

observateur à mode glissant d'ordre supérieur
et inversion à gauche

ROSTANE Aboubekr Essedik

* Etudiant au master Contrôle des Processus, Université de Tlemcen

Responsables du stage : Mr Brahim CHERKI

19 mai 2013

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Observabilité et observateur	6
2.1	Introduction	6
2.2	Quelques notions sur l'observabilité	7
2.2.1	L'observabilité des systèmes non-linéaire continus	8
2.3	Les différents types d'observateurs	9
2.4	Observation et identification	10
2.4.1	Observation des systèmes non linéaires à entrées inconnues	11
2.4.2	Un observateur par modes glissants d'ordre supérieur . . .	14
2.4.3	Méthode d'inversion à gauche et condition de recouvre- ment d'observabilité	20
2.5	Observation et identification algébrique	22
2.6	Conclusion	23
3	Etude d'un émetteur pour les transmissions chaotiques	24
3.1	Chaos et Transmission	24
3.1.1	Introduction	24
3.1.2	Quelques mots sur le chaos	24
3.1.3	Avantages du chaos	25
3.1.4	Technique de Démodulation	26
3.1.5	la transmission avec des entrées multiples	27
3.2	Conclusion	30

4	Conception de récepteurs basés sur la synchronisation de systèmes chaotiques	31
4.1	introduction	31
4.2	Synchronisation des systèmes chaotique	32
4.2.1	Synchronisation basée sur la partition du système	32
4.2.2	Synchronisation par la boucle fermée	32
4.2.3	Synchronisation à l'aide d'observateur	33
4.2.4	Synchronisation par l'inversion du système	34
4.2.5	Synchronisation impulsive	35
4.3	Transmission basée sur la synchronisation de système chaotique	35
4.3.1	L'addition chaotique	36
4.3.2	La commutation chaotique	36
4.3.3	La modulation chaotique	37
4.4	Conclusion	45
4.5	Résultats de simulation	45
5	Conclusion et Perspectives	48
6	Bibliographie	49

Chapitre 1

Introduction générale

Depuis le début des civilisations, le besoin de dissimuler préoccupe l'humanité. La confidentialité apparaissait notamment nécessaire lors des luttes pour l'accès au pouvoir. Puis elle a été énormément développée pour les besoins militaires et diplomatiques. Aujourd'hui, de plus en plus d'applications dites civiles nécessitent la sécurité des données transitant entre deux interlocuteurs via un vecteur d'information comme les réseaux de télécommunications actuels et futurs. Ainsi les banques l'utilisent pour assurer la confidentialité des opérations avec leurs clients, les laboratoires de recherche s'en servent pour échanger des informations dans le cadre d'un projet d'étude commun, les chefs militaires pour donner leurs ordres de bataille, etc.

L'utilisation de systèmes non-linéaires en régime chaotique présente un important potentiel pour la réalisation de communications sécurisées. En effet, le chaos généré à l'émetteur est semblable à un signal pseudo-aléatoire (aspect bruité, spectre de fréquence de type bruit blanc). Il est donc adapté au brouillage d'une information, et par conséquent à sa protection. Au récepteur, le décodage de l'information est rendu possible grâce à une synchronisation avec l'émetteur (i.e. reproduction des oscillations chaotiques de celui-ci). L'objectif est alors de camoufler ou masquer l'information confidentielle à l'aide d'un signal chaotique. Les systèmes hyper chaotiques sont des structures extrêmement intéressantes dans le domaine de la cryptographie, c'est pour cela un système hyper-chaotique de type Qi a été proposé, qui a une bande passante extrêmement large de fréquence avec une grande magnitude ; bifurcation très riche dans des directions différentes et la dynamique globale extrêmement compliquée. Ces comportements dynamiques complexes sont particulièrement utiles pour construire des systèmes de sécurité communiquant. Le processus de décryptage consiste à construire un observateur permettant de reconstruire le message confidentiel à partir de la seule information transmise de l'émetteur au récepteur. Les améliorations du système peuvent être obtenues de différentes manières :

- Amélioration de la sécurité des communications (modulation des paramètres du chaos, injection de l'information à différents endroits dans l'émetteur,

etc.)

- Amélioration de la synchronisation du chaos entre l'émetteur et le récepteur (modulation des paramètres du système, etc.).

Les techniques de cryptage actuelles exploitant les dynamiques chaotiques reposent sur deux principes :

1- Le premier étant d'ajouter le signal pseudo-aléatoire de nature chaotique au message ; d'où son nom méthode par addition. Le signal résultant est ensuite transmis au récepteur, à l'aide la synchronisation de deux générateurs chaotique, et la restitution du signal original est faite par une simple différence.

2- Le second principe est plus protégé au attaques. La technique utilisée est

basée sur l'inclusion du message dans la structure même du gérnérateur chaotique de sorte que le message participe à la génération de la porteuse chaotique. Cette méthode est dite méthode par inclusion. Plus précisément, cette méthode consiste à moduler le message confidentiel dans la variation de l'un des paramètres de l'émetteur. Cette variation devient une nouvelle variable d'état, ce qui nous introduit une augmentation de la complexité de la dynamique et une amélioration de la qualité de la confidentialité. Afin de renforcer l'efficacité de cette méthode, nous exploitons les caractéristiques des systèmes hyperchaotiques qui offrent plus de garanties quant à la sécurité des communications. La propriété majeure de tels systèmes est qu'ils possèdent plus qu'un *exposant de lyapunov* instable. Nous rappelons qu'un exposant de lyapunov mesure la vitesse de convergence exponentielle de deux trajectoires initialement très proches. Leur calcul est assuré par l'algorithme *Gram-Schmidt*. Pour ces raisons, les systèmes hyperchaotiques sont des structures extrêmement intéressantes dans le domaine cryptographie. Le processus de décryptage consiste à construire un observateur permettant de reconstituer le message confidentiel à partir de la seule information transmise de l'émetteur au récepteur.

Dans ce mémoire, nous allons mettre en oeuvre deux techniques pour réaliser la synchronisation de système chaotique. La première utilise un observateur basé sur une méthode développée dans l'équipe projet ALIEN (Algèbre différentielle) ; et la deuxième est basé sur un observateur à mode glissant d'ordre supérieur.

Nous avons jugé nécessaire de constituer ce mémoire de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons les différentes notions sur l'observabilité. Ceci nous permet par la suite d'expliquer et de donner les différentes notions essentielles pour la synchronisation d'un observateur à mode glissant d'ordre supérieur et l'inversion à gauche. Nous faisons aussi un rappels sur l'al-

gèbre différentielle.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les systèmes chaotiques et leur efficacité dans la confidentialité des messages. Nous réalisons par la suite un émetteur des signaux chaotiques et nous donnons des résultats de simulation.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une introduction aux différents types de la synchronisation des systèmes chaotiques. Cette approche est mise en évidence par la conception d'un observateur dans le cadre d'une transmission sécurisée par la synchronisation d'un système hyperchaotique.

Chapitre 2

Observabilité et observateur

2.1 Introduction

Pour commander de nombreux procédés industriels, on fait appel aux outils de l'automatique (algorithme de commande, de surveillance, de diagnostic, de rejet de perturbation et de stabilité). La réalisation des objectifs de commande nécessite à chaque instant la connaissance du vecteur d'état du procédé.

L'état d'un système est l'ensemble minimum de variables permettant de décrire son évolution procédé. Par exemple, l'état d'un système électromécanique est composé de différentes positions et vitesses ainsi que des tensions et des courants électriques qui génèrent les couples moteurs. Malheureusement, dans les systèmes complexes, la mesure en ligne de toutes les variables d'état est souvent impossible pour des raisons pratiques, économiques, physiques ou de fiabilité. Pour contourner ce problème, on fait appel à des algorithmes d'estimation en ligne de ces variables non mesurées (observateurs ou capteurs logiciels). Ces algorithmes reposent sur un modèle de connaissance (modèle mathématique formé par les équations dynamiques décrivant le procédé) et un certain nombre de mesures issues de capteurs physiques (mesures donnant une information pertinente sur l'évolution du procédé). Ces mesures en ligne sont reliées à l'état du procédé par des lois mathématiques qui permettent de mesurer la sensibilité de la mesure par rapport à l'état du système (observabilité). Dans le cas des systèmes linéaires invariants et explicites, le problème de l'observabilité est résolu. La seule condition nécessaire et suffisante demandée est la condition de rang de la matrice d'observabilité du système.

L'observateur est un algorithme mathématique qui permet de reconstituer les états internes d'un système à partir uniquement des données accessibles, c'est à dire les entrées imposées et les sorties mesurées. En général, l'observateur se fait en deux phases ; la première est une étape d'estimation et la seconde est une étape de correction. L'estimation se fait par le calcul des états à partir du modèle proche du système original, et la condition se fait par la réduction de la différence entre les états estimés et ceux mesurés soit que l'on multiplie par un

gain soit en minimisant cette différence par des méthodes d'optimisation.

Dans ce chapitre, nous allons introduire les différentes notions d'observabilité, d'inversion à gauche, et les conditions nécessaires pour synthétiser un observateur à mode glissant d'ordre supérieur.

2.2 Quelques notions sur l'observabilité

L'observabilité est une notion liée à celle de la sensibilité de la sortie aux états du système qui peut être affaiblie en la remplaçant par la détectabilité. cette notion permet de vérifier la faisabilité de la reconstitution de l'état du système à partir des combinaisons des mesures et de leurs dérivées.

Ainsi, soit le système non-linéaire décrit par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u(t) & x_0 &= x(t_0) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ou $x \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ (X et U deux ouverts) et $y \in \mathbb{R}^p$, tels que : x représente l'état du système, u est l'entrée ou la commande, f et h sont des fonctions de classes C^∞ et y représente la sortie.

Soit $\varphi_u(t, x_0)$ la solution à l'instant t du système (2.1) avec la condition initiale x_0 à l'instant $t = 0$ et sous une commande $u(t)$.

Une notion importante à rappeler est la notion d'indiscernabilité entre deux états initiaux.

1. **Définition :** une paire (x_0, \tilde{x}_0) sera dite indiscernable par $u(t)$ si $\forall t \geq 0$. les sorties $h(\varphi_u(t, x_0))$ et $h(\varphi_u(t, \tilde{x}_0))$ qui en résultent sont égales.
On peut dire aussi que x_0 et \tilde{x}_0 sont indistinguables si les sorties correspondantes $y_0(t)$ et $\tilde{y}_0(t)$ sont identique quelque soit l'entrée $u(t)$ et $\forall t \geq 0$.

Il existe plusieurs approches permettant d'étudier l'observabilité des systèmes non-linéaires, nous allons présenter ici les différents types d'observabilité inspirées de [1].

Définition1 : l'état x_0 est dite observable si l'ensemble des points indiscernable de x_0 , noté $I(x_0)$, se réduit à x_0 . i.e $I(x_0) = \{x_0\}$.

Donc le système (2.1) est observable si pour tout $x \in \mathbf{X} = \{x_0\}$.

Définition2 : l'état x_0 est dite localement observable si pour tout voisinage $V \subset X$ de x_0 , $I_V(x_0) = \{x_0\}$. Le système (2.1) est dit localement observable pour tout $x \in \mathbf{X}, I_V(x_0) = \{x_0\}$.

Maintenant, nous affaiblissons les conditions d'observabilité en ne distinguant que des états initiaux proche l'un de l'autre.

Définition3 : *l'état x_0 est dite faiblement observable, s'il existe un voisinage W de x_0 tel que : $I(x_0) \cap W = \{x_0\}$. le système(2.1) est dit faiblement observable, si pour tout $x \in \mathbf{X}$, $I(x_0) \cap W = \{x_0\}$.*

Définition4 : *l'état x_0 est dite localement faiblement observable, s'il existe un voisinage W de x_0 tel que pour tout voisinage x_0 tel que pour tout voisinage V de x_0 contenu dans W , $I_V(x_0) = \{x_0\}$; et le système (2.1) est dit localement*

faiblement observable si pour tout $x \in \mathbf{X}$, $I_V(x_0) = \{x\}$.

généralement, les différentes définitions d'observabilité définies auparavant vérifient les implications suivantes :

$$\text{système localement observable} \Rightarrow \text{système observable}$$

⇓

$$\text{système localement faiblement observable} \Rightarrow \text{système faiblement observable}$$

⇓

Définition5 : *une entrée $u(t)$, est dite universelle sur $[0, t[$ si tout couple d'états initiaux distincts $\{x_0, \tilde{x}_0\}$ peut être discerné par les sorties sur l'intervalle $[0, t[$, c'est à dire qu'il existe $\tau \in [0, t[$ tel que $h(\varphi_u(\tau, x_0)) \neq h(\varphi_u(\tau, \tilde{x}_0))$. Si u est universelle sur \mathbb{R}^+ , alors elle est dite seulement universelle.*

1. A partir de cette définition, la notion des entrées singulières peut être introduite.

Définition6 : *une entrée non universelle est dite une entrée singulière.*

2.2.1 L'observabilité des systèmes non-linéaire continus

Maintenant, nous allons donner un critère algébrique et analytique d'observabilité faible locale pour le système (2.1).

Soit l'espace d'observabilité O engendré sur \mathbb{R}^n donné par

$$O = \text{span} \left\{ dh, dh^{(1)}, dh^{(2)}, dh^{(3)}, \dots \right\} \quad (2.2)$$

tels que

$$\begin{aligned} dh &= \left(\frac{dh}{\partial x_1}, \dots, \frac{dh}{\partial x_n} \right) \\ dh^{(1)} &= \left(\frac{\partial L_{(f+gu)} h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L_{(f+gu)} h}{\partial x_n} \right) \\ dh^{(2)} &= \left(\frac{\partial (L_{(f+gu)}^2 h + \dot{u} L_g h)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial (L_{(f+gu)}^2 h + \dot{u} L_g h)}{\partial x_n} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si u est constante, alors on définit le rang d'observabilité, noté par $\text{rang}(O)$, le rang de la matrice d'observabilité suivante :

$$\text{rang}(O) |_{x_0} = \text{rang} \begin{pmatrix} dh \\ dh^{(1)} \\ dh^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ dh^{(n-1)} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} |_{x_0}$$

Théorème 1 : Si le $\text{rang}(O)$ est égal à n en x_0 , alors le système (2.1) est faiblement observable en x_0 . si le $\text{rang}(O)$ égal à n en x , $\forall x \in V$ voisinage de x_0 , alors le système (2.1) est faiblement localement observable en x .

2.3 Les différents types d'observateurs

Parmi les observateurs les plus répandus, nous dénombrons des observateurs déterministes et d'autres stochastiques, d'autre part, ils sont répartis en observateurs linéaires. Nous allons brièvement présenter les différentes catégories d'observateurs les plus utilisés. Il existe des variantes d'observateurs développés pour des systèmes spécifiques que nous ne présenterons pas.

Les observateurs déterministes

Ce sont les observateurs qui ne prennent pas en compte les bruits de mesures et les fluctuations aléatoires des variables d'état : l'environnement est déterministe. Parmi ces observateurs, nous pouvons citer l'observateur de *Luenberger* dans le cas de modèles linéaires ou l'observateur par *modes glissants* dont le terme de correction est la fonction signe, cet observateur a été étudié en [1] et mis en oeuvre sur de nombreuses applications, notamment, dans la cryptographie[2].

Les observateurs stochastiques

Ces observateurs donnent une estimation optimale des états en se basant sur des critères stochastiques. Leurs observations se basent sur la présence du bruit dans le système original, ce qui est souvent le cas. L'algorithme du *Filtre de Kalman Etendu* illustre bien ce type d'observateur.

Les observateurs linéaires

Ce sont les observateurs dont la construction du gain est basé sur une matrice linéaire et invariant dans le temps. Les observateurs de Luenberger et en mode glissant se basent sur cette approche.

Les observateurs non-linéaires

Les systèmes peuvent être non-linéaires. Dans ce cas des observateurs non-linéaires ont été développés pour palier cette difficulté, c'est le cas de l'observateur Grand Gain, cet observateur est synthétisé en prenant en compte la modélisation non-linéaire du système.

2.4 Observation et identification

Pour des raisons techniques ou économiques (de construction, de positionnement et de coût des capteurs, ...), il n'est pas possible en général d'accéder à la totalité des composantes du vecteur d'état, ou à d'autres variables spécifiques, telles que les paramètres, par des dispositifs de mesure. Or, dans beaucoup de cas, la commande d'un système nécessite de s'assurer de la connaissance à chaque instant de ce vecteur d'état. Si le système est observable, une solution consiste alors en la synthèse d'un observateur, grâce auquel il est possible d'estimer tout ou une partie de l'état par l'intermédiaire des grandeurs connues du système. Les recherches réalisées dans le cadre de cette thématique s'attachent plus particulièrement à des techniques d'observation robuste et en temps fini telles que celles par modes glissants.

Dans le cadre d'un problème d'observation, les trajectoires du système sont contraintes à évoluer au bout d'un temps fini sur une surface choisie telle que, en régime glissant, l'erreur d'observation tende vers zéro. La dynamique équivalente en régime glissant conduit à une estimation du vecteur d'état, de manière asymptotique (voir par exemple [3] ou en temps fini, pour des observateurs par modes glissants d'ordre un ou à [3,4] pour des ordre deux). Les observateurs par modes glissants se sont avérés être efficaces et robustes dans différents domaines tels que la robotique, les machines électriques ou les réacteurs chimiques. On peut trouver d'autres applications spécifiques telles qu'en détection et identification de défauts, en identification paramétrique, en cryptographie [7], ou pour des systèmes mécaniques avec frottements secs.

Les observateurs par modes glissants possèdent plusieurs intérêts :

- Leur intérêt premier est d'"écraser " les non linéarités des dynamiques de l'erreur (écart entre état réel et état reconstruit) par le terme de correction, qui est discontinu : une telle discontinuité de commande peut être assimilée à l'effet d'un grand gain.

-Les variables observées convergent en temps fini vers l'état réel du système. Dans le cadre d'un problème d'observation, le fait de recueillir l'information désirée en temps fini est particulièrement intéressant afin de savoir à partir de quel moment cette information est pertinente. De plus, la rapidité de la convergence peut être aisément réglée en fonction des gains de l'observateur et, toujours en fonction de ces mêmes gains, la précision de l'estimation ainsi qu'une borne sur le temps de convergence peuvent être évaluées. D'autre part, il est bien connu qu'un des grands problèmes que rencontre la commande des systèmes non linéaires par retour d'état est l'absence (en général) du principe de séparation. Cela signifie que, contrairement au cas linéaire, on ne peut pas découpler le problème de la commande de celui de l'observation. Ainsi, une commande stabilisante par retour d'état pourra perdre sa propriété de stabilisation si on y remplace les variables non mesurées par les états d'un observateur convergeant tout de même vers les variables réelles. Observer en temps fini permet d'obtenir des critères relativement simples de stabilité en boucle fermée.

-Ces observateurs, de part leur relative propriété de robustesse, peuvent, de plus, être appliqués à des systèmes soumis à des discontinuités, des perturbations ou des incertitudes paramétriques.

Ces propriétés nous ont amené à envisager leur utilisation dans le cadre de l'observation des systèmes à entrées inconnues. Le but de cette problématique est d'obtenir la connaissance de l'état du système malgré des actions extérieures non identifiées. Ces études ont une portée importante car les champs d'applications sont très vastes. Ceux-ci dépendent de la nature des entrées inconnues qui peut s'apparenter à, par exemple, des perturbations (domaine des observateurs robustes), à des incertitudes paramétriques (domaine de l'identification de paramètres), à des pannes ou des défauts du système (domaine de la sûreté des systèmes) ou encore à des messages codés (domaine de la cryptographie).

Nous attacherons à décrire une autre méthode d'observation en temps fini. elle est basée sur l'utilisation des propriétés d'homogénéité de certains systèmes qui, comme dans le cas de la commande, présente des liens avec la synthèse d'observateurs par modes glissants. La seconde est une introduction aux techniques d'estimation temps fini développée au sein de l'Equipe ALIEN[8].

2.4.1 Observation des systèmes non linéaires à entrées inconnues

La synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires peut se révéler difficile et soumise à de nombreuses conditions, même pour ceux dont la dynamique est totalement connue. De nombreuses études relatives à ce problème peuvent être trouvées dans la littérature. Dans la plupart des approches, on recherche une transformation d'état non linéaire telle que le système original puisse être mis sous une forme canonique observable qui, généralement, admet une structure triangulaire. Dans ce cas, des observateurs avec des dynamiques d'erreur linéarisables, à grand gain ou par backstepping peuvent être construits.

Il existe peu de travaux traitant de l'observation des systèmes non linéaires assujettis à des entrées inconnues et sont basés sur des méthodes dites robustes, tels que les observateurs grand gain ou par modes glissants. On peut trouver des applications dans le cadre du problème de la détection et l'identification de défaut. D'autres travaux concernent le problème de l'observation robuste des systèmes non linéaires et mettent en jeu les techniques par modes glissants. Dans le cadre de l'estimation robuste et en temps ni par modes glissants, il est généralement supposé que le système peut être transformé en un ensemble de sous-systèmes, chacun sous une forme triangulaire observable (similaire à des chaînes d'intégrateurs découplées) où les entrées inconnues agissent uniquement sur la dernière dynamique de chaque forme triangulaire. Dans ce qui suit, nous nous attachons dans un premier temps à déterminer une condition géométrique assurant l'existence d'une telle transformation et à construire un observateur par modes glissants d'ordre supérieur pour cette classe de systèmes. Ensuite, nous proposons une méthode permettant d'estimer en temps fini les états et les entrées inconnues du système même si cette condition n'est pas satisfaite.

Considérons le système non linéaire suivant défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)w_i \\ y = h(x) = [h_1(x), \dots, h_p(x)]^T \end{cases} \quad (2.4)$$

où $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties et où $w = [w_1, \dots, w_m] \in \mathbb{R}^m$ représente les entrées inconnues. Les champs de vecteur f et g_1, \dots, g_m , ainsi que les fonctions h_1, \dots, h_p , sont supposés suffisamment différentiables sur U . Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que $p \geq m$, et que pour tout $x \in U$, la distribution $G = \text{span} \{g_1, \dots, g_m\}$ et la codistribution $\text{span} \{dh_1, \dots, dh_p\}$ sont régulières sur U .

Les indices caractéristiques des entrées inconnues $\{\rho_1, \dots, \rho_p\}$ sont définis tels que pour tout $x \in U$ et pour $1 \leq i \leq p$:

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \text{ pour } k < \rho_i - 1, \text{ et pour tout } i \leq j \leq m,$$

$$L_{g_k} L_f^{\rho_i - 1} h_i(x) \neq 0, \text{ pour au moins un indice } i \leq j \leq m.$$

Le système (2.4), lorsque $w = 0$, est supposé être localement faiblement observable sur U [2]. On peut alors définir les indices d'observabilité (v_1, v_2, \dots, v_p) du système (2.4) qui satisfont $v_1 + v_2 + \dots + v_p = n$, et qui sont tels que

$$\phi(x) = (h_1, \dots, L_f^{v_1 - 1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{v_p - 1} h_p)^T(x) \quad (2.5)$$

est un difféomorphisme défini pour tout $x \in U$. Après un éventuel réordonnement des variables d'état, le système (2.4) est transformé sous la forme :

$$\dot{\xi}_i = A_{\delta_i} \xi_i + H_{\delta_i} V_{\delta_i}(x, w) \quad (2.6)$$

$$\dot{\eta} = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)w \quad (2.7)$$

$$y_i = C_{\delta_i} \xi_i$$

avec $\xi = (\xi_1^T, \dots, \xi_p^T)^T$, $\xi_i \in \mathbb{R}^{\delta_i}$, $1 \leq i \leq p$

$$V_{\delta_i}(x, w) = L_f^{\delta_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{\delta_i-1} h_i(x) w_j \in \mathbb{R}$$

$$A_{\delta_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\delta_i \times \delta_i}$$

$$H_{\delta_i} = (0 \ 0 \ \cdots \ 1)^T \in \mathbb{R}^{\delta_i},$$

$$C_{\delta_i} = (1 \ 0 \ \cdots \ 0) \in \mathbb{R}^{1 \times \delta_i}$$

et où a, b sont des champs de vecteur continus.

D'après la définition des ρ_i , on a $\delta_i = \min(v_i, \rho_i)$ et $\sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{\delta_i-1} h_i(x) w_j = 0$

si $v_i < \rho_i$ (i.e $\delta_i = v_i$)

Forme triangulaire d'observabilité

Dans un grand nombre de travaux, la possibilité de réaliser un observateur d'état pour le système (1.5) présuppose que celui-ci puisse être mis sous une forme triangulaire observable. Cette possibilité est assujetti a une condition nécessaire et suffisante qui peut s'exprimer par la proposition suivante :

Proposition 1 *Supposons le système (2.4) localement faiblement observable. Sous l'action du difféomorphisme (2.5), le système (2.4) est localement transformé sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= A_{v_i}\xi_i + H_{v_i}V_{v_i}(x, w) \\ y_i &= C_{v_i}\xi_i\end{aligned}\tag{2.8}$$

si et seulement si

$$v_i \leq \rho_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq \rho \text{ et pour tout } x \in U\tag{2.9}$$

Notons que, dans ce cas, $\delta_i = v_i$ pour tout $1 \leq i \leq \rho$ et que $\sum_{j=1}^m L_{g_j}L_f^{v_i-1}h_i(x)w_j \neq$

0 si et seulement si $v_i = \rho_i$

On peut trouver dans la littérature des observateurs temps fini pour une telle forme d'observabilité, basés par exemple sur des techniques de différentiation numérique ou par modes glissants d'ordre un [1]. Dans le dernier cas, la correction de la dynamique de l'erreur se fait directement par l'intermédiaire d'une fonction discontinue et nécessite une analyse de *l'injection de sortie équivalente*, c'est-à-dire de la valeur moyenne de la fonction discontinue en régime glissant. L'estimation d'état repose alors sur une procédure qui se fait étape par étape en utilisant les valeurs filtrées d'injections de sortie discontinues dépendant successivement les unes des autres. Cependant, les approximations de ces injections de sortie équivalentes, qui peuvent être obtenues par des filtres passe-bas, sont susceptibles d'introduire des retards et des biais pouvant conduire à des estimations erronées ou même l'instabilité de l'observateur (d'autant plus lorsque l'ordre du système croît). Une solution permettant de pallier ce problème est l'utilisation de techniques par modes glissants d'ordre supérieur.

2.4.2 Un observateur par modes glissants d'ordre supérieur

Un différentiateur robuste basé sur l'algorithme du super-twisting (algorithme par modes glissants d'ordre deux) a été développé dans [1] afin de récupérer en temps fini la dérivée d'un signal, éventuellement bruité. Ces travaux ont été étendus au problème de la génération de différentiateurs d'ordre quelconque, et convergeant en temps ni, dans [2] en utilisant la propriété d'homogénéité ou dans [7] selon une procédure hiérarchisée. Ici, sur la base de travaux réalisés dans [2], nous développons un observateur par modes glissants d'ordre arbitraire pour lequel il est possible de montrer la convergence en temps fini de l'observation

d'erreur par des arguments de stabilité au sens de Lyapunov. Pour cela, considérons un système monovarié (une sortie et une entrée inconnue) sous une forme triangulaire similaire à chacun des sous-systèmes de (2.8) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_v + H_v V_v(x, w) \\ y &= C_v x\end{aligned}\tag{2.10}$$

où $x = [x_1, \dots, x_v] \in \mathbb{R}^v$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie mesurée et $w \in \mathbb{R}$ est une entrée inconnue. On suppose que l'état du système ainsi que l'entrée inconnue et sa dérivée par rapport au temps sont uniformément bornés, c'est-à-dire qu'il existe des constantes positives $d_i, 1 \leq i \leq v, K_1$ et K'_1 tel que pour tout $t \succ 0$:

$$|x_i(t)| \prec d_i, |w(t)| \prec K_1, |\dot{w}(t)| \prec K'_1,$$

Un observateur étendu de dimension 2 est alors ainsi défini :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= z_1 + \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{z}_1 &= \alpha_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= z_2 + \lambda_2 |x_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{z}_2 &= \alpha_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{v-1} &= z_{v-1} + \lambda_{v-1} |z_{v-2} - \hat{x}_{v-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{v-2} - \hat{x}_{v-1}) \\ \dot{z}_{v-1} &= \alpha_{v-1} \text{sign}(z_{v-2} - \hat{x}_{v-1}) \\ \dot{\hat{x}}_v &= z_v + \lambda_v |z_{v-1} - \hat{x}_v|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{v-1} - \hat{x}_v) \\ \dot{z}_v &= \alpha_v \text{sign}(z_{v-1} - \hat{x}_v)\end{aligned}\tag{2.11}$$

L'erreur d'observation est décrite par le vecteur $E = [e_1, \dots, e_v, \zeta_1, \dots, \zeta_v]^T$ où

$$\begin{aligned}e_i &= x_i - \hat{x}_i \\ \zeta_i &= x_{i+1} - z_i\end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, v$ et en posons $x_{v+1} \triangleq V_v(x, w)$. Les gains d'observations λ_i et α_i seront définis ultérieurement. La dynamique de l'erreur d'observation est alors donnée par :

$$\dot{e}_1 = \xi_1 - \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \quad (2.12)$$

$$\dot{\xi}_1 = x_3 - \alpha_1 \text{sign}(e_1) \quad (2.13)$$

$$\dot{e}_2 = \xi_2 - \lambda_2 |e_2 - \xi_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_2 - \xi_1)$$

$$\dot{\xi}_2 = x_4 - \alpha_2 \text{sign}(e_2 - \xi_1)$$

\vdots

$$\dot{e}_{v-1} = \xi_{v-1} - \lambda_2 |e_{v-1} - \xi_{v-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{v-1} - \xi_{v-2})$$

$$\dot{\xi}_{v-1} = x_{v+1} - \alpha_{v-1} \text{sign}(e_{v-1} - \xi_{v-2})$$

$$\dot{e}_v = \xi_v - \lambda_v |e_v - \xi_{v-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_v - \xi_{v-1})$$

$$\dot{\xi}_v = \dot{x}_{v+1} - \alpha_v \text{sign}(e_v - \xi_{v-1})$$

Portons ici notre attention sur les deux premières équations (2.13)-(2.14) et notons

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \xi_1 \end{bmatrix}$$

Par dérivation, on obtient :

$$\dot{\Psi} = |\Psi_1|^{-1} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \Psi + \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$= |\Psi_1|^{-1-1} \left(M\Psi + \begin{bmatrix} 0 \\ |\Psi_1| x_3 \end{bmatrix} \right) \quad (2.15)$$

où $M = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hurwitz.

Afin de montrer la convergence en temps fini de Ψ vers l'origine, introduisons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \Psi^T P \Psi$$

où $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique définie positive. La dérivée de V le long des solutions de (2.15) est donnée par :

$$\dot{V} = |\Psi_1|^{-1} \left(\Psi^T (M^T P + PM) \Psi + 2\Psi^T P \begin{bmatrix} 0 \\ |\Psi_1| x_3 \end{bmatrix} \right)$$

où

$$2\Psi^T P \begin{bmatrix} 0 \\ |\Psi_1| x_3 \end{bmatrix} = 2x_3 |\Psi_1| (p_3 \Psi_1 + p_2 \Psi_2) \leq k_1 \Psi_1^2 + k_2 \Psi_2^2$$

avec $k_1 = 2d_3(|P_3| + 1)$ et $k_2 = d_3 p_2^2$. donc :

$$\dot{V} \leq |\Psi_1|^{-1} \Psi^T \left(M^T P + PM + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \right) \Psi.$$

Puisque M est une matrice de Hurwitz, les gains d'observation λ_1 et α_1 peuvent être choisis de telle sorte que :

$$-Q = M^T P + PM + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

soit définie négative. De ce fait :

$$\dot{V} \leq |\Psi_1|^{-1} \Psi^T Q \Psi \leq -|\Psi_1|^{-1} \lambda_{\min} \{Q\} \|\Psi\|^2.$$

Notons ici que V n'est pas différentiable en $\Psi_1 = 0$. Toutefois, les arguments des Théorèmes de Lyapunov[8] et de Lassaile restent valables car $\lim_{\Psi \rightarrow 0} \dot{V} = 0$. D'autre part, puisque :

$$\|\Psi\|^2 \geq \frac{V}{\lambda_{\max} \{P\}}$$

$$|\Psi_1| \leq \|\Psi\| \leq \left(\frac{V}{\lambda_{\min} \{P\}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

On a :

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{\lambda_{\min}\{P\}}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}} V = -\lambda_{\min}\{P\}^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}} V^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci prouve la convergence en temps fini du vecteur Ψ vers zéro, c'est-à-dire la convergence en temps fini des erreurs d'observation e_1 et ζ_1 vers zéro.

Donc, puisqu'après un temps fini $\zeta_1 = 0$, la dynamique de l'erreur d'observation s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= 0 \\ \dot{e}_2 &= \xi_2 - \lambda_2 |e_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_2) \\ \dot{\xi}_2 &= x_4 - \alpha_2 \text{sign}(e_2) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{v-1} &= \xi_{v-1} - \lambda_2 |e_{v-1} - \xi_{v-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{v-1} - \xi_{v-2}) \\ \dot{\xi}_{v-1} &= x_{v+1} - \alpha_{v-1} \text{sign}(e_{v-1} - \xi_{v-2}) \\ \dot{e}_v &= \xi_v - \lambda_v |e_v - \xi_{v-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_v - \xi_{v-1}) \\ \dot{\xi}_v &= x_{v+1} - \alpha_v \text{sign}(e_v - \xi_{v-1}) \end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, on peut montrer que, de proche en proche, l'ensemble des erreurs d'observation s'annulent au bout d'un temps fini, c'est-à-dire, pour $i = 1, \dots, v$:

$$\begin{aligned} e_i &= x_i - \hat{x}_i = 0 \\ \zeta_i &= x_{i+1} - z_i = 0 \end{aligned}$$

En particulier, à la dernière étape de la procédure, on a $\zeta_v = x_{v+1} - z_v = 0$ ce qui donne une estimation en temps fini de $V_v(x, w) = z_v$.

Estimation des entrées inconnues

Reprenons maintenant le système multivariable (2.8). On peut réaliser un observateur similaire à (2.11) :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_{i,1} &= z_{i,1} + \lambda_{i,1} |x_{i,1} - \hat{x}_{i,1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{i,1} - \hat{x}_{i,1}) \\
\dot{z}_{i,1} &= \alpha_{i,1} \text{sign}(x_{i,1} - \hat{x}_{i,1}) \\
\dot{\hat{x}}_{i,2} &= z_{i,2} + \lambda_{i,2} |x_{i,2} - \hat{x}_{i,2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{i,1} - \hat{x}_{i,2}) \\
\dot{z}_{i,2} &= \alpha_{i,2} \text{sign}(z_{i,1} - \hat{x}_{i,2}) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_{i,v_i-1} &= z_{i,v_i-1} + \lambda_{i,v_i-1} |z_{i,v_i-2} - \hat{x}_{i,v_i-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{i,v_i-2} - \hat{x}_{i,v_i-1}) \\
\dot{z}_{i,v_i-1} &= \alpha_{i,v_i-1} \text{sign}(z_{i,v_i-2} - \hat{x}_{i,v_i-1}) \\
\dot{\hat{x}}_{i,v_i} &= z_{i,v_i} + \lambda_{i,v_i} |z_{i,v_i-1} - \hat{x}_{i,v_i}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{i,v_i-1} - \hat{x}_{i,v_i}) \\
\dot{z}_{i,v_i} &= \alpha_{i,v_i} \text{sign}(z_{i,v_i-1} - \hat{x}_{i,v_i})
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où $y_i = x_{i,1}$, et $i \in \{1, \dots, p\}$. Après un temps fini, l'ensemble des états $\zeta_{i,j} = x_{i,j+1} - z_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, v_i-1\}$, a convergé vers zéro.

Cet observateur permet donc d'obtenir, en temps fini, une estimation de l'ensemble des variables d'état, mais également des quantités suivantes :

$$z_{v_i=V_{v_i}}(x, w) = L_f^{v_i} h_i(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_j} L_f^{v_i-1} h_i(x) w_j; \quad 1 \leq i \leq p \tag{2.17}$$

Les relations (2.17) peuvent être réécrites de la manière qui suit :

$$\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{v_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{v_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{v_p-1} h_p(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{v_p-1} h_p(x) \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} z_{v_1} - L_f^{v_1} h_1(x) \\ \vdots \\ z_{v_p} - L_f^{v_p} h_p(x) \end{pmatrix}.$$

Puisque la distribution $G = \text{span} \{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ est régulière pour tout $x \in U$, la matrice

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{v_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{v_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{v_p-1} h_p(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{v_p-1} h_p(x) \end{pmatrix}$$

est de rang plein en colonne étant donné que :

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} dL_f^{v_1} h_1(x) \\ \vdots \\ dL_f^{v_p} h_p(x) \end{pmatrix} (g_1(x), \dots, g_m(x)).$$

Donc, une estimation de l'entrée inconnue peut être obtenue via :

$$\tilde{w} = \Lambda^+(\hat{x}) \begin{pmatrix} z_{v_1} - L_f^{k_1} h_1(x) \\ \vdots \\ z_{v_p} - L_f^{k_p} h_p(x) \end{pmatrix}$$

où Λ^+ est une pseudo-inverse de Λ .

Le fait d'avoir une estimation rapide et robuste est un fait intéressant dans des applications tels que le diagnostique ou bien l'identification en ligne de paramètres. Ce type d'observateurs peut aussi être appliqué à des systèmes non linéaires où apparaissent des singularités d'observation (voir [11] pour plus de détails), ou pour l'observation de systèmes non linéaires à commutations. On peut trouver une littérature abondante à leur sujet et notamment à propos du problème d'observation de l'état continu, mais aussi de l'état discret, c'est-à-dire le mode dans lequel évolue le système.

2.4.3 Méthode d'inversion à gauche et condition de recouvrement d'observabilité

Dans la transmission de données par synchronisation de systèmes chaotique, il est important de pouvoir estimer l'entrée inconnue du système en plus de la synchronisation des états. En effet, l'entrée inconnue peut être un défaut, une perturbation, ou dans notre cas, un message confidentiel. La transmission d'information avec la méthode par inclusion est non seulement un problème d'observabilité mais aussi un problème d'inversion à gauche, c'est à dire reconstruire tous les états ainsi que le message inconnu à partir de la sortie du système et de ses dérivées [8].

Deux types d'observateurs ont été proposés pour les systèmes à entrée inconnue : des observateur destinés à estimer seulement les états du système (sans tenir compte de l'entrée inconnue)[10], et des observateurs à l'estimation des états et de l'entrée inconnue [11].

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n \\ y(t) = h(x, u) \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans le quel $x \in \mathbb{R}^n$ est l'espace d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, et $y \in \mathbb{R}^k$ représente la sortie du système, $t \in T = [0, t_f]$. Les fonctions $f(x, u), h(x, u), u(t)$ sont considérées suffisamment dérivables. Le problème d'inversion du système consiste à reconstruire x, u ou une partie de ceux-ci à partir de la sortie $y(\cdot)$ du système. Le système (2.18) génère le "mapping" suivant (pour la condition x_0 connue) :

$$\phi(u) : U \subseteq C^N(T, \mathbb{R}^m) \longrightarrow C^N(T, \mathbb{R}^k) : u \longrightarrow x(\cdot, x_0, u) \longrightarrow y(\cdot) = h(x, u)$$

Avant d'introduire les propriétés du système (2.18), on considère un ensemble de fonctions U définie sur le domaine D_∞ constitué de fonctions et de leurs dérivées d'ordre 1 à ∞ . Alors nous avons : $U = U(D_\infty)$ où :

$$D_0 = \cup_{t \in T} u(t), D_1 = \cup_{t \in T} (u(t), \dot{u}(t)), \dots, D_\infty = \cup_{t \in T} (u(t), \dots, u(t)^\infty), D_i \subseteq \mathbb{R}^{(i+1)m}$$

Définition 1 *le système (2.18) est inversible dans le domaine $D * D * T$ si pour tout $x_0 \in D$ et deux entrées différentes $u_1(t), u_2(t) \in D_\infty$ il existe un instant $t \in T$ tel que $h(\phi(x_0, u_1)) \neq h(\phi(x_0, u_2))$.*

Nous écrivons maintenant le système (2.18) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + p(x)w, \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dans lequel l'entrée inconnue (perturbation) w est considérée être bornée, et les champs de vecteurs $f, p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des réels analytiques. Le vecteur de sortie de ce système est transmis au récepteur, qui doit générer un vecteur de sortie qui convergera asymptotiquement vers le vecteur d'entrée de l'émetteur. Ce problème constitue le problème d'inversion à gauche.

Dans le système (2.19), on considère que w est continu, ou au moins continu par morceaux.

Hypothèses 1 *la perturbation (entrée inconnue) est bornée*

Hypothèses 2 *$span\{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h\}$ est de rang n*

Hypothèses 3 $((dh)^T, (dL_f h)^T, \dots, (dL_f^{n-1} h)^T p(x) = (0 \dots 0 \theta)^T$ où θ signifie une fonction non nulle presque dans $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

La condition donnée dans l'hypothèse 3 est appelée condition de recouvrement d'observabilité ("observability matching condition"). cette condition garantie le propriété d'inversibilité à gauche, c'est à dire la possibilité de retrouver tous les états et le message à partir de y et de ces dérivées.

2.5 Observation et identification algébrique

Nous présentons maintenant une deuxième technique d'observation temps fini, basée cette fois sur des méthodes développées dans l'équipe du projet ALIEN (Algèbre pour Identification et Estimation Numériques) qui vise à la conception de nouveaux algorithmes d'estimation rapide, ainsi que leur utilisation en commande. Dans ce vaste contexte, nous ciblons : la reconstruction de variables non mesurées (observateurs), le filtrage de variables bruitées, l'estimation de dérivées d'ordre n d'un signal, l'identification paramétrique pour des systèmes linéaires ou non, sans ou avec retards. L'originalité est de proposer des méthodes issues de l'algèbre différentielle (calcul opérationnel, distributions), conduisant à des algorithmes rapides (temps réel), déterministes (le bruit considéré comme une fluctuation rapide) et non asymptotiques (convergence en temps fini).

Afin d'illustrer le principe de cette technique, introduite en 2003 par Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramirez, considérons le système linéaire du premier ordre suivant :

$$y(t) = ay(t) + u(t) + \gamma_0, \quad (2.20)$$

où a est un paramètre inconnu à identifier et où γ_0 est une perturbation inconnue et constante. Avec les notations du calcul opérationnel et de la condition initiale $y_0 = y(0)$, l'équation (2.20) s'écrit :

$$s\hat{y}(s) = a\hat{y}(s) + \hat{u}(s) + \frac{\gamma_0}{s}.$$

Afin d'éliminer le terme γ_0 , on multiplie tout d'abord les deux membres de cette équation par l'opérateur de Laplace s , puis on les dérive par rapport à s , ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left[s \left\{ s\hat{y}(s) = a\hat{y}(s) + \hat{u}(s) + y_0 + \frac{\gamma_0}{s} \right\} \right] \\ \implies & 2s\hat{y}(s) + s^2\hat{y}'(s) = a(s\hat{y}'(s) + \hat{y}(s)) + s\hat{u}'(s) + \hat{u}(s) + y_0 \end{aligned}$$

Rappelons que $\hat{y}'(s) \triangleq \frac{d\hat{y}(s)}{ds}$ correspond, dans le domaine temporel, à $-ty(t)$. Supposons pour simplifier que $y_0 = 0$. Alors, pour tout $v \succ 0$,

$$s^{-v} [2s\hat{y}(s) + s^2\hat{y}'(s)] = s^{-v} [a(s\hat{y}'(s) + \hat{y}(s)) + s\hat{u}'(s) + \hat{u}(s)] \quad (2.21)$$

Pour $v = 3$, on obtient l'estimation suivante pour a :

$$a = \frac{\int_0^T d\lambda \int_0^\lambda y(t)dt - \int_0^T tdy(t)dt + \int_0^T d\lambda \int_0^\lambda tu(t)dt - \int_0^T d\lambda \int_0^\lambda d\sigma \int_0^\sigma u(t)dt}{\int_0^T d\lambda \int_0^\sigma d\sigma \int_0^\sigma y(t)dt - \int_0^T d\sigma \int_0^\lambda tdy(t)dt} \quad (2.22)$$

Puisque $T > 0$ peut être très petit, l'estimation via (2.21) est très rapide (en temps fini).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné et comparé plusieurs définitions d'observabilité, tel que ; le discernabilité, l'observabilité et ces variantes affaiblies, et la condition nécessaire sur le rang d'observabilité. Ceci est important dans la synthèse d'un observateur ou on doit s'assurer de l'existence d'une solution avant d'entamer notre travail. Ensuite, nous avons détaillé un observateur à mode glissant d'ordre supérieur et le problème d'inversion à gauche. En dernier lieu, nous avons rappelé quelques notions de base sur l'algèbre différentielle. Ces notions seront exploitées dans les chapitres suivants.

Chapitre 3

Etude d'un émetteur pour les transmissions chaotiques

3.1 Chaos et Transmission

3.1.1 Introduction

La transmission chaotique de données a été à l'origine de la transmission de données et a attirée beaucoup d'attention, particulièrement après le travail exceptionnel de Carroll et de Pecora sur la synchronisation de deux systèmes chaotiques [9]. Bien que l'étude d'appliquer le chaos dans la transmission de données soit plus récente que celle de la transmission traditionnelle, telle que les algorithmes DES, RSA et ainsi de suite, le chaos possède plusieurs propriétés qui sont très intéressantes pour la transmission. Dans ce chapitre, nous discuterons d'abord les principes et les avantages de l'approche par transmission chaotique. De plus, comme la plupart des approches de la transmission chaotique sont basées sur la synchronisation du chaos, nous rappellerons les techniques de synchronisation les plus populaires utilisées dans des schémas de transmission chaotique. Après cela, nous donnerons une vue d'ensemble des principaux schémas de transmission chaotique. Puisque la majeure partie des schémas de transmission chaotique proposée se concentre seulement sur le système mono-entrée mono-sortie, il existe un inconvénient majeur quand nous le généralisons au cas avec des entrées multiples et des sorties multiples, ceci sera discuté dans la section (5.6). Afin de surmonter cet inconvénient, nous proposerons un nouveau schéma de transmission chaotique avec des entrées multiples, et un exemple sera donné afin de souligner l'applicabilité de la méthode proposée.

3.1.2 Quelques mots sur le chaos

le chaos a été intensément étudié au cours des quatre dernières décennies au sein de la science, les mathématiques et l'ingénierie des communications. Générer ou en améliorant le chaos est important dans l'étude de la dynamique chaotique et de leurs applications de chiffrement et de la communication, qui

sont généralement développés dans deux directions : une approche multi-scroll génère des attracteurs chaotiques basée sur des systèmes existants tels que les circuits chaotiques généralisés Chua en utilisant certaines fonctions non lisses non linéaires tels que les fonctions linéaires par morceaux et les fonctions saturées, etc. Ces non-linéarités ne contiennent pas de termes quadratiques, et les rouleaux de produits d'attracteurs chaotiques ont des formes cycliques.

Un système dynamique est dit chaotique si une portion "significative" de son espace des phases qui est borné, présente simultanément les deux caractéristiques suivantes :

1. Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.
2. Une forte récurrence c'est à dire que la trajectoire de système passe plusieurs fois par des points très proches sans jamais passer par le même point.

Un comportement chaotique se caractérise donc par une divergence des orbites dans l'espace des phases. La vitesse de cette divergence peut être mesurée par les exposants de Lyapunov . Edward Lorenz, dans son article historique de 1963 a marqué un tournant décisif de l'histoire du chaos, il a présenté le fameux système d'équations qui modélise de façon simplifiée l'évolution des mouvements atmosphériques. Les systèmes chaotiques déterministes présentent un comportement tellement complexe qu'il paraît être dû au hasard. Ainsi, la théorie du chaos [9] remet en cause la démarche classique de modélisation puisqu'on peut aujourd'hui utiliser des modèles déterministes pour décrire des systèmes complexes d'apparence stochastique. Dès 1970, cette nouvelle vision d'un monde déterministe, mais que l'on ne peut pas prévoir, provoque un véritable engouement dans le monde scientifique, et très rapidement dans tous les domaines, on recherche des applications. C'est ainsi, que le cryptage et la transmission sécurisée de données par synchronisation de système chaotique ont vu le jour.

3.1.3 Avantages du chaos

En première approche, les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques qui évoluent dans une région bornée, qui possède une trajectoire partout dense dans cette région, qui sont très sensibles aux conditions initiales : deux conditions initiales très proches conduisent à deux trajectoires qui s'éloignent rapidement l'une de l'autre. Les propriétés nous permettent théoriquement de générer un nombre infini de signaux chaotiques non corrélés d'un même système en utilisant différentes valeurs initiales. Ceci peut être employé pour générer des séries de nombres pseudo-aléatoires. Cette série est très utile dans certains systèmes cryptographiques traditionnels ou dans le protocole de TCP/IP . Une autre application de cette propriété est de produire des séquences chaotiques, pour remplacer les séquences étalées conventionnelles (telles que des m-séquences ou des séquences d'or utilisées dans les systèmes de spectre étalé par séquence directe). Ensuite, il est à noter qu'en raison de leur propriété aléatoire, les signaux chaotiques ont des fonctions d'autocorrélation très étroites et des spectres de puissance à large bande proche du bruit blanc. Ainsi, la corrélation croisée de signaux chaotiques a une valeur très petite.

Puisque le système chaotique a une trajectoire non périodique et est sensible aux conditions et aux paramètres initiaux, logiquement il peut aussi être employé pour crypter des messages. Dans les systèmes de transmission conventionnels, des signaux sinusoidaux sont employés comme signaux porteurs, ce qui offrent une efficacité excellente dans une large bande. Cependant, la puissance transmise est concentrée dans une bande étroite, entraînant une densité spectrale de puissance élevée. Les problèmes principaux avec cette caractéristique sont : l'atténuation élevée dans une bande de fréquence étroite ce qui peut mener à la perte de synchronisation, des niveaux élevés d'interférence avec d'autres utilisateurs du réseau, les possibilités élevées d'interception, etc. Au contraire, les signaux chaotiques sont habituellement identifiés comme du bruit et ont des bandes larges, ainsi ils peuvent être utilisés pour étaler l'information originale à bande étroite. Ainsi, en utilisant les signaux chaotiques pour crypter l'information, les signaux résultants sont des signaux de spectre écarté ayant une bande plus grande et des densités spectrales de puissance inférieure à des solutions usuelles.

3.1.4 Technique de Démodulation

Du point de vue de la transmission, il existe la technique de démodulation cohérente et la technique de démodulation non cohérente pour récupérer le signal transmis [2]. Dans une démodulation non cohérente, le récepteur ne connaît pas (et n'essaie pas d'estimer) la forme d'onde transmise. Au lieu de cela, il emploie des attributs statistiques du signal transmis afin de décider des propriétés du signal émis, par exemple, la variance, l'espérance et beaucoup d'autres propriétés statistiques. L'avantage principal d'employer des méthodes non cohérentes est que le récepteur n'a pas à être synchronisé avec l'émetteur. De plus, les récepteurs non cohérents sont souvent plus simples que leurs homologues cohérents. L'inconvénient en employant la démodulation non cohérente est que certaines propriétés statistiques du signal transmis peuvent permettre à un récepteur non autorisé de décoder le message sans aucune connaissance de la dynamique du secrète de l'émetteur. Par conséquent les schémas de transmission chaotique de données qui permettent la démodulation non cohérente ne sont pas très sûres d'un point de vue du chiffage. Mais ils sont très utiles dans un environnement où la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est difficile.

La démodulation cohérente implique que la forme d'onde transmise est connue par ce récepteur mais il peut aussi être corrélé par du bruit, pour maximiser le SNR (signal to noise ratio). Pour le signal transmis qui est modulé, la démodulation cohérente exige la récupération de l'amplitude et de la phase du signal. Ceci peut être fait en employant une PLL (Phase Lock Loop) qui récupère la phase du signal, et un AGC (Automatic Gain Control) qui normalise l'amplitude du signal reçu. Dans le cas de la transmission chaotique, la connaissance de l'état de l'émetteur implique la connaissance de la forme d'onde transmise. Par conséquent, la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur permet au récepteur de reconstruire la forme d'onde transmise et d'employer des techniques de détections cohérentes.

Il y avait plusieurs schémas de transmission chaotique en employant le chaos pour le cryptage et ces majeurs schémas sont basés sur la synchronisation du chaos. Dans un premier temps, les phénomènes de synchronisation de système chaotique seront revus.

3.1.5 la transmission avec des entrées multiples

Dans cette section, afin de mettre en évidence la méthode proposée, nous allons utiliser un système chaotique de dimension 4 afin de construire un système de transmission chaotique avec des entrées multiples et un observateur à mode glissant pour synchroniser l'émetteur.

Système chaotique de Qi

Ce système chaotique de dimension 4 a été proposé dans [13], celui-ci est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) + x_1x_3x_4 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + x_1x_2x_4 \\ \dot{x}_4 = -dx_4 + x_1x_2x_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont les états, et a, b, c, d sont des paramètres positifs.

En [133], ce système chaotique a été exhaustivement analysé. Nous rappelons ici seulement certaines caractéristiques du système. Premièrement, afin d'assurer la dissipativité du système, les paramètres doivent satisfaire :

$$b - (a + c + d) < 0 \quad (3.2)$$

Sous cette condition, le comportement du système (3.1) peut être analysé selon les différents choix des paramètres :

posons $a = 35, b = 10, c = 1$. Si $d \in]0, 21.88[$, le système (3.1) est a un comportement chaotique, avec un exposant de Lyapunov positif. Si $d \in]21.88, 26.8[$, le système (3.1) possède un attracteur périodique. si $d \in]26.8, 33[$ le système redevient chaotique. Il est à noter que, cet attracteur étrange (pour $d \in]21.88, 26.8[$) est différent du premier attracteur étrange (pour $d \in]0, 21.88[$). Lorsque d varie dans l'intervalle $]33, 36.5[$, le système (3.1) évolue comme un cycle limite. Finalement, lorsque $d > 36.5$, l'attracteur du système est un point fixe.

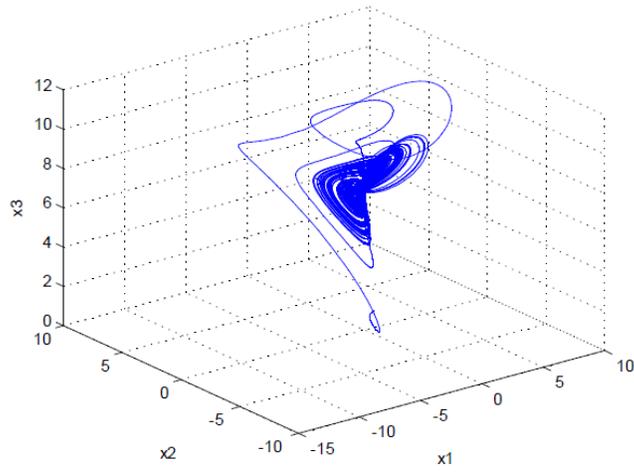


FIG. 3.1 – Portrait de phase du système Q_i

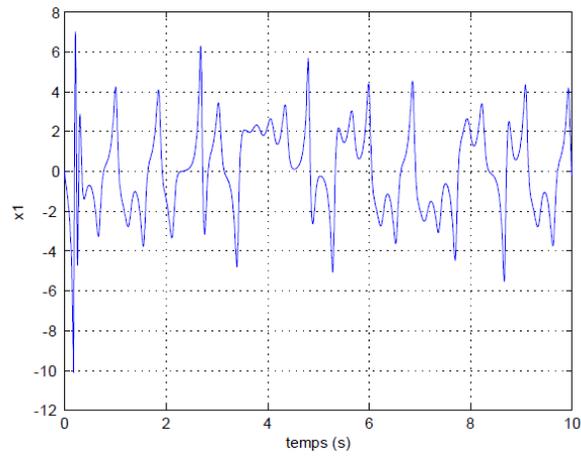


FIG. 3.2 – La dynamique de x_1

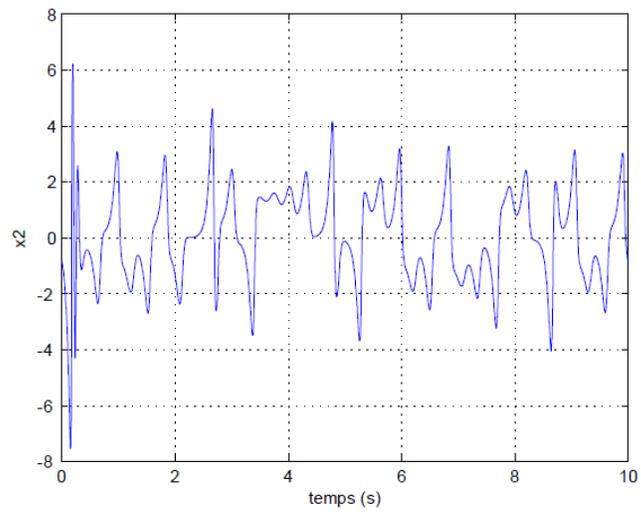


FIG. 3.3 – La dynamique de x_2

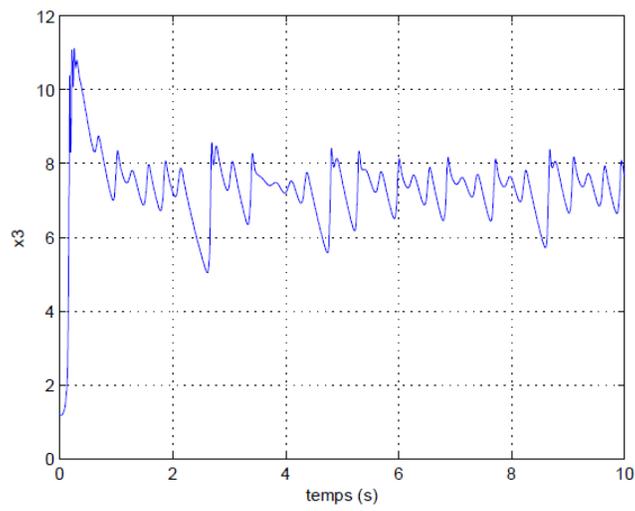


FIG. 3.4 – La dynamique de x_3

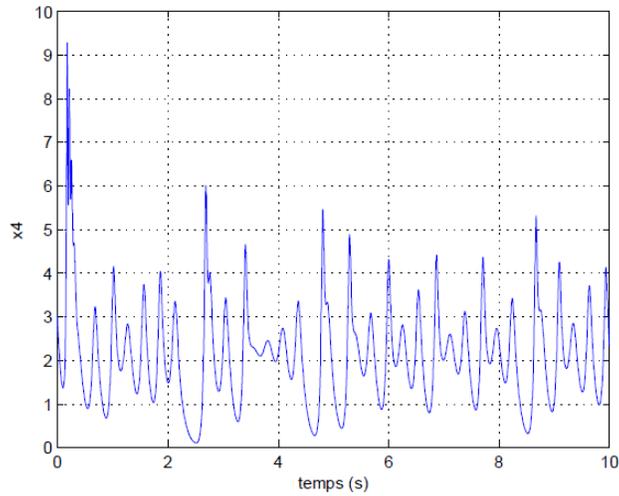


FIG. 3.5 – La dynamique de x_4

3.2 Conclusion

Ce chapitre a montré les propriétés du chaos et ses avantages dans son application à la transmission de données cryptées. Par la suite le système de Qi a servi d'exemple pour mettre en évidence plusieurs phénomènes liés au chaos. Ces études ont été mises en évidence à l'aide de simulations. Nous avons ajusté les paramètres du système afin d'obtenir un comportement chaotique.

Chapitre 4

Conception de récepteurs basés sur la synchronisation de systèmes chaotiques

4.1 introduction

Le terme de synchronisation, d'origine grecque (sun = avec, chronos = temps), s'applique à priori à des phénomènes et à des événements périodiques et correspond donc à des égalités de fréquences. Bien que l'extrême sensibilité des systèmes chaotiques aux variations des conditions initiales semble interdire toute synchronisation, il est possible de coordonner les trajectoires de deux systèmes chaotiques couplés. En effet, il suffit, dans le cas d'une synchronisation unidirectionnelle, que le système appelé esclave (capteur, observateur) soit excité de façon pertinente par le système dit maître pour que l'esclave s'installe en régime permanent forcé identique à celui du maître. Ceci induit l'existence d'un délai durant lequel, l'esclave est en régime transitoire, recherchant à se synchroniser avec le maître. En 1983, Chua se pose la question du chaos et de la synchronisation de systèmes chaotiques, qu'il aborde avec des circuits électriques linéaires par morceaux. Quelques années plus tard, Pecora et Carroll [12] précisèrent cette approche.

Une approche fondamentale de la synchronisation unidirectionnelle de deux générateurs chaotiques ; basée sur la conception d'observateurs, a été proposée par H. Nijmeijer et I. Mareles.

Dans ce travail, nous avons utilisé l'observateur à modes glissants d'ordres 2 basé sur l'algorithme du super twisting, pour reconstruire les états du système chaotique, ainsi que pour l'estimation du message, Bien sur, ceci est effectué sous certains conditions, telles que la bornitude des états et la condition d'inversibilité à gauche qui doivent être vérifiées. Le super twisting algorithm est utilisé pour sa capacité à tenir compte de la structure variable du système ainsi que pour sa capacité à éliminer le phénomène de chattering . Un autre point très important est que lorsqu'on applique cet observateur sur des systèmes écrits sous la forme canonique d'observabilité, sa structure permet de reconstruire dans un premier temps les états continus, ensuite reconstruire la dernière dynamique de système sous la forme canonique d'observabilité et enfin par une inversion

à gauche, on peut récupérer les paramètres inconnus (ou les messages). Ici cinq types principaux de synchronisations seront présentés. Il est à noter que même ces cinq types de synchronisations ne sont pas totalement séparables, et bien sûr qu'il existe d'autres types de synchronisations.

4.2 Synchronisation des systèmes chaotique

4.2.1 Synchronisation basée sur la partition du système

La première approche de la synchronisation chaotique a été proposée par Pecora et Carrol en [12], et elle est basée sur la partition du système.

Donnons un système chaotique de dimension $n \geq 3$ suivant :

$$\dot{x} = f(x); \quad (4.1)$$

et supposons qu'il peut être divisé en deux sous systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x}_R = f_R(x_R) \\ \dot{x}_T = f_T(x_R, x_T) \end{cases} \quad (4.2)$$

ou $x_R \in \mathbb{R}^{n_R}$, $x_T \in \mathbb{R}^{n_T}$, $n_R + n_T = n$. Le premier sous système s'appelle le système conducteur, et le second est appelé le système de réponse. Ensuite, nous pouvons encore diviser le sous système conducteur de (4.2) en deux autres sous systèmes comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_T = f_T(x_R, x_T) \\ \begin{cases} \dot{x}_{R_1} = f_{R_1}(x_{R_1}, x_{R_2}) \\ \dot{x}_{R_2} = f_{R_2}(x_{R_1}, x_{R_2}) \end{cases} \end{cases} \quad (4.3)$$

La synchronisation du système (4.1) est basé sur la stabilité du sous système de réponse (4.3), qui ne peut pas être déterminée de manière globale par la stabilité de sa matrice Jacobinne : J_{f_T} ; car celle ci dépend évidemment de l'état x_R . Ainsi le comportement de ce sous système dépend de l'exposant de Lyapunov du système (4.3), qui s'appelle l'exposant exponentiel conditionnel. En [7], il est prouvé que, si tous les exposants sont négatifs, la stabilité asymptotique du sous système de réponse peut être garantie. Mais les évidences sont trouvées que deux systèmes chaotiques couplés avec les exposants exponentiels conditionnels négatifs peuvent désynchroniser.

4.2.2 Synchronisation par la boucle fermée

Une autre technologie de la synchronisation est basée sur la boucle fermée qui peut être illustrée en figure (4.1) où nous employons l'erreur entre l'émetteur

et le récepteur pour corriger le comportement du récepteur afin de réaliser la synchronisation.

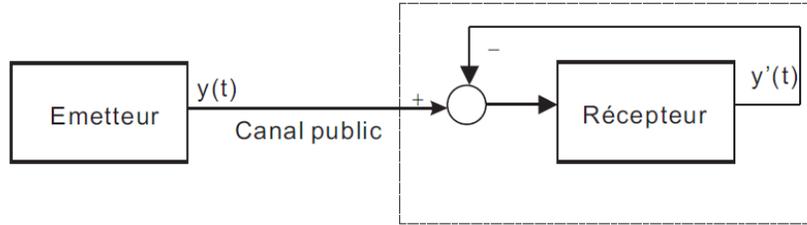
Supposons que l'émetteur s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

et que le récepteur peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (4.5)$$

où g est une fonction de l'erreur entre y et \hat{y} ; et que cette fonction est choisie afin de garantir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur. En fait, ce genre de récepteur peut être considéré comme la conception d'un observateur.



fig(4.1)-Synchronisation par un contrôle en boucle fermée.

4.2.3 Synchronisation à l'aide d'observateur

La synchronisation peut également être réalisée en employant un observateur. L'observateur est une méthode typique afin d'estimer les états inconnus d'un système dynamique qui ne peuvent pas être mesurés directement : soit inaccessible, soit pas économique.

Considérons l'émetteur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) = Ax + f(x) \\ y = h(x) = Cx \end{cases}$$

et un observateur possible peut être conçu de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) = A\hat{x} + f(\hat{x}) + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) = C\hat{x} \end{cases}$$

En définissant $e = x - \hat{x}$, nous pouvons obtenir

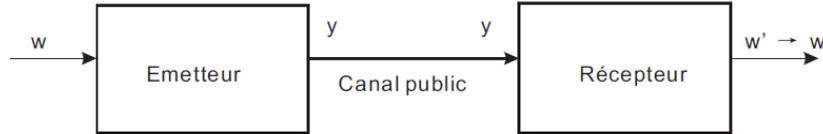
$$\dot{e} = (A - KC)e + f(x) - f(\hat{x}) \quad (4.6)$$

Dans ce cas, le problème de la synchronisation devient celui de la stabilité au voisinage du point fixe : 0 ; du système (4.6). Si la fonction : $f(x)$ vérifie la condition Lipschitz, et si nous pouvons trouver un gain approprié : K afin de garantir la stabilité du système (4.6), alors la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur peut être réalisée.

Cette approche peut également être regardée comme un type de synchronisation par la boucle fermée puisque le récepteur est conduit également par l'erreur des signaux de sortie de l'émetteur et du récepteur.

4.2.4 Synchronisation par l'inversion du système

Jusqu'à présent, toutes les approches mentionnées ont dans le but de synchroniser seulement les états du système, et elles ne concernent pas la synchronisation (ou plus exactement l'estimation) des entrées inconnues du système. Cependant, la possibilité d'estimer les entrées inconnues est évidemment essentielle à la transmission chaotique de données puisque l'entrée inconnue est généralement le message confidentiel. Naturellement, il existe également certains observateurs à entrée inconnue qui permettent d'accomplir l'estimation de ces dernières.



fig(4.2)-Synchronisation par l'inversion du système.

Une autre méthode est basée sur la solubilité du problème d'inversion à gauche afin d'achever les synchronisations des états et entrées inconnues du système [11]. Celle-ci peut être décrite en figure (4.2), où l'émetteur peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées inconnues, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des vecteurs des fonctions analytiques.

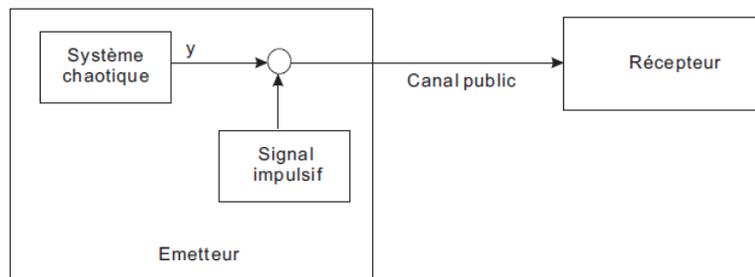
Pour le récepteur, son vecteur d'entrée est le vecteur de sortie de l'émetteur. Nous essayons de concevoir un récepteur tel que son vecteur de sortie convergera au moins asymptotiquement vers le vecteur d'entrée de l'émetteur. Ce problème s'appelle l'inversion à gauche du système.

Il est à noter que l'inversion du système exige des conditions additionnelles par rapport au problème d'observabilité, telles que le degré relatif. Ensuite, pour

la conception du récepteur, nous pouvons construire un observateur, dans lequel nous pouvons appliquer des stratégies adaptatives, autrement dit cette approche est aussi reliée aux autres approches.

4.2.5 Synchronisation impulsive

Dans un schéma de transmission usuelle, un des états du système dynamique est transmis afin de réaliser la synchronisation par le récepteur. Dans le but de réduire la redondance du signal transmis, c.-à-d., envoyer le signal minimum possible, la synchronisation impulsive (ce concept est analogue à la synchronisation échantillonnée) a été proposée dans [2].



fig(4.3)-Synchronisation impulsive.

Dans cette approche, en raison de l'introduction d'un opérateur de Dirac, le problème de synchronisation entre l'émetteur et le récepteur devient celui de stabiliser un système impulsif, ce problème est exhaustivement discuté en [2]. Et certains schémas basés sur cette approche peuvent être trouvés en [2].

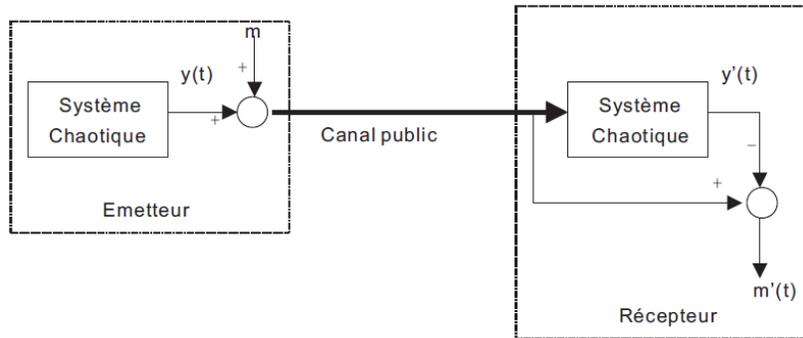
A l'exception de ce type de synchronisations évoqué ci-dessus, quelques autres types de synchronisations des systèmes chaotiques ont également été étudiées, telles que la synchronisation généralisée, la synchronisation de phase et bien d'autres.

4.3 Transmission basée sur la synchronisation de système chaotique

La plupart des approches de synchronisation peuvent être directement appliquées dans la transmission de données, ainsi ici nous rappellerons trois schémas principaux : l'addition chaotique, la commutation chaotique et la modulation chaotique, et leurs versions étendues.

4.3.1 L'addition chaotique

Avec cette méthode, le message confidentiel est additionné à un signal chaotique (la sortie d'un système chaotique), et le signal résultant est envoyé au récepteur pour la synchronisation. En conséquence, après la synchronisation, le message confidentiel peut être récupéré par une simple opération de soustraction entre la sortie du récepteur et le signal émis sur le canal public. Il est à noter que, dans ce schéma, l'attracteur étrange du système chaotique n'est pas modifié par le message confidentiel, mais dans les deux schémas suivants, nous verrons que les attracteurs étranges modifiés par des messages confidentiels.

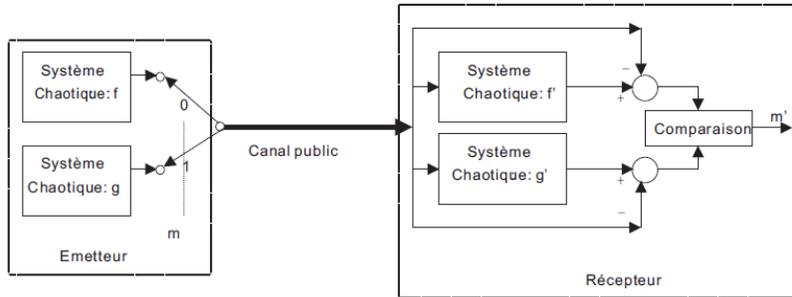


fig(4.4)-Schéma dit de l'addition chaotique.

4.3.2 La commutation chaotique

Un autre schéma de transmission chaotique de données est la commutation chaotique (CSK : Chaotique Switch Keying), qui exige que le message soit binaire, et elle s'inspire de la modulation à saut de fréquence (SFK). Le diagramme de cette approche est illustré en figure (4.5), où une opération de commutation est employée selon la valeur du message binaire : Si sa valeur est 0, le système chaotique f est choisi et le signal de sortie est transmis, sinon la sortie du système chaotique g est transmis. Dans ce sens, le message binaire commute l'émetteur entre deux attracteurs étranges correspondants à deux systèmes chaotiques.

Du côté du récepteur, il y a deux sous systèmes chaotiques f' et g' qui correspondent respectivement à f et g . Supposons que le canal est parfait, et que le signal transmis est 0, alors le sous système f' se synchronisera avec le système chaotique f , mais le sous système g' ne pourra pas être synchronisé. Selon les erreurs de synchronisation de $(f' ; f)$ et $(g' ; f)$, le signal peut être récupéré avec succès.

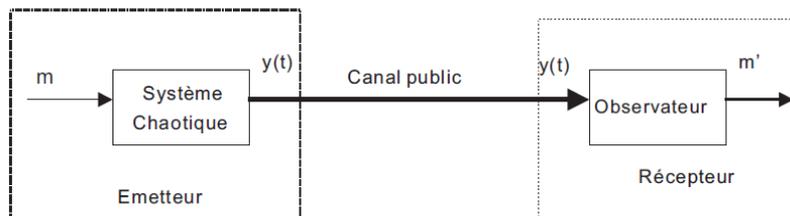


fig(4.5)-Schéma dit de la commutation chaotique.

Il est à noter que la méthode CSK est basée sur la démodulation cohérente. Une modification de la méthode CSK pour la démodulation non cohérente a été également proposée en distinguant l'énergie de bit de deux systèmes chaotiques. Parfois, seulement un système chaotique est employé pour générer deux différentes énergies de bit, par exemple par amplificateur, ou par en retard, la méthode s'appelle alors DCSK (Différential CSK) , et FM-DCSK (Frequent Modulation DCSK) [2].

4.3.3 La modulation chaotique

Une autre idée utilise le message pour modifier directement l'attracteur étrange du système chaotique. Ces méthodes s'appellent la modulation chaotique, et elle peut se décomposer en deux types de méthodes : la modulation chaotique de paramètre, celle-ci modifie le paramètre du système chaotique, et la modulation chaotique d'état qui modifie l'état du système chaotique. Mais ces deux méthodes font bouger directement l'attracteur étrange du système figure (4.6).



fig(4.6)-Schéma de modulation chaotique.

Pour le récepteur, afin de synchroniser l'émetteur, nous pouvons employer la technique de la synchronisation par le contrôle en boucle fermé, ou la synchro-

nisation par l'observateur, de même la synchronisation par inversion à gauche du système si l'émetteur est inversible.

Evidemment, il existe bien d'autres types de synchronisations chaotiques qui sont pour la plupart de combinaisons des techniques cités ci-dessus, citons [8].

Cette démarche classique de modélisation puisqu'on peut aujourd'hui utiliser des modèles déterministes pour décrire des systèmes complexes d'apparence stochastique. Dès 1970, cette nouvelle vision d'un monde déterministe, mais que l'on ne peut pas prévoir, provoque un véritable engouement dans le monde scientifique, et très rapidement dans tous les domaines, on recherche des applications. C'est ainsi, que le cryptage et la transmission sécurisée de données par synchronisation de système chaotique ont vu le jour.

Dans cette section, afin de mettre en évidence la méthode proposée, nous allons utiliser un système chaotique (Qi) de dimension 4 afin de construire un système de transmission chaotique avec des entrées multiples et un observateur à mode glissant pour synchroniser l'émetteur.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) + x_1x_3x_4 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + x_1x_2x_4 \\ \dot{x}_4 = -dx_4 + x_1x_2x_3 \end{cases} \quad (4.7)$$

où $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont les états, et a, b, c, d sont des paramètres positifs. Prenons l'émetteur suivant, qui est basé sur le système chaotique (4.7) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 + (1 + ex_1(t - \tau)^2)m_1 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) + x_1x_3x_4 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + x_1x_2x_4 + x_3m_2 \\ \dot{x}_4 = -dx_4 + x_1x_2x_3 - x_4m_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

de plus ; $g_1 = [(1 + ex_1(t - \tau)^2) \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et $g_2 = [(\ 0 \ 0 \ x_3 \ -x_4]^T$

Il est supposé que m_1 et m_2 sont petites, $\beta > m_2 > 0$, et que la condition suivante est satisfaite :

$$d - c - \beta > 0 \quad (4.9)$$

Supposons que les sorties sont fixés comme : $y = [x_1, x_2]^T$. Les vecteurs d'entrée g_1 et g_2 ont été choisis tels que le fort degré relatif de ce système est $r = 3$. Ainsi, suivant les lignes de l'algorithme proposé dans le chapitre 1, calculons :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{g_1} h_1 & L_{g_2} L_f h_1 \\ L_{g_1} L_f h_2 & L_{g_2} L_f h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + ex_1(t - \tau)^2) & 0 \\ (1 + ex_1(t - \tau)^2)(b - x_3x_4) & 0 \end{pmatrix}$$

On peut choisir

$$K = (b - x_3x_4, -1)$$

telle que $K\Gamma = 0$
fixé

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \text{span}\{h_1, h_2, L_f h_2\} \\ \mathcal{L}(x) &= \text{span}\{x_1, x_2, x_3x_4\}\end{aligned}$$

Puis la sortie suivante fictifs peut être définie :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= K \begin{bmatrix} L_f h_1 \\ L_f^2 h_2 \end{bmatrix} = (b - x_3x_4)\dot{y}_1 - \ddot{y}_2 \\ &= (x_3^2 + x_4^2) \text{ mod } \mathcal{L}(x)\end{aligned}$$

parse que $\bar{y} \notin \mathcal{L}(x)$.

$$y = [x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2]^T$$

Avec cette nouvelle sortie y , la dimension de l'ensemble $\Phi = \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3x_4, d(x_3^2 + x_4^2)\}$ Cela signifie que l'on peut récupérer tout l'état en temps fini. Une conséquence directe est le fait que $\text{span}\{g_1, g_2\}$ est régulier, ce qui implique que les messages inconnus peuvent également être reconstruite en un temps fini. Pour cela, soit l'observateur à mode glissant comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 + E_1\lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = b(x_1 - x_2) + \lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \frac{d(\hat{x}_3\hat{x}_4)}{dt} = -(c + d)\hat{x}_3\hat{x}_4 + E_2\lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4) \\ \frac{d(\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)}{dt} = -2c\hat{x}_3^2 - 2d\hat{x}_4^2 + 4x_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 + 2E_3\lambda_4 \text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)) \end{array} \right. \quad (4.10)$$

avec $\lambda_i \succ 0, i = 1, \dots, 4$

$$E_1 = \begin{cases} 1 & x_2 = \hat{x}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } E_1 = 1 \text{ et } x_1 = \hat{x}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$E_3 = \begin{cases} 1 & \text{if } E_2 = 1 \text{ et } \tilde{x}_3\tilde{x}_4 = \hat{x}_3\hat{x}_4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Et avec les états auxiliaires

$$\tilde{x}_3\tilde{x}_4 = -\frac{\lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2)}{x_1} \quad (4.11)$$

$$\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \frac{E_2\lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4)}{x_1x_2} \quad (4.12)$$

Evidemment le sous-variété de S singularité d'observabilité est égale à $S = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1x_2 = 0\}$.

$$\tilde{m}_1 = \frac{E_2\lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)}{(1 + ex_1(t - \tau))^2} \quad (4.13)$$

$$\tilde{m}_2 = \frac{E_4\lambda_4 \text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2))}{(\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2)} \quad (4.14)$$

où

$$E_4 = \begin{cases} 1 & \text{if } E_3 = 1 \text{ et } (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) = (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les erreurs d'observation sont définies par :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - \hat{x}_1 \\ e_2 = x_2 - \hat{x}_2 \\ e_{34} = x_3x_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4 \\ e_{3^2+4^2} = (x_3^2 + x_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2) \end{cases}$$

Du système (4.4), il peut être calculé que :

$$\frac{dx_3x_4}{dt} = -(c + d)x_3x_4 + x_1x_2(x_3^2 + x_4^2)$$

et

$$\frac{d(x_3^2 + x_4^2)}{dt} = -2cx_3^2 + 4x_1x_2x_3x_4 - 2dx_4^2 + 2(x_3^2 - x_4^2)m_2 \quad (4.15)$$

Ainsi la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = x_2(x_3x_4 - \tilde{x}_3\tilde{x}_4) + m_1 - E_1\lambda_1\text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 = -x_1x_3x_4 - \lambda_2\text{sign}(e_2) \\ \dot{e}_{34} = -(c+d)(x_3x_4 - \tilde{x}_3\tilde{x}_4) + x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) - E_2\lambda_3\text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4) \\ \dot{e}_{3^2+4^2} = -2c(x_3^2 - \tilde{x}_3^2)2d(x_4^2 - \tilde{x}_4^2) + 4x_1x_2(x_3x_4 - \tilde{x}_3\tilde{x}_4) + 2(x_3^2 - x_4^2)m_2 - \\ 2E_3\lambda_4\text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)) \end{cases}$$

La convergence de l'observateur en mode coulissant s'appuie sur une procédure étape par étape.

première étape : on a :

$$\dot{e}_2 = -x_1x_3x_4 - \lambda_2\text{sign}(e_2)$$

Tous les états sont bornés. Ainsi, on peut choisir $\lambda_2 \succ \sup_{v_t > 0} | -x_1x_3x_4 |$ de sorte qu'un mouvement de glissement apparaît après un temps fini t_1 sur $e_2 = 0$. écrire $\dot{e}_2 = 0$ donne :

$$-x_1x_3x_4 = \lambda_2\text{sign}(e_2)$$

Puis

$$\tilde{x}_3\tilde{x}_4 = -\frac{\lambda_2\text{sign}(e_2)}{x_1} = x_3x_4 \quad (4.16)$$

et

$$E_1 = 1 \quad (4.17)$$

Deuxième étape : pour $t > t_1$, en utilisant (4.15) et (4.16), la dynamique e_1 devient :

$$\dot{e}_1 = m_1 - E_1\lambda_1\text{sign}(e_1)$$

Ainsi, si $\lambda_1 \succ \sup_{v_t > 0} | m_1 |$, il existe t_2 , telle que $e_1 = \dot{e}_1 = 0$, pour $t \succ t_1 \succ t_2$. Puis

$$m_1 - E_1\lambda_1\text{sign}(e_1) = 0$$

et

$$E_2 = 1 \quad (4.18)$$

Ensuite, la relation (4.12) fournit une estimation en temps fini de m_1

$$\tilde{m}_1 = E_2 \lambda_1 \text{sign}(e_1) = m_1$$

Troisième étape : pour $t_1 > t_2$, en utilisant (4.15) et (4.17), on a :

$$\dot{e}_{34} = x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) - \lambda_3 \text{sign}(e_{34})$$

Si λ_3 est choisie de telle sorte que

$$\lambda_3 \succ \sup_{\forall t > 0} |x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2)|,$$

on obtient après un temps fini t_3 , $e_{34} = \dot{e}_{34} = 0$ et $E_3 = 1$. De la définition de la variable auxiliaire (4.11)

$$\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \frac{\lambda_3 \text{sign}(e_{34})}{x_1 x_2} = x_3^2 + x_4^2$$

La possibilité d'estimer m_2 nécessite la connaissance de \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 . définissent

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 &= A \\ \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 &= B \end{aligned}$$

Il existe deux catégories de solutions :

$$\begin{aligned} S_1 &: \begin{cases} \tilde{x}_{31}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \\ \tilde{x}_{41}^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \end{cases} \\ & \text{et} \\ S_2 &: \begin{cases} \tilde{x}_{32}^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \\ \tilde{x}_{42}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Supposons que S_1 est la bonne solution. De (4.14), le message confidentiel peut être récupéré correctement comme suit :

$$-c\tilde{x}_{31}^2 - d\tilde{x}_{41}^2 + (\tilde{x}_{31}^2 - \tilde{x}_{41}^2)m_{21} = -24x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 \triangleq C \quad (4.20)$$

Dans ce cas, on a pour S_2 :

$$-c\tilde{x}_{32}^2 - d\tilde{x}_{42}^2 + (\tilde{x}_{32}^2 - \tilde{x}_{42}^2)m_{22} = C \quad (4.21)$$

En utilisant les équations (4.19) et (4.20), on a :

$$m_{2_2} = \frac{[-c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2)m_{2_1} + c\tilde{x}_{3_2}^2 + d\tilde{x}_{4_2}^2]}{(\tilde{x}_{3_2}^2 - \tilde{x}_{4_2}^2)}$$

Notez que $\tilde{x}_{3_1}^2 = \tilde{x}_{4_2}^2$ et $\tilde{x}_{3_2}^2 = \tilde{x}_{4_1}^2$. Donc cette équation devient :

$$\begin{aligned} m_{2_2} &= \frac{[-c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2)m_{2_1} + c\tilde{x}_{3_2}^2 + d\tilde{x}_{4_2}^2]}{(\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2)} \\ &= -c - d - m_{2_1} \end{aligned}$$

Si m_{2_1} est la solution correcte, puis $m_{2_2} < 0$ d'après l'équation (4.5), ce qui exclut la solution m_{2_2} . Après cette méthode, la solution correcte correspondant à \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 peuvent être trouvés.

Quatrième étape : Depuis \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 ont été estimés, on a :

$$\dot{e}_{3^2+4^2} = 2(x_3^2 + x_4^2)m_2 - 2E_3\lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})$$

Ainsi $\lambda_4 \succ \sup_{v|t>0} |(x_3^2 + x_4^2)m_2|$ veille à ce que $\dot{e}_{3^2+4^2} = e_{3^2+4^2} = 0$ après un temps fini t_4 , et :

$$(x_3^2 + x_4^2)m_2 - \lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2}) = 0.$$

La relation (4.13) conduit à l'estimation en temps fini du deuxième message confidentiel

$$\tilde{m}_2 = \frac{E_4\lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})}{(\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2)} = m_2$$

Prenons le système chaotique suivant donné :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) + x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 - ex_4 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 = -dx_4 + fx_3 + x_1x_3 \end{cases}$$

Afin d'envoyer les messages confidentiels m_1 et m_2 , l'émetteur suivant est conçu :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_3 + \mu_1(x_1, x_2, x_3)m_1 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) + x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 - ex_4 + x_1x_2 + \mu_2(x_1, x_2, x_3)m_1 \\ \dot{x}_4 = -dx_4 + fx_3 + x_1x_3 + \mu_3(x)m_1 + \mu_4(x)m_2 \end{cases}$$

Les sorties sont choisies :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

et m_1 et m_2 devraient être considérés comme deux entrées inconnues.

Ce système ne parvient pas à remplir la condition d'observabilité correspondante. Ainsi, la complexité de l'algorithme de chiffrement est augmentée, car bien connu l'approche d'observateur ne peut pas être utilisée ici. Dans cet exemple, la clé (similaire à un problème de chiffrement d'habitude) est le vecteur de paramètres $[a \ b \ c \ d \ e \ f]^T$ sont choisies afin de garantir la confidentialité et de telle sorte que le comportement chaotique du système n'est pas détruit. Pour la confidentialité du système, il est important par exemple pour vérifier que les paramètres ne sont pas identifiables avec des entrées connues (texte d'attaque

clair connu)

$$\text{où } y_a = x_1x_3 = b(y_1 + y_2) - \dot{y}_2 \text{ et } \tilde{\mu}_i(\cdot) = \mu_i(\cdot)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b(y_1 + y_2) - \dot{y}_2}{y_1} \\ m_1 &= \frac{1}{\tilde{\mu}_1(y_1, y_2, \dot{y}_2)} (\dot{y}_1 - a(y_1 - y_2) + \frac{y_2 y_a}{y_1}) \\ x_4 &= \frac{1}{e} \left(-c \frac{y_a}{y_1} + y_1 y_2 + \tilde{\mu}_2(y_1, y_2, \dot{y}_2) m_1 \right) \\ m_2 &= \frac{\dot{x}_4 + dx_4 - f \frac{y_a}{y_1} + y_a - \tilde{\mu}_3(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2) m_1}{\tilde{\mu}_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)} \end{aligned}$$

Les résultats des simulations ont été obtenus avec les paramètres suivants :

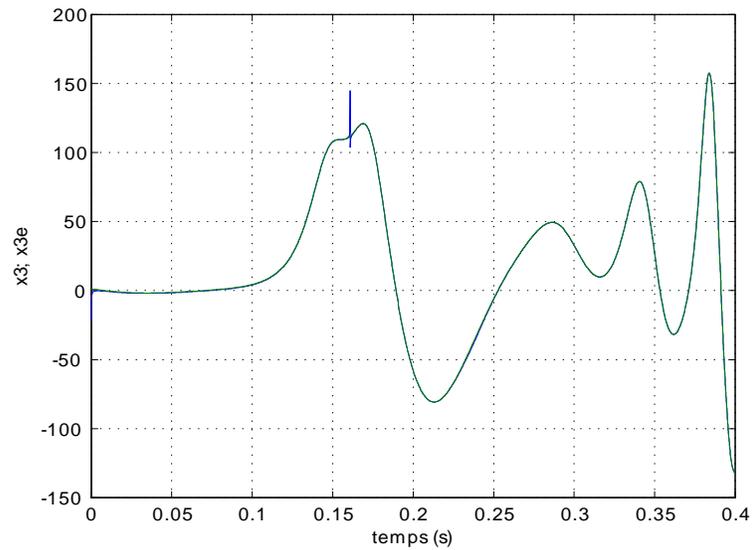
$a = 42.5, b = 24, c = 13, d = 20, e = 50, f = 40, \mu_1 = \mu_4 = 1$ et $\mu_2 = \mu_3 = 0$

Par ailleurs, en raison de la singularité de l'observabilité $y_1 = 0$, les différentiateurs numérique doivent être éteint dans les environs de $y_1 = 0$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre plusieurs techniques principales de synchronisation sont rappelées, et trois schémas fondamentaux de la transmission chaotique sont détaillés. Après cela, nous nous sommes concentré sur la façon de choisir un système chaotique pour la transmission chaotique de données. Un observateur à mode glissant a été proposé pour retrouver les états de l'émetteur chaotique (système hyperchaotique de Qi incluant le message) et le message inclus dans celui-ci. Le fonctionnement de cet observateur est basé sur les méthodes de commande à structure variable. L'observabilité du système de Qi et la condition de recouvrement d'observabilité de l'émetteur sont vérifiées après avoir transformé le système. Ensuite les résultats de simulation du système complet (émetteur + observateur à mode glissant) ont été présentés. A l'aide de ces simulations, nous avons constaté la convergence en temps fini et le fonctionnement étape par étape de l'observateur à mode glissant.

4.5 Résultats de simulation



x_3 en vert et en bleu son estimation

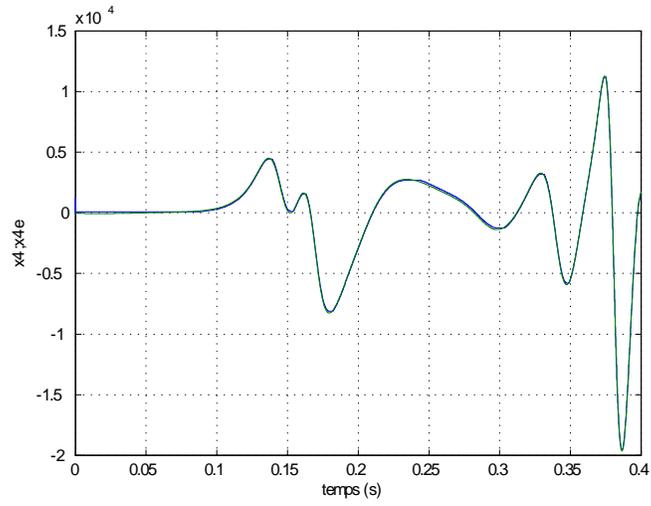


FIG. 4.1 – x_4 en bleu et en vert son estimation

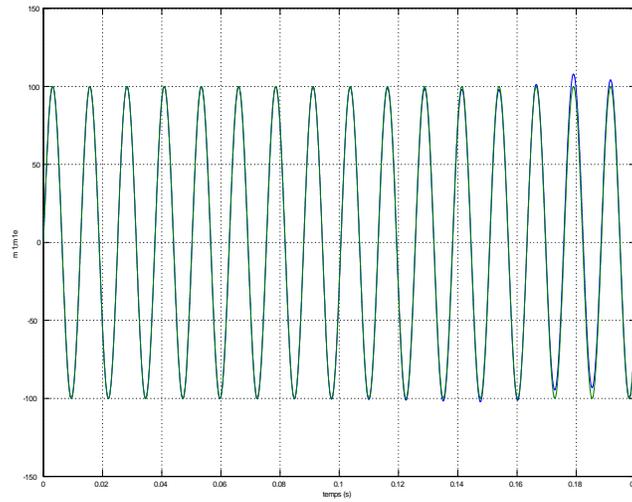


FIG. 4.2 – m_1 en vert et en bleu son estimation

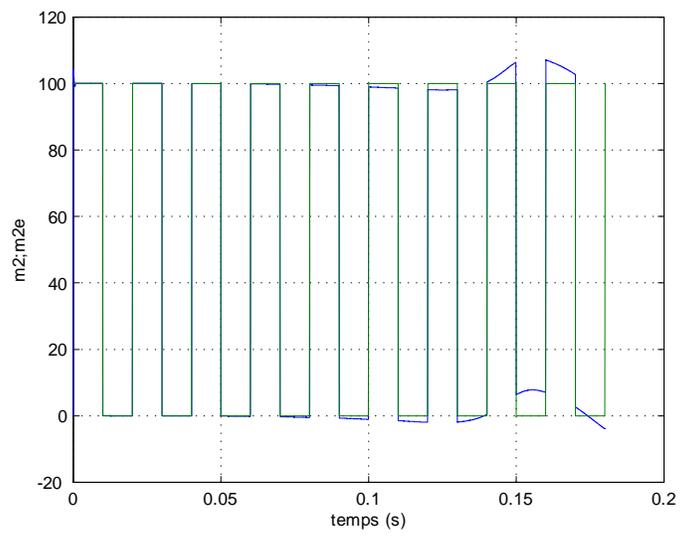


FIG. 4.3 – m_2 en vert et en bleu son estimation

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

L'objectif de ce travail de mémoire a été la réalisation d'un système de communication basé sur la synchronisation de systèmes chaotiques à l'aide d'observateurs.

Dans ce travail nous avons rappelés quelques notions d'observabilité et d'observateur, et nous nous sommes basés sur l'observateur à mode glissant d'ordre supérieur et l'algèbre différentielle pour la conception de récepteur pour notre émetteur chaotique. Les systèmes de communication chaotique sont basés sur la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur. En général, le message est comme une entrée inconnue pour l'émetteur. Cette entrée inconnue est retrouvée par le récepteur, une fois que celui-ci a été synchronisé avec l'émetteur. C'est pour cela, nous avons étudié les différentes méthodes de la synchronisation des systèmes chaotiques. D'autre part, il a été montré dans la littérature que la synchronisation unidirectionnelle des systèmes non-linéaire (voire chaotiques) peut être considérée comme un problème d'observateur.

Nous avons proposé deux méthodes pour la synchronisation de notre émetteur chaotique, une d'elles est par une synthèse d'observateur à mode glissant d'ordre supérieur, et l'autre par la méthode ALIEN. L'observateur à mode glissant est basé sur la théorie des systèmes à structure variable. Il fonctionne en étape par étape et possède la propriété de convergence en temps fini. En ce qui concerne la méthode ALIEN, ce dernier est de retrouver l'entrée inconnue en fonction des sorties et de ces dérivés. Cela est démontré par les résultats de simulation trouvés.

Les perspectives de ce travail sont : lorsque le message est grand cela peut détruire le comportement chaotique, alors on espère dans les travaux à venir, de trouver une méthode qui conserve le comportement chaotique quelque soient les paramètres de confidentialité du message. Une transformation du système pour qu'il réponde à la condition de recouvrement ou augmente son degré relative.

Chapitre 6

Bibliographie

- [1] L .A. Calvillo Corona, \ Quelques contributions aux observateurs non linéaires à horizon glissant", M. Mazen Alamir.Thèse de doctorat INPG 2002
- [2] L.Boutat-Baddas. La transmission sécurisé des données à l'aide des systèmes chaotiques en temps continu. Thèse de doctorat ENSEA. 2003
- [3] J. P. Barbot, D. Boutat et T. Floquet, \A new observation algorithm for nonlinear system with unknown inputs", CDC-ECC05, serville, Dec 2005.
- [4] J. P. Barbot, M. Djemai et T. Boukhobza, \Sliding mode observers", in Sliding mode control in engineering, W. Perruquetti and J-P Barbot (Eds), Control Engineering Series, M. Dekker, pp 103-130, 2002.
- [5] J.P. Barbot, T. Boukhobza et M. Djemai, \Sliding mode observer for triangular input form", Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996.
- [6] F. Beritelli, E. D. Cola, L. Fortuna, etc, \Multilayer chaotic encryption for secure communications in pachet switching networks", IEEE Trans on communication, vol 30, no4, 1575-1582, 2000.
- [7] C. Bensalah. Synchronisation des systèmes chaotiques par observateur : application au cryptage. Thèse de magister API 2005.
- [8]Barbot J.P., Belmouhoub I. and Boutat-Baddas L, (2003), "Observability Normal Form", In W. Kang et al., editor, LNCIS 295, New trends in nonlinear dynamics and control. Springer Verlag, 2003.
- [9] J.P Barbot , W Perruquetti, Chaos in automatic control\ Published in 2006 by CRC Press
- [10] Thierry FLOQUET,Commande et observation a structure variable des systèmes non linéaires, Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université des Sciences et Technologies de Lille 2008
- [11]Barbot J.P, Boutat D. and Floquet T., (2005), "A new observation algorithm for nonlinear system with unknown inputs", CDC-ECC, seville, Dec 2005.
- [12]Pecora L.M. and Carroll T.L., (1990), "Synchronization in chaotic systems", Physical Review Letters 64, 821-824, 1990

[13]Qi G.Y., Du S.Z., Chen G.R. et al., (2005), "On a four-dimensional chaotic system", *Chaos, Solitons and Fractals*, 23(2005).