

Contents

1	Processus de branchement et croissance de la population	3
1.1	Processus de branchement	3
1.1.1	Exemples de processus de branchement	3
1.1.2	Moyenne et variance du processus de branchement	5
1.1.3	Probabilités d'extinction	6
1.2	Processus de branchement et fonctions génératrices	8
1.2.1	Fonction génératrice et Probabilité d'extinction	10
1.2.2	Fonctions génératrices et sommes de variables aléatoires indépendantes	13
1.3	Loi des descendants	16
1.3.1	Théorème limite conditionnel	19
1.4	Exemples de processus de branchement	21
1.4.1	Processus de branchement multiple	21
1.4.2	Processus de branchement avec immigration	23
1.4.3	Processus de branchement avec décès	25
1.5	Quelques modèles de reproduction Plasmides et le nombre de partition des copies Plasmides	27
1.5.1	Processus de reproduction	28
1.5.2	Lignées aléatoires de descendance	29
1.6	Processus de croissance de population avec types d'interaction	31
1.7	Croissance de la population déterministe avec la loi de l'âge	33
1.7.1	Modèle simple de croissance	33
1.7.2	Modèle de structure d'âge	33
2	Files d'attente	41
2.1	Processus de files d'attente	41
2.2	Arrivées poissonniennes et temps de service exponentielles	44
2.3	Files $M/G/1$ et $M/G/\infty$	52
2.4	Quelques extensions	58
2.4.1	Systèmes avec " <i>Balking</i> "	58
2.4.2	Taux de service variables	59
2.4.3	Système avec " <i>Feedback</i> "	60
2.4.4	Files d'attente à deux serveurs " <i>overflow</i> " (débordement)	61
2.4.5	Files d'attente avec priorité	63

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, nous étudions des résultats très généraux connus dans la littérature sur une classe de chaînes de Markov utilisée en dynamique des populations. La plus importante concerne les chaînes de Markov appelées Processus de branchement qui décrivent la croissance de population dans plusieurs domaines (économie, biologie,...) Un des problèmes importants est l'étude de la probabilité d'extinction.

L'étude se fait par l'intermédiaire de la fonction génératrice de la loi de reproduction.

Nous donnons le calcul de cette probabilité dans plusieurs exemples de chaînes de Markov.

Nous présentons aussi des modèles de processus de branchement multiple, avec immigration et avec décès et aussi quelques modèles de reproduction.

Nous terminons le chapitre 1 par des modèles de croissance de population.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une étude sur quelques files d'attente et nous donnons aussi quelques extensions avec des disciplines particulières.

1 Processus de branchement et croissance de la population

1.1 Processus de branchement

Supposons qu'un organisme (en fin de durée de vie) produit un nombre aléatoire de descendants ξ de loi de probabilité

$$P(\xi = k) = p_k \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

où

$$p_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

.On suppose à chaque génération que les descendants agissent de façon indépendante les uns des autres et à la fin de leurs vies ont individuellement une progéniture suivant la loi de probabilités (1.1). Pour simplifier on suppose aussi que les durées de vie de tous les organismes sont des v.a. iid perpétuant ainsi leurs espèces.

Nous notons X_n la taille de la population à la $n^{\text{ème}}$ génération. Le processus (X_n) est une chaîne de Markov appelée **processus de branchement**. La propriété de Markov peut être simplement vue comme suit:

- à la $n^{\text{ème}}$ génération les X_n individus donnent indépendamment naissance à des descendants : $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_{X_n}^{(n)}$

Ainsi le nombre d'individus à la $(n + 1)^{\text{ème}}$ génération est:

$$X_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_{X_n}^{(n)} \quad (1.2)$$

La propriété de Markov se déduit de :

$$P(X_{n+1} = k / X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_n = x_n)$$

1.1.1 Exemples de processus de branchement

Il existe de nombreux exemples de processus de branchement qui se posent naturellement dans plusieurs disciplines scientifiques :

économie, biologie, médecine, physique,

Nous donnons les cas les plus importants:

Ex. 1 Multiplicateurs d'électrons

En électronique, un multiplicateur d'électrons est un dispositif qui amplifie un courant faible d'électrons. Une série de plaques est mise en place sur le trajet des électrons émis par une source. Chaque électron, en heurtant la première plaque, génère un nombre variable de nouveaux électrons. A leurs tour ces

électrons heurtent la plaque suivante et produisent de nouveau des électrons, et ainsi de suite.

Soit X_0 le nombre d'électrons initialement émis, X_1 le nombre d'électrons produit lors du premier impact (dû à X_0 électrons).

Soit X_n le nombre d'électrons émis lors du $n^{\text{ème}}$ impact issu de la $(n - 1)^{\text{ème}}$ plaque.

La suite de variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ constitue ainsi un processus de branchement.

Ex. 2 Réaction de neutrons en chaîne

Lors d'une collision d'un noyau avec des neutrons, la fission résultante produit un nombre aléatoire de nouveaux neutrons. Chacun de ces neutrons secondaires entre en collision avec d'autres noyaux produit un nombre aléatoire de nouveaux neutrons. etc.

Dans ce cas, le nombre initial de neutrons est $X_0 = 1$. La première génération de neutrons comprend tous ceux produits par la fission provoquée par le neutron initial, la taille de la première génération est une variable aléatoire X_1 . En général, X_n est la population de la $n^{\text{ème}}$ génération suite à la collision des X_{n-1} neutrons de la $(n - 1)^{\text{ème}}$ génération.

Ex.3 Survie des noms de famille

Le nom de famille est hérité seulement par les fils. Supposons que chaque individu a une probabilité p_k d'avoir k descendants mâles. Ainsi nous obtenons de cet individu initial: $1^{\text{ère}}, 2^{\text{ème}}, \dots, n^{\text{ème}}, \dots$ générations de descendants.

En général, X_n est le nombre d'individus de la $n^{\text{ème}}$ génération. On peut étudier dans ce cas la probabilité d'extinction du nom de famille qui sera traitée dans l'analyse générale des processus de branchement dans ce chapitre.

Ex.4 Survie des gènes mutants

En biologie, chaque gène a une probabilité de donner naissance à k gènes (descendants) ($k = 1, 2, \dots$) de même type. Cependant, tout gène a une probabilité de se transformer en un type de gène différent (gène mutant). Ce dernier gène mutant devient ainsi le premier d'une séquence de générations. On se pose des questions sur les probabilités de survie du gène mutant dans une population des gènes originaux. Dans cet exemple, le nombre de descendants d'une génération est supposé suivre une loi de Poisson. La justification du choix de cette loi est comme suit : dans plusieurs populations un grand nombre de zygotes (œufs fécondés) est produit mais juste un petit nombre arrive à la maturité. Les événements de fertilisation et de maturation de différents zygotes obéissent à des lois binomiales indépendantes.

Le nombre d'essais (i.e le nombre de zygotes) est grand on sait que la loi des événements rares implique que le nombre de descendants qui arrivent à la maturité suivent approximativement une loi de Poisson (on approxime la loi binomiale par une loi de Poisson sous des conditions). L'hypothèse de loi de Poisson semble tout à fait appropriée dans le modèle de croissance de la population du gène mutant rare. Si le gène mutant porte un avantage biologique (ou inconvénient), alors la loi de probabilité choisie est une loi de Poisson de moyenne $\lambda > 1$ ou (< 1).

Tous les exemples précédents possèdent la structure suivante: soit X_0 la taille de la population initiale, chaque individu donne naissance à k nouveaux individus avec une probabilité p_k indépendamment des autres. Le nombre des descendants directs de la population initiale constitue la 1^{ère} génération de taille X_1 . Chaque individu de la 1^{ère} génération donne indépendamment un nombre de descendants suivant la loi de probabilité (1.1). Les descendants obtenus constituent la seconde génération de taille X_2 .

En général, la $n^{\text{ème}}$ génération est composée de descendants de la $(n-1)^{\text{ème}}$ génération, obtenus indépendamment suivant la loi de probabilité $p_k, k = 0, 1, 2, \dots$. La taille de la population de la $n^{\text{ème}}$ génération est notée X_n .

La suite (X_n) forme une suite de variables aléatoires à valeurs entières qui génère une chaîne de Markov suivant la formule (1.2).

1.1.2 Moyenne et variance du processus de branchement

L'équation (1.2) caractérise l'évolution du processus de branchement (X_n) comme somme aléatoire de variables aléatoires.

Soit

$$\mu = E(\xi) \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \text{var}(\xi)$$

la moyenne et la variance de la loi de descendants (1.1) respectivement.

Soit $M(n) := E(X_n)$ et $V(n) = V(X_n)$ la moyenne et la variance de X_n sous la condition initiale $X_0 = 1$.

Alors on a (Formule de Wald)

$$M(n+1) = \mu M(n) \tag{1.3}$$

et

$$V(n+1) = \sigma^2 M(n) + \mu^2 V(n) \tag{1.4}$$

$X_0 = 1$ est la condition initiale pour les récurrences (1.3) et (1.4) où $M(0) = 1$ et $V(0) = 0$.

De (1.3) on obtient:

$$\begin{aligned} M(1) &= \mu M(0) = \mu \\ M(2) &= \mu M(1) = \mu^2 \end{aligned}$$

D'où

$$M(n) = \mu^n \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \dots \tag{1.5}$$

Donc, la taille moyenne de la population

- croît géométriquement quand $\mu > 1$
- décroît géométriquement quand $\mu < 1$
- et reste constante quand $\mu = 1$.

Le remplacement de $M(n) = \mu^n$ dans (1.4) donne

$$V(n+1) = \sigma^2 \mu^n + \mu^2 V(n)$$

qui avec $V(0) = 0$ donne:

$$\begin{aligned} V(1) &= \sigma^2 \\ V(2) &= \sigma^2 \mu + \mu^2 V(1) = \sigma^2 \mu + \sigma^2 \mu^2 \\ V(3) &= \sigma^2 \mu^2 + \mu^2 V(2) = \sigma^2 \mu^2 + \sigma^2 \mu^3 + \sigma^2 \mu^4 \end{aligned}$$

en général,

$$\begin{aligned} V(n) &= \sigma^2 [\mu^{n-1} + \mu^n + \dots + \mu^{2n-2}] \\ &= \sigma^2 \mu^{n-1} [1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}] \\ &= \sigma^2 \mu^{n-1} \begin{cases} n & \text{si } \mu = 1 \\ \frac{1-\mu^n}{1-\mu} & \text{si } \mu \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Par conséquent, la variance de la taille de la population croit :

- géométriquement si $\mu > 1$
- linéairement si $\mu = 1$
- décroît géométriquement si $\mu < 1$.

1.1.3 Probabilités d'extinction

L'extinction d'une population a lieu si le nombre de ses individus est égale à zéro. Le temps aléatoire T jusqu'à l'extinction est donc le premier instant n pour lequel $X_n = 0$:

$$T = \min\{n \geq 1, X_n = 0\}$$

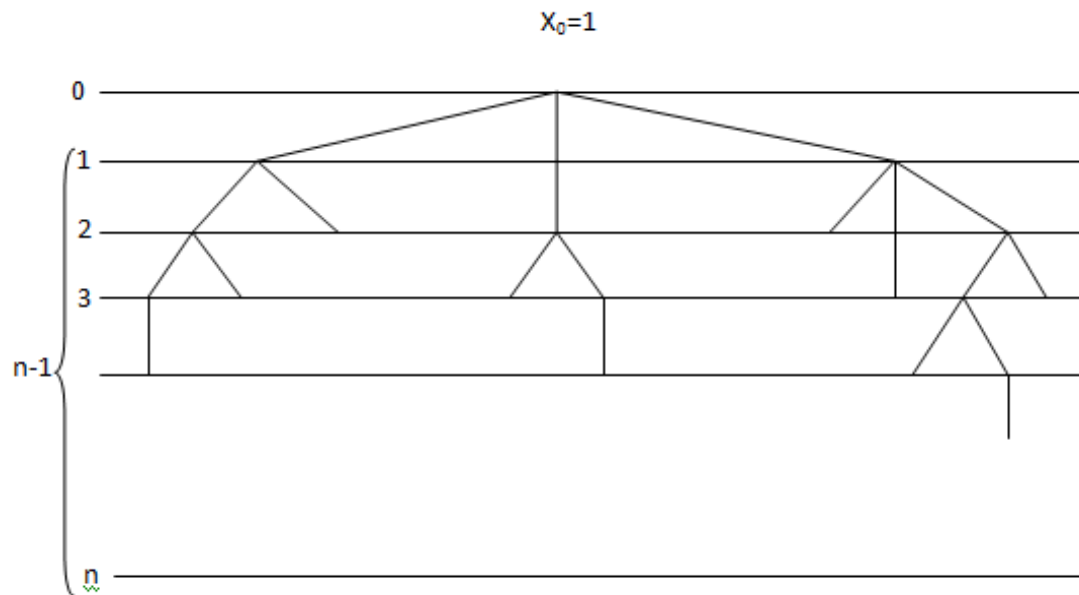
et alors $X_k = 0 \forall k \geq T$.

En terminologie des chaînes de Markov 0 est un état absorbant. Pour calculer la probabilité d'extinction de la population on pose

$$u_n = P(T \leq n) = P(X_n = 0) \quad (1.7)$$

qui est la probabilité d'extinction soit à ou avant la $n^{\text{ème}}$ génération.

Supposons un seul ancêtre : $X_0 = 1$. Supposons que l'ancêtre unique donne naissance à $\xi_1^{(0)} = k$ descendants. Si la population s'éteint à la $n^{\text{ème}}$ génération, alors chacune des k "lignées" de descendants (sous populations) doit s'éteindre dans les $(n-1)$ générations (cf graphe 11). Maintenant, on suppose que les k sous populations générées par les k descendants distincts de l'ancêtre unique sont indépendantes et ont les mêmes "propriétés statistiques" de la population initiale. Donc la probabilité qu'une sous population générée s'éteint dans les $n-1$ générations est u_{n-1} par définition (même probabilité d'extinction). La probabilité que les k sous-populations s'éteignent dans $(n-1)$ générations est $(u_{n-1})^k$ parce qu'elles sont indépendantes.



Grphe 1.1

Le diagramme précédent illustre que si la population d'origine s'éteint dans n générations alors les sous-populations générées par les descendants initiaux distincts doivent tous disparaître dans $(n - 1)$ générations.

En utilisant la loi des probabilités totales, on a:

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = p_0$ qui est la probabilité que l'ancêtre initial n'aura pas de descendants.

Exemple1. On suppose qu'un ancêtre n'aura pas de descendants avec une probabilité $u_1 = p_0 = \frac{1}{4}$ et qu'il aura deux descendants avec une probabilité $p_2 = \frac{3}{4}$. Alors de (1.8) on a

$$u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} (u_{n-1})^2 = \frac{1 + 3(u_{n-1})^2}{4}$$

Avec $u_0 = 0$ on calcule

$$\begin{array}{ll}
u_1 = 0.2500 & u_6 = 0.3313 \\
u_2 = 0.2962 & u_7 = 0.3323 \\
u_3 = 0.3161 & u_8 = 0.3328 \\
u_4 = 0.3249 & u_9 = 0.3331 \\
u_5 = 0.3292 & u_{10} = 0.3332
\end{array}$$

On remarque que la probabilité d'extinction (soit à ou avant la $n^{\text{ème}}$ génération) $u_n = P(T \leq n) = P(X_n = 0) \simeq 0.333$

1.2 Processus de branchement et fonctions génératrices

Soit ξ une variable aléatoire à valeurs entières non-négatives de loi de probabilité:

$$P(\xi = k) = p_k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \quad (1.9)$$

On définit la fonction génératrice de ξ par:

$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (1.10)$$

L'étude des processus de branchement utilise les fonctions génératrices. En effet on a les trois résultats suivants:

- Premièrement, la relation entre la fonction de masse (1.9) et la fonction génératrice (1.10) est bijective. Donc, connaître la fonction génératrice est équivalent à connaître la loi.

La relation entre les probabilités $\{p_k\}$ et la fonction génératrice $\phi(s)$ est:

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k \phi(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} \quad (1.11)$$

Par exemple, si

$$\phi(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots$$

alors

$$p_0 = \phi(0)$$

et

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = p_1 + 2p_2 s + 3p_3 s^2 + \dots$$

d'où

$$p_1 = \frac{d\phi(s)}{ds} \Big|_{s=0}$$

- Deuxièmement, soient ξ_1, \dots, ξ_n des variables aléatoires indépendantes ayant les fonctions génératrices $\phi_1(s), \dots, \phi_n(s)$ respectivement, alors la fonction génératrice de la v.a $X = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ est:

$$\phi_X(s) = \phi_1(s)\phi_2(s)\dots\phi_n(s) \quad (1.12)$$

D'où l'intérêt des fonctions génératrices dans les problèmes sur les sommes de variables aléatoires indépendantes et donc dans l'analyse des processus de branchement.

• Troisièmement, les moments de la variable aléatoire ξ peuvent être calculés par la dérivation de la fonction génératrice.

Par exemple, la 1^{ère} dérivée est:

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = p_1 + 2p_2s + 3p_3s^2 + \dots$$

d'où,

$$\frac{d\phi(s)}{ds} \Big|_{s=1} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = E(\xi) \quad (1.13)$$

La dérivée seconde est:

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} = 2p_2 + 3(2)p_3s + 4(3)p_4s^2 + \dots$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=1} &= 2p_2 + 3(2)p_3 + 4(3)p_4 + \dots \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k \\ &= E(\xi(\xi-1)) \\ &= E(\xi^2) - E(\xi) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=1} + E(\xi) \\ &= \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=1} + \frac{d\phi(s)}{ds} \Big|_{s=1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(\xi) &= E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 \\ &= \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=1} + \frac{d\phi(s)}{ds} \Big|_{s=1} - \left\{ \frac{d\phi(s)}{ds} \Big|_{s=1} \right\}^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Exemple 2: Si ξ suit une loi de Poisson de paramètre λ

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi(s) &= E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{-\lambda(1-s)} \quad \text{pour } |s| < 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(s)}{ds} &= \lambda e^{-\lambda(1-s)} \quad , \quad \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = \lambda \\ \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} &= \lambda^2 e^{-\lambda(1-s)} \quad , \quad \left. \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} = \lambda^2 \end{aligned}$$

De (1.13) et (1.14) on vérifie que:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \lambda \\ \text{Var}(\xi) &= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda \end{aligned}$$

1.2.1 Fonction génératrice et Probabilité d'extinction

On considère un processus de branchement (X_n) . Supposons que la loi de descendants $p_k = P(\xi = k)$ a pour fonction génératrice

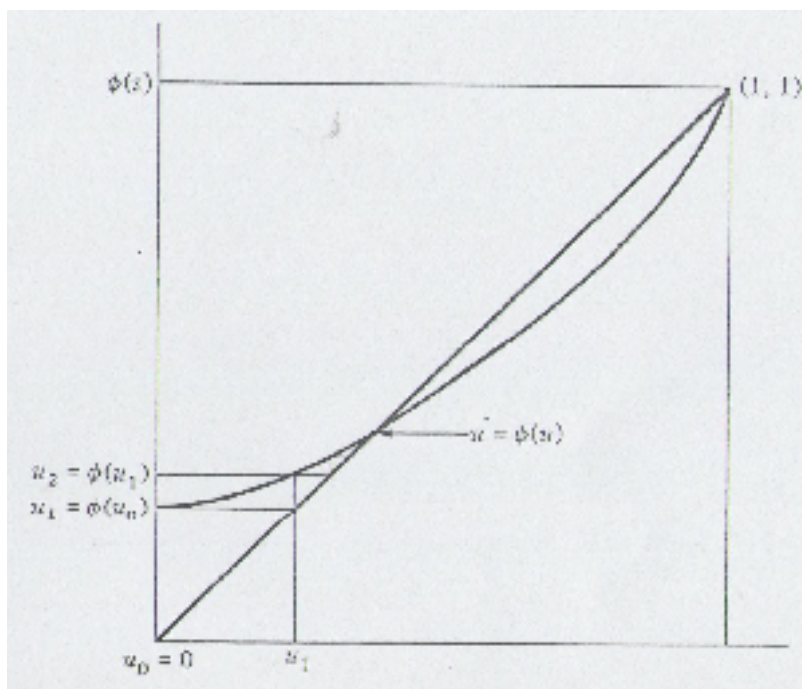
$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_k s^k p_k$$

. Si $u_n = P(X_n = 0)$ est la probabilité d'extinction à la génération n alors (1.8) devient:

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k = \phi(u_{n-1})$$

c'est à dire, en connaissant la fonction génératrice $\phi(s)$, on peut calculer les probabilités d'extinction u_n .

Exemple 3 La probabilité d'extinction pour un processus de branchement (X_n) quand $p_0 = \frac{1}{4}$ et $p_2 = \frac{3}{4}$ (cf exemple 1) a été calculée $u_n = P(X_n = 0) \simeq 0.333$. Maintenant, on va la calculer en utilisant la fonction génératrice ϕ représentée dans le graphe 1.2 suivant



Graphe1.2

On a

$$\phi(s) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}s^2$$

Du graphe, il est clair que la probabilité d'extinction est la plus petite solution de l'équation $u = \phi(u)$.

Si on note u_∞ la plus petite solution de $u = \phi(u)$, alors u_∞ est la probabilité d'extinction de la population en un certain temps fini.

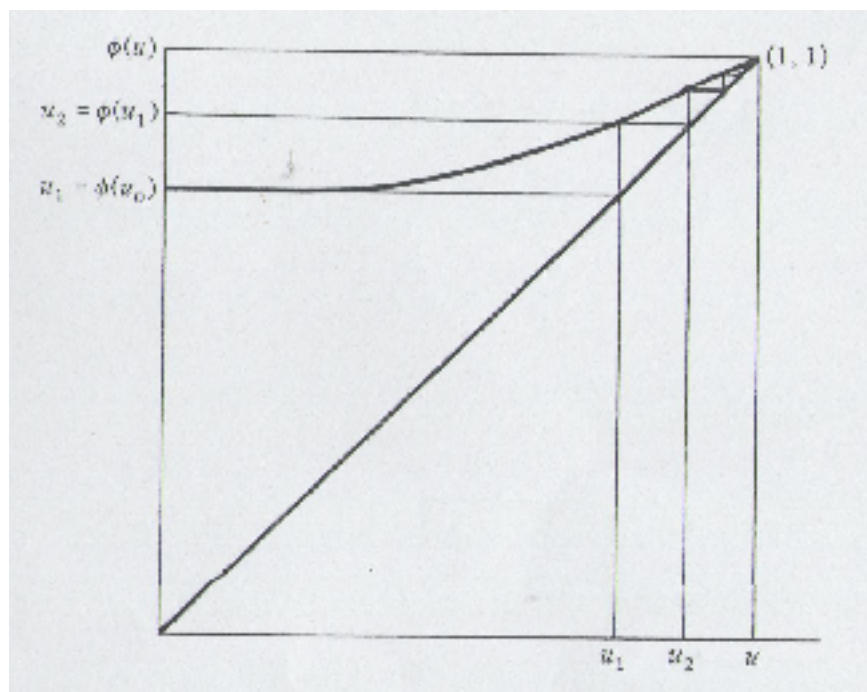
On résout l'équation $u = \phi(u) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}u^2$, on obtient:

$$u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{3} \simeq 0.333$$

La plus petite solution est $u_\infty = \frac{1}{3}$ ce qui a été montrée comme la limite de la suite (u_n) calculée dans l'exemple1.

L'équation $u = \phi(u)$ peut donner que $u_\infty = 1$: c'est à dire, on a presque surement l'extinction de la population .

si on considère l'exemple d'un processus de branchement (X_n) avec les probabilités $p_0 = \frac{3}{4}$ et $p_2 = \frac{1}{4}$, en résolvant $u = \phi(u) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u^2$ (représentée dans le graphe1.3)



Graphe 1.3

On obtient

$$u_1 = 1, u_2 = 3$$

La plus petite solution est $u_\infty = 1$, d'où presque sûrement l'extinction de la population.

En général, la résolution de $u = \phi(u)$ revient à savoir si la fonction génératrice croise la première bissectrice. Pour cela il faut calculer sa pente pour $s = 1$:

$$\phi'(1) = \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1}$$

Graphiquement, on peut déduire :

si la pente $\phi'(1) \leq 1$ alors aucun croisement n'a lieu, et la probabilité de l'extinction est $u_\infty = 1$.

si la pente $\phi'(1) > 1$ alors l'équation $u = \phi(u)$ a la plus petite solution $u_\infty < 1$ et l'extinction n'est pas certaine.

D'autre part, on a

$$\left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = E(\xi)$$

donc on a la conclusion suivante:

·si la taille moyenne de la descendance $E(\xi) \leq 1$, alors $u_\infty = 1$ et

l'extinction de la population est certaine

·si $E(\xi) > 1$ alors $u_\infty < 1$ et **l'extinction de la population n'est pas certaine.**

Le cas limite $E(\xi) = 1$ mérite une attention particulière. On a $E(X_n/X_0 = 1) = 1 \quad \forall n$, et donc la taille moyenne de la population est constante. Or $u_\infty = 1$ et l'extinction de la population est sûre. C'est un exemple simple dans lequel la taille moyenne de la population ne suffit pas pour décrire correctement le comportement de la population.

1.2.2 Fonctions génératrices et sommes de variables aléatoires indépendantes

Soient ξ et η deux variables aléatoires à valeurs entières non-négatives de fonctions génératrices suivantes:

$$\phi(s) = E(s^\xi) \quad \text{et} \quad \psi(s) = E(s^\eta) \quad \text{pour} \quad |s| < 1$$

La somme $\xi + \eta$ a pour fonction génératrice le produit $\phi(s)\psi(s)$. En effet,

$$\begin{aligned} E(s^{\xi+\eta}) &= E(s^\xi s^\eta) = E(s^\xi)E(s^\eta) \\ &= \phi(s)\psi(s) \end{aligned} \tag{1.15}$$

L'inverse est vrai aussi :si le produit de fonctions génératrices de deux variables aléatoires indépendantes est la fonction génératrice d'une 3^{ème} variable aléatoire alors cette dernière est égale (en loi) à la somme de deux autres.

Soient ξ_1, ξ_2, \dots des variables aléatoires iid à valeurs entières non-négatives avec $\phi(s) = E(s^\xi)$, alors (1.15) implique que $\xi_1 + \dots + \xi_m$ a pour fonction génératrice:

$$E(s^{\xi_1+\dots+\xi_m}) = [\phi(s)]^m \tag{1.16}$$

On prolonge ce résultat pour déterminer la fonction génératrice d'une somme aléatoire de v.a. indépendantes.

Soit N une variable aléatoire à valeurs entières non-négatives indépendante de ξ_1, ξ_2, \dots de fonction génératrice

$$g_N(s) = E(s^N)$$

Considérons la somme aléatoire:

$$X = \xi_1 + \dots + \xi_N$$

Soit $h_X(s) = E(s^X)$ la fonction génératrice de X .

Proposition 1. La fonction génératrice h_X de X s'écrit

$$h_X(s) = g_N[\phi(s)] \quad (1.17)$$

Démonstration:

Nous avons

$$\begin{aligned}
h_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X = k/N = n) P(N = n) \right) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k/N = n) P(N = n) \right) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k) P(N = n) s^k \quad (\text{parce que } N \text{ est indépendante de } \xi_1, \xi_2, \dots) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k) s^k \right) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi(s)^n P(N = n) \quad [\text{en utilisant (1.16)}] \\
&= g_N[\phi(s)] \quad (\text{def de la f.g.})
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

De (1.16), l'équation de base des processus de branchement

$$X_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{X_n}^{(n)} \quad (1.18)$$

peut être exprimée de manière équivalente par les fonctions génératrices. Soit $\phi_n(s) = E(s^{X_n})$ la fonction génératrice de la v.a X_n où $X_0 = 1$. Alors

$$\phi_0(s) = E(s^1) = s$$

et

$$\phi_1(s) = \phi(s) = E(s^\xi).$$

Pour obtenir l'expression générale, on applique (1.17) et (1.18):

$$\phi_{n+1}(s) = \phi_n[\phi(s)] \quad (1.19)$$

Cette expression peut être écrite de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}(s) &= \phi_{n-1}[\phi[\phi(s)]] \\
&= \phi[\dots\phi[\phi(s)]] \quad [(n+1) \text{ itérations}] \\
&= \phi[\phi_n(s)]
\end{aligned} \quad (1.20)$$

Pour une taille initiale $X_0 = k$, la fonction génératrice est donnée par:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j / X_0 = k) s^j = [\phi_n(s)]^k \quad (1.21)$$

qui est la fonction génératrice d'une somme de k "sous populations" de descendants indépendantes. Ainsi, le processus de branchement évolue comme la somme de k "processus de branchement indépendants" de parent initial choisi des k individus.

Exemple 4: Soit

$$\phi(s) = q + ps \quad \text{où } 0 < p < 1 \quad \text{et } p + q = 1$$

le processus de branchement associé est un processus de décès pur. Dans chaque génération un individu s'éteint avec une probabilité q et survit avec une probabilité p .

Dans ce cas les $\phi_n(s)$ sont déterminées, ex:

$$\phi_2(s) = q + p(q + ps) = 1 + p^2 + p^2s$$

et généralement,

$$\phi_n(s) = 1 - p^n + p^n s.$$

De (1.21), la fonction génératrice de la $n^{\text{ème}}$ génération commençant par une taille initiale k est

$$[\phi_n(s)]^k = [1 - p^n + p^n s]^k$$

La loi de probabilité du temps d'extinction T

$$T = \min\{n \geq 1, X_n = 0\}$$

peut être déterminée à partir de la fonction génératrice comme suit:

$$\begin{aligned} P(T = n / X_0 = k) &= P((X_n = 0) - (X_{n-1} = 0) / X_0 = k) \\ &= P(X_n = 0 / X_0 = k) - P(X_{n-1} = 0 / X_0 = k) \\ &= [\phi_n(0)]^k - [\phi_{n-1}(0)]^k \\ &= (1 - p^n)^k - (1 - p^{n-1})^k \end{aligned}$$

On remarque si $k = 1$ on retrouve que T suit une loi géométrique de paramètre p

1.3 Loi des descendants

On considère un processus de branchement où les descendants suivent la loi géométrique modifiée définie par:

$$p_k = bc^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

et

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

où $b, c > 0$ et $b + c \leq 1$

· quand $b = c(1 - c)$ on retrouve la loi géométrique usuelle

$$p_k = (1 - c)c^k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

· quand $b = (1 - c)$ c'est la loi géométrique avec

$$p_0 = 0 \quad \text{et} \quad p_k = (1 - c)c^{k-1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Pour la loi géométrique généralisée (1.22), on peut déterminer explicitement:

$$p_0 = 1 - b \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1} = 1 - \frac{b}{1 - c} = \frac{1 - b - c}{1 - c}$$

La fonction génératrice correspondante est:

$$\phi(s) = 1 - \frac{b}{1 - c} + bs \sum_{k=1}^{\infty} (cs)^{k-1} = \frac{1 - (b + c)}{1 - c} + \frac{bs}{1 - cs} \quad (1.23)$$

Sa moyenne est:

$$m = \phi'(1) = \frac{b}{(1 - c)^2}$$

Remarquons que $\phi(s)$ a la forme d'une transformation linéaire fractionnaire suivante :

$$f(s) = \frac{\alpha + \beta s}{\gamma + \delta s} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (1.24)$$

A partir de cette forme nous allons donner quelques propriétés élémentaires de la transformation linéaire fractionnaire.

(i) Les itérations des transformations linéaires fractionnaires sont aussi des transformations linéaires fractionnaires, pour $f(s)$ définie par (1.24), un calcul d'algèbre simple donne:

$$f(f(s)) = \frac{\alpha(\gamma + \beta) + (\alpha\delta + \beta^2)s}{\alpha\delta + \gamma^2 + \delta(\gamma + \beta)s} \quad (1.25)$$

(ii) Il existe toujours deux solutions finies de l'équation $f(s) = s$ (pouvant être identiques). Ces solutions sont appelées les points fixes de f .

Si $f(s)$ est une fonction génératrice alors $s_1 = 1$ est l'un des points fixes et on va voir que l'autre point fixe $s_0 < 1$, $s_0 = 1$ ou $s_0 > 1$ selon que $f'(1)$ est supérieure, égale, ou inférieure à un.

Pour la fonction génératrice donnée par (1.24), on peut vérifier que le second point fixe pour $c > 0$ et $b + c < 1$ est:

$$s_0 = \frac{1 - b - c}{c(1 - c)} \quad (1.26)$$

(iii) Pour deux points s_i , $i = 0, 1$ quelconques, on voit que:

$$\frac{f(s) - f(s_i)}{s - s_i} = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{(\gamma + \delta s)(\gamma + \delta s_i)}$$

D'où

$$\frac{f(s) - f(s_0)}{f(s) - f(s_1)} = \left(\frac{\gamma + \delta s_1}{\gamma + \delta s_0} \right) \left(\frac{s - s_0}{s - s_1} \right) \quad (1.27)$$

Soient maintenant, s_0 et s_1 les deux points fixes de f (pas identiques). Si on pose $w = f(s)$, (1.27) devient:

$$\frac{w - s_0}{w - s_1} = k \left(\frac{s - s_0}{s - s_1} \right) \quad (1.28)$$

où k peut être calculé par (1.27) ou plus simplement par (1.26) en fixant $s = 0$.

En utilisant (1.28), on obtient les itérations $f_n(s) = w_n$ de $f(s)$

$$\frac{w_2 - s_0}{w_2 - s_1} = k \frac{w_1 - s_0}{w_1 - s_1} = k \left(k \frac{s - s_0}{s - s_1} \right)$$

En général,

$$\frac{w_n - s_0}{w_n - s_1} = k^n \left(\frac{s - s_0}{s - s_1} \right) \quad (1.29)$$

Pour la fonction génératrice de la loi géométrique donnée par (1.23), notons que les points fixes sont:

$$s_0 = \frac{(1 - b - c)}{c(1 - c)} \quad \text{et} \quad s_1 = 1$$

et

$$k = \frac{(1-c)^2}{b} = \frac{1}{m}$$

où m est la moyenne de la loi géométrique.

Pour $m \neq 1$ les deux points fixes s_0 et 1 sont différents, d'où, en résolvant (1.29) pour w_n , on aura:

$$w_n = \frac{s_0 - (1/m^n) [(s - s_0)/(s - 1)]}{1 - (1/m^n) [(s - s_0)/(s - 1)]} \quad m \neq 1 \quad (1.30)$$

qui s'écrit sous la forme

$$\phi_n(s) = 1 - m^n \left(\frac{1 - s_0}{m^n - s_0} \right) + \frac{m^n [(1 - s_0)/(m^n - s_0)]^2 s}{1 - [(m^n - 1)/(m^n - s_0)] s} \quad (1.31)$$

La probabilité d'extinction à la $n^{\text{ème}}$ génération est

$$P(X_n = 0) = \phi_n(0) = 1 - m^n \left(\frac{1 - s_0}{m^n - s_0} \right)$$

Remarquons que cette expression converge vers s_0 quand $n \rightarrow \infty$ si $m > 1$ et vers 1 si $m < 1$.

Les probabilités $P(X_n = k)$, $k = 1, 2, \dots$ peuvent être calculées par un développement de (1.31) en une série de puissances de s .

Le temps d'extinction T est défini comme le plus petit indice n tel que: $X_n = 0$:

$$T = \min\{n \geq 1, X_n = 0\}$$

Propriété2.

la loi du temps d'extinction T est pour $j = 1, 2, \dots$

$$P(T = j) = \frac{c(1-c)}{[1 + (j-1)c][1 + (j-2)c]}$$

Preuve.

On a pour $j = 1, 2, \dots$

$$P(T \leq j) = P(X_j = 0) = \phi_j(0)$$

et

$$\begin{aligned} P(T = j) &= P(T \leq j) - P(T \leq j-1) \\ &= \phi_j(0) - \phi_{j-1}(0) \end{aligned}$$

Dans le cas $m \neq 1$, on a:

$$\begin{aligned}
P(T = j) &= 1 - m^j \left(\frac{1 - s_0}{m^j - s_0} \right) - 1 + m^{j-1} \left(\frac{1 - s_0}{m^{j-1} - s_0} \right) \\
&= m^{j-1} s_0 \frac{(m-1)(1-s_0)}{(m^j - s_0)(m^{j-1} - s_0)} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Si $m = 1$, alors $b = (1-c)^2$ et l'équation $\phi(s) = s$ a une racine double $s = 1$.
En effet,

$$\phi(s) = c + \frac{(1-c)^2 s}{1-cs} = \frac{c - (2c-1)s}{1-cs}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\phi_2(s) &= \phi(\phi(s)) = \frac{c - (2c-1)[(c - (2c-1)s)/(1-cs)]}{1 - [c(c - (2c-1)s)/(1-cs)]} \\
&= \frac{2c - (3c-1)s}{1 + c - 2cs}
\end{aligned}$$

et

$$\phi_j(s) = \frac{jc - [(j+1)c-1]s}{1 + (j-1)c - jcs} \quad (1.32)$$

Dans le cas $m = 1$ la probabilité d'extinction est:

$$P(X_j = 0) = \phi_j(0) = \frac{jc}{1 + (j-1)c} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots$$

Et le temps d'extinction T a la loi

$$\begin{aligned}
P(T = j) &= \phi_j(0) - \phi_{j-1}(0) \\
&= \frac{jc}{1 + (j-1)c} - \frac{(j-1)c}{1 + (j-2)c} \\
&= \frac{c(1-c)}{[1 + (j-1)c][1 + (j-2)c]}
\end{aligned}$$

■

1.3.1 Théorème limite conditionnel

On suppose la loi de descendance donnée par (1.22). Nous allons déterminer la probabilité asymptotique conditionnelle à la non extinction.

Propriété3. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k \mid X_n > 0) = \left(1 - \frac{1}{s_0}\right) \left(\frac{1}{s_0}\right)^{k-1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Preuve.

On calcule la fonction génératrice conditionnelle correspondante (le terme $k = 0$ n'existe pas)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k / X_n > 0) s^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(X_n = k, X_n > 0)}{P(X_n > 0)} s^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(X_n = k)}{P(X_n > 0)} s^k \\
&= \frac{1}{P(X_n > 0)} \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k) s^k \\
&= \frac{\phi_n(s) - \phi_n(0)}{1 - \phi_n(0)}
\end{aligned}$$

De l'expression (1.31) pour le processus de branchement particulier, on a maintenant ($m = \phi'(1)$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k / X_n > 0) s^k &= \left(\frac{1}{m^n [(1 - s_0) / (m^n - s_0)]} \right) \left(\frac{m^n [(1 - s_0) / (m^n - s_0)]^2 s}{1 - [(m^n - 1) / (m^n - s_0)] s} \right) \\
&= \frac{(1 - s_0)}{m^n - s_0} \frac{1}{1 - [(m^n - 1) / (m^n - s_0)] s}
\end{aligned}$$

en développant en une série entière géométrique:

$$\frac{(1 - s_0)}{m^n - s_0} \frac{1}{1 - [(m^n - 1) / (m^n - s_0)] s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - s_0}{m^n - s_0} \right) \left(\frac{m^n - 1}{m^n - s_0} \right)^k s^{k+1}$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k / X_n > 0) s^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - s_0}{m^n - s_0} \right) \left(\frac{m^n - 1}{m^n - s_0} \right)^{k-1} s^k$$

Par identification des coefficients de s^k on a

$$P(X_n = k / X_n > 0) = \left(\frac{1 - s_0}{m^n - s_0} \right) \left(\frac{m^n - 1}{m^n - s_0} \right)^{k-1} \quad (1.33)$$

Si $(1 - b - c) / [c(1 - c)] > 1$ on a nécessairement $m < 1$ et donc $m^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En prenant $n \rightarrow \infty$ dans (1.33) on aura:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k / X_n > 0) &= \frac{1 - s_0}{-s_0} \left(\frac{1}{s_0} \right)^{k-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{s_0} \right) \left(\frac{1}{s_0} \right)^{k-1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

D'où le résultat ■

1.4 Exemples de processus de branchement

1.4.1 Processus de branchement multiple

Les processus de croissance de population implique souvent plusieurs phases du cycle de vie (ex: jeunesse, adulte reproducteur, vieillesse) avec des modèles de comportement différents. Nous allons considérer des exemples de processus de branchement qui tiennent compte de cette caractéristique.

Pour le premier exemple, on suppose qu'un individu mature (ou adulte reproducteur) produit des descendants selon la fonction génératrice $\phi(s)$. Considérons une population d'individus immatures (ou jeune) où chacun se développe vers la maturité avec une probabilité p , et puis reproduit des descendants indépendamment des autres membres de la population. Un individu immature n'atteint pas la maturité avec une probabilité $1 - p$ et donc il ne va pas laisser de descendants. La loi de la taille de la descendance ou sa fonction génératrice d'un individu type immature (en tenant compte des deux possibilités) est:

$$(1 - p) + p\phi(s) \tag{1.34}$$

En effet,

Si on note X le nombre de descendants d'un individu de type immature. Alors

$$P(X = k) = \begin{cases} 1 - p & \text{pour } k = 0 \\ p\phi_k & \text{pour } k \geq 1 \end{cases}$$

Si les individus sont recensés dans la phase adulte (mature), le nombre total d'individus matures descendants d'un individu mature aura une fonction génératrice:

$$\phi(ps + 1 - p) \tag{1.35}$$

En effet,

Si on note Y le nombre d'individus matures descendants d'un individu de type mature. Alors

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} p^n (1 - p)^{n-k} \quad \text{pour } k \leq n$$

puis, on utilise

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Les fonctions génératrices (1.34) et (1.35) ont la même moyenne $p\phi'(1)$. Généralement les variances sont différentes:

la première variance :

$$p \left[\phi''(1) + \phi'(1) - (\phi(1))^2 \right]$$

la seconde variance :

$$p^2 \phi''(1) + p \phi'(1) - p^2 (\phi'(1))^2$$

Un second exemple conduisant à (1.35) et non à (1.34) concerne les différentes formes de mortalité qui affecte une population. On évalue la résistance (stabilité) de la population comme la probabilité de survie indéfiniment. Elle est égale à 1-probabilité d'extinction en temps fini. Dans l'absence de mortalité, le nombre de descendants d'un seul individu a une fonction génératrice $\phi(s)$. Supposons que tous les descendants de la population se comportent de façon indépendante et ont même lois de probabilités de reproduction. et aussi une population **adulte** de taille k . On considère trois types de mortalité

Mortalité d'individus

Soit p la probabilité qu'un descendant reproduit des descendants indépendamment des autres. Donc la contribution de chaque descendant à la population **adulte (mature)** de la génération suivante suit une loi binomiale de paramètres (N, p) où N est le nombre de descendants ancêtres. Avec la fonction génératrice $\phi(s)$ de reproduction. la fonction génératrice du nombre d'adultes engendrés par un seul ancêtre est $\phi(q + ps)$, $q = 1 - p$ (voir ci dessus) et donc celle de la population de la génération suivante est:

$$\psi_1(s) = [\phi(q + ps)]^k \quad (1.36)$$

Ce type de mortalité reflète par exemple la prédation d'adultes (proies) .

Mortalité de portée

Supposons que chaque portée (pour un animal) survit avec une probabilité p et disparaît avec une probabilité $q = 1 - p$ indépendamment des autres portées . Etant donnée une portée de taille N , sa contribution à la génération suivante famille est N avec une probabilité p et 0 avec une probabilité q (la f.g. est $q + p\phi(s)$ voir(1.34)). Ainsi La fonction génératrice du nombre d'adultes dans la génération suivante est :

$$\psi_2(s) = [q + p\phi(s)]^k \quad (1.37)$$

Ce type de mortalité reflète la prédation des jeunes ou sur les nids et les œufs dans le cas de naissance.

Mortalité de générations

Dans cette partie on suppose que toute une génération survit avec une probabilité p et disparaît avec une probabilité q . Ce type de mortalité représente les cas des catastrophes naturelles (ex: les incendies de forêts, inondations...). La fonction génératrice de la taille de la population dans la génération suivante dans ce cas est:

$$\psi_3(s) = q + p[\phi(s)]^k \quad (1.38)$$

remarquons que les fonctions génératrices de (1.36) à (1.38) ont la même moyenne mais généralement de variance différente.

Il est intéressant d'évaluer la survie de ces trois modèles. Nous avons besoin de comparer les plus petites racines positives des équations : $\psi_i(s) = s, i = 1, 2, 3$ désignés par $s_i^*, i = 1, 2, 3$ respectivement.

En utilisant l'analyse de convexité on montre

$$\psi_1(s) \leq \psi_2(s) \leq \psi_3(s)$$

En effet, rappelons qu'une fonction f est convexe en x si $\forall x_1, x_2$ et $0 < \lambda < 1$ alors $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$.

En particulier, la fonction $\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ pour $0 < s < 1$ est convexe puisque pour chaque entier positif k

$$[(\lambda s_1) + (1 - \lambda) s_2]^k \leq \lambda s_1^k + (1 - \lambda) s_2^k \text{ pour } 0 < \lambda, s_1, s_2 < 1.$$

Maintenant

$$\psi_1(s) = [\phi(q + ps)]^k < [q\phi(1) + p\phi(s)]^k = [q + p\phi(s)]^k = \psi_2(s)$$

donc

$$s_1^* < s_2^*$$

qui sont les probabilités d'extinction des deux modèles.

Ainsi, le premier modèle est plus "stable" (survit plus) que le second.

Comme $f(x) = x^k, x > 0, k > 0$, est convexe on a

$$\psi_2(s) = [p\phi(s) + q]^k < p[\phi(s)]^k + q \times 1^k = \psi_3(s)$$

par conséquent,

$$s_2^* < s_3^*$$

ce qui implique que le second modèle est "plus stable" que le troisième.

Finalement

$$s_1^* < s_2^* < s_3^*$$

ce qui est naturel.

1.4.2 Processus de branchement avec immigration

Soit (X_n) une chaîne de Markov de probabilités de transition (P_{ij}) de fonction génératrice en une transition :

$$f_i(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} s^j = [\phi(s)]^i \psi(s) \quad (1.39)$$

Alors (X_n) peut être considérée comme un processus de branchement avec immigration pour les raisons suivantes:

à une génération: i individus de loi reproduction de f.g. $\phi(s)$ et $\psi(s)$ la f.g. du nombre d'immigrants dans la population durant une génération. Ainsi, f_i est la f.g. du nombre d'individus à la génération suivante (les événements sont indépendants)

Dans un processus de branchement avec immigration, on suppose que $\phi'(1) = m < 1$ (c'est à dire, en moyenne chaque parent donne moins d'un descendant) la population va s'éteindre mais l'immigration peut maintenir un nombre positif malgré cette tendance régressive. En effet nous regardons l'existence d'une loi stationnaire.: soit π_i la probabilité stationnaire en l'état i $\pi_i = P(X_n = i)$ (taille de la population i) de f.g.

$$\pi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i s^i$$

Comme $(\pi = \pi P)$

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ik} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.40)$$

On multiplie (1.40) par s^k et on somme pour avoir

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i s^i = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} s^k$$

De (1.39), l'équation fonctionnelle est

$$\pi(s) = \psi(s) \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i [\phi(s)]^i = \psi(s) \pi(\phi(s)) \quad (1.41)$$

Pour le cas spécial d'un processus de décès pur on a : $\phi(s) = q + ps$ (la population est exposée à l'extinction et donc on a besoin d'immigrés !). Supposons que le nombre d'immigrants suit une loi de Poisson : $\psi(s) = e^{s-1}$

L'équation fonctionnelle (1.41) devient:

$$\psi(s) = e^{s-1} \pi(q + ps)$$

On cherche une solution de la forme $\pi(s) = e^{\lambda(s-1)}$ (loi de Poisson) ce qui donne

$$e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{(\lambda p + 1)s} e^{-1 + \lambda q - \lambda}$$

et $\lambda = 1/q$ donne:

$$\pi(s) = e^{(s-1)/q}$$

Ainsi la loi stationnaire suit une loi de Poisson de moyenne $1/q$.

1.4.3 Processus de branchement avec décès

On considère une population d'individus qui se reproduit comme suit :

chaque individu produit un nombre aléatoire Z de descendants (à un temps particulier) indépendamment des autres individus vivants à cet instant et suivant la loi :

$$P(Z = k) = p_k \quad k \geq 0 \quad p_0 > 0 \quad p_0 + p_1 < 1$$

Un descendant a une probabilité $1 - \alpha$ d'être défectueux (on suppose dans ce cas que la détection des individus défectueux est indépendante des autres individus et $0 < \alpha < 1$). Une famille de taille k survit et se reproduit si et seulement si **tous** les k individus sont non défectueux qui a une probabilité

$$p_k \alpha^k, \quad k \geq 0$$

Donc, si $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ est la fonction génératrice de Z , alors la fonction génératrice du nombre de descendants non défectueux issus d'un individu est

$$g(s) = f(\alpha s) \tag{1.42}$$

et $1 - g(1) = 1 - f(\alpha)$ est la probabilité qu'une famille contient au moins un individu défectueux.

Maintenant, la population évolue comme suit:

Soit X_n le nombre d'individus vivants à l'instant n . La population va exister à la génération suivante seulement si il n'y a aucune naissance d'individu défectueux. Sinon, on dit que le processus a fini par un évènement d'extinction (with killing) ou détection d'individu défectueux.

On prend $X_0 = 1$ et définissons les itérations de g par:

$$g_0(s) = s, \quad g_n(s) = g(g_{n-1}(s)) \quad n \geq 1 \tag{1.43}$$

Soit q la probabilité d'extinction. On voit que si $0 < \alpha < 1$, alors q est l'unique racine de l'équation fonctionnelle $g(s) = f(\alpha s) = s$ satisfaisant $0 < q < 1$.

Si $X_0 = i$, alors la probabilité d'extinction est q^i . Pour le cas $f(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s^2$ la solution est $q = (1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}) / \alpha^2$

Puisque $0 \leq q \leq 1$, on a $q = (1 - \sqrt{1 - \alpha^2}) / \alpha^2$.

Si T_D est le temps de détection d'individu défectueux. alors :

$$P(T_D > n) = P(X_n > 0) = g_n(1)$$

Puisque $g_n(s)$ est décroissante en n pour s dans (q, s_1) où s_1 est la plus grande racine de $f(\alpha s) = s$ qui satisfait $s_1 > 1$, on conclut que $g_n(1) \rightarrow q$ quand $n \rightarrow \infty$. Cette conclusion implique que le processus s'éteint soit par

détection soit par extinction classique. Donc la probabilité de détection est donc $1 - q^i$ si $X_0 = i$.

Deux lois importantes dans l'étude des temps de détection sont T_D et $T = \min(T_0, T_D)$, T_0 = temps d'extinction, T_D = temps de détection.. On a

$$\begin{aligned} P(T_D > n / T_D < \infty) &= \frac{P(T_D > n, T_D < \infty)}{P(T_D < \infty)} \\ &= \frac{g_n(1) - q}{1 - q} \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

et

$$P(T > n) = g_n(1) - g_n(0) \quad n \geq 0$$

Considérons le modèle précédent avec:

$$f(s) = \frac{r + s(1 - r - p)}{1 - ps} \quad 0 < r < 1, \quad 0 < p < 1, \quad p + r \leq 1$$

Les itérés de (1.25) à (1.28) sont calculables (section 1.3) et les probabilités sont:

$$p_k = \begin{cases} r & k = 0 \\ (1 - r)(1 - p)p^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a:

$$g(s) = \frac{r + s\alpha(1 - r - p)}{1 - p\alpha s}$$

Soient $0 < s_0 < 1 < s_1$ les racines de l'équation $g(s) = s$, et soit

$$K = \frac{1 - p\alpha s_1}{1 - p\alpha s_0} \quad (1.45)$$

Il est facile de vérifier que $0 < K < 1$ et en utilisant la méthode standard pour l'itération d'une fonction fractionnelle linéaire (voir section 1.3) on obtient:

$$g_n(s) = \frac{s_0 s_1 (K^n - 1) + s(s_0 - K^n s_1)}{(K^n s_0 - s_1) - s(K^n - 1)} \quad 0 < s < s_1 \quad (1.46)$$

Il s'ensuit immédiatement de (1.46) que $P(T_0 \leq n) = g_n(0) \rightarrow s_0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc $q = P(T_0 < \infty) = s_0$.

$$P(T_D > n / T_D < \infty) = \frac{K^n (s_1 - s_0)}{K^n (1 - s_0) + (s_1 - 1)}$$

Il existe d'autre conditionnement intéressant portant sur les trajectoires qui sont éteintes, plutôt que celles qui se terminent en détection..

Le processus $(X_n, n \geq 0)$ qui apparaît par conditionnement avec extinction est encore un processus de branchement de fonction génératrice de la loi de descendance donnée par:

$$\tilde{f}(s) = \frac{g(sq)}{q} = \frac{p\alpha s_1 + s(1 - p\alpha(s_1 + s_0))}{1 - sp\alpha s_0} \quad 0 \leq s < 1$$

Le processus a une moyenne de descendance $\tilde{f}'(1) = K < 1$, et ce processus conditionnel va bien sûr vers l'extinction.

Soit T_0 le temps d'atteindre $\{0\}$, si $\tilde{X}_0 = 1$ on admet que

$$\tilde{a}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{X}_n = j / \tilde{T}_0 > n) = \left(1 - \frac{s_0}{s_1}\right) \left(\frac{s_0}{s_1}\right)^{j-1} \quad j \geq 1$$

cette distribution a une moyenne $1/[1 - (s_0/s_1)]$.

1.5 Quelques modèles de reproduction Plasmides et le nombre de partition des copies Plasmides

Les Plasmides sont des petits segments circulaires d'ADN qui se retrouvent principalement dans les cellules bactériennes et qui se répliquent (reproduisent) de façon autonome. Ils jouent un rôle dans la résistance aux antibiotiques, en conjugaison (sexe chez les bactéries), en échange (sur l'adhésion) de matériel génétique entre les colonies bactériennes dans des circonstances particulières, et dans d'autres fonctions importantes en bactériologie. On considère une lignée cellulaire initiée par une seule cellule au temps $n = 0$, et croissant par fonctionnement binaire aux temps $n = 1, 2, \dots$. La cellule initiale contient un nombre de plasmides, qui se répliquent dans la cellule et sont ensuite transmis aux deux cellules filles par la division cellulaire. On va analyser deux ingrédients de ce processus: le mécanisme de la réplication et le mécanisme de la partition. Le processus de réplication détermine la manière dont les plasmides dans une cellule donnée répliquent avant la division cellulaire (conservation „„), alors que le mécanisme de partition décrit comment les plasmides, après la réplication dans une cellule, sont réparties entre les deux cellules filles.

Les modèles proposés décrivent le comportement du nombre de plasmides dans une cellule à n'importe quelle génération d'une lignée choisie au hasard de la descendance dans la population des cellules.

Les centres d'intérêt sont sur les deux facettes suivantes :

(i) La stabilité du nombre de copies de plasmides : la moyenne et la variance de plasmides dans la lignée de descentes à des moments particuliers.

et

(ii) Le taux de guérison : le long d'une ligne de descente de cellules ne doivent pas contenir de plasmides (**être guéri**).

A quel taux ceci doit arriver ?

1.5.1 Processus de reproduction

Il y a trois mécanismes qui seront décrits, le modèle multiplicatif, le modèle additif et le modèle d'équilibre.

Le modèle multiplicatif (ou double) (M)

On suppose qu'une cellule contient $i (> 0)$ plasmides juste avant la réplication. On suppose que chaque plasmide réplique une fois indépendamment de toutes les autres, donnant naissance à des descendants soit une progéniture plasmide (avec une probabilité $1-p$) ou deux (avec une probabilité p) où $0 < p \leq 1$. On définit:

$$R_{il} = P(l \text{ plasmides dans la cellule avant la partition} / i \text{ plasmides avant la réplication}) \quad (1.47)$$

Il y a i essais, et si k produisent un seul alors que $(i-k)$ produisent des doubles, alors le total doit être $k + 2(i-k) = l$ ou $k = 2i - l$, la probabilité de ce résultat est:

$$R_{il} = \binom{i}{i-k} p^{i-k} (1-p)^k = \binom{i}{i-l} p^{l-i} (1-p)^{2i-l} \quad l = i, i+1, \dots, 2i \quad (1.48)$$

Quand $p = 1$, chaque plasmide produit exactement deux descendants, le cas "double". Le paramètre p tient compte de la variation aléatoire dans ce schéma de reproduction.

Le modèle additive (A)

On considère une situation dans laquelle une cellule contient $i (> 0)$ plasmides. Dans ce cas, le nombre de réplication N est fixé et chacune réussit avec une probabilité p .

Le nombre de plasmides dans la cellule avant la partition et après la réplication est $i + Y$, où Y est une v.a binomiale de paramètres N et p . Ce modèle peut être étudié en fournissant un mécanisme de contrôle pour le processus de réplication.

Pour $i > 0$ on a:

$$R_{il} = \binom{N}{l-i} p^{l-i} (1-p)^{N-l+i} \quad l = i, i+1, \dots, N+i \quad (1.49)$$

Le modèle d'équilibre (E)

Ce processus décrit aussi un mécanisme de contrôle de réplication. Etant données $i (> 0)$ plasmides dans une cellule, et une probabilité de succès de réplication $p = 1$, le nombre de plasmides dans la cellule avant la partition est $2N$, $\forall i$. Ce modèle reflète l'incapacité d'une cellule donnée de contenir plus qu'un nombre donné de plasmides.

Si $p < 1$, le processus est vu comme quittant $i+Y$ plasmides de descendants, où Y est une v.a binomiale de paramètres $2N - i$ et p .

Ainsi

$$R_{il} = \binom{2N-i}{l-i} p^{l-i} (1-p)^{2N-l} \quad l = i, \dots, 2N \quad (1.50)$$

Dans ces trois modèles, on a supposé que p et R_{il} restent constants avec le temps.

On suppose que la cellule guérie (qui ne contient plus de plasmides) quitte les cellules filles guéries, et donc $R_{00} = 1$

1.5.2 Lignées aléatoires de descendance

Une lignée aléatoire de descendance cellulaire est définie comme suit :

on choisit l'une des cellules filles avec une probabilité $\frac{1}{2}$ à l'instant $n = 1$, puis à l'instant $n = 2$ on choisit l'une des deux cellules filles de la cellule choisie avec une probabilité $\frac{1}{2}$, et ainsi de suite.

Soit X_n le nombre de plasmides dans une cellule (avant la réplication) lors de la $n^{\text{ème}}$ génération, $n = 0, 1, 2, \dots$

Pour les trois modèles, $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition en une étape P_{ij} données par

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j / X_n = i) = \sum_l R_{il} Q_{lj} \quad (1.51)$$

où, comme dans (1.47)

$R_{il} = P(l \text{ plasmides dans la cellule avant la partition} / i \text{ avant la partition})$

et

$Q_{lj} = P(\text{la cellule fille choisie hérite } j \text{ plasmides} / \text{ la cellule mère a } l \text{ plasmides avant la partition})$

On suppose un processus aléatoire de partitions, c'est à dire, n'importe quelle plasmide dans une cellule avant la partition est attribuée indépendamment et aléatoirement à l'une des deux cellules filles.

Par conséquent,

$$Q_{lj} = \binom{l}{j} 2^{-l} \quad j = 0, 1, \dots, l \quad (1.52)$$

La chaîne de Markov représentée par les probabilités de transition (1.51) a pour fonctions génératrices $f_i(s)$ $i > 0$ définies par:

$$f_i(s) = \sum_j P_{ij} s^j \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.53)$$

En utilisant (1.52) et de (1.48) à (1.50), ces fonctions génératrices peuvent être calculées.

Par exemple, dans le modèle multiplicatif

$$\begin{aligned}
f_i(s) &= \sum_j P_{ij} s^j = \sum_j \left(\sum_l R_{il} Q_{lj} \right) s^j \\
&= \sum_l R_{il} \sum_j Q_{lj} s^j \\
&= \sum_l R_{il} \sum_j \binom{l}{j} \frac{1}{2^l} s^j \\
&= \sum_l R_{il} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right)^l \quad (\text{de (1.52)}) \\
&= \sum_{l=i}^{2i} \binom{i}{i-l} p^{l-i} (1-p)^{2i-l} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right)^l
\end{aligned}$$

En posant $m = l - i$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=i}^{2i} \binom{i}{i-l} p^{l-i} (1-p)^{2i-l} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right)^l &= \sum_{m=0}^i \binom{i}{m} p^m (1-p)^{i-m} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right)^m \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right)^i \\
&= \left[1 - p + \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right) p \right]^i \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right)^i \\
&= \left(\frac{1+s}{2} \right)^i \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}s \right)^i
\end{aligned}$$

Les résultats pour les trois modèles sont donnés dans le tableau suivant:

le modèle	la fonction génératrice $f_i(s), i > 0$
multiplicatif	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \right)^i \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}s \right)^i$
additif	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \right)^i \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}s \right)^N$
d'équilibre	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \right)^i \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}s \right)^{2N-i}$

table1.1

De la table 1.1, on remarque que dans le modèle multiplicatif (X_n) est un processus de branchement de fonction génératrice de descendance:

$$\phi(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \right) \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}s \right)$$

Le modèle additif peut être vu comme un processus de branchement avec immigration arrêté quand 0 est atteint. La fonction génératrice de descendance $\phi(s)$ et celle d'immigration $\psi(s)$ sont:

$$\phi(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right) \quad \text{et} \quad \psi(s) = \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}s\right)^N$$

Le modèle d'équilibre n'a pas une telle interprétation.

Les trois processus ont 0 comme état absorbant, qui correspond à la guérison de la lignée de descendance. On écrit la matrice de transition $P = (P_{ij})_{i,j}$ sous la forme:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{q} & T \end{pmatrix}$$

où T correspond aux transitions entre les états $\{1, 2, \dots\}$

Dans le modèle multiplicatif, la taille moyenne de descendance est $f'(1) = \frac{1+p}{2}$. Donc le nombre moyen de plasmides dans les lignées de descendance à la génération t est $i[(1+p)/2]^t$ où i est le nombre de plasmides dans la cellule initiale.

La théorie générale donne que le taux de convergence vers l'état 0 est dominée par la plus grande valeur propre ρ^* de la matrice T . Il existe des approximations fournies par des méthodes numériques. Dans le modèle additive, on peut obtenir la borne:

$$\rho^* \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$$

Le modèle d'équilibre est une chaîne de Markov finie de taille $2N + 1$, on a :

$$\frac{1}{2} < \rho^* < 1$$

1.6 Processus de croissance de population avec types d'interaction

Accouplement multiple

On considère une population composée de deux types d'individus: males et femelles. On suppose que chaque femelle peut produire des descendants suivant une loi de fonction génératrice ϕ à condition que la population contient au moins un mâle. Par exemple, le cas de vaches et de taureaux, chaque vache produit des descendants à condition qu'il y a au moins un taureau disponible pour l'accouplement.

Soit α ($0 < \alpha < 1$) la probabilité qu'une descendance est femelle, en reprenant le raisonnement de l'équation (1.35) et en considérant une descendance mâle comme un type mutant, on trouve que la fonction génératrice du nombre de descendance femelles est:

$$\phi(\alpha s + (1 - \alpha))$$

La probabilité de produire au moins un mâle est $1 - \phi(\alpha)$. Dans une portée de taille k , la probabilité qu'une descendance est femelle est $p_k \alpha^k$, donc sa fonction génératrice est

$$\sum_k p_k \alpha^k s^k = \phi(\alpha s)$$

En combinant ces possibilités, on en déduit que la fonction génératrice du nombre de femelles produites dans la génération suivante à condition qu'au moins un mâle est reproduit est:

$$\frac{\phi(\alpha s + (1 - \alpha)) - \phi(\alpha s)}{1 - \phi(\alpha)} \quad (1.54)$$

Sous cette condition, la moyenne du nombre de femelles (sa dérivée au point 1) est :

$$\gamma = \alpha \left(\frac{\phi'(1) - \phi'(\alpha)}{1 - \phi(\alpha)} \right) \quad (1.55)$$

On s'attend à : si $\gamma > 1$ alors on n'a pas l'extinction avec une probabilité positive et la taille de la population croît infiniment à condition que la population initiale se compose au moins d'un mâle et une femelle. Cela peut être affirmé de manière plus formelle comme suit:

si chaque femelle contribue à la génération suivante en moyenne avec plus d'un descendant et chaque progéniture a une chance positive de contenir un descendant mâle, alors l'extinction n'est pas certaine et dans ce cas la population croît avec un taux exponentiel. Notons que $\phi'(1) = m$ est la moyenne de la taille de descendance et αm la moyenne du nombre de femelles correspondante. Si $\alpha m > 1$ alors $\gamma > 1$.

Couplage permanent

Considérons une population composée de femelles et mâles dont les nombres à la $n^{\text{ème}}$ génération sont notés par (X_n, Y_n) respectivement. Supposons qu'à chaque génération le couplage permanent entre un mâle avec une femelle a lieu. Ainsi

$$V_n = \min(X_n, Y_n) \quad (1.56)$$

couples sont formés.

Pour chaque couple, soit $f(s_1, s_2)$ la fonction génératrice des nombres de progénitures femelles et mâles produites. On suppose que les couples se comportent indépendamment des autres avec la même fonction génératrice $f(s_1, s_2)$.

Soient

- m_1 = l'espérance du nombre de descendants femelles par couple
- m_2 = l'espérance du nombre de descendants mâles par couple

Intuitivement la condition d'extinction de ce processus V_n définie dans (1.56) est:

$$V_n \rightarrow 0 \text{ si et seulement si } \min(m_1, m_2) \leq 1$$

1.7 Croissance de la population déterministe avec la loi de l'âge

1.7.1 Modèle simple de croissance

On considère une seule espèce qui évolue en temps discret $t = 0, 1, 2, \dots$, et soit N_t la taille de la population à l'instant t . On suppose que chaque individu présent dans la population à l'instant t donne naissance à un nombre constant de descendants λ qui forment la population à l'instant $t + 1$. (s'il n'y a pas de décès on considère l'ancêtre comme l'un de descendants, alors on a $\lambda \geq 1$). Si N_0 est la taille de la population initiale, et chaque individu donne naissance à λ descendants, alors

$$\begin{aligned}N_1 &= \lambda N_0 \\N_2 &= \lambda N_1 = \lambda^2 N_0\end{aligned}$$

et en général,

$$N_t = \lambda^t N_0 \tag{1.57}$$

- Si $\lambda > 1$, alors la population croît infiniment avec le temps.
- Si $\lambda < 1$, alors la population s'éteint.
- Si $\lambda = 1$, alors la taille de la population reste constante à $N_t = N_0 \forall t = 0, 1, \dots$

1.7.2 Modèle de structure d'âge

On introduit une structure d'âge dans la population. On aura besoin de notations suivantes

$n_{u,t}$ = le nombre d'individus d'âge u dans la population à l'instant t .

Si on somme sur tous les âges on obtient

$N_t = \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,t}$ = le nombre total d'individus dans la population à l'instant t .

b_t = le nombre de nouveaux individus nés à l'instant t dans la population : le nombre de naissances.

β_u = le nombre moyen de descendants d'un individu d'âge u en une seule période.

l_u = la probabilité qu'un individu survive au moins jusqu'à l'âge u .

La probabilité conditionnelle qu'un individu survive jusqu'à l'instant u sachant qu'il a survécu à l'âge $u - 1$ est

$$\frac{l_u}{l_{u-1}}$$

On définit la *fonction de maternité nette* comme produit:

$$m_u = l_u \beta_u$$

et aussi le taux de naissance ajusté au décès d'une fraction de la population. C'est à dire, m_u est le nombre moyen de descendants d'un individu à l'âge u .

Quelle est le nombre total de descendants d'un individu durant sa survie.

Un individu survit au moins à l'âge u avec une probabilité l_u , et alors pendant l'unité de temps suivante, il reproduit β_u descendants. En sommant sur tous les âges u : $l_u\beta_u = m_u$ on obtient le nombre total de descendants d'un individu

$$M = \sum_{u=0}^{\infty} l_u\beta_u = \sum_{u=0}^{\infty} m_u \quad (1.58)$$

- Si $M > 1$ la population croit .
- Si $M < 1$ la population décroît.
- Si $M = 1$ la taille de la population oscille à long terme.

En fait c'est le cas où sa description exacte est plus difficile.

En considérant l'effet de la structure d'âge dans la croissance de la population, notre intérêt portera sur b_t . On considère β_u, l_u et $n_{u,0}$ définis précédemment, le problème est de déterminer b_t pour $t \geq 0$. Une fois b_t est calculé, alors $n_{u,t}$ et N_t peuvent être déterminés, par exemple

$$n_{0,1} = b_1 \quad (1.59)$$

$$n_{u,1} = n_{u-1,0} \left[\frac{l_u}{l_{u-1}} \right] \quad \text{pour } u \geq 1 \quad (1.60)$$

et

$$N_1 = \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,1} \quad (1.61)$$

$n_{0,1}$ est le nombre d'individus d'âge 0 à l'instant 1. qui est évidemment b_1 (ceux qui sont nés à l'instant 1)

$n_{u,1}$ est le nombre d'individus à l'instant 1 d'âge u , ces individus ont survécus parmi les $n_{u-1,0}$ individus dans la population (d'âge $u-1$ à l'instant 0),. La probabilité conditionnelle de survie est $\left[\frac{l_u}{l_{u-1}} \right]$, ce qui explique la seconde équation.

La dernière relation affirme que la taille totale de la population résulte en sommant les nombres d'individus de tous les âges.

Les généralisations de (1.59) à (1.61) sont

$$n_{0,t} = b_t \quad (1.62)$$

$$n_{u,t} = n_{u-1,t-1} \left[\frac{l_u}{l_{u-1}} \right] \quad \text{pour } u \geq 1 \quad (1.63)$$

et

$$N_t = \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,t} \quad \text{pour} \quad t \geq 1 \quad (1.64)$$

Maintenant, on doit déterminer b_t . Le nombre d'individus nés à l'instant t a deux composantes :

une composante, a_t qui compte les descendants des individus à l'instant t existant déjà à l'instant 0.

Il y avait $n_{u,0}$ individus d'âge u à l'instant 0. La probabilité qu'un individu d'âge u à l'instant 0 survivra jusqu'à l'instant t (il sera à l'âge $t+u$) est l_{t+u}/l_u . D'où le nombre d'individus d'âge u à l'instant 0 qui survivent jusqu'à l'instant t est $n_{u,0} (l_{t+u}/l_u)$ (cf (1.63) et chacun de ces individus (maintenant d'âge $t+u$) va reproduire β_{t+u} descendants. En sommant sur tous les âges on obtient:

$$\begin{aligned} a_t &= \sum_{u=0}^{\infty} \beta_{t+u} n_{u,0} \frac{l_{t+u}}{l_u} \\ &= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{m_{t+u} n_{u,0}}{l_u} \end{aligned} \quad (1.65)$$

une seconde composante c_t (de b_t) compte les individus nés à l'instant t dont les parents n'existaient pas initialement dans la population mais ils sont nés après l'instant 0.

Le nombre d'individus nés à l'instant τ est b_τ , la probabilité de survie d'un de ces individus jusqu'à t est $l_{t-\tau}$ (il aura l'âge $t-\tau$). Le taux de naissances pour les individus d'âge $t-\tau$ est $\beta_{t-\tau}$. la deuxième composante résulte en sommant sur τ et donne:

$$\begin{aligned} b_t &= a_t + \sum_{\tau=0}^t \beta_{t-\tau} l_{t-\tau} b_\tau \\ &= a_t + \sum_{\tau=0}^t m_{t-\tau} b_\tau \end{aligned} \quad (1.66)$$

Exemple

Considérons un organisme qui reproduit deux descendants à l'âge 1, et deux autres à l'âge 2, et ensuite il s'éteint. La population commence avec un seul organisme d'âge 0 à l'instant 0. on a:

$$\begin{aligned} n_{0,0} &= 1 \quad , \quad n_{u,0} = 0 \quad \text{pour} \quad u \geq 1 \\ b_1 &= b_2 = 2 \\ l_0 &= l_1 = l_2 = 1 \quad , \quad \text{et} \quad l_u = 0 \quad \text{pour} \quad u > 2 \end{aligned}$$

On calcule de (1.65)

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2 \quad \text{et} \quad a_t = 0 \quad \text{pour} \quad t > 2$$

Enfin, (1.66) est résolue comme suit:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 + m_0 b_1 + m_1 b_0 \\ &= 2 + 0 + 0 = 2 \\ b_2 &= a_2 + m_0 b_2 + m_1 b_1 + m_2 b_0 \\ &= 2 + 0 + (2)(2) + 0 = 6 \\ b_3 &= a_3 + m_0 b_3 + m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_3 b_0 \\ &= 0 + 0 + (2)(6) + (2)(2) + 0 = 16 \end{aligned}$$

Ainsi, par exemple, un individu d'âge 0 à l'instant 0 donne naissance à 16 nouveaux individus dans la population à l'instant 3.

Une seconde approche à (1.66) résulte par introduction des fonctions génératrices:

$$\begin{aligned} b^*(s) &= \sum_{t=0}^{\infty} b_t s^t \\ a^*(s) &= \sum_{t=0}^{\infty} a_t s^t \end{aligned}$$

et

$$m^*(s) = \sum_{t=0}^{\infty} m_t s^t \quad \text{pour} \quad |s| < 1$$

On multiplie (1.66) par s^t on somme, ainsi on obtient

$$\sum_{t=0}^{\infty} b_t s^t = \sum_{t=0}^{\infty} a_t s^t + \sum_{t=0}^{\infty} s^t \sum_{\tau=0}^t m_{t-\tau} b_\tau$$

Puis, on écrit $s^t = (s^{t-\tau})(s^\tau)$ et on change l'ordre de la somme, l'équation devient:

$$\begin{aligned}
b^*(s) &= a^*(s) + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^t (s^{t-\tau} m_{t-\tau}) (s^\tau b_t) \\
&= a^*(s) + \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{t=\tau}^{\infty} (s^{t-\tau} m_{t-\tau}) (s^\tau b_t) \\
&= a^*(s) + \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (s^v m_v) (s^\tau b_t) \\
&= a^*(s) + m^*(s) \sum_{\tau=0}^{\infty} (s^\tau b_t) \\
&= a^*(s) + m^*(s) b^*(s)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$b^*(s) = \frac{a^*(s)}{1 - m^*(s)} \quad (1.67)$$

Quand la population commence avec un seul individu d'âge 0 à l'instant 0, alors $a_t = m_t \forall t$, $a^*(s) = m^*(s)$, et (1.67) se réduit à:

$$b^*(s) = \frac{m^*(s)}{1 - m^*(s)} = \frac{1}{1 - m^*(s)} - 1 \quad (1.68)$$

On étudie (1.68) dans les circonstances de l'exemple précédent, deux descendants à la première année et deux à la deuxième. Alors $m^*(s) = 2s + 2s^2$.

b_t est le coefficient de s^t dans $b^*(s)$, qui est (de (1.68))

$$\begin{aligned}
b^*(s) &= \frac{1}{1 - (2s + 2s^2)} - 1 \\
&= 2s + 6s^2 + 16s^3 + 44s^4 + 120s^5 + 328s^6 + \dots
\end{aligned}$$

Remarquons que l'ancêtre initial donne naissance à $b_6 = 328$ nouveaux descendants à la 6^{ème} année.

Comportement asymptotique

On utilise le théorème de renouvellement discret pour déduire le comportement asymptotique de ce modèle de population structuré par âge. Remarquons que (1.66)

$$\begin{aligned}
b_t &= a_t + \sum_{\tau=0}^t m_{t-\tau} b_\tau \\
&= a_t + \sum_{v=0}^t m_v b_{t-v}
\end{aligned} \quad (1.69)$$

a la forme d'une équation de renouvellement sauf que $\{m_v\}$ n'est pas nécessairement une véritable loi de probabilité, la somme n'est pas 1. Il y a un moyen pour surmonter cette difficulté. On introduit une variable s dont la valeur sera choisie après. Posons :

$$m_v^\# = m_v s^v \quad , \quad b_v^\# = b_v s^v \quad \text{et} \quad a_v^\# = a_v s^v$$

En multipliant (1.69) par s^t et en remarquant que $s^t m_v b_{t-v} = (m_v s^v) (b_{t-v} s^{t-v}) = m_v^\# b_{t-v}^\#$, on obtient

$$b_t^\# = a_t^\# + \sum_{v=0}^t m_v^\# b_{t-v}^\# \quad (1.70)$$

Cette équation de renouvellement ne dépend pas de la valeur choisie pour s . On choisit donc s afin que $\{m_v^\#\}$ soit une loi de probabilité. C'est à dire on fixe la valeur de s telle que:

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v^\# = \sum_{v=0}^{\infty} m_v s^v = 1$$

Il y a toujours un s unique à chaque fois que $1 < \sum_{v=0}^{\infty} m_v^\# < \infty$. On peut maintenant appliquer le théorème de renouvellement à (1.70), pourvu que son hypothèse concernant le comportement non périodique est satisfaite. Pour cela il suffit que $m_1 > 0$. On conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_t^\# = \lim_{t \rightarrow \infty} b_t s^t = \frac{\sum_{v=0}^{\infty} a_v^\#}{\sum_{v=0}^{\infty} v m_v^\#} \quad (1.71)$$

On pose $\lambda = 1/s$ et $K = \frac{\sum_{v=0}^{\infty} a_v^\#}{\sum_{v=0}^{\infty} v m_v^\#}$ pour écrire (1.71) sous la forme

$$b_t \sim K \lambda^t \quad \text{pour } t \text{ grand}$$

c'est à dire, asymptotiquement la population croit au taux λ quand $\lambda = 1/s$ est la solution de

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v \lambda^{-v} = 1$$

Quand t est grand ($t > u$) alors (1.63) peut être itérée comme suit

$$\begin{aligned}
n_{u,t} &= n_{u-1,t-1} \left[\frac{l_u}{l_{u-1}} \right] \\
&= n_{u-2,t-2} \left[\frac{l_{u-1}}{l_{u-2}} \right] \left[\frac{l_u}{l_{u-1}} \right] \\
&= n_{u-2,t-2} \left[\frac{l_u}{l_{u-2}} \right] \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= n_{0,t-u} \left[\frac{l_u}{l_0} \right] = b_{t-u} l_u
\end{aligned}$$

Cela exprime simplement qu'à l'instant t les individus d'âge u sont nés $t-u$ unités de temps avant et ont survécu.

Puisque pour t assez grand on a $b_{t-u} \sim K\lambda^{t-u}$, alors

$$\begin{aligned}
n_{u,t} &\sim Kl_u\lambda^{t-u} = K(l_u\lambda^{-u})\lambda^t \\
N_t &= \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,t} \sim K \sum_{u=0}^{\infty} (l_u\lambda^{-u})\lambda^t
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_{u,t}}{N_t} = \frac{l_u\lambda^{-u}}{\sum_{v=0}^{\infty} l_v\lambda^{-v}} \quad (1.72)$$

Cette dernière expression fournit asymptotiquement la fraction de " la population d'âge ".

Exemple

Continuons l'exemple dans lequel $m_1 = m_2 = 2$ et $m_k = 0 \forall k > 2$, alors on a

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v s^v = 2s + 2s^2 = 1$$

les solutions sont

$$\begin{aligned}
s &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \\
&= 0.366 \quad , \quad -1.366
\end{aligned}$$

La solution choisie $s = 0.366$ et alors $\lambda = 1/s = 2.732$. Ainsi, asymptotiquement la population croît géométriquement avec un taux $\lambda = 2.732\dots$ et l'expression (1.72)

Age	Fraction de la population
0	$\frac{l_u \lambda^{-u}}{\sum_{v=0}^{\infty} l_v \lambda^{-v}} = 1 / (1 + s + s^2) = 0.6667$
1	$s / (1 + s + s^2) = 0.2440$
2	$s^2 / (1 + s + s^2) = 0.0893$

2 Files d'attente

2.1 Processus de files d'attente

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans plusieurs domaines (guichet de poste, trafic routier, central téléphonique, atelier de réparation,...). L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

On parle de phénomène d'attente chaque fois que des "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée de service est également aléatoire.

Les systèmes de files d'attente sont classées selon:

- Le processus d'entrée : la loi de probabilité des arrivées des clients.
- La loi de service : la loi de probabilité du temps de service des clients.
- La discipline de la file : le nombre de serveurs et l'ordre de service à la clientèle.

Dans la pratique, deux types simples de processus d'entrée se produisent :

- 1. les clients arrivent à des moments fixes $T, 2T, 3T, \dots$
- 2. le processus des arrivées "complètement aléatoire" où par exemple les temps d'arrivées forment un processus de Poisson.

De nombreux résultats sont disponibles lorsque les temps d'arrivées forment un processus de renouvellement.

On suppose que les temps de service des clients sont des v.a non négatives, indépendantes et identiquement distribuées et sont indépendantes du processus d'arrivées. La situation où les temps de service ont la même durée D est donc un cas particulier.

La discipline de files d'attente la plus courante est "*premier arrivé, premier servi*" : les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées. Nous allons étudier ce type de discipline .

Un modèle de file d'attente peut être utilisé pour évaluer les coûts et les avantages de l'ajout d'un serveur à un système existant. Ces modèles permettent aussi de calculer des mesures de performance du système en termes de quantités fondamentales.

Les mesures importantes du comportement du système sont:

- *La loi de probabilité du nombre de clients dans le système.*
- *L'utilisation des serveurs:* les serveurs inactifs peuvent entraîner des coûts nuisibles à la performance du système.
- *Le débit du système:* le nombre de clients à long terme en passant par le système est une mesure directe de la performance du système.

· *Le temps d'attente de la clientèle:* les longues durées d'attente sont gênantes dans des situations et sont directement associées à des coûts importants : par exemple les navires qui attendent à décharger ou les patients en attente des soins d'urgence à l'hôpital.

Formule de files d'attente

Toute file d'attente peut s'exprimer formellement comme

$$L = \lambda W$$

où un système de files d'attente qui a été exploité suffisamment longtemps pour avoir atteint un état stable ou une position d'équilibre statistique:

L : Le nombre moyen de clients dans le système.

λ : Le taux d'arrivées des clients dans le système.

W : Le temps moyen passé par un client dans le système.

L'équation $L = \lambda W$ est valide en grande généralité dans ces systèmes. Elle est importante en théorie des files d'attente, car elle concerne directement deux mesures de la performance du système: la taille moyenne de la file et le temps d'attente moyen dans l'état stationnaire. Ils sont évalués par rapport à la loi limite ou stationnaire du processus.

La validité de l'équation $L = \lambda W$ ne repose pas sur les détails du modèle mais ne dépend que de relations de d'équilibre à long terme.

En effet considérons un temps T suffisamment long pour que les fluctuations statistiques aient une moyenne. On peut raisonner comme suit : si le nombre total de clients entrés dans le système est λT et le nombre total de clients qui ont quitté le système est $\lambda(T - W)$ alors le nombre restant dans le système **L** doit être la différence

$$L = \lambda T - \lambda(T - W) = \lambda W.$$

On fournit plusieurs exemples pour la vérification de $L = \lambda W$ où

L est la moyenne de la loi stationnaire de clients dans le système.

W le temps moyen de clients restants dans le système.

qui sont déterminés à partir de la loi stationnaire et λ est le taux d'arrivées dans un processus de Poisson.

Soient L_0 le nombre moyen de clients en attente dans le système qui ne sont pas encore servi et W_0 le temps d'attente moyen dans le système exclu le temps de service. En parallèle à $L = \lambda W$, on a la formule:

$$L_0 = \lambda W_0 \tag{2.1}$$

Le temps d'attente total dans le système est la somme du temps d'attente avant le service et le temps de service. En moyenne, on a:

$$W = W_0 + \text{la durée moyenne de service.} \tag{2.2}$$

On présentera une variété de systèmes de files d'attente.

La notation utilisée $A/B/c$ signifie :

A : la loi des temps d'inter-arrivées.

B : la loi du temps de service pour chaque client.

c : le nombre de serveurs.

Les cas les plus courants pour A et B sont:

G ou GI : pour une loi générale ou arbitraire.

M : pour la loi exponentielle (sans mémoire) .

E_k : (Erlang) pour la loi gamma d'ordre k.

D : pour une loi déterministe(un programme d'arrivées ou temps de service fixé).

Exemples

File M/M/1

Les arrivées suivent un processus de Poisson, les temps de service sont exponentielles et il y a un seul serveur. Le nombre de clients dans le système à l'instant t $X(t)$ forme un processus de naissance et de mort.

File M/M/ ∞

Les arrivées suivent un processus de Poisson, les temps de service sont exponentielles et un nombre quelconque de client sont traités simultanément et indépendamment. Souvent les situations libre service- peuvent être décrites par ce modèle.

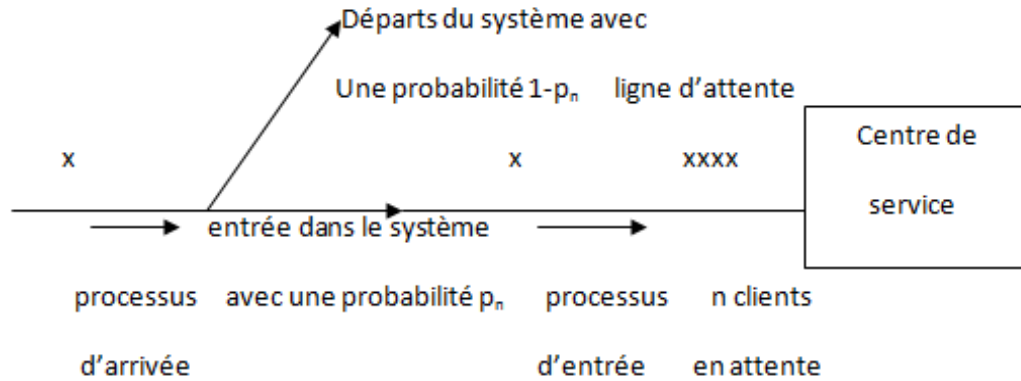
File M/GI/1

Les arrivées sont Poisson mais les temps de service sont arbitraires. L'analyse utilise une chaine de Markov "embedded". D'autres variantes de modèles sont également exposés.

La discipline "*Balking*" est le refus de l'entrée de nouveaux clients au système si la file d'attente est trop longue. Plus généralement, dans un système de files d'attente avec "*balking*" un client arrivant entre dans le système avec une probabilité qui dépend de la taille de la file. Ici, il est important de distinguer entre le processus d'arrivées et le processus d'entrées. Un cas spécial est la file avec surplus dans laquelle un client arrivant entre dans la file si et seulement si il existe au moins un serveur libre pour le servir.

Dans une file d'attente prioritaire, les clients sont autorisés à être de différents types. la discipline de service et la distribution des temps de service peuvent varier selon le type de client.

Figure1.1: si n clients sont en attente dans un système de files d'attente avec *balking*, un client arrivant rentre avec une probabilité p_n et ne rentre pas avec une probabilité $1 - p_n$.



2.2 Arrivées poissonniennes et temps de service exponentielles

Les modèles de files d'attente avec arrivées de Poisson et des temps de service exponentielles sont très étudiés.

Dans ce cas, la taille de la file constitue un processus de naissance et de mort et la loi stationnaire est facile à trouver.

Soit λ l'intensité ou le taux du processus d'arrivée (de Poisson). On suppose que les temps de service suivent une loi exponentielle de paramètre μ .

La fonction de densité correspondante est:

$$g(x) = \mu e^{-\mu x} \quad \text{pour } x > 0. \quad (2.3)$$

Pour le processus de Poisson on a:

$$P(\text{une arrivée dans } [t, t+h]) = \lambda h + o(h) \quad (2.4)$$

et

$$P(\text{aucune arrivée dans } [t, t+h]) = 1 - \lambda h + o(h) \quad (2.5)$$

De même, la propriété sans mémoire de la loi exponentielle exprimée, son taux de risque constant implique que:

$$P(\text{un service est terminé en } [t, t+h] / \text{le service est en cours à l'instant } t) = \mu h + o(h) \quad (2.6)$$

et

$$P(\text{un service n'est pas terminé en } [t, t+h] / \text{le service est en cours à l'instant } t) = 1 - \mu h + o(h) \quad (2.7)$$

Le taux de service μ s'applique à un serveur particulier. Si k serveurs fonctionnent simultanément la probabilité que l'un d'eux termine un service en un intervalle de durée h est $(k\mu)h + o(h)$ de sorte que le taux de service du système est $k\mu$.

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t en comptant les clients qui subissent le service et ceux qui sont en attente. L'indépendance des arrivées en intervalles de temps disjoints et la propriété sans mémoire de la loi exponentielle des temps d'attente implique que $X(t)$ est une chaîne de Markov homogène (un processus de naissance et de mort).

Le système M/M/1

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t . La croissance de $X(t)$ par une unité correspond à l'arrivée d'un client et en vue de (2.4) et (2.7)

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) &= (\lambda h + o(h))[1 - \mu h + o(h)] \\ &= \lambda h + o(h) \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

De même, une décroissance de $X(t)$ par une unité correspond à une fin de service, où

$$P(X(t+h) = k-1 | X(t) = k) = \mu h + o(h) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Alors $X(t)$ est un processus de naissance et de mort de paramètres de naissance

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

Et de paramètre de mort

$$\mu_k = \mu \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Bien sur la fin de service n'est pas possible que si la file est vide, on précise donc $\mu_0 = 0$

Soit la loi limite ou l'équilibre de la longueur de la file.

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = k) \quad k = 0, 1, \dots$$

La technique pour déterminer la loi limite π_k à partir des paramètres de naissance et de mort λ_k et μ_k consiste d'abord à obtenir des quantités intermédiaires θ_j définies par:

$$\theta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \quad \text{pour } j \geq 1 \quad (2.8)$$

puis

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} \quad \text{et} \quad \pi_k = \theta_k \pi_0 = \frac{\theta_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} \quad k \geq 1 \quad (2.9)$$

Quand $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = k) = 0 \quad \forall k$$

et la longueur de la file croit avec le temps.

Pour la file $M/M/1$, on calcule facilement $\theta_0 = 1$ et $\theta_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$ pour $j = 1, 2, \dots$

Alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} & \text{si } \lambda < \mu \\ \infty & \text{si } \lambda \geq \mu \end{cases}$$

Ainsi, la loi d'équilibre n'existe pas si le taux d'arrivées $\lambda \geq \mu$. Dans ce cas, la longueur de la file croit.

Quand $\lambda < \mu$ la loi limite existe et est donnée par:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.10)$$

et

$$\pi_k = \pi_0 \theta_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

La loi d'équilibre (2.11) nous donne la réponse à de nombreuses questions sur le comportement limite du système. On reconnaît la forme de (2.11) comme celle d'une loi géométrique.

Soit ρ l'intensité du trafic défini par:

$$\rho = \frac{\text{Taux d'arrivées}}{\text{Taux de service du système}} = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.12)$$

Proposition 1

La longueur moyenne de la file est donnée par

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2.13)$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k \\
&= \rho(1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\rho^n \\
&= \rho(1-\rho)(1+2\rho+3\rho^2+\dots) \\
&= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \\
&= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} - 1 \right) \\
&= \frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Si $\rho = 1$, la longueur moyenne de la file devient infinie.

En utilisant (2.8), la probabilité d'être servi immédiatement après l'arrivée est

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

qui est aussi la probabilité de trouver un serveur libre à long terme.

L'utilisation du serveur ou la fraction de temps à long terme que le serveur est occupé est

$$1 - \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu}$$

On peut également calculer la loi du temps d'attente dans le cas stationnaire quand $\lambda < \mu$: si un client trouve n personnes devant lui, son temps d'attente total T est la somme de son temps de service et de ceux qui sont devant lui, tous distribués exponentielles de paramètre μ . Comme les temps de service sont indépendants de la longueur de la file, T suit une loi gamma d'ordre $n+1$ avec paramètre d'échelle μ .

$$P(T \leq t \mid \text{il y a } n \text{ clients avant}) = \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} d\tau \quad (2.14)$$

Proposition 2

le temps d'attente T suit une loi exponentielle

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-t(\mu-\lambda)}$$

de moyenne

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (2.15)$$

Démonstration

Par la loi des probabilités totales, on a:

$$P(T \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T \leq t / n \text{ clients avant}) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$ est la probabilité de trouver n clients devant lui (dans le cas stationnaire).

En remplaçant dans (2.14), on obtient:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu t}}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\tau \\ &= \int_0^t \mu e^{-\mu \tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n \lambda^n}{\Gamma(n+1)} d\tau \\ &= \int_0^t \mu e^{-\mu \tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{\tau \lambda} d\tau \\ &= \int_0^t \mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-(\mu - \lambda)\tau} d\tau \\ &= \int_0^t \mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-\mu \tau (1 - \frac{\lambda}{\mu})} d\tau \\ &= 1 - e^{-t(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

D'où le résultat ■

On remarque que (2.13) et (2.15) vérifient la formule fondamentale des files d'attente: $\mathbf{L} = \lambda \mathbf{W}$

Un système de files d'attente alterne entre serveurs occupés et serveurs au repos. La période du repos commence quand le dernier client quitte le système et dure jusqu'à l'arrivée du client suivant.

Quand le processus d'arrivées est de Poisson de taux λ alors la période de repos est une loi exponentielle de moyenne

$$E(I_1) = \frac{1}{\lambda}$$

Une période "très occupée" est une période dans laquelle le système n'est pas vide.

Lorsque les arrivées suivent un processus de Poisson alors les durées successives X_k du début de la $k^{\text{ème}}$ période occupée jusqu'à le début de la période d'activité suivante forment un processus de renouvellement.

Chaque X_k est composée d'une partie occupée B_k et une partie de repos I_k . Le théorème de renouvellement s'applique pour dire que la probabilité $p_0(t)$ que le système est vide à l'instant t vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \pi_0 = \frac{E(I_1)}{E(I_1) + E(B_1)}$$

On remplace les quantités $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ et $E(I_1) = \frac{1}{\lambda}$ pour obtenir

$$1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + E(B_1)}$$

Ce qui donne: $E(B_1) = \frac{1}{\mu - \lambda}$ la longueur moyenne d'une période occupée.

On inverse le raisonnement dans l'étude du système M/G/1 dans la section 2.3, on calcule la période moyenne puis par le th. de renouvellement on détermine π_0 du serveur inactif.

Le système M/M/ ∞

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre instantanément en service et donc il n'y a pas d'attente.

Le taux de départ d'un client étant μ , le taux de départ de k clients est $k\mu$ et on obtient les paramètres de naissance et de mort:

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{et} \quad \mu_k = k\mu \quad k = 0, 1, \dots$$

Les quantités auxiliaires de (2.8) sont:

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \quad k = 0, 1, \dots$$

ce qui implique:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = e^{\lambda/\mu}$$

d'où,

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} = e^{-\lambda/\mu}$$

et

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 = \frac{(\lambda/\mu)^k e^{-\lambda/\mu}}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.16)$$

c'est une loi de Poisson de longueur moyenne de la file $L = \lambda/\mu$

Dans ce système un client commence immédiatement le service à son arrivée. Alors le temps d'attente ne se compose que du temps de service de loi exponentielle et le temps d'attente moyen est $W = \frac{1}{\mu}$.

De nouveau, la formule de files d'attente $L = \lambda W$ est vérifiée.

Le système M/M/s

On considère un système identique à la file M/M/1 excepté qu'il contient s serveurs identiques et indépendants. On conserve l'hypothèse qu'un serveur ne peut pas être en repos s'il y a des clients en attente. Alors les paramètres de naissance et de mort approximatifs sont:

$$\lambda_k = \lambda \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{pour } k = 0, 1, \dots, s \\ s\mu & \text{pour } k > s \end{cases}$$

Si $X(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t alors le nombre de services en cours est $\min(X(t), s)$ et le nombre de clients en attente est $\max(X(t) - s, 0)$. Alors

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & k = 0, 1, \dots, s \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} & k > s \end{cases}$$

et quand $\lambda < s\mu$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j &= \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s} \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1 - \lambda/s\mu)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'intensité du trafic dans un système M/M/s est $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$.

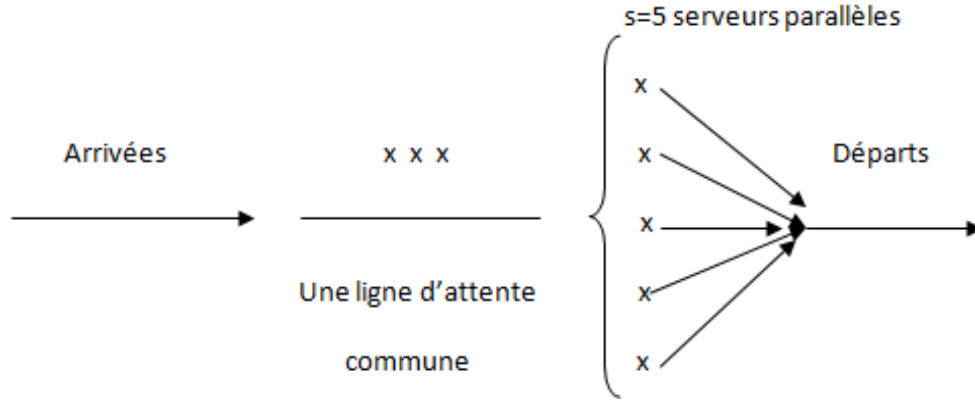


Figure 2.2: un système de files d'attente avec s serveurs
 Si l'intensité du trafic s'approche de 1, la longueur moyenne de la file croit à l'infini.

Quand $\lambda < s\mu$ alors d'après (2.9) et (2.17)

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1 - \lambda/s\mu)} \right\}^{-1}$$

et

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 & \text{pour } k = 0, 1, \dots, s \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} \pi_0 & \text{pour } k \geq s \end{cases} \quad (2.18)$$

Le nombre moyen L_0 de clients en attente dans le système n'ayant pas encore subit le service est

$$\begin{aligned} L_0 &= \sum_{j=s}^{\infty} (j-s)\pi_j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_{s+k} \\ &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \\ &= \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \\ &= \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\lambda/s\mu}{(1 - \lambda/s\mu)^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Alors

$$W_0 = \frac{L_0}{\lambda} \quad , \quad W = W_0 + \frac{1}{\mu}$$

et

$$L = \lambda W = \lambda(W_0 + \frac{1}{\mu}) = L_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

2.3 Files $M/G/1$ et $M/G/\infty$

On suppose que les arrivées suivent un processus de Poisson de paramètre λ , les temps de service successifs Y_1, Y_2, \dots suivent une loi arbitraire

$$G(y) = P(Y_k \leq y)$$

ayant un temps de service moyen fini

$$v = E(Y_k)$$

le taux de service à long terme est $\mu = \frac{1}{v}$. Les temps de service déterministes fixés sont un cas particulier.

File $M/G/1$

Si les arrivées suivent un processus de Poisson alors les durées successives X_k depuis le commencement de la $k^{\text{ème}}$ période occupée jusqu'à le début de la période occupée suivante forment un processus de renouvellement. Chaque X_k est composée d'une partie occupée B_k et une partie de repos I_k . Alors $p_0(t)$, la probabilité que le système est vide à l'instant t vérifie par le théorème de renouvellement:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \pi_0 = \frac{E(I_1)}{E(X_1)} = \frac{E(I_1)}{E(B_1) + E(I_1)} \quad (2.20)$$

Le temps de repos est la durée entre l'achèvement d'un service qui vide la file et le temps de l'arrivée suivante. Par la propriété "sans mémoire" qui caractérise les temps inter-arrivées dans un processus de Poisson tout instant de repos est de loi exponentielle de moyenne

$$E(I_1) = 1/\lambda$$

La période occupée est composée du temps du premier service Y_1 et des périodes d'occupation engendrées par tous les clients qui arrivent durant le premier temps de service.

Soit A le nombre de nouveaux clients. En conditionnant la période occupée par: $A = 0$ et $Y_1 = y$ on a

$$E(B_1/A = 0, Y_1 = y) = y$$

En effet, quand aucun client n'arrive alors la période occupée se compose seulement du temps de service Y_1 du premier client.

Considérons maintenant le cas $A = 1$ et soit B' la durée entre le début de service de ce client et le prochain instant où la file sera vide, alors

$$\begin{aligned} E(B_1/A = 1, Y_1 = y) &= y + E(B') \\ &= y + E(B_1) \end{aligned}$$

car à la fin de service du client initial, avec la seule arrivée commence une période occupée B' qui est de loi identique à la première donc $E(B') = E(B_1)$. En continuant de cette manière on en déduit que:

$$E(B_1/A = n, Y_1 = y) = y + nE(B_1)$$

Puis, en utilisant la loi des probabilités totales:

$$\begin{aligned} E(B_1/Y_1 = y) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(B_1/A = n, Y_1 = y)P(A = n/Y_1 = y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [y + nE(B_1)] \frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} \\ &= ye^{-\lambda y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^n}{n!} + E(B_1)e^{-\lambda y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\lambda y)^n}{n!} \\ &= y + \lambda y E(B_1) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} E(B_1) &= \int_0^{\infty} E(B_1/Y_1 = y) dG(y) \\ &= \int_0^{\infty} (y + \lambda y E(B_1)) dG(y) \\ &= v(1 + \lambda E(B_1)) \end{aligned} \tag{2.21}$$

On résout

$$E(B_1) = \frac{v}{1 - \lambda v} \quad \text{si } \lambda v < 1 \tag{2.22}$$

Pour calculer la fraction du temps de repos à long terme, on utilise (2.20) et:

$$\pi_0 = \frac{E(I_1)}{E(I_1) + E(B_1)} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + v/1 - \lambda v} = 1 - \lambda v \quad \lambda v < 1 \tag{2.23}$$

On note que (2.23) est vraie et s'accorde (2.10) obtenue pour la file M/M/1 avec $\nu = \frac{1}{\mu}$

Par exemple, si les arrivées se font au taux $\lambda = 2$ par heure et la moyenne du temps de service est 20 minutes ou $\nu = 1/3$ heure, alors à long terme le serveur est au repos: $1 - 2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ du temps.

Chaîne de Markov "embedded"

Le nombre de clients $X(t)$ dans le système à l'instant t , n'est pas un processus de Markov pour un file M/G/1. en effet si on veut prédire le comportement futur du système il faut savoir, en plus, le temps de service du client au guichet (c'est la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle des temps de service qui rend cette information supplémentaire inutile dans le cas M/M/1)

Soit X_n le nombre de clients dans la file après le départ du $n^{\text{ième}}$ client. la suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov. En effet, on peut écrire:

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{cases} X_{n-1} - 1 + A_n & X_{n-1} > 0 \\ A_n & X_{n-1} = 0 \end{cases} \\ &= (X_{n-1} - 1)^+ + A_n \end{aligned} \quad (2.24)$$

où A_n est le nombre de clients arrivant durant le service du $n^{\text{ième}}$ client et $x^+ = \max(x, 0)$.

Comme le processus d'arrivées est de Poisson, le nombre A_n est indépendant des arrivées antérieures et la propriété de Markov s'ensuit instantanément. On calcule:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= P(A_n = k) = \int_0^{\infty} P(A_n = k / Y_n = y) dG(y) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda y)^k e^{-\lambda y}}{k!} dG(y) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La matrice de transition est : pour $j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_n = j / X_{n-1} = i) \\ &= P(A_n = j - (i - 1)^+) \\ &= \begin{cases} \alpha_{j-i+1} & \text{pour } i \geq 1 \quad j \geq i + 1 \\ \alpha_j & \text{pour } i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Longueur moyenne de la file à l'équilibre

On va évaluer la longueur moyenne L de la file. La chaîne de Markov est d'un intérêt dans la file M/G/1. La loi stationnaire (π_j) de la chaîne de Markov (X_n) est aussi loi limite pour le processus $(X(t))$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j)$$

On admet que la loi stationnaire de la chaîne de Markov (X_n) est égale celle du processus non-markovien $(X(t))$.

Calculons $L = \lim_{t \rightarrow \infty} E(X(t))$ en calculant la quantité correspondante de la chaîne de Markov incluse $L = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$. Si $X = X_\infty$ est le nombre de clients dans le système après le départ d'un client et X' est le nombre après le départ suivant, alors par (2.24):

$$X' = X - \delta + N \quad (2.27)$$

où N est le nombre d'arrivées pendant la période de service et

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

En équilibre, X a la même loi que X' et en particulier,

$$L = E(X) = E(X') \quad (2.28)$$

En prenant l'espérance dans (2.27) on obtient:

$$E(X') = E(X) - E(\delta) + E(N)$$

et par (2.28) et (2.23)

$$E(N) = E(\delta) = 1 - \pi_0 = \lambda v \quad (2.29)$$

(2.27) donne:

$$(X')^2 = X^2 + \delta^2 + N^2 - 2\delta X + 2N(X - \delta)$$

et comme: $\delta^2 = \delta$ et $X\delta = X$ alors

$$(X')^2 = X^2 + \delta + N^2 - 2X + 2N(X - \delta) \quad (2.30)$$

Maintenant, N est indépendante de X et donc de δ ce qui donne

$$E[N(X - \delta)] = E(N)E(X - \delta) \quad (2.31)$$

Puisque X et X' ont la même loi :

$$E[(X')^2] = E(X^2) \quad (2.32)$$

En prenant l'espérance dans (2.30) on en déduit que:

$$E[(X')^2] = E(X^2) + E(\delta) + E(N^2) - 2E(X) + 2E(N)E(X - \delta)$$

Puis à partir de (2.29) et (2.32) on obtient:

$$0 = \lambda v + E(N^2) - 2L + 2\lambda v(L - \lambda v)$$

ou

$$L = \frac{\lambda v + E(N^2) - 2(\lambda v)^2}{2(1 - \lambda v)} \quad (2.33)$$

Il reste à évaluer $E(N^2/Y = y)$. La v.a N conditionnelle à $Y = y$ suit une loi de Poisson de moyenne (et variance) égale à λy ($P(A_n = k/Y_n = y) \rightarrow P(\lambda y)$ voir (2.25)) donc

$$E(N^2/Y = y) = \lambda y + (\lambda y)^2$$

En utilisant les probabilités totales:

$$\begin{aligned} E(N^2) &= \int_0^{\infty} E(N^2/Y = y) dG(y) \\ &= \lambda \int_0^{\infty} y dG(y) + \lambda^2 \int_0^{\infty} y^2 dG(y) \\ &= \lambda v + \lambda^2(\tau^2 + v^2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

où τ^2 est la variance de la loi du temps de service $G(y)$

En remplaçant (2.34) dans (2.33) on a:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2\lambda v + \lambda^2\tau^2 - (\lambda v)^2}{2(1 - \lambda v)} \\ &= \rho + \frac{\lambda^2\tau^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

où $\rho = \lambda v$ est l'intensité du trafic.

Enfin, $W = L/\lambda$ se simplifie à:

$$W = v + \frac{\lambda(\tau^2 + v^2)}{2(1 - \rho)} \quad (2.36)$$

Des résultats (2.35) et (2.36) on peut remarquer: que pour un taux moyen λ d'arrivées et un temps moyen v de service, on peut diminuer la longueur moyenne de la file L et le temps d'attente W en diminuant la variance du temps de service. Evidemment, le meilleur cas possible à cet égard correspond à des temps de service constants pour lesquels $\tau^2 = 0$.

File M/G/ ∞

les résultats complets existent quand chaque client commence le service immédiatement à son arrivée indépendamment des autres clients dans le système.

Soient W_1, W_2, \dots les temps d'arrivées successives des clients, et soient V_1, V_2, \dots les temps de service correspondants. Avec ces notations, le $k^{\text{ème}}$ client est dans

le système à l'instant t si et seulement si $W_k \leq t$ (le client arrive avant t) et $W_k + V_k > t$ (le service s'étend au delà de t)

La séquence de couples $(W_1, V_1), (W_2, V_2), \dots$ forme un processus de Poisson à marque et on peut utiliser la méthode correspondante pour obtenir des résultats dans ce modèle.

$X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t est aussi le nombre de points pour lesquels $W_k \leq t$ et $W_k + V_k > t$.

C'est à dire, c'est le nombre des points (W_k, V_k) dans le trapèze sans bornes défini par:

$$A_t = \{(w, v) \mid 0 \leq w \leq t \text{ et } v \geq t - w\}$$

Alors, le nombre de points dans A_t suit une loi de Poisson de moyenne:

$$\begin{aligned} \mu(A_t) &= \iint_{A_t} \lambda(dw) dG(v) \\ &= \lambda \int_0^t \left\{ \int_{t-w}^{\infty} dG(v) \right\} dw \\ &= \lambda \int_0^t [1 - G(t-w)] dw \\ &= \lambda \int_0^t [1 - G(x)] dx \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_k(t) &= P(X(t) = k) \\ &= \frac{\mu(A_t)^k e^{-\mu(A_t)}}{k!} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

où $\mu(A_t)$ est donné par (2.37). Quand $t \rightarrow \infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(A_t) = \lambda \int_0^{\infty} [1 - G(x)] dx = \lambda v$$

où v est le temps moyen de service. Ainsi, on obtient la loi limite

$$\pi_k = \frac{(\lambda v)^k e^{-\lambda v}}{k!} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

2.4 Quelques extensions

Dans cette section, on considère quelques extensions des modèles simples de files d'attente déjà étudiés. On se limite à des arrivées de Poisson et des temps de service exponentielles.

2.4.1 Systèmes avec "Balking"

On suppose que si un client arrive et si il y a n clients dans le système alors il rentre avec une probabilité p_n et repart avec une probabilité $q_n = 1 - p_n$.

Si les longues files découragent les clients alors p_n doit être une fonction décroissante en n . Comme cas particulier, s'il y a une salle d'attente finie de capacité C , on peut supposer que:

$$p_n = \begin{cases} 1 & n < C \\ 0 & n \geq C \end{cases}$$

ie une fois la salle est remplie, aucun client ne peut rentrer dans le système.

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Si le processus d'arrivées est $P(\lambda)$ et quand un client arrive et si il y a n clients dans le système il entre avec une probabilité p_n alors les paramètres de naissance appropriés sont:

$$\lambda_n = \lambda p_n \quad n = 0, 1, \dots$$

Dans le cas d'un seul serveur,

$$\mu_n = \mu \quad n = 1, 2, \dots$$

On peut évaluer la loi stationnaire π_k de la longueur de la file.

Dans le système avec "balking", on n'a pas nécessairement tous les clients qui arrivent rentrent dans le système et certains sont perdus. Le taux d'entrée est le taux des clients rentrant dans le système à l'état stationnaire et il est donné par

$$\lambda_I = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n p_n.$$

Le taux auquel les clients sont perdus est $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n q_n$. La fraction des clients perdus à long terme est

$$\text{Fraction perdue} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n q_n$$

Examinons en détail le cas du système M/M/s dans lequel un client arrivant rentre si et seulement si un serveur est libre. On a

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & k = 0, 1, \dots, s-1 \\ 0 & k = s. \end{cases}$$

et

$$\mu_k = k\mu \quad k = 0, 1, \dots, s$$

Pour déterminer la loi limite, on a:

$$\theta_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \quad k = 0, 1, \dots, s$$

puis,

$$\pi_k = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{\sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j} \quad k = 0, 1, \dots, s \quad (2.38)$$

La fraction à long terme de clients perdus est $\pi_s q_s = \pi_s$ puisque $q_s = 1$ dans ce cas.

2.4.2 Taux de service variables

On peut considérer un système dont le taux de service dépend du nombre de clients dans le système.

Si les arrivées sont de Poisson et les taux de service sont sans mémoire, alors les paramètres de naissance et de mort appropriés sont:

$$\lambda_k = \lambda \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & k \leq \xi \\ 2\mu & k \geq \xi \end{cases}$$

où ξ est un point critique.

Plus généralement, on considère des arrivées de Poisson $\lambda_k = \lambda$ pour $k = 0, 1, \dots$ et des taux de service arbitraires μ_k pour $k = 1, 2, \dots$. La loi stationnaire dans ce cas est donnée par:

$$\pi_k = \frac{\pi_0 \lambda^k}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (2.39)$$

où

$$\pi_0 = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \right\}^{-1} \quad (2.40)$$

2.4.3 Système avec "Feedback"

Considérons un système à un seul serveur avec des arrivées de Poisson et des temps de service exponentiels. on suppose que certains clients après avoir quitté le serveur reviennent à la fin de la file pour un service supplémentaire. En particulier, supposons qu'un client qui termine le service quitte le système avec une probabilité q et retourne à la file avec une probabilité $p = 1 - q$. Supposons que toutes ces décisions sont les mêmes que ceux d'un client venant de l'extérieur du système. Soit λ le taux d'arrivées et μ le taux de service.

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t alors $X(t)$ est un processus de naissance et de mort avec les paramètres:

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

et

$$\mu_n = q\mu \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Il est facile d'en déduire que la loi stationnaire dans le cas où $\lambda < q\mu$ est:

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{q\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{q\mu}\right)^k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \quad (2.41)$$

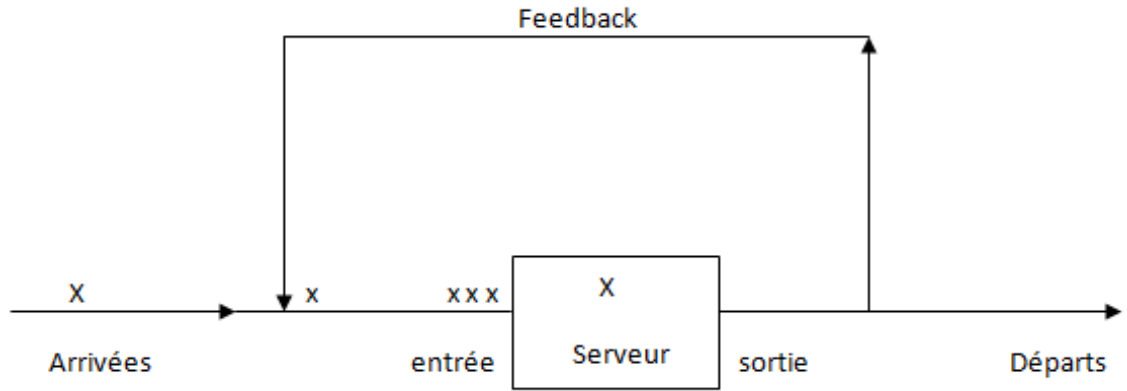


Figure 2.3: une file d'attente avec feedback.

2.4.4 Files d'attente à deux serveurs "overflow" (débordement)

Considérons un système à deux serveurs où le serveur i a un taux μ_i pour $i = 1, 2$. Les arrivées suivent un processus de Poisson de taux λ . Un client qui arrive quand le système est vide se dirige vers le premier serveur, si le premier serveur est occupé il se dirige vers le deuxième et si les deux serveurs sont occupés le client est perdu.

L'état du système est décrit par le couple $(X(t), Y(t))$ où:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le 1}^{er} \text{ serveur est occupé} \\ 0 & \text{si le 1}^{er} \text{ serveur est libre} \end{cases}$$

et

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le 2}^{ème} \text{ serveur est occupé} \\ 0 & \text{si le 2}^{ème} \text{ serveur est libre} \end{cases}$$

Les quatre états du système sont $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

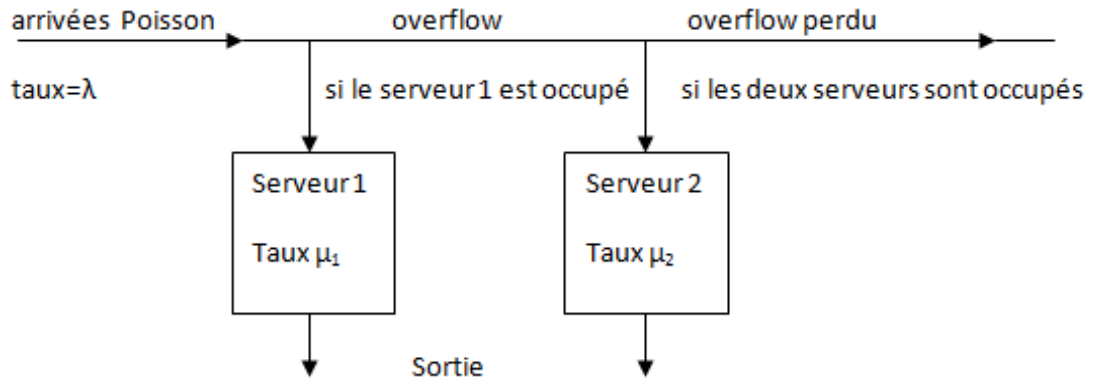


Figure 2.4: un modèle à deux serveurs "overflow."

les transitions entre les états se produisent à des taux donnés dans le tableau suivant:

De l'état	à l'état	taux de transition	Description
(0,0)	(1,0)	λ	Arrivée lorsque le système est vide
(1,0)	(0,0)	μ_1	L'accomplissement du service par #1 quand #2 est libre
(1,0)	(1,1)	λ	Arrivée quand #1 est occupé
(1,1)	(1,0)	μ_2	L'accomplissement du service par #2 quand #1 est occupé
(1,1)	(0,1)	μ_1	L'accomplissement du service par #1 quand #2 est occupé
(0,1)	(1,1)	λ	Arrivée quand #2 est occupé et #1 est libre
(0,1)	(0,0)	μ_2	L'accomplissement du service par #2 quand #1 est libre

Le processus $(X(t), Y(t))$ est à espace états fini. c'est une chaîne de Markov à temps continu et les taux de transitions (ou générateur) sont donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda + \mu_2) & 0 & \lambda \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix}$$

La loi stationnaire $\pi = (\pi_{(0,0)}, \pi_{(0,1)}, \pi_{(1,0)}, \pi_{(1,1)})$ vérifie $\pi A = 0$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \pi_{(0,0)} = \frac{\mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{D} \\ \pi_{(0,1)} = \frac{\lambda^2\mu_1}{D} \\ \pi_{(1,0)} = \frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{D} \\ \pi_{(1,1)} = \frac{\lambda^2(\lambda+\mu_2)}{D} \end{cases} \quad (2.42)$$

où

$$D = \mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2\mu_1 + \lambda\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2(\lambda + \mu_2)$$

La fraction de clients perdus, à long terme, est la même que la fraction de temps que les deux serveurs sont occupés:

$$\pi_1 = \frac{\lambda^2(\lambda + \mu_2)}{D}$$

2.4.5 Files d'attente avec priorité

Considérons un processus de files d'attente à un serveur et qui il y'a deux classes de clients *prioritaires* et *non prioritaires*. Ils forment des processus d'arrivées de Poisson indépendants de taux α et β respectivement. Dans les classes il y a le principe du premier arrivé, premier servi et le service des clients prioritaires n'est jamais interrompu. Si un client prioritaire arrive pendant le service d'un client non prioritaire, alors le service de celui ci est immédiatement arrêté en faveur de clients prioritaires, le service interrompu est repris quand il n'y a plus de clients prioritaires présents.

On introduit quelques notations, le taux d'arrivées du système est $\lambda = \alpha + \beta$, la fraction $p = \frac{\alpha}{\lambda}$ des clients prioritaires et $q = \frac{\beta}{\lambda}$ est celle des clients non prioritaires. La moyenne du temps de service du système est donnée de manière appropriée par les moyennes pondérées $\frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{\delta}$ de clients prioritaires et non prioritaires respectivement, ou

$$\frac{1}{\mu} = p\left(\frac{1}{\gamma}\right) + q\left(\frac{1}{\delta}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}\right) \quad (2.43)$$

où μ est le taux de service du système.

Enfin, on introduit les intensités de trafic $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ pour le système, $\sigma = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $\tau = \frac{\beta}{\delta}$ pour les clients prioritaires et non prioritaires respectivement.

De (2.43) on voit que

$$\rho = \sigma + \tau.$$

L'état du système est décrit par le couple $(X(t), Y(t))$ où $X(t)$ est le nombre de clients prioritaires dans le système et $Y(t)$ le nombre de clients non prioritaires.

Remarquons qu'on voit les clients prioritaires dans le système comme une file d'attente M/M/1. En conséquence, on a la loi limite de (2.11) pour être

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = m) = (1 - \sigma)\sigma^m, \quad m = 0, 1, \dots \quad \sigma = \frac{\alpha}{\gamma} < 1 \quad (2.44)$$

(2.13) et (2.15), nous donnent, respectivement, la longueur moyenne de la file des clients prioritaires

$$L_p = \frac{\alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad (2.45)$$

et le temps d'attente moyen des clients prioritaires

$$W = \frac{1}{\gamma - \alpha} \quad (2.46)$$

Obtenir des informations sur les clients non prioritaires n'est pas aussi facile puisque ses arrivées sont fortement affectées par les clients prioritaires. Néanmoins, $(X(t), Y(t))$ processus de Markov à temps continu à états discrets.

Les taux de transitions de la chaîne de Markov $(X(t), Y(t))$ sont décrits dans la table suivante:

De l'état	à l'état	taux de transition	Description
(m, n)	$(m + 1, n)$	α	Arrivée d'un client prioritaire
(m, n)	$(m, n + 1)$	β	Arrivée d'un client non prioritaire
$(0, n)$	$(0, n - 1)$	δ	L'accomplissement du service d'un client non prioritaire
(m, n)	$(m - 1, n)$	γ	L'accomplissement du service d'un client prioritaire

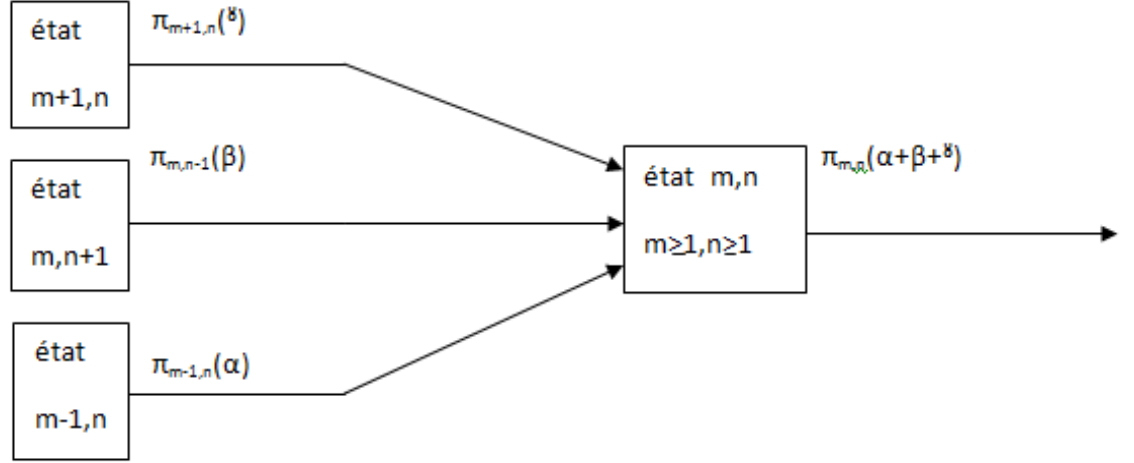


Figure 2.5: en équilibre, le taux de flux rentrant dans un état doit être égal au taux de flux sortant. . L'état (m, n) illustre ceci et conduit à l'équation (2.50)

Soit

$$\pi_{m,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = m, Y(t) = n)$$

la loi limite du processus.

Un raisonnement analogue, nous donne les équations suivantes pour la loi stationnaire:

$$(\alpha + \beta) \pi_{0,0} = \gamma \pi_{1,0} + \delta \pi_{0,1} \quad (2.47)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \pi_{m,0} = \gamma \pi_{m+1,0} + \alpha \pi_{m-1,0} \quad m \geq 1 \quad (2.48)$$

$$(\alpha + \beta + \delta) \pi_{0,n} = \gamma \pi_{1,n} + \delta \pi_{0,n+1} + \beta \pi_{0,n-1} \quad n \geq 1 \quad (2.49)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \pi_{m,n} = \gamma \pi_{m+1,n} + \beta \pi_{m,n-1} + \alpha \pi_{m-1,n} \quad m, n \geq 1 \quad (2.50)$$

En principe, ces équations, avec la condition $\sum_m \sum_n \pi_{m,n} = 1$, peuvent être résolues pour la loi stationnaire si elle existe.

On détermine le nombre moyen de clients non prioritaires dans le système L_n dans l'état stationnaire donné par:

$$L_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{m,n} \quad (2.51)$$

On introduit la notation:

$$M_m = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{m,n} \quad (2.52)$$

Alors

$$L_n = M_0 + M_1 + \dots \quad (2.53)$$

En utilisant (2.44) on a

$$p_m := P(X(t) = m) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{m,n} = (1 - \sigma)\sigma^m \quad (2.54)$$

et

$$\pi_n = P(Y(t) = n) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{m,n} \quad (2.55)$$

la somme des deux côtés de (2.47) et (2.48) pour $m = 0, 1, \dots$ donne:

$$(\alpha + \beta)\pi_0 + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,0} = \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,0} + \delta\pi_{0,1} + \alpha\pi_0$$

qui se simplifie à:

$$\beta\pi_0 = \delta\pi_{0,1} \quad (2.56)$$

Ensuite, on somme (2.49) et (2.50) sur $m = 0, 1, \dots$ pour obtenir:

$$(\alpha + \beta)\pi_n + \delta\pi_{0,n} + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,n} = \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,n} + \delta\pi_{0,n+1} + \beta\pi_{n-1} + \alpha\pi_n$$

qui se simplifie à:

$$\beta\pi_n + \delta\pi_{0,n} = \beta\pi_{n-1} + \delta\pi_{0,n+1}$$

Par induction avec (2.56), on obtient:

$$\beta\pi_n = \delta\pi_{0,n+1} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots \quad (2.57)$$

En sommant (2.57) sur $n = 0, 1, \dots$ et en utilisant $\sum_n \pi_n = 1$, on obtient:

$$\beta = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n+1} = \delta P(X(t) = 0, Y(t) > 0)$$

ou

$$P(X(t) = 0, Y(t) > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{0,n} = \frac{\beta}{\delta} = \tau \quad (2.58)$$

Puisque (2.54) donne $P(X(t) = 0) = 1 - \frac{\alpha}{\gamma} = 1 - \sigma$, on a:

$$\begin{aligned}\pi_{0,0} &= P(X(t) = 0, Y(t) = 0) = P(X(t) = 0) - P(X(t) = 0, Y(t) > 0) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta} = 1 - \sigma - \tau \quad \text{quand } \sigma + \tau < 1\end{aligned}\quad (2.59)$$

Avec ces résultats, on détermine $M_m = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{m,n}$, en multipliant (2.49) par n et en additionnant, on obtient:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma) M_0 &= \gamma M_1 + \delta \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{0,n+1} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{0,n-1} \\ &= \gamma M_1 + \delta M_0 - \delta \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n+1} + \beta M_0 + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{0,n-1} \\ &= \gamma M_1 + \delta M_0 - \delta \left(\frac{\beta}{\delta} \right) + \beta M_0 + \beta (1 - \sigma)\end{aligned}$$

où la dernière ligne résulte de (2.54) et (2.58). Après simplification on a:

$$M_1 = \sigma M_0 + \frac{\beta}{\gamma} \sigma \quad (2.60)$$

On multiplie (2.50) par n et on somme pour obtenir:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma) M_m &= \gamma M_{m+1} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{m,n-1} + \alpha M_{m-1} \\ &= \gamma M_{m+1} + \beta M_m + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{m,n-1} + \alpha M_{m-1}\end{aligned}$$

Encore une fois, en se référant à (2.54) et en simplifiant, on voit que:

$$(\alpha + \gamma) M_m = \gamma M_{m+1} + \alpha M_{m-1} + \beta (1 - \sigma) \sigma^m \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots \quad (2.61)$$

Les équations (2.60) et (2.61) peuvent être résolues par induction pour donner:

$$M_m = M_0 \sigma^m + \frac{\beta}{\gamma} m \sigma^m \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots$$

qu'on somme pour obtenir:

$$L_n = \sum_{m=0}^{\infty} M_m = \frac{1}{1 - \sigma} \left[M_0 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right] \quad (2.62)$$

ceci détermine L_n en termes de M_0 . Pour obtenir une seconde relation, on multiplie (2.57) par n et on somme:

$$\begin{aligned}
\beta L_n &= \delta \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{0,n+1} \\
&= \delta M_0 - \delta \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n+1} \\
&= \delta M_0 - \delta \left(\frac{\beta}{\delta} \right) \quad [\text{voir (2.58)}]
\end{aligned}$$

ou bien,

$$M_0 = \frac{\beta}{\delta} (L_n + 1) = \tau (L_n + 1) \quad (2.63)$$

On remplace (2.63) dans (2.62) et on simplifie, ce qui donne:

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{1-\sigma} \left[\tau (L_n + 1) + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \\
\left(1 - \frac{\tau}{1-\sigma} \right) L_n &= \frac{1}{1-\sigma} \left[\tau + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1-\sigma} \right]
\end{aligned}$$

Et finalement,

$$L_n = \left(\frac{\tau}{1-\sigma-\tau} \right) \left[1 + \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \quad (2.64)$$

La condition que L_n soit fini (et que la loi stationnaire existe) est:

$$\rho = \sigma + \tau < 1$$

C'est à dire, l'intensité du trafic du système doit être inférieure à un.

Comme le taux d'arrivées des clients non prioritaires est β , le temps d'attente moyen des clients non prioritaires est donné par:

$$W_n = \frac{L_n}{\beta}$$

Certaines études numériques de (2.45) et (2.64) donnent des résultats surprenants concernant l'ajout de priorité à un système existant.

Considérons d'abord un simple système M/M/1 avec intensité du trafic ρ dont la longueur moyenne de la file est donnée par (2.13): $L = \frac{\rho}{1-\rho}$. Proposons une modification du système de telle sorte que la fraction des clients prioritaires est $p = \frac{1}{2}$. On suppose que la priorité est indépendante du temps de service, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\lambda$ et $\gamma = \delta = \mu$, d'où $\sigma = \tau = \frac{\rho}{2}$. Ensuite, les longueurs moyennes de la file pour les clients prioritaires et non prioritaires sont données par:

$$L_p = \frac{\sigma}{1 - \sigma} = \frac{\rho/2}{1 - (\rho/2)}$$

et

$$L_n = \left(\frac{\rho/2}{1 - \rho} \right) \left[1 + \frac{\rho/2}{1 - (\rho/2)} \right]$$

Les longueurs moyennes des files L , L_p et L_n ont été déterminés pour plusieurs valeurs de l'intensité du trafic ρ . Les résultats sont:

ρ	L	L_p	L_n
0.6	1.50	0.43	1.07
0.8	4.00	0.67	3.34
0.9	9.00	0.82	8.19
0.95	19.00	0.90	18 .05

On voit que la croissance de la longueur de la file et la croissance de l'intensité du trafic sont engendrées exclusivement par les clients non prioritaires.

CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce mémoire quelques exemples de processus de branchement et leurs application en biologie (ADN) et dans la croissance des populations.

Aussi quelques exemples de files d'attente.

Bibliographie

1. Soren Asmussen, *Applied probability and queues*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 1987.
2. François Baccelli and Pierre Brémaud, *Elements of queueing theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1994, *Palm-martingale calculus and stochastic recurrences*.
3. J.W. Cohen, *The single server queue*, 2nd ed, North-Holland, Amsterdam, 1982.
4. S. Meyn and R. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Communications and control engineering series, Springer, 1993.
5. Esa Nummelin, *General irreducible Markov chains and nonnegative operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.