Dédicaces

$\otimes$Avec l'aide de dieu le tout puissant, j'ai pu achever ce modeste travail que je dédie:

$\otimes$A la mémoire de mon chers Frère,

$\otimes$A mes très chers parents dont l'aide et les encouragements permanents m'ont permis de poursuivre mes études dans les meilleures conditions. Je les remercie infiniment pour tous. En souhaitant que dieu leurs accorde longue vie, plein de bonheur et de prospérité.

$\otimes$A mes chers sœurs.

$\otimes$A toutes mes amies.

$\otimes$tous ce qui me sont chers, de prés ou de loin.

TAHRI Kamel

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur Benalili Mohammed, Professeur à l'Université de Tlemcen, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu.

Mes remerciements vont également à Monsieur Dib Hacen, Professeur à l'Université de Tlemcen, qui a accepté de présider le jury.

Je remercie très respectueusement à Monsieur Bouchekif Mohamed, Professeur à l'Université de Tlemcen, de m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury et d'avoir accepté de juger mon travail.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Bouguima Sidi Mohamed, Professeur à l'Université de Tlemcen, de m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury et d'avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie aussi l'équipe sympathique du département de Mathématiques, du chef de département Monsieur Mebkhout Benmiloud. Je le remercie encore une fois pour son soutien tout au long de mon cursus universitaire, sans oublier Monsieur Bensidik Ahmed Maître assistant à l'Université de Tlemcen.

Un grand merci aussi à tous mes collègues du groupe d'analyse non linéaire sur les variétés.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des Matières

Introduction

0.1 Motivations

L'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques est l'un des sujets de recherche de grande importance dans l'analyse sur les variétés développé ces dernières années dans de nombreux travaux [7], [8], [9].

Différentes techniques sont employées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques comme par exemple "la méthode variationnelle" développée par Yamabé lui même pour résoudre le problème de la courbure scalaire prescrite.

0.2 Enoncé du problème

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de classe C^∞de dimension $n \geq 5$ et de métrique g.

On note par $H_2^2(M)$ l'espace de Sobolev standard qui est le complètement de l'espace

$$C_2^2(M) = \{\varphi \in C^\infty(M) : \ \ \|\varphi\|_{2,2} < +\infty\}$$

par rapport à la norme

$$\|\varphi\|_{2,2} = \sum_{k=0}^{k=2} \left\|\nabla^k \varphi\right\|_2 .$$

L'espace $H_2^2(M)$ sera muni de la norme équivalente

$$\|u\|_{H_2^2(M)} = (\int_M |\Delta_g u|^2 + |\nabla_g u|^2 + u^2 dv(g))^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème que nous nous sommes proposés de résoudre peut être énoncé de la façon suivante:

existe-il une fonction $u \in H_2^2(M)$ solution de l'équation

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(a(x)\nabla_g u\right) + b(x)u = \lambda\,|u|^{q-2}\,u + f(x)\,|u|^{N-2}\,u \tag{1}$$

où a, b et f sont trois fonctions de classe C^∞ sur M et f est supposée en plus strictement positive, $\lambda > 0$ suffisamment petit et $1 < q < 2 \quad (N = \frac{2n}{n-4})$ l'exposent critique de Sobolev.

En 1979 Michel Vaugon a prouvé l'existence d'un réel λ et d'une fonction de classe C^4sur M non identiquement nulle vérifiant une équation du type (2.1) avec un second membre de la forme $\lambda f(t,x)$ où $f(t,x)$ est une fonction impaire croissante en t et vérifiant l'inégalité :

$$|f(t,x)| < a + b\,|t|^{\frac{n+4}{n-4}}$$

Depuis 1990 des résultats ont été établis pour des fonctions f, a et b bien précises.

D.E.Edminds, D.Fortunato et E.Jannelli ont montré que les seules solutions dans R^n de l'équation

$$\Delta^2 u = u^{\frac{n+4}{n-4}}$$

sont les fonctions positives, symétriques, radiales et décroissantes suivantes

$$u_\epsilon(x) = \frac{\left((n-4)n(n^2-4)\epsilon^4\right)^{\frac{n-4}{8}}}{\left(r^2+\epsilon^2\right)^{\frac{n-4}{2}}}.$$

En 1996, F.Bernis, J.Garcia-Azorero et I.Peral ont montré l'existence d'au moins deux solutions positives du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \lambda u \left| u \right|^{q-2} = u \left| u \right|^{\frac{8}{n-4}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 \;\; \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de R^net $1 < q < 2$, $\lambda > 0$ dans un certain intervalle.

En 2001, [7], D.Caraffa a prouvé l'existence d'une solution non triviale de classe $C^{4,\alpha}$ vérifiant une équation du type (2.1) avec le second membre de la forme $\lambda f(x) \left| u \right|^{N-2} u$, $\lambda > 0$ d' abord pour f une constante et ensuite f une fonction positive. Recemment M. Benalili [3], [4] a considéré le problème de multiplicité des solutions.

Dans notre travail nous étudions l'équation (2.1), nous utiliserons une méthode dévéloppée par Ambrosetti et Peral dans [1] et appliquée dans le cas du p-Laplacian [2].

Nous considérons la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_M \left| \Delta_g u \right|^2 - a(x) \left| \nabla_g u \right|^2 + b(x) u^2 dv(g) - \frac{\lambda}{q} \int_M \left| u \right|^q dv(g) - \frac{1}{N} \int_M f(x) \left| u \right|^N dv(g)$$

que nous ferons varier sur la variété

$$M_\lambda = \left\{ u \in H_2^2(M) : \; \Phi_\lambda(u) = \langle \nabla J_\lambda(u), u \rangle = 0 \text{ et } \; \|u\| \geq \rho > 0 \right\}$$

et on prendra les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ de telle manière que

$$\|u\| = \left(\int_M \left| \Delta_g u \right|^2 - a(x) \left| \nabla_g u \right|^2 + b(x) u^2 dv(g) \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit une norme équivalente de $H_2^2(M)$.

On cherche les solutions de l'équation (2.1) comme des points critiques de la fonctionnelle $J_\lambda(u)$ sur M_λ. On montre que la fonctionnelle J_λ vérifie la condition de Palais-Smale sur la contrainte M_λ au niveau

$$0 < c < \frac{2}{n \; K_\circ^{\frac{n}{4}} (Max_{\; x \in M} f(x))^{\frac{n-4}{4}}}$$

où

$$\frac{1}{K_\circ} = \inf{}_{u \in H_2^2(R^n)-\{0\}} \frac{\|\Delta u\|_2^2}{\|u\|_N^2}$$

On montre l'éxistence d'une solution $u \in C^{4,\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$, non nulle avec sa fonction d'énergie J_λ strictement positive sur $M_\lambda$et $\lambda > 0$ dans un certain intervalle. Le résultat obtenu s'énonce comme suit

Théorème 0.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$ et a, b , f trois fonctions de classes C^∞ sur M telles que*

1) $f(x) > 0$ sur toute la variété M.

2) Au point $x_\circ$ où f atteint son maximum, on suppose que

$S_g(x_\circ) + 3a(x_\circ) > 0$ pour $n = 6$
et $\left(\frac{(n^2+4n-20)}{2(n+2)(n-6)} S_g(x_\circ) + \frac{(n-1)}{(n+2)(n-6)} a(x_\circ) - \frac{1}{8}\frac{\Delta f(x_\circ)}{f(x_\circ)}\right) > 0$ pour $n > 6$
alors, l'équation (2.1) admet une solution u non triviale de classe $C^{4,\alpha}, \alpha \in (0, 1)$.

Chapitre 1

NOTIONS PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions d'analyse nécessaires à la compréhension de la suite de notre travail.

Pour plus d'information sur le sujet on renvoie le lecteur aux références [1] et [2] .

1.1 Définitions et propriétés

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 1$ et ∇ la connexion de Levi-Civita donnée par son expression locale

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial xj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial xl} \right)$$

où g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement le tenseur riemannien et son inverse .

Le tenseur de courbure R relatif à la connexion ∇ s'écrit

$$R_{ijk}^{l} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^{l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^{l}}{\partial x_k} + \Gamma_{j\alpha}^{l} \Gamma_{ki}^{\alpha} - \Gamma_{k\alpha}^{l} \Gamma_{ji}^{\alpha}$$

celui de Riemann Rm_g est alors donné par :

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R_{jkl}^{\alpha}$$

Le tenseur de courbure de Ricci est obtenu par contraction de R

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{i\alpha j} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha j\beta}$$

La courbure scalaire est la fonction numérique de classe C^{∞}sur M notée par S_g est définie par

$$S_g = R_{ij} g^{ij}$$

1.2 Classe conforme de g

Définition 1.1 *Si $f > 0$, est une fonction de classe C^{∞}sur M strictement positive, $\tilde{g} = fg$ est dite métrique conforme à g. La classe conforme de g est notée*

$$[g] = \{ \ fg, \ f \in C^{\infty}(M) \ \ et \ f > 0 \ \} \, .$$

La méthode variationelle est essentiellement basée sur le théorème suivant

1.3 Théorème de Rellich-Kondrakov

Théorème 1.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, q ≥ 1 réel, et $m < k$ deux entiers.*

$\cdot$ Si $\frac{1}{q} > \frac{k-m}{n}$, alors $H^q_k(M) \subset H^P_m(M)$ pour tout $p \geq 1$ tel que $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$.

$\cdot$ Si $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$,alors l'inclusion est compacte.

$\cdot$ Pour $N = \frac{2n}{n-4}$ l'inclusion $H^2_2(M)$ dans $L^N(M)$ cesse d'être compacte.

Un invariant conforme a été découvert par Paneitz en dimension 4 et généralisé par Branson pour les dimensions supérieures [5].

1.4 Opérateur de Paneitz-Branson

Définition 1.2 *Pour $n \geq 5$, l'opérateur de Paneitz -Branson est donné par*

$$P_g^n(u) = \Delta_g^2 u - div_g((\frac{(n-2)^2+4}{2(n-2)(n-1)} S_g.g - \frac{4}{n-2} Ric_g)du) + \frac{n-4}{2} Q_g u$$

où

$$Q_g u = \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g S_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2} S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2} \left| Ric_g \right|^2$$

et $\Delta_g u$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami.

S_g : la courbure scalaire

Ric_g : le tenseur de Ricci

Q_g : la Q-courbure

du : la différentielle de u.

Définition 1.3 *Soit $\tilde{g} = u^{\frac{n+4}{n-4}} g$, $u > 0$, une métrique conforme à g, alors l'opérateur P_g^n est conformément invariant dans le sens suivant : pour tout $f \in C^\infty(M)$,*

$$P_g^n(fu) = u^{\frac{n+4}{n-4}} P_{\tilde{g}}^n(f)$$

1.5 Solutions faibles

Dans les méthodes variationnelles, les solutions obtenues, points critiques de fonctionnelles, sont dans les espaces fonctionnelles de Sobolev, elles sont dites distribustionnelles ou faibles.

Définition 1.4 *Soient (M, g) une variété Riemannienne, a et b deux fonctions réelles de classe C^∞ sur M et $f \in L^1_{loc}(M)$, alors u est dite solution faible de l'équation*

$$\Delta_g^2 u - div_g \left(a(x) \nabla_g u \right) + b(x) u = \lambda \left| u \right|^{q-2} u + f(x) \left| u \right|^{N-2} u$$

si pour tout $\phi \in C^{\infty}(M)$,

$$\int_M (\langle \Delta u, \Delta\phi \rangle_g + a \langle \nabla u, \nabla\phi \rangle_g + bu\phi)dv_g = \int_M \left(\lambda \left|u\right|^{q-2} u + f(x) \left|u\right|^{N-2} u \right) \phi dv_g.$$

Le théorème suivant est clé dans la recherche des solutions faibles

1.6 Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Théorème 1.2 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach,* Ω *un ouvert de* E *et* $f : \Omega \longrightarrow R$ *une fonction différentiable sur* Ω *et* $\Phi : \Omega \longrightarrow R^n$ *une application de classe* C^1 *sur* Ω *de composantes* $\Phi_1, .., \Phi_n$. *Etant donné* a *un point de* R^n, *on pose* $K = \Phi^{-1}(a)$ *que l'on suppose non vide, si en un point* $x_\circ \in K$

$$f(x_\circ) = \inf_{x \in K} f(x) \tag{1.1}$$

et si de plus ladifférentielle $d\Phi(x_\circ) \in L(E\ , R^n)$ *est surjective alors ils existent des réels* $\lambda_1, .., \lambda_n$ *pour lesquels*

$$df(x_\circ) = \lambda_1 d\Phi_1(x_\circ) + ... + \lambda_n d\Phi_n(x_\circ).$$

Cette équation est l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation considéré (1.1), les λ_i *sont les coefficients de Lagrange de cette équation.*

Une fois les solutions faibles obtenues on les régularise afin qu'elles deviennent des solutions classiques de ces équations.

1.7 Théorème de régularité

Théorème 1.3 *Soit L un opérateur linéaire elliptique du second ordre à coefficients de classe C^∞ et soit u une solution faible de l'équation :*

$$L(u) = f$$

avec $f \in L^1(M)$ alors

$\cdot$ *Si $f \in C^{k,\alpha}(M)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in (0,1)$, alors $u \in C^{k+2,\alpha}_{loc}(\ M)$.*

$\cdot$ *Si $f \in H^p_k(M)$, $k \in \mathbb{N}$ et $p > 1$, alors $u \in H^p_{k+2,loc}(M)$.*

Dans les applications et particulièrement à la géométrie différentielle, on cherche des solutions positives qui sont obtenues grace au principe suivant

1.8 Principe du maximum

Théorème 1.4 *Soit Ω un ouvert borné de R^n et*

$$L(u) = a^{ij}(x)D_{ij}u(u) + b^i(x)D_iu(x) + c(x)u$$

un opérateur elliptique sur Ω à coefficients continus sur $\bar{\Omega}$ et telque $c(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$, si une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et telle que $L(u) \geq 0$ sur Ω et si le maximum de u est M sur $\bar{\Omega}$ est à la fois positif ou nul et atteint en un point de Ω alors u est nécessairement constante égale à M sur Ω.

Un résultat important en analyse du type du lemme Fatou généralisé est donné par:

1.9 Lemme de Brézis-Lieb

Lemme 1.1 *[4] Soient Ω un ouvert borné de R^n et $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p vers f. Alors :*

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad \|f\|_p^p = lim(\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p).$$

On cite une inégalité du type de Sobolev obtenue dans [6] et [7]

1.10 Inégalité de Sobolev

Théorème 1.5 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $A_\varepsilon \in R$ telle que :*

$$\forall u \in H_2^2(M) : \|u\|_N^2 \leq (1+\varepsilon)K_\circ \int_M |\Delta_g u|^2 + |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + A_\varepsilon \int_M |u|^2 \, dv(g)$$

avec $N = \frac{2n}{n-4}$ et $\frac{1}{K_\circ} = \pi^2 n(n-4)(n^2-4)\{\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)}\}^{\frac{4}{n}}$ où Γ est la fonction de Gamma l'Euler.

1.11 Les conditions de Palais-Smale sur une contrainte

Soit X un espace de Banach .Dans toute la suite lorsque l'on considère une contrainte du type

$$S := \{u \in X;\ F(u) = 0\} \tag{1.2}$$

on suppose toujours que

$$F \in C^1(X, \mathbb{R}),\ et\ \ \forall u \in S,\ \nabla F \neq 0 \tag{1.3}$$

Définition 1.5 *[3] Soient X un espace de Banach, F vérifiant (1.3), S une variété définie par (1.2) et $J \in C^1(X, R)$. Si $c \in R$, on dit que J vérifie la condition de Palais-*

Smale sur la contrainte S au niveau c, si toute suite $(u_n,\, \mu_n)_n \in S \times R$ telle que

$$J_\lambda(u_n) \to c \ dans \ \ R \ et \ \ \nabla J_\lambda(u_n) - \mu_n \nabla\Phi_\lambda(u_n) \to 0 \ dans \ X^{'}$$

contient une sous suite notée $(u_n,\, \mu_n)_n$ convergeant vers $(u,\, \mu)$ dans $S \times R$.

Chapitre 2

Existence d'une solution.

2.1 Introduction.

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Soient a, b et f trois fonctions de classe C^{∞} sur M avec f strictement positive. On considère l'équation suivante:

$$\Delta_g^2 u - div_g \left(a(x)\nabla_g u\right) + b(x)u = \lambda \left|u\right|^{q-2} u + f(x) \left|u\right|^{N-2} u \tag{2.1}$$

où $1 < q < 2$ et $N = \frac{2n}{n-4}$ l'exposent critique de Sobolev et λ un réel strictement positif. Dans cette section, on démontre l'existence d'une solution non triviale, en procédant par la technique variationnelle.

On considère sur $H_2^2(M)$ la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_M \left|\Delta_g u\right|^2 - a(x)\left|\nabla_g u\right|^2 + b(x)u^2 dv(g) - \frac{\lambda}{q}\int_M \left|u\right|^q dv(g) - \frac{1}{N}\int_M f(x)\left|u\right|^N dv(g).$$

On pose

$$\Phi_\lambda(u) = \langle \nabla J_\lambda(u),\ u\rangle$$

$$\Phi_\lambda(u) = \int_M \left|\Delta_g u\right|^2 - a(x)\left|\nabla_g u\right|^2 + b(x)u^2 dv(g) - \lambda\int_M \left|u\right|^q dv(g) - \int_M f(x)\left|u\right|^N dv(g)$$

On considère l'ensemble M_λ donné par

$$M_\lambda = \left\{ u \in H_2^2(M) : \ \Phi_\lambda(u) = 0 \text{ et } \|u\| \geq \rho > 0 \right\}$$

On prendra les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ de telle manière que :

$$\|u\|^2 = \int_M |\Delta_g u|^2 - a(x) |\nabla_g u|^2 + b(x) u^2 dv(g)$$

soit une norme équivalente de $H_2^2(M)$.

Exemple 2.1 *Pour avoir une norme équivalente à celle de $H_2^2(M)$, on peut prendre par exemple $a(x)$ et $b(x)$ comme suit*

$$\sup_{x \in M} a(x) < 0 \text{ et } \inf_{x \in M} b(x) > 0.$$

Définition 2.1 *On dit que l'opérateur $\Delta_g^2 u - div_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u$ est coercif s'il existe $\Lambda > 0$ telle que pour tout $u \in H_2^2(M)$*

$$\int_M (\Delta_g^2 u - div_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u) u dv(g) \geq \Lambda \|u\|^2_{H_2^2(M)}$$

proposition 2.1

$$\|u\| = \left(\int_M |\Delta_g u|^2 - a(x) |\nabla_g u|^2 + b(x) u^2 dv(g)\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à celle de $H_2^2(M)$ si et seulement si l'opérateur

$$\Delta_g^2 u - div_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u$$

est coercif.

Preuve: $(\Rightarrow)$

On a supposé que $\|.\|$soit une norme équivalente à celle de $H_2^2(M)$ i.e. ils existent deux constantes α et $\beta > 0$ telles que pour tout $u \in H_2^2(M)$

$$\alpha \left\| u \right\|_{H_2^2(M)} \leq \left\| u \right\| \leq \beta \left\| u \right\|_{H_2^2(M)}$$

Donc l'opérateur

$$\Delta_g^2 u - div_g \left(a(x) \nabla_g u \right) + b(x) u$$

est coercif.

$(\Leftarrow)$

Si on suppose que l'opérateur

$$\Delta_g^2 u - div_g \left(a(x) \nabla_g u \right) + b(x) u$$

est coercif, il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $u \in H_2^2(M)$:

$$\int_M (\Delta_g^2 u - div_g \left(a(x) \nabla_g u \right) + b(x) u) u dv(g) \geq \Lambda \left\| u \right\|_{H_2^2(M)}^2$$

Comme M est compacte et $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions de classe $C^\infty(M)$,

$$\int_M (\Delta_g^2 u - div_g \left(a(x) \nabla_g u \right) + b(x) u) u dv(g) \leq$$

$$\underbrace{\max \left(1, -\min_{x \in M} a(x), \max_{x \in M} b(x) \right)}_{>0} \left\| u \right\|_{H_2^2(M)}^2$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

Lemme 2.1 *L'ensemble M_λ est non vide pour $\lambda \in (0, \lambda_\circ)$ où*

$$\lambda_\circ = \frac{\left(2^{q-2} - 2^{q-N} \right) \Lambda^{\frac{N-q}{N-2}}}{V(M)^{(1-\frac{q}{N})} \left(\max_{x \in M} f(x) \right)^{\frac{2-q}{N-2}} \left(\max((1+\varepsilon) K_\circ, A_\varepsilon) \right)^{\frac{N-q}{N-2}}}$$

Preuve: Soient $t > 0$ et $u \in H_2^2(M)$ tels que $\|u\| \geq \rho > 0$,

alors

$$\Phi_\lambda(tu) = t^2 \|u\|^2 - \lambda t^q \|u\|_q^q - t^N \int_M f(x) |u|^N dv(g).$$

Posons

$$\alpha(t) = \|u\|^2 - t^{N-2} \int_M f(x) |u|^N dv(g)$$

et

$$\beta(t) = \lambda t^{q-2} \|u\|_q^q$$

par l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\alpha(t) \geq \|u\|^2 - \max_{x \in M} f(x) (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{N}{2}} \|u\|_{H_2^2(M)}^N t^{N-2}$$

Par la coercitivité de l'opérateur $\Delta_g^2 u - div_g (a(x) \nabla_g u) + b(x)u$, il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que:

$$\alpha(t) \geq \|u\|^2 - \Lambda^{-\frac{N}{2}} \max_{x \in M} f(x) (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{N}{2}} \|u\|^N t^{N-2}$$

En posant:

$$\alpha_1(t) = \|u\|^2 - \Lambda^{-\frac{N}{2}} \max_{x \in M} f(x) (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{N}{2}} \|u\|^N t^{N-2}$$

Par l'inégalités de Hölder et de Sobolev, on obtient

$$\beta(t) \leq \lambda V(M)^{(1-\frac{q}{N})} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \|u\|_{H_2^2(M)}^q t^{q-2}$$

et par la coercitivité de l'opérateur $\Delta_g^2 u - div_g\left(a(x)\nabla_g u\right) + b(x)u$, il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$\beta(t) \leq \lambda \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{(1-\frac{q}{N})} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \|u\|^q t^{q-2}.$$

Si

$$\beta_1(t) = \lambda \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{(1-\frac{q}{N})} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \|u\|^q t^{q-2}$$

Pour $\alpha_1(t)$ est une fonction décroissante en t et concave et pour $\beta_1(t)$ est une fonction décroissante en t et convexe.
$\alpha_1(t)$ s'annule au point

$$t_\circ = \frac{\Lambda^{\frac{N}{2(N-2)}}}{\|u\| \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{1}{N-2}} \left(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon)\right)^{\frac{N}{2(N-2)}}}$$

et en prenant $u \in H_2^2(M)$, telle que

$$\|u\| = \frac{\Lambda^{\frac{N}{2(N-2)}}}{\left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{1}{N-2}} \left(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon)\right)^{\frac{N}{2(N-2)}}}$$

ce qui est possible pour un $\rho > 0$ suffisament petit, ce qui donne $t_\circ = 1$. Alors

$$\min_{t\,\in(0,\,\frac{1}{2}]} \alpha_1(t) = \alpha_1(\frac{1}{2}) = \frac{\Lambda^{\frac{N}{(N-2)}}}{\left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{N-2}} \left(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon)\right)^{\frac{N}{(N-2)}}} (1 - 2^{2-N})$$

$$\alpha_1(\frac{1}{2}) \geq \rho^2 (1 - 2^{2-N}) > 0$$

et,

$$\min_{t\,\in(0,\,\frac{1}{2}]} \beta_1(t) = \beta_1(\frac{1}{2}) > 0$$

où

$$\beta_1(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda 2^{2-q} V(M)^{(1-\frac{q}{N})} \Lambda^{\frac{q}{(N-2)}}}{(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{(N-2)}} (\max_{x\in M} f(x))^{\frac{q}{N-2}}}$$

L' équation $\Phi_\lambda(tu) = 0$ possède une solution si

$$\min_{t\, \in (0,\, \frac{1}{2}]} \alpha_1(t) \geq \min_{t\, \in (0,\, \frac{1}{2}]} \beta_1(t)$$

c-à-d

$$0 < \lambda < \frac{\left(2^{q-2} - 2^{q-N}\right) \Lambda^{\frac{N-q}{N-2}}}{V(M)^{(1-\frac{q}{N})} (\max_{x\in M} f(x))^{\frac{2-q}{N-2}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{N-q}{N-2}}} = \lambda_\circ$$

L'ensemble M_λ est alors non vide pour tout $\lambda \in (0,\, \lambda_\circ)$. ■

2.2 Etude de la fonctionnelle J_λ sur M_λ

Lemme 2.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Il existe $A > 0$ telque $J_\lambda(u) \geq A > 0$ pour tout $u \in M_\lambda$ et pour tout $\lambda \in (0, \min(\lambda_\circ, \lambda_1))$ où*

$$\lambda_1 = \frac{\frac{(N-2)q}{2(N-q)} \Lambda^{\frac{q}{2}}}{V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}}.$$

Preuve: Soit $u \in M_\lambda$

$$\|u\|^2 = \lambda \int_M |u|^q \, dv(g) + \int_M f(x) \, |u|^N \, dv(g)$$

pour $u \in M_\lambda$

$$J_\lambda(u) = \frac{N-2}{2N} \|u\|^2 - \lambda \frac{N-q}{Nq} \int_M |u|^q \, dv(g).$$

Les inégalités de Hölder et Sobolev donnent

$$J_\lambda(u) \geq \frac{N-2}{2N} \|u\|^2 - \lambda \frac{N-q}{Nq} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \|u\|^q_{H_2^2(M)}$$

et par la coercitivité de l'opérateur $\Delta_g^2 u - div_g\,(a(x)\nabla_g u) + b(x)u$, il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{N-2}{2N}\,\|u\|^2 - \lambda\frac{N-q}{Nq}\Lambda^{-\frac{q}{2}}V(M)^{1-\frac{q}{N}}(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}}\,\|u\|^q$$

$$\geq \|u\|^2\left(\frac{N-2}{2N} - \lambda\frac{N-q}{Nq}\Lambda^{-\frac{q}{2}}V(M)^{1-\frac{q}{N}}(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}}\,\|u\|^{q-2}\right) > 0.$$

Comme $\|u\| \geq \rho > 0$

$$J_\lambda(u) \geq \|u\|^2\left(\frac{N-2}{2N} - \lambda\frac{N-q}{Nq}\Lambda^{-\frac{q}{2}}V(M)^{1-\frac{q}{N}}(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}}\rho^{q-2}\right)$$

Si :

$$0 < \lambda < \frac{\frac{(N-2)q}{2(N-q)}\Lambda^{\frac{q}{2}}}{V(M)^{1-\frac{q}{N}}(\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}}\rho^{q-2}} := \lambda_1$$

alors, $J_\lambda(u) > 0$ pour tout $u \in M_\lambda$. ■

Lemme 2.3 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, alors les deux assertions suivantes sont vraies*

(i) $\langle \nabla\Phi_\lambda(u),\ u\rangle < 0$ *pour tout* $u \in M_\lambda$ *et pour tout* $\lambda \in (0,\ \min(\lambda_\circ, \lambda_1))$

(ii) *Les points critiques de J_λ sont les points de M_λ.*

Preuve: (i) Soit $u \in M_\lambda$, alors

$$\|u\|^2 = \lambda\int_M |u|^q\,dv(g) + \int_M f(x)\,|u|^N\,dv(g)$$

et

$$\langle \nabla\Phi_\lambda(u), u\rangle = 2\,\|u\|^2 - \lambda q\int_M |u|^q\,dv(g) - N\int_M f(x)\,|u|^N\,dv(g)$$

$$= 2\,\|u\|^2 - \lambda q\int_M |u|^q\,dv(g) - N(\|u\|^2 - \lambda\int_M |u|^q\,dv(g))$$

$$\langle \nabla\Phi_\lambda(u),\ u\rangle = (2-N)\,\|u\|^2 + \lambda\,(N-q)\,\|u\|_q^q.$$

Par les inégalités de Hölder et Sobolev, on obtient

$$\langle \nabla \Phi_\lambda(u), u \rangle$$

$$\leq (2-N)\left\| u \right\|^2 + \lambda (N-q) V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \left\| u \right\|^q_{H_2^2(M)}$$

et en tenant compte de la coercitivité de l'opérateur $\Delta_g^2 u - div_g\left(a(x)\nabla_g u\right) + b(x)u$, il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$\langle \nabla \Phi_\lambda(u), u \rangle$$

$$\leq (2-N)\left\| u \right\|^2 + \lambda (N-q) \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \left\| u \right\|^q$$

$$\leq \left\| u \right\|^2 [(2-N) + \lambda (N-q) \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \left\| u \right\|^{q-2}]$$

$$\langle \nabla \Phi_\lambda(u), u \rangle \leq \left\| u \right\|^2 [(2-N) + \lambda (N-q) \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}]$$

et puisque

$$0 < \lambda < \frac{\frac{(N-2)q}{2(N-q)} \Lambda^{\frac{q}{2}}}{V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}}$$

on obtient

$$\langle \nabla \Phi_\lambda(u),\ u \rangle < 0$$

(ii) $(\Rightarrow)$

Soit $u \in M_\lambda \Leftarrow déf \Rightarrow \langle \nabla J_\lambda(u),\ u \rangle = 0$ et u un point critique de J_λ sur M_λ.

$(\Leftarrow)$

En appliquant le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\mu \in R$ tel que pour tout $u \in M_\lambda$

$$\nabla J_\lambda(u) = \mu \nabla \Phi_\lambda(u) \tag{2.2}$$

En testant au point $u \in M_\lambda$ l'équation (2.2), on obtient

$$\Phi_\lambda(u) = \langle \nabla J_\lambda(u), u \rangle = \mu \langle \nabla \Phi_\lambda(u), u \rangle = 0$$

et alors, pour tout $u \in M_\lambda$

$$\mu \langle \nabla \Phi_\lambda(u), u \rangle = 0.$$

Et comme

$$\langle \nabla \Phi_\lambda(u), u \rangle < 0$$

alors

$$\mu = 0$$

d'où pour tout $u \in M_\lambda$

$$\nabla J_\lambda(u) = 0.$$

■

2.3 Existence d'une solution non triviale de l'équation (2.1) sur $\mathbf{M}_\lambda$

On va voir dans ce qui suit que la fonctionnelle d'énergie J_λ vérifie les conditions de Palais-Smale sur la contrainte M_λ.

Lemme 2.4 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Soit $(u_n)_n$ une suite dans M_λ telle que:*

$$\begin{cases} J_\lambda(u_n) \leq c \\ \nabla J_\lambda(u_n) - \mu_n \nabla \Phi_\lambda(u_n) \to 0 \end{cases}$$

Supposons que

$$c < \frac{2}{n\ K_\circ^{\frac{n}{4}} (Max_{\ x \in M} f(x))^{\frac{n-4}{4}}}$$

Alors il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ convergente fortement dans $H_2^2(M)$.

Preuve: Soit $(u_n)_n \subset M_\lambda$

$$J_\lambda(u_n) = \frac{N-2}{2N} \|u_n\|^2 - \lambda \frac{N-q}{Nq} \int_M |u_n|^q \, dv(g)$$

Dans un premier temps on montre que la suite$(u_n)_n$ est bornée dans $H_2^2(M)$.

Par le Lemme 2, on obtient que :

$$J_\lambda(u_n) \geq \frac{N-2}{2N} \|u_n\|^2 - \lambda \frac{N-q}{Nq} \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \|u_n\|^q$$

$$J_\lambda(u_n) \geq \|u_n\|^2 \left(\frac{N-2}{2N} - \lambda \frac{N-q}{Nq} \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}\right) > 0$$

et comme $0 < \lambda < \frac{\frac{(N-2)q}{2(N-q)} \Lambda^{\frac{q}{2}}}{V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}}$ et $J_\lambda(u_n) \leq c$, alors

$$c \geq J_\lambda(u_n)$$

$$\geq \left[\frac{N-2}{2N} - \lambda \frac{N-q}{Nq} \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}\right] \|u_n\|^2 > 0$$

d'où

$$0 \leq \|u_n\|^2 \leq \frac{c}{\frac{N-2}{2N} - \lambda \frac{N-q}{Nq} \Lambda^{-\frac{q}{2}} V(M)^{1-\frac{q}{N}} (\max((1+\varepsilon)K_\circ, A_\varepsilon))^{\frac{q}{2}} \rho^{q-2}} < +\infty.$$

Donc $(u_n)_n$ est bornée dans $H_2^2(M)$. La réflexivité de l'espace $H_2^2(M)$ et la compacité de l'inclusion $H_2^2(M) \subset H_p^k(M)$ ($k = 0, 1$; $p < N$), implique qu'il existe une sous-suite notée $(u_n)_n$ telle que :

1. $u_n \to u$ faiblement dans $H_2^2(M)$.
2. $u_n \to u$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ fortement dans $L^p(M)$ où $p < N$
3. $u_n \to u$ presque partout dans M.

D'après le lemme de Brézis-Lieb, on peut écrire

$$\int_M (\Delta_g u_n)^2 \, dv(g) = \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv(g) + \int_M (\Delta_g (u_n - u))^2 \, dv(g) + o(1)$$

et aussi

$$\int_M f(x)\left|u_n\right|^N dv(g) = \int_M f(x)\left|u\right|^N dv(g) + \int_M f(x)\left|u_n-u\right|^N dv(g) + o(1).$$

On va montrer que $u \in M_\lambda$.

$u_n \to u$ faiblement dans $H_2^2(M)$ i.e. si pour tout $\phi \in H_2^2(M)$,

$$\int_M \left(\Delta_g u_n \Delta_g \phi - a(x)\left\langle \nabla u_n, \nabla\phi\right\rangle_g + a u_n \phi\right) dv(g) =$$

$$\int_M \left(\Delta_g u \Delta_g \phi - a(x)\left\langle \nabla u, \nabla\phi\right\rangle_g + a u \phi\right) dv(g) + o(1)$$

En particulier pour $\phi = u$, on obtient,

$$\int_M \left(\Delta_g u_n \Delta_g u - a(x)\left\langle \nabla u_n, \nabla u\right\rangle_g + a u_n u\right) dv(g) = \left\|u\right\|^2 + o(1)$$

et aussi pour $\phi = u_n$,

$$\int_M \left(\Delta_g u_n \Delta_g u - a(x)\left\langle \nabla u_n, \nabla u\right\rangle_g + a u_n u\right) dv(g) = \left\|u_n\right\|^2 + o(1)$$

et puisque $(u_n)_n \subset M_\lambda$ i.e.

$$\int_M \left(\lambda\left|u_n\right|^{q-2} u_n u + f(x)\left|u_n\right|^{N-2} u_n u\right) dv(g) \ = \left\|u\right\|^2 + o(1)$$

mais quand $n \to +\infty$

$$\int_M \left(\lambda\left|u_n\right|^{q-2} u_n u + f(x)\left|u_n\right|^{N-2} u_n u\right) dv(g) \to \int_M \left(\lambda\left|u\right|^{q} + f(x)\left|u\right|^{N}\right) dv(g)$$

ce qui donne

$$\Phi_\lambda(u_n) = \Phi_\lambda(u) = \left\|u\right\|^2 - \lambda\int_M \left|u\right|^q dv(g) - \int_M f(x)\left|u\right|^N dv(g) = 0.$$

ou encore

$$\|u\| + o(1) = \|u_n\| \geq \rho$$

D'où $u \in M_\lambda$.

On va montrer que $\mu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$

En testant avec u_n, on obtient

$$\langle \nabla J_\lambda(u_n) - \mu_n \nabla \Phi_\lambda(u_n), u_n \rangle = o(1)$$

$$= \underbrace{\langle \nabla J_\lambda(u_n), u_n \rangle}_{=0} - \mu_n \langle \nabla \Phi_\lambda(u_n), u_n \rangle = o(1)$$

Donc,

$$\mu_n \langle \nabla \Phi_\lambda(u_n), u_n \rangle = o(1)$$

D'après le Lemme 2, on a que $\limsup \langle \nabla \Phi_\lambda(u_n), u_n \rangle < 0$

et par consequent

$$\mu_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On va montrer que $u_n \to u$ converge fortement dans $H_2^2(M)$, nous avons

$$J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u)$$

$$= \frac{1}{2} \int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g) - \frac{1}{N} \int_M f(x) \left| u_n - u \right|^N dv(g) + o(1). \tag{2.3}$$

Puisque $u_n - u \to 0$ faiblement dans $H_2^2(M)$, on teste avec $\nabla J_\lambda(u_n) - \nabla J_\lambda(u)$

$$\langle \nabla J_\lambda(u_n) - \nabla J_\lambda(u), u_n - u \rangle = o(1)$$

$$= \int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g) - \int_M f(x) \left| u_n - u \right|^N dv(g) = o(1) \tag{2.4}$$

De sorte que

$$\int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g) = \int_M f(x) \left| u_n - u \right|^N dv(g) + o(1)$$

et en tenant compte de (2.3), on obtient

$$J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g) - \frac{1}{N} \int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g) + o(1)$$

i.e.

$$J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u) = \frac{2}{n} \int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g).$$

Independament, d'après l'inégalité de Sobolev, on obtient pout tout $u \in H_2^2(M)$

$$\|u\|_N^2 \leq (1+\varepsilon) K_\circ \int_M (\Delta_g u)^2 + |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + A_\varepsilon \int_M u^2 dv(g)$$

En testant l'inégalité de Sobolev par $u_n - u$, on obtient

$$\|u_n - u\|_N^2 \leq (1+\varepsilon) K_\circ \int_M (\Delta_g(u_n - u))^2 \, dv(g) + o(1). \tag{2.5}$$

Comme

$$\int_M f(x) \left| u_n - u \right|^N dv(g) \leq \max_{x \in M} f(x) \int_M \left| u_n - u \right|^N dv(g)$$

en remplaçant dans (2.5), on obtient

$$\int_M f(x) \left| u_n - u \right|^N dv(g) \leq (1+\varepsilon)^{\frac{n}{n-4}} \max_{x \in M} f(x) K_\circ^{\frac{n}{n-4}} \left\| \Delta_g(u_n - u) \right\|_2^N + o(1)$$

et faisant appel à l'égalité (2.4),

$$o(1) \geq \left\| \Delta_g(u_n - u) \right\|_2^2 - (1+\varepsilon)^{\frac{n}{n-4}} \max_{x \in M} f(x) K_\circ^{\frac{n}{n-4}} \left\| \Delta_g(u_n - u) \right\|_2^N + o(1)$$

$$\geq \|\Delta_g(u_n-u)\|_2^2\,(1-(1+\varepsilon)^{\frac{n}{n-4}}\max_{x\in M} f(x)K_\circ^{\frac{n}{n-4}}\,\|\Delta_g(u_n-u)\|_2^{N-2})+o(1)$$

et par conséquent si

$$\limsup \|\Delta_g(u_n-u)\|_2^{N-2} < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{n}{n-4}}K_\circ^{\frac{n}{n-4}}\max_{x\in M} f(x)}$$

on trouve que

$$\frac{2}{n}\int_M |\Delta_g(u_n-u)|^2\,dv(g) < c.$$

Comme

$$c < \frac{2}{n\ K_\circ^{\frac{n}{4}}(Max\ _{x\in M} f(x))^{\frac{n-4}{4}}}$$

alors

$$\int_M |\Delta_g(u_n-u)|^2\,dv(g) < \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}(\max_{x\in M} f(x))^{\frac{n-4}{4}}}.$$

Par conséquent

$$o(1) \geq \|\Delta_g(u_n-u)\|_2^2\,\underbrace{(1-(1+\varepsilon)^{\frac{n}{n-4}}\max_{x\in M} f(x)K_\circ^{\frac{n}{n-4}}\,\|\Delta_g(u_n-u)\|_2^{N-2})}_{>0}+o(1)$$

ou encore

$$\|\Delta_g(u_n-u)\|_2^2 = o(1)$$

i.e. $u_n \to u$ converge fortement dans $H_2^2(M)$. ■

Lemme 2.5 *Soit* (M,g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* $n \geq 5$*, alors* J_λ *possède un maximum global sur* M_λ *pour tout* $\lambda \in (0,\, min(\lambda_\circ, \lambda_1))$.

Preuve: D'après les Lemmes 2 et 4, on a démontré que si $u \in M_\lambda$on a les deux assertions: pour tout $u \in M_\lambda$

$\cdot\ \langle \nabla J_\lambda(u),\ u\rangle = 0$

$\cdot \left\langle \nabla^2 J_\lambda(u)(u),\ u \right\rangle = \langle \nabla \Phi_\lambda(u),\ u \rangle < 0$

i.e. que la fonctionnelle $J_\lambda(u)$est concave ce qu'implique que J_λ possède un maximum global sur M_λ, il existe $\bar{u} \in M_\lambda$tel que

$$J_\lambda(\bar{u}) = \max_{u \in M_\lambda} J_\lambda(u).$$

D'après la définition du maximum et le théorème des multiplicateurs de Lagrange il existe une suite $(u_n,\, \mu_n) \in M_\lambda \times R$ telle que: $\nabla J_\lambda(u_n) - \mu_n \nabla \Phi_\lambda(u_n) \to 0$ dans R et que $J_\lambda(u_n)$ est bornée. $\blacksquare$

Chapitre 3

Fonctions tests

Dans ce chapitre, on démontre le théorème principal.

Considérons un système de coordonnées normales géodésiques $(y^1, ..., y^n)$ centré en $x_\circ$.

Soit $S(r)$ l'ensemble des points situés à la distance r de $x_\circ$ ($r < d$ le rayon d'injectivité) et $d\Omega$ l'élément volume de la sphère $S^{n-1}(1)$ unité de dimension $(n-1)$.

Posons :

$$G(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{S(r)} \sqrt{|g(x)|} d\Omega$$

ω_{n-1} désigne l'aire de $S^{n-1}(1)$ et $|g(x)|$ le déterminant de la métrique g. Un développement limité de $G(r)$ au voisinage de $r = 0$ est donné par

$$G(r) = 1 - \frac{S_g(x_\circ)}{6n} r^2 + o(r^2)$$

où $S_g(x_\circ)$ est la courbure scalaire de M au point $x_\circ$.

Soit $B(x_\circ, \delta)$ la boule centrée en $x_\circ$ et de rayon δ telle que $0 < 2\delta < d$.

On considère les fonctions tests suivantes

$$u_\epsilon(x) = (\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{8}} \frac{\eta(r)}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{n-4}{2}}}$$

où

$$f(x_\circ) = \max_{x\in M} f(x)$$

ici η est une fonction de classe C^∞égale à 1 sur $B(x_\circ,\delta)$ et 0 sur $M - B(x_\circ, 2\delta)$ où $r = d(x_\circ, .)$ désigne la distance géodésique au point $x_\circ$.
Pour les calculs qui suivent nous utilisons les résultats suivants: p et q étant deux réels positifs , posons $p - q > 1$ pour assurer la convergence de l'intégrale

$$I_p^q = \int_0^{+\infty} \frac{t^q}{(1+t)^p} dt$$

nous avons les relations utiles suivantes

$$I_{p+1}^q = \frac{p-q-1}{p} I_p^q \quad \text{et} \quad I_{p+1}^{q+1} = \frac{q+1}{p-q-1} I_{p+1}^q.$$

3.1 Application aux variétés Riemanniennes compactes de dimensions $n > 6$

Théorème 3.1 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* $n > 6$*, si en un point* $x_\circ$ *où* f *atteint son maximum, la condition*

$$\left(\frac{(n^2+4n-20)\,n}{2(n^2-4)(n-6)} S_g(x_\circ) + \frac{(n-1)\ n}{(n^2-4)(n-6)} a(x_\circ) - \frac{n}{8(n-2)} \frac{\Delta f(x_\circ)}{f(x_\circ)} \right) > 0$$

est vérifiée alors l'équation (2.1) admet une solution u *non triviale de classe* $C^{4,\alpha}$ *avec* $\alpha \in (0,1)$ *vérifiant*

$$J_\lambda(u) < \frac{2}{n\ K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}$$

Preuve: Pour calculer le terme $\int_M f(x) \left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g)$, on considère le développement de f

$$f(x) = f(x_\circ) + \frac{\partial^2 f(x_\circ)}{2\partial y^i \partial y^j} y^i y^j + o(r^2)$$

et aussi celui de la mesure rièmannienne au voisinage de $r=0$.

$$dv(g) = 1 - \frac{1}{6} R_{ij}(x_\circ) y^i y^j + o(r^2)$$

où $R_{ij}(x_\circ)$ désigne le tenseur de Ricci au point $x_\circ$. Alors

$$f(x).dv(g) = f(x_\circ) + \Big(\frac{\partial^2 f(x_\circ)}{2\partial y^i \partial y^j} - \frac{f(x_\circ)}{6} R_{ij}(x_\circ)\Big) y^i y^j + o(r^2).$$

Maintenant on calcule

$$\int_M f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g) = \int_{B(x_\circ,\delta)} f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g) + \int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)} f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g).$$

Le premier terme de droite s'écrit

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g) = \int_0^\delta r^{n-1}\left|u_\epsilon(x)\right|^N \Big(\int_{S(r)} f(x)\sqrt{|g(x)|}d\Omega\Big)dr$$

$$= \Big(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)}\Big)^{\frac{n}{4}} \omega_{n-1} \int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{(r^2+\epsilon^2)^n} \Big(f(x_\circ) - \Big(\frac{\Delta f(x_\circ)}{2n} + \frac{f(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ)\Big) r^2 + o(r^2)\Big)$$

$$= \Big(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)}\Big)^{\frac{n}{4}} \omega_{n-1} \times$$

$$\left(f(x_\circ)\int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{(r^2+\epsilon^2)^n} dr - \Big(\frac{\Delta f(x_\circ)}{2n} + \frac{f(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ)\Big)\int_0^\delta \frac{r^{n+1}}{(r^2+\epsilon^2)^n} dr + o(r^2)\right).$$

En faisant le changement de variable suivant

$$\left\langle x = \Big(\frac{r}{\epsilon}\Big)^2, dr = \frac{\epsilon dx}{2\sqrt{x}} \text{et} \quad r = \epsilon\sqrt{x} \right\rangle$$

on obtient pour $\epsilon \to 0$

$$A = \int_{B(x_\circ,\delta)} f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g) = \Big(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)}\Big)^{\frac{n}{4}} \frac{\omega_{n-1}}{2} \times$$

$$\left(f(x_\circ) \int_0^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(x+1)^n} dx - (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2n} + \frac{f(x_\circ)}{6} S_g(x_\circ))\epsilon^2 \int_0^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{(x+1)^n} dx + o(\epsilon^2) \right)$$

$$\begin{aligned} = \quad & (\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n}{4}} \frac{\omega_{n-1}}{2} (f(x_\circ) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(x+1)^n} dx - \\ & (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2n} + \frac{f(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ))\epsilon^2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{(x+1)^n} dx + o(\epsilon^2)) \end{aligned}$$

$$= (\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n}{4}} \frac{\omega_{n-1}}{2} \left(f(x_\circ) I_n^{\frac{n}{2}-1} - (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2n} + \frac{f(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ))\epsilon^2 I_n^{\frac{n}{2}} + o(\epsilon^2) \right)$$

et puisque

$$I_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{n-2} I_n^{\frac{n}{2}-1}$$

on obtient

$$A = (\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \left(f(x_\circ) I_n^{\frac{n}{2}-1} - (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2(n-2)} + \frac{f(x_\circ)}{6(n-2)} S_g(x_\circ))\epsilon^2 I_n^{\frac{n}{2}-1} + o(\epsilon^2) \right)$$

$$= (\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} I_n^{\frac{n}{2}-1} \left(f(x_\circ) - (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2(n-2)} + \frac{f(x_\circ)}{6(n-2)} S_g(x_\circ))\epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right).$$

Sachant que,

$$K_\circ = \frac{16}{(n-4)n(n^2-4)2^{n-1} \left(I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1} \right)^{\frac{4}{n}}}$$

on obtient

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} f(x) \left| u_\epsilon(x) \right|^N dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \left(1 - (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2(n-2)f(x_\circ)} + \frac{S_g(x_\circ)}{6(n-2)})\epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right)$$

Il nous reste à calculer l'intégrale

$$B = \int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)} f(x) \left| u_\epsilon(x) \right|^N dv(g) = \eta\,(x_\circ)^N \, (\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \times$$

$$\left(f(x_\circ)\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2}\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(x+1)^n}dx-(\frac{\Delta f(x_\circ)}{2n}+\frac{f(x_\circ)}{6}S_g(x_\circ))\epsilon^2\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(x+1)^n}dx+o(\epsilon^2)\right)$$

alors,

$$\left|\int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)}f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g)\right|\leq c\left(\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2}\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{x^n}dx+\epsilon^2\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n}dx+o(\epsilon^2)\right)$$

$$\leq c\left((\frac{\delta}{\epsilon})^{-n}+\epsilon^2(\frac{\delta}{\epsilon})^{-n+2}\right)$$

$$\leq c(\epsilon^n+\epsilon^{n-4})$$

où c une constante positive universelle. Comme $n\geq 6$ alors,

$$\int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)}f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g)=o(\epsilon^2)$$

Donc,

$$\int_M f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g)=\frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}\left(1-(\frac{\Delta f(x_\circ)}{2(n-2)f(x_\circ)}+\frac{S_g(x_\circ)}{6(n-2)})\epsilon^2+o(\epsilon^2)\right)$$

Maintenant

$$\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial r}\right|=\left|\nabla u_\epsilon\right|=(n-4)(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{8}}\frac{r}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

et donc

$$\int_M a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g)=\int_{B(x_\circ,\delta)}a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g)+\int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)}a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g).$$

On calcule à présent le terme

$$\int_M a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g)=(n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\int_0^\delta\frac{r^2}{(r^2+\epsilon^2)^{n-2}}\left(\int_{S(r)}a(x)\sqrt{|g(x)|}d\Omega\right)dr+o\,($$

pour cela on utilise le développement limité de la fonction $a(x)$

$$a(x) = a(x_\circ) + \frac{\partial^2 a(x_\circ)}{2\partial y^i \partial y^j} y^i y^j + o(r^2)$$

$$\int_{S(r)} a(x)\sqrt{|g(x)|}d\Omega = \int_{S(r)} \left(a(x_\circ) + (\frac{\partial^2 a(x_\circ)}{2\partial y^i \partial y^j} - \frac{a(x_\circ)R_{ij}(x_\circ)}{6}) y^i y^j + o(r^2) \right) d\Omega$$

$$= \left(a(x_\circ) - (\frac{\Delta a(x_\circ)}{2n} + \frac{a(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ)) r^2 + o(r^2) \right) \omega_{n-1}$$

$$\int_M a(x) \left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = (n-4)^2 (\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \omega_{n-1}$$

$$\int_0^\delta \frac{r^2}{(r^2+\epsilon^2)^{n-2}} \left(a(x_\circ) - (\frac{\Delta a(x_\circ)}{2n} + \frac{a(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ)) r^2 + o(r^2) \right) dr.$$

En faisant le changement de variable suivant

$$\left\langle x = (\frac{r}{\epsilon})^2, dr = \frac{\epsilon dx}{2\sqrt{x}} et \quad r = \epsilon\sqrt{x} \right\rangle$$

on obtient

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} a(x) \left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = (n-4)^2 (\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2\epsilon^{n-6}} \times$$

$$\left(a(x_\circ) \int_0^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{(x+1)^{n-2}} dx - (\frac{\Delta a(x_\circ)}{2n} + \frac{a(x_\circ)}{6n} S_g(x_\circ)) \epsilon^2 \int_0^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2} \frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{(x+1)^{n-2}} dx + o(\epsilon^2) \right).$$

Pour $\epsilon \to 0$ on a

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} a(x) \left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \left(\frac{4(n-1)a(x_\circ)}{(n^2-4)(n-6)} \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right)$$

Il nous reste à calculer l'intégrale $\int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)} a(x) \left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g)$.

Toutes les intégrales sont du type

$$\left| \int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2} h(x) \frac{x^q}{(x+1)^p} dx \right| \le C \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2(q-p+1)} = C\epsilon^{2(p-q-1)}$$

et comme $p-q=n-4\geq 3$, on obtient

$$\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2} h(x)\frac{x^q}{(x+1)^p}dx = o(\epsilon^2)$$

et par conséquent

$$\int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)} a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = o(\epsilon^2).$$

Finalement, on a

$$\int_M a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}\left(\frac{4(n-1)a(x_\circ)}{(n^2-4)(n-6)}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right).$$

Maintenant on calcule

$$\int_M b(x)u_\epsilon^2 dv(g) = \int_{B(x_\circ,\delta)} b(x)u_\epsilon^2 dv(g) + \int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)} b(x)u_\epsilon^2 dv(g)$$

Le premier terme devient

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} b(x)u_\epsilon^2 dv(g) = (\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{(r^2+\epsilon^2)^{n-4}}\left(\int_{S(r)} b(x)\sqrt{|g(x)|}d\Omega\right)dr$$

$$= (\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\omega_{n-1}\int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{(r^2+\epsilon^2)^{n-4}} \left(b(x_\circ) - (\frac{\Delta b(x_\circ)}{2n} + \frac{b(x_\circ)}{6n}S_g(x_\circ))r^2 + o(r^2)\right)dr$$

et avec les mêmes calculs que ci-dessus, on obtient

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} b(x)u_\epsilon^2 dv(g) = o(\epsilon^2).$$

Pour le calcul de

$$\int_M (\Delta u_\epsilon)^2\, dv(g) = \int_{B(x_\circ,\delta)} (\Delta u_\epsilon)^2\, dv(g) + \int_{B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)} (\Delta u_\epsilon)^2\, dv(g)$$

on rappelle d'abord l'expression radiale du laplacien

$$-\Delta u_\epsilon = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial r}$$

$$= (4-n)(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{8}}\left(\frac{n\epsilon^2+2r^2}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}\frac{r}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right).$$

Et alors

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} (\Delta u_\epsilon)^2\, dv(g) = (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\omega_{n-1}$$

$$\int_0^\delta (\frac{n\epsilon^2+2r^2}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}\frac{r}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}})^2(1-\frac{S_g(x_\circ)}{6n}r^2+o(r^2))r^{n-1}dr$$

$$= (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)\epsilon^4}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\omega_{n-1}$$

$$\left(\int_0^\delta \frac{(n\epsilon^2+2r^2)^2 r^{n-1}}{(r^2+\epsilon^2)^n} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}\right)^2\frac{r^{n+1}}{(r^2+\epsilon^2)^{n-2}} + 2\frac{(n\epsilon^2+2r^2)^2 r^n}{(r^2+\epsilon^2)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}\right)\times$$

$$(1-\frac{S_g(x_\circ)}{6n}r^2+o(r^2))dr$$

ou bien

$$= \frac{1}{2\epsilon^{n-4}}\left[n^2 I_n^{\frac{n}{2}-1} + 4nI_n^{\frac{n}{2}} + 4I_n^{\frac{n}{2}+1} - \frac{S_g(x_\circ)}{6n}\epsilon^2(n^2 I_n^{\frac{n}{2}} + 4n\ I_n^{\frac{n}{2}+1} + 4I_n^{\frac{n}{2}+2}) + o(\epsilon^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2\epsilon^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n\,(n^2-4)}{(n-4)} - \frac{(n^2+4)\,S_g(x_\circ)}{6\,(n-6)}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right).$$

Pour la troisième intégrale, rappelons que

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|} = -\frac{S_g(x_\circ)}{3n}r + o(r^2)$$

ce qui donne

$$\int_0^\delta \frac{2(n\epsilon^2+2r^2)^2 r^n}{(r^2+\epsilon^2)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}(1-\frac{S_g(x_\circ)}{6n}r^2+o(r^2))dr$$

$$= \frac{S_g(x_\circ)}{3n\ \epsilon^{n-6}}(\int_0^{\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^2}\frac{(n+2x)\ x^{\frac{n}{2}}}{(1+x)^{n-1}}dx)+o(\epsilon^2))$$

$$= \frac{S_g(x_\circ)}{3n\ \epsilon^{n-4}} I_n^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{2n(n-1)(n-2)}{(n-4)(n-6)}\epsilon^2+o(\epsilon^2)\right).$$

La dernière intégrale s'écrit

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g(x)|}\right)^2 \frac{r^{n+1}}{(r^2+\epsilon^2)^{n-2}}(1+o(r^2))dr = \frac{1}{2\epsilon^{n-8}}\frac{S_g^2(x_\circ)}{9n^2}\int_0^{\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^2}\frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{(1+x)^{n-2}}(1+o(\epsilon^2))dx$$

$$= \frac{1}{\epsilon^{n-4}}o(\epsilon^4)$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} (\Delta u_\epsilon)^2\, dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}\left(1-\frac{n^2+4n-20}{6(n^2-4)(n-6)}S_g(x_\circ)\epsilon^2+o(\epsilon^2)\right)$$

Les intégrales sur $B(x_\circ,2\delta)-B(x_\circ,\delta)$ sont toutes du type

$$\left|\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2} h(x)\frac{x^q}{(x+1)^p}dx\right| \le cste\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2(q-p+1)} = cste\ \epsilon^{2(p-q-1)}$$

et puisque $p-q=n-4\ge 3$, alors

$$\int_{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}^{(\frac{2\delta}{\epsilon})^2} h(x)\frac{x^q}{(x+1)^p}dx = o(\epsilon^2).$$

En fin

$$\int_M (\Delta u_\epsilon)^2 \, dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \left(1 - \frac{n^2+4n-20}{6(n^2-4)(n-6)} S_g(x_\circ) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right).$$

Récapitulant, on obtient

$$\int_M (\Delta u_\epsilon)^2 - a(x) \left| \nabla u_\epsilon \right|^2 + b(x) u_\epsilon^2 dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \times$$

$$\left(1 - (\frac{n^2+4n-20}{6(n^2-4)(n-6)} S_g(x_\circ) + \frac{4(n-1)}{(n^2-4)(n-6)} a(x_\circ)) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right).$$

Tenant compte de l'expression de J_λ

$$J_\lambda (u_\epsilon) = \frac{1}{2} \left\| u_\epsilon \right\|^2 - \frac{\lambda}{q} \left\| u_\epsilon \right\|_q^q - \frac{1}{N} \int_M f(x) \left| u_\epsilon(x) \right|^N dv(g)$$

où

$$\left\| u_\epsilon \right\|^2 = \int_M \left| \Delta u_\epsilon \right|^2 - a(x) \left| \nabla u_\epsilon \right|^2 + b(x) u_\epsilon^2 dv(g)$$

et $\lambda > 0$, on obtient

$$J_\lambda (u_\epsilon) \leq \frac{1}{2} \left\| u_\epsilon \right\|^2 - \frac{1}{N} \int_M f(x) \left| u_\epsilon(x) \right|^N dv(g)$$

$$\leq \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \times$$

$$\left[\frac{2}{n} - \left(\frac{n^2+4n-20}{(n^2-4)(n-6)} S_g(x_\circ) + \frac{2(n-1)}{(n^2-4)(n-6)} a(x_\circ) - \frac{1}{4(n-2)} \frac{\Delta f(x_\circ)}{f(x_\circ)} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right]$$

$$\leq \frac{2}{n \; K_\circ^{\frac{n}{4}} (f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \times$$

$$\left[1 - \left(\frac{(n^2+4n-20)\, n}{2(n^2-4)(n-6)} S_g(x_\circ) + \frac{(n-1)\; n}{(n^2-4)(n-6)} a(x_\circ) - \frac{n}{8(n-2)} \frac{\Delta f(x_\circ)}{f(x_\circ)} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right]$$

Pour assurer

$$J_\lambda\left(u_\epsilon\right) < \frac{2}{n\ K_\circ^{\frac{n}{4}}\left(f(x_\circ)\right)^{\frac{n-4}{4}}}$$

on prend

$$\left(\frac{(n^2+4n-20)\,n}{2(n^2-4)(n-6)}S_g(x_\circ)+\frac{(n-1)\ n}{(n^2-4)(n-6)}a(x_\circ)-\frac{n}{8(n-2)}\frac{\Delta f(x_\circ)}{f(x_\circ)}\right)>0.$$

Ce qui achève la preuve. ■

3.2 Application aux variétés Riemanniennes compactes de dimensions $n = 6$.

Théorème 3.2 *Lorsque $n = 6$, s'il existe un point $x_\circ \in M$ où $S_g(x_\circ) > -3a(x_\circ)$ alors (2.1) admet une solution u non triviale de classe $C^{4,\alpha}, \alpha \in (0,1)$.*

Preuve: Le developpement de l'intégrale

$$\int_M f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}\left(f(x_\circ)\right)^{\frac{n-4}{4}}}\left(1-(\frac{\Delta f(x_\circ)}{2(n-2)f(x_\circ)}+\frac{S_g(x_\circ)}{6(n-2)})\epsilon^2+o(\epsilon^2)\right)$$

reste le même.Quand à l'intégrale

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\frac{w_{n-1}}{2}\left(a(x_\circ)\epsilon^2\int_0^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(x+1)^{n-2}}dx\ +o(\epsilon^2)\right)$$

on fait le changement de variable

$$y = x+1$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_{B(x_\circ,\delta)} a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}}\frac{w_{n-1}}{2}\times$$

$$\left(a(x_\circ)\epsilon^2 \int_1^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2+1} \frac{(y-1)^{\frac{n}{2}}}{y^{n-2}}dx \ + o(\epsilon^2)\right)$$

$$= (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \left(a(x_\circ)\epsilon^2 + \int_1^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2+1} \frac{(y-1)^{\frac{n}{2}}}{y^{n-2}}dx \ + o(\epsilon^2)\right)$$

$$= (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \left[a(x_\circ)\epsilon^2 \left(O\left(1\right) + \int_k^{(\frac{\delta}{\epsilon})^2+1} \frac{y^{\frac{n}{2}}}{y^{n-2}}dx\right) \ + o(\epsilon^2)\right]$$

$$= (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \left[a(x_\circ)\epsilon^2 \left(O\left(1\right) + \log\left((\frac{\delta}{\epsilon})^2 + 1\right)\right) \ + o(\epsilon^2)\right]$$

$$= (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \left(a(x_\circ)\epsilon^2 \log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right).$$

Donc,

$$\int_M a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 dv(g) = (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \left(a(x_\circ)\epsilon^2 \log(\frac{1}{\epsilon^2}) \ + O(\epsilon^2)\right)$$

$$\int_M \left|\Delta u_\epsilon\right|^2 dv(g) = (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \times$$
$$\left(\frac{n(n+2)(n-2)}{(n-4)} I_n^{\frac{n}{2}-1} - \frac{2}{n} S_g(x_\circ)\epsilon^2 \log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right)$$

Le developpement du premier terme de la fonctionnelle J_λ reste inchangé et par suite

$$\int_M \left|\Delta u_\epsilon\right|^2 - a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 + b(x)u_\epsilon^2 dv(g) = (n-4)^2(\frac{(n-4)n(n^2-4)}{f(x_\circ)})^{\frac{n-4}{4}} \frac{w_{n-1}}{2} \times$$

$$\left[\frac{n(n+2)(n-2)}{(n-4)} I_n^{\frac{n}{2}-1} - \left(\frac{2}{n} S_g(x_\circ) + a(x_\circ)\right)\epsilon^2 \log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right]$$

$$\int_M \left|\Delta u_\epsilon\right|^2 - a(x)\left|\nabla u_\epsilon\right|^2 + b(x)u_\epsilon^2 dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}\left(f(x_\circ)\right)^{\frac{n-4}{4}}} \times$$
$$\left(1 - \frac{(n-4)}{n\left(n^2-4\right) I_n^{\frac{n}{2}-1}} \left(\frac{2}{n} S_g(x_\circ) + a(x_\circ)\right)\epsilon^2 \log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right)$$

$$\int_M f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g) = \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}\left(f(x_\circ)\right)^{\frac{n-4}{4}}} \left(1 - (\frac{\Delta f(x_\circ)}{2(n-2)f(x_\circ)} + \frac{S_g(x_\circ)}{6(n-2)})\epsilon^2 + O(\epsilon^2)\right)$$

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \frac{1}{2}\left\|u_\epsilon\right\|^2 - \frac{1}{N}\int_M f(x)\left|u_\epsilon(x)\right|^N dv(g)$$

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \frac{1}{K_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}} \times$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{(n-4)}{2n(n^2-4)I_n^{\frac{n}{2}-1}}\left(\frac{2}{n}S_g(x_\circ) + a(x_\circ)\right)\epsilon^2\log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right)$$

$$\leq \frac{2}{nK_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}\left(1 - \frac{(n-4)}{4(n^2-4)I_n^{\frac{n}{2}-1}}\left(\frac{2}{n}S_g(x_\circ) + a(x_\circ)\right)\epsilon^2\log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right)$$

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \frac{2}{nK_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}\left(1 - \frac{(n-4)}{4(n^2-4)I_n^{\frac{n}{2}-1}}\left(\frac{2}{n}S_g(x_\circ) + a(x_\circ)\right)\epsilon^2\log(\frac{1}{\epsilon^2}) + O(\epsilon^2)\right).$$

Ce qui donne pour $\epsilon \longrightarrow 0^+$

$$J_\lambda(u_\epsilon) < \frac{2}{nK_\circ^{\frac{n}{4}}(f(x_\circ))^{\frac{n-4}{4}}}$$

pourvu qu'il existe un point $x_\circ$ de M tel que

$$\frac{2}{n}S_g(x_\circ) + a(x_\circ) > 0$$

i.e.

$$S_g(x_\circ) > -3a(x_\circ).$$

■

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, Critical points and nonlinear variational problems. Soc. Mathem. de France, mémoire, 49,vol. 20, fascicule 2, (1992).

[2] A. Ambrosetti, J. G. Azorero, Multiplicity results for nonlinear elliptic equations. J. Funct. Anal.137, 219-242, (1996) 219-242.

[3] T.Aubin; Some nonlinear problems in Riemannian Geometry. Berlin.Springer-Verlag,1998.

[4] M. Benalili, Existence and multiplicity of solutions to elliptic equations of fourth order on compact manifolds. Dynamics of PDE, vol.6, 3 (2009), 203-225.

[5] M.Benalili, Existence and multiplicity of solutions to fourth order elliptic equations with critical exponent on compact manifolds, (accepted in Bulletin of the Belgian Mathematical Society).

[6] H.Brézis and E.A.Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc.A.m.s.88(1983), 486-490.

[7] D.Caraffa, Equations elliptiques du quatrième ordre avec un exposent critiques sur les variétés Riemanniennes compactes, J. Math. Pures appl.80(9)(2001) 941-960.

[8] Z.Djadli, E.Hebey and M.Ledoux, Paneitz-Type operators and applications, Duke.Mat.Journal.104-1(2000), 129-169.

[9] P.Esposito and F.Robert, Mountain-Pass critical points for Paneitz-Branson operators, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 15, (2002), 493-517.

[10] E.Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Fondations, Diderot, Editeurs, Arts et Sciences 1997.