

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEM –

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



Thèse de Doctorat

Spécialité : Analyse Numérique des EDP

Présentée par :

Zouleykha Mahlia

Systeme de réaction diffusion modélisant l'évolution d'une espèce

Soutenue devant le jury composé de :

M. BENALILI
D.HADJSLIMANE
M. BENCHOHRA
A. LAKMECHE
T.MAHDJOUR
S.M. BOUGUIMA

Professeur, Université de Tlemcen
Professeur, Université de Tlemcen
Professeur, Université de Sidi Bel Abbas
Professeur, Université de Sidi Bel Abbas
Professeur, Université de Tlemcen
Professeur, Université de Tlemcen

Président
Examinatrice
Examineur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse

Année Universitaire : 2013-2014

Département de Mathématiques

z.mahlia@yahoo.fr

Faculté des sciences

BP 119 Tlemcen

Dédicaces

A mes parents, mes frères et sœurs , à Nadia et Abdelkader.

A mes amies, Amina , Ines, Meriem, Hayat, Amel, Sarra et Rousia.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à mon encadreur, Monsieur S.M .Bouguima, pour le sujet qu'il m'a proposé et pour ses conseils précieux durant toutes ces années. Je le remercie surtout pour ses qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de réaliser ce travail.

Je remercie le Professeur M. BENALILI qui a honoré ce travail en acceptant de présider le jury.

Je remercie les Professeurs M.BENCHOHRA, A.LAKMECHE, T.MAHDJOUR et Madame D.HADJ SLIMANE d'avoir accepté de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Je remerci ma famille pour le soutien moral pendant ces années.

Je remercie toute personne m'ayant aidé pour la réalisation de ce travail.

Table des Matières

Notations	4
Introduction	5
1 Préliminaires	9
1.1 Rappels sur les équations différentielles ordinaires:	9
1.2 Semi-groupe	10
1.3 Equation d'évolution semilinéaire	12
1.4 Stabilité au sens de Lyapunov	14
1.5 Systèmes quasi-monotones	15
1.6 Opérateurs quasi-m accréatifs	17
1.7 Outils d'analyse	19
2 Comportement asymptotique d'un système parabolique modélisant deux sous populations structurées en stade	22
2.1 Introduction	22
2.2 Analyse du système sans diffusion	24
2.2.1 Points d'équilibre et Etude de stabilité	25
2.3 Modèle avec diffusion	30
2.3.1 Préliminaires	30
2.3.2 Etude de l'existence de solutions locales de (2.1)	31

2.3.3	Positivité de la solution	32
2.3.4	Etude de l'existence de solutions globales de (2.1)	33
2.3.5	Etude du système stationnaire correspondant à (2.1)	34
2.3.6	Etude de bifurcation de solutions de (2.6)	36
2.3.7	Comportement asymptotique	43
3	Un modèle dégénéré de réaction diffusion avec diffusion verticale	47
3.1	Introduction	47
3.1.1	Le modèle mathématique	48
3.1.2	Hypothèses	48
3.2	Etude de l'existence de solutions globales de (3.1)	49
3.2.1	Changement de variables	49
3.2.2	Etude de l'existence de solutions globales de (3.3)	51
3.2.3	Positivité de la solution de (3.4)	52
3.2.4	Etude de l'existence de solutions globales de (3.4)	54
3.2.5	Etude de l'existence de solutions globales de (3.3)	55
3.2.6	Etude de l'existence de solutions de (3.1)	59
4	Un modèle dégénéré de réaction diffusion avec multi couches	60
4.1	Introduction	60
4.1.1	Le modèle mathématique.	61
4.1.2	Hypothèses	63
4.2	Etude de l'existence de solutions de (4.1)	65
4.2.1	Changement de variables	65
4.2.2	Formulation du problème de Cauchy	68
4.2.3	Analyse de positivité de la solution de (4.5)	76
4.2.4	Etude de l'existence de solutions globales de (4.5)	78
4.2.5	Etude de l'existence de solutions des problèmes (4.4) et(4.1)	80

4.3	Remarques et perspectives	84
5	Simulation numérique	85
5.1	Système sans diffusion	85
5.2	Système avec diffusion	88

Notations

Ω : Ensemble ouvert de \mathbb{R}^N .

$\partial\Omega$: La frontière de Ω .

$|\Omega|$: La mesure de Ω .

n : La normale unitaire extérieure à Ω .

Δu : Le laplacien de u .

$C(\Omega)$: Espace des fonctions continues définies sur Ω .

$C(\bar{\Omega})$: Espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ muni de la norme $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x)|$.

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions de classe k dans Ω .

$C_c^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω à support compact.

$L^p(\Omega)$: Espace des fonctions mesurables tel que la norme $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int |u(x)^p| \right]^{\frac{1}{p}} <$

∞ .

$L^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions bornées presque partout.

$W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev, à dérivée d'ordre 1 dans $L^p(\Omega)$.

$D(A)$: domaine d'un opérateur A .

$\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A .

$\sigma(A)$: spectre de l'opérateur A .

$\ker(A)$: Le noyau d'un opérateur linéaire A .

$\text{Im}(A)$: L'image d'un opérateur linéaire A .

Introduction

La dynamique des populations s'intéresse au développement des populations des êtres vivants. Son champ d'étude explique surtout la variation au cours du temps du nombre d'individus dans une population, leur composition par âge et l'influence de l'environnement sur les effectifs. Ces études permettent de repérer différents types de variations dans les populations: croissance, décroissance, extinction ou stabilité.

Les mathématiques sont présentes dans la dynamique des populations en particulier afin de modéliser la croissance de celles ci et les interactions qui peuvent exister entre elles.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude d'un système parabolique semilinéaire qui décrit la dynamique de deux sous populations de même espèce, adultes et juvéniles:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}u - d_1\Delta u = \sigma v - eu - cu(u+v) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t}v - d_2\Delta v = bu - fv - dv(u+v) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1)$$

où Ω est un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^2 . Les paramètres σ, e, c, b, f et d sont positifs fixés et

- u : densité des adultes
- v : densité des juvéniles
- σ : taux de juvéniles qui deviennent adultes
- e : taux de mortalité des adultes
- b : taux de natalité
- f : taux de mortalité des juvéniles
- c, d : compétition sur les ressources entre u, v .

Le système elliptique associé est traité dans les travaux de [8] et [2]. Dans [8], l'existence des solutions positives est établie en supposant que la solution triviale est instable. L'existence et l'unicité des solutions positives sont démontrées dans [2] en supposant que $b\sigma > ef$.

Nous commençons par rappeler quelques notions générales dans le premier chapitre. Dans le chapitre 2, notre objectif sera d'étudier le comportement asymptotique des solutions de (1) à l'aide de la théorie des systèmes quasi monotones (voir [4]). Sous certaines conditions, on montre que la solution évolue vers un équilibre positif ou bien elle tend vers la solution triviale (état d'extinction).

Dans le chapitre 3, on suppose qu'une population marine divisée en adultes et juvéniles est décrite par le système de réaction, diffusion- advection suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}u - d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - w_1 \frac{\partial u}{\partial x} - w_2 \frac{\partial u}{\partial y} - w_3 \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma v - eu - cu(u + v) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial t}v - d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - w_1 \frac{\partial v}{\partial x} - w_2 \frac{\partial v}{\partial y} - w_3 \frac{\partial v}{\partial z} = bu - fv - dv(u + v) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0, z^* \\ u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z), v(0, x, y, z) = v_0(x, y, z) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

(u, v) représente la densité de la population dans $\Omega = D \times (0, z^*)$ où D est un ouvert

borné et régulier de \mathbb{R}^2 . Les coordonnées verticales sont orientées vers le bas et la surface de la mer correspond à $z = 0$. Cette population ne vit pas sous un seuil $z = z^*$, une région au-dessous de thermocline (Couche d'eau de l'océan dont la température baisse rapidement avec la profondeur). Le courant océanique est donné par (w_1, w_2, w_3) .

Puisque la diffusion prend place seulement dans la direction verticale, le système ci dessus est dégénéré. Sous certaines hypothèses, on prouve l'existence des solutions en utilisant la méthode des caractéristiques et le théorème de point fixe de Banach.

Dans le chapitre 4, on suppose que cette population vit dans un habitat composé de n couches $\Omega = \cup_{i=1}^{i=n} D \times (z_{i-1}, z_i)$. Soit

$$(0, z^*) = \cup_{i=1}^{i=n} (z_{i-1}, z_i).$$

Dans chaque couche, le courant océanique est donné par (w_1^i, w_2^i, w_3^i) et (u^i, v^i) représente la population dispersée dans $\Omega_i = D \times (z_{i-1}, z_i)$. Pour $1 \leq i \leq n$, cette population est modélisée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u^i - d_1^i \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^2} - w_1^i \frac{\partial u^i}{\partial x} - w_2^i \frac{\partial u^i}{\partial y} - w_3^i \frac{\partial u^i}{\partial z} = \sigma v^i - e u^i - c u^i (u^i + v^i) \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial t} v^i - d_2^i \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} - w_1^i \frac{\partial v^i}{\partial x} - w_2^i \frac{\partial v^i}{\partial y} - w_3^i \frac{\partial v^i}{\partial z} = b u^i - f v^i - d v^i (u^i + v^i) \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T) \end{array} \right.$$

Sur l'interface entre les couches, nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^i \frac{\partial u^i}{\partial z}(t, x, y, z_i) = d_1^{i+1} \frac{\partial u^{i+1}}{\partial z}(t, x, y, z_i) \\ d_2^i \frac{\partial v^i}{\partial z}(t, x, y, z_i) = d_2^{i+1} \frac{\partial v^{i+1}}{\partial z}(t, x, y, z_i) \\ u^i(t, x, y, z_i) = u^{i+1}(t, x, y, z_i) \\ v^i(t, x, y, z_i) = v^{i+1}(t, x, y, z_i) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n-1$$

en même temps avec la condition:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial u^n}{\partial z}(t, x, y, z^*) = 0 \\ \frac{\partial v^1}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial v^n}{\partial z}(t, x, y, z^*) = 0 \end{array} \right.$$

qui signifie que le flux est nul sur le bord.

On s'intéresse à l'existence des solutions positives de ce système.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, on rappelle quelques notions générales qui seront utilisées dans la suite.

1.1 Rappels sur les équations différentielles ordinaires:

Considérons le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x), t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$F \in C(O, \mathbb{R}^n)$, O est un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} et $(t_0, x_0) \in O$.

Théorème 1.1 [24] *Pour tout $(t_0, x_0) \in O$, (1.1) admet au moins une solution définie sur un intervalle maximal $[t_0, T_{\max}[$.*

Définition 1.1 *F est localement Lipschitzienne par rapport à x si pour tout compacte $V \subset O$, le nombre $L = \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in V} \frac{|F(t,x) - F(t,y)|}{|x - y|}$ est fini.*

Théorème 1.2 [24] *Si F est localement Lipschitz continue par rapport à x , alors pour tout $(t_0, x_0) \in O$, (1.1) admet une solution unique $x(t) \in O$ définie sur un intervalle maximal $[t_0, T_{\max}[$.*

Soient f et g deux fonctions définies et continûment différentiables sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$. Considérons le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Théorème 1.3 (Poincaré-Bendixson) *Si la solution de (1.2) est à valeurs dans un compacte K inclus dans O , alors soit cette solution converge vers un équilibre, soit son comportement asymptotique est une fonction périodique appelée cycle limite.*

Théorème 1.4 (Dulac) [23] *Supposons que $O \subset \mathbb{R}^2$ est simplement connexe. Si $\nabla \cdot (f, g)$ ne change pas de signe sur O , alors (1.2) n'admet pas des solutions périodiques.*

1.2 Semi-groupe

Nous renvoyons le lecteur à [11], [18] et [21] pour plus de détails.

La théorie des semi-groupes trouve son origine dans l'étude de l'exponentielle des opérateurs. Elle relie l'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ à la résolution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Soit X un espace de Banach et $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires et bornés sur X .

Définition 1.2 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe sur X si :

- i) $T(0) = I$. (l'opérateur identité sur X)
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, pour chaque $t, s \geq 0$.

Définition 1.3 L'opérateur linéaire A défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \text{ et } Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

est le générateur infinitésimal de semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $D(A)$ est le domaine de A .

Définition 1.4 *Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit fortement continu si $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$. Un semi-groupe fortement continu est not e C_0 semi-groupe.*

Théorème 1.5 *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, alors $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire ferm e.*

Proposition 1.1 *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ une famille de C_0 semi-groupe. Il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$.*

Si $\|T(t)\| \leq 1$, on dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction.

Théorème 1.6 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, alors :*

- i) Pour tout $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ est une fonction continue de \mathbb{R}^+ vers X .*
- ii) Pour tout $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ et $A \int_0^t T(s)x ds = T(t)x - x$.*
- iii) Pour tout $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$.*

Définition 1.5 *On dit qu'un nombre réel λ appartient à $\rho(A)$, l'ensemble résolvant de l'opérateur A , si l'opérateur*

$$\lambda I - A : D(A) \rightarrow X$$

est bijectif.

Si $\lambda \in \rho(A)$, alors la résolvante de A , $R(\lambda, A) : D(A) \rightarrow X$ est définie par

$$R(\lambda, A)u = (\lambda I - A)^{-1}u$$

Théorème 1.7 (Hille Yosida) *L'opérateur linéaire $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ qui satisfait $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ ssi :*

i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X .

ii) $\rho(A)$ contient l'ensemble $]w, \infty[$ et $\|R(\lambda, A)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}$ pour $\lambda > w$,
 $n = 1, 2, \dots$

Définition 1.6 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur X . Pour $\delta \in (0, \pi)$, on définit $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \delta, z \neq 0\}$. On dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe analytique s'il admet une extension à une application $T(z)$ définie sur $\Delta_\delta \cup \{0\}$ et satisfait pour tout $z \in \Delta_\delta \cup \{0\}$:

1) $z \rightarrow T(z)$ est une application de $\Delta_\delta \cup \{0\}$ vers $L(X)$.

2) $z \rightarrow T(z)$ est analytique de $\Delta_\delta \cup \{0\}$ vers X .

3) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ pour tout $x \in X$.

4) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \Delta_\delta \cup \{0\}$.

Définition 1.7 Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur X . A est dit sectoriel si :

i) A est fermé et $D(A)$ dense dans X .

ii) Il existe $0 < \sigma \leq \frac{\pi}{2}$, $a \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que $\Sigma_\sigma(a) = \{z \in \mathbb{C}, |\arg(z - a)| > \sigma\}$ est inclus dans la résolvante de A et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \text{ pour tout } \lambda \in \Sigma_\sigma(a).$$

La proposition suivante caractérise les semi-groupes analytiques.

Proposition 1.1 Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est sectoriel.

ii) $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

iii) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est différentiable pour tout $t > 0$.

1.3 Equation d'évolution semilinéaire

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans X et $F : X \rightarrow X$ une fonction localement Lipchitzienne sur X .

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

et on suppose que $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X .

Théorème 1.8 [18] Pour tout $u_0 \in X$, l'équation

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(s)F(u(s))ds \quad (1.4)$$

admet une solution maximale et unique $u \in C([0, T_{\max}[, X)$.

De plus, si $T_{\max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \|u(t)\| = \infty$$

Cette solution est appelée solution faible de (1.3).

Proposition 1.2 [18] Pour tout $u_0 \in X$, l'équation (1.4) admet une solution globale $u \in C([0, \infty[, X)$ si la condition suivante est satisfaite :

Il existe une fonction continue $k : [0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ telle que $\|u(t)\| \leq k(t), \forall t \in [0, T_{\max}[$.

Définition 1.8 [18] Une fonction $u : [0, T[\rightarrow X$ est une solution classique de (1.3) sur $[0, T[$ si u est continue sur $[0, T[$, continument différentiable sur $]0, T[$, $u(t) \in D(A)$, $0 < t < T$ et (1.3) est satisfaite sur $[0, T[$.

Théorème 1.9 [18] (régularité) Supposons que $F : X \rightarrow X$ est continument différentiable, alors pour tout $u_0 \in D(A)$, la solution faible de (1.3) est une solution classique de (1.3).

Remarque 1.1 Si dans le théorème précédent $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est analytique, alors pour tout $u_0 \in X$, la solution faible de (1.4) est une solution classique de (1.3).

1.4 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On considère sur X le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où A est un opérateur linéaire.

Définition 1.9 *Un équilibre de (1.5) est un point u^* qui satisfait $F(u^*) - Au^* = 0$.*

Définition 1.10 *L'équilibre u^* de (1.5) est localement stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \|u(0) - u^*\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|u(t) - u^*\| < \varepsilon$$

Définition 1.11 *L'équilibre u^* de (1.5) est localement asymptotiquement stable s'il est stable et*

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|u(0) - u^*\| < \delta, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u^*\| = 0$$

Définition 1.12 *L'équilibre u^* de (1.5) est localement exponentiellement stable si*

$$\exists \alpha, \lambda, \delta > 0 \text{ tel que } \forall t > 0 \text{ et } \|u(0) - u^*\| < \delta, \text{ alors } \|u(t) - u^*\| < \alpha \|u(0) - u^*\| \exp(-\lambda t)$$

Définition 1.13 *Si la condition de stabilité asymptotique, (resp. exponentielle) est vérifiée quelque soit $u(0)$, alors le point d'équilibre u^* est dit globalement asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.*

Le théorème suivant exprime la stabilité en fonction des valeurs propres de l'opérateur linéaire $-A + F'(u^*)$.

Théorème 1.10 *Supposons que toutes les valeurs propres de l'opérateur linéaire $-A + F'(u^*)$ ont des parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre u^* de (1.5) est localement asymptotiquement stable.*

1.5 Systèmes quasi-monotones

Nous renvoyons le lecteur à [17] pour plus de détails.

Considérons le système parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_i - L_i u_i = f_i(u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \times [0, T[\\ u_i(0, x) = u_{i,0} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T[\end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

où

$$L_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(i)}(t, x) \partial^2 / \partial x_j \partial x_i + \sum_{j=1}^n b_j^{(i)}(t, x) \partial / \partial x_j$$

Soit $J_1 \times J_2$ un sous ensemble borné de \mathbb{R}^2 .

Définition 1.14 *Une fonction f_i est dite quasi monotone croissante si pour u_i fixé, f_i est croissante par rapport à u_j , $u_i \neq u_j$.*

Définition 1.15 *La fonction $f = (f_1, f_2)$ est dite quasi monotone croissante sur $J_1 \times J_2$ si f_1 et f_2 sont quasi monotones croissantes pour $(u_1, u_2) \in J_1 \times J_2$.*

Soient $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ et $\underline{u} = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$ un couple de fonctions vérifiant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} \geq 0 \geq \frac{\partial \underline{u}^i}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T[\\ \bar{u}_i(0, x) \geq u_{i,0} \geq \underline{u}^i(0, x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (1.7)$$

Définition 1.16 *Supposons que $f = (f_1, f_2)$ est quasi monotone croissante. Le couple de fonctions $\underline{u} = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$ et $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ est appelé sous et sur solution de (1.6) s'il satisfait: $\bar{u} \geq \underline{u}$, la condition (1.7) et*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_1 - L_1 \bar{u}_1 - f_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0 \geq \frac{\partial}{\partial t} \underline{u}^1 - L_1 \underline{u}^1 - f_1(\underline{u}^1, \underline{u}^2) \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_2 - L_2 \bar{u}_2 - f_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0 \geq \frac{\partial}{\partial t} \underline{u}^2 - L_2 \underline{u}^2 - f_2(\underline{u}^1, \underline{u}^2) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Définissons le secteur $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle = \{(u_1, u_2), (\underline{u}^1, \underline{u}^2) \leq (u_1, u_2) \leq (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\}$ et supposons qu'il existe des fonctions bornées $c_i : \Omega \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2$) telles que pour tout (u_1, u_2) et (v_1, v_2) dans $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle$, (f_1, f_2) satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u_1, u_2) - f_1(v_1, u_2) \geq -c_1(u_1 - v_1) \text{ pour } u_1 \geq v_1 \\ f_2(u_1, u_2) - f_2(u_1, v_2) \geq -c_2(u_2 - v_2) \text{ pour } u_2 \geq v_2 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

On suppose aussi qu'il existe des fonctions bornées $\bar{c}_i : \Omega \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2$) telles que pour tout (u_1, u_2) , (v_1, v_2) dans $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle$, (f_1, f_2) satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u_1, u_2) - f_1(v_1, u_2) \leq \bar{c}_1(u_1 - v_1) \text{ pour } u_1 \geq v_1 \\ f_2(u_1, u_2) - f_2(u_1, v_2) \leq \bar{c}_2(u_2 - v_2) \text{ pour } u_2 \geq v_2 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Nous citons maintenant le théorème d'existence des solutions pour (1.6).

Théorème 1.11 [17] *Soient $\underline{u} = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$ et $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ un couple de sous et sur solutions de (1.6) et (f_1, f_2) est quasi monotone croissante sur $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle$ et satisfait les conditions (1.9), (1.10), alors le problème (1.6) admet une solution unique $u = (u_1, u_2)$ dans $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle$.*

On considère maintenant le problème stationnaire associé à (1.6). Pour $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} L_i u_i = f_i(u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous avons le théorème et le lemme suivants qui expriment des résultats de comparaison et de convergence des solutions de (1.6).

Lemme 1.1 [17] Soient $\underline{u} = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$ et $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ un couple de sous et sur solution de (1.11) et

(f_1, f_2) une fonction quasi monotone croissante et de classe C^1 sur $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle$ et soient (\bar{U}, \bar{V}) la solution de (1.6) avec $(u_{1,0}, u_{2,0}) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ et $(\underline{U}, \underline{V})$ la solution de (1.6) avec $(u_{1,0}, u_{2,0}) = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$, alors $(\underline{U}, \underline{V}) \leq (\bar{U}, \bar{V})$.

Théorème 1.12 [17] soient $\underline{u} = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$ et $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ une sous et sur solution de (1.11) et (f_1, f_2) une fonction quasi monotone croissante et de classe C^1 sur $\langle \bar{u}, \underline{u} \rangle$, alors la solution (\bar{U}, \bar{V}) de (1.6) avec $(u_{1,0}, u_{2,0}) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ converge vers une solution de (1.11) et la solution $(\underline{U}, \underline{V})$ avec $(u_{1,0}, u_{2,0}) = (\underline{u}^1, \underline{u}^2)$ converge vers une solution de (1.11).

1.6 Opérateurs quasi-m accréatifs

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$.

Définition 1.17 L'opérateur A est:

- Accréatif si pour tout $u \in D(A)$, $\langle Au, u \rangle \geq 0$.
- m -accréatif s'il est accréatif et l'image $R(A)$ de A est H .
- Quasi m -accréatif s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda + A$ est m -accréatif.

Théorème 1.13 [11] A est quasi m -accréatif sur H ssi $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe quasi contractif sur H .

Nous citons maintenant quelques résultats qui se trouvent dans [16] .

Définition 1.18 Soit H et V deux espaces de Hilbert munis de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tels que V est dense dans H et $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme. On définit l'opérateur A par:

$$D(A) = \{u \in V, \exists f \in H \text{ tel que } a(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in V\}$$

$$Au := f$$

Théorème 1.14 [16] Si $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive et continue, alors l'opérateur $-A$ engendre un C_0 semi-groupe de contraction sur H .

Remarque 1.2 [16] Si la forme a^w définie par $a^w(u, v) = a(u, v) + w \langle u, v \rangle$ est coercive pour un certain $w \in \mathbb{R}$, alors $-A$ engendre un C_0 semi-groupe sur H .

Fixons un domaine régulier Ω de \mathbb{R}^n et des coefficients a_{ij}, b_j, c_i dans $L^\infty(\Omega)$ tels qu'il existe $\nu > 0$ qui satisfait $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta_i \zeta_j > \nu |\zeta|^2$.

On définit l'opérateur A par:

$$\begin{cases} Au = \sum_{i=1}^n D_j (\sum_{j=1}^n a_{ij} D_i u + b_j u) + (\sum_{i=1}^n c_i D_i u + du) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij} D_i u + b_j u) n_j = 0 \end{cases}$$

Soit $H := L^2(\Omega)$ et $V := H^1(\Omega)$.

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

avec $u_0 \in C(\bar{\Omega})$.

Le théorème 1.14 et la remarque 1.2 impliquent que A engendre un C_0 semi-groupe sur $L^2(\Omega)$. Pour la restriction de A sur $C(\bar{\Omega})$, on a le théorème suivant :

Théorème 1.15 [16] *Le problème (1.12) est bien posé dans $C(\overline{\Omega})$, qui veut dire que la partie $A^c = A \setminus_{C(\overline{\Omega})}$ de A sur $C(\overline{\Omega})$, ie, la restriction de A à*

$$D(A^c) = \{u \in D(A) \cap C(\overline{\Omega}), Au \in C(\overline{\Omega})\}$$

engendre un C_0 semi-groupe $S^c(t)$ sur $C(\overline{\Omega})$. Pour $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $S^c(t)u_0 \in C(\overline{\Omega})$.

1.7 Outils d'analyse

Théorème 1.16 (*inégalité de Young*) *Soit $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors:*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, (a, b > 0)$$

Théorème 1.17 (*inégalité de Young avec ε*)

$$ab < \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q, \text{ où } C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}, (a, b > 0)$$

Théorème 1.18 (*inégalité de Holder*) *Supposons $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$ alors :*

$$\int uv = \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}$$

Théorème 1.19 (*inégalité de Gronwall*) *Supposons que pour $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $a > 0$:*

$$\phi(t) \leq \delta_1 + \delta_2 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds$$

où ϕ et ψ sont des fonctions continues, $\phi(t) \geq 0$, $\psi(t) \geq 0$ et δ_1, δ_2 sont des constantes positives. Alors pour $t_0 \leq t \leq t_0 + a$:

$$\phi(t) \leq \delta_1 \exp(\delta_2 \int_{t_0}^t \psi(s)ds)$$

Théorème 1.20 (fonctions implicites) Soient X, Y, Z des espaces de Banach, O un ouvert de $X \times Y$ et $F : O \rightarrow Z$ une application.

Soit $(x_0, y_0) \in O$ tel que

$$F(x_0, y_0) = 0$$

Supposons que $F \in C^k(O, Z)$, ($k \geq 1$) et $D_x F(x_0, y_0) : X \rightarrow Z$ admet une application inverse bornée. Alors :

1) Il existe un voisinage $V \subset X$ de x_0 , un voisinage $W \subset Y$ de y_0 et une application unique $\Psi : W \rightarrow V$ tels que $\Psi(y_0) = x_0$ et pour $y \in W$, l'équation $F(x, y) = 0$ admet une solution unique $x = \Psi(y) \in V$.

2) L'application $\Psi \in C^k(W, V)$.

Le corollaire suivant est un résultat du théorème de Perron-Frobenius, [22].

Définition 1.19 [22] Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite quasi positive si $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite irréductible si pour tout sous ensemble I de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, il existe $i \in I$ et $j \in J = N \setminus I$ tel que $a_{ij} \neq 0$.

On dit que $B > A$ si $(B - A) \geq 0$ et $(B - A)$ admet au moins un élément non nul.

Corollaire 1.1 [22] soit $\sigma(A)$ le spectre de la matrice A et $S(A) = \max \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$.

Si A est une matrice quasi positive, alors $S(A) \in \sigma(A)$ et il existe $v > 0$ tel que $Av = S(A)v$.

Si de plus A est irréductible et B une matrice satisfaisante $B > A$, alors $S(B) > S(A)$.

Définition 1.20 Soit X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire $L : X \rightarrow Y$ est dit de Fredholm si

i) Le noyau de L , $\ker(L)$ est de dimension finie.

ii) L'image de L , $\operatorname{Im}(L)$ est fermée dans Y et de codimension finie.

Lemme 1.2 [20] *Si $L : X \rightarrow Y$ est un opérateur de Fredholm alors il existe X_1 un sous espace fermé de X et W un sous espace fermé de Y tels que:*

$$X = \ker(L) \oplus X_1$$

$$Y = \operatorname{Im}(L) \oplus W$$

Théorème 1.21 (Lax-Milgram) [7] *Soit H un espace de Hilbert et soit a une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H \times H$.*

Pour tout $\varphi \in H'$, le dual de H , il existe $u \in H$ unique tel que $a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H', H}$, $\forall v \in H$.

Chapitre 2

Comportement asymptotique d'un système parabolique modélisant deux sous populations structurées en stade

Ce chapitre est le développement de l'article [4]

2.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique des solutions du système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u - d_1 \Delta u = \sigma v - eu - cu(u + v) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t} v - d_2 \Delta v = bu - fv - dv(u + v) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Si la diffusion est ignorée, ie, $d_1 = d_2 = 0$, le théorème de Dulac [24] permet de savoir si la solution d'une équation différentielle autonome est périodique ou pas, mais si la diffusion est présente, l'étude du comportement asymptotique devient difficile. Dans ce cas, on établit le comportement global des trajectoires.

Notre objectif est d'accomplir une étude analytique de (2.1). Deux aspects sont considérés: L'existence des solutions et leur comportement asymptotique. Il est important de comprendre sous quelles conditions le système évolue vers une solution stationnaire. Le système elliptique associé est traité dans les travaux [8],[9],[3] et [2].

Commençons d'abord avec le modèle sans diffusion en montrant l'existence des solutions et leur comportement, on considère après le système (2.1) pour lequel nous allons établir l'existence globale des solutions positives, la stabilité des solutions stationnaires et leur bifurcation de la solution triviale. La dernière partie de ce chapitre contient le résultat principal: Si la solution triviale est instable, alors le système converge vers un équilibre positif.

2.2 Analyse du système sans diffusion

Si le système (2.1) ne dépend pas de x , il s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma v - eu - cu(u + v) \\ \dot{v} = bu - fv - dv(u + v) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Proposition 2.1 *i) Pour tout u_0 et v_0 , le problème de Cauchy (2.2) admet une solution unique définie sur un intervalle maximal $[0, T_{\max})$: si $T_{\max} < \infty$, alors*

$$\limsup_{t \rightarrow T_{\max}} |u(t)| = \limsup_{t \rightarrow T_{\max}} |v(t)| = \infty$$

ii) Si $u_0, v_0 \geq 0$, alors $u(t), v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T_{\max})$.

iii) Les solutions u et v sont définies pour tout $t \geq 0$.

Preuve: La preuve de i) est classique. (Application directe du théorème 1.2).

ii) L'ensemble $\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0\}$ est positivement invariant par rapport au flot engendré par la solution. En effet, soit

$\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^2$ la projection orthogonale sur le cône positif $(\mathbb{R}^+)^2$ de \mathbb{R}^2 .

Soient:

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \sigma v - eu - cu(u + v) \\ f_2(u, v) &= bu - fv - dv(u + v) \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} f_1(\Pi(u, v)) &= \sigma v^+ - eu^+ - cu^+(u^+ + v^+) \\ f_2(\Pi(u, v)) &= bu^+ - fv^+ - dv^+(u^+ + v^+) \end{aligned}$$

f_1 et f_2 satisfont:

$$f_1(\Pi(u, v))u^- \geq 0, f_2(\Pi(u, v))v^- \geq 0$$

Considérons le système modifié:

$$\begin{cases} \dot{u} = f_1(\Pi(u, v)) \\ \dot{v} = f_2(\Pi(u, v)) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

Multiplions la première équation par u^- et intégrons sur $(0, t)$, nous avons:

$$(u^-(t))^2 \leq (u^-(0))^2$$

Puisque $u_0 \geq 0$, on déduit que $u^- = 0$.

De même, on obtient $v^- = 0$.

Puisque sur le cône positif, $f_i(u, v) = f_i \circ \Pi(u, v)$, $i = 1, 2$, on déduit que la solution (u, v) de (2.2) est positive.

iii) De (2.2), nous avons:

$$(u + v)' \leq \max(\sigma, b)(u + v)$$

Par application de l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$(u + v)(t) \leq (u + v)(0) \exp(\max(\sigma, b)t), \forall t \in [0, T_{\max})$$

Ceci implique que (u, v) est définie sur $[0, \infty[$. ■

2.2.1 Points d'équilibre et Etude de stabilité

Proposition 2.2 *Le système (2.2) admet deux équilibres :*

a) *Si $b\sigma < ef$, alors $(0, 0)$ est un équilibre unique de (2.2).*

b) Si $b\sigma > ef$, alors $(0,0)$ et (u^*,v^*) , avec $0 < u^* < \frac{\sigma}{c}$ et $0 < v^* < \frac{b}{d}$, sont deux équilibres de (2.2).

Preuve: Les équilibres de (2.2) sont solutions du système :

$$\begin{cases} \sigma v - eu - cu(u+v) = 0 \\ bu - fv - dv(u+v) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour trouver ces équilibres, nous considérons l'intersection des isoclines. A partir des isoclines des adultes et des juvéniles on trouve :

$$v = \frac{eu + cu^2}{\sigma - cu}$$

et $v = \frac{2bu}{\sqrt{(f + du)^2 + 4bdu} + (f + du)}$

Soient

$$g(u) = \frac{eu + cu^2}{\sigma - cu}$$

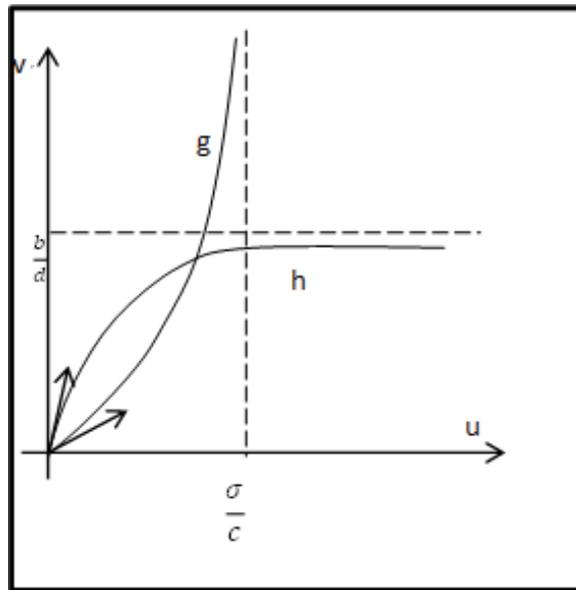
$$h(u) = \frac{2bu}{\sqrt{(f + du)^2 + 4bdu} + (f + du)}$$

Alors les dérivées de g et h sont

$$g'(u) = \frac{(2cu + e)(\sigma - cu) + c(eu + cu^2)}{(\sigma - cu)^2} > 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\sigma}{c}\right[$$

et

$$h'(u) = \frac{2bf\sqrt{(f + du)^2 + 4bdu} + 4b^2du + 2bf(f + du)}{\sqrt{(f + du)^2 + 4bdu}(\sqrt{(f + du)^2 + 4bdu} + f + du)^2} > 0 \text{ sur } [0, \infty[$$



Il est facile d'observer que g est convexe et h est concave avec

$$g'(0) = \frac{e}{\sigma}, h'(0) = \frac{b}{f}$$

La figure ci dessus montre Le graphe de g et h si $\frac{b}{f} > \frac{e}{\sigma}$.

Ce graphe suggère qu'il ya un seul équilibre non trivial.

Cet équilibre correspond à la valeur:

$$u^* = \frac{-2C}{\sqrt{\Delta} + B} > 0$$

où

$$A = \sigma cd - c^2 f - c^2 b + cde$$

$$B = \sigma cf + e\sigma d - ecf + de^2 + 2cb\sigma$$

$$C = \sigma(e f - b\sigma)$$

et

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Nous observons que h et g se rencontrent en un point $(u^*, h(u^*)) = (u^*, g(u^*))$ tel que $0 < u^* < \frac{\sigma}{c}$ et $0 < h(u^*) < \frac{b}{d}$. ■

Remarque 2.1 La matrice Jacobienne du système (2.2) au point $(0, 0)$ prend la forme

$$J = \begin{pmatrix} -e & \sigma \\ b & -f \end{pmatrix}$$

donc $(0, 0)$ est instable si $b\sigma > ef$. On déduit que l'équilibre positif existe si l'équilibre $(0, 0)$ est instable.

Proposition 2.3 Si u_0 et v_0 sont positives, alors

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq K = \frac{\max(\sigma, b)}{\min(c, d)} \text{ et } \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq K = \frac{\max(\sigma, b)}{\min(c, d)}$$

Preuve: Soit

$$w = u + v$$

alors

$$w' \leq \max(\sigma, b)w - \min(c, d)w^2$$

Les arguments standards de comparaison donnent :

$$w \leq z$$

où z est la solution de l'équation Logistique :

$$\begin{cases} z' = \max(\sigma, b)z - \min(c, d)z^2 \\ z(0) = w(0) \end{cases}$$

Nous savons que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} z(t) \leq K = \frac{\max(\sigma, b)}{\min(c, d)}$$

Cela prouve le résultat désiré. ■

Nous allons établir que (2.2) n'admet pas des solutions périodiques. Notre méthode nécessite l'application du critère de Poincaré-Bendixson. Par conséquent, on établit le comportement global des solutions.

Théorème 2.1 *Le système (2.2) n'admet pas des solutions périodiques. De plus, si $b\sigma < ef$, alors (u, v) converge vers $(0, 0)$. Si $b\sigma > ef$, alors (u, v) converge soit vers l'origine, soit vers (u^*, v^*) .*

Preuve: Soient

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \sigma v - eu - cu(u + v) \\ g(u, v) &= bu - fv - dv(u + v) \end{aligned}$$

alors la divergence de (f, g) est

$$\operatorname{div}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0 \text{ sur } (\mathbb{R}^+)^2$$

Il suit du critère de Dulac que le système (2.2) n'admet pas des solutions périodiques.

Si $b\sigma < ef$, le système (2.2) a un équilibre unique $(0, 0)$, donc la proposition précédente et le théorème de Poincaré-Bendixson impliquent que la solution positive du système (2.2) converge vers $(0, 0)$.

Si $b\sigma > ef$, alors le système (2.2) admet deux équilibres: $(0, 0)$ et (u^*, v^*) , dans ce cas, la solution converge soit vers $(0, 0)$, soit vers (u^*, v^*) . ■

2.3 Modèle avec diffusion

La recherche de la nourriture par la population est accomplie par des mouvements aléatoires. Cette dispersion est modélisée par l'opérateur laplacien (noté Δ). Ajoutons la diffusion au système (2.2), on obtient un système de réaction diffusion comme (2.1).

2.3.1 Préliminaires

Nous citons d'abord quelques résultats obtenus sur le système suivant:

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = \sigma v - eu - cu(u+v) & \text{dans } \Omega \\ -d_2\Delta v = bu - fv - dv(u+v) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

et qui seront utilisés dans cette section.

Soit $X = C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$ et $Y = C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$. On définit $L : X \rightarrow Y$ par

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -d_1\Delta u \\ -d_2\Delta v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma v - eu \\ bu - fv \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

Théorème 2.2 [8] *L'opérateur L admet une valeur propre principale, ie, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et des fonctions $u, v \gg 0$ telles que :*

$$\begin{cases} -d_1\Delta u - \sigma v + eu = \lambda_1 u \\ -d_2\Delta v - bu + fv = \lambda_1 v \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Dans [8], l'existence des solutions positives est exprimée en fonction de la valeur propre principale λ_1 :

Théorème 2.3 [8] *Le système (2.4) admet une solution positive ssi $\lambda_1 < 0$.*

Puisqu' on a pris les coefficients constants, il découle de [2] que :

Théorème 2.4 *Si $b\sigma > ef$, alors (2.4) admet une solution strictement positive unique dans $[0, \frac{\sigma}{c}] \times [0, \frac{b}{d}]$.*

On passe maintenant à l'étude de (2.1).

2.3.2 Etude de l'existence de solutions locales de (2.1)

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence locale des solutions de (2.1) dans l'espace de Banach $X = C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$.

Proposition 2.4 *Pour tout $(u_0, v_0) \in X$, il existe $T_{\max} > 0$ tel que (2.1) admet une solution unique définie sur $[0, T_{\max}[$. De plus, si T_{\max} est maximal et $T_{\max} < \infty$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} (\|u(t)\|_{C(\bar{\Omega})} + \|v(t)\|_{C(\bar{\Omega})}) = +\infty$$

Preuve: Soit:

$$A : D(A) \subset X \rightarrow X, AU = (A_1u, A_2v) = (d_1\Delta u, d_2\Delta v)$$

$$D(A) = D(A_1) \times D(A_2) \text{ et}$$

$$D(A_i) = \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}); A_i u \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \quad i = 1, 2$$

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $T(t) = (T_1(t), T_2(t))$ sur X où $T_i(t)$ est engendré par A_i , $i = 1, 2$, (voir [22]).

La première étape est de convertir le système à une équation intégrale en utilisant la formule de variation de la constante:

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)F(U(s))ds \quad (2.5)$$

Ici,

$$U = (u, v), F(U) = (\sigma v - eu - cu(u + v), bu - fv - dv(u + v))$$

Puisque F est localement Lipschitzienne sur X , le théorème 1.8 implique que (2.5) admet une solution unique définie sur un intervalle maximal $[0, T_{\max}[$. En plus, comme F est continument différentiable sur X et $T(t)$ est analytique, U est une solution classique de (2.1), (voir le théorème 1.9 et la remarque 1.1). ■

2.3.3 Positivité de la solution

On montre que (2.1) préserve la positivité.

Proposition 2.5 *Si $u_0, v_0 \geq 0$, alors $u(t, \cdot), v(t, \cdot) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve: Soit $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^2$ la projection orthogonale sur le cône positif $(\mathbb{R}^+)^2$ de \mathbb{R}^2 .

Soient

$$f_1(u, v) = \sigma v - eu - cu(u + v)$$

$$f_2(u, v) = bu - fv - dv(u + v)$$

On a:

$$f_1(\Pi(u, v)) = \sigma v^+ - eu^+ - cu^+(u^+ + v^+)$$

$$f_2(\Pi(u, v)) = bu^+ - fv^+ - dv^+(u^+ + v^+)$$

f_1 et f_2 satisfont

$$f_1(\Pi(u, v))u^- \geq 0, f_2(\Pi(u, v))v^- \geq 0$$

Considérons le système modifié:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - d_1 \Delta u = f_1(\Pi(u, v)) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t} v - d_2 \Delta v = f_2(\Pi(u, v)) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

Multiplions la première équation par u^- et intégrons sur Ω , nous avons

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u^-|^2 dx - d_1 \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx \geq 0$$

On déduit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (u^-)^2 dz$$

Puisque $u_0 \geq 0$, l'inégalité de Gronwall implique que $u^- = 0$.

De même, $v^- = 0$.

Puisque sur le cône positif, $f_i(u, v) = f_i \circ \Pi(u, v)$, $i = 1, 2$, on déduit que la solution (u, v) de (2.1) est positive. ■

2.3.4 Etude de l'existence de solutions globales de (2.1)

L'existence globale veut dire que la solution est définie pour tout $t \geq 0$. Elle est établie pour les solutions positives.

Proposition 2.6 *La solution (u, v) de (3.1) est définie sur $[0, \infty[$.*

Preuve: Soit:

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \sigma v - eu - cu(u + v) \\ &= (\sigma - cu)v - eu - cu^2 \end{aligned}$$

alors $f_1(u, v) \leq 0$ pour $u \geq \frac{\sigma}{c}$ et $v \geq 0$.

Posons $K = \max(\|u_0\|_{\infty}, \frac{\sigma}{c})$.

Multiplions la première équation dans (2.1) par $(u - K)^+$ et intégrons sur Ω , on obtient:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u - K)^+]^2 dx + d_1 \int_{\Omega} |\nabla(u - K)^+|^2 dx = \int_{\Omega} f_1(u, v)(u - K)^+$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u - K)^+]^2 dx \leq \int_{\Omega} f_1(u, v)(u - K)^+$$

Si $u \leq K$, alors $(u - K)^+ = 0$.

Si $u \geq K$, alors $f_1(u, v) \leq 0$ et nous avons de l'inégalité précédente:

$$\int_{\Omega} [(u(t) - K)^+]^2 dx \leq \int_{\Omega} [(u(0) - K)^+]^2 dx = 0$$

donc

$$(u(t) - K)^+ = 0 \text{ sur } \Omega$$

On déduit que $u(t, x) \leq K$, $(t, x) \in [0, T_{\max}] \times \Omega$.

De même, on montre que $v(t, x) \leq M = \max(\|v_0\|_{\infty}, \frac{b}{d})$.

On conclut de la proposition 1.2 que la solution $(u(t), v(t))$ de (2.1) existe globalement sur X . ■

2.3.5 Etude du système stationnaire correspondant à (2.1)

Le système stationnaire correspondant à (2.1) est

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u = \sigma v - eu - cu(u + v) = f_1(u, v) & \text{dans } \Omega \\ -d_2 \Delta v = bu - fv - dv(u + v) = f_2(u, v) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous observons que les équilibres donnés par (2.2) sont aussi des solutions stationnaires de (2.1).

Proposition 2.7 *L'équilibre trivial $(0, 0)$ est instable ssi $b\sigma > ef$.*

Preuve: Le système linéarisé au voisinage de $(0, 0)$ est :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - d_1 \Delta u = \sigma v - eu & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial}{\partial t} v - d_2 \Delta v = bu - fv & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Soit $X = C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$ et $Y = C(\bar{\Omega})$. On définit $L : X \rightarrow Y$ par:

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \Delta u \\ -d_2 \Delta v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma v - eu \\ bu - fv \end{pmatrix}$$

Le théorème 2.2 implique qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et des fonctions $u, v \gg 0$ telles que :

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u - \sigma v + eu = \lambda_1 u \\ -d_2 \Delta v - bu + fv = \lambda_1 v \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Intégrons sur Ω les deux cotés de (2.7), on obtient :

$$\begin{cases} -\sigma \int_{\Omega} v + e \int_{\Omega} u = \lambda_1 \int_{\Omega} u \\ -b \int_{\Omega} u + f \int_{\Omega} v = \lambda_1 \int_{\Omega} v \end{cases}$$

Soit $\xi = \frac{\int_{\Omega} u}{\int_{\Omega} v} > 0$, nous avons donc :

$$\begin{cases} \frac{-\sigma}{\xi} + e = \lambda_1 \\ -b\xi + f = \lambda_1 \end{cases}$$

Pour déterminer λ_1 , on résout l'équation algébrique en $\xi > 0$ donnée par:

$$b\xi^2 + (e - f)\xi - \sigma = 0$$

Cette équation admet deux solutions:

$$\xi_1 = \frac{1}{2b}((f - e) + \sqrt{(f - e)^2 + 4b\sigma}) > 0, \xi_2 = \frac{1}{2b}((f - e) - \sqrt{(f - e)^2 + 4b\sigma}) < 0$$

Par un calcul simple, on trouve que :

$$\lambda_1 = -b\xi_1 + f = \frac{2(ef - b\sigma)}{\sqrt{(f - e)^2 + 4b\sigma} + (f + e)}$$

donc $\lambda_1 > 0$ ssi $ef - b\sigma > 0$. ■

Remarque 2.2 *On a prouvé que l'addition de diffusion n'a pas déstabilisé l'équilibre trivial de (2.2).*

2.3.6 Etude de bifurcation de solutions de (2.6)

On utilise dans ce qui suit les notations introduites dans la définition 1.19 et le corollaire 1.1 .

On montre que l'équilibre positif peut émerger de l'équilibre trivial.

Soit:

$$X = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, Y = L^p(\Omega) \text{ avec } p > n$$

On considère le problème de bifurcation

$$J(\lambda, (u, v)) = L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

où λ est un paramètre réel positif et les opérateurs L , A et G sont définis de $X \times X$ vers $Y \times Y$ par :

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \Delta u \\ d_2 \Delta v \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma v - eu \\ bu - fv \end{pmatrix}$$

et

$$G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cu(u+v) \\ -dv(u+v) \end{pmatrix}$$

Il est clair que $(0, \lambda)$ est une solution triviale de (2.8). Le problème de bifurcation est de chercher les solutions non triviales de la forme $(u(\lambda), v(\lambda), \lambda)$ qui bifurquent à partir d'une branche de solutions triviales suivant les valeurs de λ . Pour ce faire, on analyse la structure locale des solutions positives du problème (2.8) au voisinage de $\lambda = 0$. On trouve l'équation de bifurcation par la méthode de Lyapunov-Schmidt, [20].

Le noyau de L est donné par

$$\begin{aligned} \ker L &= \{(u, v) \in X \times X, L(u, v) = 0\} \\ &= \{(u, v) \in X \times X, (u, v) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Proposition 2.8 $DJ_{(u,v)}(0, 0) : X \times X \rightarrow Y \times Y$ est un opérateur de Fredholm.

Preuve: On a: $DJ_{(u,v)}(0, 0)(u, v) := L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \Delta u \\ d_2 \Delta v \end{pmatrix}$.

$\dim(\ker(L)) = 2 < \infty$.

L'image de L est fermée dans $Y \times Y$, voir [14].

Puisque $\ker(L) \subset Y \times Y$, $\ker(L)$ et $\text{Im}(L)$ sont en somme directe, en effet : soit

$(\alpha, \beta) \in \ker(L) \cap \text{Im}(L)$, ceci implique que:

$$L(\alpha, \beta) = 0 \text{ et il existe } (u, v) \in X \times X \text{ tel que } L(u, v) = (\alpha, \beta)$$

donc

$$\begin{cases} d_1 \Delta u = \alpha \text{ dans } \Omega \\ d_2 \Delta v = \beta \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On intègre sur Ω , on trouve que $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. ■

Proposition 2.9 *Les espaces $X \times X$ et $Y \times Y$ peuvent être décomposés comme suit :*

$$X \times X = \ker L \oplus X_1$$

et

$$Y \times Y = \ker L \oplus Y_1$$

Preuve: Puisque $DJ_{(u,v)}(0, 0) : X \times X \rightarrow Y \times Y$ est un opérateur de Fredholm, donc:

$$X \times X = \ker L \oplus X_1$$

et

$$Y \times Y = \text{Im}(L) \oplus W$$

voir le lemme 1.2. $\ker(L)$ et $\text{Im}(L)$ sont en somme directe, en effet: $Y \times Y = \ker L \oplus \text{Im}(L)$, ie, $Y_1 = \text{Im}(L)$ et $W = \ker L$. ■

Soient P et Q les projections orthogonaux sur X_1 et Y_1 respectivement.

Chaque élément $(u, v) \in X \times X$ admet une décomposition de la forme :

$$(u, v) = (\alpha, \beta) + U, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad U = P(u, v) \in X_1$$

Il est clair que (2.8) est équivalent à

$$\begin{cases} QLU + \lambda QAU + \lambda QG((\alpha, \beta) + U) = 0 \\ A(\alpha, \beta) + (I - Q)G((\alpha, \beta) + U) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Lemme 2.1 *L'opérateur $QL : X_1 \rightarrow Y_1$ est inversible.*

Preuve: Soit $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X_1$ tel que $QL \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$, alors $L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \ker L$.

Ceci implique qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)$,

alors

$$\begin{cases} d_1 \Delta u = \alpha \text{ dans } \Omega \\ d_2 \Delta v = \beta \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

Intégrons (2.10) sur Ω , on obtient :

$$(\alpha, \beta) = (0, 0)$$

et

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (0, 0)$$

ce qui implique que

$$(u, v) \in X_1 \cap \ker L = \{(0, 0)\}$$

Soit (x_1, x_2) fixé dans Y_1 . Par les résultats classiques des équations elliptiques, (voir [7]), le système

$$\begin{cases} d_1 \Delta u = x_1 \\ d_2 \Delta v = x_2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

admet une solution unique $(u, v) \in X \times X$, donc $(u, v) = (\alpha, \beta) + U \in \ker L + X_1$. On

conclut que U est la solution du système (2.11). ■

Soit

$$\begin{aligned} T(., (\alpha, \beta)) &: \mathbb{R} \times X_1 \rightarrow Y_1 \\ T(\lambda, U, (\alpha, \beta)) &= QLU + \lambda QAU + \lambda QG((\alpha, \beta) + U) \end{aligned}$$

Théorème 2.5 *Il existe un voisinage O_λ de $\lambda = 0$, un voisinage $O_U \subset X_1$ de $U = 0$ et une fonction unique $\varphi : O_\lambda \rightarrow O_U$ telle que $T(\lambda, \varphi(\lambda, (\alpha, \beta)), (\alpha, \beta)) = 0, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.*

Preuve: On a $T(0, 0, (\alpha, \beta)) = 0$,

La dérivée de T au point $\lambda = 0$ et $U = 0$ est $D_U T(0, 0, (\alpha, \beta))V = QLV$ qui est inversible.

En Appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient le résultat désiré. ■

Utilisons le lemme précédent, le problème de bifurcation (2.8) est équivalent alors à :

$$F(\lambda, (\alpha, \beta)) = A(\alpha, \beta) + (I - Q)G((\alpha, \beta) + \varphi(\lambda, (\alpha, \beta))) = 0$$

On propose le résultat suivant:

Théorème 2.6 *Si $b\sigma > ef$, alors (2.8) admet une solution positive unique $(u(\lambda), v(\lambda))$ telle que $(u(0), v(0)) = (0, 0)$.*

Preuve: Soit

$$\varphi(\lambda, (\alpha, \beta)) = (\varphi_1(\lambda, (\alpha, \beta)), \varphi_2(\lambda, (\alpha, \beta)))$$

et

$$G((\alpha, \beta) + \varphi(\lambda, (\alpha, \beta))) = \begin{pmatrix} -c [\alpha(\alpha + \beta) + (2\alpha + \beta)\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \alpha\varphi_2] \\ -d [\beta(\alpha + \beta) + (2\beta + \alpha)\varphi_2 + \varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 + \beta\varphi_1] \end{pmatrix}$$

L'équation:

$$F(0, (\alpha, \beta)) = 0$$

implique que:

$$A(\alpha, \beta) + G(\alpha, \beta) = 0$$

donc on a deux solutions:

$$(\alpha, \beta) = (0, 0) \text{ ou } (\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*) \text{ avec } 0 < \alpha^* < \frac{\sigma}{c}, 0 < \beta^* < \frac{b}{d}, \text{ car } b\sigma > ef \text{ par hypothèse}$$

(voir la proposition 2.2)

L'opérateur linéaire

$$D_{(\alpha, \beta)}F(0, (0, 0))V = AV$$

est inversible si $b\sigma - ef > 0$, alors le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'un voisinage $O_{(0,0)} \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$, d'un voisinage $O_0 \subset \mathbb{R}$ de 0 et d'une fonction unique $\Phi : O_0 \rightarrow O_{(0,0)}$ telle que

$$F(\lambda, \Phi(\lambda)) = 0$$

De la même façon :

$$D_{(\alpha, \beta)}F(0, (\alpha^*, \beta^*)) = \begin{pmatrix} -e - 2c\alpha^* - c\beta^* & \sigma - c\alpha^* \\ b - d\beta^* & -f - d\alpha^* - 2d\beta^* \end{pmatrix}$$

Soit

$$M = D_{(\alpha, \beta)}F(0, (\alpha^*, \beta^*)) = \begin{pmatrix} -e - 2c\alpha^* - c\beta^* & \sigma - c\alpha^* \\ b - d\beta^* & -f - d\alpha^* - 2d\beta^* \end{pmatrix}$$

Puisque (α^*, β^*) est une solution de

$$\begin{cases} \sigma\beta^* - e\alpha^* - c\alpha^*(\alpha^* + \beta^*) = 0 \\ b\alpha^* - f\beta^* - d\beta^*(\alpha^* + \beta^*) = 0 \end{cases}$$

elle satisfait alors :

$$\begin{cases} (-e - c\alpha^*)\alpha^* + (\sigma - c\alpha^*)\beta^* = 0 \\ (b - d\beta^*)\alpha^* + (-f - d\alpha^*)\beta^* = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (α^*, β^*) est un vecteur propre de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} (-e - c\alpha^*) & (\sigma - c\alpha^*) \\ (b - d\beta^*) & (-f - d\alpha^*) \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre 0.

Puisque la trace de B est strictement négative, on conclut que B admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$.

Nous avons:

$$\sigma - c\alpha^* > 0$$

$$b - d\beta^* > 0$$

Ceci implique que M est irréductible. De plus, $M < B$. Appliquons le corollaire 1.1, on trouve que $S(M) < S(B) = 0$. Il découle que M est inversible. Le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'un voisinage $O_{(\alpha^*, \beta^*)}$ de (α^*, β^*) , d'un voisinage O_0 de 0 et d'une fonction $\Psi : O_0 \rightarrow O_{(\alpha^*, \beta^*)}$ telle que

$$F(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0.$$

Les deux solutions positives définies au voisinage de $\lambda = 0$ sont données par :

$$(u_1(\lambda), v_1(\lambda)) = \Phi(\lambda) + \varphi(\lambda, \Phi(\lambda))$$

et

$$(u_2(\lambda), v_2(\lambda)) = \Psi(\lambda) + \varphi(\lambda, \Psi(\lambda))$$

La valeur propre principale de $L + \lambda A$ est donnée par $Z(\lambda) = \frac{2\lambda(b\sigma - ef)}{\sqrt{(f-e)^2 + 4b\sigma + (f+e)}}$, voir la proposition 2.7 .

Si $\lambda > 0$, alors $Z(\lambda) > 0$, donc les résultats dans [8] et [2] impliquent que (2.8) admet une solution positive unique $(u(\lambda), v(\lambda))$.

L'unicité des solutions positives pour $\lambda > 0$ implique que $(u_1(\lambda), v_1(\lambda))$ n'est pas positive.

■

2.3.7 Comportement asymptotique

Des conditions suffisantes sont obtenues par Pao [17] pour assurer la convergence de la solution du système d'évolution vers une solution stationnaire comprise entre la sous et la sur solution.

Puisque les coefficients sont constants, le système (2.6) admet une solution unique dans l'intervalle $[0, \frac{\sigma}{c}] \times [0, \frac{b}{d}]$.

Soit $(\varphi_1, \varphi_2) > 0$ la fonction propre principale associée à λ_1 (définie dans le théorème (2.2)). On utilise la théorie des systèmes quasi monotones introduite dans la section 1.5. pour proposer les résultats suivants:

Proposition 2.10 *Si $\lambda_1 < 0$ et la condition initiale (u_0, v_0) satisfait*

$$\frac{\sigma}{c \max \varphi_1} \varphi_1 \leq u_0 \leq \frac{\sigma}{c}, \quad \frac{b}{d \max \varphi_2} \varphi_2 \leq v_0 \leq \frac{b}{d}$$

alors $\bar{u} = (\frac{\sigma}{c}, \frac{b}{d})$ est une sur solution de (2.1). et $\underline{u} = \varepsilon(\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\varepsilon < \min \left\{ \frac{\sigma}{c \max \varphi_1}, \frac{b}{d \max \varphi_2} \right\}$ est une sous solution de (2.1).

Preuve: On remarque d'abord que si $\varepsilon < \min \left\{ \frac{\sigma}{c \max \varphi_1}, \frac{b}{d \max \varphi_2} \right\}$, alors $\underline{u} \leq \bar{u}$ et $\bar{u} = (\frac{\sigma}{c}, \frac{b}{d})$ est une sur solution.

Supposons que $\lambda_1 < 0$ et posons $(\underline{u}^1, \underline{u}^2) = (\varepsilon\varphi_1, \varepsilon\varphi_2)$, on a :

$$\begin{aligned}
& -d_1 \Delta \underline{u}^1 - \sigma \underline{u}^2 + e \underline{u}^1 + c \underline{u}^1 (\underline{u}^1 + \underline{u}^2) \\
& = \varepsilon [-d_1 \Delta \varphi_1 + e \varphi_1 - \sigma \varphi_2] + c \varepsilon \varphi_1 [\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2] \\
& = \varepsilon \lambda_1 \varphi_1 + c \varepsilon^2 \varphi_1^2 + c \varepsilon^2 \varphi_1 \varphi_2 < 0
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (car $\lambda_1 < 0$ et $(\varphi_1, \varphi_2) > 0$). De même:

$$\begin{aligned}
& -d_2 \Delta \underline{u}^2 - b \underline{u}^1 + f \underline{u}^2 + d \underline{u}^2 (\underline{u}^1 + \underline{u}^2) \\
& = \varepsilon [-d_2 \Delta \varphi_2 - b \varphi_1 + f \varphi_2] + d \varepsilon \varphi_2 [\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2] \\
& = \varepsilon \lambda_1 \varphi_2 + d \varepsilon^2 \varphi_2^2 + d \varepsilon^2 \varphi_1 \varphi_2 < 0
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, d'où le résultat. ■

Remarque 2.3 On déduit de la proposition 2.7 que $\lambda_1 < 0$ ssi $b\sigma > ef$.

Le comportement du système (2.1) est considéré dans le théorème suivant:

Proposition 2.11 Soit $(u(\cdot, u_0), v(\cdot, v_0))$ la solution de (2.1) et (u, v) la solution positive de (2.6).

a) Supposons que $b\sigma > ef$. Si la condition initiale (u_0, v_0) satisfait:

$$\frac{\sigma}{c \max \varphi_1} \varphi_1 \leq u_0 \leq \frac{\sigma}{c}, \quad \frac{b}{d \max \varphi_2} \varphi_2 \leq v_0 \leq \frac{b}{d}$$

alors $(u(t, u_0), v(t, v_0))$ converge vers (u, v) quand $t \rightarrow \infty$.

b) Supposons que $b\sigma < ef$. Si la condition initiale (u_0, v_0) satisfait:

$$0 \leq u_0 \leq \frac{\sigma}{c}, \quad 0 \leq v_0 \leq \frac{b}{d}$$

alors $(u(t, u_0), v(t, v_0))$ converge vers $(0, 0)$ quand $t \rightarrow \infty$.

Preuve: on distingue deux cas: a) $b\sigma > ef$ et les valeurs initiales vérifient:

$$\frac{\sigma}{c \max \varphi_1} \varphi_1 \leq u_0 \leq \frac{\sigma}{c}, \quad \frac{b}{d \max \varphi_2} \varphi_2 \leq v_0 \leq \frac{b}{d}$$

Soient:

$$\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

avec ε tel que:

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{\sigma}{c \max \varphi_1}, \frac{b}{d \max \varphi_2} \right\}$$

et

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{c} \\ \frac{b}{d} \end{pmatrix}$$

un système de sous et sur solution de (2.1), respectivement. Puisque le système est quasi monotone croissant sur $\langle u_*, u^* \rangle$, avec $u_* = (\underline{u}, \underline{v})$, $u^* = (\bar{u}, \bar{v})$, le théorème 1.11 implique que (2.1) admet une solution unique satisfaisant:

$$\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u(t, u_0) \\ v(t, v_0) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

En particulier, pour un $t_1 > 0$ fixé, nous avons:

$$\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u(t_1, u_0) \\ v(t_1, v_0) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

Notons par $(\underline{U}, \underline{V})$, (\bar{U}, \bar{V}) les solutions de (2.1) correspondant respectivement aux fonctions initiales $(\underline{u}, \underline{v})$, (\bar{u}, \bar{v}) . Dans ce cas, le lemme (1.1) implique que:

$$\begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u(t + t_1, u_0) \\ v(t + t_1, v_0) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix}$$

De plus, le théorème (1.11) implique que les solutions $\begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix}$ restent dans le secteur $\langle u_*, u^* \rangle$. Il résulte des théorèmes 1.12 et 2.4 que

$$(u, v) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t + t_1, u_0), v(t + t_1, v_0)) \leq (u, v)$$

On conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, u_0), v(t, v_0)) = (u, v)$$

b) $b\sigma < ef$ et les valeurs initiales satisfont:

$$0 \leq u_0 \leq \frac{\sigma}{c}, 0 \leq v_0 \leq \frac{b}{d}$$

Dans ce cas, le système (2.6) admet seulement la solution triviale $(0, 0)$ et

$$\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une sous solution de (2.1).

Soit $t_1 > 0$ fixé, de la même façon, nous avons:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u(t_1, u_0) \\ v(t_1, v_0) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

Par les théorèmes 1.11, 1.12, le lemme 1.1 et le fait que pour $\lambda_1 > 0$, la solution unique de (2.6) est $(0, 0)$, on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, u_0), v(t, v_0)) = (0, 0)$$

■

Chapitre 3

Un modèle dégénéré de réaction diffusion avec diffusion verticale

3.1 Introduction

On considère une population marine qui vit dans un domaine à trois dimensions Ω et qui se diffuse seulement dans la direction verticale. Le cycle de vie de cette population est divisé en deux étapes, juvéniles et adultes. Chaque étape est modélisée par un système de réaction diffusion -advection. Un modèle similaire a été étudié par Arino [1]. Dans cet article, les auteurs ont mis des conditions restrictives sur les paramètres physiques (vitesse, diffusion verticale) qui rendent le modèle moins adapté à la réalité.

Un modèle plus réaliste mais avec des coefficients de diffusion constants a été étudié dans le contexte des polluants atmosphériques dans [12]. Dans [19], les auteurs ont prouvé l'existence globale de la solution du modèle considéré dans [12] avec des coefficients de diffusion distincts.

Notre approche consiste à formuler le problème sous forme d'un problème de Cauchy et d'utiliser le théorème de point fixe de Banach pour montrer l'existence et l'unicité des solutions.

3.1.1 Le modèle mathématique

Soit D un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^2 . La population vit dans un habitat donné par $\Omega = D \times (0, z^*)$. Les coordonnées verticales sont orientées vers le bas et la surface de la mer correspond à $z = 0$. Cette population ne vit pas sous un seuil $z = z^*$, une région au-dessous de thermocline. Le courant océanique est donné par (w_1, w_2, w_3) et (u, v) représente la densité de population dans Ω . Si on suppose que cette population se diffuse seulement dans la direction verticale, elle sera modélisée par le système de réaction diffusion- advection

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} u - d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - w_1 \frac{\partial u}{\partial x} - w_2 \frac{\partial u}{\partial y} - w_3 \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma v - eu - cu(u + v) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial t} v - d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - w_1 \frac{\partial v}{\partial x} - w_2 \frac{\partial v}{\partial y} - w_3 \frac{\partial v}{\partial z} = bu - fv - dv(u + v) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour } z = 0, z^* \\ u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z), v(0, x, y, z) = v_0(x, y, z) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

3.1.2 Hypothèses

On met les hypothèses suivantes sur la vitesse du courant :

La vitesse horizontale est indépendante de la variable verticale z et on suppose que

$w_1, w_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, et pour t fixé:

$$w_1(t, \cdot), w_2(t, \cdot) \in C^1(D)$$

De plus, on suppose que la vitesse verticale $w_3 : [0, z^*] \rightarrow \mathbb{R}$ dépend seulement de la variable z et elle est continument différentiable sur $[0, z^*]$.

Puisque on n'a pas imposé des conditions bilatérales, on suppose que les données initiales

$$(u_0, v_0) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$$

sont à support horizontal compact à l'intérieur de D .

L'opérateur dans (3.1) n'est pas uniformément parabolique. Sous ces hypothèses, on montre l'existence des solutions de (3.1) par la méthode des caractéristiques. Notre but sera de montrer l'existence de la solution sur le temps d'observation où son support n'atteindra pas les bords horizontaux.

3.2 Etude de l'existence de solutions globales de (3.1)

Le problème est résolu sur les lignes caractéristiques. Sur ces lignes, le système est réduit à une équation parabolique en dimension une.

3.2.1 Changement de variables

On définit les lignes caractéristiques $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ comme solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -w_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -w_2(t, x, y) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ici, la condition initiale (x_0, y_0) appartient au support de (u_0, v_0) . De la théorie des équations différentielles, ces solutions sont localement définies et C^1 par rapport à toutes les variables. Soit

$$I_t = \{(x_0, y_0) : (x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) \in D\}$$

Pour t fixé, on définit l'application $\Psi_t : I_t \rightarrow D$ par:

$$\Psi_t(x_0, y_0) = (x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$$

L'application Ψ_t définit un difféomorphisme .En effet , soit (x, y) fixé dans D , alors il existe (x_0, y_0) unique définie par:

$$(x_0, y_0) = \Psi_{-t}(x, y)$$

Ecrivons la solution (u, v) dans les nouvelles coordonnées (t, x_0, y_0, z) , nous aurons

$$\varphi_1(t, x_0, y_0, z) = u(t, \Psi_t(x_0, y_0), z)$$

et

$$\varphi_2(t, x_0, y_0, z) = v(t, \Psi_t(x_0, y_0), z)$$

En termes de (φ_1, φ_2) , le modèle s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - d_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = f_1(\varphi_1, \varphi_2) & \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = f_2(\varphi_1, \varphi_2) & \text{dans } (0, z^*) \\ \varphi_1(0, z) = u_0(x_0, y_0, z), \varphi_2(0, z) = v_0(x_0, y_0, z) & \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 & \text{pour } z = 0, z^* \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Pour (x_0, y_0) appartenant au support de (u_0, v_0) , soit:

$$T_o = \sup \{t > 0, \Psi_t(x_0, y_0) \in D\}$$

Nous observons que l'opérateur dans (3.3) est uniformément parabolique, cela va nous

aider à appliquer les résultats classiques concernant les équations paraboliques.

3.2.2 Etude de l'existence de solutions globales de (3.3)

On étudie l'existence des solutions dans l'espace de Banach $X = L^2(0, z^*) \times L^2(0, z^*)$.

Définissons l'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ par

$$A\varphi = (A_1\varphi_1, A_2\varphi_2) = \left(-d_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, -d_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)$$

où

$$D(A) = \left\{ \varphi \in H^2(0, z^*) \times H^2(0, z^*), \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = 0, z^* \right\} = D(A_1) \times D(A_2)$$

Proposition 1 Proposition 3.1 $-A$ engendre un semi-groupe analytique $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ sur X , où S_1, S_2 sont engendrés respectivement par $-A_1, -A_2$.

Preuve: Puisque $-A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est sectoriel sur X , (voir [14]), alors $-A$ engendre un semi-groupe analytique $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ sur X , où $S_1(t), S_2(t)$ sont engendrés respectivement par $-A_1, -A_2$. ■

Considérons maintenant le problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - d_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \sigma \varphi_2 - e \varphi_1 - ch_1(t, x)(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = b \varphi_1 - f v - dh_2(t, x)(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{dans } (0, z^*) \\ \varphi_1(0, z) = u_0(x_0, y_0, z), \varphi_2(0, z) = v_0(x_0, y_0, z) \quad \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0, z^* \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où $T > 0$ et $(h_1, h_2) \in C([0, T], L^\infty[0, z^*])^2$.

Proposition 3.2 *Le système (3.4) admet une solution classique $(\varphi_1, \varphi_2) \in C([0, T], X) \cap C^1(]0, T], X) \cap C(]0, T], D(A))$.*

Preuve: Ecrivons (3.4) sous forme d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + A\varphi = F(t, \varphi) \text{ sur } (0, T) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2), A\varphi = \left(-d_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, -d_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \text{ et} \\ F(\varphi) &= (\sigma \varphi_2 - e \varphi_1 - ch_1(t, x)(\varphi_1 + \varphi_2), b \varphi_1 - f v - dh_2(t, x)(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Puisque A engendre un semi-groupe analytique et $F : X \rightarrow X$ est globalement Lipschitzienne sur X , alors des résultats classiques sur les équations paraboliques semi-linéaires impliquent que (3.5) admet une solution classique $(\varphi_1, \varphi_2) \in C([0, T], X) \cap C^1(]0, T], X) \cap C(]0, T], D(A))$, (voir le théorème 1.7 page 190 dans [18]). ■

3.2.3 Positivité de la solution de (3.4)

On montre dans ce qui suit que (3.4) préserve la positivité de la solution.

Proposition 3.3 *Si $u_0, v_0 \geq 0$, alors $\varphi_1(t, \cdot), \varphi_2(t, \cdot) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve: On note par (u, v) la solution de (3.4). Multiplions la première équation de (3.4) par u^- et intégrons sur $(0, z^*)$, nous avons

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{z^*} u^{-2} dx - d_1 \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u^-}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^{z^*} w_3 \frac{\partial u^-}{\partial z} u^- \\ & = \sigma \int_0^{z^*} v u^- + e \int_0^{z^*} u^{-2} + c \int_0^{z^*} h_1 u^{-2} - c \int_0^{z^*} u^- v \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 - d_1 \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u^-}{\partial z} \right)^2 + c_1 \rho \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u^-}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_1}{\rho} \int_0^{z^*} (u^-)^2 dz \\ & \geq \sigma \int_0^{z^*} v u^- + e \int_0^{z^*} u^{-2} + c \int_0^{z^*} h_1 u^{-2} - c \int_0^{z^*} u^- v \end{aligned}$$

avec ρ vérifiant $d_1 - c_1 \rho > 0$ et $c_1 = \max_{[0, z^*]} |w_3(z)|$.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 & \leq \frac{c_1}{\rho} \int_0^{z^*} (u^-)^2 + \sigma \int_0^{z^*} v u^- \\ & + e \int_0^{z^*} u^{-2} + c \int_0^{z^*} h_1 u^{-2} + c \int_0^{z^*} h_1 u^- v \end{aligned}$$

Encore une fois, l'inégalité de Young implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 & \leq \varepsilon (\sigma + c \|h_1\|_\infty) \int_0^{z^*} v^2 dz \\ & + \frac{1}{\varepsilon} (\sigma + c \|h_1\|_\infty) \int_0^{z^*} u^{-2} dz + \left(e + \frac{c_1}{\rho} + c \|h_1\|_\infty \right) \int_0^{z^*} u^{-2} dz \end{aligned}$$

Si on choisit ε suffisamment petit, alors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 &\leq \frac{2}{\varepsilon} (\sigma + c \|h_1\|_\infty) \int_0^{z^*} u^{-2} dz + \left(e + \frac{c_1}{\rho} + c \|h_1\|_\infty\right) \int_0^{z^*} u^{-2} dz \\ &= C \int_0^{z^*} u^{-2} dz \end{aligned}$$

où $C = \frac{2}{\varepsilon} (\sigma + c \|h_1\|_\infty) + \left(e + \frac{c_1}{\rho} + c \|h_1\|_\infty\right)$.

Puisque $u_0 \geq 0$, l'inégalité de Gronwall implique que $u^- = 0$.

De la même façon, on montre que $v^- = 0$ et donc la solution (u, v) de (3.4) est positive.

■

3.2.4 Etude de l'existence de solutions globales de (3.4)

Pour établir l'existence globale de la solution de (3.4), on considère le système:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} - d_1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - w_3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \sigma \bar{v} - e \bar{u} & \text{dans } (0, z^*) \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{v} - d_2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - w_3 \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = b \bar{u} - f \bar{v} & \text{dans } (0, z^*) \times [0, T] \\ \bar{u}(0, z) = u_0(x_0, y_0, z), \bar{v}(0, z) = v_0(x_0, y_0, z) & \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(z, t) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}(z, t) = 0 & \text{pour } z = 0, z^* \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Proposition 3.4 *Le système (3.6) admet une solution classique unique*

$(\bar{u}, \bar{v}) \in (C([0, T], L^2(0, z^)) \cap C^1([0, T], L^2(0, z^*)))^2$, de plus, $(\bar{u}, \bar{v}) \in C([0, T], L^\infty(0, z^*))^2$.*

Preuve: On montre l'existence des solutions globales comme dans la proposition (3.2). Les résultats standards dans [15] (la proposition 1.2 et le théorème 1.1) impliquent que (\bar{u}, \bar{v})

existe de manière globale sur $L^\infty(0, z^*) \times L^\infty(0, z^*)$, ie, $(\bar{u}, \bar{v}) \in C([0, T], L^\infty(0, z^*))^2$. ■

Proposition 3.5 *La solution $(\varphi_1, \varphi_2) \in C([0, T], L^\infty(0, z^*))^2$.*

Preuve: Comme (φ_1, φ_2) est positive, par les arguments de comparaison, on obtient $(\varphi_1, \varphi_2) \leq (\bar{u}, \bar{v})$, donc, $(\varphi_1, \varphi_2) \in C([0, T], L^\infty(0, z^*))^2$. ■

3.2.5 Etude de l'existence de solutions globales de (3.3)

Soit $Q_T = [0, T] \times [0, z^*]$, $(\bar{u}, \bar{v}) \in L^\infty(Q_T) \times L^\infty(Q_T)$.

Proposition 3.6 *Le système (3.3) admet une solution positive $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^2(Q_T) \times L^2(Q_T)$ qui satisfait $(\varphi_1, \varphi_2) \leq (\bar{u}, \bar{v})$.*

Preuve: Soit

$$\Lambda = \{0 \leq (h_1, h_2) \in L^2(Q_T) \times L^2(Q_T), (h_1, h_2) \leq (\bar{u}, \bar{v})\}$$

On définit l'application L par

$$L : L^2(Q_T) \times L^2(Q_T) \rightarrow L^2(Q_T) \times L^2(Q_T), (h_1, h_2) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2), \text{ la solution de (3.4).}$$

Montrons que L est une contraction sur Λ :

Si $(h_1, h_2) \in \Lambda$, alors $L(h_1, h_2) = (\varphi_1, \varphi_2) \leq (\bar{u}, \bar{v})$, donc $L(h_1, h_2) \in \Lambda$.

Pour $(h_1, h_2) \in \Lambda$, $(g_1, g_2) \in \Lambda$, soient :

$$L(h_1, h_2) = (u_1, v_1), L(g_1, g_2) = (u_2, v_2), (w_1, w_2) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$$

$$\text{et } c_1 = \min_{[0, z^*]} w_3(z)$$

(w_1, w_2) satisfait :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} w_1 - d_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - w_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} \\
&= \sigma w_2 - e w_1 - c h_1 (u_1 + v_1) + c g_1 (u_2 + v_2) \\
&= \sigma w_2 - e w_1 - c h_1 w_1 + c (u_2 + v_1) (g_1 - h_1) - c g_1 w_2 \\
&= (\sigma - c g_1) w_2 - (c h_1 + e) w_1 + c (u_2 + v_1) (g_1 - h_1)
\end{aligned}$$

On multiplie les deux cotés par w_1 , on intègre sur $[0, z^*]$ et on utilise l'inégalité de Young, on aboutit à:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 + (d_1 - c_1 \rho) \left\| \frac{\partial}{\partial z} w_1 \right\|_{L^2(0, z^*)}^2 \\
& \leq \frac{c_1}{\rho} \|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 + \int_0^{z^*} (\sigma - c g_1) w_2 w_1 \\
& \quad + \int_0^{z^*} (c h_1 + e) w_1^2 + \int_0^{z^*} c w_1 (u_2 + v_1) (g_1 - h_1) \\
& \leq \frac{c_1}{\rho} \|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 + \frac{(\sigma + c \|\bar{u}\|_\infty)}{2} (\|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 \\
& \quad + \|w_2\|_{L^2(0, z^*)}^2) + (e + c \|\bar{u}\|_\infty) \|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 \\
& \quad + \frac{c(\|\bar{u}\|_\infty + \|\bar{v}\|_\infty)}{2} (\|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 + \|(g_1 - h_1)\|_{L^2(0, z^*)}^2) \\
& = C_1 \|w_1\|_{L^2(0, z^*)}^2 + C_2 \|w_2\|_{L^2(0, z^*)}^2 + C_3 \|(g_1 - h_1)\|_{L^2(0, z^*)}^2
\end{aligned}$$

où $\rho > 0$ est choisi tel que $(d_1 - c_1 \rho) > 0$ et

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{c_1}{\rho} + \frac{(\sigma + c \|\bar{u}\|_\infty)}{2} + (e + c \|\bar{u}\|_\infty) + \frac{c(\|\bar{u}\|_\infty + \|\bar{v}\|_\infty)}{2} \\
C_2 &= \frac{(\sigma + c \|\bar{u}\|_\infty)}{2} \\
C_3 &= \frac{c(\|\bar{u}\|_\infty + \|\bar{v}\|_\infty)}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|w_1\|_{L^2(0,z^*)}^2 \leq C_1 \|w_1\|_{L^2(0,z^*)}^2 + C_2 \|w_2\|_{L^2(0,z^*)}^2 + C_3 \|(g_1 - h_1)\|_{L^2(0,z^*)}^2$$

Par la même méthode précédente, on trouve aussi que :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|w_2\|_{L^2(0,z^*)}^2 \leq C_4 \|w_2\|_{L^2(0,z^*)}^2 + C_5 \|w_1\|_{L^2(0,z^*)}^2 + C_6 \|(g_2 - h_2)\|_{L^2(0,z^*)}^2$$

où

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{c_1}{\rho} + \frac{(e + d \|\bar{v}\|_\infty)}{2} + (b + d \|\bar{v}\|_\infty) + \frac{d(\|\bar{u}\|_\infty + \|\bar{v}\|_\infty)}{2} \\ C_5 &= \frac{(e + d \|\bar{v}\|_\infty)}{2} \\ C_6 &= \frac{d(\|\bar{u}\|_\infty + \|\bar{v}\|_\infty)}{2} \end{aligned}$$

$C_i > 0, i = 1, 6$. Donc:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (\|w_1(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|w_2(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2) \\ &\leq M_1 (\|w_1(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|w_2(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2) \\ &\quad + M_2 (\|(g_1 - h_1)(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|(g_2 - h_2)(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2) \end{aligned}$$

où

$$M_1 = \max(C_1 + C_5, C_2 + C_4)$$

$$M_2 = \max(C_3, C_6)$$

L'inégalité de Gronwall implique que

$$\begin{aligned} & \|w_1(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|w_2(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 \\ & \leq C \int_0^t (\|(g_1 - h_1)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|(g_2 - h_2)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2) ds \end{aligned}$$

C une constante positive qui dépend de T , (\bar{u}, \bar{v}) .

La norme $\int_0^T \exp(-4Ct) \|u(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 dt$ est équivalente à la norme usuelle dans $L^2(Q_T)$, notons cette norme par $\|\cdot\|$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|(w_1, w_2)\|^2 &= \|w_1(t)\|^2 + \|w_2(t)\|^2 \\ &= \int_0^T \exp(-4Ct) (\|w_1(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|w_2(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2) dt \\ &\leq C \int_0^T \int_0^t (\|(g_1 - h_1)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|(g_2 - h_2)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2) ds \exp(-4Ct) dt \\ &= C \int_0^T (\|(g_1 - h_1)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|(g_2 - h_2)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2) \int_s^T \exp(-4Ct) dt ds \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^T (\|(g_1 - h_1)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \|(g_2 - h_2)(s)\|_{L^2(0,z^*)}^2) \exp(-4Cs) ds \\ &= \frac{1}{4} \|(g_1, g_2), (h_1, h_2)\|^2 \end{aligned}$$

Donc L est une contraction par rapport à $\|\cdot\|$, par conséquent, il admet un point fixe unique dans Λ qui est la solution unique de (3.3). ■

On en déduit le résultat suivant:

3.2.6 Etude de l'existence de solutions de (3.1)

Proposition 3.7 *Pour tout (x_0, y_0) dans le support de (u_0, v_0) , (3.1) admet une solution positive (u, v) définie sur le temps maximal d'observation $[0, T_o]$ où son support reste à l'intérieur de D .*

Preuve: Il suffit de voir que pour $t \in [0, T_o]$, $(x, y) \in D$ et $z \in [0, z^*]$,
 $(u(t, x, y, z), v(t, x, y, z)) = (\varphi_1(t, \Psi(-t, x, y), z), \varphi_2(t, \Psi(-t, x, y), z))$, donc l'existence globale et la positivité de (u, v) résulte de l'existence globale et la positivité de (φ_1, φ_2) .

■

Chapitre 4

Un modèle dégénéré de réaction diffusion avec multi couches

Ce chapitre est le développement de l'article [5]

4.1 Introduction

On considère une population marine vivante dans un environnement composé de n couches. Le cycle de vie de cette population est divisé en deux étapes: adultes et juvéniles. Chaque étape est modélisée par une équation de réaction, diffusion-advection. Ainsi, nous avons un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles avec n couches. Ces couches sont arrangées selon la température d'habitat. Dans [6], l'auteur a proposé un système multi couches pour résoudre le cas général du problème introduit dans [1].

Pour notre modèle, on prend en compte deux caractéristiques :

- Les coefficients de diffusion dépendent de l'âge de la population et de la profondeur de L'océan.
- La vitesse du flux change selon les couches.

Notre approche consiste à formuler le modèle sous forme d'un problème de Cauchy et

d'utiliser la théorie des opérateurs m -accrétifs comme dans [10] .

4.1.1 Le modèle mathématique.

Soit D un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^2 , la population vit dans un habitat donné par

$$\Omega = \cup_{i=1}^{i=n} D \times (z_{i-1}, z_i).$$

La coordonnée verticale est orientée vers le bas et la surface de la mer correspond à $z = 0$. Le mouvement aléatoire dépend de la profondeur de l'océan et la population des poissons ne vit pas sous un seuil $z = z^*$, une région au-dessous de thermocline.

Soit

$$(0, z^*) = \cup_{i=1}^{i=n} (z_{i-1}, z_i).$$

Le courant océanique est donné par (w_1^i, w_2^i, w_3^i) et (u^i, v^i) représente la densité de la population dans $\Omega_i = (z_{i-1}, z_i) \times D$ où u^i, v^i sont respectivement la densité des adultes et des juvéniles dans Ω_i .

Pour $1 \leq i \leq n$, on considère le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u^i - d_1^i \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^2} - w_1^i \frac{\partial u^i}{\partial x} - w_2^i \frac{\partial u^i}{\partial y} - w_3^i \frac{\partial u^i}{\partial z} = \sigma v^i - e u^i - c u^i (u^i + v^i), \text{ dans } \Omega_i \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial t} v^i - d_2^i \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} - w_1^i \frac{\partial v^i}{\partial x} - w_2^i \frac{\partial v^i}{\partial y} - w_3^i \frac{\partial v^i}{\partial z} = b u^i - f v^i - d v^i (u^i + v^i), \text{ dans } \Omega_i \times (0, T) \end{array} \right.$$

Sur l'interface entre les couches, nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^i \frac{\partial u^i}{\partial z}(t, x, y, z_i) = d_1^{i+1} \frac{\partial u^{i+1}}{\partial z}(t, x, y, z_i) \\ d_2^i \frac{\partial v^i}{\partial z}(t, x, y, z_i) = d_2^{i+1} \frac{\partial v^{i+1}}{\partial z}(t, x, y, z_i) \\ u^i(t, x, y, z_i) = u^{i+1}(t, x, y, z_i) \\ v^i(t, x, y, z_i) = v^{i+1}(t, x, y, z_i) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n-1$$

en même temps avec une condition de Neumann sur le bord

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial u^n}{\partial z}(t, x, y, z^*) = 0 \\ \frac{\partial v^1}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial v^n}{\partial z}(t, x, y, z^*) = 0 \end{array} \right.$$

Puisque la diffusion prend place seulement dans la direction verticale, le système au dessus est dégénéré.

Désormais, on considère le système plus général suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial t} u^i - d_1^i \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^2} - w_1^i \frac{\partial u^i}{\partial x} - w_2^i \frac{\partial u^i}{\partial y} - w_3^i \frac{\partial u^i}{\partial z} = f_1(u^i, v^i), \text{ dans } \Omega_i \times (0, T), 1 \leq i \leq n \\
\frac{\partial}{\partial t} v^i - d_2^i \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} - w_1^i \frac{\partial v^i}{\partial x} - w_2^i \frac{\partial v^i}{\partial y} - w_3^i \frac{\partial v^i}{\partial z} = f_2(u^i, v^i), \text{ dans } \Omega_i \times (0, T), 1 \leq i \leq n \\
\frac{\partial u^1}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial u^n}{\partial z}(t, x, y, z^*) = 0 \\
\frac{\partial v^1}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial v^n}{\partial z}(t, x, y, z^*) = 0 \\
d_1^i \frac{\partial u^i}{\partial z}(t, x, y, z_i) = d_1^{i+1} \frac{\partial u^{i+1}}{\partial z}(t, x, y, z_i), 1 \leq i \leq n-1 \\
d_2^i \frac{\partial v^i}{\partial z}(t, x, y, z_i) = d_2^{i+1} \frac{\partial v^{i+1}}{\partial z}(t, x, y, z_i), 1 \leq i \leq n-1 \\
u^i(t, x, y, z_i) = u^{i+1}(t, x, y, z_i), v^i(t, x, y, z_i) = v^{i+1}(t, x, y, z_i), 1 \leq i \leq n-1 \\
u^i(0, x, y, z) = u_0^i(x, y, z), v^i(0, x, y, z) = v_0^i(x, y, z), \text{ dans } \Omega_i
\end{array} \right. \quad (4.1)$$

où on suppose que la nonlinéarité (f_1, f_2) vérifie les conditions ci dessous. Notre but est d'étudier le système général (4.1).

4.1.2 Hypothèses

- Dans tout ce chapitre, on suppose que la non linéarité $(f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continument différentiable.
- Pour préserver la positivité de la solution, on suppose que f est quasi-positif, ce qui veut dire :

$$\forall v \in \mathbb{R}_+, f_1(0, v) \geq 0 \quad (4.2)$$

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, f_2(u, 0) \geq 0$$

- Pour éviter l'explosion de la solution, on suppose que la non linéarité est au plus linéaire dans le quadrant positif, ceci implique qu'il existe des constantes positives a^i, b^i telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^2: f_i(u, v) \leq a^i u + b^i v, i = 1, 2 \quad (4.3)$$

- On met les hypothèses suivantes sur la vitesse du courant:

Dans chaque couche, la vitesse horizontale est indépendante de la variable verticale z , pour $1 \leq i \leq n$, on suppose que $w_1^i, w_2^i : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et pour t fixé :

$$w_1^i(t, \cdot), w_2^i(t, \cdot) \in C^1(D)$$

De plus, pour chaque i , on suppose que la vitesse verticale $w_3^i : [z_{i-1}, z_i] \rightarrow \mathbb{R}$ dépend seulement de la variable z et qu'elle est continument différentiable sur $[z_{i-1}, z_i]$.

Puisque on n'a pas mis des conditions bilatérales, on suppose que les données initiales $(u_0^i, v_0^i) \in C(\overline{\Omega_i}) \times C(\overline{\Omega_i})$ sont à support horizontal compact à l'intérieur de D .

On commence par prouver l'existence locale, puis la positivité de la solution et on montre par la suite l'existence globale de la solution. La sous section 4.2.5 contient le résultat principal de ce chapitre. Nous utilisons pour cela quelques propriétés des opérateurs quasi m -accréatifs données dans la section 1.6 .

Le problème est résolu sur les lignes caractéristiques. Sur ces lignes, le système est réduit à une équation parabolique en dimension une.

4.2 Etude de l'existence de solutions de (4.1)

4.2.1 Changement de variables

Pour chaque couche (z_{i-1}, z_i) , on définit les caractéristiques $(x^i(t, x_0, y_0), y^i(t, x_0, y_0))$ comme solutions du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = -w_1^i(t, x^i, y^i) \\ \frac{dy^i}{dt} = -w_2^i(t, x^i, y^i) \\ x^i(0) = x_0, y^i(0) = y_0 \end{cases}$$

Ici, (x_0, y_0) appartient au support de (u_0^i, v_0^i) . De la théorie des équations différentielles, ces solutions sont localement définies et C^1 par rapport à toutes les variables. Soit

$$I_t = \{(x_0, y_0) : (x^i(t, x_0, y_0), y^i(t, x_0, y_0)) \in D\}$$

Pour chaque i , et pour t fixé, on définit l'application $\Psi^i : I_t \rightarrow D$ par

$$\Psi_t^i(x_0, y_0) = (x^i, y^i).$$

L'application Ψ_t^i définit un difféomorphisme :

En effet, soit (x^i, y^i) fixé dans D , alors il existe (x_0, y_0) unique définie par

$$(x_0, y_0) = \Psi_{-t}^i(x^i, y^i)$$

Ecrivons la solution (u^i, v^i) dans les nouvelles coordonnées (t, x_0, y_0, z) , nous avons

$$\varphi_1^i(t, x_0, y_0, z) = u^i(t, \Psi_t^i(x_0, y_0), z)$$

et

$$\varphi_2^i(t, x_0, y_0, z) = v^i(t, \Psi_t^i(x_0, y_0), z)$$

En termes de φ_1^i, φ_2^i , le modèle s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^i - d_1^i \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial z^2} - w_3^i \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z} = f_1(\varphi_1^i, \varphi_2^i), \text{ dans } (z_{i-1}, z_i), 1 \leq i \leq n \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2^i - d_2^i \frac{\partial^2 \varphi_2^i}{\partial z^2} - w_3^i \frac{\partial \varphi_2^i}{\partial z} = f_2(\varphi_1^i, \varphi_2^i), \text{ dans } (z_{i-1}, z_i), 1 \leq i \leq n \\ \frac{\partial \varphi_k^1}{\partial z}(t, 0) = \frac{\partial \varphi_k^n}{\partial z}(t, z^*) = 0, \text{ pour } z = 0, z^*, k = 1, 2 \\ d_k^i \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial z}(t, z_i) = d_k^{i+1} \frac{\partial \varphi_k^{i+1}}{\partial z}(t, z_i), 1 \leq i \leq n-1, k = 1, 2 \\ \varphi_k^i(t, z_i) = \varphi_k^{i+1}(t, z_i), k = 1, 2, 1 \leq i \leq n-1 \\ \varphi_1^i(0, z) = u_0^i(x_0, y_0, z), \varphi_2^i(0, z) = v_0^i(x_0, y_0, z) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Nous avons besoin de définir les fonctions suivantes, pour $k = 1, 2$:

$$\varphi_k = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k^1 \text{ dans } (z_0, z_1) \\ \varphi_k^2 \text{ dans } (z_1, z_2) \\ \dots \\ \varphi_k^n \text{ dans } (z_{n-1}, z_n) \end{array} \right.$$

Pour les données initiales, nous avons

$$\varphi_1^0 = \left\{ \begin{array}{l} u_0^1 \text{ dans } (z_0, z_1) \\ u_0^2 \text{ dans } (z_1, z_2) \\ \dots \\ u_0^n \text{ dans } (z_{n-1}, z_n) \end{array} \right.$$

et

$$\varphi_2^0 = \begin{cases} v_0^1 & \text{dans } (z_0, z_1) \\ v_0^2 & \text{dans } (z_1, z_2) \\ \dots & \\ v_0^n & \text{dans } (z_{n-1}, z_n) \end{cases}$$

Pour $k = 1, 2$, soit

$$d_k = \begin{cases} d_k^1 & \text{dans } (z_0, z_1) \\ d_k^2 & \text{dans } (z_1, z_2) \\ \dots & \\ d_k^n & \text{dans } (z_{n-1}, z_n) \end{cases}$$

De même, w_3 est définie par

$$w_3 = \begin{cases} w_3^1 & \text{dans } (z_0, z_1) \\ w_3^2 & \text{dans } (z_1, z_2) \\ \dots & \\ w_3^n & \text{dans } (z_{n-1}, z_n) \end{cases}$$

Le système (4.4) se réécrit donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = f_1(\varphi_1, \varphi_2) \text{ dans } (0, z^*) \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = f_2(\varphi_1, \varphi_2), \text{ dans } (0, z^*) \times (0, T) \\ \varphi_1(0, z) = \varphi_1^0(z), \varphi_2(0, z) = \varphi_2^0(z) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = 0, z^* \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Pour (x_0, y_0) appartenant au support de (u_0^i, v_0^i) , soit:

$$T_o^i = \sup \{t > 0, \Psi_t^i(x_0, y_0) \in D\}$$

Alors, on définit le temps d'observation par:

$$T_o = \min_{1 \leq i \leq n} T_o^i$$

4.2.2 Formulation du problème de Cauchy

Soit

$$Y = L^2(0, z^*) \times L^2(0, z^*)$$

Pour transformer (4.5) en un problème de Cauchy, on définit l'opérateur

$A : D(A) \subset Y \rightarrow Y$ par

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = (A_1\varphi_1, A_2\varphi_2) = \left(-\frac{\partial}{\partial z}(d_1(z)\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}) - w_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial z}(d_2(z)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}) - w_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)$$

où

$$D(A) = \left\{ \varphi \in Y \cap (H^2(z_{i-1}, z_i))^2, A\varphi \in Y, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = 0, z^* \right\} = D(A_1) \times D(A_2)$$

Soient $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ et $F(\varphi) = (f_1(\varphi_1, \varphi_2), f_2(\varphi_1, \varphi_2))$. Nous sommes conduits au problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi + A\varphi = F(\varphi) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Il est commode de travailler dans le cadre des fonctions continues. Soit

$$X = C[0, z^*] \times C[0, z^*]$$

Soit $C([0, \delta], X)$ l'ensemble des fonctions continues φ définies sur $0 \leq t \leq \delta$, qui prennent leurs valeurs dans X . Avec cette notation, on dit que $\varphi \in C([0, \delta], X)$ est une solution faible de (4.6), si pour $0 \leq t \leq \delta$, on a:

$$\varphi(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)F(\varphi(s))ds, \quad 0 \leq t \leq \delta$$

où $S(t)$ est le semi-groupe engendré sur X par A .

On accomplit dans ce qui suit une étude analytique de (4.6) en utilisant la théorie des opérateurs m -accrétifs introduite dans la section 1.6.

Proposition 4.1 *L'opérateur A est quasi accréatif sur Y .*

Preuve: On note par $(., .)$ le produit scalaire dans L^2 . On montre qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$(\lambda u + A_1 u, u)_{L^2(0, z^*)} \geq 0, \quad \forall u \in D(A_1)$$

En effet, soit

$$c_1 = \min d_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

alors

$$\begin{aligned} (\lambda u + A_1 u, u)_{L^2(0, z^*)} &= \int_0^{z^*} \left[\lambda u^2 + d_1(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} u \right] dz \\ &\geq \lambda \int_0^{z^*} u^2 dz + c_1 \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^{z^*} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} u dz \end{aligned}$$

L'inégalité de Young donne:

$$\int_0^{z^*} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} u \, dz \leq \|w_3\|_\infty \left(\rho \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{\rho} \int_0^{z^*} u^2 dz \right)$$

pour un certain $\rho > 0$.

On aboutit ainsi à

$$\begin{aligned} (\lambda u + A_1 u, u)_{L^2(0, z^*)} &\geq \lambda \int_0^{z^*} u^2 dz + c_1 \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz - \|w_3\|_\infty \left(\rho \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{\rho} \int_0^{z^*} u^2 dz \right) \\ &= (\lambda - \|w_3\|_\infty / \rho) \int_0^{z^*} u^2 dz + (c_1 - \|w_3\|_\infty \rho) \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \geq 0 \end{aligned}$$

où λ et ρ vérifient:

$$(\lambda - \|w_3\|_\infty / \rho) > 0, (c_1 - \|w_3\|_\infty \rho) > 0$$

De même, nous avons:

$$(\lambda u + A_2 u, u)_{L^2(0, z^*)} \geq 0, \forall u \in D(A_2)$$

On conclut qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$(\lambda \varphi + A \varphi, \varphi)_Y \geq 0, \forall \varphi \in D(A)$$

par conséquent, A est quasi-accréatif. ■

Pour montrer que A est quasi m -accréatif sur Y , on a besoin de montrer que l'image de $(\lambda I + A)$ est Y , c'est ce que nous démontrons dans le résultat suivant:

Proposition 4.2 *L'opérateur A est quasi m -accréatif sur Y .*

Preuve: Il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(0, z^*)$, il existe $u \in D(A_1)$ tel que

$$\lambda u + A_1 u = f$$

En effet, pour $u, v \in H^1(0, z^*)$, soit

$$a(u, v) = \lambda \int_0^{z^*} uv dz + \int_0^{z^*} d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz - \int_0^{z^*} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} v dz$$

$$l(v) = \int_0^{z^*} f v dz$$

Il est facile de montrer qu'il existe $c > 0$:

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_{H^1(0, z^*)} \|v\|_{H^1(0, z^*)}$$

et

$$|l(v)| \leq c \|v\|_{H^1}$$

De plus:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (\lambda u + A_1 u, u)_{L^2(0, z^*)} \\ &\geq (\lambda - \|w_3\|_\infty / \rho) \int_0^{z^*} u^2 dz + (c_1 - \|w_3\|_\infty \rho) \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz \\ &\geq c \|u\|_{H^1(0, z^*)}^2 \end{aligned}$$

où λ et ρ vérifient:

$$(\lambda - \|w_3\|_\infty / \rho) > 0, \quad (c_1 - \|w_3\|_\infty \rho) > 0$$

La forme bilinéaire a est alors coercive et le théorème de Lax- Milgram implique que l'équation $a(u, v) = l(v)$ admet une solution unique $u \in H^1(0, z^*)$.

Il reste à vérifier que

$$\lambda u + A_1 u = f$$

En effet, soit $v \in H^1(0, z^*)$, on obtient

$$\int_0^{z^*} d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = -\lambda \int_0^{z^*} uv dz + \int_0^{z^*} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} v dz + \int_0^{z^*} f v dz, \quad (4.7)$$

En particulier, pour tout $v \in C_c^1(0, z^*)$:

$$\left| \int_0^{z^*} d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz \right| \leq \lambda \int_0^{z^*} |uv| dz + \int_0^{z^*} \left| w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} v \right| dz + \int_0^{z^*} |fv| dz$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\left| \int_0^{z^*} d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz \right| \leq c \|v\|_{L^2(0, z^*)}$$

Un résultat classique (voir [7], page 124) implique que

$$d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \in H^1(0, z^*).$$

Maintenant, en choisissant $v \in C_c^1(z_{i-1}, z_i)$, dans (4.7), $1 \leq i \leq n$, on obtient

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} d_1^i \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = -\lambda \int_{z_{i-1}}^{z_i} uv dz + \int_{z_{i-1}}^{z_i} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} v dz + \int_{z_{i-1}}^{z_i} f v dz$$

donc

$$\left| \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz \right| \leq c \|v\|_{L^2(z_{i-1}, z_i)}, 1 \leq i \leq n$$

D'où :

$$\frac{\partial u}{\partial z} \in H^1(z_{i-1}, z_i)$$

ie, $u \in H^2(z_{i-1}, z_i)$, $1 \leq i \leq n$. On conclut que $u \in D(A)$.

Puisque

$$d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \in H^1(0, z^*)$$

et

$$u \in H^2(z_{i-1}, z_i),$$

alors

$$u \in C^1[z_{i-1}, z_i], 1 \leq i \leq n,$$

Intégrons par partie (4.7), on remarque que pour tout $v \in H^1(0, z^*)$:

$$-\int_0^{z^*} \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z}) v dz + d_1^n \frac{\partial u}{\partial z} (z^*) v(z^*) - d_1^1 \frac{\partial u}{\partial z} (0) v(0) = -\lambda \int_0^{z^*} uv + \int_0^{z^*} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} v + \int_0^{z^*} f v \quad (4.8)$$

En particulier, pour tout $v \in H_0^1(0, z^*)$, on obtient:

$$-\int_0^{z^*} \left(\frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z}) + \lambda u - w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} - f \right) v dz = 0$$

donc

$$-\frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z}) + \lambda u - w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} - f = 0$$

Par (4.8), il résulte que pour tout $v \in H^1(0, z^*)$

$$d_1^n \frac{\partial u}{\partial z} (z^*) v(z^*) - d_1^1 \frac{\partial u}{\partial z} (0) v(0) = 0 \quad (4.9)$$

Maintenant, on choisit $v_1(z) = \exp(z)$ et $v_2(z) = \frac{1}{\exp(z)}$ respectivement dans (4.9), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial z} (z^*) = \frac{\partial u}{\partial z} (0) = 0$$

On conclut que u satisfait

$$\begin{cases} \lambda u - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z}) - w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} = f \\ \frac{\partial u}{\partial z} (z^*) = \frac{\partial u}{\partial z} (0) = 0 \end{cases}$$

alors

$$u \in D(A_1), \lambda u + A_1 u = f$$

De même, on montre que A_2 est quasi m -accrétif. ■

Puisque A est quasi m- accréatif sur Y , alors $-A$ engendre un semi-groupe $S(t)$ sur Y avec $\|S(t)\|_Y \leq e^{wt}$. Ici, $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ sur Y , où $S_1(t), S_2(t)$ sont des semi-groupes engendrés respectivement par $-A_1, -A_2$. La solution faible du système:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + A\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

est donnée par:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = S(t)\varphi_0.$$

Dans le lemme suivant, on montre que la restriction de A sur X engendre un C^0 semi-groupe sur X .

Lemme 4.1 *Soit $A^c = A|_X$, c'est à dire la restriction de A sur*

$$D(A^c) = \{u \in D(A) \cap X, Au \in X\}$$

Alors

a) A^c engendre un C^0 semi-groupe $S^c(t)$ sur X .

b) Pour tout $\varphi_0 \in X$, la solution faible $S(t)\varphi_0 \in C([0, \infty[, X)$.

Preuve: a) Nous avons

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = (A_1\varphi_1, A_2\varphi_2) = \left(-\frac{\partial}{\partial z}(d_1(z)\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}) - w_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial z}(d_2(z)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}) - w_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)$$

$$D(A) = \left\{ \varphi \in Y \cap (H^2(z_{i-1}, z_i))^2, A\varphi \in Y, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = 0, z^* \right\} = D(A_1) \times D(A_2)$$

Pour $u, v \in H^1(0, z^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, soit

$$a(u, v) = \lambda \int_0^{z^*} uv dz + \int_0^{z^*} d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz - \int_0^{z^*} w_3(z) \frac{\partial u}{\partial z} v dz$$

et pour $f \in L^2(0, z^*)$

$$l(v) = \int_0^{z^*} f v dz$$

D'abord, on affirme que

$$D(A_1) = D(A_2) = \{u \in H^1(0, z^*), \text{ il existe } f \in L^2(0, z^*) \text{ tq } a(u, v) = l(v)\}$$

En effet, si

$$a(u, v) = l(v), \text{ alors } u \in D(A_1) \text{ et } \lambda u + A_1 u = f$$

Ceci découle de la preuve de la proposition 4.2.

Maintenant, si

$$u \in D(A_1), \text{ alors } u \in L^2(0, z^*), Au \in L^2(0, z^*) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = z^*$$

Soit

$$\lambda u + Au = f \in L^2(0, z^*) \text{ pour } u \in D(A_1)$$

On multiplie par $v \in H^1(0, z^*)$ et on intègre sur $(0, z^*)$, on trouve que:

$$a(u, v) = l(v)$$

Par la remarque 1.2 et le théorème 1.15 on obtient le résultat désiré. On argumente de la même façon pour $D(A_2)$.

b) Ce résultat découle directement du théorème 1.15. ■

Nous sommes maintenant prêts pour prouver l'existence locale de solutions de (4.5).

Proposition 4.3 *Il existe $T_{\max} > 0$ tel que pour toute donnée initiale $(u_0, v_0) \in D(A^c)$, Le problème (4.6) admet une solution classique (φ_1, φ_2) où*

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in (C([0, T_{\max}[, X) \cap C([0, T_{\max}[, D(A^c)) \cap C^1([0, T_{\max}[, X)).$$

De plus, si $T_{\max} < \infty$, alors:

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|(\varphi_1, \varphi_2)\|_X = +\infty$$

Preuve: Ce résultat devient maintenant classique, en effet :La première étape est de convertir le système à une équation intégrale en utilisant la formule de variation de la constante:

$$\varphi(t) = S^c(t)\varphi_0 + \int_0^t S^c(t-s)F(\varphi(s))ds$$

Puisque $F : X \rightarrow X$ est continument différentiable, on peut monter l'existence d'une solution faible définie sur un intervalle maximal $[0, T_{\max}[$. Les hypothèses sur φ_0 et F impliquent que cette solution existe au sens classique, (voir théorème 1.9). ■

4.2.3 Analyse de positivité de la solution de (4.5)

Le résultat que nous proposons dans ce qui suit montre que le système (4.5) préserve la positivité.

Proposition 4.4 *Si $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ est positive, alors $(\varphi_1(t, \cdot), \varphi_2(t, \cdot))$ est positive.*

Preuve: Soit $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^2$ la projection orthogonale sur le cône positif $(\mathbb{R}^+)^2$ de \mathbb{R}^2 . On note par (u, v) la solution de (4.5). De (4.2), il suit que

$$f_1(\Pi(u, v))u^- \geq 0, f_2(\Pi(u, v))v^- \geq 0$$

Considérons le système modifié

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial u}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial u}{\partial z} = f_1(\Pi(u, v)), \text{ sur } (0, z^*) \times (0, T_{\max}) \\ \frac{\partial}{\partial t} v - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial v}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial v}{\partial z} = f_2(\Pi(u, v)), \text{ sur } (0, z^*) \times (0, T_{\max}) \\ u(0, z) = u_0(z), v(0, z) = v_0(z), \text{ sur } (0, z^*) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = 0, z^* \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Multiplions la première équation de (4.10) par u^- et intégrons sur $(0, z^*)$, nous avons:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 - \int_0^{z^*} d_1(z) \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz + \int_0^{z^*} w_3 \frac{\partial u^-}{\partial z} u^- dz \geq 0,$$

Cela implique que:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 - \int_0^{z^*} d_1(z) \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz \geq -c_1 \int_0^{z^*} \left| \frac{\partial u^-}{\partial z} u^- \right| dz,$$

où $c_1 = \max_{[0, z^*]} |w_3(z)|$.

Par l'inégalité de Young, nous avons que:

$$\int_0^{z^*} \left| \frac{\partial u^-}{\partial z} u^- \right| dz \leq \int_0^{z^*} \left(\rho \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{\rho} (u^-)^2 \right) dz$$

donc

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0, z^*)}^2 - \int_0^{z^*} d_1(z) \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz \geq -c_1 \rho \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz - c_1 \frac{1}{\rho} \int_0^{z^*} (u^-)^2 dz$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \int_0^{z^*} d_1(z) \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz - c_1 \rho \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz - c_1 \frac{1}{\rho} \int_0^{z^*} (u^-)^2 dz \leq 0$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 + \int_0^{z^*} (d_1(z) - c_1 \rho) \left(\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)^2 dz + (c_2 - \frac{c_1}{\rho}) \int_0^{z^*} (u^-)^2 dz \leq c_2 \int_0^{z^*} (u^-)^2 dz$$

avec c_2 et ρ vérifiant

$$\min_{[0,z^*]} d_1(z) - c_1 \rho > 0, \quad c_2 - \frac{c_1}{\rho} > 0$$

On déduit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(0,z^*)}^2 \leq c_2 \int_0^{z^*} (u^-)^2 dz$$

Puisque $\varphi_1^0 \geq 0$, l'inégalité de Gronwall implique que $u^- = 0$.

De même, $v^- = 0$.

Puisque sur le cône positif, $f_i(u, v) = f_i \circ \Pi(u, v)$, on déduit que la solution (u, v) de (4.5) est positive. ■

4.2.4 Etude de l'existence de solutions globales de (4.5)

L'existence globale (la norme de la solution dans L^2 n'explose pas dans un temps fini) est établie pour les solutions positives :

Proposition 4.5 *Soit (u, v) la solution de (4.5), alors :*

$$\text{pour tout } t \in (0, T_{\max}), \|u(t)\|_{L^2(0,z^*)} + \|v(t)\|_{L^2(0,z^*)} \leq c \exp(t).$$

Preuve: De (4.3), il existe $L > 0$ tel que $f_k(u, v) \leq L(u + v + 1)$, $k = 1, 2$.

Soit $Q_t = [0, t] \times (0, z^*)$, $t \in (0, T_{\max})$ et (\bar{u}, \bar{v}) la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = L(u + v + 1) \quad \text{dans } (0, z^*) \times (0, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{v} - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = L(u + v + 1) \quad \text{dans } (0, z^*) \times (0, t) \\ \bar{u}(0, z) = \bar{v}_0, \bar{v}(0, z) = \bar{v}_0 \quad \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0, \quad \text{pour } z = 0, z^* \end{array} \right.$$

avec $\bar{v}_0 \geq u_0, \bar{v}_0 \geq v_0$.

Puisque $f_1(u, v) \leq L(u + v + 1)$, $f_2(u, v) \leq L(u + v + 1)$, alors $(w_1, w_2) = (\bar{u}, \bar{v}) - (u, v)$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} w_1 - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial w_1}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} \geq 0 \quad \text{dans } (0, z^*) \times (0, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} w_2 - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial w_2}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial w_2}{\partial z} \geq 0 \quad \text{dans } (0, z^*) \times (0, t) \\ w_1(0, z) \geq 0, w_2(0, z) \geq 0 \quad \text{dans } (0, z^*) \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } (0, z^*) \end{array} \right.$$

On montre que (w_1, w_2) est positive par le même argument donné pour montrer la positivité de la solution de (4.5).

Sous les hypothèses du théorème page 143 dans [13], nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, T_{\max}), \|\bar{u}(t)\|_{L^2(0, z^*)} &\leq c + \int_0^t \|(u + v)(s)\|_{L^2(0, z^*)} ds \\ \forall t \in (0, T_{\max}), \|\bar{v}(t)\|_{L^2(0, z^*)} &\leq c + \int_0^t \|(u + v)(s)\|_{L^2(0, z^*)} ds \end{aligned}$$

donc pour tout $t \in (0, T_{\max})$:

$$\begin{aligned}
& \|u(t)\|_{L^2(0, z^*)} + \|v(t)\|_{L^2(0, z^*)} \\
& \leq \|\bar{u}(t)\|_{L^2(0, z^*)} + \|\bar{v}(t)\|_{L^2(0, z^*)} \\
& \leq c + \int_0^t (\|u(s)\|_{L^2(0, z^*)} + \|v(s)\|_{L^2(0, z^*)}) ds
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall implique que pour tout $t \in (0, T_{\max})$

$$\|u(t)\|_{L^2(0, z^*)} + \|v(t)\|_{L^2(0, z^*)} \leq c \exp(t)$$

■

4.2.5 Etude de l'existence de solutions des problèmes (4.4) et (4.1)

Soit (x_0, y_0) dans le support de (u_0^i, v_0^i) , alors:

Proposition 4.6 *Supposons que $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in D(A)$. Le système (4.4) admet une solution positive unique (φ_1, φ_2) telle que pour $1 \leq i \leq n$*

$$(\varphi_1^i, \varphi_2^i) \in C([0, T_o], H^2(z_{i-1}, z_i)) \cap C^1([0, T_o], L^2(z_{i-1}, z_i))$$

Preuve: Soit (φ_1, φ_2) la solution du système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = f_1(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{dans } (0, z^*) \times (0, T_0] \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = f_2(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{dans } (0, z^*) \times (0, T_0] \\ \varphi_1(0, z) = \varphi_1^0(z), \varphi_2(0, z) = \varphi_2^0(z) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = 0, z^* \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Soit $\psi \in C_c^\infty(0, z^*)$. Nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \psi dz = \int_0^{z^*} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \\ \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \psi dz = \int_0^{z^*} f_2(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \end{array} \right.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \psi &= \sum_{i=1}^{i=n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi \\ \sum_{i=1}^{i=n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \psi &= \sum_{i=1}^{i=n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} f_2(\varphi_1, \varphi_2) \psi \end{aligned}$$

Pour $\psi \in C_c^\infty(z_{i-1}, z_i)$, $1 \leq i \leq n$, on trouve que:

$$\begin{aligned} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^i - d_1^i \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial z^2} - w_3 \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z} \right) \psi dz &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} f_1(\varphi_1^i, \varphi_2^i) \psi dz, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{\partial \varphi_2^i}{\partial t} - d_2^i \frac{\partial^2 \varphi_2^i}{\partial z^2} - w_3 \frac{\partial \varphi_2^i}{\partial z} \right) \psi dz &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} f_2(\varphi_1^i, \varphi_2^i) \psi dz, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, et au sens de distribution, on trouve que:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^i - d_1^i \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial z^2} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z} = f_1(\varphi_1^i, \varphi_2^i) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2^i - d_2^i \frac{\partial^2 \varphi_2^i}{\partial z^2} - w_3 \frac{\partial \varphi_2^i}{\partial z} = f_2(\varphi_1^i, \varphi_2^i) \end{cases}$$

Les conditions de transmission entre les couches donnent:

$$\frac{\partial \varphi_k^1}{\partial z}(t, 0) = \frac{\partial \varphi_k^n}{\partial z}(t, z^*) = 0, k = 1, 2.$$

Puisque (φ_1, φ_2) est continue alors:

$$\varphi_k^i(t, z_i) = \varphi_k^{i+1}(t, z_i), k = 1, 2, \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

Pour $\psi \in H^1(0, z^*)$, nous avons:

$$\begin{cases} \int_0^{z_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial z} (d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}) - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \psi dz = \int_0^{z_i} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \\ \int_{z_i}^{z^*} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (d_2(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}) - w_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \psi dz = \int_{z_i}^{z^*} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \end{cases}$$

L'intégration par partie donne:

$$\begin{cases} \int_0^{z_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \psi + \int_0^{z_i} d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \int_0^{z_i} w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \psi dz - d_1^i \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) \right) = \int_0^{z_i} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \\ \int_{z_i}^{z^*} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \psi + \int_{z_i}^{z^*} d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \int_{z_i}^{z^*} w_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \psi dz + d_1^{i+1} \frac{\partial \varphi_1^{i+1}}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) \right) = \int_{z_i}^{z^*} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \end{cases}$$

Faisons l'addition terme à terme, on trouve:

$$\begin{aligned} & \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \psi dz + \int_0^{z^*} \left(d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \psi \right) dz - d_1^i \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) + d_1^{i+1} \frac{\partial \varphi_1^{i+1}}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) \right) \\ &= \int_0^{z^*} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \end{aligned}$$

L'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{z^*} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(d_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) - w_3(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \psi dz - d_1^i \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) + d_1^{i+1} \frac{\partial \varphi_1^{i+1}}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) \\ &= \int_0^{z^*} f_1(\varphi_1, \varphi_2) \psi dz \end{aligned}$$

Puisque φ_1 est une solution de (4.11), on déduit que

$$-d_1^i \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) + d_1^{i+1} \frac{\partial \varphi_1^{i+1}}{\partial z}(z_i) \psi(z_i) = 0, \forall \psi \in H^1(0, z^*)$$

donc

$$d_1^{i+1} \frac{\partial \varphi_1^{i+1}}{\partial z}(z_i) = d_1^i \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial z}(z_i), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

On raisonne d'une manière analogue pour φ_2 . ■

Proposition 4.7 *Pour tout (x_0, y_0) dans le support de (u_0^i, v_0^i) , $1 \leq i \leq n$, le système (4.1) admet une solution positive unique (u^i, v^i) définie sur le temps maximal d'observation $[0, T_o]$*

Preuve: Il suffit de voir que pour $t \in [0, T_o]$, $(x^i, y^i) \in D$ et $z \in [z_{i-1}, z_i]$,

$$(u^i(t, x^i, y^i, z), v^i(t, x^i, y^i, z)) = (\varphi_1(t, \Psi_{-t}^i(x^i, y^i), z), \varphi_2(t, \Psi_{-t}^i(x^i, y^i), z)), 1 \leq i \leq n$$

On définit une solution du système (4.1) en écrivant

$$u = \begin{cases} u^1 & \text{dans } (z_0, z_1) \\ u^2 & \text{dans } (z_1, z_2) \\ \dots & \\ u^n & \text{dans } (z_{n-1}, z_n) \end{cases}$$

et

$$v = \begin{cases} v^1 & \text{dans } (z_0, z_1) \\ v^2 & \text{dans } (z_1, z_2) \\ \dots & \\ v^n & \text{dans } (z_{n-1}, z_n) \end{cases}$$

■

4.3 Remarques et perspectives

Le modèle étudié est important car il donne la distribution de la population des poissons dans une région océanique spécifique .On améliore partiellement les résultats de [1] , [12] et [19], où les auteurs ont mis l'hypothèse cruciale que la vitesse horizontale dépend seulement des composantes horizontales .On n'a pas traité l'influence des hypothèses concernant la diffusion horizontale sur la position du problème .Il sera notre objectif dans un prochain travail . L'existence globale est montrée par rapport à la norme de L^2 et la question reste ouverte dans L^∞ .

Chapitre 5

Simulation numérique

On fait des simulations numériques pour le système sans diffusion et le système avec diffusion introduits dans le chapitre 1 en utilisant le logiciel MAPLE et on compare ces simulations avec les résultats mathématiques trouvés dans la section 2.2.1 et la section.2.3.7.

5.1 Système sans diffusion

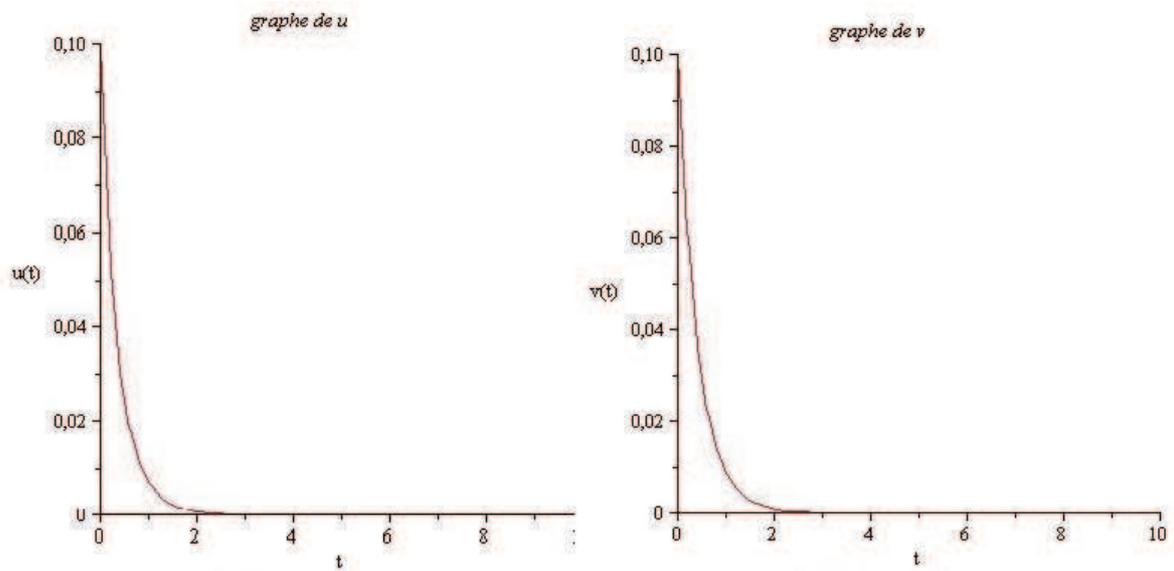
$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma v - eu - cu(u + v) \\ \dot{v} = bu - fv - dv(u + v) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

cas où $b\sigma < ef$

On choisit les conditions initiales et les coefficients tels que $b\sigma < ef$, par exemple:

σ	e	c	b	f	d	u_0	v_0
3	6	3	2	4	2	0.1	0.1

et t (la durée)=10 ans ,on trouve les schémas suivants pour la solution (u, v) :



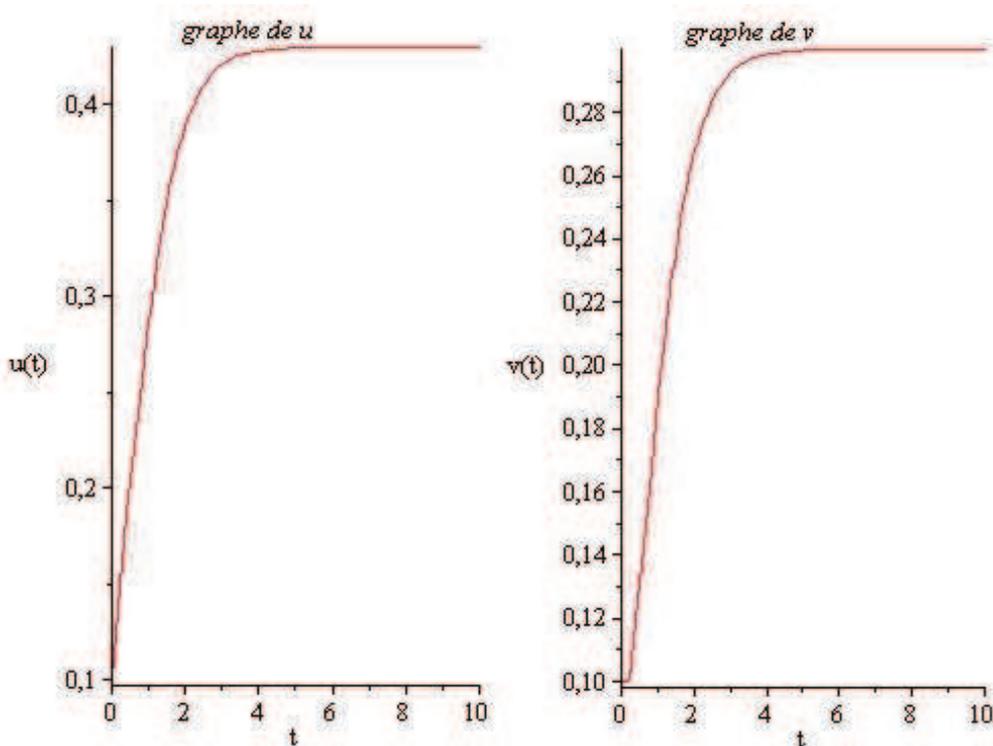
Les densités (u, v) convergent vers $(0, 0)$, ce résultat est en accord avec le résultat mathématique trouvés dans la section 2.2.1.

cas où $b\sigma > ef$

On choisit les conditions initiales et les coefficients tels que $b\sigma > ef$, par exemple

σ	e	c	b	f	d	u_0	v_0
6	2	3	4	5	1	0.1	0.1

et t (la durée)=10 ans ,on trouve les schémas suivants pour la solution $(u(t), v(t))$:



On remarque que la solution $(u(t), v(t))$ converge vers $(u^*, v^*) \cong (0.4, 0.3)$.

Si on résout avec MAPLE le système

$$\begin{cases} 6v - 2u - 3(u + v) = 0 \\ 4v - 5u - (u + v) = 0 \end{cases}$$

on trouve $\{u = 0, v = 0\}, \{u = 0.4296450297, v = 0.2999480247\}$. Les densités (u, v) convergent donc vers l'équilibre positive $\{0.4296450297, 0.2999480247\}$,ce résultat est en accord avec le résultat mathématique trouvé dans la section 2.2.1.

5.2 Système avec diffusion

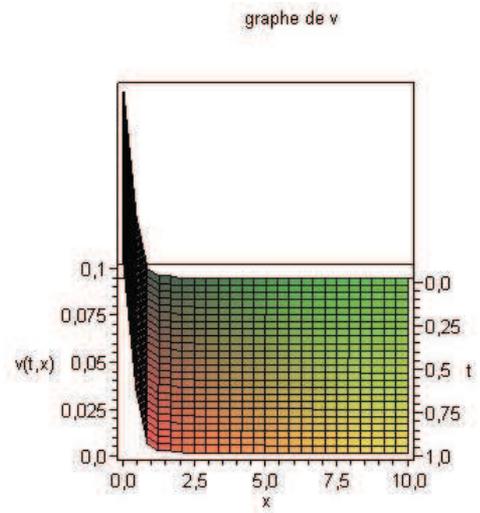
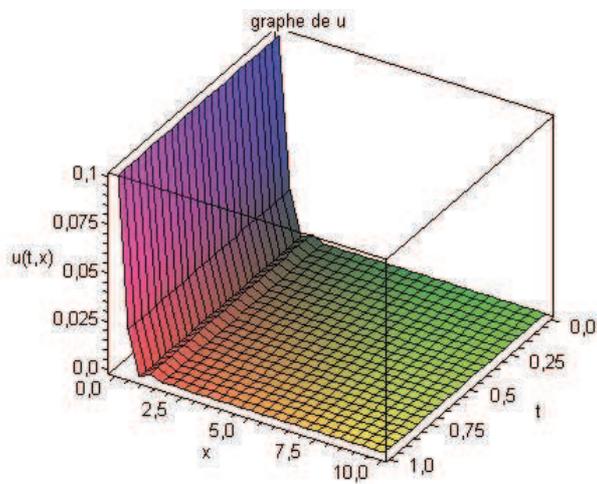
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u - d_1 \Delta u = \sigma v - eu - cu(u+v) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t} v - d_2 \Delta v = bu - fv - dv(u+v) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right.$$

cas où $b\sigma < ef$

on choisit le temps $t=10$ ans, $\Omega =]0, 1[$ et

σ	e	c	b	f	d	u_0	v_0
3	6	3	2	4	2	0.1	0.1

on trouve les schémas suivants pour la solution (u, v) :



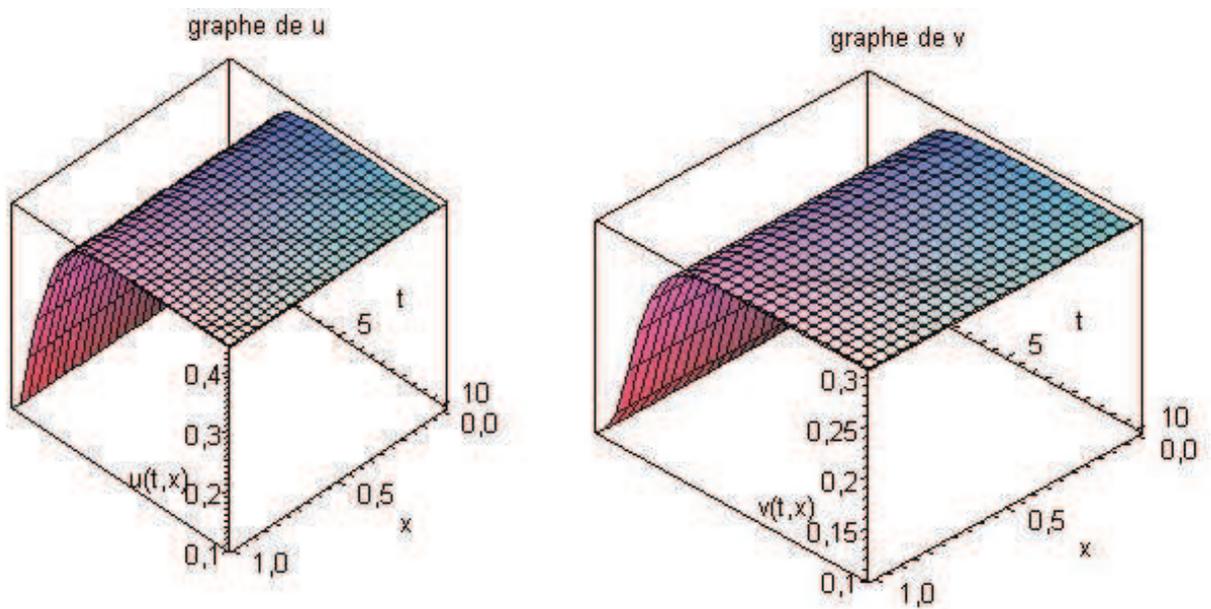
Les densités (u, v) vers l'état stationnaire $(0, 0)$, ce résultat est en accord avec le résultat mathématique trouvés dans la section 2.3.7.

cas où $b\sigma > ef$

on choisit le temps $t=10$ ans, $\Omega =]0, 1[$ et

σ	e	c	b	f	d	u_0	v_0
6	2	3	4	5	1	0.1	0.1

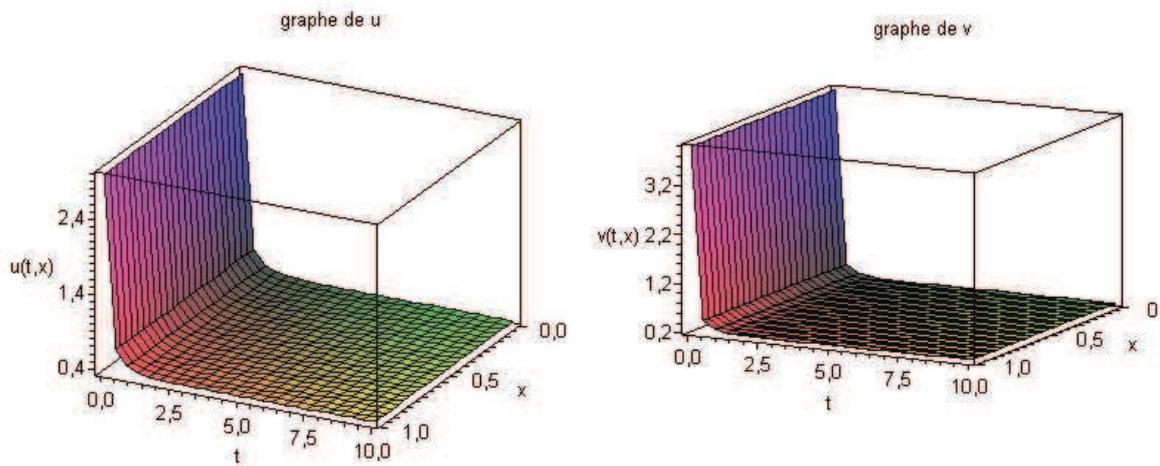
on trouve les schémas suivants pour la solution (u, v) :



Maintenant, on change les valeurs des coefficients et des valeurs initiales:

σ	e	c	b	f	d	u_0	v_0
6	2	3	4	5	2	3	4

On obtient les schémas suivants:



On remarque que les résultats ne changent pas et que Les densités (u, v) converge vers l'état stationnaire $(u^*, v^*) \cong (0.4, 0.3)$. Ce résultat est en accord avec le résultat mathématique trouvé dans la section 2.3.7.

Bibliographie

- [1] O. Arino, K. Boushaba and A. Boussouar, A mathematical model of the dynamics of the phytoplankton-nutrient system, *Journal of Non Linear Analysis and Application B*, 1 (2000), 69-87.
- [2] O. Arino and J. A. Montero, Optimal control of a nonlinear elliptic population system, *Proc. Edinburgh Math*, 116, (2000), 225-241.
- [3] S. M. Bouguima, S. Fekih, and W. Hennaoui, Spatial structure in a juvenile-adult model, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 9 (2008), 1184-1201.
- [4] S. M. Bouguima, Z. Mahlia, Asymptotic Behavior of an age structured population Model with diffusion, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2 (2012), 351-463.
- [5] S. M. Bouguima, Z. Mahlia, A degenerate reaction-diffusion model with multi-layers, soumis.
- [6] K. Boushaba, A Multilayer Method Applied to a Model of Phytoplankton, *American Institute of Mathematical Sciences*, 2 (2007), 37-54.
- [7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et application*, Masson, 1987.
- [8] K. J. Brown and Y. Zhang, On a system of reaction-diffusion equations describing a population with two age groups, *Math. Anal. Appl*, 282 (2003), 444-452.

- [9] A. Canada, P. Magal, J. A. Montero, Optimal control of harvesting in a nonlinear elliptic system arising from population dynamics, *Math. Anal. Appl.*, 254 (2001), 571-586.
- [10] C. Cusulin, M. Iannelli, G. Marinoschi, Age- structured diffusion in a multi-layer environment, *Nonlinear. Anal. Real. World. Appl.*, 6 (2005), 207-223.
- [11] K. Engel and R. Nagel, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer verlag ,1999.
- [12] W. E. Fitzgibbon, M. Langlais and J. J. Morgan, A degenerate reaction-diffusion system modeling atmospheric dispersion of pollutants, *Math. Anal. Appl.*, 307 (2005), 415-432.
- [13] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Am. Mat. Soc, Providence, (23) 1968.
- [14] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications,16. Birkhäuser verlag, Basel, 1995.
- [15] R. Martin, M. Pierre, Influence of mixed boundary conditions in some Reaction Diffusion Systems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Section A* 127 (1997), 1053-1066.
- [16] R. Nittka, *Elliptic and Parabolic Problems with Robin Boundary Conditions On Lipschitz Domains*, PhD thesis, Ulm University, Germany (2010).
- [17] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.
- [18] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer verlag, 1983.

- [19] M. Pierre and R. Texier-Picard, Global existence for degenerate quadratic reaction-diffusion system, *Annales Institut Henri Poincaré (C), Nonlinear Analysis*, 26 (2009), 153-1568 .
- [20] K. Schmitt, R. Thompson, *Nonlinear Analysis and Differential Equations: An Introduction*, University of Utah Press, USA, 2004.
- [21] G. R. Sell and Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Springer, New York, 2002.
- [22] H. L. Smith, *Monotone Dynamical Systems : An introduction to the theory of Competitive and Cooperative Systems*, Am. Mat. Soc, 1995.
- [23] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison Wesley publishing company, 1994.
- [24] G. Teschl, *Ordinary differential equations and Dynamical systems*, Am. Mat. Soc , 1991.
- [25] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag , 1990.

الملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة نظام انتشار ردة فعل يصف ديناميكية فئة مقسمة حسب العمر. نبين وجود حلول مجملة و ندرس سلوكها التقاربي. نفرض بعدها أن هذه الفئة بحرية و تنتشر فقط في الاتجاه العمودي. نهتم هنا بوجود حلول موجبة. أخيرا ندرس الحالة التي يكون فيها الوسط الذي تعيش فيه هذه الفئة مقسم إلى عدة طبقات.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier un système de réaction diffusion qui modélise la dynamique d'une population structurée en âge. On montre l'existence des solutions globales et on étudie leur comportement asymptotique. On suppose après que cette population est marine et qu'elle se diffuse seulement dans la direction verticale. On s'intéresse ici à l'existence des solutions positives. Finalement, on considère le cas où le domaine de vie de cette population est divisé en n couches.

Abstract

The aim of this thesis is to study a system of reaction diffusion that describes the dynamic of an age structured population. We show the existence of global solutions and we study their asymptotic behavior. We suppose after that this population is marine and that it diffuse only in the vertical direction. Existence of positive solutions is established here. Finally, we consider the case where the habitat of this population is divided into n layers.