REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN -
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques
Option : *probabilités statistiques*

Thème

Mélange des processus linéaires et autorégressifs

Présenté par

Kara Terki Nesrine

Composition du jury

Président : T.Mourid Professeur à l'université Abou Bekr Belkaid

Encadreur : A.Allam Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid

Examinateur : F.Boukhari Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid

Année universitaire : 2011 - 2012

REMERCIEMENTS

J’exprime ma profonde gratitude à mon promoteur Mr Allam abdelaziz Maitre de conférence à l’université ABOU BEKR BELKAID de Tlemcen, qui ma honoré de sa confiance et qui a bien voulu guider et juger ce travail. J’en suis très reconnaissante pour sa disponibilité, ses conseils et sa rigueur dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie Monsieur Mourid T., Professur à l’université ABOU BEKR BELKAID pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les trois années écoulées ; aussi je le remercie vivement d’avoir accepté de présider le jury.

Je remercie Mr Boukhari.F maître de conférence à l’université ABOU BEKR BELKAID de Tlemcen pour son sérieux sa compétence et surtout d’avoir accepté d’examiner ce travail.

DÉDICACES

Avec l'aide de dieu tout puissant et tous les gens qui m'aiment et qui m'ont soutenu j'ai pu achever ce modeste travail que je dédie à :

Maman et papa : merci pour l'amour et la tendresse et le soutien que vous m'avez donnée pendant toutes ces années,

Ma sœur Ibtissem qui a toujours été là pour moi.

Mon petit frère Nassim.

Mes amis, toute ma famille, mon beau frère Sofiane mes cousines et mes cousins.

Tous les professeurs qui ont assuré ma formation.

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen

Faculté des sciences

Département de mathématiques

Mélange de processus linéaires et autorégressifs

Mémoire de master En Mathématiques

(Spécialité : probabilités statistiques)

Présenté par

Kara Terki Nesrine

Composition du jury

Président :	T.Mourid	Professeur à l'université Abou Bekr Belkaid
Directeur de thèse :	A.Allam	Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid
Examinateurs :	F.Boukhari	Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid

Table des matières

Introduction **5**

Préliminaires **7**

1 Préliminaires. **7**
- 1.1 Processus linéaires et autorégressifs. 7
- 1.2 Généralités sur les mélanges de processus 12
- 1.3 Densité spectrale 14
- 1.4 Chaînes de Markov 17

Mélange fort des processus linéaires **19**

2 Mélange fort des processus linéaires **19**
- 2.1 Théorème de Chanda 19
  - 2.1.1 Introduction 19
  - 2.1.2 Résultat 20
  - 2.1.3 Démonstration du théorème de Chanda 22
  - 2.1.4 Contre exemple 28
- 2.2 Théorème de Gorodetskii 30
  - 2.2.1 Introduction 30
  - 2.2.2 Résultat 30
  - 2.2.3 Démonstration du théorème de Gorodetskii 36

Mélange d'une chaîne de Harris et d'un processus autorégressif **42**

3 Mélange d'une chaîne de Harris et d'un processus autorégressif **43**
- 3.1 Introduction 43
- 3.2 Mélange fort des chaînes de Harris. 44
- 3.3 Conditions minimales 48
- 3.4 Conditions de mélange pour un processus autorégressif d'ordre 1 50
- 3.5 Conditions minimales 57
- 3.6 Conditions de mélange pour un AR(p) 60
- 3.7 Exemple d'un AR(1) non fortement mélangeant 61

Conditions de mélange pour un processus linéaire vectoriel **67**

4 Conditions de mélange pour un processus linéaire vectoriel **69**

4.1 Sommaire 69

4.2 Théorème 70

Conclusion **77**

Introduction

Dans ce mémoire,nous nous intéressons particulièrement aux propriétés de mélange des processus autorégressifs, processus linéaires et chaines de Markov.

Nous étudions différents types de mélange :

- le mélange fort (α-mélange) introduit par Rosemblat en 1956.
- le mélange faible (ou mélange uniforme) (ou $\varphi-$ mélange) introduit par I.A.Ibraginov et Y.V.Linnik
- la régularité absolue(ou β mélange) introduite par Y.A. Davydov
- la régularité complète (ou ρ mélange)

Les trois derniers types de mélange cités impliquent le mélange fort ;ce dernier trouve de multiples champs d'applications :

-en probabilités : théorème central limite, LFGN, le logarithme itéré, les processus empiriques

-en statistiques : théorèmes limites en estimation, tests, statistiques d'ordre, efficacité des estimateurs .

Dans ce mémoire nous développons les résultats des articles suivants :

1.Chanda,K.C.(1974)Strong mixing proprerties of linear stochastic process.
J.Appl.Prob.11,401-408

2. V.V.Gorodetskii,(1977)On the strong mixing property for linear sequences.
TheoryProbab.Appl.22,411-413.

3. K.B.ATHREYA , S.G.PANTULA,(1986)Mixing properties of harris chains and autogressive processes.

4.Donald W .K.Andrews.(1984)Non strong mixing autoregressive process
.J.Appl.Prob.21,930-934.

5. T.D.Pham ,L.T.Tran,(1985)Some mixing properties of time series models.
Stochastic Processes and their Applications.19,297-303.

Notre mémoire est composé de quatre chapitres.

-Dans le chapitre 1, nous présentons les principales définitions, les types de mélange et les classes des processus étudiés (cf [14] ,[15],).

-Dans le chapitre 2, nous étudions le mélange fort ($\alpha-$mélange) des processus linéaires.

Le premier résultat établi par Chanda [4] donne le mélange fort des processus linéaires sous des conditions d'intégrabilité de la fonction caractéristique et l'existence de moments du bruit. Son résultat a donné lieu à d'autres développements et contre-exemples très intéressants en particulier celui de Ibraginov I.A..

Le deuxième résultat établi par Gorodetsky donne le mélange fort des processus linéaires mais sous un ensemble de conditions très techniques.

-Dans le chapitre 3, nous étudions le mélange uniforme des processus autorégressifs ; nous donnons un premier résultat établi par Athreya- Pantula [2] sur le mélange fort des processus autorégressifs et chaines de Markov récurrentes positives.

Sous des conditions sur l'existence de la composante absolument continue de la loi d'un bruit borné, les auteurs montrent le mélange fort pour cette classe de processus. Pour les chaines de Markov récurrentes positives , l'existence de loi stationnaire implique le mélange fort. Par suite, ils montrent que ces conditions sont minimales.

Nous terminons ce chapitre par la présentation d'un contre exemple (historique) de processus autorégressif AR(1) donné par Andrews [6] qui ne possède pas la propriété du mélange fort.

-Enfin dans le chapitre 4, nous présentons les résultats de Pham . et Lanh T.TRAN [12] sur la régularité absolue ($\beta-$mélange) des processus linéaires vectoriels à valeurs dans R^p.

Chapitre 1

Préliminaires.

Résumé. Nous rappelons quelques définitions utiles pour notre mémoire. Nous présentons des classes de processus (cf [15]) et introduisons les différents types de mélange (cf [14]) Nous terminons par le concept de densité spectrale .

Dans tout le mémoire on considère $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité Toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace et sont à valeurs dans R ou R^p

1.1 Processus linéaires et autorégressifs.

Définition 1.1 *Un processus aléatoire* $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ *est dit bruit blanc faible si* $E(\varepsilon_t) = 0$ *et* $E(\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}) = \sigma^2\delta_{t_1t_2}$ *pour tout* $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ *où*

$$\delta_{t_1t_2} = \begin{cases} 1 & si\ t_1 = t_2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Si de plus les ε_t *sont iid,alors il est dit bruit blanc fort.*

Définition 1.2 *1) Un processus* $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est dit stationnaire du second ordre ou faiblement stationnaire si :*

- $E(X_t) = \mu \ \forall t \in \mathbb{Z}$
- X_t *est de carré intégrable pour tout* $t \in \mathbb{Z}$
- $cov(X_s, X_{s+t}) = cov(X_0, X_t) \forall t \in \mathbb{Z}$

2) Un processus $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est dit strictement stationnaire si pour toute suite d'entiers* $t_1, ..., t_k \in \mathbb{Z}$ *et pour tout* $h \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{L}(X_{h+t_1}, ..., X_{h+t_k}) = \mathcal{L}(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$
où $\mathcal{L}(X)$ *désigne la loi de* X*.*

Définition 1.3 *Soit* $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc fort.*
Un processus $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est dit processus linéaire s'il vérifie l'équation :*

$$X_t = \sum_{i\geqslant 0} a_i\varepsilon_{t-i} \tag{1.1.1}$$

avec $\sum_{i\geqslant 0} a_i^2 < \infty$

Remarque 1.1 *1. Dans 1.1.1 l'égalité est prise au sens de* L^2 *et comme les* ε_t *sont indépendantes alors c'est même P-p.s.*

2. X ainsi défini est strictement stationnaire.

Définition 1.4 *Soit* $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ *un bruit blanc faible.*
Un processus $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est dit processus autorégressif d'ordre 1, noté AR(1) s'il vérifie l'équation :*

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1.1.2}$$

avec $\rho \neq 0$ *.*

Proposition 1.1 *[**Existence d'une solution stationnaire**] Soit* $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ *un processus autorégressif d'ordre 1 satisfaisant* $\sup_{t\in\mathbb{Z}} E(|X_t|^2) \leqslant K$ *et vérifiant l'équation :(1.1.2)*
où $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ *est un bruit blanc fort.*
- Si $|\rho| < 1$ *alors l'équation 1.1.2admet une solution strictement stationnaire donnée par*

$$X_t = \sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

Démonstration :
Si (X_t) vérifie 1.1.2 avec $|\rho| < 1$ alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

$$X_t = \rho^n X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|X_t - \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \varepsilon_{t-i}\|_{L^2} &= \|\rho^n X_{t-n}\|_{L^2} \\ &= |\rho|^n (E(|X_{t-n}|^2))^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{K}\,|\rho|^n \rightarrow_{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où $X_t = \sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{t-i}$ dans L^2 et comme les ε_t sont indépendantes donc $X_t = \sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{t-i}$ P-p.s..
On a pour tout $t_1, t_2, ...t_n, h \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h}) &\stackrel{Pps}{=} (\sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{h+t_1-i}, ..., \sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{h+t_n-i}) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} (\sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{t_1-i}, ..., \sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{t_n-i}) \\ &\stackrel{Pps}{=} (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \end{aligned}$$

d'où X est strictement stationnaire.

Remarque. La réciproque est aussi vraie : on a $X_t = \sum_{i\geq 0} \rho^i \varepsilon_{t-i}$ qui implique que $|\rho| < 1$ .En effet $K \geqslant E(|X_t^2|) = \sum_{i\geqslant 0} \rho^{2i}\sigma^2$ donne $\sum_{i\geqslant 0} \rho^{2i} < \infty$. D'où $|\rho| < 1$

Définition 1.5 *Soit $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc faible*
Un processus $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit autorégressif d'ordre p, noté AR(p) s'il vérifie l'équation suivante :

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{1.1.3}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \quad$ et $a_p \neq 0$

Le résultat suivant donne une représentation matricielle d'un processus $AR(p)$ réel sous forme d'un processus $AR(1)$ vectoriel dans $\mathbb{R}^p$.
Posons :

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \eta_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$est un bruit blanc faible à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Proposition 1.2 (X_t) *est solution de 1.1.3 si et seulement si* (Y_t) *est solution de*

$$Y_t = AY_{t-1} + \eta_t \tag{1.1.4}$$

Définition 1.6 *On définit le polynôme caractéristique P_p d'un AR(p) par :*

$$P_p(z) = z^p - a_1 z^{p-1} - ... - a_p.$$

La proposition suivante donne une relation entre les racines du polynôme P_p et les valeurs propres de la matrice A.

Proposition 1.3 *Soit A la matrice définie ci dessus. Alors les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme P_p*

Démonstration En effet ,nous avons :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= \begin{cases} \lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p & \text{Si p pair} \\ -\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \cdots + a_p & \text{Si p impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme 1.1 *(cf [10])*
On munit l'espace des matrices $\mathcal{M}_m$,$m \in \mathbb{N}$,d'une norme notée $\|.\|$.
Soit $A \in \mathcal{M}_m$.On note $\rho(A)$ le rayon spectrale de A :

$$\rho(\lambda) = max\{|\lambda|, \lambda \in \mathcal{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$$

On a : $\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

Proposition 1.4 *Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus AR(p) donné par 1.1.3 ,satisfaisant $\sup_{t\in\mathbb{Z}} E(|X_t|^2) \leqslant K$*
où $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc fort.

Si les racines du polynôme caractéristique P_p , sont dans le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ alors
1) l'équation 1.1.4 admet une solution strictement stationnaire donnée par $Y_t = \sum_{i\geqslant 0} A^i \eta_{t-i}$
2) L'équation 1.1.3 admet une solution strictement stationnaire donnée par $X_t = \sum_{i\geqslant 0} (A^i)_{11} \varepsilon_{t-i}$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned} Y_t &= AY_{t-1} + \eta_t \\ &= A^2 Y_{t-2} + A\eta_{t-1} + \eta_t \\ &\vdots \\ &= A^n Y_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} A^i \eta_{t-i} \end{aligned}$$

avec $A^0 = I$.
Montrons que :$Y_t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} A^i \eta_{t-i}$ dans L^2 : $\|.\|^2_{\mathbb{R}^{\mathbb{P}}}$ désigne la norme euclidienne

$$\begin{aligned} E(\|Y_t - \sum_{i=0}^{n-1} A^i \eta_{t-i}\|^2_{\mathbb{R}^{\mathbb{P}}}) &= E(\|A^n Y_{t-n}\|^2_{\mathbb{R}^{\mathbb{P}}}) \\ &\leqslant E(\|A^n\|^2 \|Y_{t-n}\|^2_{\mathbb{R}^{\mathbb{P}}}) \\ &\leqslant pK\|A^n\|^2. \end{aligned}$$

Puisque les valeurs propres de A sont les racines de P_p alors

$$\rho(\lambda) < 1$$

Par le lemme 1.1 on obtient $\lim_{n\to+\infty} \|A^n\| = 0$, ce qui donne

$$Y_t \overset{L^2}{=} \sum_{i\geqslant 0} A^i \eta_{t-i}$$

Comme les η_t sont indépendantes alors l'égalité précédente est même P-p.s.

Par suite

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} (A^i)_{11} \varepsilon_{t-i}$$

Ce qui implique que X est strictement stationnaire.

Remarque 1.2 *Nous avons fait la preuve avec la norme euclidienne , comme toutes les normes dans $\mathbb{R}^p$, sont équivalentes le résultat de la proposition est maintenu.*

1.2 Généralités sur les mélanges de processus

Considérons un processus stochastique $(X_t, t \in T)$ où $T = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ξ).
On note $\mathcal{F}_a^b$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ la tribu engendrée par la famille de va $(X_t, a \leqslant t \leqslant b)$.
ie $\mathcal{F}_a^b$ est la plus petite tribu contenant les évènements de type :
$\{X_{t_1} \in E_1, \dots, X_{t_s} \in E_s\}$ avec $s \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_s \in T$ et E_j sont des boreliens de $\mathcal{B}_E$ (tribu borélienne sur E).
On note aussi $\mathcal{F}_a^b = \sigma(X_t, a \leqslant t \leqslant b)$.
Supposons que $E = \mathbb{R}$
Nous commençons par définir le coefficient de corrélation maximale :

Définition 1.7 *Le coefficient de corrélation maximale entre deux familles de variables aléatoires $X_1 = (X_1(t), t \in T)$, $X_2 = (X_2(t), t \in T)$ est défini par :*

$$\rho(X_1, X_2) = \sup E(\eta_1 \eta_2)$$

où le sup est pris sur toute les variables aléatoires η_1, η_2 qui sont mesurables par rapport aux tribus $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$ engendrées respectivement par X_1 et X_2 et tel que :
$E(\eta_1) = E(\eta_2) = 0$; $E(\eta_1^2) = E(\eta_2^2) = 1$.

On peut définir plusieurs types de dépendance entre les sous tribus $\mathcal{F}_{-\infty}^t$ et $\mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}$, $\tau > 0$.Cette dépendance est appelée aussi mélange.

Dans la littérature, les mélanges les plus utilisés sont les suivants :

Définition 1.8 *.Un processus stochastique $X = (X(t), t \in T)$ est dit complètement régulier (ou $\rho-$mélangeant) si :*

$$\rho(\tau) = \sup_{t \in T} \rho_t(\tau) \rightarrow_{\tau \rightarrow +\infty} 0$$

où $\rho_t(\tau) := \rho(X(s), s \leqslant t;\ X(s), s \geqslant t + \tau)$

Définition 1.9 *$X = (X(t), t \in T)$ est dit fortement mélangeant (ou $\alpha-$ mélangeant) si :*

$$\alpha(\tau) = \sup_{t \in T} \alpha_t(\tau) = \sup_{t \in T} \sup_{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^t, B \in \mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \rightarrow_{\tau \rightarrow +\infty} 0$$

Définition 1.10 *Le processus $X = (X(t), t \in T)$ est dit faiblement mélangeant (ou $\phi-$ mélangeant ou uniformément mélangeant) si :*

$$\phi(\tau) := \sup_{t \in T} \phi_t(\tau) = \sup_{t \in T} \sup_{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^t, B \in \mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}} |P(A/B) - P(A)| \rightarrow_{\tau \rightarrow +\infty} 0$$

Définition 1.11 *Le processus $X = (X(t), t \in T)$ est dit absolument régulier (ou $\beta-$ mélangeant) si :*

$$\beta(\tau) := \sup_{t \in T} \beta_t(\tau) := \sup_{t \in T} E(\sup_{A \in \mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}} |P(A/\mathcal{F}_{-\infty}^{t}) - P(A)|) \rightarrow_{\tau \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque 1.3 *(cf [11])*

Nous avons les inégalités suivantes entre que les coefficients de mélange : pour tout $\tau > 0$

1. $$2\alpha(\tau) \leqslant \beta(\tau) \leqslant \phi(\tau) \quad , \quad \alpha(\tau) \leqslant 1/4$$

2. *Dans le cas d'un processus réel nous avons :*

$$2\alpha(\tau) \leqslant \rho(\tau) \leqslant 2\sqrt{\phi(\tau)}$$

3. *Dans le cas d'un processus réel gaussien stationnaire on montre que*

$$\rho(\tau) \leqslant 2\pi\alpha(\tau)$$

Ainsi un processus gaussien réel stationnaire satisfait la condition de mélange fort si et seulement si il est complètement régulier.

1.3 Densité spectrale

Définition 1.12 *La fonction d'autocovariance d'un processus faiblement stationnaire $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ est donnée par :*

$$R(h) = cov(X_t, X_{t+h}) \qquad h, t \in \mathbb{Z}$$

La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$\rho(h) = \frac{R(h)}{R(0)} \qquad h \in \mathbb{Z}$$

Nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 1.5
1. *$R(0) = \sigma_X^2$.*
2. *pour tout $h \in \mathbb{Z}; R(h) = R(-h)$*
3. *La fonction $h \to R(h)$ est de type positif ie :* $\forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j R(t_i - t_j) \geqslant 0$
4. *$\rho(0) = 1$; $|\rho(h)| \leq 1$;*
5. *$\rho(h) = \rho(-h) \forall h \in \mathbb{Z}$.*
6. *La fonction d'autocorrélation est de type positif.*

Le lemme suivant est utile pour l'existence de la densité spectrale.
Lemme : (Kronecker) Si la suite $\{a_j\}_j$, de nombres réels est telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = A < +\infty$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} j a_j = 0$$

Théorème 1.1 *Soit ρ la fonction d'autocorrélation d'un processus faiblement stationnaire $(X(t), t \in \mathbb{Z})$.*
Si ρ est absolument sommable, alors il existe une fonction continue f telle que :

1. *$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(hx) dx = \rho(h)$*
2. *$f(x) \geqslant 0 \forall x$*
3. *f est une fonction paire*

Démonstration : On pose :

$$g(x)=\frac{1}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\rho(h)\cos(hx) \qquad -\pi\leq x\leq\pi$$

on remarque que g est paire.
Et puisque ρ est de type positif ,alors :

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\rho(m-q)\cos(mx)\cos(qx)\geqslant 0\text{et } \sum_{m=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\rho(m-q)\sin(mx)\sin(qx)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\rho(m-q)\cos((m-q)x)\geqslant 0$$

Posons m-q=h , on aura

$$\sum_{y=1}^{n}\sum_{h=-(n-y)}^{n-y}\rho(h)\cos(hx)\geqslant 0$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\sum_{y=1}^{n-|h|}\rho(h)\cos(hx)\geqslant 0 \quad &\Rightarrow \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}(n-|h|)\rho(h)\cos(hx)\geqslant 0\\ &\Rightarrow \sum_{|h|\leqslant(n-1)}\frac{(n-|h|)}{n}\rho(h)\cos(hx)\geqslant 0\end{aligned}$$

D'aprés le lemme de kronecker,on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\frac{|h|}{n}\rho(h)\cos(hx)=0$$

par suite :

$$\begin{aligned}0\leq\sum_{h=-\infty}^{\infty}\rho(h)\cos(hx) &= 2g(x)+\rho(0)-1\\ &= 2g(x)\end{aligned}$$

D'autre part ,on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\rho(h)\cos(hx)]dx=\pi$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{\pi} g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \rho(h)\cos(hx)$$

Et comme la fonction $x \to sin(x)$ est impaire alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \rho(h) exp(-ihx) \tag{1.3.1}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{+\infty} \rho(h)\cos hx]\cos kx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{+\infty}\rho(h)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(hx)\cos(kx)dx \end{aligned}$$

or

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(hx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq k \\ \int_{-\pi}^{\pi}(\cos hx)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2kx) + 1 dx = \pi & \text{si } h = k \end{cases}$$

d'où

$$I(k) = \rho(k)$$

Définition 1.13 *La fonction f définie si dessus par l'equation 1.3.1 est appelée la densité spectrale du processus* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$

Théorème 1.2 (Helson-Sarason) *(cf [11] p176) Un processus stationnaire* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est complètement régulier si et seulement si sa densité spectrale* $f(\lambda)$ *s'écrit comme suit :*

$$f(\lambda) = W(\lambda)|P(\exp(i\lambda)|^2$$

où P(z) est un polynôme à racines sur $|z| = 1$*,et* $W(\lambda)$ *la fonction qui admet la représentation pour un* $\varepsilon > 0$ *:*$W = \exp(r_\varepsilon + u_\varepsilon + \overline{v_\varepsilon})$ *avec* $\|u_\varepsilon\|_\infty + \|v_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$ *où* r_ε *est continue sur* $|z| = 1$ *et* $\overline{v_\varepsilon}$ *désigne la fonction conjuguée de* v_ε

1.4 Chaînes de Markov

Dans cette section, nous présentons quelques définitions sur les noyaux de transition de chaine de markov.

Définition 1.14 *1. Une application $Q(.,.)$ définie de $E \times \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ est un noyau de probabilité si :*

- *$x \to Q(x, F)$ est une application mesurable sur $(E, \mathcal{E})$ pour $F \in \mathcal{E}$*
- *$Q(x, .)$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ pour $x \in E$*

2. Soient Q,R deux noyaux de probabilité ,f une fonction mesurable et γ une mesure à signe. On définit QR, Qf, et γQ par :
ii) $QR(x, F) = \int Q(x, dy)R(y, F)$
ii) $Qf(x) = \int Q(x, dy)f(y)$
iv) $\gamma Q(F) = \int \gamma(dy)Q(y, F)$

Remarque :
QR est un noyau de probabilité , Qf est une application mesurable , et γQ et une mesure à signe.

Définition 1.15 (noyau de transition) *Une famille de noyaux de probabilité $(P_s^t)_{s \leq t \in T}$ est dite de transition si*

$$P_s^t = P_s^u P_u^t \text{ pour } s \leq u \leq t \in T ...(\text{équation de Chapman-Kolmogorov})$$

Définition 1.16 (Chaîne de markov) *Soit $X = (X_t, t \in T)$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, de probabilité de transition $(P_s^t)_{s \leq t \in T}$*

$$P_s^t(x, F) := P(X_t \in F / X_s = x)$$

pour tout F dans $\mathcal{E}$ et où $P_s^t(x, F)$ désigne la version régulière de la probabilité conditionnelle

X est un processus de Markov si

$$P(X_t \in F/\mathcal{F}_s) = P(X_t \in F/X_s) \quad \forall F \in \mathcal{E}\, \forall s \leqslant t$$

avec $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.

Remarque 1.4 –

- *Un processus de Markov est dit homogène si $P_s^t(x, F)$ne dépend que de t-s ie :*

  $P_s^t(x, F) = P(X_t \in F/X_s = x) = P(X_{t-s} \in F/X_0 = x)$
  Et dans ce cas, on peut écrire $P^h = P_t^{t+h}$

- *Si la chaine est à temps discret ,la puissance n éme du noyau de transition est définie par :* $P^n(x, F) = P(X_n \in F/X_0 = x)$
- *Une probabilité* π *est dite invariante si :* $\pi P = \pi$.
- *La chaîne de Markov* X *est un processus stationnaire i.e pour tout* $n \geqslant 1 (X_n, X_{n+1}, ...)$ *a la même loi que celle de* $(X_0, X_1, ...)$*,si et seulement si la loi initiale de* X *est une probabilité stationnaire.*

Chapitre 2

Mélange fort des processus linéaires

2.1 Théorème de Chanda

Dans cette première section, nous présentons les résultats de l'article [4].

L'auteur a montré qu'une classe de processus linéaires satisfaisant certaines conditions, vérifie la condition du mélange fort. Nous reprenons les preuves de l'article de Chanda K.C en remarquant que Ibragimov I.A. a rectifié par un contre exemple une étape de la démonstration du théorème 2.1 de Chanda (voir section 2.1.2) .

2.1.1 Introduction

Pour présenter les résultats de Chanda , nous considérons $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) avec $E|Z_1^\delta| < \infty$ pour un $\delta > 0$.
Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est défini par :

$$X_t = \sum_{n \geq 0} g_n Z_{t-n} \text{ p.s.}$$

Il suffit de considérer la convergence en loi de la série c'est à dire la $\lim_{n \to +\infty} \phi_{t,n}(u)$ existe pour tout $u \in \mathbb{R}$ et est continue en 0 , où

$$\phi_{t,n}(u) = E(\exp^{iu \sum_{j=0}^{n} g_j Z_{t-j}}).$$

Un simple exemple qui illustre cette situation est dans le cas où la fonction caractéristique de Z_t est de la forme $\phi_0(u) = \exp^{-c|u|^\alpha}$, ce qui donne

$$\phi_n(u) = \exp^{-c|u|^\alpha \sum_{j=0}^{n} |g_j|^\alpha} \to \phi(u) = \exp^{-c|u|^\alpha \sum_{j=0}^{+\infty} |g_j|^\alpha}$$

il suffit que $\sum_{j=0}^{\infty} |g_j|^\alpha < \infty$.

2.1.2 Résultat

Le résultat de Chanda est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.1 *(cf [4])*
Si la fonction caractéristique ϕ_0 de Z_t est Lebesgue intégrable et si $\sum_{n=0}^{\infty} n|g_n|^{\lambda} < \infty$ pour $\lambda = \frac{\delta}{1+\delta}$.
alors $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est fortement mélangeant dans le sens :

$$\forall A^{'} \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}, B^{'} \in \mathcal{F}_{k}^{+\infty} : |P(A^{'} \cap B^{'}) - P(A^{'})P(B^{'})| \leq M\psi(k)$$

où $\psi(k) = \sum_{j=k}^{\infty} j|g_j|^{\lambda}$ et M est une constante positive qui dépend uniquement de ϕ_0. .

Remarque 2.1 *Sans perte de généralité, on peut supposer*

$$\frac{1}{2\pi}\int |\phi_0(u)|du \leq 1$$

en effet : si ϕ_0 est Lebesgue intégrable avec $\frac{1}{2\pi}\int |\phi_0(u)|du = \alpha \in \mathbb{R}^{+}$, alors en prenant $Z_t^{*} = \beta Z_t$ les Z_t^{*} restent iid et on aura

$$\phi_0^{*}(u) = E(\exp^{iuZ_1^{*}}) = \phi_0(\beta u)$$

par suite

$$(2\pi^{-1})\int_R |\phi_0^{*}(u)|du = \frac{\alpha}{\beta} \leq 1$$

De plus $X_t = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\beta} g_n^{*} Z_{t-n}^{*}$, avec $g_n^{*} = \frac{1}{\beta} g_n$ qui vérifie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(|g_n|^{*})^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{|\beta|^{\lambda}}|g_n|^{\lambda} < \infty$$

Avant de démontrer le théorème , nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 *Soit*

$$W_t = \sum_{j=0}^{t-1} g_j Z_{t-j}, \quad t \geq 1$$

Posons $W = (W_k, ...W_{k+m-1})$, où $k \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$.
Si $\phi_0 \in L^1$ alors W_t admet une densité bornée , continue partout.
De même la f.d.r. de W admet une densité $f_{k,...,k+m-1}$ continue partout et bornée .

Démonstration : Soit ϕ_m la fonction caractéristique de W. La densité de W vérifie :

$$\begin{aligned}
|f_{k,...,k+m-1}(t_k, ..., t_{k+m-1})| &= (\frac{1}{2\pi})^m|\int_{\mathbb{R}^m} \phi_m(u) \exp -i < u, t > du_k...du_{k+m-1}| \\
&\leq (\frac{1}{2\pi})^m \int_{\mathbb{R}^m} |\phi_m(u)du|
\end{aligned}$$

,

Montrons que $\phi_m \in L^1$.
soit $u = (u_k, u_{k+1}, ..., u_{k+m-1}) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
|\phi_m(u)| &= E(\exp(i \sum_{t=k}^{k+m-1} u_t W_t)) \\
&= |E(\exp(i \sum_{t=k}^{k+m-1} u_t \sum_{j=1}^{t} g_{t-j} Z_j))| \\
&= |E(\exp(i \sum_{j=1}^{k+m-1} \sum_{t=k \vee j}^{k+m-1} u_t g_{t-j} Z_j))| \qquad par Fubini \\
&= |E(\exp(i \sum_{j=1}^{k+m-1} \sum_{t=k}^{k+m-1} u_t g_{t-j} Z_j))| \qquad car g_j = 0 \forall j < 0 \\
&= \prod_{j=1}^{k+m-1} |E(\exp(i(\sum_{t=k}^{k+m-1} u_t g_{t-j}) Z_j))| \\
&= \prod_{j=1}^{k+m-1} |\phi_0(\sum_{t=k}^{k+m-1} g_{t-j} u_t)| \\
&\leq |\prod_{j=k}^{k+m-1} \phi_0(s_j)|
\end{aligned}$$

avec $s_j = \sum_{t=k}^{k+m-1} u_t g_{t-j}$

Le majorant est intégrable car $\phi_0 \in L^1$ par hypothèse.Par suite $f_{k,...,k+m-1}(t_k, ..., t_{k+m-1})$ est bornée . Par le théorème de convergence dominé elle est continue.

■

Lemme 2.2 *Soit*

$$V_t = \sum_{j=t}^{\infty} g_j Z_{t-j}$$

alors :

$$E(|V_t^\delta|) \leq \begin{cases} \gamma \sum_{j=t}^{\infty} |g_j|^\delta & si\ \delta < 1 \\ \gamma (\sum_{j=t}^{\infty} |g_j|)^\delta & si\ \delta \geq 1 \end{cases}$$

où $\gamma = E(|Z_1^\delta|)$.

Démonstration
1er cas : Soit $\delta < 1$, alors

$$|V_t|^\delta = |\sum_{j=t}^{+\infty} g_j Z_{t-j}|^\delta \leq \sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^\delta |Z_{t-j}|^\delta$$

En utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$E(V_t|^\delta) \leq \gamma \sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^\delta$$

2eme cas : Si $\delta \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} E(|V_t|^\delta) = \|V_t\|_{L^\delta}^\delta &= \|\sum_{j=t}^{\infty} g_j Z_{t-j}\|_{L^\delta}^\delta \\ &\leq (\sum_{j=t}^{\infty} |g_j| \|Z_{t-j}\|_{L^\delta})^\delta \\ &\leq \gamma(\sum_{j=t}^{\infty} |g_j|)^\delta \end{aligned}$$

■

2.1.3 Démonstration du théorème de Chanda

Soient p, m et s des entiers quelconques dans $\mathbb{N}$.
Soit A un borélien de $\mathbb{R}^{p+1}$, $D = \bigcup_{j=1}^{s} D_j$ un pavé qui est réunion disjointe de s pavés de $\mathbb{R}^m$ avec $1 \leq j \leq s$

$$D_j = \{y = (y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+m-1}) \in \mathbb{R}^m / \alpha_{jt} < y_t < \beta_{jt}, k \leq t \leq k+m-1\}$$

Notons

$$X = (X_{-p}, ..., X_0) \quad Y = (X_k, ..., X_{k+m-1}) \quad y = (x_k, ..., x_{k+m-1})$$

et

$$W = (W_k, ...W_{k+m-1}) \quad V = (V_k, ...V_{k+m-1})$$

avec

$$W_t = \sum_{j=0}^{t-1} g_j Z_{t-j} \quad V_t = \sum_{j=t}^{+\infty} g_j Z_{t-j} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = W_t + V_t$, en particulier $Y = W + V$.
Soit

$$\pi_{1,2} = P(X \in A, Y \in D) \quad \pi_1 = P(X \in A) \quad \pi_2 = P(Y \in D)$$

On définit

$$B = \{v = (v_1, v_{k+1}, ..., v_{k+m-1}) \in \mathbb{R}^m / \quad |v_t| \leq \eta_t \quad k \leq t \leq k+m-1\}$$

On fixera les η_t ultérieurement. Nous avons

$$\pi_{1,2} = P(X \in A, V + W \in D, V \in B) + P(X \in A, V + W \in D, V \notin B) \qquad (2.1.1)$$

Sous les notations précédentes W est indépendant du couple (X, V)., donc

$$\begin{aligned} P(X \in A, V + W \in D, V \in B) &= E(\mathbf{1}_{X \in A}.\mathbf{1}_{V+W \in D}.\mathbf{1}_{V \in B}) \\ &= E(E(\mathbf{1}_{X \in A}.\mathbf{1}_{V+W \in D}.\mathbf{1}_{V \in B})/(X, V)) \\ &= E(\mathbf{1}_{X \in A}\mathbf{1}_{V \in B}E(\mathbf{1}_{V+W \in D}/(X, V)) \\ &= \int_{A \times B} P(W \in D - v)dF_{X,V}(x, v) \\ &= \int_{A \times B} h(v)dF_{X,V}(x, v) \end{aligned}$$

avec

$$h(v) = P(\bigcup_{j=1}^{s}\{\alpha_{j,t} - v_t < W_t < \beta_{j,t} - v_t, k \leq t \leq k+m-1\})$$

Les $(D_j)_{j=1}^s$ étant disjoints , $(D_j - v)_1^s$ le sont aussi avec $v = (v_k, ...v_{k+m-1})$. Ce qui implique que :

$$h(v) = \sum_{j=1}^{s} \int_{I_{j,k}} ... \int_{I_{j,k+m-1}} f_{k,...,k+m-1}(u_k, ..., u_{k+m-1})du_k...du_{k+m-1} \qquad (2.1.2)$$

où $I_{j,k} =]\alpha_{j,t} - v_t, \beta_{j,t} - v_t[, \quad k \leq t \leq k+m-1$ avec $|v_t| \leq \eta_t$.

Comme
◇ $f_{k,...,k+m-1}$ est continue
◇ $\alpha_{j,t} - v_t$ et $\beta_{j,t} - v_t$ sont continues en v_t
◇ B est un fermé ,borné de $\mathbb{R}^m$ donc compact
alors $h(v)$ atteint ses bornes dans B

alors

$$\exists\ \theta \in B \text{ tel que } ,h(\theta) = \min_{v \in B} h(v)$$

et

$$\exists\ \theta \in B \text{ tel que } ,h(\zeta) = \max_{v \in B} h(v)$$

D'aprés 2.1.1

$$\pi_{1,2} \leq h(\zeta)P(X \in A, V \in B) + P(V \in B^c) \leq h(\zeta)\pi_1 + P(V \in B^c)$$

et

$$\begin{aligned}
\pi_{1,2} &\geq h(\theta)P(X \in A, V \in B) \\
&\geq h(\theta)[P(X \in A) - P(X \in A, V \in B^c)] \\
&\geq h(\theta)P(X \in A) - P(V \in B^c) \quad \text{car} h(\theta) \leq 1 \\
&\geq h(\theta)\pi_1 - P(V \in B^c)
\end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$h(\theta)\pi_1 - P(V \in B^c) \leq \pi_{1,2} \leq h(\zeta)\pi_1 + P(V \in B^c)$$

nous avons aussi

$$P(V \in B^c) = P(\bigcup_{t=k}^{k+m-1} \{|V_t| > \eta_t\}) \leq \sum_{t=k}^{k+m-1} P(|V_t| > \eta_t) =: p(\eta)$$

Par conséquent

$$h(\theta)\pi_1 - p(\eta) \leq \pi_{1,2} \leq h(\zeta)\pi_1 + p(\eta) \tag{2.1.3}$$

On applique 2.1.3 à $A = \mathbb{R}^{p+1}$ et nous aurons $\pi_{1,2} = \pi_2$ et $\pi_1 = 1$.Par suite

$$h(\theta) - p(\eta) \leq \pi_2 \leq h(\zeta) + p(\eta) \tag{2.1.4}$$

Des inégalités 2.1.3 et 2.1.4 on a :

$$\begin{aligned}
\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2 &\leq h(\zeta)\pi_1 + p(\eta) + \pi_1(p(\eta) - h(\theta)) \\
&\leq \pi 1(h(\zeta) - h(\theta)) + p(\eta)(1 + \pi_1) \\
&\leq 2(h(\zeta) - h(\theta) + p(\eta))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2 &\geq h(\theta)\pi_1 - p(\eta) - \pi_1(p(\eta) + h(\zeta)) \\
&\geq \pi 1(h(\theta) - h(\zeta)) - p(\eta)(1 + \pi_1) \\
&\geq 2(h(\theta) - h(\zeta) - p(\eta)) \qquad car h(\theta) \leq h(\zeta)
\end{aligned}$$

D'où

$$|\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2| \leq 2(h(\zeta) - h(\theta) + p(\eta)) \tag{2.1.5}$$

D'autre part, puisque $f_{k,\ldots k+m-1}$ est continue et les bords de $I_{j,t}, 1 \leq t \leq k+m-1$ sont définis par des fonctions dérivables en v_t ,alors de 2.1.2 la dérivée $\frac{\partial h}{\partial v_t}$ existe et est continue pour tout $k \leq t \leq k+m-1$ et

$$\frac{\partial h}{\partial v_t}(v) = \sum_{j=1}^{s} \int_{I_{j,k}} ... \int_{I_{j,t-1}} \int_{I_{j,t+1}} ... \int_{I_{j,k+m-1}} f_{k,...k+m-1}(u_k, ..., \alpha_{jt} - v_t, ...u_{k+m-1}) d\widehat{u}$$

$$- \sum_{j=1}^{s} \int_{I_{j,k}} ... \int_{I_{j,t-1}} \int_{I_{j,t+1}} ... \int_{I_{j,k+m-1}} f_{k,...k+m-1}(u_k, ..., \beta_{jt} - v_t, ...u_{k+m-1}) d\widehat{u}$$

avec $\widehat{u} = (u_k, ..., u_{t-1}, u_{t+1}, ..., u_{k+m-1})$.

D'après Chanda on a : "$\frac{\partial h}{\partial v_t}(v) < M$" où M dépend uniquement de ϕ_0
Puisque $\theta = (\theta_k, ..., \theta_{k+m-1})$,$\zeta = (\zeta_k, ...\zeta_{k+m-1}) \in B$, il en découle que $|\zeta_t - \theta_t| \leq 2\eta_t$
Par le théorème des accroissements finis, on a

$$h(\zeta) - h(\theta) \leq 2M\eta_t \leq M_1 \sum_{t=k}^{k+m-1} \eta_t \tag{2.1.6}$$

Par l'inégalité de Markov ,on obtient

$$P(|V_t| > \eta_t) \leq E(|V_t|^\delta)\eta^{-\delta}$$

Ce qui implique

$$p(\eta) = \sum_{t=k}^{k+m-1} P(|V_t| > \eta_t) \leq \sum_{t=k}^{k+m-1} \gamma G_t \eta_t^{-\delta} \tag{2.1.7}$$

où

$$G_t = \begin{cases} \sum_{j=t}^{\infty} |g_j|^\delta & \text{si } \delta < 1 \\ (\sum_{j=t}^{\infty} |g_j|)^\delta & \text{si } \delta \geq 1 \end{cases}$$

(cf 2.2).
En combinant 2.1.5 ,2.1.6 et 2.1.7, on obtient :

$$\begin{aligned} |\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2| &\leq 2(h(\zeta) - h(\theta) + p(\eta)) \\ &\leq 2(M_1 \sum_{t=k}^{k+m-1} \eta_t + \gamma \sum_{t=k}^{k+m-1} G_t \eta_t^{-\delta}) \\ &\leq M_2 \sum_{t=k}^{k+m-1} (\eta_t + G_t \eta_t^{-\delta}) ...(*) \end{aligned}$$

avec $M_2 = \max(M_1, \gamma)$
En choisissant $\eta_t = (G_t)^{\frac{1}{1+\delta}}$, nous obtenons

$$|\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2| \leq 2M_2 \sum_{t=k}^{k+m-1} (G_t)^{\frac{1}{1+\delta}}$$

avec $\frac{\delta}{1+\delta} < 1$.Par suite

$$(\sum_{j=t}^{+\infty} g_j)^{\frac{\delta}{1+\delta}} \leq (\sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^{\frac{\delta}{1+\delta}})$$

et aussi $\frac{1}{1+\delta} < 1$ donne

$$(\sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^{\delta})^{\frac{1}{1+\delta}} \leq (\sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^{\frac{\delta}{1+\delta}})$$

Enfin pour tout $\delta > 0$

$$G_t^{\frac{1}{1+\delta}} \leq (\sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^{\lambda})$$

où $\lambda = \frac{\delta}{1+\delta}$
Par suite

$$\begin{aligned}
|\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2| &\leq 2M_2(\sum_{t=k}^{k+m-1} \sum_{j=t}^{+\infty} |g_j|^{\lambda}) \\
&\leq M_3(\sum_{j\geq k} j|g_j|^{\lambda})
\end{aligned}$$

avec $M_3 = 2M_2$
D'où

$$|\pi_{1,2} - \pi_1\pi_2| \leq M_3\psi(k) \tag{2.1.8}$$

Le résultat 2.1.8 est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+1}}$ donc pour tout $A^{'} \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}$ et pour tout D pavé..
Pour le cas général, introduisons la classe :

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{F}_k^{+\infty} \ \ / \ \ |P(A^{'} \cap B) - P(A^{'})P(B)| \leq M\psi(k) \text{ pour tout } A^{'}\text{dans } \mathcal{F}_{-\infty}^{0}\}$$

Montrons que $\mathcal{C}$ est une classe monotone .

1 Il est facile de voir que $\Omega \in \mathcal{C}$
2 Si $B \in \mathcal{C}$ et $C \in \mathcal{C}$, tel que $C \subset B$ alors $B \setminus C$ reste dans $\mathcal{C}$ .En effet

$$\begin{aligned}
|P(A^{'} \cap B \cap C^c) - P(A^{'})P(B \cap C^c)| &= |P(A^{'} \cap B) - P(A^{'} \cap C) - P(A^{'})P(B) \\
&+ P(A^{'})P(C)| \\
&\leq |P(A^{'} \cap B) - P(A^{'})P(B)| + |P(A^{'} \cap C) \\
&- P(A^{'})P(C)| \\
&\leq M\psi(k)
\end{aligned}$$

3 Si $(B_n)_n$ est une suite monotone (croissante par exemple) d'éléments de $\mathcal{C}$, alors $B = \lim_{n\to+\infty} B_n \in \mathcal{C}$.En effet

$$\begin{aligned} |P(A^{'} \cap \cup_{n\geq 0} B_n) - P(A^{'})P(\cup_{n\geq 0} B_n)| &= \lim_{n\to+\infty} |P(A^{'} \cap B_n) - P(A^{'})P(B_n)| \\ &\leq M\psi(k) \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{C}$ est une classe monotone.
Finalement , notons

$$\mathcal{A}_k^\infty = \{Y^{-1}(D)/ \;\; D \text{ est une réunion disjointe de pavés et } m \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{A}_k^\infty$ est une algèbre et d'après ce qui précède $\mathcal{A}_k^\infty \subset \mathcal{C}$, or $\sigma(\mathcal{A}_k^\infty) = \mathcal{F}_k^\infty$(cf. [3]). On en déduit par le théorème de la classe monotone que $\mathcal{F}_k^\infty = \mathcal{C}$.
Ainsi

$$\forall A^{'} \in \mathcal{F}_{-\infty}^0, B^{'} \in \mathcal{F}_k^\infty, \;\; |P(A^{'} \cap B^{'}) - P(A^{'})P(B^{'})| \leq M_3 \sum_{j\geq k} j|g_j|^\lambda \to_{k\to\infty} 0$$

Ce qui implique que le processus est fortement mélangeant.■

Par la suite Ibragimov a donné un exemple (voir ci dessous) de processus gaussien vérifiant les conditions du théorème de Chanda mais ne satisfaisant pas la propriété de mélange.Gorodetskii [9] en introduisant des hypothèses supplémentaires , a montré la propriété du mélange fort pour une grande classe de processus linéaires .

Remarque 2.2 *Mentionnons que si* $E(Z_1) = 0$ *et* $E(Z_1^2) = \sigma^2, (0 < \sigma < \infty)$ *alors on devra choisir* $\delta = 2, \lambda = 2/3$ *et supposer* $\sum_{j\geq 0} j|g_j|^{2/3} < \infty$
La condition précédente donne $\sum_{j\geq 0} |g_j| < \infty$ *ce qui assure l'existence de la densité spectrale f(x) du processus linéaire* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ *.En effet*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi K(0)} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} K(h) \exp^{-ih\lambda}$$

avec

$$\begin{aligned} K(h) &= cov(X_h, X_0) \\ &= \sum_i \sum_j g_i g_j cov(Z_{h-i}, Z_{-j}) \\ &= \sum_{j\geq 0} g_j g_{j+h} \sigma^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi K(0)} \sum_{j\geq 0} g_j (\sum_{h=-\infty}^{+\infty} g_{j+h} \exp^{-ih\lambda}) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi K(0)} \sum_{j\geq 0} g_j (\sum_{k\geq 0} g_k \exp^{-i(k-j)\lambda}) \quad k = j+h \; et \; g_j = 0 \forall j < 0 \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi K(0)} (\sum_{j\geq 0} g_j \exp^{ij\lambda})(\sum_{k\geq 0} g_k \exp^{-ik\lambda}) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi K(0)} |\sum_{j\geq 0} g_j \exp^{ij\lambda}|
\end{aligned}$$

Pour $-\pi \leq \lambda \leq \pi$

2.1.4 Contre exemple

L' exemple suivant d'un processus vérifiant les conditions du théorème de Chanda mais non fortement mélangeant est donné par I.A.Ibraginov [9] .

- Soit g_k le coefficient de z^k dans le développement en série entière de la fonction g définie par

  $$g(z) = (1-z)^\beta$$

  où β est non entier tel que $\beta > 5$.
  Nous avons

  $$g(z) = (1-z)^\beta = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} (\prod_{i=0}^{k-1} (\beta - i)) z^k \tag{2.1.9}$$

  où

  $$g_k = \frac{1}{k!} (\prod_{i=0}^{k-1} (\beta - i))$$

  notons que la série dans 2.1.9 converge pour $|z| < 1$.
  Lemme 2.3 *Nous avons*

  $$|g_k| = O(k^{1-\beta})$$

  Démonstration
  posons pour $k \geq 1$:

  $$u_k = k^{\beta-1} |g_k|$$

  on a alors :

  $$\begin{aligned}
  u_{k+1} - u_k &= (k+1)^{\beta-1} |g_{k+1}| - (k)^{\beta-1} |g_k| \\
  &= |g_k| [(k-\beta)(k+1)^{\beta-2} - k^{\beta-1}] \\
  &= |g_k| [\frac{k-\beta}{k+1} (1+\frac{1}{k})^{\beta-1} - 1] k^{\beta-1}
  \end{aligned}$$

Soit $f(x) = \frac{x-\beta}{x+1}(1+\frac{1}{x})^{\beta-1}$ pour $x \geq 1$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x+1-x+\beta}{(x+1)^2}(1+\frac{1}{x})^{\beta-1} + (\beta-1)\frac{x-\beta}{x+1}(1+\frac{1}{x})^{\beta-2}\frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{x})^{\beta-2}}{x+1}[(\beta+1)\frac{(1+\frac{1}{x})}{x+1} - \frac{(\beta-1)}{x^2}(x-\beta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow [(\beta+1)\frac{(1+\frac{1}{x})}{x+1} - \frac{(\beta-1)}{x^2}(x-\beta)] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(\beta+1) - (\beta-1)(x-\beta) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + \beta(\beta-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{\beta(1-\beta)}{2} < 0 \end{aligned}$$

Donc f est croissante pour $x \geq 1$
Oon a aussi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$
d'où

$$\forall k \geq 1 \quad u_{k+1} - u_k \leq 0$$

alors $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite à termes positifs décroissante donc convergente et par conséquent elle est bornée.
Ce qui assure l'existence d'un "c" tel que

$$\forall k \geq 1, |u_k| = k^{\beta-1}|g_k| \leq c$$

par suite

$$|g_k| \leq ck^{1-\beta} \Leftrightarrow |g_k| = O(k^{1-\beta})$$

■

.

- Soit $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ une suite de v.a. $N(0,\sigma^2)$
Vérifions que le processus $X = (X_t = \sum_{j\geq 0} g_j Z_{t-j})$ satisfait les conditions du théorème de Chanda :
1)$\phi_0(u) = \exp^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \in L^1$
2)$E(Z_1) = 0$ et $E(Z_1^2) = \sigma^2, (0 < \sigma < \infty)$ alors on devra choisir $\delta = 2, \lambda = 2/3$
Nous avons
$\sum_{k\geq 1} k|g_k|^\lambda \leq c^\lambda \sum_{k\geq 1} kk^{\lambda(1-\beta)} < \infty$ dès que $(\beta-1)\lambda - 1 > 1 \Leftrightarrow \lambda > \frac{2}{\beta-1}$
Or pour $\beta > 5$ nous avons $2/3 > 2/(\beta-1)$

Mais le processus $X = (X_t = \sum_{j\geq 0} g_j Z_{t-j})$ est gaussien donc les différents mélanges sont équivalents. Mais X n'est pas complètement régulier donc n'est pas fortement mélangeant : en effet sa densité spectrale ne vérifie pas les conditions du théorème de

Helson-Sarason. Pour $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ on a (voir la remarque 2.2) :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi K}|\sum_{j\geq 0} g_j \exp^{ij\lambda}|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi K}|g(\exp^{i\lambda})|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi K}|(1-\exp^{i\lambda})^{\beta}|^2 \end{aligned}$$

avec $K = \sigma^2 \sum_{j\geq 0} |g_j|^2$
Mais comme $\beta \notin \mathbb{N}, (1-z)^{\beta}$ n'est pas un polynôme .
. $\blacksquare$

2.2 Théorème de Gorodetskii

Dans cette deuxième section, nous présentons les résultats de l'article [9]. L'auteur a montré qu'une classe de processus linéaires satisfaisant des conditions (plus que celles de Chanda) , vérifie la condition du mélange fort.

2.2.1 Introduction

Soient $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.
f_i la densité de Z_i ; φ_i la fonction caractéristique de Z_i
$\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$une suite de réels telle que $g_0 \neq 0$.
On pose , $S_i(\delta) = \sum_{j=i}^{+\infty} |g_j|^{\delta}$

$$\begin{cases} \psi(k) = \sum_{i=k}^{+\infty} (S_i(\delta))^{\frac{1}{1+\delta}} & \text{si } \delta < 2 \\ \psi(k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \max\{(S_i(\delta))^{\frac{1}{1+\delta}}, \sqrt{S_i(2)|\log S_i(2)|}\} & \text{si } \delta \geqslant 2 \end{cases}$$

Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus réel défini par :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} g_j Z_{t-j} \tag{2.2.1}$$

2.2.2 Résultat

Le théorème suivant donne le mélange fort de $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$

Théorème 2.2 *Sous les notations précédentes supposons que :*

C1. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(x) - f_i(x+\alpha)|dx \leqslant c_1|\alpha|$

C2.

$$\begin{cases} E(|Z_i|^\delta) \leq C_2 \leq +\infty & \textit{pour un } \delta > 0 \\ E(Z_i) = 0 & \textit{si } \delta \geqslant 1 \textit{ et si } \delta \geqslant 2 \textit{ on suppose } var(Z_i) = 1 \end{cases}$$

C3. $g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} g_j z^j \neq 0$ *et finie* $\forall |z| \leq 1$

C4. $\psi(0) < \infty$.

Alors le processus X défini par 2.2.1 satisfait le mélange fort.

Notations

Soient, $A \subset \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^m$ deux boréliens.p, m quelconques
$X = (X_{-p+1}, ..., X_0)$,$Y = (X_1, ..., X_{k+m-1}) = (Y^{(1)}, Y^{(2)})$ où $Y^{(1)} = (X_1, ..., X_{k-1})$; $Y^{(2)} = (X_k, ..., X_{k+m-1})$
et aussi

$$W_t = \sum_{j=0}^{t-1} g_j Z_{t-j} \qquad V_t = \sum_{j=t}^{+\infty} g_j Z_{t-j}$$

Donc

$$X_t = W_t + V_t$$

$$V = (V^{(1)}, V^{(2)}) \text{où } V^{(1)} = (V_1, ..., V_{k-1}), V^{(2)} = (V_k, ..., V_{k+m-1})$$

$$W = (W^{(1)}, W^{(2)}) \text{où } W^{(1)} = (W_1, ..., W_{k-1}); W^{(2)} = (W_k, ..., W_{k+m-1})$$

$$Y^{(1)} = V^{(1)} + W^{(1)}, Y^{(2)} = V^{(2)} + W^{(2)}$$

et

$$B = \{v = (v_k, ..., v_{k+m-1}) \in \mathbb{R}^m / |v_t| \leq \eta_t; k \leq t \leq k + m - 1\}$$

Pour la démonstration nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.4 *Sous les notations précédentes, nous avons :*

$$\begin{aligned} |P(X &\in A, Y^{(2)} \in D) - P(X \in A)P(Y^{(2)} \in D)| \leq 4P(V^{(2)} \notin B) \\ &+ 2 \sup_{v^{(2)} \in B} |P(W^{(2)} \in D - v^{(2)}) - P(W^{(2)} \in D)| \end{aligned}$$

Démonstration
Posons

$$\begin{aligned} I &= |P(X \in A, Y^{(2)} \in D) - P(X \in A)P(Y^{(2)} \in D)| \\ &= |P(X \in A, V^{(2)} + W^{(2)} \in D) - P(X \in A)P(V^{(2)} + W^{(2)} \in D)| \end{aligned}$$

Par définition , on a $(X, V^{(2)})$ et $W^{(2)}$ sont indépendants. Ce qui donne :

$$I = |E(\mathbf{1}_{(X \in A)} g(V^{(2)})) - P(X \in A) \int_{\mathbb{R}^m} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v)|$$

avec $g(v) = P(W^{(2)} \in D - v)$
Par suite

$$\begin{aligned} I &= |\int_{A \times \mathbb{R}^m} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) - P(X \in A) \int_{\mathbb{R}^m} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v)| \\ &= |\int_{A \times B} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) + \int_{A \times B^c} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) \\ &- P(X \in A) \int_{B} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v) - P(X \in A) \int_{B^c} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v)| \\ &= |\int_{A \times B} (P(W^{(2)} \in D - v) - P(W^{(2)} \in D)) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) \\ &+ \int_{A \times B^c} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) - P(X \in A) \int_{B^c} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v) \\ &+ P(W^{(2)} \in D) P(X \in A, V^{(2)} \in B) - P(X \in A) \int_{B} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v)| \\ &\leqslant I_1 + I_2 \end{aligned}$$

où

$$I_2 = |P(W^{(2)} \in D) P(X \in A, V^{(2)} \in B) - P(X \in A) \int_{B} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v)|$$

et

$$\begin{aligned} I_1 &= |\int_{A \times B} (P(W^{(2)} \in D - v) - P(W^{(2)} \in D)) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) \\ &+ \int_{A \times B^c} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{(X,V^{(2)})}(x,v) - P(X \in A) \int_{B^c} P(W^{(2)} \in D - v) dF_{V^{(2)}}(v)| \end{aligned}$$

En écrivant

$$P(X \in A, V^{(2)} \in B) = P(X \in A) - P(X \in A, V^{(2)} \in B^c)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= |P(W^{(2)} \in D)P(X \in A) - P(X \in A, V^{(2)} \in B^c)P(W^{(2)} \in D) \\
&- P(X \in A)\int_B P(W^{(2)} \in D - v)dF_{V^{(2)}}(v)| \\
&= P(X \in A)|[\int_B (P(W^{(2)} \in D) - P(W^{(2)} \in D - v))dF_{V^{(2)}}(v)] \\
&+ P(X \in A)P(V^{(2)} \in B^c)P(W^{(2)} \in D) - P(X \in A, V^{(2)} \in B^c)P(W^{(2)} \in D)|
\end{aligned}$$

on a

$$I_1 \leq 2P(V^{(2)} \notin B) + \sup_{v^{(2)} \in B} |P(W^{(2)} \in D - v^{(2)}) - P(W^{(2)} \in D)|$$

et

$$I_2 \leq 2P(V^{(2)} \notin B) + \sup_{v^{(2)} \in B} |P(W^{(2)} \in D - v^{(2)}) - P(W^{(2)} \in D)|$$

d'où le résultat.

■

Lemme 2.5 *Soient* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *deux suite de nombres réels quelconques. Pour tout n dans* $\mathbb{N}$ *, nous avons la relation suivante :*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + \alpha_i) - \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}(\prod_{j<i} a_j)\alpha_i(\prod_{j>i}(a_j + \alpha_j))$$

Démonstration

Faisons un raisonnement par récurrence :
pour n=1 , la relation est vérifiée puisque, $a_1 + \alpha_1 - a_1 = \alpha_1$
supposons la relation vraie à l'ordre n,et démontrons la à l'ordre n+1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(\prod_{j<i} a_j)\alpha_i(\prod_{j>i}(a_j+\alpha_j)) &= \sum_{i=1}^{n}(\prod_{j<i} a_j)\alpha_i(\prod_{j>i}^{n}(a_j+\alpha_j))(a_{n+1}+\alpha_{n+1}) + \prod_{j=1}^{n} a_j\alpha_{n+1} \\
&= [\prod_{i=1}^{n}(a_i+\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n} a_i](a_{n+1}+\alpha_{n+1}) + \prod_{j=1}^{n} a_j\alpha_{n+1} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1}(a_i+\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n+1} a_i - \alpha_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i + \alpha_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i \\
&= \prod_{i=1}^{n+1}(a_i+\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n+1} a_i
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.6 *Soit $G=(g_{ij})_{1\le i,j\le n+1}$ une matrice carrée de dimension n+1 telle que :*

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & g_{n-1} & \dots & g_0 \end{pmatrix} \quad \text{Alors } G^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

avec $g_0 \neq 0$ et a_i est le coefficient de z^i dans développement en série entière de $(g(z))^{-1}$ avec
$g(z)=\sum_{j=0}^{+\infty} g_j z^j \neq 0$ et finie pour tout z tel que $|z|\le 1$

Démonstration

G^{-1} existe puisque $g_0 \neq 0$

Comme G est triangulaire inférieure alors $G^{-1}=(a_{ij})_{1\le i,j\le n+1}$ l'est aussi et peut s'écrire comme suit :

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} (g_0)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & (g_0)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \dots & (g_0)^{-1} \end{pmatrix}$$

Il s'agit de montrer que :

$$\begin{cases} a_{s+1\,s} = a_{v+1\,v} = a_1 \forall s, v; 1 \leq s, v \leq n \\ a_{s+2\,s} = a_{v+2\,v} = a_2 \forall s, v; 1 \leq s, v \leq n-1 \\ \qquad \vdots \\ a_{n\,1} = a_{n+1\,2} = a_{n-1} \\ a_{n+1\,1} = a_n \end{cases}$$

On a $GG^{-1} = I$ (matrice identité) . Donc $I_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n+1} g_{i\,k} a_{k\,j}$
or

$$\begin{cases} g_{i\,k} = \begin{cases} g_{i-k} & \text{si } i-k \geq 0 \\ 0 & \text{si } i-k < 0 \end{cases} \\ a_{k\ j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < j \\ a_{k,j} & \text{si} k \geq j \end{cases} \end{cases}$$

avec :

$$I_{i\,j} = \begin{cases} 1 \text{si i=j} \\ 0 \text{sinon} \end{cases}$$

Il suffit d'étudier le cas où $i > j$. On a :
$I_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n+1} g_{i-k} a_{k\ j} = \sum_{k=j}^{n+1} g_{i-k} a_{k\,j} = \sum_{k=j}^{i} g_{i-k} a_{k\,j}$
d'où :$\sum_{k=j}^{i} g_{i-k} a_{k\,j} = 0 \forall i > j$
Par suite :

$$\begin{cases} a_{i\,i} = (g_0)^{-1} & \forall i \\ \sum_{k=s}^{s+1} g_{s+1-k} a_{k\,s} = 0 \forall s \leq n & \text{pour j=s ,i=s+1} \\ \sum_{k=s}^{s+2} g_{s+2-k} a_{k\,s} = 0 \forall s \leq n-1 & \text{pour j=s ,i=s+2} \\ \qquad \vdots \\ \sum_{k=s}^{s+n} g_{s+n-k} a_{k\,s} = 0 \forall s \leq n-n+1 = 1 & \text{pour j=s ,i=s+n} \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a_{i\,i} = a_0 = (g_0)^{-1} & \forall i \\ g_1 (g_0)^{-1} + g_0 a_{s+1\,s} = 0 & \text{d'où}\, a_{s+1\,s} = a_1 \forall s \leq n \\ g_2 (g_0)^{-1} + g_1 a_1 + g_0 a_{s+2,s} = 0 & \text{d'où}\, a_{s+2,s} = a_2 \forall s \leq n-1 \\ \qquad \vdots \\ g_n (g_0)^{-1} + g_{n-1} a_1 + g_{n-2} a_2 + ... + g_0 a_{n+1,1} = 0 & \text{d'où}\, a_{n+1,1} = a_n \end{cases}$$

D'une part, les a_i vérifient le système suivant : pour tout n

$$\begin{cases} a_0 = (g_0)^{-1} \\ g_1 a_0 + g_0 a_1 = 0 \\ g_2 a_0 + g_1 a_1 + g_0 a_2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_n a_0 + g_{n-1} a_1 + g_{n-2} a_2 + ... + g_0 a_n = 0 \end{cases}$$

D'autre part , puisque la fonction g est non nulle et développable en série entière dans le disque fermé D(0,1) alors son inverse est développable en série entière : il existe $(b_i, i \in \mathbb{N})$ tels que
$(g(z))^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$

On a

$$\begin{aligned} 1 &= g(z)(g(z))^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} b_i z^i \sum_{j=0}^{+\infty} g_j z^j \\ &= \sum_i \sum_j b_i g_j z^{i+j} \\ &= \sum_{j\geq 0} \sum_{k=j}^{+\infty} b_{k-j} g_j z^k \\ &= \sum_{k\geq 0} (\sum_{j=0}^{k} b_{k-j} g_j) z^k \end{aligned}$$

D'où les b_i vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} b_0 g_0 = 1 \\ g_1 b_0 + g_0 b_1 = 0 \\ g_2 b_0 + g_1 b_1 + g_0 b_2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_n b_0 + g_{n-1} b_1 + g_{n-2} b_2 + ... + g_0 b_n = 0 \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

On remarque que c'est aussi le système vérifié par les (a_i). Et comme l'operateur $T : l^1 \to l^1$ défini par $T(x)(k) = \sum_{j=0}^{k} x_{k-j} g_j$ est injectif alors on a $a_i = b_i$ pour tout i.

2.2.3 Démonstration du théorème de Gorodetskii

Pour la démonstration, on introduit un nouvel ensemble B' défini par.

$$B' = \{v \in \mathbb{R}^{k+m-1}, v_i = 0 \;\; si \;\; i < k, v^{(2)} \in B \;\; avec \;\; v^{(2)} = (v_k, ..., v_{k+m-1})\}$$

On pose

$$Q = \sup_{v^{(2)} \in B} |P(W^{(2)} \in D - v^{(2)}) - P(W^{(2)} \in D)|$$

On a

$$\begin{aligned}
Q &= \sup_{v^{(2)} \in B} |\int_{D-v^{(2)}} f_{W^{(2)}}(w^{(2)}) dw^{(2)} - \int_D f_{W^{(2)}}(w^{(2)}) dw^{(2)}| \\
&= \sup_{v^{(2)} \in B} |\int_D f_{W^{(2)}}(x - v^{(2)}) dx - \int_D f_{W^{(2)}}(w^{(2)}) dw^{(2)}| \quad (x = w^{(2)} + v^{(2)}) \\
&= \sup_{v \in B} |\int_D [f_{W^{(2)}}(w^{(2)} - v^{(2)}) - f_{W^{(2)}}(w^{(2)})] dw^{(2)}| \\
&= \sup_{v^{(2)} \in B} |\int_{\mathbb{R}^{k-1} \times D} [f_{W^{(1)},W^{(2)}}(w^{(1)}, w^{(2)} - v^{(2)}) - f_{W^{(1)},W^{(2)}}(w^{(1)}, w^{(2)})] dw^{(1)} dw^{(2)}| \\
&= \sup_{v \in B'} |\int_{\mathbb{R}^{k-1} \times D} [f_W(w - v) - f_W(w)] dw| \\
&\leq \sup_{v \in B'} \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} |f_W(w - v) - f_W(w)| dw
\end{aligned}$$

On pose

$$I(v) = \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} |f_W(w + v) - f_W(w)| dw$$

qui peut s'écrire comme :

$$I(v) = \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\frac{1}{2\pi})^{k+m-1} | \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\exp^{-i<u,v+w>} - \exp^{-i<u,w>}) \varphi(u) du | dw$$

avec $\varphi(u)$ la fonction caractéristique de W

Donc

$$\varphi(u) = E(\exp^{i<u,W>}) = E(\exp^{i<u,GZ>})$$

où $Z = (Z_1 ... Z_{k+m-1})$ et G est la matrice définie dans le lemme 2.6,
Par suite :

$$\varphi(u) = \varphi_Z(G^t u)$$

On pose $z = G^t u$ et $A = G^t$ on a alors

$$\begin{aligned}
I(v) &= \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\frac{1}{g_0 2\pi})^{k+m-1} | \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\exp^{-i<A^{-1}z, v+w>} - \exp^{-i<A^{-1}z,w>}) \varphi_Z(z) dz | dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\frac{1}{g_0 2\pi})^{k+m-1} | \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\exp^{-i<z, G^{-1}v + G^{-1}w>} - \exp^{-i<z,G^{-1}w>}) \prod_{j=1}^{k+m-1} \varphi_{Z_j}(z_j) dz_j | dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} (\frac{1}{g_0})^{k+m-1} | \prod_{j=1}^{k+m-1} f_{Z_j}((G^{-1}w + G^{-1}v)_j) - \prod_{j=1}^{k+m-1} f_{Z_j}((G^{-1}w)_j) | dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} | \prod_{j=1}^{k+m-1} f_{Z_j}((w^* + v^*)_j) - \prod_{j=1}^{k+m-1} f_{Z_j}((w^*)_j) | dw^*
\end{aligned}$$

avec $w^* = G^{-1}w$ et $v^* = G^{-1}v$
On pose $a_j = f_{Z_j}((w^*)_j)$ et $\alpha_j = f_{Z_j}((w^*)_j + (v^*)_j) - f_{Z_j}((w^*)_j)$
puis on applique le lemme 2.5.
On obtient :

$$\begin{aligned}
I(v) &= \int_{\mathbb{R}^{k+m-1}} | \sum_{i=1}^{k+m-1} (\prod_{j<i} f_{Z_j}((w^*)_j) \alpha_i (\prod_{j>i} (f_{Z_j}((w^*)_j + \alpha_j)) dw_1^* ... dw_{k+m-1}^* | \\
&\leq \sum_{i=1}^{k+m-1} \int_R |\alpha_i| \underbrace{\int \prod_{j<i} f_{Z_j}(w^*)_j dw_1^* ... dw_{i-1}^*}_{=1} \underbrace{\int \prod_{j>i} f_{Z_j}(w^* + v^*)_j dw_{i+1}^* ... dw_{k+m-1}^*}_{=1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k+m-1} \int_R | f_{Z_i}((w^*)_i + (v^*)_i) - f_{Z_i}((w^*)_i) |
\end{aligned}$$

En appliquant la condition **C1** , on obtient :

$$I(v) \leq C_1 \sum_{i=1}^{k+m-1} |v_i^*|$$

Donc

$$\sup_{v \in B'} I(v) \leq \sup_{v \in B'} \sum_{i=1}^{k+m-1} |(G^{-1}v)_i|$$

Or pour v dans $B^{'}$, nous avons

$$(G^{-1}v)_i = \begin{cases} \sum_{j=k}^{i} a_{i-j} v_j & \text{si } i \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite, en utilisant Fubini on aura :

$$\begin{aligned}\sup_{v\in B'} I(v) &\leq C_1 \sup_{v\in B'} \sum_{i=k}^{k+m-1} \sum_{j=k}^{i} |a_{i-j}||v_j| \\ &\leq C_1 \sum_{i=k}^{+\infty} |\eta_i| \sum_{r=0}^{+\infty} |a_r|\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{g(z)} = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r z^r$ (développable en série entière pour tout z dans le disque unité fermé) alors : $\sum_{r=0}^{+\infty} |a_r| < \infty$
Reste à trouver une suite (η_j) absolument sommable pour que le deuxième facteur du majorant tende vers 0 quand k$\to \infty$.

D'autre part

$$\begin{aligned}P(V^{(2)} \notin B) &= P(\exists k \leq j \leq k+m-1 \ \text{ tel que } |\ V_j\ | \geq \eta_j) \\ &\leq \sum_{j=k}^{k+m-1} P(|\sum_{i=j}^{+\infty} g_i Z_{j-i}| \geq \eta_j) \quad ...*\end{aligned}$$

Reste à majorer cette quantité par un terme qui tend vers 0.

Pour cela, nous étudions 3 cas :
1er cas : $\delta < 1$
Par l'inégalité de Markov et **C2** du théorème ,on a :

$$\begin{aligned}P(V^{(2)} \notin B) &\leq \sum_{j=k}^{k+m-1} \frac{E(|\sum_{i=j}^{+\infty} g_i Z_{j-i}|^{\delta})}{\eta_j^{\delta}} \quad ...** \\ &\leq C_2 \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{S_j(\delta)}{\eta_j^{\delta}}\end{aligned}$$

En choisissant $\eta_j = S_j(\delta)^{\frac{1}{1+\delta}}$ et puisque $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(\delta)^{\frac{1}{1+\delta}}$est finie par **C4,** alors des deux lemmes précèdents on déduit

$$|P(X \in A, Y^{(2)} \in D) - P(X \in A)P(Y^{(2)} \in D)| \to_{k\to\infty} 0$$

pour tout A, D boréliens et pour tout p, m entiers .

Par suite le coefficient de mélange fort vérifie

$$\alpha(k) \to_{k\to\infty} 0$$

Pour les deux cas : $1 \leq \delta \leq 2$ et $\delta > 2$, nous avons besoin des inégalités fondamentales de Von Bahr-Essen et de Fuck-Nagaev

Inégalité de Von Bahr-Essen[13]
Soient $1 \leq r \leq 2$ et $(Y_i, i \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées tels que $E|Y_i|^r < \infty$ alors :

$$\forall N; \qquad E|\sum_{i=1}^{N} Y_i|^r \leq 2 \sum_{i=1}^{N} E|Y_i|^r$$

Inégalité de Fuck-Nagaev[5]
Soient $p \geq 2$ et $(Y_i, i \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées de carré-intégrables alors pout tout $t > 0$ et $n > 0$ nous avons :

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq t) \leq \sum_{i=1}^{n} P(Y_i \geq \eta t) + \eta t^{-p} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^p \mathbf{1}_{\{0 \leq Y_i \leq \eta t\}}) + \exp^{-\frac{t^2}{c_p^* d_n}}$$

où $d_n = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2), \eta = \frac{p}{p+2}$ et c_p^* une constante qui dépend de p.

2 ème cas : $1 \leq \delta \leq 2$
On reprend l'inégalité ** : $P(V^{(2)} \notin B) \leq \sum_{j=k}^{k+m-1} \frac{E(\lim_{n\to\infty} |\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i}|^{\delta})}{\eta_j^{\delta}}$
Puisque

$$(|\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i}|^{\delta}) \leq (\sum_{i=j}^{+\infty} |g_i Z_{j-i}|)^{\delta} P \ .p.s.$$

et

$$\begin{aligned} E((\sum_{i=j}^{+\infty} |g_i Z_{j-i}|)^{\delta}) &= \|(\sum_{i=j}^{+\infty} |g_i Z_{j-i}|)\|_{\delta}^{\delta} \\ &\leq C_2(\sum_{i=j}^{+\infty} |g_i|)^{\delta} < \infty \end{aligned}$$

Alors ,en utilisant le théorème de convergence dominée et l'inégalité de Von Bahr-Essen,on obtient :

$$P(V^{(2)} \notin B) \leq 2C_2 \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{S_j(\delta)}{\eta_j^{\delta}}$$

Du fait que nous ayons obtenu la même majoration du **1er cas,** le même raisonnement est applicable et ainsi le processus est fortement mélangeant.

3 ème cas : $\delta > 2$.

On reprend l'inégalité *

$$P(V^{(2)} \notin B) \leq \sum_{j=k}^{k+m-1} P(|\sum_{i=j}^{+\infty} g_i Z_{j-i}| \geq \eta_j)$$

On a

$$\begin{aligned} P(|\sum_{i=j}^{+\infty} g_i Z_{j-i}| \geq \eta_j) &= P(\sum_{i=j}^{+\infty} g_i Z_{j-i} \geq \eta_j) + P(-\sum_{i=j}^{+\infty} g_i Z_{j-i} \geq \eta_j) \\ &= \lim_{n\to\infty}[P(\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i} \geq \eta_j) + P(-\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i} \geq \eta_j)] \end{aligned}$$

car $\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i}$ converge en loi .
En appliquant l'inégalité de Fuck -Nagaev, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i} \geq \eta_j) &\leq \sum_{i=j}^{n} P(g_i Z_{j-i} \geq \eta_j \eta) + (\eta_j \eta)^{-\delta} \sum_{i=j}^{n} E((g_i Z_{j-i})^{\delta} \mathbf{1}_{\{0 \leq g_i Z_{j-i} \leq \eta_j \eta\}}) \\ &+ \exp^{\frac{-\eta_j^2}{c_\delta^* d_n}} \end{aligned}$$

avec $d_n = \sum_{i=j}^{n} g_i^2$,$\eta = \frac{\delta}{\delta+2}$ et $c_\delta^* = \frac{\exp^{\delta}(\delta+2)^2}{2}$
En utilisant l'inégalité de Markov, et en majorant la fonction indicatrice par 1, on obtient :

$$P(\sum_{i=j}^{n} g_i Z_{j-i} \geq \eta_j) \leq 2C_2(\eta_j \eta)^{-\delta} \sum_{i=j}^{n} (g_i^{\delta}) + \exp^{\frac{-\eta_j^2}{c_\delta^* d_n}}$$

Et par suite :

$$P(V^{(2)} \notin B) \leq C \sum_{j=k}^{k+m-1} [(\eta_j \eta)^{-\delta} S_j(\delta) + \exp^{\frac{-\eta_j^2}{c_\delta^* S_j(2)}}]$$

où C est une constante positive.

En choisissant $\eta_j = \sqrt{c_\delta^*} \max\{(S_j(\delta))^{\frac{1}{1+\delta}}, \sqrt{S_j(2)|\log S_j(2)|}\}$ on obtient,

$$P(V^{(2)} \notin B) \leq C \sum_{j=k}^{k+m-1} [\min(\frac{1}{(S_j(\delta))^{\frac{\delta}{1+\delta}}}, \frac{1}{\sqrt{S_j(2)|\log S_j(2)|}^{\delta}}) S_j(\delta) + \exp^{-c_j|\log(S_j(2))|}]$$

avec

$$c_j = \frac{\max\{(S_j(\delta))^{\frac{2}{1+\delta}}, S_j(2)|\log S_j(2)|\}}{S_j(2)|\log S_j(2)|} \geq 1, \forall j$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
P(V^{(2)} \quad \notin \quad B) &\leq C \sum_{j=k}^{k+m-1} [S_j(\delta)^{\frac{1}{1+\delta}} + \exp^{-c_j|\log(S_j(2))|}] \\
&\leq \quad C \sum_{j=k}^{k+m-1} [S_j(\delta)^{\frac{1}{1+\delta}} + S_j(2)]
\end{aligned}
$$

Par **C4** et **C3** , on a :
$\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{S_j(2)|\log S_j(2)|} < \infty$ et que $S_j(2) \rightarrow_{j\rightarrow\infty} 0$
Ce qui implique qu'à partir d'un certain rang m :

$$
\sum_{j>m}^{\infty} S_j(2) < \sum_{j>m}^{\infty} S_j(2)|\log S_j(2)| < \infty
$$

Donc

$$
P(V^{(2)} \notin B) \rightarrow_{k,m\rightarrow\infty} 0
$$

De plus par **C4** , $\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j < \infty$. Alors par le Lemme 2.4 , pour tout A ,D boréliens et pour tout p, m entiers,on a :

$$
|P(X \in A, Y^{(2)} \in D) - P(X \in A)P(Y^{(2)} \in D)| \rightarrow_{k\rightarrow\infty} 0
$$

Par suite le coefficient de mélange fort vérifie

$$
\alpha(k) \rightarrow_{k\rightarrow\infty} 0
$$

■

Chapitre 3

Mélange d'une chaîne de Harris et d'un processus autorégressif

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les résultats de l'article de J.B.Athreya et S.G.Pantula [2] . Les auteurs établissent une condition nécessaire pour qu'une chaine récurrente au sens de Harris vérifie le critère du mélange fort. Ils donnent aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus autorégressif soit uniformément mélangeant.

On va définir la notion de chaîne récurrente au sens de Harris.

Définition 3.1 *Une chaîne de Markov (Y_n) est dite récurrente au sens de Harris s'il existe une mesure ψ non triviale et σ -finie définie sur $(E, \mathcal{E})$ telle que :*

$$\psi(A) > 0 \Rightarrow P_x(Y_n \in A, pour\ un\ certain\ n \geq 1) = 1 \qquad (3.1.1)$$

pour tout x ,où $P_x(.) = P(./Y_0 = x)$

Nous présentons les preuves des deux théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 3.1 *Soit (Y_n) une chaîne de markov récurrente au sens de Harris à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, de noyau de transition P(.,.).*
Supposons que (Y_n) admet $\pi(.)$ comme loi stationnaire alors le processus (Y_n) est fortement mélangeant.

Théorème 3.2 *Soit (Y_n) un processus AR(1) défini par :*

$$Y_n = \rho Y_{n-1} + e_n \quad n = 1, 2, ..$$

où $|\rho| < 1$ et (e_n) une suite de variables aléatoires iid ;indépendantes de Y_0.
Supposons que :

* $E[(\log|e_1|)^+] < \infty$
* *Pour un certain* $n_0 \geq 1, U_{n_0} = \sum_{j=1}^{n_0} \rho^j e_j$ *a une composante absolument continue non triviale.*

Alors,pour toute loi initiale de Y_0 *concentrée sur un ensemble borné, le processus* (Y_n) *est uniformément mélangeant ssi il existe une constante finie "c" tel que* $|e_1| \leq c$

3.2 Mélange fort des chaînes de Harris.

On établira dans ce paragraphe la démonstration du théorème 3.1 .
Le lemme suivant est fondamentale pour celle ci

Lemme 3.1 *(cf [1]p496) Soit* (Y_n) *une chaîne ,récurrente au sens de Harris,* $\pi(.)$ *sa loi invariante alors il existe un entier " d" tel que*
$S = \bigcup_{i=1}^{d} C_i$, *avec* C_i *non vides et disjoints et pour tout* $y \in C_i$

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_y(Y_{nd} \in .) - \pi_i(.)\| = 0 \tag{3.2.1}$$

où $\|\mu - \nu\|$ *désigne la norme en variation de la mesure signée* $\mu - \nu$ *et*
$\pi_i(.) = (\pi(C_i))^{-1}\pi(C_i \cap .)$

Dans ce qui suit on va montrer que la condition 3.2.1 implique que (Y_n) est fortement mélangeant. Ainsi , toute chaîne de Markov récurrente au sens de Harris ayant une mesure invariante finie , satisfait la condition du mélange fort ,qui est exactement le théorème 3.1

Théorème A

Soit (Y_n) une C.M homogène muni d'un noyau de transition P(.,.) à valeurs dans $(S, \mathcal{S})$. On suppose qu'il existe une proba $\pi(.)$ sur $(S, \mathcal{S})$ et un entier d tel que pour tout y dans S ;

$$\|P_y(Y_{nd} \in .) - \pi(.)\| \to_{n\to\infty} 0 \tag{3.2.2}$$

Alors (Y_n) est un processus fortement mélangeant pour toute loi initiale Λ de Y_0

Démonstration du théorème A

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité que d=1 ,puisque si le processus $(Y_{nd})_n$ avec $d \in \mathbb{N}$ satisfait la condition du mélange fort pour toute loi initiale dP_Λ de Y_0 alors $(Y_n)_n$ est fortement mélangeant
Soit $E \in \mathcal{F}_0^n, F \in \mathcal{F}_{n+m}^{+\infty}$on a

$$P(F/\mathcal{F}_0^{n+m}) = P(F/Y_{n+m}) = g(Y_{n+m})$$

car (Y_n) est une C.M. où $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction Borélienne.

Comme $\mathcal{F}_0^n \subset \mathcal{F}_0^{n+m}$ alors

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= E(\mathbf{1}_E E(\mathbf{1}_F/\mathcal{F}_0^{n+m})) \\ &= E(\mathbf{1}_E g(Y_{n+m})) \\ &= E(E(\mathbf{1}_E g(Y_{n+m})/Y_{n+1})) \end{aligned}$$

Or pour $m \geq 1$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_E g(Y_{n+m})/Y_{n+1})) &= E(E(\mathbf{1}_E g(Y_{n+m})/Y_{n+1}))/\mathcal{F}_0^{n+1}) \\ &= E(\mathbf{1}_E E(g(Y_{n+m})/\mathcal{F}_0^{n+1})/Y_{n+1}) \\ &= E(\mathbf{1}_E E(g(Y_{n+m})/Y_{n+1})/Y_{n+1}) \\ &= E(\mathbf{1}_E/Y_{n+1})E(g(Y_{n+m})/Y_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc

$$P(E \cap F) = E(E(\mathbf{1}_E/Y_{n+1})E(g(Y_{n+m})/Y_{n+1}))$$

Par définition de l'espérence conditionnelle il existe une fonction Borélienne h , $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que :

$$E(\mathbf{1}_E/Y_{n+1}) = h(Y_{n+1}) \quad \text{P-p.s}$$

. Comme (Y_n) est homogène donc :

$$E(g(Y_{n+m})/Y_{n+1} = x) = E(g(Y_{m-1})/Y_0 = x) := (P^{m-1}g)(x)$$

D'où

$$E(g(Y_{n+m})/Y_{n+1}) = (P^{m-1}g)(Y_{n+1})$$

Maintenant on a :

$$\begin{aligned} P(E \cap F) - P(E)P(F) &= E[h(Y_{n+1})(P^{m-1}g)(Y_{n+1})] - E[h(Y_{n+1})]E[(P^{m-1}g)(Y_{n+1})] \\ &= E[h(Y_{n+1})((P^{m-1}g)(Y_{n+1}) - \pi(g))] \\ &- E[h(Y_{n+1})]E[\pi(g) - (P^{m-1}g)(Y_{n+1})] \end{aligned}$$

où $\pi(g) = \int g(x)\pi(dx)$

Par suite pour tout $E \in \mathcal{F}_0^n, F \in \ \mathcal{F}_{n+m}^{+\infty}$ et pour tout n, nous avons :

$$\begin{aligned} |P(E \cap F) - P(E)P(F)| &\leq E[|h(Y_{n+1})||(P^{m-1}g)(Y_{n+1}) - \pi(g)|] + E[|h(Y_{n+1})|] \\ & \quad E[|\pi(g) - (P^{m-1}g)(Y_{n+1})|] \\ &\leq 2E[|(P^{m-1}g)(Y_{n+1}) - \pi(g)|] \qquad \text{car } \|h\|_\infty \leq 1 \end{aligned}$$

Soit

$$f(y) = |(P^{m-1}g)(y) - \pi(g)|$$

avec $y \in E$ .Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(y) &= |E(g(Y_{m-1})/Y_0 = y) - \pi(g)| \\ &= |E_y(g(Y_{m-1})) - \pi(g)| \\ &= |\int g(z)P_yY_{m-1}^{-1}(dz) - \int g(z)\pi(dz)| \\ &\leq \sup_{\|g\|\leq 1} |\int g(z)(P_yY_{m-1}^{-1}(dz) - \pi(dz))| \\ &= \|P_y(Y_{m-1} \in) - \pi(.)\| := K_{m-1}(y) \end{aligned}$$

où $P_yY_{m-1}^{-1}(.) = P_y(Y_{m-1} \in .)$
D'où :

$$f(Y_{n+1}) \leq K_{m-1}(Y_{n+1}) \;\; P.ps$$

Donc

$$|P(E \cap F) - P(E)P(F)| \leq 2E(K_{m-1}(Y_{n+1}))$$

Par conséquent

$$\alpha(m) \leq 2 \sup_n E(K_{m-1}(Y_{n+1})) \tag{3.2.3}$$

On remarque que $\sup_y K_{m-1}(y) \leq 2$
Maintenant montrons que :

$$E(K_{m-1}(Y_{n+1})) \leq 2\|P_\Lambda(Y_{n+1} \in .) - \pi(.)\| + \pi(K_{m-1})$$

avec $P_\Lambda(Y_n \in .) = \int P_y(Y_n \in .)\Lambda(dy)$.Remarquons que $\int \mathbf{1}_A(z)dP_\Lambda Y_n^{-1}(z) = \int\int \mathbf{1}_A(z)dP_yY_n^{-1}(z)\Lambda(dz)$

On a

$$\begin{aligned} E(K_{m-1}(Y_{n+1})) &= E(E(K_{m-1}(Y_{n+1})/Y_0)) - \pi(K_{m-1}) + \pi(K_{m-1}) \\ &= \int E(K_{m-1}(Y_{n+1})/Y_0 = y)\Lambda(dy) - \int K_{m-1}(z)d\pi(z) + \pi(K_{m-1}) \\ &= \int\int K_{m-1}(z)(P_yY_{n+1}^{-1}(dz) - \pi(dz))\Lambda(dy) + \pi(K_{m-1}) \\ &\leq 2|\int \frac{K_{m-1}(z)}{2}d(P_\Lambda Y_{n+1}^{-1}(z) - \pi(z))| + \pi(K_{m-1}) \\ &\leq 2\sup_{\|h\|\leq 1} |\int h(z)d(P_\Lambda Y_{n+1}^{-1}(z) - \pi(z))| + \pi(K_{m-1}) \\ &\leq 2\|P_\Lambda(Y_{n+1} \in .) - \pi(.)\| + \pi(K_{m-1}) \end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
\|P_\Lambda(Y_{n+1} \in .) - \pi(.)\| &= \sup_{\|h\|\leq 1} |\int h(z)d(P_\Lambda Y_{n+1}^{-1}(z) - \pi(z))| \\
&= \sup_{\|h\|\leq 1} |\int\int h(z)(P_y Y_{n+1}^{-1}(dz) - \pi(dz))\Lambda(dy)| \\
&\leq \int \|P_y(Y_{n+1} \in .) - \pi(.)\| d\Lambda(y) = \int K_{n+1}(y)d\Lambda(y)
\end{aligned}$$

Or on a

$$|K_{n+1}(y)| \leq 2, \quad \int 2d\Lambda(y) = 2$$

et par 3.2.2 ,on obtient

$$|K_{n+1}(y)| \to_{n\to\infty} 0$$

Donc par le théorème de convergence dominée

$$\int K_{n+1}(y)d\Lambda(y) \to_{n\to\infty} 0$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé.
1)- $\exists n_0 = n_0(\epsilon)$ tel que $\forall n > n_0, \int K_{n+1}(y)d\Lambda(y) < \epsilon$
De ce qui précède ,et par 3.2.3

$$\begin{aligned}
\alpha(m) &\leq 2\sup_{n\leq n_0} E(K_{m-1}(Y_{n+1})) + 2\sup_{n>n_0} E(K_{m-1}(Y_{n+1})) \\
&\leq 2\sup_{n\leq n_0} E(K_{m-1}(Y_{n+1})) + 4\sup_{n>n_0} \|P_\Lambda(Y_{n+1} \in .) - \pi(.)\| + 2\pi(K_{m-1}) \\
&\leq 4\epsilon + 2\pi(K_{m-1}) + 2\sup_{n\leq n_0} E(K_{m-1}(Y_{n+1}))
\end{aligned}$$

Maintenant pour n_0, ϵ fixés on choisit un m_0 assez grand tel que :

i) $\sup_{n\leq n_0} E(K_{m-1}(Y_{n+1})) < \epsilon$
ii) $\pi(K_{m-1}) < \epsilon$
Cela est possible puisque :

$$\forall y \quad K_m(y) \to_{m\to\infty} 0 \quad \text{et} \quad |K_m(y)| \leq 2$$

donc par le théorème de convergence dominée

$$\sup_{n\leq n_0} E(K_{m-1}(Y_{n+1})) \to_{m\to\infty} 0 \ \text{ et } \ \pi(K_{m-1}) \to_{m\to\infty} 0$$

D'où pour $m > m_0$

$$\alpha(m) < 8\epsilon$$

Comme ϵ est arbitraire ,nous avons le résultat.■

3.3 Conditions minimales

Dans ce paragraphe nous allons remarquer que les conditions du le théorème 3.1 sont minimales.
On note que l'hypothèse de l'existence d'une mesure invariante finie $\pi(.)$ ne peut être affaiblie .
On considère par exemple (X_n) une suite de var iid avec $E(X_1) = 0$ et $Var(X_1^2) = 1$.
Soit $(S_n, n \geq 0)$ la suite définie par

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; \forall n \geq 1$$

où S_0 est une variable centrée réduite indépendante de (X_n)
$(S_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{E}})$ $(\mathbb{E} \subset \mathbb{R})$ de noyau de transition P(.,.) tel que :

$$P(x, A) = P(X_1 \in A - x)$$

On suppose que pour un certain n_0 ,S_{n_0} a une composante absolument continue (non triviale).
Alors $\{S_n, n \geq 0\}$ est récurrente au sens de Harris.
En effet ,
. Soient $x \in \mathbb{E}$,$A \in \mathcal{B}_{\mathbb{E}}$ μ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{E}})$.
Posons

$$C := \text{support de } \; S_{n_0} \;\; , \psi(.) = \mu(. \cap C)$$

On sait que

$$P_x(S_{n_0} \in A) = P(S_{n_0} \in A - x) = \int_{A-x} dF_{S_{n_0}} = \alpha \int_{A-x} dF^{sg}_{S_{n_0}} + (1-\alpha) \int_{A-x} dF^{abs}_{S_{n_0}}$$

avec $0 \leq \alpha < 1$
Si $\psi(A) > 0$ alors $\mu(A \cap C) > 0$, donc

$$\int_A dF^{abs}_{S_{n_0}} > 0$$

par suite

$$P_x(S_{n_0} \in A) > 0$$

ce qui donne

$$P_x(S_n \in A, \text{pour un certain n} \geq 1) > 0$$

comme la chaine est recurrente alors

$$P_x(S_n \in A, \text{pour un certain n} \geq 1) = 1$$

D'où $\{S_n, n \geq 0\}$ est récurrente au sens de Harris ; Mais la mesure invariante associée à cette chaîne n'est pas finie(cf [2])

* On montre que $\alpha(m) \geq 1/4$. D'où $\{S_n, n \geq 0\}$ n'est pas fortement mélangeant.
En effet,on a

$$\alpha(m) \geq \lim_{n\to+\infty} |P(E_n \cap F_{n,m}) - P(E_n)P(F_{n,m})|$$

avec

$$E_n = \{\omega, \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq a\} \in \mathcal{F}_0^n; F_{n,m} = \{\omega, \frac{S_{n+m}}{\sqrt{n+m}} > b\} \in \mathcal{F}_{n+m}^{+\infty} \quad \text{et } a < b$$

.
Nous avons pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$G_{n,m} = (n+m)^{-1/2}S_{n+m} - (n)^{-1/2}S_n = (n)^{-1/2}S_n(\sqrt{n}(n+m)^{-1/2} - 1) + (n+m)^{-1/2}\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i$$

Donc

$$\begin{aligned} E(|G_{n,m}|^2) &= [\frac{\sqrt{n}(n+m)^{-1/2} - 1}{\sqrt{n}}]^2 Var(S_n) + \frac{1}{n+m} Var(\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i) \\ &= (\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+m}} - 1)\underbrace{\frac{Var(S_n)}{n}}_{=1} + \frac{m}{n+m} \to_{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où $\forall m, G_{n,m} \to_{n\to\infty} 0$
Par suite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} P(E_n \cap F_{n,m}) &= \lim_{n\to+\infty} P(n^{-1/2}S_n \leq a, (n+m)^{-1/2}S_{n+m} > b) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(n^{-1/2}S_n \leq a, G_{n,m} + n^{-1/2}S_n > b) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} P(n^{-1/2}S_n \leq a, n^{-1/2}S_n > b - \epsilon)\forall\epsilon \end{aligned}$$

Puisque $a < b$ donc ,$b = a + \alpha$ pour $\epsilon \leq \alpha$. ce qui donne,

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n \cap F_{n,m}) = 0$$

Par le théorème central limite

$$\begin{aligned} \alpha(m) &\geq \lim_{n\to+\infty} P(E_n)P(F_{n,m}) \\ &\geq \lim_{n\to+\infty} P(n^{-1/2}S_n \leq a)(1 - P((n+m)^{-1/2}S_{n+m} \leq b)) \\ &\geq \phi(a)(1 - \phi(b)) \end{aligned}$$

où ϕ désigne la fdr d'une N(0,1) .

Comme a et b sont arbitraires $a < b$, on fait tendre a,b vers 0 ,nous obtenons

$$\alpha(m) \geq 1/4$$

3.4 Conditions de mélange pour un processus autorégressif d'ordre 1

Dans cette section on démontre le théorème 3.2.
Soient (Y_n) une suite de variables aléatoires telle que

$$Y_n = \rho Y_{n-1} + e_n \quad n = 1, 2.. \tag{3.4.1}$$

où $|\rho| < 1$ et (e_n) iid.on suppose que Y_0 est indépendante de $\{e_n\}$.
Λ dénote la distribution de Y_0.
Sous ces hypothèses , $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est une C.M .En effet

$$P(Y_n \in A/\mathcal{F}_0^{n-1}) = P(\rho Y_{n-1} + e_n \in A/\mathcal{F}_0^{n-1}) = P(\rho Y_{n-1} + e_n \in A/Y_{n-1})$$

Le noyau de transition de $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est

$$p(x, E) = P(e_n \in E - \rho x)$$

La proposition suivante est utile pour la preuve du théorème 3.2 :

Proposition 3.1 *Soit la suite $\{Y_n\}$ définie par 3.4.1 . On suppose l'hypothèse i) du théorème 3.2 vérifiée . Alors pour toute distribution initiale de Y_0 ,Y_n converge en loi vers $U = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e_{j+1}$*
et $\pi(.) = P(U \in .)$ est une proba stationnaire pour la C.M (Y_n) .

Démonstration Nous avons par 3.4.1

$$Y_n = \rho^n Y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j e_{n-j}$$

Comme (e_n) sont iid ,$\sum_{j=0}^{n-1} \rho^j e_{n-j}$ a la même loi que $U_n = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j e_{j+1}$

$$|\rho| < 1 \Rightarrow \rho^n Y_0 \rightarrow 0 Pps$$

$$E((\log e_1)^+) < \infty \Rightarrow U_n \Rightarrow^{\mathcal{L}}_{n\rightarrow\infty} U$$

(cf [2])
U_n étant une somme de var iid , alors la convergence est même Pps .
π est une loi invariante pour (Y_n) : en effet pour tout A on a :

$$\begin{aligned}
\int_S p(x,A)\pi(dx) &= \int_S P(e_1 \in A-\rho x)P(U\in dx) \\
&= \int_S P(e_1 \in A-\rho x)P(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+1}\in dx) \\
&= \int_S P(e_1 \in A-\rho x)P(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+2}\in dx) \qquad \text{car } \ U =^{\mathcal{L}} \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+2} \\
&= E(P(e_1+\rho\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+2}\in A/\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+2})) \ \ e_1 \text{ indépendante de} \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+2} \\
&= E(P(U\in A/\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e_{j+2})) \\
&= P(U\in A)
\end{aligned}$$

Proposition 3.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.2 ,U a une loi absolument continue .*

Démonstration Il est connu qu'une fdr continue sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire d'une manière unique comme :

$$F(x) = \alpha F_{ac}(x) + (1-\alpha)F_{sc}(x)$$

où F_{ac} :désigne la partie absolument continue et F_{sc} désigne la partie singulière continue.et $0 \leq \alpha \leq 1$
Posons $a(F) := a(X) := 1-\alpha$
Si X , Y sont deux va indépendantes alors :

$$a(X+Y) \leq a(X)a(Y)$$

En effet si :

$$\begin{aligned}
F_X(x) = \alpha F_X^{ac}(x) + (1-\alpha)F_X^{sc}(x) \\
F_Y(y) = \beta F_Y^{ac}(y) + (1-\beta)F_Y^{sc}(y)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= (F_X * F_Y)(z) \\
&= \int F_X(z-x)dF_Y(x) \\
&= \alpha\beta\int F_X^{ac}(z-x)dF_Y^{ac}(x) + \alpha(1-\beta)\int F_X^{ac}(z-x)dF_Y^{sc}(x) \\
&+ (1-\alpha)\beta\int F_X^{sc}(z-x)dF_Y^{ac}(x) + (1-\alpha)(1-\beta)\int F_X^{sc}(z-x)dF_Y^{sc}(x).
\end{aligned}$$

Puisque le produit de convolution est commutatif , alors les fonctions , $\int F_X^{ac}(z-x)dF_Y^{ac}(x)$,$\int F_X^{ac}(z-x)dF_Y^{sc}(x)$, $\int F_X^{sc}(z-x)dF_Y^{ac}(x)$ admettent une dérivée , ce qui implique

$$a(X+Y) \leq (1-\alpha)(1-\beta) = a(X)a(Y)$$

Montrons que U a une loi absolument continue ie a(U)=0 .

Du fait que

$$U_n = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j e_{j+1}, \quad \rho \neq 0$$

on a

$$a(U_n) \leq [a(e_1)]^n$$

Posons

$$W_n = \sum_{j=n}^{\infty} \rho^j e_{j+1}$$

U_n, W_n sont indépendantes et $U = U_n + W_n$ donc

$$a(U) \leq a(U_n)a(W_n) \leq [a(e_1)]^n \qquad (3.4.2)$$

Par l'hypothèse ii)du théorème 3.2 ,U_n a une composante absolument continue ,les e_i étant iid , elles ont toutes une composante absolument continue d'où

$$[a(e_1)] < 1$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans 3.4.2 nous obtenons $a(U) = 0$. Donc la loi de U est abs continue par rapport à la mesure de Lebesgue .

Preuve du théorème 3.2

1ère étape : On va montrer le mélange uniforme de Y_n ie montrons que

$$\phi(m) = \sup_n \sup_{E \in \mathcal{F}_0^n, F \in \mathcal{F}_{n+m}^\infty} |P(F/E) - P(F)| \to_{m\to\infty} 0$$

Sous les notations du théorème A, nous avons pour tout $E \in \mathcal{F}_0^n, F \in \mathcal{F}_{n+m}^\infty$

$$\begin{aligned} P(F/E) - P(F) &= \frac{P(E\cap F)}{P(E)} - P(F) \\ &= \frac{E[h(Y_{n+1})(P^{m-1}g)(Y_{n+1})]}{E[h(Y_{n+1})]} - E[(P^{m-1}g)(Y_{n+1})] \end{aligned}$$

où

$$(P^{m-1}g)(Y_{n+1}) = E(g(Y_{n+m})/Y_{n+1})$$

$$h(Y_{n+1}) = E(\mathbf{1}_E/Y_{n+1})$$

Posons

$$\pi_{m,y}(.) = P(\rho^m y + U_m \in .)$$

et

$$\pi(.) = P(U \in .) \ \ , U = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e_{j+1}$$

De même

$$\pi_{m,y}(g) = E[g(\rho^m y + U_m)]$$

et

$$\pi(g) = E(g(U))$$

Sous ces notations

$$\begin{array}{rcl} |P(F/E) - P(F)| & \leq & |\dfrac{E[h(Y_{n+1})[(P^{m-1}g)(Y_{n+1}) - \pi_{m-1,Y_{n+1}}(g)]]}{E[h(Y_{n+1})]}| \\ & + & |\dfrac{E[h(Y_{n+1})[\pi_{m-1,Y_{n+1}}(g) - \pi(g)]]}{E[h(Y_{n+1})]}| \\ & + & |E[-(P^{m-1}g)(Y_{n+1}) + \pi_{m-1,Y_{n+1}}(g)]| + |E[-\pi_{m-1,Y_{n+1}}(g) + \pi(g)]| \quad ....\bigstar \end{array}$$

Notons que $|(P^m g)(Y_n) - \pi_{m,Y_n}(g)| = 0$
En effet, soit $y \in S$ nous avons :

$$(P^m g)(y) = E(g(Y_m)/Y_0 = y) = E(g(\rho^m Y_0 + \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{m-j})/Y_0 = y) = \psi(y)$$

Comme Y_0 est indépendante de la suite $(e_i, i \in \mathbb{N})$ alors

$$\psi(y) = E(g(\rho^m y + \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{m-j}))$$

Or

$$U_m =^{\mathcal{L}} \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{m-j}$$

Par suite

$$(P^m g)(y) = \psi(y) = \pi_{m,y}(g)$$

Posons

$$\psi(m) = \sup_{y \in S} |\pi_{m,y}(g) - \pi(g)|$$

où S est la réunion des supports de $Y_n, n \geq 1$
Donc

$$\phi(m) \leq 2\psi(m-1) \tag{3.4.3}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |\pi_{m,y}(g) - \pi(g)| &= |\int_{\mathbb{R}} g(\rho^m y + z) dP_{U_m}(z) - \int_{\mathbb{R}} g(z) d\pi(z)| \\ &= |\int g(z)(dP_{U_m}(z - \rho^m y) - d\pi(z))| \end{aligned}$$

où g est une fonction mesurable positive et bornée par 1. Donc il existe une suite croissante de fonctions simples (g_k) qui converge presque surement vers g.(est même uniformément puisque g est bornée). D'où

$$|\pi_{m,y}(g) - \pi(g)| \leq I_1 + I_2 \tag{3.4.4}$$

avec

$$I_1 = |\int (g(z) - g_k(z))(dP_{U_m}(z - \rho^m y) - d\pi(z))|$$

et

$$I_2 = |\int g_k(z)(dP_{U_m}(z - \rho^m y) - d\pi(z))|$$

Soit $\varepsilon > 0$
Pour I_2.
Puisque la suite $(U_m, m \geq 1)$ coverge en loi vers U et comme pour tout $k \geq 1$,g_k est bornée d'ensemble de discontinuitées négligeable alors :

$$\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geq m_\varepsilon \Rightarrow I_2 \leq \varepsilon + |\int g_k(z)(d\pi(z - \rho^m y) - d\pi(z))|$$

Pour I_1
Soit $m > m_\varepsilon$

$$\lim_{n \to +\infty} |g(z) - g_k(z)| = 0$$

et $(|g(z) - g_k(z)|, k \geq 1)$ est bornée par 2 donc en utilisant le théorème de convergence dominée , on obtient :

$$I_1 \to_{k \to \infty} 0$$

càd ,

$$\exists k_\varepsilon \geq 1 \text{ tel que} : k \geq k_\varepsilon \Rightarrow I_1 < 2\varepsilon$$

Par suite, en utilisant 3.4.4

$$\begin{aligned}
|\pi_{m,y}(g) - \pi(g)| &\leq 3\varepsilon + |\int g_k(z)(d\pi(z - \rho^m y) - d\pi(z))| \\
&\leq 3\varepsilon + \|\pi(z - \eta) - \pi\| \\
&\leq 3\varepsilon + |\int (q(z - \eta) - q(z))dz|
\end{aligned}$$

avec $\eta < \varepsilon$ et q désigne la fonction de densité de U.
ε étant quelconque , cette fois en utilisant le résultat de Brezis -Lieb on obtient

$$\forall y, |\pi_{m,y}(g) - \pi(g)| \rightarrow_{m\rightarrow\infty} 0$$

Le support de Y_0 étant borné , pour tout i $|e_i| \leq c$ et $|\rho| < 1$ alors de la définition de Y_n on déduit que S va être borné. Par suite

$$\psi(m) = \sup_{y\in S} |\pi_{m,y}(g) - \pi(g)| \rightarrow_{m\rightarrow\infty} 0$$

D'où par 3.4.3

$$\phi(m) \rightarrow_{m\rightarrow\infty} 0$$

Ainsi le processus (Y_n) est $\phi-$ mélangeant .
2 ème cas On démontre maintenant que

$$\text{si } (Y_n) \text{ est uniformément mélangeant alors } |e_1| \leq c$$

On le fait par l'absurde .
On suppose que les e_i ne sont pas bornées et on montre que $\phi(m) = 1$ pour toute distribution initiale de Y_0
On se donne un $\delta > 0$ quelconque et on choisit un L assez grand tel que :

$$P(|U| > L) < \delta$$

(possible car $P(|U| \in \mathbb{R}) = 1$)

Puisque (Y_n) converge en loi vers U alors

$$\exists N = N_\delta \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\delta \ |P(U \leq L) - P(Y_n \leq L)| \leq \delta$$

Comme

$$P(U > L) \leq P(|U| > L) < \delta$$

Donc

$$P(U \leq L) \geq 1 - \delta$$

Il en résulte que pour $n \geq N$

$$P(Y_n \leq L) \geq P(U \leq L) - \delta$$

alors :

$$\forall \ \delta > 0, \exists N = N_\delta \text{ tel que } \forall n \geq N P(Y_n \leq L) \geq 1 - 2\delta$$

Soit $B =]-\infty, L[$ et $A = [\rho^{-m}(L+M), \infty[$ où M est tel que

$$P(U_m \leq -M) < \delta$$

On sait que U est absolument continue donc $P(U \in \delta A) = 0$ par suite :

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \in A) = P(U \in A)$$

et U est non bornée ($(e_i)_i$ non bornées) donc

$$P(U \in A) > 0$$

Ainsi pour

$$n \geq N, \quad P(Y_n \in A) > 0$$

Maintenant , soit

$$E = \{Y_n \in A\} \quad \text{et} \quad F = \{Y_{n+m} \in B\}$$

Alors

$$\begin{aligned}
P(E/F) &= P(Y_{n+m} \in B / Y_n \in A) \\
&= P(Y_{m+1} \in B / Y_1 \in A) \quad \text{(C.M homogène)} \\
&= P(\rho^m Y_1 + \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{m+1-j} \leq L / Y_1 \geq \rho^{-m}(L+M)) \\
&\leq \frac{P(\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{m+1-j} \leq -M, Y_1 \in A)}{P(Y_1 \in A)} \\
&\leq P(\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{m+1-j} \leq -M) \quad (e_i \text{ indépendantes}) \\
&\leq P(\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j e_{j+1} \leq -M) \quad (\ e_i \ \ \text{iid} \ ). \\
&\leq P(U_m \leq -M) < \delta
\end{aligned}$$

D'autre part pour $n \geq N$

$$P(F) = P(Y_{n+m} \leq L) \geq 1 - 2\delta n \geq N$$

D'où pour un n assez grand :

$$|P(F/E) - P(F)| \geq P(F) - P(F/E) \geq 1 - 3\delta$$

δ étant quelconque

$$\phi(m) \geq 1$$

et

$$\phi(m) \leq 1$$

car :
$P(F/E) - P(F) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} - P(F)$ et on sait que $P(F \cap E) - P(F)P(E) \leq P(E)$.
et $P(F) = P(F/E)P(E) + P(F/E^c)P(E^c) \leq P(F/E) + 1$
On conclut que

$$\phi(m) = 1$$

Donc $\{Y_n\}$ n'est pas uniformément mélangeant .

3.5 Conditions minimales

Maintenant on va démontrer que l'hypothèse (ii)du théorème 3.2 de l'existence d'une composante non triviale absolument continue de e_1 ne peut pas être assouplie . L'exemple ci-dessous justifie cela .
Le lemme suivant est utile pour la démonstration .

Lemme 3.2 *Soit $b \geq 2$ un entier , (Y_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, .., b-1\}$ X la variable aléatoire dans [0,1] ,définie par :*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} Y_n$$

alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \quad \textit{si et seulement si} \quad (Y_n) \textit{ sont iid et } \quad Y_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{0,...b-1\}}$$

En utilisant les fractions dyadiques, on définit les suites $(U_m)_{m \geq 0}$, $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ par :

$$U_m = \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} e_j$$

$$Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad Y_{n+1} = 1/2 Y_n + e_{n+1} \qquad , n \geq 1$$

On sait que l'hypothèse i) du théorème 3.2 est vérifiée puisque

$$E((\log e_1)^+) = 1/2(\log 0)^+ + 1/2(log 1)^+ = 0$$

Par contre ii) ne l'est pas car les e_i sont des $\mathcal{B}(1/2)$ donc discrètes .
On déduit du rappel que $U_m\ X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ Pps
Montrons que $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ n'est pas fortement mélangeant avec $\alpha(m) = 1/4, \ \ \forall m$
Pour m fixé ,$\{Y_n\}$ satisfait :

$$Y_{n+m} = \sum_{j=0}^{m-1} 2^{-j} e_{n+m-j} + 2^{-m} Y_n$$

D'une part , U_m a pour support l'ensemble des rationnels dyadiques d'ordre "m " qu'on note $A_m = \{2^{-m}j \ \ / \ \ j = 0, 1, 2, ...2^m - 1\}$ .En effet ,en raisonnant par récurrence :
Pour m=1 :

$$U_1 = 1/2e_1 \quad \text{donc le support de} \quad U_1 \ \text{ est } \quad \{0, 1/2\}$$

On suppose que

$$A_m = \{2^{-m}j \ \ / \ \ j = 0, 1, 2, ...2^m - 1\}$$

et montrons que

$$A_{m+1} = \{2^{-(m+1)}j \ \ / \ \ j = 0, 1, 2, ...2^{m+1} - 1\}$$

$U_{m+1} = U_m + 2^{-(m+1)}e_{m+1}$ Donc $A_{m+1} = A_m \cup \{A_m + 2^{-(m+1)}\}$ ainsi ,

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \{2^{-(m)}j + 2^{-(m+1)}k \ \ / \ \ j = 0, 1, 2, ...2^m - 1, k = 0, 1\} \\ &= \{2^{-(m+1)}(2j + k) \ \ / \ \ j = 0, 1, 2, ...2^m - 1, k = 0, 1\} \\ &= \{2^{-(m+1)}k' \ \ / \ \ k' = 0, 1, 2, ...2^{m+1} - 1\} \end{aligned}$$

D'autre part, posons

$$B_m = \cup_{j=0}^{2^m-1} [\frac{j}{2^m}, \frac{j}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}] \quad \text{et} \quad C_m = \cup_{j=0}^{2^m-1}]\frac{j}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}, \frac{j+1}{2^m}[$$

$$\begin{aligned} Y_{n+m} &= \sum_{j=0}^{m-1} 2^{-j} e_{n+m-j} + 2^{-m} Y_n \\ &=^{\mathcal{L}} U_{m-1} + e_{n+m} + 2^{-m} Y_n \end{aligned}$$

On a :

$$\text{Si } \ Y_n \in [0, 1] \ \text{ alors } \ Y_{n+m} \in \underbrace{\cup_{j=0}^{2^{m-1}-1} [\frac{j}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}]}_{D'_m} + \{0, 1\} := B'_m \tag{3.5.1}$$

$$\text{Si } \ Y_n \in [1, 2] \ \text{ alors } \ Y_{n+m} \in \underbrace{\cup_{j=0}^{2^{m-1}-1}]\frac{j}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}, \frac{j+1}{2^{m-1}}[}_{E'_m} + \{0, 1\} := C'_m \tag{3.5.2}$$

Puisque pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$D'_m \cap E'_m = \emptyset \quad \text{et} \quad D'_m \cup E'_m = [0,1]$$

alors

$$B'_m \cap C'_m = \emptyset \quad \text{et} \quad B'_m \cup C'_m = [0,2]$$

D'aprés ce qui précède on obtient que

$$Y_n \in [0,1] \Leftrightarrow Y_{n+m} \in B'_m$$

et

$$Y_n \in]1,2] \Leftrightarrow Y_{n+m} \in C'_m$$

Y_n converge en loi vers une va $\mathcal{U}_{[0,2]}$.En effet, puisque les e_i sont iid de loi $\mathcal{B}(1/2)$ on a

$$Y_n = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} e_{n-j} =^{\mathcal{L}} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} e_j = e_0 + U_{n-1}$$

Donc

$$P(Y_n \leq x) = 1/2P(U_{n-1} \leq x) + 1/2P(U_{n-1} \leq x-1)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq x) &= 1/2P(U \leq x) + 1/2P(U \leq x-1) \quad \text{avec } U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \\
&= 1/2 \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} + 1/2 \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1/2)x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$Y_n \Rightarrow^{\mathcal{L}} \mathcal{U}_{[0,2]}$$

Par suite ,en utilisant 3.5.1 et 3.5.2on obtient

$$\begin{aligned}
P(Y_n \in [0,1[, Y_{n+m} \in B'_m) - P(Y_n \in [0,1[)P(Y_{n+m} \in B'_m) &= P(Y_n \in [0,1[)(1 - P(Y_{n+m} \in B'_m) \\
&= P(Y_n \in [0,1[)(P(Y_n \in [1,2]) \rightarrow_{n\to\infty} 1/
\end{aligned}$$

Donc $\alpha(m) \geq 1/4$ et on sait que $\alpha(m) \leq 1/4$ alors $\alpha(m) = 1/4$
D'où $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ n'est pas fortement mélangeant .

3.6 Conditions de mélange pour un AR(p)

Maintenant on considère le processus AR(p) $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ défini par :

$$Y_n = \alpha_1 Y_{n-1} + \alpha_2 Y_{n-2} + ... + \alpha_p Y_{n-p} + e_n \tag{3.6.1}$$

On peut réécrire 3.6.1 comme $X_n = AX_{n-1} + \eta_n$ avec $X_n = (Y_n, ..., Y_{n-p+1})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}_{p*p}$$

$\eta_n = [e_n, 0...0]^t$
D'où

$$X_n = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \eta_{n-j} + A^n X_0 = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^{'} e_{n-j} + d_n^{'} Y_0$$

avec $d_k^{'}$ la 1 ére colonne de A^k et $X_0 = (Y_0, 0..., 0)$.
Au fait on considère $Y_{-j} = 0$ avec $j > 0$ Par suite :

$$Y_n = \sum_{j=0}^{n-1} w_j e_{n-j} + w_n Y_0 \ \text{ avec } \ w_j = (d_j^{'})_{1,1}$$

On sait que (cf [8] p57) :

$$\begin{cases} w_j = \alpha_1 w_{j-1} + \alpha_2 w_{j-2} + ... + \alpha_p w_{j-p} & \text{si} \quad \text{j} \geq 1 \\ w_0 = 1 & \\ w_j = 0 & \text{si} \ \ j < 0 \end{cases}$$

Aussi

$$w_j = \sum_{s=1}^{p} c_s w_j^s \text{ avec } c_s \quad \text{coefficients réels}$$

et

$$\begin{cases} w_j^s = (j)^l (m_s)^j, & s = 1, 2, ..d \\ [w_j^s, w_j^{s+1}] = [(j)^l (r_s)^j \cos(j\theta_s), (j)^l (r_s)^j \sin(j\theta_s)] & s = d+1, d+3, ...p-1 \end{cases}$$

Le terme $(j)^l$ représente la multiplicité des racines où $(0 \leq (j)^l < p)$
m_s :racines de l'équation caractéristique.
$\exists \ \ 0 < \rho < 1$ tel que $|w_j| < a\rho^j, j \geq 1$ pour un certain $a < \infty$ (on peut prendre

$\rho = \max_{1 \leq s \leq p}\{|m_s|, |r_s|\} < 1$.
Maintenant ,en posant :

$$U_n = \sum_{j=0}^{n-1} w_j e_{n-j}$$

sachant que :

$$Y_n = U_n + w_n Y_0 \,\text{et}\, w_j \leq a\rho^j, j \geq 1$$

On peut reprendre la démonstration des propositions 3.1 ,3.2 ,et on aura les même résultats (en utilisant d'autres téchniques) pour-vu que :

i) $E((\log|e_1|)^+) < \infty$

ii) La distribution de e_1 ait une composante absolument continue ,non triviale.

iii) Y_0 soit indépendante des e_i

iv) $\{e_i\}$ iid

v) les racines de l'équation caractéristique soient dans le disque unité ouvert.

Alors (Y_n) est uniformément mélangeant ssi $\exists c, |e_1| \leq c$

3.7 Exemple d'un AR(1) non fortement mélangeant

Nous présentons dans cette section le contre exemple historique construit par Donald .K. andrews (cf.([6]) . L'auteur a donné l'exemple d'un processus autorégressif d'ordre 1 non fortement mélangeant .

Introduction

Considérons un bruit blanc fort $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ où pour tout $t \in \mathbb{Z}, \varepsilon_t$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $0 < q < 1$ $(\forall t, \varepsilon_t \hookrightarrow B(q))$
Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ le processus autorégressif d'ordre 1 défini par :

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{avec } \rho \in]0, \frac{1}{2}] \tag{3.7.1}$$

d'après, 1.1 on peut écrire

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i} \text{Pps et dans} L^2$$

on a pour tout $s > 0$:

$$\begin{aligned} X_{t+s} &= \rho X_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s} \\ &= \rho^2 X_{t+s-2} + \rho\varepsilon_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s} \\ &\vdots \\ &= \rho^s X_t + \sum_{i=0}^{s-1} \rho^i \varepsilon_{t+s-i} \end{aligned}$$

posons pour tout $s > 0$:

$$X_{t,s} = \sum_{i=0}^{s-1} \rho^i \varepsilon_{t+s-i}$$

et soit

$$X_{t+s} = \rho^s X_t + X_{t,s}$$

comme les $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes alors le vecteur $(\varepsilon_{t+s}, ..., \varepsilon_{t+1})$ est indépendant du vecteur $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ...)$ pour tout $s > 0$, il en est de même pour X_t et $X_{t,s}$.
soit W_s l'ensemble des valeurs prises par $X_{t,s}$
on a

$$X_{t,s} = \varepsilon_{t+s} + \rho\varepsilon_{t+s-1} + \rho^2\varepsilon_{t+s-2} + ... + \rho^{s-1}\varepsilon_{t+1}$$

et $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ pour $t + 1 \leq i \leq t + s$;donc W_s est de cardinal $J \leq 2^s$.
Résultat
On a le théorème suivant :

Théorème 3.3 *[6] : Le processus $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par 3.7.1 n'est pas fortement mélangeant.*

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Soit $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus aléatoire , $\mathcal{F}_a^b = \sigma\{Y_t, a \leq t \leq b\}$, supposons qu'il existe :*
1) Un ensemble $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^t$ avec $P(A) > 0$.
2) Une suite d'ensembles $(B_s)_{s\geq 1}$ telle que $B_s \in \mathcal{F}_{t+s}^{+\infty}$
3) Un réel $k < 1$ tel que pour tout $s \geq 1$ $P(B_s) \leq k$ et $P(B_s/A) = 1$
Alors Y n'est pas fortement mélangeant.

Démonstration
on a pour tout $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \sup_{-\infty<t<\infty} \sup_{C\in\mathcal{F}_{-\infty}^t, D\in\mathcal{F}_{t+s}^{+\infty}} |P(C \cap D) - P(C)P(D)| \\ &\geq |P(A \cap B_s) - P(A)P(B_s)| \\ &\geq P(A)|P(B_s/A) - P(B_s)| \\ &\geq P(A)(1 - k) > 0 \end{aligned}$$

donc Y n'est pas fortement mélangeant.
Démonstration du théorème
on définit A et $(B_s)_{s\geq 1}$ par :

$$A = \{\omega, X_t(\omega) \in (0, \rho)\}$$
$$B_s = \{\omega, X_{t+s}(\omega) \in \cup_{j=1}^{J}(w_j, w_j + \rho^{s+1})\}$$

La démonstration consiste à vérifier les conditions du lemme 3.3.Pour la troisième condition, l'idée est d'introduire un ensemble D (indépendant de s) tel que

$$P(D) = 1 - k > 0 \quad \text{et} \quad P(D \cap B_s) = 0 \;\; \forall s \geq 1$$

ceci donne :

$$\forall s, P(B_s) = P(B_s \cap D) + P(B_s \cap D^c) \leq 0 + P(D^c) = k < 1$$

on note $\{\omega_j\}_{j=1}^{J}$ les éléments de W_s tels que $w_j < w_{j+1}$

Etape 1 : Montrons que $P(A) > 0$ on a

$$X_t = \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho^3\varepsilon_{t-3} + ...$$

Il en découle que

$$\{w/\varepsilon_t(\omega) = \varepsilon_{t-1}(\omega) = \varepsilon_{t-2}(\omega) = 0 \;\text{ et }\; \varepsilon_{t-3}(\omega) = 1\} \subset A \tag{3.7.2}$$

En effet si

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} = \varepsilon_{t-2} = 0 \;\; \varepsilon_{t-3} = 1$$

alors

$$X_t = \rho^3 + \rho^4\varepsilon_{t-4}(\omega) + \ldots$$

donc

$$0 \leq X_t \leq \rho^3 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho^3}{1-\rho}$$

or

$$\rho \in (0, 1/2)$$

il s'en suit que

$$\frac{\rho^3}{1-\rho} < \rho$$

par suite

$$0 \leq X_t \leq \rho$$

d'où

$$P(A) \geq P\{\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} = \varepsilon_{t-2} = 0 et \varepsilon_{t-3} = 1\} = P(\varepsilon_1 = 0)^2 P(\varepsilon_1 = 1) = q(1-q)^3 > 0$$

car les ε_t sont iid et $\varepsilon_1 \hookrightarrow B(q)$

Etape 2 : Montrons que $\forall s \geq 1 \quad , P(B_s/A) = 1$

on a

$$\forall s \geq 1, \ \ A \subset B_s.$$

en effet :
soit $\omega \in A$, donc $X_t(\omega) = x_t \in (0, \rho)$ or :

$$X_{t+s}(\omega) = \rho^s x_t + X_{t,s}(\omega)$$

et

$$\begin{aligned} 0 < x_t < \rho \ &\Leftrightarrow \ 0 < \rho^s x_t < \rho^{s+1} \\ &\Rightarrow \ X_{t,s}(\omega) < \rho^s x_t + X_{t,s}(\omega) < \rho^{s+1} + X_{t,s}(\omega) \\ &\Rightarrow \ X_{t,s}(\omega) < X_{t+s}(\omega) < \rho^{s+1} + X_{t,s}(\omega) \end{aligned}$$

on sait que pour tout $w \in \Omega, \exists j \leq J$ tel que $X_{t,s}(\omega) = w_j$
donc

$$0 < x_t < \rho \Rightarrow X_{t+s}(\omega) \in \bigcup_{j=1}^{J} (w_j, w_j + \rho^{s+1})$$

d'où

$$A \subset B_s, \forall s \geq 1$$

Par suite et puisque $P(A) \neq 0$ on a

$$P(B_s/A) = \frac{P(B_s \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Etape 3 : Nous introduisons l'ensemble D défini par :

$$D = \{\omega, X_t(\omega) \in [\rho, 1]\}$$

Nous allons montrer que $P(D) > 0$ on a

$$\{\omega, \varepsilon_t(\omega) = 0, \varepsilon_{t-1}(\omega) = 1\} \subset D$$

en effet si $\varepsilon_t(\omega) = 0, \varepsilon_{t-1}(\omega) = 1$, alors

$$\rho \leq X_t(\omega) = \rho + \rho^2 \varepsilon_{t-2}(\omega) + ... \leq \rho \sum_{i \geq 0} \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

puique $0 < \rho \leq 1/2$, alors $\frac{\rho}{1-\rho} \leq 1$, c'est à dire $\rho \leq X_t(\omega) \leq 1$ d'où comme les ε_t sont iid et $\varepsilon_1 \hookrightarrow B(q)$

$$P(D) \geq P(\varepsilon_t = 0, \varepsilon_{t-1} = 1) = (1-q)q > 0$$

Nous allons démontrer par suite que :

$$\forall s, P(D \cap B_{s)} = 0$$

Etape 4 : Montrons que les éléments $(w_j, j = 1..J)$ de W_s sont à un écart d'au moin ρ^{s-1}
soient G, G_1, G_2 des ensembles de $\mathbb{R}$ on définit $d(G)$ et $d(G_1, G_2)$ par :

$$d(G) = \inf\{|g_0 - g_1| / g_0, g_1 \in G\}$$

$$d(G_1, G_2) = \inf\{|g_1 - g_2| / g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

on veut démontrer que

$$d(W_s) \geq \rho^{s-1}, \ \ \forall s \geq 1$$

la preuve se fait par récurrence. on a

$$X_{t,s} = \sum_{i=0}^{s-1} \rho^i \varepsilon_{t+s-i}$$

. pour s=1 ,$X_{t,s} = \varepsilon_{t+1} \hookrightarrow B(q)$ donc $W_1 = \{0, 1\}$ et $d(W_s) = 1 \geq \rho^{s-1} = 1$
. soit $s \geq 1$. supposons que $d(W_s) \geq \rho^{s-1}$ et montrons que $d(W_{s+1}) \geq \rho^s$.
On a :

$$X_{t,s} = \varepsilon_{t+s} + \rho\varepsilon_{t+s-1} + ... + \rho^{s-1}\varepsilon_{t+1}$$

$$X_{t,s+1} = \varepsilon_{t+s+1} + \rho\varepsilon_{t+s} + ... + \rho^s \varepsilon_{t+1}$$

or

$$(\varepsilon_{t+s+1}, ..., \varepsilon_{t+1}) =^{\mathcal{L}} (\varepsilon_{t+s}, ..., \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+s+1})$$

car les ε_t sont iid, donc

$$(1, \rho, ..., \rho^s)(\varepsilon_{t+s+1}, ..., \varepsilon_{t+1})^t =^{\mathcal{L}} (1, \rho, ..., \rho^s)(\varepsilon_{t+s}, ..., \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+s+1})^t$$

d'où

$$X_{t,s+1} =^{\mathcal{L}} X_{t,s} + \rho^s \varepsilon_{t+s+1}$$

ce qui donne

$$W_{s+1} = W_s \cup (W_s + \rho^s)$$

où $W_s + \rho^s = \{w + \rho^s / w \in W_s\}$
par suite

$$\begin{aligned}
d(W_{s+1}) &= \inf\{|g_0 - g_1| / g_0, g_1 \in W_{s+1}\} \\
&= \inf[\{|g_0 - g_1| / g_0, g_1 \in W_s\} \cup \{|g_0 - g_1| / g_0, g_1 \in W_s + \rho^s\} \\
&\cup \ \{|g_0 - g_1| / g_0 \in W_s, g_1 \in W_s + \rho^s\}] \\
&= d(W_s) \wedge d(W_s + \rho^s) \wedge d(W_s, W_s + \rho^s)
\end{aligned}$$

or

$$d(W_s + \rho^s) = \inf\{|g_0 - g_1| / g_0, g_1 \in W_s + \rho^s\}$$

si $g_0, g_1 \in W_s + \rho^s$, alors $g_0 = g'_0 + \rho^v$ et $g_1 = g'_1 + \rho^s$ donc $g'_0, g'_1 \in W_s$ et$|g_0 - g_1| = |g'_0 - g'_1|$
soit

$$d(W_s + \rho^s) = d(W_s)$$

d'autre part $d(W_s, W_s + \rho^s) = \inf\{|g_0 - g_1| / g_0 \in W_s, g_1 \in W_s + \rho^s\}$
donc $g_1 = g'_1 + \rho^s$ avec $g'_1 \in W_s$ et

$$|g_0 - g'_1 - \rho^s| = \begin{cases} \rho^s & \text{si } g_0 = g'_1 \\ |g_0 - g'_1 - \rho^s| \geq |g_0 - g'_1| - |\rho^s| \geq \rho^{s-1} - \rho^s & \text{sinon} \end{cases}$$

par conséquent, $d(W_s, W_s + \rho^s) \geq \rho^s \wedge (\rho^{v-1}(1 - \rho)) = \rho^v$ car $0 < \rho \leq 1/2$
Finalement $d(W_{v+1}) \geq d(W_{v+1}) \wedge \rho^v \geq \rho^{v-1} \wedge \rho^v = \rho^v$ puisque $0 < \rho \leq 1/2$

Etape 5 : Montrons que

$$D \subset \{\omega / X_{t+s}(\omega) \in \cup_{j=1}^{J} [w_j + \rho^{s+1}, w_{j+1})\}$$

soit $\omega \in D$, il exite alors x_t, ω_j tel que $X_t(\omega) = x_t \in [\rho, 1]$ et $X_{t,s}(\omega) = w_j$
on a

$$X_{t+s}(w) = w_j + \rho^s x_t$$

puisque $x_t \geq \rho$, on obtient

$$X_{t+s}(w) \geq w_j + \rho^s \rho$$

$$\text{et } X_{t+s}(w) \leq w_j + \rho^s 1 < w_j + \rho^{s-1} \leq w_{j+1} (\text{par l'affirmation}).$$

D'où

$$w_j + \rho^{s+1} \leq X_{t+s}(w) < w_{j+1}$$

Par suite pour $w \in D$

$$X_{t+s}(w) \in \cup_{j=1}^{J} [w_j + \rho^{s+1}, w_{j+1}) \Rightarrow D \subset \{w, X_{t+s}(w) \in \cup_{j=1}^{J} [w_j + \rho^{s+1}, w_{j+1})\}$$

conclusion : nous avons :

$$P(D \cap B_s) \leq \underbrace{P(\{X_{t+s}(w) \in \cup_{j=1}^{J}[w_j + \rho^{s+1}, w_{j+1})\} \cap \{X_{t+s}(w) \in \cup_{j=1}^{J}[w_j, \rho^{s+1} + w_j)\}}_{=0}$$

donc $P(D \cap B_s) = 0$
Par suite ,à partir des étapes précédentes et tout en se basant sur le lemme 3.3 on conclut que le processus considéré "X" n'est pas fortement mélangeant ...cqfd.■

Chapitre 4

Conditions de mélange pour un processus linéaire vectoriel

Pour plus de généralités nous considérons des processus linéaires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ où p est un entier naturel quelconque , nous traitons par la suite l'article [12].Les auteurs tran.L.T et pham.T.D ont donné des conditions assurant la régularité absolue de cette classe.

4.1 Sommaire

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $X = (..., X_{-1}, X_0); Y = (X_n, X_{n+1}, ...)$.
P_{XY}, P_X, P_Y les lois de (X,Y),X et Y respectivement.
On définit la la fonction Δ_n par : :

$$\int_A \Delta_n(x) P_X(dx) = \sup_{\|h\| \leq 1, h \in L^\infty} \int_A |\int h(y)[P_X(dx)P_Y(dy) - P_{X,Y}(dx, dy)]|$$

pour tout A mesurable de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times ...$

Notons que $\Delta_n(x)$ existe quand le second membre définit une mesure absolument continue par rapport à $P_X(dx)$

Remarques

1) Si la distribution conditionnelle $P_Y^X(dy/x)$ existe alors $\Delta_n(x)$ représente la variation totale de "$P_Y^X(dy/x) - P_Y(dy)$" ,en effet :

i) On commence par montrer que

$$P_Y^X(dy/x) P_X(dx) = P_{X,Y}(dx, dy)$$

On a pour tout A ,B boréliens

$$\begin{aligned}
\int_A \int_B P_Y^X(dy/x) P_X(dx) &= \int_A P(Y \in B/X = x) P_X(dx) \\
&= E(\chi_{(X \in A)} P(Y \in B/X)) \\
&= E(\chi_{(X \in A)} \chi_{(Y \in B)}) \\
&= \int_A \int_B P_{X,Y}(dx, dy)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\int_A \|P_Y^X(dy/x) - P_Y(dy)\| P_X(dx) &= \int_A \sup_{\|h\| \leq 1, h \in L^\infty} \left| \int h(y)[P_Y^X(dy/x) - P_Y(dy)] \right| P_X(dx) \\
&= \sup_{\|h\| \leq 1, h \in L^\infty} \int_A \left| \int h(y)[P_X(dx)P_Y(dy) - P_{X,Y}(dx, dy)] \right| \\
&= \int_A \Delta_n(x) P_X(dx)
\end{aligned}$$

Cela est vrai pour tout A ,d'où le résultat.

2) La condition $\|\Delta_n\|_{L^1} \to_{n \to \infty} 0$ est équivalente à la définition donnée dans le chapitre 1 de la régularité absolue ,En effet :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n\|_{L^1} &= E(\|P_Y^X(dy/x) - P_Y(dy)\|) \\
&= E(\sup_{\|h\| \leq 1, h \in L^\infty} |E(h(Y)/X) - E(h(Y))|) \\
&= E(\sup_{\|h\| \leq 1, h \in L^\infty} |E(h(Y)/\mathcal{F}_{-\infty}^0) - E(h(Y))|)
\end{aligned}$$

3)Sous l'hypothèse que X et Y soient à valeurs dans un espace polonais(métrique,séparable) le théorème de Jirina assure l'existence d'une version régulière de la probabilité conditionnelle.

4.2 Théorème

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$un processus donné par :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} A(j) Z_{t-j}$$

où les $(Z_t)_t$ sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^p$,à densité g_t et $A(j) \in \mathcal{M}(p \times p)$ tel que A(0)=Id.

Supposons que :

i) $\int |g_t(v-u) - g_t(v)|dv < K\|u\| \qquad \forall t \in \mathbb{Z}$
ii) $E(\|Z_t\|^\delta) < K$ pour un $\delta > 0$ et pour tout t
iii) $\sum_{j=0}^{+\infty} \|A(j)\| < \infty$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} A(j)z^j \neq 0$ et finie $\quad \forall \|z\| \leq 1$
iv) $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j^{\frac{\delta}{1+\delta}} < \infty$ où $\alpha_j = \sum_{k=j}^{+\infty} \|A(k)\|$
Alors

$$\|\Delta_n\|_1 \leq K \sum_{j=n}^{+\infty} \alpha_j^{\frac{\delta}{1+\delta}} \to_{n\to\infty} 0$$

et donc $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est absolument régulier.

Lemme 4.1 *Posons*

$$v(n) = \sum_{j=n}^{+\infty} A(j) Z_{n-j} \quad , w(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A(j) Z_{n-j}$$

Alors $S_{n,m} = (W(n), ...W(n+m))$ *admet une densité* $f_{n,m}$ *et :*

$$\Delta_n(X) \leq \sup_{m\geq 0} [E[\delta_{n,m}(R_{n,m})/X] + E[\delta_{n,m}(R_{n,m})]]$$

où $R_{n,m} = (V(n), ..., V(n+m))$,$X = (..., X(-1), X(0))$
et $\delta_{n,m}(u) = \int |f_{n,m}(z-u) - f_{n,m}(z)|dz$,*(*$u \in \mathbb{R}^{m+1}$*)*

Démonstration
Nous avons :

$$(W(1), ...W(n+m)) = G(Z(1), ...Z(n+m))$$

où G la matrice définie par

$$G = \begin{pmatrix} Id & 0 & \dots & 0 \\ A(1) & Id & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(n+m-1) & A(n+m-2) & \dots & Id \end{pmatrix}$$

et comme le déterminant de G est égale à 1 alors G^{-1} existe et

$$f_{(W(1),...W(n+m))}(x) = f_{(Z(1),...Z(n+m))}(G^{-1}x)$$

par suite $f_{n,m}$ est la marginale de $(W(1), ...W(n+m))$
Soit

$$Y_m = (X(n), ..., X(n+m))$$

Nous avons

$$Y_m = S_{n,m} + R_{n,m}$$

Le vecteur $S_{n,m}$ est indépendant de $(R_{n,m}, X)$ par construction ,donc

$$\begin{aligned} P(Y_m \in A/X) &= P(S_{n,m} + R_{n,m} \in A/X) \\ &= E(E(\chi_{S_{n,m}+R_{n,m}\in A}/(X, R_{n,m}))/X) \end{aligned}$$

Or $E(\chi_{S_{n,m}+R_{n,m}\in A}/(X, R_{n,m})) = \psi(R_{n,m})$ avec
$\psi(z) = P(S_{n,m} \in A - z) = \int_{A-z} f_{n,m}(x)dx = \int_A f_{n,m}(y-z)dy$
La distribution conditionnelle de Y_m sachant X admet la densité

$$g(y) = E(f_{n,m}(y - R_{n,m})/X)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_A dP^X_{Y_m}(y) &= P(Y_m \in A/X) \\ &= E(\psi(R_{n,m})/X) \\ &= \int \psi(z)dP^X_{R_{n,m}}(z) \\ &= \int P(S_{n,m} \in A - z)dP^X_{R_{n,m}}(z) \\ &= \int [\int_A f_{n,m}(y-z)dy]dP^X_{R_{n,m}}(z) \\ &= \int_A E(f_{n,m}(y - R_{n,m})/X)dy \end{aligned}$$

De même la distribution de Y_m admet la densité $E(f_{n,m}(y - R_{n,m}))$,En effet :

$$\int \chi_{(Y_m\in A)} = \int \psi(z)dP_{R_{n,m}}(z) = \int_A E(f_{n,m}(y - R_{n,m}))dy$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Delta_n(X) &= \|P^X_Y(dy) - P_Y(dy)\| \\ &\leq \sup_{m\geq 0} \|P^X_{Y_m}(dy) - P_{Y_m}(dy)\| \\ &\leq \sup_{m\geq 0}[\sup_{|h|\leq 1} | \int h(y)[P^X_{Y_m}(dy) - P_{Y_m}(dy)]|] \\ &\leq \sup_{m\geq 0} \int |E(f_{n,m}(y - R_{n,m}) - f_{n,m}(y)/X)dy| + \sup_{m\geq 0} \int |E(f_{n,m}(y - R_{n,m}) - f_{n,m}(y))dy| \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\Delta_n(X) \leq \sup_{m\geq 0} E[\delta_{n,m}(R_{n,m}/X)] + \sup_{m\geq 0} E[\delta_{n,m}(R_{n,m})]$$

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, nous avons :*

$$\sup_{m\geq 0} \delta_{n,m}(R_{n,m}) \leq K \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha(j+n)\|Z_{-j}\|$$

où $\alpha(j) = \sum_{k\geq j} \|A_k\|$

Démonstration On sait que

$$W = GZ \quad \text{avec} \quad W = (W(1), ..., W(n+m)), Z = (Z_1, ..., Z_{n+m})$$

et G est la matrice définie précédemment ,et comme elle est inversible , on obtient

$$Z_t = (G^{-1}W)_t = \sum_{j=0}^{t-1} B(j)W(t-j)$$

par suite

$$f_{(W(1),...W(n+m))}(w) = f_{(Z_1,...Z_{n+m})}(G^{-1}w)$$

les Z_t sont indépendantes ,donc :

$$f_{(W(1),...W(n+m))}(w) = \prod_{t=1}^{n+m} g_t(\sum_{j=0}^{t-1} B(j)w(t-j))$$

où g_t est la densité de Z_t

Par suite :

$$f_{(W(n),...W(n+m))}(w) = f_{n,m}(w) = \int_{\mathbb{R}^p} ... \int_{\mathbb{R}^p} \prod_{t=1}^{n+m} g_t(\sum_{j=0}^{t-1} B(j)w(t-j))dw_1..dw_{n-1}$$

D'autre part , Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} A(j)z^j$$

avec $z \in \overline{D(0,1)}$

Puisque f est non nulle pour tout z dans $\overline{D(0,1)}$alors en utilisant le théorème de Wiener nous obtenons que la fonction $1/f$ admet un développement en série entière sur le disque unité fermé .

Or d'aprés le lemme2.6 , les $B(j)$ ne sont autres que les coefficients de de z^j dans ce développement ,donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|B(j)\| < \infty$$

Sous les notations précédentes , nous avons :

$$\begin{aligned}\delta_{n,m}(u_n,...,u_{n+m}) &= \int |f_{n,m}(w^{(n)} - u^{(n)}) - f_{n,m}(w^{(n)})|dw_n...dw_{n+m} \\ &\leq \int |\prod_{t=1}^{n+m} g_t[\sum_{j=0}^{t-1} B(t-j)(w(j)-u(j))] - \prod_{t=1}^{n+m} g_t[\sum_{j=0}^{t-1} B(t-j)w(j)]|dw_1..dw_{n+m}\end{aligned}$$

avec $w^{(n)} = (w_n,...,w_{n+m})$ et $u^{(n)} = (u_n,...,u_{n+m})$et $u_j = 0$ pour $j \leq n-1$
Posons

$$(z_1,...z_{n+m}) = G^{-1}(w_1,...w_{n+m})$$

ce qui donne :

$$\delta_{n,m}(u_n,...,u_{n+m}) \leq \int |\prod_{t=1}^{n+m} g_t[z_t - (G^{-1}u)_t] - \prod_{t=1}^{n+m} g_t(z_t)|dz_1..dz_{n+m}$$

Soit

$$\alpha_t = g_t[z_t - (G^{-1}u)_t] - g_t(z_t)$$

donc :

$$\delta_{n,m}(u_n,...,u_{n+m}) \leq \int |\prod_{t=1}^{n+m} [g_t(z_t) + \alpha_t] - \prod_{t=1}^{n+m} g_t(z_t)|dz_1..dz_{n+m}$$

puis en utilisant le lemme 2.5et l'hypothèse i) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta_{n,m}(u_n,...,u_{n+m}) &\leq \int \sum_{t=1}^{n+m} [\prod_{j<t} g_j(z_j)]|\alpha_t|[\prod_{j>t} g_j(z_j)] \\ &\leq \sum_{t=1}^{n+m} \underbrace{\prod_{j<t} \int [g_j(z_j)]dz_j}_{=1} \int |\alpha_t|dz_t \underbrace{[\prod_{j>t} \int g_j(z_j)]}_{=1} \\ &\leq \sum_{t=1}^{n+m} \int |g_t[z_t - (G^{-1}u)_t] - g_t(z_t)|dz_t \\ &\leq K \sum_{t=1}^{n+m} \|(G^{-1}u)_t\|\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n+m} \|(G^{-1}u)_t\| &= \sum_{t=n}^{n+m} \| \sum_{j=n}^{t} B(t-j)u_j\| \quad u_j = 0 pour j \leq n-1 \\
&\leq \sum_{t=1}^{+\infty} \|B(t)\| \sum_{j=n}^{+\infty} \|u_j\| \\
&\leq K \sum_{j=n}^{+\infty} \|u_j\|
\end{aligned}$$

ceci est vrai pour tout $u^{(n)}$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ par suite :

$$\begin{aligned}
\delta_{n,m}(R_{n,m}) &\leq K \sum_{j=n}^{+\infty} \|V_j\| \\
&\leq K \sum_{j=n}^{+\infty} \sum_{k=j}^{+\infty} \|A(k)\| \|Z_{j-k}\| \\
&\leq K \sum_{j=n}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \|A(r+j)\| \|Z_{-r}\|
\end{aligned}$$

d'où :

$$\delta_{n,m}(R_{n,m}) \leq K \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha_{r+n} \|Z_{-r}\|$$

Démonstration 4.1 *(Démonstration du théorème) Soit $\{c_j\}_j$ une suite de nombres positifs .Comme par définition $\Delta_n \leq 2$,nous avons par les lemmes 4.1 et 4.2*

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n\|_1 &\leq 2KE(\sum_{r=0}^{+\infty} \alpha_{r+n} \|Z_{-r}\|) \\
&\leq 2KE(\sum_{r=n}^{+\infty} \alpha_r \|Z_{-r+n}\|) \\
&\leq 2KE(\sum_{r=n}^{+\infty} \alpha_r \|Z_{-r+n}\| (\mathbf{1}_{\|Z_{-r+n}\| \leq c_r} + \mathbf{1}_{\|Z_{-r+n}\| > c_r})) \\
&\leq 2K \sum_{r=n}^{+\infty} \alpha_r c_r + 2KE(\sum_{r=n}^{+\infty} \alpha_r \|Z_{-r+n}\| \mathbf{1}_{\|Z_{-r+n}\| > c_r}) \\
&\leq 2K \sum_{r=n}^{+\infty} \alpha_r c_r + 4K \sum_{r=n}^{\infty} P(\|Z_{-r+n}\| > c_r)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov on a ,

$$P(\|Z_{-r+n}\| > c_r) \leq \frac{K}{c_r^{\delta}}$$

finalement,en choisissant $c_r = \alpha_r^{-1/1+\delta}$ *nous obtenons*

$$\|\Delta_n\|_1 \leq c \sum_{j=n}^{+\infty} \alpha_j^{\frac{\delta}{1+\delta}} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$

et donc $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est absolument régulier.*

Conclusion

Nous avons étudié des propriétés de mélange des processus autorégressifs, processus linéaires et chaines de Markov. Plus particulièrement le mélange fort (α-mélange) introduit par Rosemblat en 1956. Nous avons développé les résultats des articles de .Chanda,K.C.(1974) V.V.Gorodetskii,(1977) , K.B.ATHREYA , S.G.PANTULA,(1986) ,.Donald W .K.Andrews.(1984) et en fin T.D.Pham ,L.T.Tran,(1985)

Nous nous sommes familiarisés avec différentes techniques probabilistes et analytiques .ainsi que l'intérêt des propriétés de mélange en théories des probabilités et statistiques. Nous avons remarqué aussi les conditions supplémentaires de Gorodetskii,(1977) pour améliorer les résultats de Chanda,K.C.(1974) ainsi que les exemples de processus non mélangeant.

Bibliographie

[1] ATHREYA ,K.B AND Ney ,P(1978) Anew approach to the limit theory of recurrent Markov chains.Trans.Amer.Math.Soc.245,493-501

[2] ATHREYA. K.B. , PANTULA.S.G.,(1986)Mixing properties of harris chains and autogressive processes.

[3] Barbé.P,Ledoux.M (2007) L3,M1 Probabilité. EDP.Sciences,France.

[4] Chanda,K.C.(1974)Strong mixing proprerties of linear stochastic process.J.Appl.Prob.11,401-408.

[5] Chesneau.C .A (2009) *Tail Bound For Sums Of Independent Random Variables And Application To The Pareto Distribution.*Applied Mathematics E-Notes.9, 300-306.

[6] Donald W .K.Andrews.(1984)Non strong mixing autoregressive process.J.Appl.Prob.21,930-934.

[7] Doukhan.P.(1994) Mixing :Properties and examples. Springer-Verlag ,New York.

[8] Fuller,W.A.(1976) Introduction to Statistical Time series.Wiley,New York.

[9] Gorodetskii.V.V.,(1977)On the strong mixing property for linear sequences.Theory Probab.Appl.22,411-413.

[10] Herbin.R.Analyse numérique . cours licence.université d'Aix-Marseille (2011-2012).p32 (démonstration p54)

[11] Ibrahimov.I.,Rozanov.Y(1974)Processus aléatoires gaussiens. Mir.Moscou.

[12] Pham.T.D. ,Tran.L.T.,(1985)Some mixing properties of time series models. Stochastic Processes and their Applications.19,297-303.

[13] Von Bahr .B and Esseen .C-G,Inequalities for the r-th absolute moment of sum of random variables ,$1 \leq r \leq 2$ Ann.Math.Statist,36(1965),pp.299-303

[14] A. Allam. Propriété de mélange des processus linéaires généraux et estimation d un ARHA (1) . Thèse de Doctorat, université de Tlemcen. (2007)

[15] Mourid.T .Contribution à la statistique des processus autorégressifs à temps continu. Thèse de Doctorat es Sciences, université Paris 6. (1995).