

Annexe A :

Rayon de courbure R

1. Relation entre déformation et rayon de courbure :

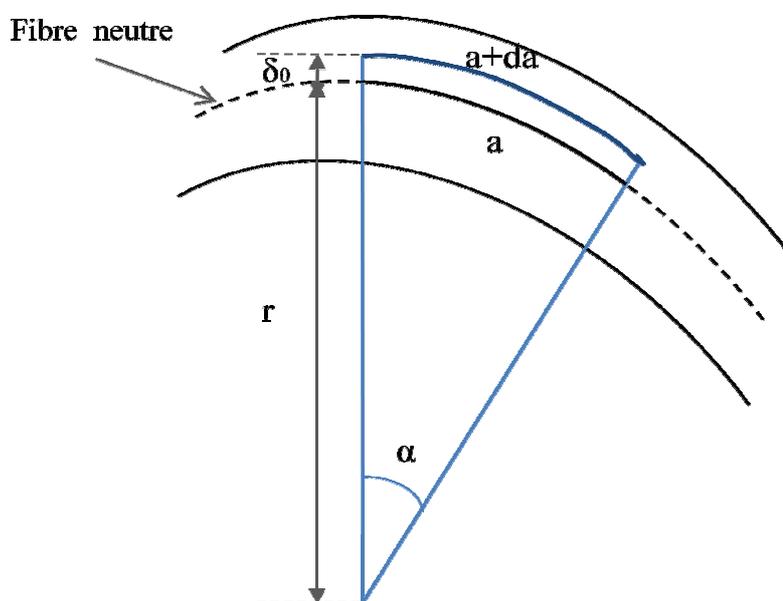


Figure A.1 : rayon de courbure.

Nous avons :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{r} = \frac{a+da(\delta_0)}{r-\delta_0} \quad (\text{A.1})$$

- Déformation :

$$\varepsilon = \frac{da(\delta_0)}{a} = -\frac{\delta_0}{r} \quad (\text{A.2})$$

- **Contrainte :**

$$\sigma = \hat{E} \cdot \varepsilon = -\hat{E} \cdot \frac{\delta_0}{r} \quad (\text{A.3})$$

2. Calcul du moment fléchissant en fonction du rayon de courbure :

Nous avons :

$$\begin{aligned} dF_z &= \sigma \cdot dS \\ &= \sigma \cdot d\delta_0 \cdot dz \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Et :

$$dM_z = \delta_0 \cdot dF_z \quad (\text{A.5})$$

D'où :

$$M_z = \int_0^l \left[\int_{-e/2}^{e/2} \frac{\hat{E}}{r} \delta_0^2 \cdot d\delta_0 \right] dz = \frac{\hat{E} \cdot l \cdot e^3}{12 \cdot r} \quad (\text{A.6})$$

Donc :

$$M_z = \frac{\hat{E} \cdot I_z}{r} \quad (\text{A.7})$$

Cette relation justifie l'équation (II.5) au niveau du chapitre II.

$$\text{Avec : } I_z = \frac{e^3 \cdot l}{12}$$

3. Relation entre le déplacement et le rayon de courbure :

Un tronçon de la déformée de rayon de courbure r est assimilé à une portion de cercle de rayon r , centré en :

$$(x, z) = (0, r) \Rightarrow x^2 + (\delta_z - r)^2 = r^2 \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Portion de cercle concernée : } \delta_z = r + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{A.9})$$

En dérivant (A.9), nous obtenons :

$$\frac{d\delta_z}{dx} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (\text{A.10})$$

En dérivant (A.10), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \delta_Z}{dx^2} = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} \quad (\text{A.11})$$

Nous avons aussi :

$$\left[\left(\frac{d\delta_Z}{dx} \right)^2 + 1 \right]^{3/2} = \frac{r^3}{(r^2 - x^2)^{3/2}} \quad (\text{A.12})$$

En utilisant les équations (A.11) et (A.12), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \delta_Z}{dx^2} = \frac{1}{r} \cdot \left[1 + \left(\frac{d\delta_Z}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (\text{A.13})$$

Donc :

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_Z(x)}{\left[1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \delta_Z(x) \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{A.14})$$

Cette relation justifie l'équation (II.6) vue au niveau du chapitre II.

$$\text{Pour des petites déformations : } \frac{d\delta_Z}{dx} \ll 1 \Rightarrow \frac{d^2 \delta_Z}{dx^2} \approx \frac{1}{r} \quad (\text{A.15})$$

Annexe B :

Equation différentielle du mouvement d'un microlevier (barre mince encastrée-libre) :

Considérons un élément de barre mince sollicitée en flexion, comme illustré sur la figure B.1. La flexion de cet élément provoque la compression de tous les plans xy positionnés au-dessus du plan longitudinal contenant l'axe central de la barre et la dilatation de tous les plans xy situés en dessous de ce même plan central. Ce dernier, dont la caractéristique essentielle est de ne subir ni compression, ni dilatation est appelé plan neutre. Toutes les droites contenues dans le plan neutre et parallèles à l'axe central de la barre mince sont appelées fibres neutres.

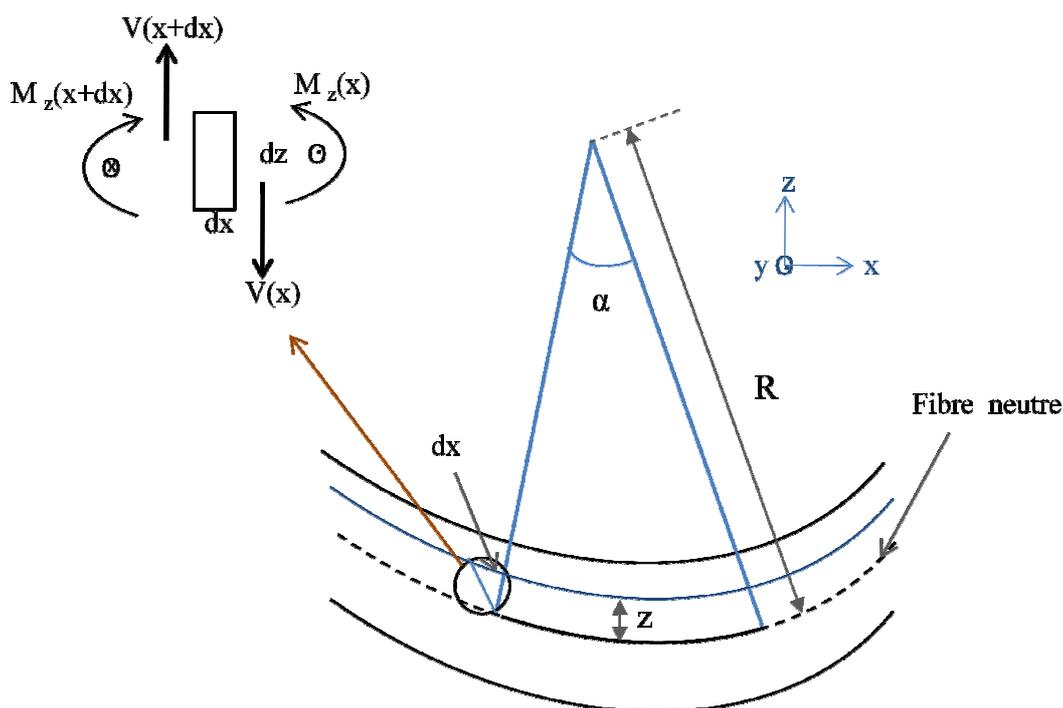


Figure B.1 : Élément de barre mince sollicité en flexion. A gauche, détail du moment de flexion et de l'effort tranchant, tous les deux internes, agissant sur le volume élémentaires (dx, dy, dz) .

Dans la figure B.1 nous avons illustré les efforts tranchants internes (de cisaillement) $V(x)$. La condition d'équilibre en rotation d'un élément de volume (dx, dy, dz) s'écrit[78], pour $dx \rightarrow 0$:

$$V(x) = -\frac{\partial M_z(x)}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

Où :

- $V(x)$ représente les efforts tranchants internes (de cisaillement).
- $M_z(x)$ le moment de flexion du microlevier au point x .

Conjointement, la condition d'équilibre en translation pour le même élément de volume est donnée par [78]:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \delta_z(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.2})$$

- $\delta_z(x, t)$ représente la déflexion au point x selon l'axe z à l'instant t
- μ est la masse par unité de longueur du microlevier donnée par :

$$\mu = \rho h o. A$$

Où :

- A désigne la section du microlevier
- ρ la densité volumique du matériau

Nous pouvons écrire l'équation (B.2) sous la forme suivante :

$$\mu \frac{\partial^2 \delta_z(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.3})$$

En remplaçant $V(x)$ par son expression (B.1), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 M_z(x)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \delta_z(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Rappelons l'équation de flexion du microlevier (II.7) donnée dans le chapitre II :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_z(x) = \frac{M_z(x)}{\hat{E}.I_z}, \text{ ce qui donne : } M_z(x) = \hat{E}.I_z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_z(x)$$

- I_z est le moment quadratique d'inertie.

Donc l'équation (B.4) devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\hat{E}.I_z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_z(x, t) \right) + \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta_z(x, t) = 0 \quad (\text{II.25})$$

Annexe C :

Théorie de la piézorésistivité dans les semiconducteurs

Introduction :

Depuis le premier article fondamental par Smith en 1954 [42], plusieurs efforts ont été faits pour expliquer le phénomène piézorésistif [79-80]. Même si certains métaux présentent une telle propriété, de même que le germanium [42] ou le carbone amorphe [81], on utilise généralement du silicium mono- ou poly-cristallin pour réaliser des capteurs mettant à profit l'effet piézorésistif [82].

La découverte par Smith de la piézorésistivité dans les cristaux à symétrie cubique tels que le Silicium et le Germanium, a permis d'ouvrir des perspectives insoupçonnées. L'utilisation des matériaux semiconducteurs a été exploitée pour produire divers sortes de capteurs mécaniques. La plupart d'eux utilisent la propriété piézorésistive en tant que moyen de détection [83-84]. Ces dispositifs mesurent le paramètre physique à détecter par l'intermédiaire de la variation d'une résistance soumise à une Contrainte.

Nous allons présenter dans cette annexe la piézorésistivité dans le cas du silicium monocristallin, matériau qui forme les jauges de contrainte des capteurs élaborés durant ce travail de mémoire de magister.

1. Définition de la piézorésistivité:

La piézorésistivité est la variation de la résistivité électrique d'un matériau sous l'effet de sollicitation mécanique.

La résistance de la piézorésistance est donnée par :

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} = \rho \cdot \frac{L}{l_e} \quad (\text{C.1})$$

Où :

- L la longueur de la résistance
- S la section de la résistance;
- l et e sont respectivement la largeur et l'épaisseur
- ρ la résistivité.

La piézorésistivité est caractérisée par des coefficients piézorésistifs π , des facteurs de jauge G et par la contrainte σ d'où:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \pi \cdot \sigma \quad (\text{C.2})$$

Et:

$$\frac{\Delta R}{R} = G \frac{\Delta L}{L} \quad (\text{C.3})$$

1.1. Facteur de Jauge Longitudinal G_1 :

C'est le cas d'une contrainte σ_1 uniaxiale c'est-à-dire selon l'axe de la longueur du barreau semiconducteur comme indiqué sur la figure ci-dessous :

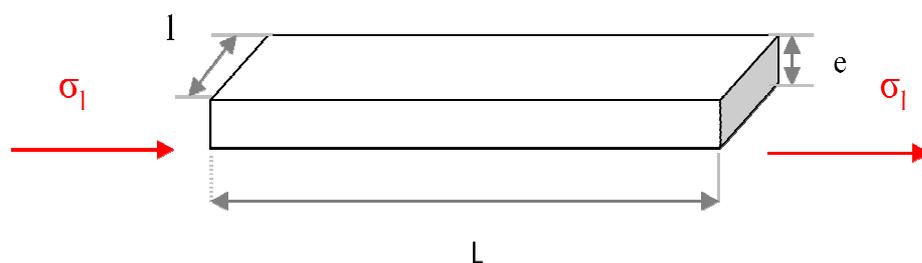


Figure C.1: barreau semiconducteur soumis à une contrainte longitudinale.

La dérivation de (C.1) donne:

$$\left(\frac{dR}{R}\right)_1 = \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_1 + \frac{dL}{L} - \frac{dl}{l} - \frac{de}{de} \quad (C.4)$$

Où on définit:

$dL = \Delta L$, $dl = \Delta l$ et $de = \Delta e$, on trouve que:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_1 = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_1 + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta e}{de} \quad (C.5)$$

En faisant l'hypothèse que les variations relatives de la largeur et de l'épaisseur sont égaux, on aura:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta e}{e} = -\nu \frac{\Delta L}{L} \quad (C.6)$$

Avec ν représente le coefficient de Poisson du matériau

Smith à remarquer que la variation de résistivité n'est plus uniquement égale aux variation des dimensions. Ses travaux sur des échantillons d'orientations cristallographiques différents ont montrés que la variation de la résistivité était proportionnelle à la contrainte appliquée. Il a ainsi établi la relation qui les lie dans le cas d'une contrainte σ_1 , s'écrit:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_1 = \pi_1 \cdot \sigma_1 \quad (C.7)$$

Dans le domaine élastique, la loi de Hooke motre qu'ilya une proportionnalité entre la contrainte et la déformation qui en résult; donc on peut écrire:

$$\sigma_1 = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (C.8)$$

Où E représente le module d'Young.

Remplaçant l'équation (C.8) dans l'équation (C.7), nous obtenons:

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_1 = \pi_1 \cdot E \cdot \varepsilon_1 \quad (\text{C.9})$$

Avec:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}$$

En insérant les équations (C.6) et (C.9) dans l'équation (C.5), nous obtenons :

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_1 = [\pi_1 \cdot E + (1 + 2\nu)] \cdot \varepsilon_1 \quad (\text{C.10})$$

D'après l'équation (C.3) nous avons:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_1 = G_1 \varepsilon_1 \quad (\text{C.11})$$

Donc:

$$G_1 = [\pi_1 \cdot E + (1 + 2\nu)] \quad (\text{C.12})$$

G_1 : Facteur de jauge longitudinal.

Comme le module d'Young et le coefficient de la piézorésistivité dépendent de l'orientation cristallographique, il est évident que le facteur de Jauge en dépendra également.

Remarque:

Le coefficient de Poisson du matériau qui prend, avec le module d'Young une valeur constante dans le cas où le matériau a des propriétés mécaniques isotropes. Dans le cas du silicium, le coefficient de Poisson est un paramètre dont la valeur est fonction du plan et de la direction cristallographique suivant lesquels il est calculé[85].

1.2. Facteur de Jauge Transversal G_t :

C'est le cas d'une contrainte σ_t uniaxiale c-à-d perpendiculaire à l'axe de la longueur du barreau semiconducteur comme indiqué sur la figure ci-dessous:

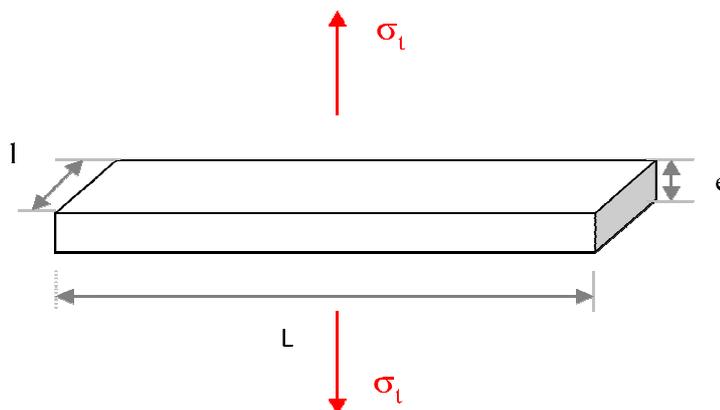


Figure C.2: barreau semiconducteur soumis à une contrainte transversale.

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_t + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta e}{e} \quad (\text{C.13})$$

En faisant l'hypothèse que les variations relatives de la longueur et de l'épaisseur sont égaux, on aura:

$$\frac{dL}{L} = \frac{\Delta e}{e} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{C.14})$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_t = \pi_t \cdot \sigma_t \quad (\text{C.15})$$

$$\sigma_t = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{C.16})$$

Nous obtenons :

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_t = \pi_t \cdot E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{C.17})$$

En insérant les équations (C.6) et (C.9) dans l'équation (C.5); nous obtenons:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = [\pi_t \cdot E - 1] \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{C.18})$$

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = G_t \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{C.19})$$

Donc:

$$G_t = (\pi_t \cdot E - 1) \quad (\text{C.20})$$

G_t : Facteur de jauge transversal.

La variation relative de la résistance électrique peut être décomposée en la somme de deux termes, l'un associé aux contraintes longitudinales et l'autre aux contraintes transversales :

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_l + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = G_l \varepsilon_l + G_t \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{C.21})$$

2. La piézorésistivité dans le cas du silicium monocristallin:

2.1 Coefficients piézorésistifs:

Expliciter le phénomène piézorésistif revient à déterminer le changement de résistance électrique d'un corps en fonction des contraintes mécaniques qu'il subit. Les contraintes mécaniques sont définies comme l'ensemble des forces de surface affectant un volume élémentaire tendant à le déformer. Soit \vec{dF} la force appliquée à un élément élémentaire de surface dS , le tenseur des contraintes C est tel que [26]:

$$C = \begin{bmatrix} \vec{dF} \\ \vec{dS} \end{bmatrix} \quad (\text{C.22})$$

Avec:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (C.23)$$

Où σ_i sont les contraintes normales et τ_i les contraintes dites tangentielles ou de cisaillement (**Figure C.3**).

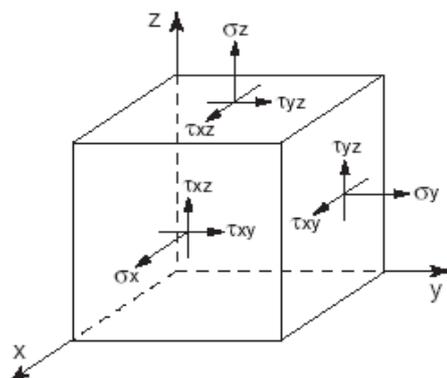


Figure C.3 : Définition des contraintes normales et tangentielles

2.2. Expression tensorielle de la piézorésistivité:

Considérons l'élément de volume d'un semi-conducteur représenté sur la figure C.3 et un système d'axes (x,y,z) lié à ses orientations cristallographiques.

Pour cet élément, la loi d'Ohm généralisée s'écrit :

$$\epsilon_i = \rho_{ij} \cdot J_j \quad (C.24)$$

ϵ_i et J_j sont les tenseurs d'ordre 1 représentant respectivement le champ électrique et la densité de courant, ρ_{ij} est un tenseur d'ordre 2 représentant la résistivité du matériau.

Dans le cas d'un matériau anisotrope cristallin comme le silicium, le champ électrique ϵ peut être relié à la densité de courant J par le biais d'un tenseur 3x3 nommé tenseur de résistivité électrique. Du fait des symétries existantes dans le cristal, les éléments de ce tenseur sont dégénérés de telle sorte que celui-ci soit symétrique:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_6 & \rho_5 \\ \rho_6 & \rho_2 & \rho_4 \\ \rho_5 & \rho_4 & \rho_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Pour un cristal de type cubique ne subissant aucune contrainte mécanique, la résistivité suivant les axes $\langle 100 \rangle$ est la même et les termes non diagonaux du tenseur de résistivité sont nuls. Nous obtenons alors :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

Les composantes du tenseur de résistivité peuvent être exprimées en introduisant la valeur de la résistivité ρ_0 correspondant au cas où les contraintes mécaniques sont nulles :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_0 \\ \rho_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_4 \\ \Delta\rho_5 \\ \Delta\rho_6 \end{bmatrix} \quad (\text{C.27})$$

Lorsque cet élément de volume est soumis à un tenseur de contraintes σ_{kl} la loi d'Ohm s'écrit [42-86]

$$\epsilon_i = (\rho_{ij} \cdot J_j) + (\pi_{ijkl} \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_{kl} \cdot J_j) \quad (\text{C.28})$$

Où π_{ijkl} représente le tenseur de piézorésistivité. Ce tenseur d'ordre 4 permet de lier le champ électrique dans la direction i avec la densité de courant dans la direction j et la contrainte kl .

Comme i, j, k et l peuvent prendre les valeurs 1, 2 ou 3, le tenseur de piézorésistivité est constitué théoriquement de 81 coefficients. En réalité, les tenseurs de résistivité et de contraintes étant des tenseurs symétriques ($\pi_{ijkl} = \pi_{jikl} = \pi_{ijlk} = \pi_{jilk}$ et $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$), on dénombre dans le cas général 15 coefficients indépendants [40].

Pour les matériaux comme le silicium ou le germanium, dont la structure cristallographique présente des symétries (structures cubiques), on observe de nouvelles égalités et le tenseur de piézorésistivité peut se ramener à 3 coefficients indépendants: π_{11} , π_{12} , π_{44} (appelés coefficients fondamentaux).

Les six composantes $\Delta\rho_i$ peuvent à leur tour s'exprimer en fonction des six composantes des contraintes mécaniques σ_i et τ_i en utilisant un tenseur regroupant les différents coefficients piezorésistifs π_{ij} . Pour une structure cristalline comme le silicium, ce tenseur est une matrice 6x6 symétrique où seulement les trois coefficients piezorésistifs fondamentaux interviennent [42]:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

Avec : $I_i = \frac{\Delta\rho_i}{\rho_0}$ représente le changement relatif de la résistivité et i varie de 1 à 6.

Les coefficients piézorésistifs π_{ij} sont exprimés en Pa^{-1} . Ils varient en fonction : de la température, du type de dopage [38], de la dose implantée et peuvent être, selon les cas, positifs ou négatifs. Le Tableau C.1 donne les valeurs de ces coefficients pour le silicium monocristallin [42] :

	$\pi_{11}(10^{-12}Pa^{-1})$	$\pi_{12}(10^{-12}Pa^{-1})$	$\pi_{44}(10^{-12}Pa^{-1})$
Dopage P :			
$1,5 \times 10^{15}/cm^3$	+67,1	-10,8	+1408
Dopage N :			
$4 \times 10^{14}/cm^3$	-1042	+544	-138

Tableau C.1 : Coefficients piézorésistifs du silicium monocristallin.

Les différentes équations peuvent être combinées pour donner l'expression du champ électrique E suivante:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \rho_0 \cdot J_x + \rho_0 \cdot \pi_{11} \cdot \sigma_x \cdot J_x + \rho_0 \cdot \pi_{12} \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \cdot J_x + \rho_0 \cdot \pi_{44} \cdot (J_y \cdot \tau_{xy} + J_z \cdot \tau_{xz}) \\ \epsilon_y = \rho_0 \cdot J_y + \rho_0 \cdot \pi_{11} \cdot \sigma_y \cdot J_y + \rho_0 \cdot \pi_{12} \cdot (\sigma_x + \sigma_z) \cdot J_y + \rho_0 \cdot \pi_{44} \cdot (J_x \cdot \tau_{xy} + J_z \cdot \tau_{yz}) \\ \epsilon_z = \rho_0 \cdot J_z + \rho_0 \cdot \pi_{11} \cdot \sigma_z \cdot J_z + \rho_0 \cdot \pi_{12} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \cdot J_z + \rho_0 \cdot \pi_{44} \cdot (J_x \cdot \tau_{xz} + J_y \cdot \tau_{yz}) \end{cases} \quad (C.30)$$

Le premier terme de ces équations représente la loi d'Ohm dans le cas d'un conducteur ne subissant aucune contrainte mécanique, alors que le deuxième met en évidence le phénomène de piézorésistivité dit de premier ordre. Les deux derniers termes donnent une description physique complète du champ électrique en tenant compte des contraintes de cisaillement.

Pour toutes les équations décrites précédemment, nous nous plaçons dans un repère dont les axes sont confondus avec les axes <100> du cristal de silicium. Dans de nombreux cas, il peut être souhaitable et plus simple d'exprimer les coefficients piézorésistifs suivant une direction quelconque de l'espace. Ceci nous amène à définir le facteur piézorésistif longitudinal et transversal (notés π_l et π_t). Le facteur piézorésistif longitudinal sera relié aux contraintes ayant la même direction que le flux électrique alors que le facteur piézorésistif transversal sera relié aux contraintes perpendiculaires. Sans donner de développements mathématiques détaillés, les expressions de ces deux facteurs piézorésistifs sont les suivantes [87-88]:

$$\begin{cases} \pi_l = \pi_{11} + 2(\pi_{44} + \pi_{12} - \pi_{11})(l_1^2 m_1^2 + l_1^2 n_1^2 + m_1^2 n_1^2) \\ \pi_t = \pi_{12} - (\pi_{44} + \pi_{12} - \pi_{11})(l_1^2 l_2^2 + m_1^2 m_2^2 + n_1^2 n_2^2) \end{cases} \quad (C.31)$$

Où l_i , m_i et n_i sont les cosinus directeurs du nouveau système de coordonnées. (l_1, m_1, n_1) : entre l'axe longitudinal (1) et l'axe du cristal et (l_2, m_2, n_2) : entre l'axe transversal (2) et l'axe du cristal.

○ Exemple: direction <110> sur substrat (100):

$$(l_1, m_1, n_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad ; \quad (l_2, m_2, n_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\pi_{l\langle 110 \rangle} = \frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{44}) \quad ; \quad \pi_{t\langle 110 \rangle} = \frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} - \pi_{44});$$

Les cosinus directeurs représentent les coordonnées des vecteurs unitaires $\langle 100 \rangle$ du réseau cristallin dans la nouvelle base vectorielle définie. Ainsi un vecteur $(x \ y \ z)$ se référant à la base vectorielle du réseau cristallin aura comme coordonnées $(x^* \ y^* \ z^*)$ dans la nouvelle base suivant l'équation ci-dessous [26] :

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{C.32})$$

Le Tableau C.2 donne les valeurs des coefficients piézorésistifs longitudinal et transversal pour différentes combinaisons de directions dans le réseau cristallin :

Direction Longitudinale	Coefficient piézorésistif π_l	Direction Transversale	Coefficient piézorésistif π_t
[100]	π_{11}	[010]	π_{12}
[001]	π_{11}	[110]	π_{12}
[111]	$\frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} + 2\pi_{44})$	[1 $\bar{1}$ 0]	$\frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \pi_{44})$
[110]	$\frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{44})$	[111]	$\frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \pi_{44})$
[110]	$\frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{44})$	[001]	π_{12}
[110]	$\frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{44})$	[1 $\bar{1}$ 0]	$\frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} - \pi_{44})$

Tableau C.2 : Coefficients piézorésistifs longitudinal et transversal pour différentes directions. [16]

2.3. Explication physique du phénomène:

La piezorésistivité met en jeu des phénomènes complexes de conduction dans les semi-conducteurs à tel point que les théories élaborées jusqu'à présent sont encore sujettes à controverses.

La résistivité est reliée à la mobilité des porteurs et leur densité par la relation suivante :

$$\rho = \frac{1}{q.n.\mu_n + q.p.\mu_p} \quad (\text{C.33})$$

Où la mobilité est elle-même définie par l'expression ci-dessous [88] :

$$\mu_n = \frac{q.\tau}{m^*} = \frac{q.\tau}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta E(k)}{\partial k^2} \quad (\text{C.34})$$

Dans cette relation :

- τ est le temps de relaxation des porteurs
- q est la charge électrique
- m^* est la masse effective

Cette dernière expression montre que la mobilité et donc la résistivité électrique sont liées à la courbure (dérivée seconde) des bandes d'énergie ($E(k)$) dans l'espace des vecteurs d'onde (k) (**Figure C.4**).

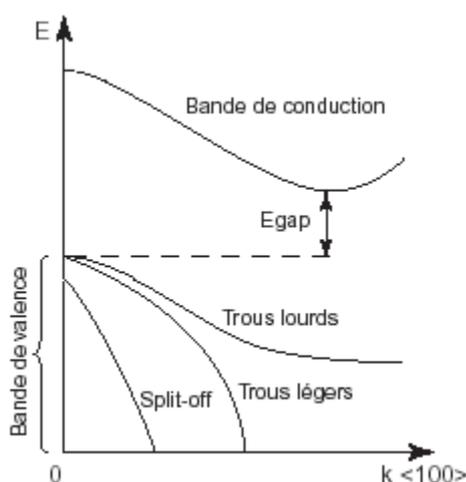


Figure C.4 : Diagramme $E(k)$ du silicium monocristallin

La Figure C.4 montre les surfaces de même énergie dans l'espace des vecteurs d'onde. Ces surfaces sont des ellipsoïdes dont la longueur des axes est proportionnelle à la courbure

de l'énergie $E(k)$. Si nous considérons un électron (dopage de type N) se propageant selon la direction $[100]$ (**Figure C.5**), ce porteur de charge se déplacera de manière longitudinale par rapport à deux ellipsoïdes et de manière transversale par rapport à quatre autres de telle sorte que la résistivité puisse s'écrire comme il suit [89] :

$$\rho = \frac{1}{2.q.n_l.\mu_l + 4.q.n_t.\mu_t} \quad (\text{B.35})$$

Où n_l et n_t représentent les densités d'électrons dans les bandes longitudinales et transversales au flux électrique. Notons que dans le cas où le conducteur n'est pas contraint, $n_l = n_t = n/6$.

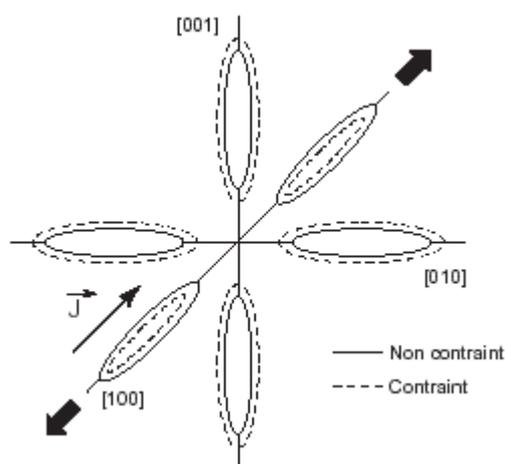


Figure C.5 : Effet d'une contrainte uniaxiale sur les surfaces de même énergie.

Si une contrainte uniaxiale est appliquée dans la direction $[100]$, le niveau des bandes d'énergie dans les directions $[100]$ et $[\bar{1}00]$ augmente causant ainsi la délocalisation des électrons dans les autres bandes ($[010]$, $[0\bar{1}0]$, $[001]$ et $[00\bar{1}]$). Cette délocalisation des porteurs, en accord avec la dernière équation, provoque une diminution de la résistivité électrique.

3. Influence du dopage et de la température sur les coefficients π_{ij} :

3.1. Influence du dopage :

A température ambiante, la dépendance des deux coefficients les plus importants du Silicium monocristallin (π_{11} pour un dopage en atomes donneurs et π_{44} pour un dopage en atomes accepteurs) en fonction de la concentration en dopants est représentée sur la figure C.6. Son examen permet de constater qu'entre 10^{18} cm^{-3} et 10^{20} cm^{-3} , leurs valeurs respectives diminuent de façon considérable.

Les autres coefficients, π_{11} et π_{12} pour le Silicium de type P, π_{44} pour le Silicium de type N, ont une variation en fonction de la concentration nettement moins prononcée. Pour les premiers coefficients π_{11} et π_{12} , on peut considérer qu'ils sont constants dans une plage étendue de dopage de 10^{18} cm^{-3} à 10^{20} cm^{-3} , alors que pour π_{44} (Si-N), la variation en fonction du dopage est relativement faible en dessous de 10^{18} cm^{-3} . Elle devient importante pour des concentrations supérieures à cette valeur. Quant au coefficient π_{12} du Silicium de type N, la relation suivante :

$$\pi_{12} = -\frac{\pi_{11}}{2} \quad (\text{C.36})$$

Étant toujours vérifiée quelle que soit la concentration, sa loi de variation est identique à celle de π_{11} .

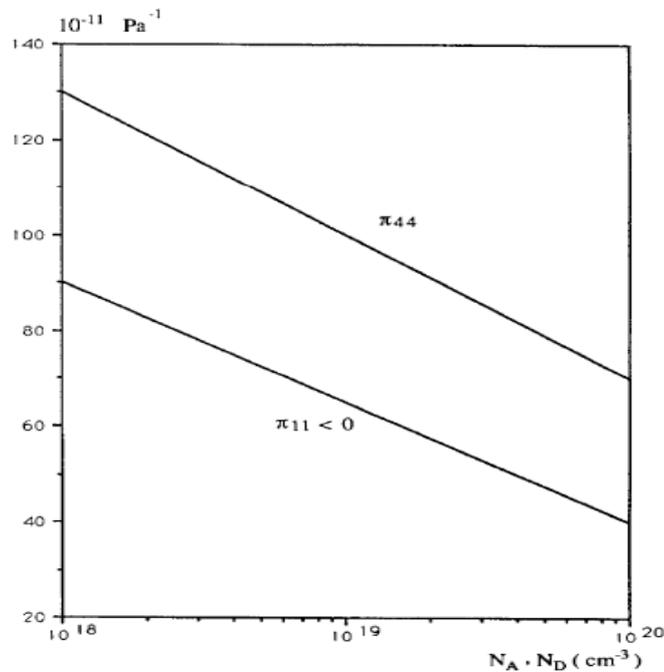


Figure C.6: Variation en fonction du dopage des coefficients de piézorésistivité π_{44} pour le Silicium de type P et π_{11} pour le Silicium type N [40].

3.2. Influence de la température :

Pour les deux coefficients les plus importants, π_{11} (Si-N) et π_{44} (Si-P), nous avons représenté leurs variations respectives en fonction de la température sur les figures C.7 et C.8. On constate que, pour les deux termes, la dépendance thermique est élevée dans une gamme de concentrations en dopants allant de 10^{18} cm^{-3} à $3 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ environ pour π_{11} , et de 10^{18} cm^{-3} à $3 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ pour π_{44} . Au-delà de ces deux valeurs extrêmes de dopage, les deux coefficients deviennent quasiment indépendants de la température.

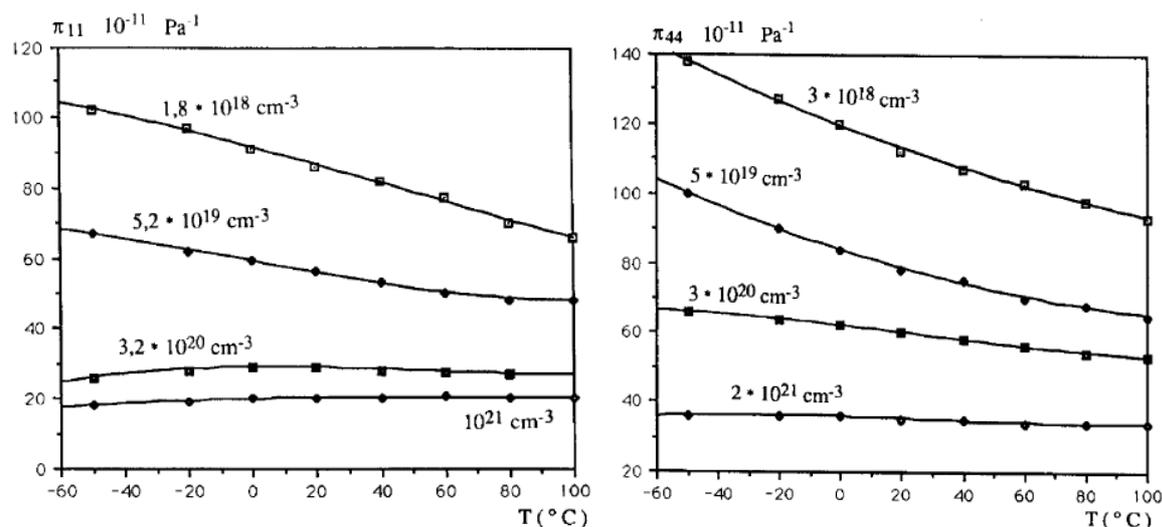


Figure C.7 : Variation du coefficient de piézorésistivité π_{11} du Si-N et du coefficient π_{44} du Si-P en fonction de la température [40].

3.3. Effets combinés du dopage et de la température :

Dans le but de modéliser le comportement expérimental de l'effet piézorésistif, Kanda [80] a utilisé la variation de conductivité dans un monocristal de Silicium pour mettre au point une formulation générale intégrant les paramètres du dopage et de la température à travers un facteur de piézorésistance $P(N, T)$. Ce facteur multiplicatif permet d'obtenir la valeur d'un coefficient de piézorésistivité $\pi_{l,t}(N, T)$ d'une résistance de Silicium se trouvant à la température T et ayant une concentration N en dopants accepteurs ou donneurs à partir de l'expression suivante :

$$\pi_{l,t}(N, T) = \pi_{l,t}(10^{16}, 300^\circ K) \cdot P(N, T) \quad (\text{B.38})$$

Où :

$\pi_{l,t}(10^{16}, 300^\circ K)$ est un coefficient pris comme référence et utilisant les valeurs expérimentales du tableau (C.1).

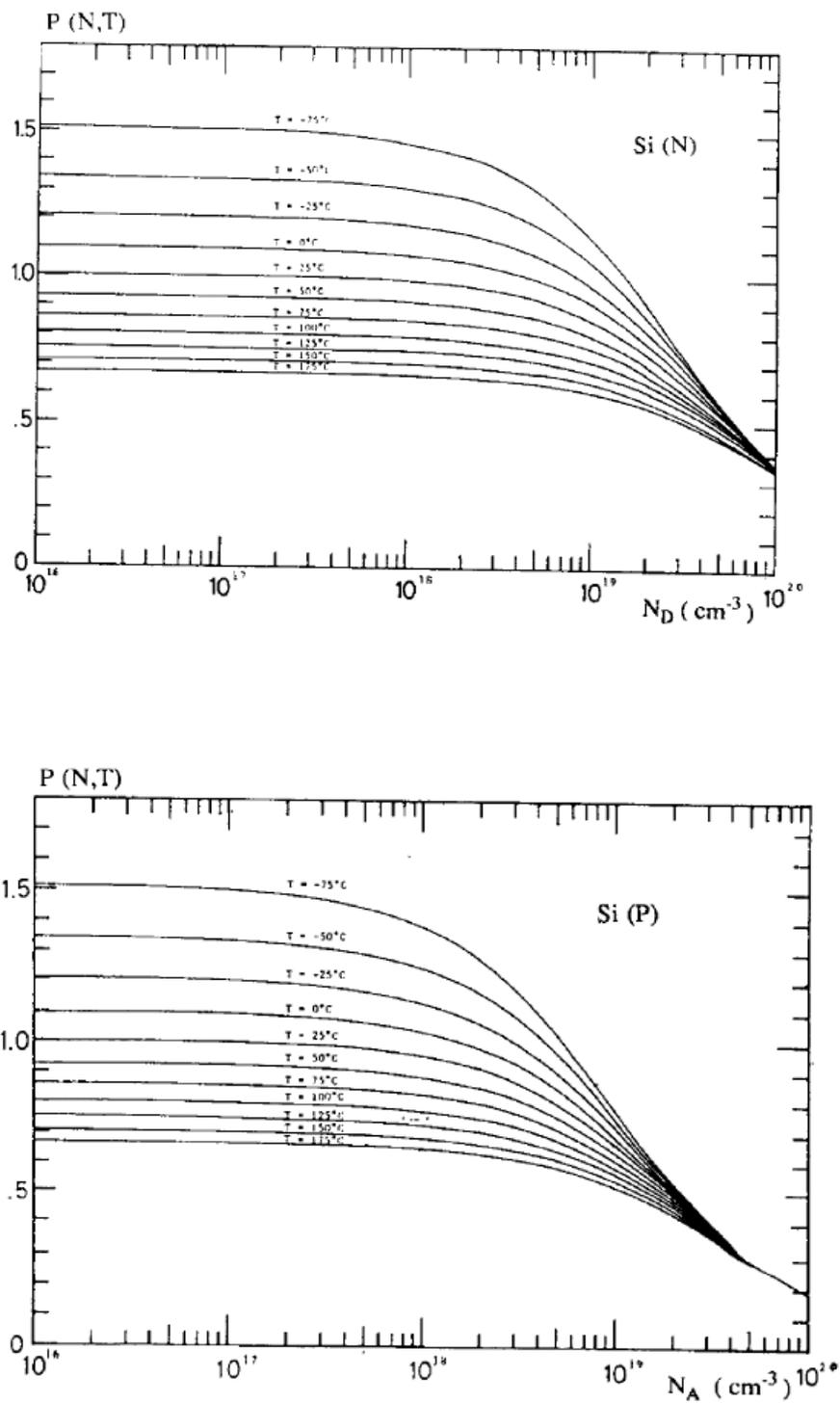


Figure C.8 : Courbes de variations, paramétrées en température, du facteur de piézorésistance du Silicium de type N et P [80].

Annexe D :

Microlevier en forme de V

Introduction :

Considérons le microlevier représenté sur la figure D.1:

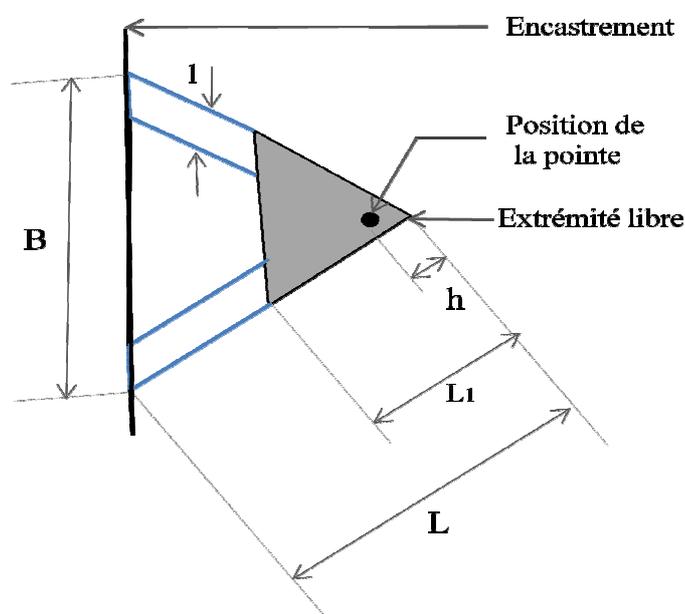


Figure D.1 : Microlevier uniforme en forme de V.

Un microlevier en forme de V peut être regardé comme une combinaison d'un triangle attaché par deux bras uniformes à une base. Une telle description permet d'arriver à la solution approximative de la réponse du microlevier. Cette solution est obtenue en combinant les résultats pour un microlevier de forme triangulaire avec ceux pour les deux bras uniformes (de forme rectangulaire). Nous pouvons remarquer que, contrairement aux microleviers rectangulaires, il est important de prendre en considération « h » (**Figure D.1**) qui représente la distance entre le centre de la pointe et l'extrémité libre du microlevier en forme de V, car cette dernière représente une forme pointue [24].

Nous pouvons donc diviser notre étude en deux parties :

1- Deux bras rectangulaires du microlevier : $0 < x < L - L_1$

- Moment de flexion :

Le moment fléchissant est donné par :

$$M_{z1}(x) = (L - x) \cdot F_z \quad (D.1)$$

F_z est une charge ponctuelle appliquée à l'extrémité libre du microlevier

- Moment d'inertie quadratique :

$$I_{z1} = \frac{l \cdot e^3}{6} \quad (D.2)$$

Avec e représente l'épaisseur du microlevier.

L'équation de flexion est donnée par :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_{z1}(x) = \frac{M_{z1}(x)}{\hat{E} \cdot I_{z1}} \quad (D.3)$$

Insérant les deux équations (D.1) et (D.2) dans l'équation (D.3), nous obtenons l'équation de flexion du microlevier de forme triangulaire:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_{z1}(x) = 6 \cdot \frac{L-x}{\hat{E} \cdot l \cdot e^3} F_z \quad (D.4)$$

- Pente :

La pente $\theta_{z1}(x)$ du microlevier en un point x , est obtenue en intégrant l'équation (D.4) :

$$\theta_{z1}(x) = \frac{3 \cdot (2 \cdot L - x) \cdot x}{\hat{E} \cdot l \cdot e^3} F_z \quad (D.5)$$

- Déplacement :

Le déplacement $\delta_{zT}(x)$ du microlevier en un point x , est obtenu en intégrant l'équation (D.5) :

$$\delta_{z1}(x) = \frac{(3.L-x).x^2}{\hat{E}.l.e^3} F_z \quad (D.6)$$

2- Section triangulaire du microlevier : $L - L_1 < x < L$

- Moment de flexion :

Le moment fléchissant est donné par :

$$M_{zT}(x) = (L - x).F_z \quad (D.7)$$

- Moment d'inertie quadratique :

Contrairement au cas d'un microlevier uniforme, le moment d'inertie quadratique $I_{zT}(x)$ pour un microlevier triangulaire n'est pas constant mais plutôt une fonction de x :

$$I_{zT}(x) = (L - x). \frac{B.e^3}{12.L_1} \quad (D.8)$$

L'équation de flexion pour ce cas est :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_{zT}(x) = \frac{M_{zT}(x)}{\hat{E}.I_{zT}(x)} \quad (D.9)$$

Où :

$\delta_{zT}(x)$ est déplacement du microlevier dans la direction z à un point x le long de son corps.

Insérant les deux équations (D.7) et (D.8) dans l'équation (D.9), nous obtenons l'équation de flexion du microlevier de forme triangulaire:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_{zT}(x) = \frac{12.L_1}{\hat{E}.B.e^3} . F_z \quad (D.10)$$

- Pente :

La pente $\theta_z(x)$ du microlevier en un point x , est obtenue en intégrant l'équation (D.10) :

$$\theta_{zT}(x) = \frac{12.L_1.x}{\hat{E}.B.e^3} . F_z \quad (D.11)$$

- **Déplacement :**

Le déplacement $\delta_{zT}(x)$ du microlevier en un point x , est obtenu en intégrant l'équation (D.11) :

$$\delta_{zT}(x) = \frac{6.L_1.x^2}{\hat{E}.B.e^3} F_z \quad (D.12)$$

3- Microlevier en forme de V :

- **Moment de flexion :**

Le moment fléchissant est donné par :

$$M_{zV}(x) = (L - x). F_z \quad (D.13)$$

- **Moment d'inertie quadratique :**

$$I_{zV}(x) = \begin{cases} I_{z1}(x) = \frac{le^3}{6} & \text{pour } 0 < x < L - L_1 \\ I_{z2}(x) = (L - x). \frac{B.e^3}{12.L_1} & \text{pour } L - L_1 < x < L \end{cases} \quad (D.14)$$

L'équation de déflexion est donnée par :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_{zV}(x) = \frac{M_{zV}(x)}{\hat{E}.I_{zV}(x)} = \begin{cases} \frac{M_{zV}(x)}{\hat{E}.I_{z1}(x)} = 6. \frac{L-x}{\hat{E}.l.e^3} \cdot F_z & \text{pour } 0 < x < L - L_1 \\ \frac{M_{zV}(x)}{\hat{E}.I_{z2}(x)} = \frac{12.L}{\hat{E}.B.e^3} \cdot F_z & \text{pour } L - L_1 < x < L \end{cases} \quad (D.15)$$

- **Pente :**

- Pour $0 < x < L - L_1$:

$$\theta_{zV}(x) = \theta_{z1}(x) = \frac{3.(2.L-x).x}{\hat{E}.l.e^3} \cdot F_z \quad (D.16)$$

- Pour $L - L_1 < x < L$:

$$\theta_{zV}(x) = \theta_{z2}(x) = \theta_{z1}(L - L_1) + \int_{L-L_1}^x \frac{M_{zV}(x)}{\hat{E}.I_{zT}(x)} dx$$

Donc :

$$\theta_{zV}(x) = \frac{12.W.L.(x-L+L_1)+3.B.L.(L+L_1)}{\hat{E}WB e^3} F_z \quad (D.17)$$

- **Déplacement :**

- Pour $0 < x < L - L_1$:

$$\delta_{zV}(x) = \delta_{z1}(x) = \frac{(3.L_1-x).x^2}{\hat{E}.l.e^3} F_z \quad (D.18)$$

- Pour $L - L_1 < x < L$:

$$\delta_{zV}(x) = \delta_{z2}(x) = \delta_{z1}(L) + \int_{L_1-L_2}^x \theta_{z2}(x) dx$$

Donc :

$$\delta_{zV}(x) = \frac{6L_1W(L-L_1-x)^2+B(L-L_1)[-3L(L-L_1)+2(L-L_1)^2+6Lx-3(L-L_1)x]}{\hat{E}WB e^3} F_z \quad (D.19)$$

- **Constante linéaire de raideur :**

$$K_{zV} = \left| \frac{F_z}{\delta_{z2}.(L-h)} \right| \quad (D.20)$$

Après calcul, nous obtenons :

$$K_{zV} = \frac{\hat{E}.l.B.e^3}{6.L.l.(h-L_1)^2+B.(L-L_1).[6.L^2-6.L.h+(L-L_1).(-4.L-2.L_1+3.h)]} \quad (D.21)$$