^0 \text{ fortement dans } L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2)). \quad (2.49)$$

On montre maintenant que cette convergence est suffisante pour identifier ξ_1^0 et ξ_2^0 en terme de u^0 .

Pour commencer, on observe que de la définition de ξ_1^ε (voir (2.40)) et en tenant compte du fait que a_{ij}^ε sont dépendants seulement de x_1 , on a

$$\begin{aligned}
 \int_I \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \varphi \, dx &= \int_I \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon \varphi \, dx - \int_I \frac{a_{12}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \varphi \, dx \\
 &= \int_I \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon \varphi \, dx - \int_I \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a_{12}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} u^\varepsilon \right) \varphi \, dx \\
 &= \int_I \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon \varphi \, dx + \int_I \frac{a_{12}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} u^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx, \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in D(I)$. On va maintenant passer à la limite dans les deux parties de cette identité. Pour faire ainsi, on remarque d'abord que, par les mêmes arguments comme ceux pour prouver (2.48), on a

$$\begin{aligned}
 \int_I \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon \varphi \, dx &= \int_{a_1}^{b_1} \left\langle \xi_1^\varepsilon(x_1, \cdot), \frac{\varphi(x_1, \cdot)}{a_{11}^\varepsilon(x_1)} \right\rangle_{H^{-1}(a_2, b_2), H_0^1(a_2, b_2)} \, dx_1 \\
 &= \left\langle \xi_1^\varepsilon, \frac{\varphi}{a_{11}^\varepsilon} \right\rangle_{L^2(a_1, b_1; H^{-1}(a_2, b_2)), L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2))}. \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

De plus, $\varphi/a_{11}^\varepsilon$ est bornée dans $L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2))$. Pour voir ça, on observe d'abord qu'en choisissant $\lambda = (0, 1)$ dans la condition de coercivité de (2.3), on a

$$0 < \alpha \leq a_{11}^\varepsilon \quad \text{p.p. sur }]0, l_1[,$$

d'où

$$0 < \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\varphi(x_1, x_2)}{a_{11}^\varepsilon(x_1)} \right) \right|^2 dx_2 &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{(a_{11}^\varepsilon(x_1))^2} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|^2 dx_2 \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|^2 dx_2 dx_1 \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|\varphi\|_{H^1(I)}^2. \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

D'une autre partie, si $\{h^\varepsilon\}$ est une suite dans $L^2(a_1, b_1)$ alors

$$(h^\varepsilon \rightharpoonup h^0 \text{ faiblement dans } L^2(a_1, b_1)) \Rightarrow (h^\varepsilon \varphi \rightharpoonup h^0 \varphi \text{ faiblement dans } L^2(I)), \tag{2.53}$$

pour tout $\varphi \in D(I)$. Ceci s'ensuit par le théorème de Fubini, puisque

$$\int_I h^\varepsilon \varphi \psi \, dx = \int_{a_1}^{b_1} h^\varepsilon(x_1) \left[\int_{a_2}^{b_2} \varphi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$

pour tout $\psi \in L^2(I)$. Alors, (2.53) appliqué à $h^\varepsilon = 1/a_{11}^\varepsilon$ avec le Théorème 15, montre que

$$\frac{\varphi}{a_{11}^\varepsilon} \rightharpoonup M_{(0,l_1)} \left(\frac{1}{a_{11}} \right) \varphi = \frac{1}{\check{a}_{11}} \varphi \quad \text{faiblement dans } L^2(I),$$

où on a utilisé la définition de \check{a}_{11} dans l'énoncé du Théorème 2.10. Alors,

$$\frac{\varphi}{a_{11}^\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{\check{a}_{11}} \varphi \quad \text{faiblement dans } L^2(a_1, b_1; H_0^1(a_2, b_2)).$$

puisqu'il est borné dans cet espace.

Par conséquent, en utilisant (2.49) et Proposition 3, on peut passer à la limite dans (2.51) pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_I \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon \varphi \, dx = \frac{1}{\check{a}_{11}} \int_I \xi_1^0 \varphi \, dx. \quad (2.54)$$

On rappelle maintenant qu'à partir de (2.9) et Théorème 23 on a en particulier

$$u_1^\varepsilon \rightarrow u_1^0 \quad \text{fortement dans } L^2(I). \quad (2.55)$$

Ceci, avec (2.53) et Proposition 3, montre que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_I \frac{a_{12}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} u^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx &= M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \int_I u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx \\ &= -M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \int_I \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \varphi \, dx, \end{aligned} \quad (2.56)$$

où on a utilisé Définition 20.

D'où, en passant à la limite dans (2.50), dû à (2.54) et (2.56), on obtient

$$\int_I \frac{\partial u^0}{\partial x_1} \varphi \, dx = \frac{1}{\check{a}_{11}} \int_I \xi_1^0 \varphi \, dx - M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \int_I \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in D(I).$$

Par conséquent, Théorème 11 implique que

$$\frac{\partial u^0}{\partial x_1} = \frac{1}{\check{a}_{11}} \xi_1^0 - M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_2},$$

p.p. sur I et donc sur Ω , puisque I est arbitraire.

Ceci, avec la définition de a_{12}^0 , identifie ξ_1^0 comme

$$\xi_1^0 = \check{a}_{11} \frac{\partial u^0}{\partial x_1} + \check{a}_{11} M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_2} = \check{a}_{11} \frac{\partial u^0}{\partial x_1} + \check{a}_{12} \frac{\partial u^0}{\partial x_2}. \quad (2.57)$$

On va maintenant identifier ξ_2^0 . En utilisant encore la Définition (2.40) et le fait que a_{ij}^ε sont dépendants de x_1 seulement, on a

$$\xi_2^\varepsilon = a_{21}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} + a_{22}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} = \frac{a_{21}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(a_{22}^\varepsilon - \frac{a_{12}^\varepsilon a_{21}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} \right) u^\varepsilon \right]. \quad (2.58)$$

Les mêmes arguments comme ceux utilisés pour prouver (2.54) et (2.56), donnent respectivement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_I \frac{a_{21}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} \xi_1^\varepsilon \varphi \, dx = M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \int_I \xi_1^0 \varphi \, dx,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_I \left(a_{22}^\varepsilon - \frac{a_{12}^\varepsilon a_{21}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon} \right) u^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx = -M_{(0,l_1)} \left(a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right) \int_I \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \varphi \, dx.$$

D'où, à partir de (2.58) on obtient

$$\xi_2^0 = M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \xi_1^0 + M_{(0,l_1)} \left(a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right) u^0,$$

qui, avec (2.57) et la définition de \check{a}_{22} , mènent à

$$\begin{aligned} \xi_2^0 &= \check{a}_{11} M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_1} \\ &+ \left[\check{a}_{11} M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) M_{(0,l_1)} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) + M_{(0,l_1)} \left(a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right) \right] \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \\ &= \check{a}_{21} \frac{\partial u^0}{\partial x_1} + \check{a}_{22} \frac{\partial u^0}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

En remplaçant cette égalité et (2.57) dans (2.42), on obtient l'équation :

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\check{a}_{ij} \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.59)$$

Il reste à montrer que le problème (2.59) a une unique solution. Ceci va impliquer que la suite entière u^ε converge vers la limite u^0 .

Pour faire ainsi, en vue du théorème de Lax-Milgram, il suffit de montrer que la matrice constante $\check{A} = (\check{a}_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ satisfait la condition d'ellipticité. De (2.19) et la caractérisation de la matrice définie positive il s'ensuit que a_{11} et $(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$ sont positifs presque partout dans Y . Ceci implique que \check{a}_{11} et $M_{(0,l_1)}(a_{22} - a_{12} a_{21} / a_{11})$ sont aussi des constantes positives.

Alors, un calcul facile montre que le déterminant de \check{A} est aussi positif. Ceci, avec la positivité de \check{a}_{11} , implique

$$\sum_{i,j=1}^2 \check{a}_{ij}(y) \xi_i \xi_j > 0, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2, \xi \neq 0.$$

Pour finir, soit h la fonction suivante :

$$h(\varsigma, \varsigma) = \sum_{i,j=1}^2 \check{a}_{ij}(y) \varsigma_i \varsigma_j.$$

Cette fonction est continue sur la sphère unité S_1 qui est un compact de \mathbb{R}^2 . D'où, h atteint son minimum sur S_1 et, dû au résultat précédent, ce minimum est positif. Donc, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$h(\varsigma, \varsigma) \geq \alpha_0, \quad \forall \varsigma \in S_1.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i,j=1}^2 \check{a}_{ij} \xi_i \xi_j = |\xi|^2 \sum_{i,j=1}^2 \check{a}_{ij} \frac{\xi_i}{|\xi|} \frac{\xi_j}{|\xi|} \geq \alpha_0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2, \xi \neq 0,$$

puisque le vecteur $(\xi_1/|\xi|, \xi_2/|\xi|)$ appartient à S_1 .

Ce qui nous mène au résultat suivant :

Le prochain résultat est dû à Murat et Tartar (Murat, 1978a, Murat and Tartar 1997a et Tartar 1977a) :

Theorem 6 Soient $f \in L^2(\Omega)$ et a_{ij}^ε satisfaisant (2.18) , (2.36) et (2.37) . Soit $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ une solution du problème (2.38) . Alors,

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

où u^0 est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème homogénéisé

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\check{a}_{ij} \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La matrice $\check{A} = (\check{a}_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ est une matrice définie positive donnée par

$$\begin{aligned} \check{a}_{11} &= \frac{1}{M_{(0,t_1)} \left(\frac{1}{a_{11}} \right)} \\ \check{a}_{12} &= \check{a}_{11} M_{(0,t_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \\ \check{a}_{21} &= \check{a}_{11} M_{(0,t_1)} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \\ \check{a}_{22} &= \check{a}_{11} M_{(0,t_1)} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) M_{(0,t_1)} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) + M_{(0,t_1)} \left(a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right). \end{aligned}$$

Remark 7 Comme pour le cas unidimensionnel, les coefficients du problème limite dépendent seulement de la matrice A , et non des autres données f et Ω .

C'est seulement pour la simplicité qu'on a traité le cas bidimensionnel des matériaux en couches. Un résultat similaire reste vrai pour le cas N -dimensionnel. En effet, on suppose maintenant que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est une matrice $N \times N$ satisfaisant

$$a_{ij}(y) = a_{ij}(y_1, \dots, y_N) = a_{ij}(y_1), \quad i, j \in \{1, \dots, N\},$$

et (2.36). Alors, on a le résultat suivant (voir Murat et Tartar, 1997a) :

Theorem 8 Soit Ω un domain borné de \mathbb{R}^N . Sous les hypothèses du Théorème 6, si $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ est la solution du problème (2.59), alors

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

où u^0 est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\check{a}_{ij} \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La matrice $\check{A} = (\check{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ est une matrice constante définie positive et ses coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} \check{a}_{11} &= \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} \\ \check{a}_{1j} &= \check{a}_{11} M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right), & \text{pour } 2 \leq j \leq N \\ \check{a}_{j1} &= \check{a}_{11} M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{j1}}{a_{11}}\right), & \text{pour } 2 \leq j \leq N \\ \check{a}_{ij} &= \check{a}_{11} M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right) M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) + M_{(0,l_1)}\left(a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i2}}{a_{11}}\right) & \text{pour } 2 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Les démarches utilisées sont exactement celles utilisées pour obtenir le Théorème 6 avec des modifications évidentes.

Références

- 1- H. Brezis (1987) Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris.
- 2- D. Cioranescu and P. Donato (1999) An introduction to homogenization, Oxford Lecture Series In Mathematics And Its Applications ; 17.