

UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID - TLEMCCEN  
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# MÉMOIRE

pour l'obtention du diplôme de

# MASTER

Option :PROBABILITES ET STATISTIQUES

présenté par

ABI AYAD Ilham

Thème

## INTRODUCTION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Devant le jury composé de :

Mr. T. Mourid, Professeur. Université de Tlemcen. **Président.**

Mr. A.Allam MC. Université de Tlemcen. **Examineur.**

Mr. F. Boukhari, MC. Université de Tlemcen. **Rapporteur.**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et Compléments</b>	<b>2</b>
1.1 Vecteurs gaussiens . . . . .	2
1.2 Processus stochastiques . . . . .	3
1.3 Martingales à temps continu . . . . .	7
1.4 L'intégrale stochastique . . . . .	8
<b>2 Equations Différentielles Stochastiques</b>	<b>16</b>
2.1 Définitions-Exemples. . . . .	16
2.2 Exemples . . . . .	17
2.3 Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	20
2.4 Exemples . . . . .	26
2.5 Théorème de Yamada-Watanabe . . . . .	28
<b>3 Diffusions d'Itô</b>	<b>30</b>
3.1 Définitions et propriétés . . . . .	30
3.2 Générateur d'une diffusion d'Itô . . . . .	33
3.3 Equation à retard de Kolmogorov . . . . .	36
3.4 Formule de Feynman-Kac . . . . .	41
<b>4 Equations différentielles stochastiques rétrogrades</b>	<b>42</b>
4.1 Introduction . . . . .	42
4.2 Le cas lipschitzien . . . . .	45
4.3 EDSR linéaires . . . . .	52
<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Introduction

Dans ce mémoire, on introduit les équations différentielles (EDS) qui sont une généralisation de la notion d'équations différentielles prenant en compte une perturbation aléatoire. Celle-ci est exprimée à l'aide du mouvement brownien.

Ce document est composé de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels des résultats importants en calcul stochastique concernant les processus stochastiques. On donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales. On abordera enfin la notion d'intégrale stochastique sans laquelle il n'y aurait pas lieu à parler d'EDS.

Dans le deuxième chapitre, on donnera une définition mathématique d'une équation différentielle accompagnée de quelques exemples. On citera ensuite l'un des théorèmes les plus importants, à savoir le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS. On finira ce chapitre par l'énoncé d'un grand théorème qu'on doit aux mathématiciens Yamada et Watanabe.

Le troisième chapitre traite une classe particulière des EDS. Il s'agit des diffusions d'Itô. On montrera que la solution de celle-ci possède, entre autres, les propriétés de Markov. On définira ensuite un opérateur pour une diffusion d'Itô qu'on appellera générateur. On terminera ce chapitre en énonçant deux théorèmes ; l'équation à retard de Kolmogorov et la formule de Feynman-Kac.

Dans le dernier chapitre, on introduira la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). Il s'agit d'étudier une évolution de laquelle on connaît l'issue et pas la situation initiale. Le dernier paragraphe est consacré à l'étude d'un cas particulier des EDSR à savoir le cas linéaire.

# Chapitre 1

## Rappels et Compléments

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique utilisés le long de ce mémoire.

### 1.1 Vecteurs gaussiens

Dans tout ce qui suit,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  désigne un espace de probabilité complet.

**Définition 1.1.1** On dit qu'une v.a.r  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est une variable aléatoire gaussienne ou normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$ , ( $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$ ) si sa fonction de densité  $f_X$  est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans ce cas, sa loi  $P_X$  est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad P_X(A) = \int_A f_X(x) dx$$

et on note  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

**Remarque 1.1.2** Lorsque  $\sigma = 0$ ,  $X$  est une variable constante i.e.  $X = m$   $P$ -p.s.

**Définition 1.1.3**  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes i.e.

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

est une v.a.r gaussienne.

**Exemple 1.1.4** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes alors  $(X, Y)$  et  $(X - Y, X + Y)$  sont des vecteurs gaussiens

## 1.2 Processus stochastiques

### Définition 1.2.1

Une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une suite croissante de sous tribus de  $\mathcal{F}$ .

Si  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une filtration de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  alors  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  est appelé espace de probabilité filtré.

### Définition 1.2.2

- Si  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une filtration alors on définit la filtration suivante

$$\mathcal{F}_{t+} = \left( \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \right).$$

- On dit qu'une filtration est continue à droite

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}.$$

- Soit  $\mathcal{N}$  la classe des ensembles de  $\mathcal{F}$  qui sont  $P$ -négligeables. Si  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ , on dit que la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est complète.

- On dit qu'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.

### Définition 1.2.3 Soit $T$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ .

- un processus stochastique  $(X_t)_{t \in T}$  dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) est une famille de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  indexée par  $T$ .

- Pour  $\omega \in \Omega$  fixé,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est appelée trajectoire.

**Définition 1.2.4** Un processus  $X$  est progressivement mesurable par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si, pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$  de  $[0, t] \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Définition 1.2.5** Un processus  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est mesurable si l'application  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  de  $\mathbb{R} \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$  est mesurable par rapport aux tribus  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Définition 1.2.6** Soit  $(X_t)$  un processus et  $(\mathcal{F}_t)$  une filtration de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

On dit que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si

$$\forall t \geq 0, \quad X_t \text{ est } \mathcal{F}_t \text{-mesurable.}$$

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

A présent, nous donnons trois critères pour comparer deux processus stochastiques

**Définition 1.2.7** Soit  $X = (X_t)_{t \in T}$  un processus stochastique. Les lois de dimension finie du processus  $X$  sont les lois des vecteurs du type  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  où  $n \geq 1$  et  $t_1, \dots, t_n \in T$ .

On dit que deux processus  $(X_t)_{t \in T}$  et  $(Y_t)_{t \in T}$  ont même loi s'ils ont les mêmes lois de dimension finie .

**Définition 1.2.8** Soient  $X = (X_t)_{t \in T}$ ,  $Y = (Y_t)_{t \in T}$  deux processus stochastiques.

1. On dit que  $Y$  est une modification de  $X$  si

$$\forall t \in T, \quad P(X_t = Y_t) = 1.$$

2. On dit que les processus  $X$  et  $Y$  sont indistinguables si

$$P(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1, \quad \text{on note } X \equiv Y.$$

**Proposition 1.2.9** Soient  $T$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $X = (X_t)_{t \in T}$  et  $Y = (Y_t)_{t \in T}$  deux processus stochastiques continus alors :

$X$  et  $Y$  sont indistinguables  $\iff X$  est une modification de  $Y$ .

**Définition 1.2.10** Un processus  $X = (X_t)_{t \in T}$  est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e.

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t_1 < t_2 < \dots, t_n \in T, \quad (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien.}$$

**Définition 1.2.11** On dit que le processus  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants si :

$$\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \quad X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ sont indépendantes.}$$

Nous pouvons à présent définir le processus le plus important en calcul stochastique, à savoir le mouvement brownien appelé aussi processus de Wiener.

Le mouvement brownien, qui tient son nom de Richard Brown, botaniste écossais du 19 ème siècle, est considéré comme un phénomène naturel d'une part, et un objet mathématique d'autre part.

Observant le mouvement irrégulier et incessant des particules de pollen en suspension dans l'eau, Richard brown effectua des expériences avec des particules inorganiques

en suspension dans un liquide. Le phénomène qui paraissait à priori vital fut alors écarté de la biologie.

De ce fait des chercheurs comme Einstein, Wiener et Levy s'intéressèrent à ce phénomène d'un point de vue autre que le point de vue naturel en lui donnant une forme mathématique qui n'est en vérité qu'une idéalisation mathématique du mouvement réel. Le mouvement brownien est alors présenté comme :

**Définition 1.2.12** (*Le mouvement brownien*).

Le mouvement brownien standard est un processus stochastique réel  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  vérifiant :

- i)  $B_0 = 0$  *P p.s.*
- ii)  $\forall s \in [0, t]$  ,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .
- iii)  $\forall n \geq 1, \forall t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ;  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.
- iv) *P-p.s.*, l'application  $t \mapsto B_t$  est continue.

Pour cette dernière définition, on peut remplacer les propriétés ii) et iii) par d'autres propriétés comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 1.2.13** *Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ii)} (B_t; t \in \mathbb{R}_+) \text{ est à accroissements indépendants,} \\ \text{iii)} \forall 0 \leq s < t, B_t - B_s \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, t - s) \\ \text{ii')} \forall t \geq 0, B_t \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, t), \\ \text{iii')} \forall 0 < s \leq t, B_t - B_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s) \\ \text{ii'')} (B_t)_{t \geq 0} \text{ est un processus gaussien, centré,} \\ \text{iii'')} \forall s, t \in \mathbb{R}_+, \text{cov}(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = s \wedge t. \end{array} \right.$$

#### ¶ Définition 1.2.14

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ , un mouvement brownien issu de  $x$   $B^x = (B_t^x)_{t \geq 0}$  est un processus qui vérifie ii), iii) et iv) et  $B_0 = x$ , *P - p.s.*

- Un mouvement standard dans  $\mathbb{R}^d$  noté  $BM^d$  est un processus  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  où  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$  avec  $\{(B_t^i), 1 \leq i \leq d\}$  des mouvements browniens standards indépendants.

Le mouvement brownien possède de nombreuses bonnes propriétés, en effet :

**Proposition 1.2.15** Soit  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  alors

– a) Symétrie.

Le processus  $(-B) = (-B_t)_{t \geq 0}$  est encore un mouvement brownien.

– b) Changement d'échelle (scaling).

Soit  $\lambda > 0$ . Le processus  $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t \geq 0}$  avec  $B_t^\lambda = (1/\lambda)B_{\lambda^2 t}$  est encore un mouvement brownien.

– b) Propriété de Markov simple.

Pour  $s \geq 0$ , posons  $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u, u \leq s)$  et  $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$ .

alors  $B^{(s)} = (B_t^{(s)})_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .

**Définition 1.2.16** Soit  $(\mathcal{F}_t)$  une filtration et  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  une application. on dit que  $T$  est un temps d'arrêt par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

**Définition 1.2.17** Soit  $T$  un temps d'arrêt, posons  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ . On appelle tribu des événements antérieurs à  $T$  et on note  $\mathcal{F}_T$  la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

### Remarque

On vérifie facilement que  $\mathcal{F}_T$  est une tribu et que, si  $T$  est constant et égal à  $t$  alors  $T$  est un temps d'arrêt et  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ .

**Théorème 1.2.18** (Propriété de Markov forte.)

Soient  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien,  $T$  un temps d'arrêt. Posons pour  $t \geq 0$

$$Y_t = B_{T+t} - B_T.$$

Alors, sur  $\{T < \infty\}$ , le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_T$ .



## 1.3 Martingales à temps continu

On suppose donné un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$

**Définition 1.3.1** Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté et intégrable, on dit que  $X$  est

1. Une martingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad E(X_t / \mathcal{F}_s) = X_s.$$

2. Une surmartingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad E(X_t / \mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

3. Une sousmartingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad E(X_t / \mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

**Exemples 1.3.2** Si  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien et  $\theta \in \mathbb{C}$ , alors les processus

$$(B_t)_{t \geq 0}, (B_t^2 - t)_{t \geq 0} \text{ et } (e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t})_{t \geq 0}$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle de  $B$ .

**Définitions 1.3.3** Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique

1) On dit que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \int_{(|X_t| > \alpha)} |X_t| dP = 0.$$

2) Si  $p \geq 1$ , on dit que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est borné dans  $L^p$  si :

$$\sup_{t \geq 0} E[|X_t|^p] < \infty.$$

**Proposition 1.3.4** Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique :

1) S'il existe une v.a.r positive et intégrable  $Z$  telle que  $|X_t| \leq Z, \forall t \geq 0$ , alors  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est uniformément intégrable.

2) Si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est borné dans  $L^p, (p > 1)$ , alors  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est uniformément intégrable.

**Théorème 1.3.5** (Inégalité maximale de Doob).

Si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue à droite, alors

$$\forall p > 1, \quad (E[|\sup_{0 \leq s \leq t} X_s|^p])^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0 \leq s \leq t} (E[|X_s|^p])^{\frac{1}{p}}.$$

**Corollaire 1.3.6** (*martingale arrêtée*)

Si  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une martingale et  $T$  un temps d'arrêt, alors

$M^T = (M_t^T)_{t \geq 0} = (M_{T \wedge t})_{t \geq 0}$  est encore une martingale. Elle est appelée martingale arrêtée.

**Proposition 1.3.7** Soient  $\mathcal{B}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ ,  $Y$  un vecteur aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable et  $X$  une variable aléatoire indépendante de  $\mathcal{B}$ . Alors, pour toute fonction mesurable  $h$ ,

$$E[h(Y, X)/\mathcal{B}] = \phi(Y), \quad P - p. s,$$

où  $\phi(t) = E(h(t, X))$ .

## 1.4 L'intégrale stochastique

Soit  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sa filtration naturelle i.e.  $\mathcal{F}_t := \sigma(B_u, u \leq t)$ . Le mouvement brownien n'étant pas à variation bornée, on ne peut pas s'appuyer sur la théorie de l'intégration classique de Riemann-Stieljes afin de donner un sens à la quantité

$$\int_0^t H_s dB_s,$$

où  $H$  est un processus stochastique continu. C'est pour cette raison qu'on construit une nouvelle intégrale, appelée l'intégrale d'Itô.

**Définition 1.4.1** Soit  $A = (A_t)_{t \geq 0}$  un processus continu et adapté,

1. On dit que  $A$  est croissant, si pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$t \rightarrow A_t(\omega) \quad \text{est croissante}$$

2. On dit que  $A$  est à variation bornée, si pour tout  $\omega \in \Omega$

$$t \rightarrow A_t(\omega) \quad \text{est à variation borné}$$

**Définition 1.4.2** Soit  $(\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{p_n-1}^{(n)} < t_{p_n}^{(n)} = t\})_{n \geq 0}$  une suite de subdivisions de  $[0, t]$  telle que  $|\Delta_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus continu. Posons

$$T_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2$$

On dit que le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à variation quadratique finie sur  $[0, t]$  si  $T_t^{\Delta_n}(X)$  converge en probabilité. Cette limite est alors notée  $\langle X, X \rangle_t$  i.e.

$$\langle X, X \rangle_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2 \quad \text{en probabilité.}$$

### Remarque 1.4.3

Si  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard et  $t > 0$ , alors on a

$$\langle B, B \rangle_t = t \quad \text{et} \quad V_0^t(B) = \infty \quad P - p.s.$$

### Définition 1.4.4 (Martingale locale)

Soient  $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  un espace de probabilité filtré,  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus continu. On dit que  $X$  est une  $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt  $\{T_n, n \geq 1\}$ , telle que

- i) La suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  est croissante et  $\lim_{t \rightarrow \infty} T_n = +\infty$  p.s.,
- ii) Pour tout  $n$ , le processus  $X^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}} = (X_t^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}})_{t \geq 0}$  est une  $(\mathcal{F}_t, P)$  martingale uniformément intégrable.

La classe des martingales locales est strictement plus large que celle des martingales continues, cependant on a :

### Proposition 1.4.5 .

- Toute martingale continue est une martingale locale.
- Une martingale locale positive est une surmartingale.
- une martingale locale bornée est une martingale.

### Théorème 1.4.6

Si  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale alors il existe un "unique" processus continu, adapté, croissant et issu de 0 noté  $\langle M, M \rangle_t$  tel que

$$(M_t^2 - \langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$$

soit une martingale locale (continue).

De plus, pour tout  $t > 0$ , toute suite  $(\Delta_n)_{n \geq 0}$  de subdivisions de  $[0, t]$  avec  $|\Delta_n| \rightarrow 0$ ,

$$\sup_{s \leq t} (T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M, M \rangle_s) \xrightarrow{P} 0.$$

Si  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale, on a vu que le processus  $\langle M, M \rangle_t$  est bien défini. De plus  $t \mapsto \langle M, M \rangle_t$  est une fonction positive croissante, ainsi on peut poser pour  $\omega \in \Omega$

$$\langle M, M \rangle_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle M, M \rangle_t(\omega).$$

**Théorème 1.4.7** Soit  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une martingale locale issue de 0.

1. Si  $M$  est une martingale bornée dans  $L^2$  alors  $E(\langle M, M \rangle_\infty) < \infty$  et  $(M_t^2 - \langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$  est une martingale uniformément intégrable.

2. Si  $E(\langle M, M \rangle_\infty) < \infty$  alors  $M$  est une martingale bornée dans  $L^2$ .

3. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

– i)  $M$  est une martingale de  $L^2$

– ii)  $\forall t \geq 0, E(\langle M, M \rangle_t) < \infty$ .

Si ces deux conditions sont vérifiées alors  $(M_t^2 - \langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$  est une martingale.

**Définition 1.4.8** (Semimartingale).

Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus continu, on dit que  $X$  est une semimartingale s'il s'écrit

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

où  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale continue issue de 0 et  $(A_t)_{t \geq 0}$  est un processus continu à variation bornée issu de 0.

**Théorème 1.4.9** .

1. Si  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale continue et  $A = (A_t)_{t \geq 0}$  un processus continu à variation bornée, alors

$$\langle A, A \rangle \equiv 0 \equiv \langle M, A \rangle$$

2. Si  $X_t = X_0 + M_t + A_t$  et  $Y_t = Y_0 + N_t + H_t$  sont deux semimartingales, alors

$$\langle X, Y \rangle \equiv \langle M, N \rangle.$$

où

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n}).$$

Soit  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une martingale locale issue de 0. On note par  $L_{loc}^2(M)$  l'espace des processus progressivement mesurables  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty \quad P - \text{p.s.}$$

**Théorème 1.4.10** Si  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une martingale locale issue de 0 et  $H = (H_t)_{t \geq 0} \in L^2_{loc}(M)$  alors il existe un "unique" processus noté  $((H.M)_t)_{t \geq 0}$  tel que

-  $((H.M)_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale issue de 0

- Pour toute martingale locale  $N = (N_t)_{t \geq 0}$

$$\langle H.M, N \rangle = H. \langle M, N \rangle$$

on note aussi

$$(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

Passons à présent à l'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales. Soient  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  un processus continu et adapté,  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une semimartingale continue i.e.

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale issue de 0 et  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  est un processus à variation bornée, continu et issu de 0. On note

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

**Définition 1.4.11** Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une semimartingale continue qui se décompose  $X_t = X_0 + M_t + V_t$ . Si  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  est un processus continu et adapté alors l'intégrale stochastique de  $H$  par rapport à  $X$  est définie par

$$H.X = H.M + H.V.$$

**Remarque 1.4.12** Si  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  est un processus continu et  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  un processus à variation bornée. Alors

$$(H.V)_t = \int_0^t H_s dV_s$$

est bien définie (au sens de Riemann Stieljes)

**Propriétés 1.4.13** .

Soient  $K = (K_t)_{t \geq 0}$ ,  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  deux processus progressivement mesurable et  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard.

- Si  $X$  est une martingale locale continue alors  $H.X$  est une martingale locale continue

- Si  $X$  est une martingale continue, bornée dans  $L^2$  alors  $H.X$  l'est aussi

- Si  $X$  est un processus continu à variation bornée alors  $H.X$  est un processus à variation bornée
- Si  $X$  est une semimartingale continue alors  $H.X$  l'est aussi
- Si  $H$  et  $K$  sont  $L_{loc}^2(B)$  alors, pour tout  $t \geq 0$

$$E[(H.B)_t(K.B)_t] = \int_0^t H_s K_s ds$$

- Soit  $M = (M_t, t \geq 0)$  une martingale. Si

$$E\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right) < \infty \quad \forall t \geq 0$$

Alors  $H.M$  est une martingale De plus

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right)$$

En particulier, si  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  un processus de  $L_{loc}^2(B)$ , alors

$$(M_t = \int_0^t H_s dB_s, \quad t \geq 0)$$

est une martingale

L'intégrale stochastique possède une formule de changement de variables semblable à la formule du changement de variable classique mais qui fait apparaître la dérivée de second ordre inexistante dans la théorie de l'intégrale de Riemann, ceci découle du fait que la variation quadratique est nulle pour les fonctions à variation bornée. Le résultat suivant établit cette formule :

**Théorème 1.4.14 (Formule d'Itô.)**

Si  $X^1, \dots, X^d$  sont des semimartingales continues et  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , alors  $(F(X_t^1, \dots, X_t^d))_{t \geq 0}$  est une semimartingale, de plus pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} F(X_t^1, \dots, X_t^d) &= F(X_0^1, \dots, X_0^d) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \dots, X_s^d) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \dots, X_s^d) d\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

Cette formule est souvent utilisée pour les semimartingales de dimension 2 et dont l'une des composantes est un processus à variation bornée. Dans ce cas on a :

**Lemme 1.4.15** *Soit  $A = (A_t)_{t \geq 0}$  un processus à variations bornée,  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une semimartingale continue et  $g$  une fonction  $C^2$ . On a alors :*

$$g(A_t, X_t) = g(A_0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial u}(A_r, X_r) dA_r + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(A_r, X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(A_r, X_r) d \langle X, X \rangle_r$$

Dans le cas où  $f(x, y) = xy$ , on a :

**Théorème 1.4.16** *(Formule d'intégration par parties).*

*Soient  $X$  et  $Y$  deux semimartingales. On a pour tout  $t \geq 0$*

$$dX_t Y_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d \langle X, Y \rangle_t$$

Lorsque la formule d'Itô est appliquée à une fonction vérifiant l'équation de la chaleur, on obtient

**Corollaire 1.4.17** .

*Si  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une martingale locale et  $\lambda \in \mathbb{C}$  alors  $\mathcal{E}^\lambda(M) = (\mathcal{E}^\lambda(M)_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale, avec*

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = e^{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t}$$

**Preuve :**

Posons

$$F(s, x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} s}$$

$F$  vérifie l'équation de la chaleur i.e.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial s} = 0,$$

donc, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\lambda(M)_t &= F(\langle M, M \rangle_t, M_t) \\ &= F(0, M_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(\langle M, M \rangle_s, M_s) dM_s \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{E}^\lambda(M)$  est une martingale locale.

On a vu dans la remarque (1.4.3) que la variation quadratique du mouvement brownien sur  $[0, t]$  vaut  $t$ , le résultat suivant montre que la réciproque aussi est vraie :

**Théorème 1.4.18** (*Caractérisation de Levy.*)

Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus continu, adapté et issu de 0. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est un mouvement brownien.
2.  $X$  est une martingale locale et  $\langle X, X \rangle_t = t$ .

**Théorème 1.4.19** (*Représentation des martingales browniennes.*)

Soit  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une martingale (cadl g) de carré intégrable pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , la filtration d'un mouvement brownien  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ . Alors il existe un unique processus  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  de  $M^2(\mathbb{R}^k)$ , tel que

$$\forall t \geq 0, \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s \cdot dB_s. \quad P - p.s.$$

**Théorème 1.4.20** (*Inégalités de Burkholder, Davis et Gundy (BDG).*)

Soit  $p > 0$ . Il existe deux constantes  $c_p$  et  $C_p$  telles que, pour toute martingale locale  $X$  continue et issue de 0,

$$c_p E [\langle X, X \rangle_\infty^{p/2}] \leq E \left[ \sup_{t \geq 0} |X_t|^p \right] \leq C_p E [\langle X, X \rangle_\infty^{p/2}]$$

En particulier, si  $T > 0$ ,

$$c_p E [\langle X, X \rangle_T^{p/2}] \leq E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p \right] \leq C_p E [\langle X, X \rangle_T^{p/2}]$$

**Définition 1.4.21** on note par  $\text{sgn}$  la fonction signe définie dans  $\mathbb{R}$  par

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Proposition 1.4.22** (*Formule de Tanaka.*)

$$|B_t| = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s + L_t$$

où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard et  $L_t$  le temps local en 0 du mouvement brownien  $B$  (le temps local passé par  $B$  en 0 jusqu'au temps  $t$ )

$(L_t)$  est un processus adapté à  $(\mathcal{F}_t)$  (la filtration canonique du mouvement brownien)



**Théorème 1.4.23** (*Formule de la moyenne*)

Pour toute fonction  $f$  à valeurs réelles, définie et continue sur un segment  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , il existe un réel  $c$  dans  $]a, b[$  vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

En particulier

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f(0).$$

Nous terminons ce chapitre par un résultat classique en théorie des équations différentielles :

**Lemme 1.4.24** (*Lemme de Grönwall*)

Soit  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que, pour tout  $t$ ,

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) \leq a e^{bt}.$$

# Chapitre 2

## Equations Différentielles Stochastiques

### 2.1 Définitions-Exemples.

Le but des équations différentielles stochastiques est d'étudier l'évolution d'un système physique perturbé par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme

$$dy_t = b(y_t)dt$$

On rajoute, pour exprimer ce bruit et définir son intensité un terme qui sera de la forme  $\sigma dB_t$  où  $B$  est un mouvement brownien et  $\sigma$  une constante, on obtient une équation différentielle stochastique de la forme

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma dB_t.$$

On généralise cette équation en permettant à  $\sigma$  de dépendre de l'état de  $y$  à l'instant  $t$  :

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dB_t.$$

On peut encore généraliser cette équation en permettant à  $b$  et  $\sigma$  de dépendre aussi du temps  $t$  pour avoir enfin une équation différentielle stochastique de la forme

$$dy_t = b(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)dB_t$$

Cela conduit à la définition suivante.

On note par  $(M)_{d \times m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $d \times m$  à coefficients réels.

**Définition 2.1.1** Soient  $d$  et  $m$  deux entiers positifs et soient  $\sigma$  et  $b$  des fonctions mesurables localement bornées définies sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  et à valeurs respectivement dans  $(M)_{d \times m}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^d$ . On note  $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$  et  $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$ .

Une solution de l'équation :

$$E(\sigma, b) : \quad dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$$

est la donnée de :

- Un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  satisfaisant les conditions habituelles.
- Un  $(\mathcal{F}_t)$  mouvement brownien défini sur cet espace et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $B = (B^1, \dots, B^m)$ .
- Un processus  $(\mathcal{F}_t)$ - adapté continu  $X = (X^1, \dots, X^d)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

- Lorsque  $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ , on dira que le processus  $X$  est solution de  $E_x(\sigma, b)$ .

Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques. On les cite dans la définition suivante

**Définition 2.1.2** Pour l'équation  $E(\sigma, b)$ , on dit qu'il y a

- . existence faible si pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  il existe une solution de  $E_x(\sigma, b)$ .
- . existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de  $E_x(\sigma, b)$  ont même loi
- . unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  et le mouvement brownien  $B$  étant fixés, deux solutions  $X$  et  $X'$  telles que  $X_0 = X'_0$   $P$ -p.s. sont indistinguables.

On dit de plus qu'une solution  $X$  de  $E_x(\sigma, b)$  est une solution forte si  $X$  est adapté par rapport à la filtration canonique de  $B$ .

## 2.2 Exemples

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre. Quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés suivis d'un théorème qui assure, sous certaines conditions sur  $b$  et  $\sigma$ , l'existence d'une unique solution forte.

**1. Unicité faible mais pas trajectorielle.**

Soit  $\beta$  un mouvement brownien standard

On pose

$$W_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) d\beta_s.$$

On a alors :

$$\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) dW_s.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) dW_s &= \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) \operatorname{sgn}(\beta_s) d\beta_s \\ &= \int_0^t d\beta_s \\ &= \beta_t \end{aligned}$$

$W$  est une martingale issue de 0 telle que  $\langle W, W \rangle_t = t$  ainsi, par la caractérisation de Levy (théorème 1.4.18),  $W$  est aussi un mouvement brownien. On voit alors que  $\beta$  est solution de l'EDS

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t) dW_t, \quad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible. Par la caractérisation Levy, toute solution doit être un mouvement brownien .

Par contre, on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation. En effet,  $\beta$  et  $-\beta$  sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement brownien.

Aussi,  $\beta$  n'est pas solution forte : par la formule de Tanaka, la filtration canonique de  $W$  coïncide avec la filtration canonique de  $|\beta|$  qui est strictement plus petite que celle de  $\beta$ . En effet, l'événement  $\{\beta_t < 0\}$  appartient à  $\mathcal{F}^\beta$  mais pas à  $\mathcal{F}^{|\beta|}$ .

**2. Une infinité de solutions fortes et pas d'unicité faible**

Considérons l'EDS :

$$dX_t = 3X_t^{1/3} dt + 3X_t^{2/3} dB_t, \quad X_0 = 0$$

et le temps d'arrêt

$$\tau_\alpha = \inf\{s \geq \alpha, B_s = 0\}, \quad \alpha \geq 0$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard.

Cette équation a une infinité de solutions fortes de la forme :

$$X_t^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_\alpha \\ B_t^3 & \text{si } \tau_\alpha \leq t < \infty \end{cases}$$

En effet,

$$3 \int_0^t (X_s^{(\alpha)})^{1/3} ds + 3 \int_0^t (X_s^{(\alpha)})^{2/3} dB_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau_\alpha \\ 3 \int_{\tau_\alpha}^t B_s ds + 3 \int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô(1.4.14) pour  $f(x) = x^3$ , on a pour tout  $t \geq \tau_\alpha$  :

$$\begin{aligned} f(B_t) = B_t^3 &= B_{\tau_\alpha}^3 + 3 \int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s + 3 \int_{\tau_\alpha}^t B_s ds \\ &= 3 \int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s + 3 \int_{\tau_\alpha}^t B_s ds \end{aligned}$$

En effet, comme le mouvement brownien est continu, même si cet *inf* n'est pas atteint, on aura quand même  $B_{\tau_\alpha} = 0$   
d'où

$$\begin{aligned} 3 \int_0^t X_s^{(\alpha)1/3} ds + 3 \int_0^t X_s^{(\alpha)2/3} dB_s &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau_\alpha \\ B_t^3 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= X_t^{(\alpha)} \end{aligned}$$

### 3. Exemple de non unicité faible.

On se donne l'EDS :

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha ds \tag{3}$$

avec  $\alpha$  un réel compris strictement entre 0 et 1.

On a alors, pour tout réel  $c$ ,  $(X_t^{(c)})_{t \geq 0}$  est une solution de l'EDS (3) avec

$$X_t^{(c)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq c \\ \left(\frac{t-c}{\beta}\right)^\beta & \text{si } t > c \end{cases}$$

avec  $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ ,  
 En effet,

$$\begin{aligned}
 X_t &= \int_0^t |X_s|^\alpha ds = \int_c^t \left(\frac{s-c}{\beta}\right)^{\alpha\beta} ds \\
 &= \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha\beta} \int_c^t (s-c)^{\alpha\beta} ds \\
 &= \frac{1}{\beta^{\alpha\beta}} \frac{(t-c)^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1} \\
 &= \frac{1}{\beta^{(1-\frac{1}{\beta})\beta}} \frac{(t-c)^{(1-\frac{1}{\beta})+1}}{(1-\frac{1}{\beta})+1} \\
 &= \left(\frac{t-c}{\beta}\right)^\beta \\
 &= X_t^{(c)}
 \end{aligned}$$

On vient alors de montrer que pour tout réel  $c$ ,  $X_t^{(c)}$  est une solution de l'EDS, ce qui nous donne une infinité de solutions. De plus, deux solutions différentes ne peuvent pas avoir la même loi.

Passons à présent au théorème d'existence et d'unicité de la solution de  $E_x(b, \sigma)$ . On désigne par  $|\cdot|$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^d$ .

## 2.3 Théorème d'existence et d'unicité

**Théorème 2.3.1** (*Existence et unicité*)

On suppose qu'il existe une constante  $K$  positive telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$

1. *Condition de Lipschitz*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

2. *Croissance linéaire*

$$|b(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

Alors il y a unicité trajectorielle pour  $E(\sigma, b)$ .

De plus, pour tout espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  et tout  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien, il existe pour chaque  $x \in \mathbb{R}^d$ , une (unique) solution forte pour  $E_x(\sigma, b)$ .

**Preuve :**

Afin d'alléger les notations, on traitera uniquement le cas  $d = m = 1$ .

Commençons par établir l'unicité trajectorielle. Sur le même espace et avec le même mouvement brownien  $B$ , on se donne deux solutions  $X$  et  $X'$  telles que  $X_0 = X'_0$ .

Pour  $M \geq 0$  fixé, posons

$$\tau = \inf\{t \geq 0, |X_t| \geq M \text{ ou } |X'_t| \geq M\}.$$

On a alors, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$X_{t \wedge \tau} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X_s) ds$$

Vu que  $X'$  est aussi une solution, nous avons l'équation analogue

$$X'_{t \wedge \tau} = X'_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X'_s) dB_s + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X'_s) ds$$

Remarquons que  $X$  et  $X'$  sont bornées par  $M$  sur l'intervalle  $]0, \tau]$ . En faisant la différence membre à membre de ces deux équations et par passage à l'espérance, on aura :

$$\begin{aligned} h(t) &:= E[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] \\ &= E\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s + \int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds\right)^2\right]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , on aura :

$$h(t) \leq 2E\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s\right)^2\right] + 2E\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds\right)^2\right].$$

Par la propriété 5 de (1.4.13), on a

$$2E\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s\right)^2\right] = 2E\left[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds\right].$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et en majorant  $t \wedge \tau$  par  $T$ , on trouve

$$2E[(\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds)^2] \leq 2TE[\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - (s, X'_s))^2 ds]$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} h(t) &\leq 2E[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds] + 2TE[\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - (s, X'_s))^2 ds] \\ &\leq 2E[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_s - X'_s|^2 ds] + 2TE[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_s - X'_s|^2 ds] \\ &\leq 2K^2(1 + T)[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau}|^2 ds], \end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient du fait que  $b$  et  $\sigma$  soient lipschitziennes. La fonction  $h$  vérifie

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds$$

avec  $C = 2K^2(1 + T^2)$ .

$h$  est bornée par  $4M^2$  et vérifie les conditions du lemme de Grönwall (Lemme 1.4.24) avec  $a = 0$  et  $b = C$ , ce qui donne alors  $h = 0$  donc  $P$ -p.s.  $X_{t \wedge \tau} = X'_{t \wedge \tau}$

En faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$ , on aura  $X_t = X'_t$  pour tout  $t$ .

$X$  est alors une modification de  $X'$ , mais comme ces processus sont continus, alors ils sont indistinguables. Ce qui achève la preuve de l'unicité trajectorielle.

Passons à présent au deuxième point.

On construit la solution par la méthode d'approximation de Picard. On pose

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x, \\ X_t^1 &= x + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s + \int_0^t b(s, x) ds, \\ X_t^n &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds \end{aligned} \quad (2.1)$$



Par récurrence pour chaque  $n$ ,  $X_t^n$  est continu et adapté, donc le processus  $\sigma(t, X_t^n)$  l'est aussi. Fixons  $T > 0$  et raisonnons sur  $[0, T]$  vérifions d'abord par récurrence sur  $n$  que

$$\exists C_n : \forall t \in [0, T] \quad E[(X_t^n)^2] \leq C_n. \quad (2.2)$$

Pour  $n = 0$ , il n'y a rien à montrer.

Supposons à présent que ceci est vrai à l'ordre  $n - 1$  et vérifions que cela reste vrai à l'ordre  $n$ .

Le calcul du moment d'ordre deux de l'intégrale stochastique se justifie par le fait que  $E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds] < \infty$ , ce qui découle de la croissance linéaire et de l'hypothèse de récurrence.

En utilisant encore la croissance linéaire, on écrit

$$\begin{aligned} E[(X_t^n)^2] &\leq 3(x^2 + E[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s)^2] + E[(\int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds)^2]) \\ &\leq 3(x^2 + E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds] + tE[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds]) \\ &\leq 3(x^2 + E[\int_0^t (K + K|X_s^{n-1}|)^2 ds] + tE[\int_0^t (K + K|X_s^{n-1}|)^2 ds]) \\ &\leq 3(x^2 + (1+t)E[\int_0^t (K + K|X_s^{n-1}|)^2 ds]) \\ &\leq 3x^2 + 3(1+t)E[\int_0^t (2K^2 + 2(KX_s^{n-1})^2) ds] \\ &\leq 3x^2 + 6T(1+T)(K^2 + 4C_{n-1}) := C_n. \end{aligned}$$

La majoration (2.2) et l'hypothèse de croissance linéaire sur  $\sigma$  entraînent que la martingale locale  $(\int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s)$  est une vraie martingale bornée dans  $L^2$  pour tout  $n$ . On utilisera ceci pour majorer par récurrence

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2]$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})) dB_s + \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})) ds$$

d'où

$$\begin{aligned}
& E[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2] \\
& \leq 2E[\sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))dB_u|^2 + \sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))du|^2] \\
& \leq 2(4E[(\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))dB_u)^2] + E[(\int_0^t |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})|du)^2]) \\
& \leq 2(4E[(\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du] + TE[\int_0^t (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))^2]) \\
& \leq 2(4 + T)K^2E[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du] \\
& \leq C_T E[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du].
\end{aligned}$$

Avec  $C_T = 2(4 + T)K^2$ , posons

$$g_n(u) := E[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2].$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t g_n(u) du \quad (I)$$

D'autre part,  $\forall n$ ,  $g_n$  est bornée sur  $[0, T]$

En effet, pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned}
g_n(u) & \leq 2(4 + T)K^2E[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du] \\
& \leq 2(4 + T)K^2E[\int_0^t (2(X_u^n)^2 + 2(X_u^{n-1})^2)du] \\
& \leq 4T(4 + T)(C_n^2 + C_{n-1}^2)
\end{aligned}$$

$g_0(t) = x^2$  qu'on appelle  $C'_T$

Une récurrence simple sur (I) donne :

$$g_n(t) \leq C'_T (C_T)^n \frac{t^n}{n!}.$$

Et, en vertu du critère de D'Alembert, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{1/2} < \infty.$$

Comme la norme de  $L^1$  est dominée par la norme de  $L^2$ , on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| \right] < \infty.$$

Le théorème de la convergence monotone nous permet de dire que

$$E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| \right] < \infty.$$

Ce qui entraîne que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| < \infty.$$

Mais si  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $n < m$  :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^m - X_t^n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{k+1} - X_t^k| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n, m \rightarrow \infty.$$

Par suite, p.s. la suite  $(X_t^n, 0 \leq t \leq T)_n$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers un processus limite  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  qui est continu et adapté. En effet, on vérifie par récurrence que chaque processus  $X^n$  est adapté par rapport à la filtration canonique de  $B$ , et donc  $X$  l'est aussi.

On a  $P$ -p.s.

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^m - X_s^n| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^k - X_s^{k-1}|. \end{aligned}$$

En introduisant la norme  $L^2$ , on trouve que

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n|^2 \right] \leq \left( \sum_{k=n}^{\infty} g_k(T)^{1/2} \right)^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s \quad \text{dans } L^2$$

et

$$\int_0^t b(s, X_s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds \quad \text{dans } L^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)) dB_s \right)^2 \right] &= E \left( \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n))^2 ds \right) \\ &\leq E \left( K^2 \int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds \right) \\ &\leq T^2 K^2 E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n|^2 \right] \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et on procède de la même manière pour  $b$ .

En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour  $X^n$  (2.3), on trouve que  $X$  est une solution (forte) de  $E_x(\sigma, b)$  sur  $[0, T]$ .

## 2.4 Exemples

Dans cette section, on donne trois exemples de résolution d'EDS

### Exemple 1

Soit l'EDS suivante :

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t, \quad X_0 = x$$

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées, on cherche alors l'unique solution de cette EDS.

On a

$$e^t dX_t = -e^t X_t dt + dB_t$$

ou encore

$$e^t dX_t + e^t X_t dt = dB_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties assure que :

$$d(e^t X_t) = e^t dX_t + X_t e^t dt$$

Ce qui donne :

$$d(e^t X_t) = dB_t$$

et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + e^{-t} B_t.$$

**Exemple 2 : Equation d'Ornstein Uhlenbeck**

On cherche à résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \quad X_0 = x.$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont deux réels.

Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution.

On multiplie les deux côtés de cette équation par  $e^{-\mu t}$ , on obtient :

$$e^{-\mu t} dX_t = \mu X_t e^{-\mu t} dt + \sigma e^{-\mu t} dB_t,$$

ou encore

$$e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt = \sigma e^{-\mu t} dB_t.$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties donne :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = \sigma e^{-\mu t} dB_t,$$

d'où, la solution

$$X_t = x + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} dB_s.$$

**Exemple 3 : Modèle de Black et Scholes**

Le modèle de Black et Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué et l'autre pas. Dans cet exemple, on traite le cas de l'actif risqué, à savoir le prix d'une action à l'instant  $t$ . Il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x.$$

La solution est

$$S_t = x e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\mu t}$$

En effet, il suffit d'écrire  $\sigma(t, x) = \sigma x$  et  $b(t, x) = bx$  pour voir qu'elles vérifient les conditions du théorème (2.3.1). On applique ensuite la formule d'Itô à

$$f(t, x) = x e^{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\mu t}$$

on aura

$$\begin{aligned}
S_t &= f(t, B_t) \\
&= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \\
&= \int_0^t (b - \frac{\sigma^2}{2}) S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_s ds.
\end{aligned}$$

d'où

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x.$$

## 2.5 Théorème de Yamada-Watanabe

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité ne sont pas optimales. Toshio YAMADA et Shinzo WATANABE ont montré qu'on peut les affaiblir dans le théorème suivant :

### **Théorème 2.5.1** *Théorème de YAMADA-WATANABE II*

Soit  $d = m = 1$

Supposons que  $b$  et  $\sigma$  sont à croissance linéaire, que  $b$  vérifie la condition de Lipschitz locale et  $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq \rho|x - y|$  pour tout  $t \geq 0$ , où  $\rho$  est une fonction borélienne de  $]0, +\infty[$  dans lui même telle que

$$\int_{|z| < \epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \quad \forall \epsilon > 0$$

Alors  $E_x(b, \sigma)$  admet une unique solution forte.

En effet, les conditions du théorème de Yamada et Watanabe sont plus faible que la condition de Lipschitz. Si  $\sigma$  est lipschitzienne, alors on a pour tous  $x$  et  $y$  réels, si

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c|x - y|,$$

alors

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq c^2|x - y|^2.$$

Il suffit alors de prendre  $\rho(x) = x^2$ . On a bien

$$\int_{|z| < \epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \quad \forall \epsilon > 0$$

**Exemple 2.5.2** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère l'EDS

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \quad X_0 = 0.$$

$f(x) = \sqrt{x}$  n'est pas lipschitzienne mais elle vérifie la condition du théorème de Yamada et Watanabe. La solution (unique) de cette équation est appelée processus de Feller.

# Chapitre 3

## Diffusions d'Itô

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où les coefficients  $b$  et  $\sigma$  dépendent de l'état à l'instant  $t$  mais pas du temps lui-même  $\sigma(t, y) = \sigma(y)$  et  $b(t, y) = b(y)$ . On montrera que la solution d'une telle équation possède, en outre, les propriétés de Markov.

### 3.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.1.1** On dit que  $(Y_t)_t = (Y_t^x)_t$  un processus d'Itô dans  $\mathbb{R}^n$  s'il s'écrit

$$Y_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

avec, pour tout  $t \geq 0$

- $\int_0^t (v(s, \omega))^2 ds < \infty$  presque sûrement.
- $\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty$  presque sûrement.
- $u(t, \cdot)$  et  $v(t, \cdot)$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurables.

**Définition 3.1.2** Une diffusion d'Itô (homogène) est un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  de  $\mathbb{R}^n$  satisfaisant l'EDS de la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s, \quad X_s = x \quad (3.1)$$

où  $s \geq 0$  donné,  $B$  un mouvement brownien de dimension  $m$ ,  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  satisfont les conditions du théorème d'existence et d'unicité (2.3.1) qui se réduisent dans ce cas à la condition suivante :

$$\exists D > 0; \quad |b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|; \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n$$



où  $|\sigma|^2 = \Sigma|\sigma_{ij}|^2$ .

Dans ce chapitre, On notera

- $X_t = X_t^{s,x}; t \geq s$  la solution (unique) de (3.1). Quand  $s = 0$ , on note  $X_t^x$  au lieu de  $X_t^{0,x}$
- $P_x$  désigne la loi de  $B$  sous  $B_0 = x$  et  $E_x$  l'espérance sous  $P_x$ . Quand  $x = 0$ ,  $P_0 = P$ .
- $P^x$  désigne la loi de  $X$  sous  $X_0 = x$  et  $E^x$  l'espérance sous  $P_x$ . Quand  $x = 0$ , on note  $E$  au lieu de  $E^0$ .
- $(\mathcal{F}_t^{(m)})_{t \geq 0}$  la filtration canonique de mouvement brownien m-dimensionnel

Précisons que puisque  $X$  est la solution de (3.1), elle est obligatoirement adaptée à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Donnons maintenant une expression mathématique à  $P_x$  et  $P^x$  :

Pour tous boréliens  $E_1, \dots, E_k$  de  $\mathbb{R}^n$  et tous réels positifs  $t_1, \dots, t_k$ ;  $k \geq 1$  on a :

$$P_x(B_{t_1} \in E_1, \dots, B_{t_k} \in E_k) = P[(B_{t_1} + x) \in E_1, \dots, (B_{t_k} + x) \in E_k]$$

et

$$P^x(X_{t_1} \in E_1, \dots, X_{t_k} \in E_k) = P[X_{t_1}^x \in E_1, \dots, X_{t_k}^x \in E_k].$$

Une diffusion d'Itô est homogène dans le temps, chose que l'on voit dans la proposition suivante :

**Proposition 3.1.3** *les processus  $(X_{\tau+t}^{\tau,x})_{t \geq 0}$  et  $(X_t^{0,x})_{t \geq 0}$  sont de même loi sous  $P$*

**Preuve**

On a

$$X_{\tau+t}^{\tau,x} = x + \int_{\tau}^{\tau+t} b(X_u^{\tau,x}) du + \int_{\tau}^{\tau+t} \sigma(X_u^{\tau,x}) dB_u$$

En effectuant un changement de variable,  $v = u - \tau$ , on trouve

$$X_{\tau+t}^{\tau,x} = \int_0^t b(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dv + \int_0^t \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dB_{\tau+v}$$

En posant  $B_v^{(\tau)} = B_{\tau+v} - B_{\tau}$ , on aura

$$\begin{aligned} X_{\tau+t}^{\tau,x} &= \int_0^t b(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dv + \int_0^t \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x}) d(B_{\tau+v} - B_{\tau}) \\ &= \int_0^t b(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dv + \int_0^t \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dB_v^{(\tau)} \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$X_t^{0,x} = x + \int_0^t b(X_v^{0,x})dv + \int_0^t \sigma(X_v^{0,x})dB_v$$

Comme  $B$  et  $B^{(\tau)}$  sont de même loi, par l'unicité faible, on a :

$$(X_{\tau+t}^{\tau,x})_{t \geq 0} = (X_t^{0,x})_{t \geq 0} \quad \text{en loi.}$$

On est désormais en mesure de vérifier les propriétés de Markov.

**Proposition 3.1.4** (*Propriété de Markov faible.*)

*Si  $f$  une fonction mesurable bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , alors*

$$\forall t, h \geq 0 \quad E^x[f(X_{t+h})/\mathcal{F}_t^{(m)}](\omega) = E^{X_t(\omega)}[f(X_h)] \quad P - p.s.$$

Enonçons à présent la propriété de Markov forte, la preuve de la propriété de Markov faible découlera directement de celle ci.

**Proposition 3.1.5** (*Propriété de Markov forte.*)

*Si  $f$  une fonction mesurable bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\tau$  un temps d'arrêt par rapport à  $(\mathcal{F}_t^{(m)})$  avec  $\tau < \infty$   $P$ -p.s. alors*

$$\forall h \geq 0 \quad E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)], \quad P - p.s.$$

**Preuve :**

on veut montrer que

$$E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)]$$

Remarquons que puisqu'on a la propriété de Markov forte pour un mouvement brownien, l'homogénéité dans le temps pour une diffusion d'Itô reste vraie si l'on change un temps déterministe  $t$  par un temps d'arrêt  $\tau$  (fini  $P$ -p.s.).

On a

$$X_t^0 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t^x - x$$

donc

$$\begin{aligned} E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau] &= E[f(X_{\tau+h} + x)/\mathcal{F}_\tau] \\ &= E[f(X_{\tau+h} - X_\tau + X_\tau + x)/\mathcal{F}_\tau] \\ &= E[G(X_{\tau+h} - X_\tau, X_\tau + x)/\mathcal{F}_\tau] \\ &= g(X_\tau^x) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= E[G(X_{\tau+h} - X_\tau, \alpha)] \\ &= E[f(X_{\tau+h} - X_\tau + \alpha)] \\ &= E[f(X_h + \alpha)] \\ &= E^\alpha[f(X_h)] \end{aligned}$$

où  $G(x,y)=f(x+y)$

Afin de pouvoir effectuer ces calculs, on a utilisé la proposition (1.3.7), en effet :

1.  $X_{\tau+h} - X_\tau$  est indépendante de  $\mathcal{F}_\tau$

2.  $X_\tau$  est  $\mathcal{F}_\tau$  mesurable

3.  $G$  est une fonction mesurable bornée

En remplaçant  $\alpha$  par  $X_\tau$ , on obtient

$$E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)] \quad P - p.s.$$

Ce qui termine la preuve.

La propriété de Markov faible est obtenue en posant, pour chaque  $t$  fixé,  $\tau = t$ .

## 3.2 Générateur d'une diffusion d'Itô

A une diffusion d'Itô  $X$ , on associe un opérateur qui caractérise sa loi, on l'appelle générateur de  $X$ .

**Définitions 3.2.1** Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une diffusion d'Itô dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le générateur  $A$  de  $X$  est défini par

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E^x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{D}_A(x)$  désigne l'ensemble des fonctions telles que  $Af(x)$  existe et  $\mathcal{D}_A$  l'ensemble des fonctions telles que  $Af(x)$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lemme 3.2.2** Soit  $(Y_t)_t = (Y_t^x)_t$  un processus d'Itô dans  $\mathbb{R}^n$  de la forme

$$Y_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

Soit  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\tau$  un temps d'arrêt par rapport à  $(\mathcal{F}_t^{(m)})_{t \geq 0}$ . Supposons aussi que

$$- E^x[\tau] < \infty$$

$$- u \text{ et } v \text{ bornées dans } \{(t, \omega)/Y(t, \omega) \in \text{Supp}(f)\}$$

Alors

$$E^x[f(Y_\tau)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau (\sum_i u_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (v \cdot v^T)_{i,j}(s, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s)) ds\right]$$

où  $E^x$  est l'espérance par rapport à la loi naturelle  $Q^x$  pour  $Y$  issu de  $x$  :

$$Q^x[Y_{t_1} \in F_1, \dots, Y_{t_k} \in F_k] = P_0[Y_{t_1}^x \in F_1, \dots, Y_{t_k}^x \in F_k]$$

**Preuve :**

On utilise la formule d'Itô en posant  $Z = f(Y)$ , on aura alors

$$\begin{aligned} Z_t &= f(Y_t) \\ &= f(x) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) dY_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y) d \langle Y_i, Y_j \rangle \end{aligned}$$

En passant à la forme différentielle :

$$dZ = \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (vdB)_i (vdB)_j + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (vdB)_i.$$

mais

$$\begin{aligned} (vdB)_i (vdB)_j &= \left( \sum_k v_{ik} dB_k \right) \left( \sum_l v_{jl} dB_l \right) \\ &= \left( \sum_k v_{ik} v_{jk} \right) dt \\ &= (vv^T)_{ij} dt, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= f(x) + \int_0^t \left( \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds \\ &\quad + \sum_{i,k} \int_0^t v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_k \end{aligned} \quad (3.3)$$

On a alors

$$\begin{aligned} E^x[f(Y_\tau)] &= f(x) + E^x \left[ \int_0^\tau \left( \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y) \right) ds \right] \\ &\quad + \sum_{i,k} E^x \left[ \int_0^\tau v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) dB_k \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si  $g$  est une fonction mesurable,  $g \leq M$  donné, alors pour tout entier  $k$ ,

$$E^x \left[ \int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right] = E^x \left[ \int_0^k \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} g(Y_s) dB_s \right] = 0$$

car  $g(Y_s)$  et  $\mathbb{1}_{\{s < \tau\}}$  sont toutes les deux  $\mathcal{F}_s$ -mesurables. De plus

$$\begin{aligned} E^x \left[ \left( \int_0^\tau g(Y_s) dB_s - \int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right)^2 \right] &= E^x \left[ \int_{\tau \wedge k}^\tau g^2(Y_s) ds \right] \\ &\leq M^2 E^x [\tau - \tau \wedge k] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On aura alors

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} E^x \left[ \int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right] = E^x \left[ \int_0^\tau g(Y_s) dB_s \right].$$

En appliquant ceci à (3.4), on obtient

$$E^x[f(Y_\tau)] = f(x) + E^x \left[ \int_0^\tau \left( \sum_i u_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (v \cdot v^T)_{i,j}(s, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s) \right) ds \right].$$

Ceci donne directement la formule du générateur  $A$  pour une diffusion d'Itô

**Théorème 3.2.3** *Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une diffusion d'Itô dans  $\mathbb{R}^n$  de générateur  $A$ . Si  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  alors  $f \in D_A$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}^n$  :*

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

### **Preuve**

En appliquant le lemme précédent avec  $\tau = t$ , et par la définition de  $A$ , on aura

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} E^x \left[ \int_0^t \left( \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y) \right) ds \right].$$

En appliquant la formule de la moyenne, on trouve

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

**Exemple 3.2.4** Soit  $B$  est un mouvement brownien de dimension  $n$ . Il est bien sûr solution de l'EDS

$$dX_t = dB_t$$

i.e. nous avons  $b = 0$  et  $\sigma = I_n$ , la matrice identité de dimension  $n$ . Alors le générateur  $A$  de  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est tel que

$$Af = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \Delta f; \quad f = f(x_1, \dots, x_n) \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$$

i.e. où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace.

**Exemple 3.2.5** Soient  $B$  un mouvement brownien standard et  $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} dX_t^1 = dt; X_{01} = t_0 \\ dX_t^2 = dB_t; X_0^2 = x_0 \end{cases}$$

i.e.

$$dX_t = bdt + \sigma dB_t; \quad X_0 = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

avec  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Le générateur  $A$  de  $X$  est donné par

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f = f(t, x) \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$$

en combinant le précédent théorème et l'équation (3.4) on obtient :

**Théorème 3.2.6** (Formule de Dynkin)

Soit  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\tau$  est un temps d'arrêt tel que  $E^x[\tau] < \infty$ , alors

$$E^x[f(X_\tau)] = f(x) + E^x \left[ \int_0^\tau Af(X_s) ds \right].$$

### 3.3 Equation à retard de Kolmogorov

Dans la suite,  $(X_t)$  est une diffusion d'Itô de générateur  $A$ .

Si on choisit  $f \in C_0^2(\mathbb{R})$  et  $\tau = t$  dans la formule de Dynkin, on voit que la fonction

$$u(t, x) = E^x[f(X_t)]$$

est dérivable par rapport à  $t$  et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E^x[Af(X_t)]$$

En effet

$$\begin{aligned} E^x[f(X_t)] &= f(x) + E^x\left[\int_0^t Af(X_s)ds\right] \\ &= f(x) + \int_{\Omega} \int_0^t Af(X_s)dsdP^x \\ &= f(x) + \int_0^t \int_{\Omega} Af(X_s)dP^x ds \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne on a utilisé le théorème de Fubini puisque  $f$  est bornée. On a bien

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E^x[Af(X_t)]$$

**Théorème 3.3.1** Soit  $f \in C_0^2(\mathbb{R})$

a) On définit :

$$u(t, x) = E^x[f(X_t)]. \quad (3.5)$$

Alors  $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}_A$  pour tout  $t$  et

$$1. \frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2. u(0, x) = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$

b) De plus, si  $w(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  est une fonction bornée qui satisfait 1) et 2) alors  $w(t, x) = u(t, x)$ .

Avant de commencer la démonstration du théorème, nous énonçons le lemme suivant :

**Lemme 3.3.2** Avec les données du théorème précédent, en posant  $Y_t = (s-t, X_t^{0,x})$ ,  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  a comme générateur  $\tilde{A}$  avec

$$\tilde{A}g = -\frac{\partial g}{\partial t} + Ag$$

**Preuve du lemme**

soit  $\tilde{A}$  le générateur de  $Y$ , alors

$$\tilde{A}g(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^y[g(Y_t)] - g(y)}{t}$$

On réécrit ceci de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}g(y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^y[g(s-t, X_t)] - g(s, x)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^y[g(s-t, X_t) - g(s, X_t)] + g(s, X_t) - g(s, x)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^y[g(s-t, X_t) - g(s, X_t)]}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[g_s(X_t)] - g_s(x)}{t} \\
&= Ag_s(x) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^y[g(s-t, X_t) - g(s, X_t)]}{t}.
\end{aligned}$$

On doit montrer maintenant que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^y[g(s-t, X_t) - g(s, X_t)]}{t} = -\frac{\partial g}{\partial t}(y).$$

Pour cela, on utilise la formule d'Itô pour deux variables  $(A_t, X_t)$  avec  $A_t = s - t$

$$\begin{aligned}
g(A_t, X_t) &= g(s, x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial u}(A_r, X_r) dA_r + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(A_r, X_r) dX_r \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(A_r, X_r) d \langle X, X \rangle_r \\
&= g(s, x) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial u}(A_r, X_r) dr + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(A_r, X_r) \sigma(X_r) dB_r \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(A_r, X_r) b(X_r) dr + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(A_r, X_r) \sigma^2(X_r) dr.
\end{aligned}$$

On utilise une deuxième fois la formule d'Itô pour  $g(s, X_r)$

$$\begin{aligned}
g(s, X_t) &= g(s, x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(s, X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s, X_r) d \langle X, X \rangle_r \\
&= g(s, x) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(s, X_r) b(X_r) dr + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(s, X_r) \sigma(X_r) dB_r \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s, X_r) \sigma^2(X_r) dr.
\end{aligned}$$



A présent, on passe à l'espérance de la différence et on divise le tout par  $t$

$$\begin{aligned}
R &:= \frac{1}{t} E^x(g(s-t, X_t) - g(s, X_t)) \\
&= -\frac{1}{t} \int_0^t E\left[\frac{\partial g}{\partial u}(A_r, X_r)\right] dr + \frac{1}{t} \int_0^t E\left[\int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(A_r, X_r) b(X_r)\right] dr \\
&\quad - \frac{1}{t} \int_0^t E\left[\int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(s, X_r) b(X_r)\right] dr + \frac{1}{2t} \int_0^t E\left[\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(A_r, X_r) \sigma^2(X_r)\right] dr \\
&\quad - \frac{1}{2t} \int_0^t E\left[\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s, X_r) \sigma^2(X_r)\right] dr
\end{aligned}$$

En passant à la limite, et en utilisant le théorème de la moyenne pour les 5 termes, on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E^x(g(s-t, X_t) - g(s, X_t)) &= -\frac{\partial g}{\partial u}(s, x) + \frac{\partial g}{\partial v}(s, x) b(x) - \frac{\partial g}{\partial v}(s, x) b(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s, x) \sigma^2(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s, x) \sigma^2(x) \\
&= -\frac{\partial g}{\partial u}(s, x)
\end{aligned}$$

On vient alors de montrer que

$$\tilde{A}g = -\frac{\partial g}{\partial t} + Ag$$

En particulier

$$\tilde{A}w := -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw$$

**Preuve du théorème :**

Posons  $g_t(x) = u(t, x)$ .  $t \mapsto u(t, x)$  est dérivable. On a

$$\begin{aligned}
\frac{E^x[g(X_r)] - g(x)}{r} &= \frac{E^x[u(t, X_r)] - u(t, x)}{r} \\
&= \frac{E^x \left[ \frac{E^{X_r}(f(X_t))}{r} - E^x[f(X_t)] \right]}{r} \\
&= \frac{1}{r} E^x \left[ E^x[f(X_{t+r})/\mathcal{F}_r] - E^x[f(X_t)/\mathcal{F}] \right] \\
&= \frac{1}{r} E^x[f(X_{t+r}) - f(X_t)] \\
&= \frac{u(t+r, x) - u(t, x)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t}
\end{aligned}$$

On aura alors

$$Au = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E^x[g(X_r)] - g(x)}{r}$$

existe et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au.$$

**b) Unicité :**

Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe une fonction  $w(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  qui satisfait 1) et 2), alors

$$\tilde{A}w := -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw \quad \forall t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On définit le processus  $Y = (Y_t)_t$  de  $\mathbb{R}^2$  par

$$Y_t = (s - t, X_t^{0,x}) \quad , t \geq 0.$$

Comme le montre le lemme (3.3.2),  $Y$  a  $\tilde{A}$  comme générateur. En appliquant la formule de Dynkin pour  $Y$ ,

$$\begin{aligned} E^y[w(Y_{\tau_r \wedge t})] &= w(y) + E^y\left[\int_0^{\tau_r \wedge t} \tilde{A}w(Y_u) du\right] \\ &= w(s, x), \end{aligned}$$

où

$$\tau_R = \inf\{t > 0, |X_t| \leq 0\}.$$

En faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$ , on trouve

$$E^{s,x}[w(Y_t)] = w(s, x).$$

En particulier, pour  $t = s$ , on aura

$$\begin{aligned} w(s, x) &= E^{s,x}(w(Y_s)) \\ &= E(w(Y_s^{0,(s,x)})) \\ &= E(w(0, X_s^{0,x})) \\ &= E(f(X_s^{0,x})) \\ &= E^x[f(X_s)]. \end{aligned}$$

### 3.4 Formule de Feynman-Kac

La formule de Feynman-Kac est une généralisation de l'équation à retard de Kolmogorov. Pour  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une diffusion d'Itô de générateur  $A$ , nous énonçons, sans démonstration, le théorème suivant.

**Théorème 3.4.1** (*Formule de Feynman-Kac*).

Soient  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$   $q \in C(\mathbb{R}^n)$ . Supposons aussi que  $q$  est minorée par une constante.

- a) Posons

$$v(t, x) = E^x \left[ \exp \left( - \int_0^t q(X_s) ds \right) f(X_t) \right]. \quad (3.6)$$

Alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv; \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

$$v(0, x) = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

- b) Si de plus  $w : (t, x) \mapsto w(t, x)$  est bornée dans  $K \times \mathbb{R}^n$  pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}$  et vérifie (3.7) et (3.8), alors  $w(t, x) = v(t, x)$  donnée par (3.6).

# Chapitre 4

## Equations différentielles stochastiques rétrogrades

### 4.1 Introduction

#### Construction

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité,  $T > 0$ ,  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien de  $\mathbb{R}^d$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sa filtration naturelle et  $\xi \in \mathcal{F}_T$ . Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0, T], \quad \text{avec,} \quad Y_T = \xi$$

en imposant que la solution au moment  $t$  ne dépende que du passé, c'est à dire que le processus  $Y$  soit adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

Prenons pour commencer le cas où  $f \equiv 0$ . On est tenté de donner comme solution  $Y_t = \xi$  qui n'est adaptée que si  $\xi$  est déterministe. Nous n'avons qu'une approximation (dans  $L^2$ ) qui soit adaptée et qui est la martingale  $Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t)$ .

Si  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est la filtration du mouvement brownien, on peut construire par le théorème de représentation des martingales (Théorème 1.4.19) un processus  $Z$  adapté de carré intégrable tel que :

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

On peut écrire ceci autrement, en effet :

$$Y_t = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où

$$\begin{aligned} Y_T &= E[\xi] + \int_0^T Z_s dB_s \\ \xi &= E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ \xi &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s \end{aligned}$$

On a alors

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \text{i.e.} \quad -dY_t = -Z_t dB_t, \quad \text{avec,} \quad Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître le processus  $Z$  qui a pour rôle de rendre le processus  $Y$  adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à  $f$  de dépendre du processus  $Z$ . L'équation devient donc :

$$-dY_t = f(y, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad \text{avec} \quad Y_T = \xi.$$

**Notations -**

$-S^2(\mathbb{R}^k)$  désigne l'espace vectoriel formé par des processus  $Y$ , progressivement mesurables, à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ , tels que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 := E \left[ \sup_{0 \leq t} |Y_t|^2 \right] < \infty$$

et  $S_c^2(\mathbb{R}^k)$  le sous espace formé par les processus continus.

$-M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$  désigne l'espace vectoriel formé par des processus  $Z$ , progressivement mesurables, à valeurs dans  $\mathbb{R}^{k \times d}$ , tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 := E \left[ \int_0^T \|Z_t\|^2 dt \right] < \infty$$

où si  $z \in \mathbb{R}^{k \times d}$ ,  $\|z\|^2 = \text{trace}(zz^*)$

$-f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$  t.q.  $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$ ,  $(f(\cdot, t, y, z))_{0 \leq t \leq T}$  est progressivement mesurable.

$-\xi$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^k$   $\mathcal{F}_T$ - mesurable.

Soit l'EDSR

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_T = \xi. \quad (4.1)$$

ou sous la forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r \quad 0 \leq t \leq T.$$

**Définition 4.1.1** Une solution de l'EDSR (4.1) est un couple de processus  $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$  vérifiant :

1.  $Y$  et  $Z$  sont progressivement mesurables à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^{k \times d}$  respectivement
2.  $P$ -p.s.  $\int_0^T (|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2)dr < \infty$ .
3.  $P$ -p.s. , on a :  $Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

La proposition suivante montre, que sous une hypothèse relativement faible sur  $f$ , le processus  $Y$  appartient à  $S^2$ .

**Proposition 4.1.2** Supposons qu'il existe un processus  $(f_t)_{0 \leq t \leq T}$ , positif, appartenant à  $M^2(\mathbb{R}^k)$  et une constante positive  $\lambda$  tels que

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \quad |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si  $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est une solution de l'EDSR (4.1) telle que  $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$  alors  $Y$  appartient à  $S^2$ .

**Preuve**

On a pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r) dr + \int_0^t Z_r dB_r,$$

En utilisant l'hypothèse sur  $f$ ,

$$\begin{aligned} |Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t |f(r, Y_r, Z_r)| dr + \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| \\ &\leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|) dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_r| dr. \end{aligned}$$

Posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|) dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right|.$$

$Y_0$  est une constante, donc elle est de carré intégrable,  $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$  appartient à  $M^2$  par hypothèse et  $Z$  appartient à  $M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$  par hypothèse et donc, par l'inégalité de Doob,  $\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right|$  est de carré intégrable. Il s'en suit que  $\zeta$  est de carré intégrable.

$Y$  est un processus continu qui vérifie

$$|Y_t| \leq \zeta + \lambda \int_0^t |Y_r| dr.$$

Par le lemme de Grönwall, on aura

$$|Y_t| \leq \zeta e^{\lambda t}$$

et donc

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T},$$

comme  $\zeta$  est de carré intégrable, alors  $Y$  appartient à  $S^2$ .

## 4.2 Le cas lipschitzien

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

(L) Il existe une  $\lambda > 0$  telle que  $P$ -p.s.,

1. Condition de Lipschitz en  $(y, z)$  : pour tous  $t, y, y', z, z'$

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \|z - z'\|);$$

2. Condition d'intégrabilité :

$$E \left[ |\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr \right] < \infty$$

Commençons par le cas simple où  $f$  ne dépend ni de  $y$  ni de  $z$  i.e. on se donne  $\xi$  de carré intégrable et un processus  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$  dans  $M^2(\mathbb{R}^k)$  et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.2)$$

**Lemme 4.2.1** Soient  $\xi \in L^2 \mathcal{F}_T$ -mesurable et  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$  dans  $M^2(\mathbb{R}^k)$ . L'EDSR (4.2)

possède une unique solution  $(Y, Z)$  telle que  $Z \in M^2$ .

**Preuve**

soit  $(Y, Z)$  une solution de (4.2) telle que  $Z \in M^2$ . En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{F}_t$ , on a

$$Y_t = E \left( \xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t \right)$$

$Y$  est donc défini à l'aide de cette formule et il reste à trouver  $Z$ .

$F = (F_t)_{t \in [0, T]}$  est de carré intégrable et  $(\int_0^t F_r dr)_{t \in [0, T]}$  est un processus adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ , car il est progressif,

$$Y_t = E \left( \xi + \int_0^T F_r dr / \mathcal{F}_t \right) - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t F_r dr.$$

$M$  est une martingale brownienne. On construit, à l'aide du théorème de représentation des martingales, un processus  $Z$  de  $M^2$  tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr$$

$(Y, Z)$  ainsi construit est une solution de l'EDSR (4.2) puisque comme  $Y_T = \xi$ ,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - \left( M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr \right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r \end{aligned}$$



**Unicité**

Si  $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$  est une autre solution,

$$\tilde{Y}_t = Y_t = E \left( \xi + \int_t^T F_r dr / \mathcal{F}_t \right)$$

d'où l'unicité de  $Y$ .

En ce qui concerne l'unicité de  $Z$ , elle est garantie par le théorème de représentation des martingales (Théorème 1.4.19) .

Nous énonçons à présent (sans le prouver) le théorème d'existence de Pardoux et Peng.

**Théorème 4.2.2** (PARDOUX-PENG 90.)

*Sous l'hypothèse (L), l'EDSR (4.1) possède une unique solution  $(Y, Z)$  telle que  $Z \in M^2$ .*

Nous allons voir dans la proposition suivante que le rôle de  $Z$ , plus précisément celui du terme  $\int_0^t Z_r dB_r$  est de rendre le processus  $Y$  adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire  $Z$  est nul.

Supposons (L) vérifiée, on a la proposition suivante

**Proposition 4.2.3** *Soit  $(Y, Z)$  la solution de l'EDSR (4.1) et soit  $\tau$  un temps d'arrêt majoré par  $T$ . On suppose que  $\xi$  est  $\mathcal{F}_\tau$  mesurable et que  $f(t, y, z) = 0$  dès que  $t \geq \tau$ .*

*Alors*

$$Y_t = Y_{t \wedge \tau}$$

*et  $Z_t = 0$  si  $t \geq \tau$ .*

**Preuve**

Soit  $t \in [0, T]$ . On a  $P - p.s.$ ,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

Si  $t \leq \tau$  alors  $t \wedge \tau = t$  et donc  $Y_{t \wedge \tau} = Y_t$ .

Soit à présent  $t \geq \tau$  alors

$$\begin{aligned} Y_{\tau \wedge t} &= Y_\tau \\ &= \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_\tau^T Z_r dB_r \\ &= \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

On a alors

$$Y_\tau = E(\xi/\mathcal{F}_\tau) = \xi$$

et par suite

$$\int_\tau^T Z_r dB_r = 0.$$

Ce qui donne

$$E \left[ \left( \int_\tau^T Z_r dB_r \right)^2 \right] = E \left[ \int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr \right] = 0,$$

et finalement

$$Z_r \mathbf{1}_{r \geq \tau} = 0.$$

Puisque par hypothèse, si  $t \geq \tau$ ,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_\tau^t Z_r dB_r = Y_t$$

ce qui termine la preuve.

Nous énonçons à présent un lemme utile pour la suite. On notera par  $a.b$  le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Lemme 4.2.4** *Soient  $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$  et  $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$ . Alors  $\left\{ \int_0^t Y_s \cdot Z_s dB_s, t \in [0, T] \right\}_{t \geq 0}$  est une martingale uniformément intégrable.*

**Preuve**

Les inégalités BDG (1.4.20) donnent

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r \cdot Z_r dB_r \right| \right] &\leq CE \left[ \left( \int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq CE \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \left( \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Comme  $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ ,

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_r \cdot Z_r dB_r| \right] \leq C' \left( E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] + E \left[ \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right] \right).$$

Or cette quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat.

Dans la proposition suivante, on étudie la dépendance de la solution de l'EDSR par rapport aux données qui sont  $\xi$  et le processus  $\{f(t, 0, 0)\}_{0 \leq t \leq T}$

**Proposition 4.2.5** *Supposons que  $(\xi, f)$  vérifie (L). Soit  $(Y, Z)$  la solution de l'EDSR (4.1) telle que  $Z \in M^2$ . Alors, il existe une constante universelle  $C > 0$ , telle que, pour tout  $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$*

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t} |Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta t} \|Z_t\|^2 dt \right] \leq CE \left[ e^{\beta T} |\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta t} |f(t, 0, 0)|^2 dt \right]$$

**Preuve**

On applique la formule d'Itô pour  $g(t, x) = e^{\beta t} |x|^2$

$$g(t, Y_t) = g(0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(r, Y_r) dr + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(r, Y_r) \cdot dY_r + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(r, Y_r) d \langle Y, Y \rangle_r .$$

Pour  $t = T$

$$g(T, Y_T) = g(0, Y_0) + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial t}(r, Y_r) dr + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial x}(r, Y_r) \cdot dY_r + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(r, Y_r) d \langle Y, Y \rangle_r .$$

En faisant la différence de ces deux quantités, on trouve

$$g(T, Y_T) - g(t, Y_t) = \int_t^T \frac{\partial g}{\partial t}(r, Y_r) dr + \int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(r, Y_r) \cdot dY_r + \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(r, Y_r) d \langle Y, Y \rangle_r .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |\xi|^2 e^{\beta T} - Y_t^2 e^{\beta t} &= \int_t^T \beta e^{\beta r} |Y_r|^2 dr + \int_t^T 2e^{\beta r} Y_r \cdot (-f(r, Y_r, Z_r)) dr + \int_t^T 2e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r \\ &\quad + \int_t^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr, \end{aligned}$$

alors

$$e^{\beta t} |Y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr = |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_t^T e^{\beta r} (-\beta |Y_r|^2 + 2Y_r \cdot f(r, Y_r, Z_r)) dr - 2 \int_t^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r .$$

Comme  $f$  est  $\lambda$ -Lipschitzienne, on a pour tout  $(t, y, z)$

$$\begin{aligned} |f(t, y, z)| - |f(t, 0, 0)| &\leq |f(t, y, z) - f(t, 0, 0)| \\ &\leq \lambda(|y| + \|z\|), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$2|y||f(t, y, z)| \leq 2|y||f(t, 0, 0)| + 2\lambda y^2 + 2\lambda|y|\|z\|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2y \cdot f(t, y, z) \leq 2|y||f(t, 0, 0)| + 2\lambda y^2 + 2\lambda|y|\|z\|$$

On utilise le fait que  $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$  pour  $\varepsilon = 1$  puis pour  $\varepsilon = 2$ ,

$$2|y||f(t, 0, 0)| \leq |y|^2 + |f(t, 0, 0)|^2$$

et

$$2\lambda|y||z| \leq 2\lambda^2|y|^2 + \|z\|^2/2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} 2y.f(t, y, z) &\leq 2|y||f(t, 0, 0)| + 2\lambda y^2 + 2\lambda|y||z| \\ &\leq |y|^2 + |f(t, 0, 0)|^2 + 2\lambda y^2 + 2\lambda^2|y|^2 + \|z\|^2/2 \\ &\leq (1 + 2\lambda + 2\lambda^2)|y|^2 + |f(t, 0, 0)|^2 + \|z\|^2/2 \end{aligned}$$

Pour  $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$ , on obtient pour  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr &= |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta|Y_r|^2 + 2Y_r.f(r, Y_r, Z_r))dr \\ &\quad - 2 \int_t^T e^{\beta r}Y_r.Z_r dB_r \\ &\leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta|Y_r|^2) + \int_t^T e^{\beta r}\beta|Y_r|^2 + \int_t^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} \\ &\quad + \int_t^T \frac{\|Z_r\|^2}{2} e^{\beta r} dr - 2 \int_t^T e^{\beta r}Y_r.Z_r dB_r \\ &\leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_t^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} + \int_t^T \frac{\|Z_r\|^2}{2} e^{\beta r} dr - \\ &\quad 2 \int_t^T e^{\beta r}Y_r.Z_r dB_r. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$e^{\beta t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2} \int_t^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr \leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr - 2 \int_t^T e^{\beta r}Y_r.Z_r dB_r \quad (*)$$

D'après le lemme précédent,  $\left\{ \int_0^t e^{\beta r}Y_r.Z_r dB_r, t \in [0, T] \right\}$  est une martingale. En particulier, en prenant l'espérance, on obtient, pour  $t = 0$

$$E \left[ Y_0 + \frac{1}{2} \int_0^T \beta r \|Z_r\|^2 dr \right] \leq E \left[ e^{\beta T} |\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta T} |f(r, 0, 0)| dr \right].$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \right] &\leq 2E \left[ e^{\beta T} |\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta T} |f(r, 0, 0)| dr \right] - 2E(Y_0^2) \\ &\leq 2E \left[ e^{\beta T} |\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta T} |f(r, 0, 0)| dr \right] \end{aligned}$$

D'après (\*)

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|Y_t|^2 &\leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr - 2 \int_t^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r - \frac{1}{2} \int_t^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \\ &\leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr - 2 \int_t^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r. \end{aligned}$$

En prenant le *sup* des deux côtés, on obtient

$$\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2 \leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_t^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r \right|.$$

Revenant à l'inégalité (\*),

$$e^{\beta t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2} \int_t^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \leq |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr - 2 \int_t^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r,$$

en utilisant les inégalités BDG

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2 \right] &\leq E \left[ |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr \right] + 2E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left( - \int_t^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r \right) \right] \\ &\leq E \left[ |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr \right] + 2E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^t e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^T e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r \right) \right] \\ &\leq E \left[ |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr \right] + 4E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^t e^{\beta r} Y_r \cdot Z_r dB_r \right) \right] \\ &\leq E \left[ |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 e^{\beta r} dr \right] + 4C' E \left[ \left( \int_0^T e^{2\beta r} |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} C' E \left[ \left( \int_0^T e^{2\beta r} |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] &\leq C' E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t/2} |Y_t| \left( \int_0^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t} |Y_t|^2 \right] + \frac{C'^2}{2} E \left[ \int_0^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \right]. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t} |Y_t|^2 \right] \leq 2E \left[ e^{\beta T} |\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r} |f(r, 0, 0)|^2 dr \right] + C'^2 E \left[ \int_0^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \right],$$

et finalement on obtient

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\beta t} |Y_t|^2 \int_0^T e^{\beta r} \|Z_r\|^2 dr \right] \leq 2(2 + C'^2) E \left[ e^{\beta T} |\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r} |f(r, 0, 0)|^2 dr \right],$$

ce qui termine la preuve de la proposition prenant  $C = 2(2 + C'^2)$ .

### 4.3 EDSR linéaires

Dans ce dernier paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule explicite. On se place dans le cas  $k = 1$ ;  $Y$  est donc un réel et  $Z$  est une matrice de dimension  $1 \times d$  c'est à dire un vecteur ligne de dimension  $d$ .

**Proposition 4.3.1** *Soit  $\{(a_t, b_t)\}_{t \in [0, T]}$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , progressivement mesurable et borné. Soient  $\{c_t\}_{t \in [0, T]}$  un élément de  $M^2(\mathbb{R})$  et  $\xi$  une variable aléatoire,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_r Y_r + Z_r b_r + c_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0, T], \quad Y_t = \Gamma_t^{-1} E \left( \xi \Gamma_t + \int_t^T c_r \Gamma_r dr / \mathcal{F}_t \right)$$

avec, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\Gamma_t = \exp \left\{ \int_0^t b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2} \int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr \right\}.$$

#### Preuve

Remarquons d'abord que  $\Gamma$  vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t (a_t dt + b_t \cdot dB_t), \quad \Gamma_0 = 1.$$

En effet, Soient  $G = (G_t)_{t \in [0, T]}$  et  $H = (H_t)_{t \in [0, T]}$  deux processus définis par

$$G_t = \int_0^t b_r \cdot dB_r \text{ et } H_t = \int_0^t (a_r - \frac{1}{2} |b_r|^2) dr$$

$\Gamma$  s'exprime alors comme :  $\Gamma_t = \exp(G_t + H_t)$

On applique la formule d'Itô pour  $h(x, y) = e^{x+y}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= 1 + \int_0^t \Gamma_r b_r \cdot dB_r + \int_0^t \Gamma_r (a_r - \frac{1}{2} |b_r|^2) dr + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_r |b_r|^2 dr \\ &= 1 + \int_0^t \Gamma_r b_r \cdot dB_r + \int_0^t \Gamma_r a_r dr \end{aligned}$$

d'où le résultat.

D'autre part,  $\Gamma$  est de carré intégrable. En effet, comme  $a$  et  $b$  sont bornés, alors

$$\exists \alpha, \beta \text{ des réels positifs tels que } \forall t \in [0, T], \quad e^{\int_0^t a_r dr} < \alpha \quad \text{et} \quad e^{\int_0^T |b_r|^2 dr} < \beta.$$

utilisera dans le calcul suivant l'inégalité de Doob à la troisième ligne pour  $\left\{ \exp\left(\int_0^t b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2} \int_0^t |b_r|^2 dr\right) \right\}_{0 \leq t \leq T}$  qui est une martingale locale d'après le lemme (1.4.17), mais comme  $b$  est borné, alors c'est une vraie martingale.

On pose  $M_t = \int_0^t b_r \cdot dB_r$  et donc  $\langle M, M \rangle_t = \int_0^t |b_r|^2 dr$

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\Gamma_t|^2\right) &= E\left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left\{\int_0^t b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2} \int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\right\}\right)^2\right] \\ &\leq \alpha^2 E\left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left\{M_t - \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t\right\}\right)^2\right] \\ &\leq 4\alpha^2 \sup_{0 \leq t \leq T} E\left[\left(\exp\left\{M_t - \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t\right\}\right)^2\right] \\ &\leq 4\alpha^2 \sup_{0 \leq t \leq T} E\left[\exp\left(2M_t - \frac{1}{2} \langle 2M, 2M \rangle_t\right)\right] \\ &\leq 4\alpha^2 \beta \exp\left(2M_0 - \frac{1}{2} \langle 2M, 2M \rangle_0\right) \\ &\leq 4\alpha^2 \beta, \end{aligned}$$

où l'avant dernière ligne vient du fait que  $\left\{\exp\left(2M_t - \frac{1}{2} \langle 2M, 2M \rangle_t\right)\right\}_{t \in [0, T]}$  soit aussi une martingale, d'où la constance de son espérance. Donc le processus  $\Gamma$  appartient bien à  $S^2$

De plus, en posant  $f(t, y, z) = a_t y + b_t z + c_t$ , la condition (L) est satisfaite.  $Y$  appartient à  $S^2$  par la proposition(4.1.2).

La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t Y_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y \rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t b_t \cdot dB_t$$

Ce qui montre que le processus  $(\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr)$  est une martingale locale qui est en fait une vraie martingale car  $c \in M^2$  et  $\Gamma, Y$  sont dans  $S^2$ .

Par suite

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = E \left( \Gamma_T Y_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr / \mathcal{F}_t \right)$$

Ce qui donne

$$\Gamma_t Y_t = E \left( \Gamma_T \xi + \int_t^T c_r \Gamma_r dr / \mathcal{F}_t \right)$$

Ce qui donne la formule annoncée.



# Conclusion

Dans ce mémoire, on a donné la première esquisse de la notion d'équation différentielle stochastique. On a démontré le théorème fondamental d'existence et d'unicité et quelques exemples ont été cités dont le modèle de Black et Scholes qui est une application à la finance. On a défini une diffusion d'Itô ainsi que le générateur qui lui est associé. Dans le cas particulier où  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ , nous avons montré que ce générateur est un opérateur différentiel du second ordre.

Nous nous sommes intéressés ensuite à l'équation à retard de Kolmogorov et consacré la dernière partie du travail à une étude non exhaustive des équations différentielles stochastiques rétrogrades tout en insistant sur le cas non linéaire.

# Bibliographie

- [1] Briand, P., *Equations Différentielles Stochastiques Rétrograde*, cours, Mars 2001.
- [2] Godet, F. , *Intégrale stochastique*, présentation, 20 novembre 2006.
- [3] Jeanblanc, M. , *Exercices de calcul stochastique DESS IM Evry, option finance. Université d'EVRY* octobre 2005.
- [4] Jeanblanc, M. et Simon, T. , *Eléments de calcul stochastique*, cours, IRBID, septembre 2005
- [5] Kahane, J.P., *Le mouvement brownien, Un essai sur les origines de la théorie mathématique* Société Mathématique de France 1998, p.123-155 .
- [6] Karatzas, I. et Shreve, S.E., *Brownian motion and stochastic calculus with 10 Illustrations* , Springer-Verlag, New-york, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1988.
- [7] Le Gall, J.F., *Mouvement brownien et calcul stochastique*. Notes de cours de Master 2, 2008 – 2009, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Octobre 2008.
- [8] Lévêque, O., *Cours de probabilités et calcul stochastique* EPFL Semestre d'hiver 2004 – 2005
- [9] Malti, D.F., *Les processus croissants dans l'ordre convexe*, Mémoire de magister en probabilités statistiques, octobre 2011.
- [10] Øksendal, B. , *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications* Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg New York
- [11] REVUZ, D., YOR, M., *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 2000h : 60050.
- [12] Rogers, L.C.G. et Williams, D. *Diffusions, Markov Processes, and martingales* Volume 2 : Itô Calculus, 2nd edition, Cambridge University Press, 1994.