REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN -
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master

Option :E.D.P et Applications

Sur le Thème:

Principe de Concentration-Compacité et Applications.

Présenté par :

M^{elle} **MEKNI Hayat**

Soutenu le : 15/11/2011 devant le jury composé de:

M^r	**M. BOUCHEKIF**	Professeur à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Président**
M^r	**B.ABDELLAOUI**	Maître de conférences à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Encadreur**
M^r	**S.M. BOUGUIMA**	Professeur à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Examinateur**
M^r	**T.M.TOUAOULA**	Maître de conférences à l'U.A.B.B-Tlemcen	**Examinateur**

Année universitaire : $2010 - 2011$

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail tout d'abord :

A Allah le tout puissant, le miséricordieux. et à son Prophète Mohamed (P.S.L).

*A la mémoire de mon père qui me manque tellement et que j'ai tant aimé qu'il assiste à ma soutenance. Que **Allah** tout puissant lui accorde sa sainte miséricorde et l'accueille dans son vaste paradis.*

*A ma chère maman et mon frère **Noureddine** et à ma soeur.*

*A mon oncle **Abdelkader** et mes cousins.*

A toute ma famille.

*A Mes amies qui me connaissent de prêt ou de loin et spécialement :*Imane, Hafida, Hayat Tizi, Nadjat, Oum Elkheir, et Soumia

A toute ma promotion 2010-2011.

Et à tous ceux qui me sont chers.

Hayat

Remerciements

Avant tous je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force, le courage et la patience pour terminer ce mémoire .

J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude en particulier à mon encadreur monsieur **B.Abdellaoui** qui a dirigé ce travail, de m'avoir encadré et proposé un sujet aussi passionnant et intéressant. Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissant. Sa compétence et ses conseils m'ont été d'un grand secours.

Mes vifs remerciements vont à monsieur **M.Bouchekif** ,mon professeur et le responsable de la formation Master qui a honoré ce travail en acceptant de présider le jury.

Je remercie très respectueusement monsieur **S.M.Bouguima** et monsieur **T. M. Touaoula** qui ont consacré leur temps à bien examiner et juger mon travail d'une façon minutieuse.

D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique du Département de Mathématiques surtout le Chef du Département monsieur **M.Mebkhoute** pour son soutien pendant les cinq années.

En fin, un grand merci à toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de Cette étude.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous étudions des problèmes elliptiques quasi linéaires concernant le $p-Laplacien$ avec le potentiel de $Hardy$ et faisant intervenir l'exposant critique de Sobolev, où on perd la compacité. Tout d'abord, on présente une nouvelle méthode,appelé *le principe de Concentration-Compacité*. Ce principe est employé pour surmonter cette difficulté. les résultats d'existence et de non-existence sont d'abord prouvés pour un problème avec un terme concave, puis pour un problème de Perturbation.

Abstract:

In this memory, we study a quasilinear elliptic equation involving the p-Laplacian with the Hardy-type singular potential and critical nonlinearity. where we loss the compactness. First of all, we present a new method,called *the Concentration-Compactness principle*. This principle is used to overcome these difficultie. Existence and non-existence results are first proved for the equation with a concave singular term, then for perturbed problems.

les mots clés: *Injections de Sobolev, méthodes variationnelles, principe d'Ekeland, la suite de Palais-Smale, concentration par compacité, problème quasilinéaire, l'exposant critique, Inégalité de $Hardy$, Inégalité de Picone, Perturbation.*

Taible des matières

Notations

- $\mathbb{R}^N$: Un espace Euclidien de dimension N
- Si $x, y \in \mathbb{R}^N$alors $x.y$ est le produit scalair dans $\mathbb{R}^N$, c-à-d:

$x = (x_1, ..., x_N)$, et $y = (y_1, ..., y_N)$, alors $x.y = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i.y_i$

- Si $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice , et $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$.
- $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$
- Si $E \subset \mathbb{R}^N$, alors $|E|$est la mesure de Lebesgue .
- $B(x; r)$ est la boule dans $\mathbb{R}^N$ de centre x et de rayon r.
- ω_N : la mesure de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$ i.e, $\omega_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$ avec Γ la fonction de *Gamma d'Euler* usuelle.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné , alors $\partial\Omega$ désigne sa frantière
- $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots , \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^t$ est le gradiant de la fonction u : $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
- Δu: est le laplacien de la fonction u: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ c-à-d: $\triangle u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \mathrm{div}(\nabla u)$
- $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ est le p-laplacien.
- p' est l'exposant conjugé de p tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

- p^* est l'exposant critique tel que : $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
- $\omega \subset\subset \Omega$: ω est un ouvert de Ω tel que $\varpi \subset \Omega$ et ϖ est compact.
- X' : Espace dual de X.
- $<,>$: Produit scalaire de $\mathbb{R}^N$ / Dualité $X',\ X$.
- $C^0(\Omega)$:est l'espace des fonctions continues sur Ω.
- $C^k(\Omega)$:est l'espace des fonctions k fois continuement différentiables sur Ω;$(k \in \mathbb{N})$
- $C^\infty(\Omega) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\Omega)$
- $C_0^\infty(\Omega)$:est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω
- $L^p(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \text{ est mesurable }, \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\right\}$ pour $1 \leq p < \infty$
- $L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}|u \text{ est mesurable }, \exists C \text{ tel que } |u(x)| < C, \text{ p.p } x \in \Omega\}$
- $L^{p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $L^p(\Omega)$.
- $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$: Completion de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$
- $\mathcal{M}(\Omega)$: Espace de mesures de *Radon* dans Ω.

Introduction Générale:

Dans le calcul des variations ou en physique mathématique, les problèmes de minimisation sont posés sur des différents domaines. La grande difficulté c'est poser les problèmes de minimisation dans des domains non bornés comme $\mathbb{R}^N$ par exemple où on perd la compacitè. Cette difficulté de perte de compacité étant illustrée par exemple dans le fait que le théorème de *Rellich-Kondrakov* n'est plus valide sur $\mathbb{R}^N$.

Ce mémoire est consacré à l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaire avec un comportement critique où les méthodes classiques de compacité ne sont pas applicables. On peut citer les cas suivants :

- Problèmes faisant intervenir l'exposant critique de Sobolev.
- Problèmes quasilineaires avec le poids de Hardy.
- Problèmes posés dans $\mathbb{R}^N$.

Le modèle sera le problème suivant :

$$(P) : \begin{cases} -\Delta_p u \equiv div(|\nabla u|^{p-2} \ \nabla u) := \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} |u|^{r-1} \ u + g(x) |u|^{p^*-2} \ u \ \text{ dans } \mathbb{R}^N. \\ \qquad\qquad\qquad u(x) > 0 \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Où $N \geq 3, \ 1 < p < N, \ 0 < r \leq p-1$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

dont l'énergie s'écrit :

$$J(u) := \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx - \frac{\lambda}{r+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{|x|^p} |u|^{r+1} \, dx - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p^*} \, dx$$

Étant donnée la structure variationnelle de ces problèmes, les solutions cherchées correspondant aux points critiques de J, elles sont des solutions de l'équation $J'(u) = 0$.

La difficulté principale commune de tous ces problèmes est que l'injection $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte.

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode générale, appelée *la méthode de concentration-compacité* qui permet de pallier cette difficulté , ainsi de résoudre les problèmes posés dans des domains non bornés.

Ce travail est composé de trois chapitres:

- Dans le premier chapitre, nous faisons quelques rappels sur les espaces de Sobolev, nous nous baserons principalement sur le livre de $H.Brezis$[5]. Puis nous citons quelques outils de base divers résultats qu'il est bon de connaître lorsque l'on aborde l'étude des problèmes non linéaires par les méthodes variationnelles.

- Le second chapitre, nous exposons en détail le principe de *concentration-compacité.* il est composé de deux lemmes .
  ce chapitre fait partie de les articles [8],[9] ou bien [10].

- Le troisième chapitre traite brièvement du problèmes elliptiques quasilinéaires faisant intervenir l'exposant critique de Sobolev, concernant le $p-$laplacien.
  Le contenu de ce chapitre n'est autre qu'une présentation détaillée et développée de l'article [1].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons présenter un certain nombre de définitions ,notations, et énoncer des théorèmes qui seront utilisés à un moment ou un autre dans ce travail.

1.1 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées -au sens faible- sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.1.1 Définitions et Quelques Propriétés

Définition 1.1 *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$,et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$W^{1,p}(\Omega)$:=$\{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, .., g_N \in L^p(\Omega)$ *tels que:*$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi, \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\tfrac{\partial u}{\partial x_i} := g_i \quad \text{et} \quad \nabla u := (g_1, g_2, .., g_N)$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois sa norme équivalente:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad (si \ \ 1 \leq p < +\infty)$$

Si $p = +\infty$,la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|.$$

Notation 1.1 *:*
On pose

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} := (u,v)_{L^2(\Omega)} + \textstyle\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \textstyle\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 1.1 *:*
- Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$; la théorie des distributions permet de donner un sens à $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est un élement de l'énorme espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$- espace qui contient en particulier $L^1_{loc}(\Omega)$). En utilisant le langage des distributions on peut dire que $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles toutes les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (au sens des dérivées-distributions)appartiennent à $L^p(\Omega.)$
- Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $p = 2$, on peut aussi définir les espaces de Sobolev par transformée de Fourier.

Proposition 1.1 *:*
-L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est:

- *un espace de Banach pour : $1 \leq p \leq \infty$.*
- *un espace réflexif pour :$1 < p < \infty$.*
- *un espace séparable pour : $1 \leq p < \infty$.*

-L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Preuve:

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $W^{1,p}(\Omega)$, alors la suite $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Puisque $L^p(\Omega)$ est complet, il existe des fonctions :$u, u_1, u_2, .., u_N$ de $L^p(\Omega)$ telles que

  $$u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \tfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to u_i \text{ dans } L^p(\Omega) \ ,\forall i = 1, .., N.$$

  Comme $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, u_n détermine une distribution T_{u_n}.
  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

  $$|T_{u_n}(\varphi) - T_u(\varphi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\, |\varphi(x)|\, dx \leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

  Où p' est l'exposant conjugué de p.
  Et par suite :

  $$T_{u_n}(\varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T_u(\varphi)$$

  De même façon pour $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$

  $$T_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}(\varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T_{u_i}(\varphi), \forall i = 1, .., N$$

  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, .., N.$,on a:

  $$T_{u_i}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} T_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}(\varphi) = -\lim_{n\to\infty} T_{u_n}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = -T_u(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(\varphi)$$

  On conclut que $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i = 1, .., N$. D'où $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, et par conséquent $W^{1,p}(\Omega)$ est complet.

- Pour $1 < p < +\infty$,l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif. En effet,l'application :

  $$T : W^{1,p}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^{N+1}$$

  définit comme suit: $u \to [u, \nabla u]$ est une isométrie. Donc $T\,(W^{1,p}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))^{N+1}$ qui est réflexif comme produit fini d'espaces réflexifs. On en déduit que $T(W^{1,p}(\Omega))$ est réflexif et donc également $W^{1,p}(\Omega)$.

- Pour $1 \leq p < +\infty$,l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable. En effet, $T(W^{1,p}(\Omega))$ est séparable, et par isométrie $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable.

■.

Le théorème suivant est une caractérisation simple des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$

Théorème 1.1 *:*
Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Il existe une constante C telle que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, .., N.$$

3. *Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < dist(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. On a*

$$\left\| u(. + h) - u \right\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

De plus, on peut prendre $C := \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)}$.

Remarque 1.2 *: Lorsque $p = 1$, les implications suivantes restent valables:* (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Voici un premier résultat de densité:

Théorème 1.2 (Friedrichs) *:*
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

- $u_{n|\Omega} \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$
- $\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega}$ *dans* $(L^p(\omega))^N$ *pour tout* $\omega \subset\subset \Omega$.

Rapplons que la notaion $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est compact.

Théorème 1.3 (Dérivation) *: Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) := \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad , \quad \forall i = 1, 2, .., N.$$

Théorème 1.4 (Dérivations d'un produit de compositions) *: Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors*

$$Gou \in W^{1,p}(\Omega) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(Gou) := (G'ou) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Théorème 1.5 (Formule de changement de variables) *: - Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $H : \Omega' \to \Omega$ une application bijective, $x = H(y)$, telle que :*

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), JacH \in L^\infty(\Omega') \quad \text{ et } JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

- Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $uoH \in W^{1,p}(\Omega')$ et :

$$\tfrac{\partial}{\partial y_j}(uoH)(y) := \textstyle\sum_{i=1}^N \tfrac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\tfrac{\partial H_i}{\partial y_j}(y). \quad \forall j = 1, 2, .., N.$$

1.1.2 Prolongement:

Il est souvent commode d'établir des propriétés des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ en commençant par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. Il est donc utile de savoir comment prolonger une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ en une fonction $\tilde{u} \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Ceci n'est pas toujours possible.

Notation 1.2 *Etant donné $x \in \mathbb{R}^N$, on écrit*

$$x = (x', x_N) \quad \text{avec} \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x' = (x_1, x_2, .., x_{N-1})$$

On note

- $\mathbb{R}^N{}_+ = \{x = (x', x_N);\ |x_N| > 0.\}$
- $\mathbb{Q} = \{x = (x', x_N);\ |x'| < 1 \text{ et } |x_N| < 1.\}$
- $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^N{}_+$
- $\mathbb{Q}_0 = \{x = (x', x_N);\ |x'| < 1 \text{ et } x_N = 0.\}$

Théorème 1.6 (Opérateur de prolongement) *:*
On suppose que Ω est de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné.Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire:

$$\begin{array}{rccc} P: & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ & u & \longmapsto & Pu \end{array}$$

tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

1. $Pu_{|\Omega} := u$
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c\,\|u\|_{L^p(\Omega)}$.
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Où c dépend seulement de Ω.

Le lemme ci-dessous permet de construire trés simplement des opérateurs de prolongement pour certains ouverts qui ne sont pas de classe C^1.

Lemme 1 (Prolongement par réflexion) *Etant donné $u \in W^{1,p}(\mathbb{Q}_+)$, on définit sur $\mathbb{Q}$ la fonction u^* prolongée par réflexion, c'est-à-dire*

$$u^*(x', x_N) := \begin{cases} u(x', x_n) \ si \ x_N > 0 \\ u(x', -x_n) \ si \ x_N < 0 \end{cases}$$

Alors $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{Q})$ et

$$\|u^*\|_{L^p(\mathbb{Q})} \leq 2 \|u\|_{L^p(\mathbb{Q}_+)}$$
$$\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{Q})} \leq 2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{Q}_+)}$$

1.1.3 Notion de Trace:

Pour une fonction $u \in C(\bar{\Omega})$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma(u) : \partial\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

En d'autre termes,$\gamma(u) = u_{|\partial\Omega}$.
Lorsque $|\partial\Omega| = 0$,l'expression :$\gamma(u) := u_{|\partial\Omega}$. n'a pas sens pour une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
La notion d'un opérateur trace donne un sens pour $u_{|\partial\Omega}$. .

Théorème 1.7 *On suppose que Ω est borné et $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, il existe un opérateur linéaire :*

$$T : \qquad W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \qquad\qquad 1 \leq p < \infty.$$

tel que:

- $Tu := u_{|\partial\Omega} \quad si \ u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$
- $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Où c dépend seulement de p et $\partial\Omega$.

Remarque 1.3 *La fonction $\gamma(u)$ est définie sur $\partial\Omega$, elle n'est pas forcément continue mais seulement $L^p(\partial\Omega)$ pour la mesure superficielle $d\sigma$.*

Le noyau de l'opérateur trace est $W_0^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire:

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma(u) = 0 \right\}.$$

1.1.4 Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2 - *Soient $m \geq 2$ un entier et soit p avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2, .., N \right\}$$

On vérifie aisement que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si et seulement si $u \in L^p(\Omega)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m$, il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On note : $D^\alpha u := g_\alpha$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$,muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach.
Pour $p = +\infty$,on a

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Notation 1.3 *On pose:$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.L'espace H^m muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}\,.$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.8 (Meyers-Serrin) *:*

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega) \text{ est dense dans } W^{m,p}(\Omega).$$

Théorème 1.9 (Densité) *:*
On suppose que Ω est de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_{n|\Omega} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, les restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ forment un sous espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.1.5 L'espace de $W_0^{1,p}$

Définition 1.3 *:*

- *soit* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_0^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
- *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si* $1 < p < \infty$.
- *on note*
$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$$
. l'espace H_0^1 *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* H^1.

Remarque 1.4 *Lorsque* $\Omega := \mathbb{R}^N$, *on sait que* $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ *dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *et par conséquent*
$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Lemme 1.1 *Soit* $1 \leq p < +\infty, u \in W^{1,p}(\Omega)$ *a le support est compact et inclus dans* Ω, *alors* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.10 *On suppose que* Ω *est de classe* C^1. *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *avec* $1 \leq p < +\infty$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$.
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Voici une autre caractérisation $W_0^{1,p}$

Théorème 1.11 *:*
On suppose que Ω *de classe* C^1. *Soit* $u \in L^p(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$, *les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. *Il existe une constante* C *telle que*
$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall i = 1, 2, .., N.$$
3. *La fonction*
$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$
appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *et dans ce cas* $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\bar{\partial u}}{\partial x_i}$.

L'inégalité ci-dessous, dite **inégalité de Poincaré**, joue un rôle important dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 1.12 (Inégalité de Poincaré:) *On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constane $c := c(\Omega, p)$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Autrement dit,sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.5 *L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω borné dans une seule direction .*

Définition 1.4 (L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$) *:*
On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut identifier L^2 et son dual.Par conséquent ,on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

avec injections continues.

On peut caractériser les éléments de $W^{-1,p'}(\Omega)$ par la proposition suivante:

Proposition 1.2 *Soit $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors il existe $f_0, f_1, .., f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telles que*

$$\langle F, v\rangle := \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

et

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|f_i\|_{Lp'(\Omega)} := \|F\|\,.$$

Si Ω est borné, on peut prendre $f_0 = 0$.

1.1.6 Injections de Sobolev:

Nous allons ici nous intéresser aux possibilités d'injecter $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ de façon continue ou même compacte dans des espaces plus simples, comme $L^p(\Omega)$ voir même, dans certains cas $C(\bar{\Omega})$.
On énonce maintemant un théorème important en pratique.

Théorème 1.13 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *:*
Soit $1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *où* p^**est donné par :*$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ *et il existe une constante* $S = S(p,N)$ *telle que*

$$S \left\|u\right\|_{L^{p^*}} \leq \left\|\nabla u\right\|_{L^p} \ ,\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Preuve: On pose $D_i = \frac{d}{dx_i}$, $\forall i = 1, ..., N$
♦**Le premier cas**: $p = 1 < N$
Soit $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ on a:

$$|u(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} D_i u(x) dx_i\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)|\, dx_i \ ,\forall i$$

On sait que

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u|\, dx_i\right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Intégrant sur $\mathbb{R}^N$,et on utilise l'énégalité de Hölder,on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u|\, dx_i\right)^{\frac{1}{N-1}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u|\, dx_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u|\, dx_i\right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 ... dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u|\, dx_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u|\, dx_i\right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 ... dx_N \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u|\, dx_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u|\, dx_i dx_1\right)^{\frac{1}{N-1}} dx_2 .. dx_N
\end{aligned}$$

Donc:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \left(\prod_{i=1}^{N} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \right)$$

On sait que

$$\forall a_1, .., a_N : \prod_{i=1}^{N} a_i \leq \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right)^N \text{ et } \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right)^2 \leq N \sum_{i=1}^{N} a_i^2$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx &\leq \left(\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_i u| \, dx \right)^N \right)^{\frac{1}{N-1}} = \frac{1}{N^{\frac{1}{N-1}}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \, dx \right)^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq \frac{1}{N^{\frac{1}{N-1}}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \, dx \right)^{\frac{N}{N-1}} \end{aligned}$$

ainsi pour C_N une constante qui dépend seulement de N on a

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C_N \|\nabla u\|_{L^1}$$

♦**Le deuxième cas** :pour $p \neq 1$:
On applique l'inégalité précédente pour $|u|^\gamma$ avec $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \||u|^\gamma\| &\leq \gamma C_N \left\| |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \right\|_{L^1} \\ &\leq \gamma C_N \left\| |u|^{\gamma-1} \right\|_{L^{p'}} \||\nabla u|\|_{L^p} \qquad \text{(d'aprés l' inégalité de Hölder)} \end{aligned}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, On choisit γ tel que $\frac{\gamma N}{N-1} = (\gamma - 1) p'$, donc $\gamma = \frac{(N-1)p}{N-p} > 0$.
Comme $\frac{\gamma N}{N-1} = (\gamma - 1) \ p' = \frac{Np}{N-p} \ = q$, donc

$$\|u\|_{L^p}^\gamma \leq \gamma C_N \|u\|_{L^q}^{\gamma-1} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\|u\|_{L^q} \leq \gamma C_N \|\nabla u\|_{L^p}$$

avec $\gamma > 0$, et $C_N = \frac{1}{N^{\frac{1}{n-1}}} > 0$. Comme conclusion en obtient que $S_N > 0$. ■.

Théorème 1.14 (Injections continues :) *:*

- *soit* $1 \leq p \leq N$*.Alors :*$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *avec injection continue ,*$\forall q \in [p, p^*]$
- *soit* $p = N$ *.Alors :*$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *avec injection continue,*$\forall q \in [N, +\infty[$
- *soit* $p > N$*.Alors :*$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *avec injection continue .De plus, pour tout* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *on a* $|u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^{1-\frac{N}{p}}\,\|\nabla u\|_{L_p}$ *, p.p* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *.*

Pour l'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, on a le résultat suivant:

Corollaire 1.1 *Soient* $m \geq 1$ *un entier et* $1 \leq p < +\infty$*. On a :*

- *si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *où* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$*.*
- *si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *,* $\forall q \in [p, +\infty[$*.*
- *si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{+\infty}(\mathbb{R}^N)$ *.*

avec injections continues. De plus , si $m - \frac{N}{p} > 0$ *n'est pas un entier, on pose*

$$k = \left[m - \frac{N}{p}\right] \text{ et } \theta = m - \frac{N}{p} - k, (0 < \theta < 1).$$

On a pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$*:*

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k.$$

et

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}\,|x-y|^\alpha \quad pp\ x, y \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| = k.$$

En particulier,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N).$$

Remarque 1.6 *:*

1. *si l'on remplace* $\mathbb{R}^N$ *par* Ω *un ouvert de classe* C^1 *avec* $\partial\Omega$ *borné, ou bien* $\Omega = {\mathbb{R}^N}_+$ *dans* ***le théorème (1.14)****, on a les même injections , sauf dans le cas* $p < N$*, l'injection devient :*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega).$$
2. *la conclusion du (****corollaire 1.1****) reste vraie si l'on remplace* $\mathbb{R}^N$ *par* Ω*.*

Un autre résultat particuliérement important dans l'étude des méthodes variationnelles, c'est le théorème de **Rellich-Kondrachov** qui concerne la compacité de l'injection des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ dans certains espaces $L^q(\Omega)$.

Théorème 1.15 (Rellich-Kondrachov) *:*
On suppose Ω *borné de classe* C^1*, on a:*

- *Si* $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad , \forall q \in [1, p^*[$.
- *Si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad , \forall q \in [1, +\infty[$.
- *Si* $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

avec injections compactes .

Remarque 1.7 *:*
Si l'espace $F \hookrightarrow$ *dans l'espace* G *, cela signifie que : de toute suite bornée de* F*, on peut extraire un sous suite qui converge faiblement dans* F*, et fortement dans* G*.*

1.2 Méthodes Variationnelles:

1.2.1 Introduction

L'essentiel de cette section sera consacré à la présentation de méthodes variationnelles et à leur application pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques. Cette section est aussi l'occasion d'introduire des définitions et des notations qui seront utilisées par la suite dans ce travail. Considérons le problème :

$$(P)\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné régulier, $N \geq 2, p > 1$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière.

On s'intéresse aux solutions faibles non triviales $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on pose $H := W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.5 *:*
On dit que u est une solution faible du problème (P) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Utiliser une méthode variationnelle en analyse non linéaire signifie que l'on va chercher une solution sous forme d'un point critique d'une fonctionnelle associée. Ici, la fonctionnelle associée à (P) est :$J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega F(u) \qquad \text{Où: } F(u) := \int_0^u f(t)dt.$$

Voici la définition de point critique et de valeur critique .

Définition 1.6 *Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X, et $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$.*

- *On dit que $u \in \omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
- *On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J ,s'il existe un $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$.*

Remarque 1.8 *si u n'est pas un point critique de J,on dit que u est un point régulier de J.*

L'exemple le plus simple des points critiques est les extrémités d'une fonction $J \in C^1$, c'est à dire un point où J atteint un minimum ou un maximum. Une classe importante de fonctions atteignant leur minimum est constituée par les fonctions convexes.

Nous présentons quelques définitions utiles pour la suite :

Définition 1.7 (Fonction convexe) *:*
Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X à valeur dans $\mathbb{R}$. Elle est dite

- ***convexe*** *si* $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$,
$$J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$$

- ***strictement convexe*** *si* $\forall x, y \in X$ *avec* $x \neq y$,$\forall \lambda \in]0,1[$,
$$J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$$

Définition 1.8 (fonction coercive) *:*
Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach séparable X, est dite coercive si
$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} J(x) = +\infty.$$

Définition 1.9 (semi-continue inférieurement) *:*
Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X à valeur dans $\mathbb{R}$. Elle est dite

- ***semi-continue inférieurement*** *(en abrégé s.c.i) lorsque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X, J(x) \leq \lambda\}$ sont fermés.*

- ***faiblement semi-continue inférieurement*** *en x, si pour toute suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers x , nous avons :*
$$J(x) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf J(x_n).$$

Pour démontrer l'existence d'une solution faible pour le problème précedent, on utilise souvent des arguments de minimisation des fonctionnelles convexes. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Théorème 1.16 *:[8]*
Soient X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé non vide, et $J : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et s.c.i sur K . Si K est non-borné, supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que $J(x_n) \underset{\|x_n\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum sur K.

$$\exists u_0 \in K, \quad J(u_0) = \inf_K J(u) = \min_K J(u).$$

De plus, si J est strictement convexe, u_0 est unique.

Pour la démonstration , nous utiliserons les résultats suivants:

Proposition 1.3 *:[8]*
Soient X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé non vide, et $J : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction faiblement s.c.i. De plus si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que

$$\|x_n\| \to +\infty, \text{ on a } J(x_n) \to +\infty.$$

Alors, J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum, i.e

$$\exists u \in K, \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

Lemme 1.2 *:[8] Soient X un espace de Banach , K un convexe fermé de X, et $J : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et s.c.i, alors J est faiblement s.c.i.*

Preuve: [Démonstration du théorème 1.16]:
En utilisant le lemme1.2 et la proposition1.3, on conclut que J atteint son minimum en un point $u_0 \in K$.
Si de plus J est strictement convexe , et soit $u \in k$ tel que :

$$J(u) = J(u_0) = \min_{v \in K} J(v) = \alpha.$$

On remarque que si $u \neq u_0$, on aura:

$$\alpha \leq J(\frac{u + u_0}{2}) < \frac{1}{2}(J(u) + J(u_0) = \alpha.$$

ce qui établit l'unicité du point de minimum.
■.

1.2.2 Principe d'Ekeland

En général, une fonctionnelle bornée et s.c.i J n'atteint pas nécessairement son infimum. Par exemple, la fonction $f(x) = arctan(x)$ n'atteint ni son infimum ni son supremum sur le droite réelle.
*Le résultat suivant d'**Ekeland** montre l'existence des points qui sont **presque** des minima.*

Théorème 1.17 (Principe d'Ekeland) *:[8]*
Soient (X, d) un espace métrique complet et J une fonction s.c.i de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inferieurement, et on pose $c := \inf\limits_{x\in X} J(x)$.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe u_ε telle que

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon. \\ \forall u \in X, J(u) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considére l'épigraphe de J :

$$A := \{(x, a) \in X \times \mathbb{R}; j(x) \leq a\}$$

Puisque J est *s.c.i*, A est fermé dans . Sur $X \times \mathbb{R}$ On définit une relation d'ordre par :

$$(x, a) \preceq (y, b) \Leftrightarrow a - b + \varepsilon d(x, y) \leq 0$$

On va construire une suite d'ensembles A_n comme suit :

- Pour $x_1 \in X$ fixé tel que $c \leq J(x_1) \leq c+\varepsilon$, on pose $A_1 := \{(x, a) \in A; (x, a) \preceq (x_1, a_1)\}$ avec $a_1 := J(x_1)$.
- En supposant que (x_i, a_i) est déterminé et $A_i := \{(x, a) \in A; (x, a) \preceq (x_i, a_i)\}$

Pour $i \leq n$, on pose

- $\tilde{A_n} := \{x \in X; \exists a \in \mathbb{R} \text{ telque } (x, a) \in A_n\}$
- $c_n := \inf\limits_{x\in \tilde{A_n}} J(u)$

Supposons un instant que $a_i > c_i$ pour $i \leq n$; il est clair qu'on peut fixer $(x_{n+1}, a_{n+1}) \in A_n$ tel que :

$$0 \leq J(x_{n+1}) - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n); a_{n+1} := J(x_{n+1}) \tag{1.1}$$

On pose ensuite $A_{n+1} := \{(x, a); (x, a) \preceq (x_{n+1}, a_{n+1})\}$ et on vérifie que

$$A_n \subset A_n \text{ et que } c \leq c_n \leq c_{n+1} := \inf\limits_{\tilde{A}_{n+1}} J(u)$$

D'où, en utilisant les relations (1.1) :

$$0 \leq a_{n+1} - c_{n+1} \leq a_{n+1} - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n) \leq 2^{-n}(a_1 - c_1)$$

Par ailleurs,dire que $(x,a) \in A_{n+1}$ signifie que: $a - a_{n+1} + \varepsilon d(x, x_{n+1}) \leq 0$,on en conclut que:

$$\varepsilon d(x, x_{n+1}) \leq a_{n+1} - a \leq a_{n+1} - J(x) \leq a_{n+1} - c_{n+1}$$

Et par conséquent :

$$d(x, x_{n+1}) + |a - a_{n+1}| \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) 2^{-n}(a_1 - c_1)$$

Ce qui implique que le diamètre de A_{n+1} tend vers zéro . Comme A est complet, il existe un unique $(u,b) \in A$ tel que :

$$\{(u,b)\} = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

Soit $(x,a) \in A$ tel que $(x,a) \preceq (u,b)$; alors on a pour tout $n \geq 1, (x,a) \preceq (x_n, a_n)$, ce qui implique que $(x,a) \in \bigcap\limits_{n \geq 1} A_n$ c'est-à-dire $(x,a) = (u,b)$.
Cela signifie que (u,b) est minimal dans A :

$$(x,a) \in A \text{ et } (x,a) \preceq (u,b) \Rightarrow (x,a) = (u,b)$$

D'autre part on a $(u, J(u)) \preceq (u,b)$ et compte tenu du fait que (u,b) est minimal dans A , on conclut que $b = J(u)$. Ainsi on voit que $(u, J(u))$ est minimal dans A , c'est-à-dire que:

$$(x,a) \in A, (x,a) \neq (u, J(u)) \Rightarrow a - J(u) + \varepsilon d(x,u) > 0.$$

En particulier , en prenant $a = J(u)$ et $x \neq u$, et remarquant que $J(u) \leq J(x_1) \leq c + \varepsilon$. On conclut la démonstration du lemme.
S'il existe un entier $n \geq 1$ telque $c_n = a_n = J(x_n)$, alors $A_n = \{(x_n, a_n)\}$. En effet, $(x,a) \in A$ et $(x,a) \preceq (x_n, a_n)$ signifie, par la définition de la relation $(\preceq)$:

$$a - a_n + \varepsilon d(x, x_n) \leq 0, c_n = a_n = J(x_n) \leq J(x) \leq a$$

On en déduit que $a = a_n$ et $x = x_n$. On pose alors $(u,b) = (x_n, a_n)$ et on vérifie que (u,b) est minimal dans A comme ci-dessus. ■

Comme corollaire du principe d'Ekeland, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.2 *: Soient X un espace de Banach ,et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. On suppose que J est bornée inférieurement, alors il existe une suite de minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de J dans X telle que :*

$$J(u_n) \to \inf_X J \qquad et \qquad J'(u_n) \to 0 \textit{ dans } X', \textit{ lorsque } n \to +\infty$$

1.2.3 La Suite de Palais-Smale

Par le principe d'Ekeland, on obtient qu'il existe une suite de **Palais-Smale** pour la fonctionnelle J.

Définition 1.10 (La Suite de Palais-Smale) *:*
Une suite $(u_n)_n \subset X$ telle que :

$$J(u_n) \to c \;\; \text{dans } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad J'(u_n) \to 0 \;\; \text{dans } X', \; \text{le dual de } X$$

est appelée une suite de ***Palais-Smale*** *au niveau c, en abrégé $(PS)_c$.*

Définition 1.11 (La Condition de Palais-Smale) *:*
Soient X un espace de Banach, et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite $(u_n)_n \subset X$ telle que :

$$J(u_n) \to c \;\; \text{dans } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad J'(u_n) \to 0 \;\; \text{dans } X'.$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

1.2.4 Théorème du Col

Pour une fonctionnelle J qui n'est pas bornée (ni majorée,ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points ***selles****. Ces points sont déterminées par un argument de type* ***min-max****, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne, [en Anglais: mountain pass theorem].*

Théorème 1.18 *(Théorème de Ambrosetti-Rabinowitz):[16]*
Soient X un espace de Banach, et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais -Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :

- *Il existe $R > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\|u\| = R$ alors $J(u) \geq \alpha$.*
- *Il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ alors $J(u_0) < \alpha$.*

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$. De façon plus précise, si on pose

- $P := \{p \in C([0,1], X), \; p(0) = 0, \; p(1) = u_0\}$
- $c := \inf\limits_{p \in P} \max\limits_{t \in [0,1]} J\left(p(t)\right)$

Alors c est une valeur critique de J, et $c \geq \alpha$.

Chapitre 2

Principe de Concentration-Compacité

*Cette méthode introduite par **P.L.Lions** dans [9] et [10] est l'une des méthodes les plus puissantes pour traiter les problèmes variationnelles posés dans des domaines non bornés, par exemple $\mathbb{R}^N$ ou sous l 'existences des exposants critiques ou des injections non-compactes. Tout d'abord nous allons regarder quelques rappels sur les théorie de la mesure, avant d'énoncer les deux lemmes de concentration compacité.*

2.1 Quelques Rappels sur La Théorie de la Mesure

Définition 2.1 *: Soit X un espace localement compact. On appelle mesure de Radon sur X toute forme linéaire continue μ sur $C_c(X, \mathbb{R}^N)$ dans le sens :*

$$\forall K \in X, \ \exists M_K, \ \text{tel que} \ |\mu(\phi)| \leq M_K \|\phi\|_\infty$$

On note par $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace de mesures de *Radon* .

Définition 2.2 *:*
*Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable . On dit qu'une mesure ν est **absolument continue** par rapport à μ, (on note $\nu \ll \mu$) si toute ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$, on a:*

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Définition 2.3 *On dit que μ est une mesure **discrète**, s'il existe une suite des points $\{x_j\}_{j \in J} \subset \bar{\Omega}$ et des réels $\{\mu_j\}_{j \in J} \subset (0, +\infty)$, tels que :*

$$\mu = \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

Théorème 2.1 (Théorème de Radon-Nikodym) *:[6]*
Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Il y a équivalence entre :

1. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$
2. $\exists f \in L^1_{\mathbb{R}^N{}_+}(\mu)$ *telle que* $\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \int_A f d\mu.$

la fonction f est appelée "*la fonction de densité* de la mesure ν par rapport à μ.

Définition 2.4 *On dit qu'une suite de mesure $(\mu)_n$ converge $* - faiblement$ vers μ si :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu = \langle \mu, \phi \rangle , \qquad \forall \varphi \in C_c.$$

on écrira alors :

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu.$$

2.2 Le Premier Lemme et sa Démonstration

Lemme 2.1 *:*
Soient μ et ν deux mesures positives et bornées dans $\bar{\Omega}$ telles que :pour $1 \leq p < r < \infty$, il existe une constante $c > 0$:

$$\left(\int_\Omega |\varphi|^r \, d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_\Omega |\varphi|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Alors, il existe $\{x_j\}_{j\in J} \subset \bar{\Omega}$, et $\{\nu_j\}_{j\in J} \subset (0, +\infty)$, avec $|J| < \infty$ telles que

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \quad , \ et\ \mu \geq C^{-p} \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p}{r}} \delta_{x_j}.$$

Où : δ_{x_j} est la mesure de Dirac au point x_j.

Preuve:
Par raison de densité, en appliquant l'inégalité (2.1) pour la fonction :

$$\varphi := \chi_A \quad ,\text{où } A \text{ est un ensemble borélien de } \Omega.$$

On trouve que :

$$\left(\int_\Omega \chi_A d\nu\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_\Omega \chi_A d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \left(\int_A d\nu\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_A d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow (\nu(A))^{\frac{1}{r}} \leq C(\mu(A))^{\frac{1}{p}}$$

Donc, $\nu(A) \leq C^r(\mu(A))^{\frac{r}{p}}$
Ceci est équivalent à dire que la mesure ν est *absolument continue* par rapport à μ. D'aprés le théorème de *Radon-Nikodym*, il existe une fonction positive $f \in L^1(d\mu)$ telle que

$$\nu := f\mu \qquad i.e \qquad \int_\Omega \varphi d\nu = \int_\Omega \varphi f d\mu$$

En suivant *la décomposition de Lebesgue* de μ par rapport à ν:

$$\mu = g\nu + \sigma$$

où:

- $g \in L^1(d\nu), g \geq 0.$
- σ est une mesure positive, bornée et singulière par rapport à ν , c'est-à-dire :
  si K est le support de σ, alors $\nu(K) = 0$.

En appliquant (2.1) pour la fonction

$$\varphi_n = g^{\frac{1}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\psi$$

où ψ est une fonction mesurable bornée arbitraire, on aura

$$\left(\int_\Omega |\varphi_n|^r\, d\nu\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_\Omega g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\, |\psi|^r\, d\nu\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_\Omega g^{\frac{p}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\, |\psi|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\sigma \equiv 0$ .Donc $d\mu = gd\nu$, de plus si on note $\nu_n := g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}d\nu$, on obtient que

$$\left(\int_\Omega |\psi|^r\, d\nu_n\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_\Omega |\psi|^p\, d\nu_n\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier,$\psi = \chi_{_A}$, $\forall A \subset \Omega$ un ensemble borélien, on a:

$$(\nu_n(A))^{\frac{1}{r}} \leq C(\nu_n(A))^{\frac{1}{p}}$$

Puisque $p < r$, alors soit $\nu_n(A) = 0$,soit $\nu_n(A) \geq C^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})^{-1}} = \delta > 0$.

Par conséquent, pour un point $x \in \bar{\Omega}$,on a:

$$\begin{cases} \nu_n(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \nu_n(x) \geq \delta > 0 \end{cases}$$

Ainsi, il existe un ensemble fini de points distincts $\{x_j\}_{j\in J} \subset \bar{\Omega}$, tel que

$$\begin{cases} \nu_n(x_i) \geq \delta > 0; & \text{si } i \in J. \\ \nu_n(x_i) = 0; & \text{si } i \notin J. \end{cases}$$

Cela signifie que ν_n s'écrit comme combinaison linéaire de la masse de Dirac, il est nécessaire que cette somme est finie car ν_n est bornée. En passant à la limite, on obteint lorsque $n \to +\infty$:

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}.$$

De plus, si on applique (2.1) pour les fonctions $\chi_{x_j}, j \in J$, on a

$$\mu(x_j) \geq C^{-p}(\nu(x_j))^{\frac{p}{r}} \Leftrightarrow \mu(x_j) \geq C^{-p}(\nu_j)^{\frac{p}{r}}, \quad \forall j \in J.$$

Alors

$$\mu \geq C^{-p} \sum_{j\in J} (\nu_j)^{\frac{p}{r}} \delta_{x_j}$$

■

Remarque 2.1 *on note par $\nu_n(x)$ la limite suivante : $\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_n(B(x,\varepsilon))$.*

2.3 Le Second Lemme et sa Démonstration

Le second Lemme de concentration de compacité concerne le cas limite des injections de Sobolev dans le cas des espaces $W^{1,p}(\Omega)$ et $L^{p*}(\Omega)$. Plus précisement pour $1 \leq p < +\infty$, on note $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\|\nabla u\|_{L^p}$; cet espace est muni de la norme $\|\nabla u\|_{L^p}$. l'inégalité de Sobolev implique en particulier que si $p < N$, alors $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}(\Omega)$.

le second lemme est le suivant:

Lemme 2.2 *:*
Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers u dans $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$.(i.e $u_j \rightharpoonup u$) telle que

$$\begin{aligned} |\nabla u_j|^p &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega). \\ |u_j|^{p*} &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega). \end{aligned}$$

Alors, il existe un ensemble au plus dénombrable J, des points $\{x_j\}_{j\in J} \subset \bar{\Omega}$, on a:

- $\nu = |u|^{p*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \quad , \nu_j > 0, \quad \forall j \in J$
- $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j} \quad , \mu_j > 0, \quad \forall j \in J$
- $\mu_j \geq S\nu_j^{\frac{p}{p*}}$.

Où : S est la constante de Sobolev.

Preuve
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, On pose $v_n = u_n - u$. En appliquant *l'inégalité de Sobolev* pour la fonction φv_n, on obtient:

$$S^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v_n|^{p*} |\varphi|^{p*} \, dx \right)^{\frac{1}{p*}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla (v_n \varphi)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

Où :

$$S := \inf \left\{ \|\nabla u\|_p^p \text{ telle que } : \|u\|_{p*}^p = 1, \nabla u \in L^p(\Omega \right\}.$$

On aura besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.3 (Brezis-Lieb) *:*
Soient $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p vers $f \in L^p(\Omega)$. Alors:

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to+\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p \right)$$

On remarque que v_n converge faiblement vers 0. En utilisant le lemme de Brésiz-Lieb :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega |\varphi|^{p*}|u_n|^{p*}\,dx-\int_\Omega |\varphi|^{p*}|v_n|^{p*}\,dx\right)=\int_\Omega |\varphi|^{p*}|u|^{p*}\,dx$$

Autrement dit:

$$\|\varphi v_n\|_{p*}^{p*}=\|\varphi u_n\|_{p*}^{p*}-\|\varphi u\|_{p*}^{p*}+o(1). \tag{2.3}$$

D'autre part, on a:

$$\|\nabla(\varphi v_n)\|_{L^p}=\|(\nabla\varphi)v_n+\varphi(\nabla v_n)\|_{L^p}\leq\|(\nabla\varphi)v_n\|_{L^p}+\|\varphi(\nabla v_n)\|_{L^p}.$$

Alors:

$$\|\nabla(\varphi v_n)\|_{L^p}-\|\varphi(\nabla v_n)\|_{L^p}\leq\|(\nabla\varphi)v_n\|_{L^p}$$

À la limite , on trouve que:

$$\lim_{n\to+\infty}\|(\nabla\varphi)v_n\|_{L^p}=0.\qquad \text{car}\ \ v_n\rightharpoonup 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\|\nabla(\varphi v_n)\|_{L^p}=\lim_{n\to+\infty}\|\varphi(\nabla v_n)\|_{L^p}.$$

De plus

$$\|\varphi\nabla v_n\|_p^p=\|\varphi\nabla u_n\|_p^p-\|\varphi\nabla u\|_p^p+o(1). \tag{2.4}$$

Par(2.3),(2.4) et l'inégalité (2.2), on trouve que:

$$\begin{aligned}S^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\varphi|^{p*}|u_n|^{p*}\,dx-\int_\Omega |\varphi|^{p*}|u|^{p*}\,dx+o(1)\right)^{\frac{1}{p*}} &\leq \left(\int_\Omega |\varphi|^{p}|\nabla v_n|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.\\ &\leq \left(\int_\Omega |\varphi\nabla u_n|^{p}\,dx-\int_\Omega |\varphi\nabla u|^{p}\,dx+o(1)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a, $\forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{cases}|u_n|^{p*}\overset{*}{\rightharpoonup}\nu \qquad i.e: \quad \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\psi|\,|u_n|^{p*}\,dx=\int_\Omega |\psi|\,d\nu.\\ |\nabla u_n|^{p}\overset{*}{\rightharpoonup}\mu \qquad i.e: \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\psi|\,|\nabla u_n|^{p}\,dx=\int_\Omega |\psi|\,d\mu.\end{cases}$$

Passant à la limite quand $n \to +\infty$, on arrive à l'inégalité de Hölder inversé

$$S^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|\varphi|^{p*}(d\nu-|u|^{p*}\,dx)\right)^{\frac{1}{p*}}\leq\left(\int_{\Omega}|\varphi|^{p}(d\mu-|\nabla u|^{p}\,dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

On peut appliquer le lemme (2.1), on trouve donc que:

$$\nu=|u|^{p*}+\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{xj}$$

Soit $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ une fonction verifiant :$\varphi(0)=1, 0\leq\varphi(x)\leq 1$, et le support est inclus dans la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^N$. En fixant $j\in J$, pour $\varepsilon>0$ assez petit, on considère la fonction:

$$\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$$

Appliquons à nouveau *l'inégalité de Sobolev* à la fonction $\varphi_\varepsilon u_n$,

$$\begin{aligned}S^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|\varphi_\varepsilon|^{p*}|u_n|^{p*}\,dx\right)^{\frac{1}{p*}} &\leq \left(\int_{\Omega}|\nabla(\varphi_\varepsilon u_n)|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\int_{\Omega}|\nabla\varphi_\varepsilon|^{p}|u_n|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{\Omega}|\varphi_\varepsilon|^{p}|\nabla u_n|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Lorsque $n\to+\infty$,

$$S^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|\varphi_\varepsilon|^{p*}\,d\nu\right)^{\frac{1}{p*}}\leq\left(\int_{\Omega}|\varphi_\varepsilon|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{\Omega}|\nabla\varphi_\varepsilon|^{p}|u|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le support de φ_ε est inclus dans la boule $B(x_j,\varepsilon)$, de plus $|\varphi_\varepsilon|\leq 1$ Donc

$$\nu_j^{\frac{1}{p*}}S^{\frac{1}{p}}\leq[\mu(B(x_j,\varepsilon))]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{B(x_j,\varepsilon)}|\nabla\varphi_\varepsilon|^{p}|u|^{p}\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Or, d'aprés l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_{B(x_j,\varepsilon)}|\nabla\varphi_\varepsilon|^{p}|u|^{p}\,dx &= \int_{B(x_j,\varepsilon)}\varepsilon^{-p}\left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{p}|u|^{p}\,dx\\ &\leq \varepsilon^{-p}\left(\int_{B(x_j,\varepsilon)}|u|^{p*}\,dx\right)^{\frac{p}{p*}}\left(\int_{B(x_j,\varepsilon)}\left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{N}\right)^{\frac{p}{N}}\end{aligned}$$

Puisque $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ alors il existe une constante C telle que

$$\left(\int_{B(x_j,\varepsilon)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^N\right)^{\frac{1}{N}} \leq C.$$

On deduit que

$$\nu_j^{\frac{1}{p*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left[\mu\left(B(x_j,\varepsilon)\right)\right]^{\frac{1}{p}} + C\left(\int_{B(x_j,\varepsilon)} |u|^{p*}\,dx\right)^{\frac{1}{p*}}$$

Á la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient:

$$\nu_j^{\frac{1}{p*}} S^{\frac{1}{p}} \leq (\mu(x_j))^{\frac{1}{p}} = \mu_j^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu_j \geq \nu_j^{\frac{p}{p*}} S.$$

D'une manière équivalente, on peut écrire

$$\mu \geq \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p}{p*}} \delta_{x_j} S.$$

On pose $\mu_1 = \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p}{p*}} \delta_{x_j} S.$

Comme

- $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$.
- $\mu \geq |\nabla u|^p$ car $|\nabla u|^p \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$.
- $\mu \geq \mu_1$ donc $|\nabla u|^p$ est orthogonal à μ_1.

Alors, on conclut :

$$\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J}^{N} \mu_j \delta_{x_j}.$$

■

Chapitre 3

Quelques Applications

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions des problèmes elliptiques quasilinéaires en relation avec l'inégalité de Hardy-Sobolev citée ultérieurement. Les résultats d'existence et non-existence sont d'abord prouvés pour l'opérateur $p-$ lapalcien avec un terme concave, puis pour un problème de perturbation .

Définition 3.1 *On définit l'espace $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ comme la complétude de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme suivante:*

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme le $p-$ *Laplacien* est un opérateur non-linéaire, donc on a un problème avec l'intégration par parties. Pour résoudre cette difficulté, on utilise l'inégalité intégrale suivante:

Théorème 3.1 (Inégalité de Picone) *: Soient $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tels que $u \geq 0, v \geq 0$ et $-\Delta_p v \geq 0$, v non identiquement nulle . Alors:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p}{v^{p-1}}(-\Delta_p v)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx$$

On note que $\frac{1}{|x|^p}$ est le potentiel de *Hardy*. Plus précisement , on a le résultat suivant:

Lemme 3.1 (Inégalité de Hardy-Sobolev) *: On suppose que $1 < p < N$. Alors pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \leq \Lambda_{N,p}^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \; dx \qquad \textit{avec } \Lambda_{N,p} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p.$$

La constante $\Lambda_{N,p}$ est optimale et elle n'est pas atteinte.

Preuve: La démonstration se fait en quatre étapes:

Etape 1 *On pose:*

$$w(x) := |x|^{-\frac{N-p}{p}}$$

w est une fonction radiale, d'où $-\Delta_p w = \Lambda_{N,p} \frac{w^{p-1}}{|x|^p}$. *On remarque que* $w \geq 0$ *et de plus* $-\Delta_p w \geq 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *avec* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert contenant le zéro. En utilisant l'inégalité de Picone*

$$\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \geq \int_\Omega \frac{-\Delta_p w}{w^{p-1}} |\varphi|^p \, dx = \Lambda_{N,p} \int_\Omega \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx$$

Etape 2 (L'optimalité de la constante de Hardy) *:*
On pose

$$\bar{\lambda} := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}$$

On va montrer que la meilleure constante est $\bar{\lambda} := \Lambda_{N,p}$. *Il est clair que* $\bar{\lambda} \geq \Lambda_{N,p}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. *soit U une fonction radiale définie par :*

$$U(r) := \begin{cases} A_{N,p,\varepsilon} & si \quad r \in [0,1] \\ A_{N,p,\varepsilon} r^{\frac{p-N}{p} - \varepsilon} & si \quad r > 1. \end{cases}$$

Avec $A_{N,p,\varepsilon} = \frac{p}{N-p+p\,\varepsilon}$

Sa dérivée est :

$$U'(r) := \begin{cases} 0 & si \quad r \in [0,1] \\ -r^{\frac{-N}{p} - \varepsilon} & si \quad r > 1. \end{cases}$$

Par un calcul direct, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{U^p(x)}{|x|^p} dx &= \int_{B_1} \frac{U^p(x)}{|x|^p} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \frac{U^p(x)}{|x|^p} dx \\ &= A^p_{N,p,\varepsilon} \omega_N \left(\int_0^1 r^{N-1-p} dr + \int_1^{+\infty} r^{-(1+p\,\varepsilon)} dr \right) \\ &= A^p_{N,p,\varepsilon} \omega_N \int_0^1 r^{N-1-p} dr + A^p_{N,p,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^p \, dx \end{aligned}$$

Où ω_N est la mesure de la sphère unitaire.

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on conclut que

$$\bar{\lambda} := \Lambda_{N,p}.$$

Etape 3 *on pose:*

$$\bar{\lambda}(B) := \inf_{u \in C_0^\infty(B)} \frac{\int_B |\nabla u|^p \, dx}{\int_B \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(B_r)$ et on note $\bar{\varphi}(x) := \varphi(\frac{x}{r}R)$ avec $0 < r < R$, d'où $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(B_R)$.

On pose :

$$Q_R(\varphi) := \frac{\int_{B_R} |\nabla \varphi|^p \, dx}{\int_{B_R} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx}$$

On remarque que $Q_R(\varphi) := Q_r(\bar{\varphi})$. Par conséquent, On conclut que :

$$\bar{\lambda}(B_R) = \bar{\lambda}(B_r).$$

Soit $0 < r < R$ tels que $B_r \subset \Omega \subset B_R$, alors

$$\bar{\lambda}(B_R) \leq \bar{\lambda}(\Omega) \leq \bar{\lambda}(B_r).$$

Finalement , on conclut que $\bar{\lambda}$ ne dépends pas de Ω.

Etape 4 *Par l'absurde, On suppose que la constante est atteinte ,c'est à dire il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \bar{\lambda} \frac{u^{p-1}}{|x|^p} & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

u est une fonction positive puisque $Q(u) := Q(|u|)$. Soit Ω_1 un ouvert tel que $\Omega \subset \Omega_1$. posant :

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \Omega_1 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dés lors $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$. Par définition de $\bar{\lambda}$, On a:

$$\bar{\lambda} \leq \frac{\int_{\Omega_1} |\nabla \bar{u}|^p \, dx}{\int_{\Omega_1} \frac{|\bar{u}|^p}{|x|^p} dx} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx} = \bar{\lambda}.$$

Ainsi $\bar{u}$ est une solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_p \bar{u} = \bar{\lambda}\frac{\bar{u}^{p-1}}{|x|^p} & dans \quad \Omega_1 \\ \bar{u} = 0 & sur \quad \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Par le principe du maximum fort dans [17], $\bar{u}$ serait identiquement nulle. Une contradiction avec l'hypothèse.

■

3.2 Application I :

Problème quasilinéaire avec terme concave (par rapport au $p-laplacien$)

3.2.1 Position du Problème:

Considérons le problème

$$(P_1)\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda h(x)}{|x|^p}u^q + u^{p^*-1} & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0 & ; u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Où $N \geq 3, 0 < q < p-1$, et h est une fonction positive telle que

$$\|h\|_{L^a(|x|^p dx)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h^a(x)}{|x|^p}dx\right)^{\frac{1}{a}} < +\infty \qquad \text{où } a = \frac{p}{p-q-1}$$

3.2.2 Principe de Comparaison et Application

Dans cette partie, on va présenter quelques lemmes et théorèmes nécessaires pour la suite. On commence par le principe de comparaison suivant qui est une application de l'inégalité de *Picone*:

Lemme 3.2 (Principe de comparaison) *:*
soient $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tels que

$$(1)\begin{cases} -\Delta_p u \geq \frac{\lambda h(x)}{|x|^p}u^q & dans\ \mathbb{R}^N. \\ u(x) > 0 & ; u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

et

$$(2)\begin{cases} -\Delta_p v \leq \frac{\lambda h(x)}{|x|^p}v^q & dans\ \mathbb{R}^N \\ v(x) > 0 & ; v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

avec $0 < q < p-1$ et h est une fonction non négative telle que $h \neq 0$. Alors $u \geq v$ dans $\mathbb{R}^N$.

Preuve: En utilisant (1) et (2), il résulte que

$$\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} \geq \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} u^{q-p-1} - \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} v^{q-p-1}$$

En multipliant par $w = (v^p - u^p)_+$, On trouve que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} (v^p - u^p)_+ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda h(x)}{|x|^p} u^{q-p-1} - \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} v^{q-p-1} \right) (v^p - u^p)_+ \\
&= \int_{\{v>u\}} \left(\frac{\lambda h(x)}{|x|^p} u^{q-p-1} - \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} v^{q-p-1} \right) (v^p - u^p)
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse sur h , on conclut que le terme à droite dans l'inégalité précédente est positive. D'autre part, comme $w = (v^p - u^p)_+$ alors $\nabla w = p(v^{p-1}\nabla v - u^{p-1}\nabla u)\chi_{\{v \geq u\}}$.
Donc:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} \right) w &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \left\langle \nabla u, \nabla \left(\frac{w}{u^{p-2}} \right) \right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \left\langle \nabla v, \nabla \left(\frac{w}{v^{p-2}} \right) \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \left\langle \nabla u, \frac{u^{p-2}\nabla w - (p-1)u^{p-2} w \nabla u}{u^{2(p-1)}} \right\rangle \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \left\langle \nabla v, \frac{v^{p-2}\nabla w - (p-1)v^{p-2} w \nabla v}{v^{2(p-1)}} \right\rangle \\
&= \int_{\{v>u\}} p \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - (p-1) \frac{v^p}{u^p} |\nabla u|^p - |\nabla u|^p \\
&+ \int_{\{v>u\}} p \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-2} \langle \nabla v, \nabla u \rangle - (p-1) \frac{u^p}{v^p} |\nabla v|^p - |\nabla v|^p . \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K_1(x) + \int_{\mathbb{R}^N} K_2(x)
\end{aligned}$$

Comme $u > 0, v > 0$ dans $\mathbb{R}^N$, en utilisant l'inégalité de *Picone*, $K_1 \leq 0, K_2 \leq 0$.
Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} \right) w \leq 0.$$

Par conséquent :

$$\int_{\{v>u\}} \left(\frac{\lambda h(x)}{|x|^p} u^{q-p-1} - \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} v^{q-p-1} \right) (v^p - u^p) \leq 0.$$

Sur l'ensemble $\{v > u\}$, on a $\left(\frac{\lambda h(x)}{|x|^p} u^{q-p-1} - \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} v^{q-p-1} \right) \leq 0$. Donc $|\{v > u\}| = 0$, et on déduit que $v \leq u$.

■

Le lemme suivant est une conséquence directe :

Lemme 3.3 *On considère le problème suivant:*

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} w^q & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ w(x) > 0 & ; w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Avec $q < p-1$. *et* $\|h\|_{L^a(|x|^{-p}dx)} < +\infty$. *Alors ce problème a une unique solution positive.*

3.2.3 Existence des Solutions

Les solutions $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ sont les points critiques de la fonctionnelle J_λ définit par:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{|x|^p} |u|^{q+1} \, dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \le S^{\frac{-p^*}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{p^*}{p}} .$$

Par l'inégalité de Hölder et de Hardy , on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{|x|^p} |u|^{q+1} \, dx \le C_h \Lambda_{N,p}^{-\frac{q+1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{q+1}{p}}$$

Par conséquent ,

$$J_\lambda(u) \ge \frac{1}{p} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} - \frac{\lambda c}{q+1} \|u\|^{q+1}_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} - \frac{c_1}{p^*} \|u\|^{p^*}_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Où $c = C_h \Lambda_{N,p}^{-\frac{q+1}{p}}$ et $c_1 = S^{\frac{-p^*}{p}}$.

Alors, il existe $a \in \mathbb{R}, r_0 > 0$, et $\lambda_1 > 0$ tels que; $\forall \lambda \in [0, \lambda_1]$

1. J_λ est bornée inferieurement dans la boule $B_{r_0} := \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N); \|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < r_0 \right\}$ et $I = \inf\limits_{u \in B_{r_0}} J_\lambda(u) < 0$.

2. Si $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = r_0$ alors $J_\lambda(u) \ge a > I$

Pour montrer que le minimum est atteint , on a besoin le résultat suivant:

Lemme 3.4 *:[1]*
soit $C_{(N,p,q,h)}$ tel que :

$$\frac{1}{N}s^p - \lambda\Lambda_{N,p}^{-\frac{q+1}{p}}\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*}\right)\|h\|_{L^a(|x|^{-p}dx)}\, s^{q+1} \geq S^{\frac{N}{p}} - C_{(N,p,q,h)}\lambda^{\frac{p}{p-q-1}}, \qquad \forall s > 0.$$

Alors pour toute suite $(u_n)_n \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tels que

- $J_\lambda(u) \to c < c(\lambda) \equiv \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}} - C_{(N,p,q,h)}\lambda^{\frac{p}{p-q-1}}$
- $J'_\lambda(u) \to 0$ *dans* $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))'$.

il existe une sous suite qui converge fortement dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Pour la démonstration, on utilise le résultat suivant:

Lemme 3.5 *Soit $(u_n)_n \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ une suite qui vérifie les hypothèses du lemme* (3.4) *. Alors $\forall \eta > 0$, il existe $\rho > 0$ tels que :*

$$\int_{|x|>\rho} |\nabla u_n|^p \, dx < \eta$$

Preuve du Lemma (3.4)**:**
Puisque (u_n) est une suite de Palais-Smale , elle est bornée. Quitte à extraire une sous suite (encore notée u_n) , il existe un élément de $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ noté u_0 tel que

1. $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
2. $u_n \to u_0$ dans L^r_{loc} pour tout $r \in [1, p^*)$.

D'aprés le principe de *concentration-compacité*, la suite (u_n) satisfait:

- *(i)* $\quad |\nabla u_n|^p \rightharpoonup d\mu \geq |\nabla u_0|^p + \sum_{j\in I} \mu_j \delta_{x_j}$.
- *(ii)* $\quad |u_n|^{p^*} \rightharpoonup d\nu = |u_0|^{p^*} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{x_j}$.
- *(iii)* $\quad (S\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_j. \qquad \forall j \in I.$

On localise toute les singularités par une fonction teste φ_j à support compact dans la boule $B(x_j, \varepsilon),\ j \in I$. on a

$$-div(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = \lambda \frac{h(x)}{|x|^p}|u_n|^{q-1} u_n + |u_n|^{p^*-2} u_n \tag{3.1}$$

En multipliant(3.1) par la fonction $\varphi_j u_n$ et en intégrant , on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla(\varphi_j u_n)| \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{|x|^p} |u_n|^{q+1} \varphi_j \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \varphi_j \, dx$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla(\varphi_j u_n)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi_j dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1} \; |u_n| \, |\nabla \varphi_j| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi_j dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \; |u_n| < \nabla u_n, \nabla \varphi_j > dx\end{aligned}$$

Puisque la suite (u_n) converge faiblement , et $\|h\|_{L^a(|x|^{-p})} < +\infty$, On obtient que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x) \, |u_n|^{q+1}}{|x|^p} \varphi_j \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x) \, |u_0|^{q+1}}{|x|^p} \varphi_j$$

En utilisant (i) et (ii). Lorsque $n \to +\infty$,on trouve que :

$$\int_{B(x_j,\varepsilon)} \varphi_j d\mu + \lim_{n \to +\infty} \int_{B(x_j,\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} \; |u_n| < \nabla u_n, \nabla \varphi_j > dx = \lambda \int_{B(x_j,\varepsilon)} \frac{h(x)}{|x|^p} |u_0|^{q+1} \varphi_j dx + \int_{B(x_j,\varepsilon)} \varphi_j d\nu$$

En passant à la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$

$$\varphi(x_j)\mu_j - \varphi(x_j)\nu_j = 0 \Rightarrow \delta_{x_j}\mu_j - \delta_{x_j}\nu_j = 0.$$

Donc $\sum_{j \in I} \delta_{x_j}(\nu_j - \mu_j) = 0$, ceci implique que $\nu_j = \mu_j$. D'aprés (iii), on trouve que:

$$\text{soit } \nu_j = \mu_j \geq S^{\frac{N}{p}} \qquad \text{ou bien} \quad \nu_j = \mu_j = 0.$$

On suppose qu'il existe un entier $j \in I$ tel que $\nu_j \neq 0$. Donc ,pour $\varepsilon > 0$, on a:

$$c + \varepsilon > J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p^*} < J'_\lambda(u_n); u_n >= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x) \, |u_n|^{q+1}}{|x|^p}$$

Par la définition de $C_{(N,p,q,h)}$, on trouve que:

$$c(\lambda) > c \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} - C_{(N,p,q,h)} \lambda^{\frac{p}{p-q-1}}.$$

Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse sur $c(\lambda)$. Alors $\nu_j = \mu_j = 0$ pour tout $j \in I$, et donc u_n converge fortement vers u_0 dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ■

Notons que pour λ petit, $c(\lambda) > 0$, donc, comme $I < 0$, on obtient l'existence de $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $J_\lambda(u_0) = J_\lambda(|u_0|) = I < 0$. Par conséquent du lemme 3.4, on a le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions du lemme* (3.4) *sont vérifiées, alors le problème* (P_1) *admet une solution positive pour* λ *petit.*

On pose:

$$A := \{\lambda > 0; \text{ le problème } (P_1) \text{ a une solution } \}$$

Soit $(\lambda)_n$ une suite de A, donc par un argument de monotonicité et de continuité, A est un intervalle. Le théorème suivant montre que A est bornée.

Théorème 3.3 *soit* $\lambda^* = \sup\{\lambda;\ \textit{le problème } (P_1) \textit{ a une solution } \}$ *,Donc* $\lambda^* < +\infty$.

Le théorème**3.1** est cas particulier d'un théorème géneral associé au problème suivant

$$(P_g) : \begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} u^q + g(x) u^{p^*-1} & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0 & ; u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Où g une fonction positive et bornée. Le théorème général est:

Théorème 3.4 *:[1]*
soit $\bar{\lambda}^* = \sup\{\lambda;\ \textit{le problème } (P_g) \textit{ a une solution } \}$, *donc* $\bar{\lambda}^* < +\infty$.

Preuve
Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda > 1$. Soit u_λ une solution positive du (P_1) avec λ fixé. Donc , $-\Delta u_\lambda \geq \lambda \dfrac{h(x) u_\lambda^q}{|x|^p}$. Soit v_1 la solution unique du problème suivant:

$$(P_v) : \begin{cases} -\Delta_p v = \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} v^q & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ v(x) > 0 & ; v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

On pose $v_\lambda = \lambda^{\frac{p}{p-q-1}} v_1$. Donc $-\Delta v_\lambda \leq \lambda \frac{v_\lambda^q}{|x|^p}$. Puisque u_λ est une sur-solution du problème (P_1) , on utilise le lemme de comparaison **3.2** , on obtient que $u_\lambda \geq v_\lambda$.

On considère le problème des valeurs propres suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p w = m(p^* - p) g(x) u_\lambda^{p^*-p} |w|^{p-2} w & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Soit m_1 la première valeur propre et w_1 la fonction propre associée. On a alors:

$$m_1 = \min_{w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} p^* - p) g(x) u_\lambda^{p^*-p} |w|^p \, dx}$$

Comme $u_\lambda^{p^*-p} \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ et $u_\lambda > 0$, on peut démontrer que le minimum est atteint.

Par l'identité de $Picone$, on trouve que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_1|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{-\Delta_p u_\lambda}{u_\lambda^{p-1}} w_1^p \geq 0,$$

puisque $-\Delta_p u_\lambda \geq g(x) u_\lambda^{p^*-1}$, on conclut que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_1|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_\lambda^{p^*-p} w_1^p \geq 0.$$

Comme w_1 est une fonction propre, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_1|^p \, dx = m_1 (p^* - p) \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_\lambda^{p^*-p} w_1^p$$

par conséquent :

$$m_1 \geq \frac{1}{p^* - p}$$

Par la définition de m_1 , on obtient que :

$$\frac{1}{p^* - p} \leq m_1 \leq \inf_{w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx}{(p^* - p) \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_\lambda^{p^*-p} |w|^p \, dx}$$

Comme $u_\lambda \geq \lambda^{\frac{p}{p-q-q}} v_1$, on trouve:

$$1 \leq \inf_{w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx}{\lambda^{\frac{p^*-p}{p-q-q}} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) v_1^{p^*-p} |w|^p \, dx}$$

Ainsi

$$\lambda^{\frac{p^*-p}{p-q-q}} \leq \inf_{w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} g(x) v_1^{p^*-p} |w|^p \, dx} = \bar{m}$$

Où $\bar{m}$ la première valeur propre du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= m g(x) v_1^{p^*-p} |w|^{p-2} w \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ w &\in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Donc

$$\bar{\lambda}^* \leq \bar{m}^{\frac{p-q-1}{p^*-p}}$$

Ce qui achève la preuve. ∎

Pour montrer que $\lambda^* \in A$, il faut d'abord montrer le lemme suivant:

Lemme 3.6 *:[1]*
soit u_λ la solution minimale du problème (P_1) , alors $J_\lambda(u_\lambda) < 0$.

Preuve: On fixe $\lambda_0 \in A$, et on note u_{λ_0} la solution minimale du problème (P_1) avec $\lambda = \lambda_0$.
On pose :

$$M := \left\{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), v_{\lambda_0} \leq u \leq u_{\lambda_0}\right\}$$

où v_{λ_0} est l'unique solution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \frac{\lambda_0 h(x)}{|x|^p} w^q & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ w(x) > 0, x \in \mathbb{R}^N & ; w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

M est un ensemble convexe fermé dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Puisque J_λ est *s.c.i*, bornée inferieurement et convexe dans M, il existe alors un élément $w_0 \in M$ tel que $J_{\lambda_0}(w_0) := \min\limits_{u \in M} J_{\lambda_0}(u)$.
Par conséquent , pour tout $v \in M$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_0|^{p-2} \nabla w_0 \nabla(v - w_0)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda_0 h(x) w_0^q}{|x|^p} + w_0^{p^*-1}\right)(v - w_0)dx \tag{3.2}$$

Comme $v_{\lambda_0} \leq w_0 \leq u_{\lambda_0}$, on affirme que $w_0 = u_{\lambda_0}$.Il est facile de voir que $u_{\lambda_0} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ où u_n est définie par

$$(1) : \begin{cases} -\Delta_p u_{n+1} = \frac{\lambda_0 h(x)}{|x|^p} u_n^q + u_n^{p^*-1} & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u_n(x) > 0, x \in \mathbb{R}^N & ; u_n \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

pour $n \geq 1$ et $u_0 = v_{\lambda_0}$.

Donc pour achever la preuve, on a juste à démontrer que $u_n \leq w_0$, $\forall n$. Si $n = 0$, par la définition de w_0 le résultat est vérifié. on pose $v_1 = w_0 - (u_1 - w_0)_+$, il est clair que $v_1 \in M$ car $v_{\lambda_0} \leq u_1 \leq u_{\lambda_0}$.

En utilisant l'inégalité (3.2), on obtient que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_0|^{p-2} \nabla w_0 \nabla(u_1 - w_0)_+ dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda_0 h(x) w_0^q}{|x|^p} + w_0^{p^*-1}\right)(u_1 - w_0)_+ dx$$

En multipliant l'équation dans (1) pour $n = 0$ par la fonction test $(u_1 - w_0)_+$, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla(u_1 - w_0)_+ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda_0 h(x) v\lambda_0{}^q}{|x|^p} + v\lambda_0{}^{p^*-1}\right)(u_1 - w_0)_+ dx$$

en utilisant le fait que $v_{\lambda_0} \leq w_0$, on conclut que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 + |\nabla w_0|^{p-2} \nabla w_0)\nabla(u_1 - w_0)_+ dx \leq 0 \tag{3.3}$$

On pose :

$$D_p(x,y) := |x|^{p-2}\, x + |y|^{p-2}\, y. \qquad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Alors ,

$$(2) \qquad < D_p(x,y), x - y > \geq \begin{cases} C_p\, |x-y|^p & \text{si } p \geq 2 \\ C_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{si } p < 2 \end{cases}$$

Pour la preuve de (2),voir [11].

Donc d'aprés (3.3) et (2) , on conclut que $(u_1 - w_0)_+ = 0$ et donc $u_1 \leq w_0$. Il est clair par construction, que la suite $(u_n)_n$ est décroissante, comme $u_n \leq w_0$, alors $u_{\lambda_0} \leq w_0$. Par conséquent $u_{\lambda_0} = w_0$.
Puisque $J_{\lambda_0}(w_0) \leq J_{\lambda_0}(v_{\lambda_0}) < 0$, il en résulte que $J_{\lambda_0}(u_{\lambda_0}) < 0$.
D'où le résultat. ■.

Pour terminer, on va analyser le cas $\lambda = \lambda^*$. Plus précisément, on a le résultat d'existence suivant:

Théorème 3.5 *:[1]* $\lambda^* \in A$.

Preuve: Par la definition de λ^*, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ croissante telle que $\lambda_n \uparrow \lambda^*$. On note la solution minimale du problème (P_1) par u_n. Conformément au lemme (3.6), on sait que :$J_{\lambda_n}(u_n) < 0$, ce qui implique que $\|u_{\lambda_n}\|_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq M$.
Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, il existe $u_{\lambda^*} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ la solution du problème (P_g) avec $\lambda = \lambda^*$. ■

3.2.4 Résultat de non-existence dans le cas où $h = 1$

On considère le problème suivant:

$$(P) \begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda}{|x|^p} u^q + u^{p^*-1} & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0 & ; u \in \mathcal{D}^{1,p}_{Loc}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Le résultat suivant démontre qu'il n'existe pas des solutions positives du problème (P).

Lemme 3.7 *:[1]*
Soit u_0 une solution du problème (P) avec $1 < q < p - 1$, alors $u_0 \equiv 0$

Preuve: Soit $R \geq 1$, on considère le problème suivant :

$$(P_R) : \begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda}{|x|^p} u^q + u^{p^*-1} & \text{dans } B_R(0) \\ u(x) > 0 \text{ dans } B_R(0) & ; u = 0 \text{ sur } \partial B_R(0) \end{cases}$$

On pose :

$$\lambda_R^* := \max \{\lambda > 0; \text{ le problème } (P_R) \text{ a une solution } \}$$

On peut facilement prouver que : $\lambda_R^* = R^{-\frac{p(p-q-1)}{p^*-p}} \lambda_1^*$. Passant à la limite ,on déduit que

$$\lim_{R \to +\infty} \lambda_R^* = 0.$$

Soit u_0 une solution positive du problème (P), il existe alors $R_0 >> 1$ tel que

$$\lambda_R^* = R^{-\frac{p(p-q-1)}{p^*-p}} \lambda_1^* < \lambda \qquad \text{pour } R >> R_0.$$

Par conséquent u_0 est une sur-solution du (P_R).
Soit v_λ une solution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p v_\lambda = \frac{\lambda}{|x|^p} v_\lambda^q & \text{dans } B_R(0) \\ v_\lambda > 0 \text{ dans } B_R(0) & ; v_\lambda = 0 \text{ sur } \partial B_R(0) \end{cases}$$

Il est clair que v_λ est une sous-solution du (P_R) telle que $v_\lambda \leq u_0$. Donc par un argument de monotonicité, on peut montrer qu'il existe une solution positive w du (P_R) telle que $v_\lambda \leq w \leq u_0$.

Ceci est une contradiction avec la définition de λ_R^*. ■

3.3 Application II:

Perturbation dans le terme sous-critique

On considère maintenant le problème suivant:

$$(P_2) : \begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} u^{p-1} + u^{p^*-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0, x \in \mathbb{R}^N, \qquad u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

avec $N \geq 3$, et h vérifie les même hypothèses comme dans le problème (P_1).

Notre but est de démontrer des résultats d'existence et de non-existence des solutions positives du (P_2) .

3.3.1 Résultat de non-existence:

On pose

- $Q(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} |u|^p \, dx.$
- $K := \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\}$
- $I_1 = \inf\limits_{u \in K} Q(u).$

Lemme 3.8 *:[1]*
Dans chaque cas suivante, le problème (P_2) n'a pas des solutions positives:

1. *Si $\lambda + h(x) \geq 0$ dans une boule $B_\delta(0)$, et $I_1 < 0$.*
2. *Si h est une fonction différentiable , et $< h'(x); x >$ a un signe constant.*

Preuve:

1. On suppose que $I_1 < 0$. Soit u une solution positive du problème (P_2), par la théorie de régularité des équations elliptiques, (voir [14]), on déduit que $u \in C^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$.

   Notons que $\lambda + h(x) \geq 0$ dans une boule $B_\delta(0)$, donc $-\Delta_p u \geq 0$ dans $B_\delta(0)$ (au sens des distributions) .
   Comme $u \geq 0$ et $u \neq 0$, alors d'aprés le principe de maximum fort, on obtient que $u(x) \geq c > 0$ dans une petite boule $B_{\delta_1}(0) \subset\subset B_\delta(0)$.
   Soit $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \geq 0, \|\varphi_n\|_{L^{p^*}} = 1$, une suite minimisante de I_1.

Donc, pour $n \geq n_0$, on a $Q(\varphi_n) < 0$.

En applicant l'identité de *Picone* , on trouve:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi_n|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p \, dx$$

d'où:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} |\varphi_n|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*-p} |\varphi_n|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p \, dx$$

Puisque $(\varphi_n)_n$ est minimisante de $I_1 < 0$, donc pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} |\varphi_n|^p \, dx < 0.$$

Il en résulte que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*-p} |\varphi_n|^p \, dx < 0 \qquad\qquad n \geq n_0.$$

Ce qui est une contradiction avec le fait que $u > 0$.

2. Maintenant, on suppose que h est différentiable , et $< h'(x), x >$ a un signe constant. La fonctionnelle d'énergie associée à (P_2) est définie par

$$J(u) := \frac{1}{p}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} |u|^p \, dx\right] - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx$$

Pour $t \neq 0$, on note $u_t(x) := u(\frac{x}{t})$, et on pose :$\varphi(t) := J(u_t(x))$.
Par le changement de variable $x = ty$, on trouve que

$$\varphi(t) := \frac{t^N}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dy - \frac{t^{N-p}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(ty)}{|x|^p} |u|^p \, dy - \frac{t^N}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dy.$$

On suppose que u est une solution positive du problème (P_2), donc $J'(u) = 0$, ainsi $\varphi'(1) = 0$.
Par un calcul direct, on trouve que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{Nt^{N-1}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dy - \frac{(N-p)t^{N-p-1}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(ty)}{|x|^p} |u|^p \, dy \\ &\quad - \frac{t^{N-p}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{< h'(ty), y >}{|x|^p} |u|^p \, dy - \frac{Nt^{N-1}}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dy \end{aligned}$$

Pour $t = 1$

$$\varphi'(1) = \frac{N}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dy - \frac{N-p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(y)}{|x|^p} |u|^p \, dy - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{< h'(y), y >}{|x|^p} |u|^p \, dy - \frac{N}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dy,$$

Autrement dit

$$\begin{aligned}\frac{N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dy &= \frac{N}{p}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\lambda+h(y)}{|x|^p}|u|^p\,dy+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,dy\right]\\ &= \frac{N-p}{p}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\lambda+h(y)}{|x|^p}|u|^p\,dy+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,dy\right]+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{<h'(y),y>}{|x|^p}|u|^p\,dy.\end{aligned}$$

Notons que la seule solution qui vérifie cette équation est $u=0$, une contradiction avec le fait que $u>0$.

■.

3.3.2 Résultat d'existence

On rappelle que la fonctionnalle associée à (P_2) est définie par

$$J(u):=\frac{1}{p}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\lambda+h(x)}{|x|^p}|u|^p\,dx\right]-\frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,dx$$

On suppose que h vérifie les hypothèses suivants:

- (h_0): $\lambda+h(0)>0$.
- (h_1): $h\in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
- (h_2): Pour certain c_0, $\lambda+\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\Lambda_{N,p}-c_0$.

On définit :

$$S_\lambda=\inf_{u\in K}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^p}dx\right\}$$

Le théorème suivant fournit *la condition locale de Palais-Smale* de J.

Théorème 3.6 *:[1]*
On suppose que h vérifie (h_0),(h_1),et (h_2). Par suit, on note $h(\infty):=\limsup_{|x|\to\infty}h(x)$.
Soit $(u_n)_n\subset\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ une suite de Palais-Smale de J ,i.e

$$J(u_n)\longrightarrow c<+\infty,\quad et\quad J'(u_n)\longrightarrow 0\ dans\ (\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))'.$$

Si

$$c < c^* = \frac{1}{N} \min \left\{ S_{\lambda+h(0)}^{\frac{N}{p}}, S_{\lambda+h(\infty)}^{\frac{N}{p}} \right\},$$

alors $(u_n)_n$ *possède une sous-suite convergente.*

Preuve: Soit $(u_n)_n$ une suite de Palais-Smale de J. Selon (h_1), et(h_2), la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ce qui entraîne qu'il existe une sous-suite (renomée u_n) et $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que

- $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
- $u_n \longrightarrow u_0$ dans $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), 1 \leq r < p^*$.

On applique alors le *Principe de Concentration-Compacité*

1. $|\nabla u_n|^p \rightharpoonup d\mu \geq |\nabla u_0|^p + \sum\limits_{i \in \mathcal{J}} \mu_i \delta_{x_i} + \mu_0 \delta_0$.
2. $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup d\nu = |u_0|^{p^*} + \sum\limits_{i \in \mathcal{J}} \nu_i \delta_{x_i} \nu_0 \delta_0$..
3. $S \nu_i^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_i$, pour tout $i \in \mathcal{J}$.
4. $\frac{|u_n|^p}{|x|^p} \rightharpoonup d\gamma = \frac{|u_0|^p}{|x|^p} + \gamma_0 \delta_0$.
5. $\Lambda_{N,p} \gamma_0 \leq \mu_0$.

On définit les quantités suivantes:

- $\mu_\infty = \lim\limits_{R \to +\infty} \limsup\limits_{n \to +\infty} \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^p \, dx$
- $\nu_\infty = \lim\limits_{R \to +\infty} \limsup\limits_{n \to +\infty} \int_{|x|>R} |u_n|^{p^*} \, dx$
- $\gamma_\infty = \lim\limits_{R \to +\infty} \limsup\limits_{n \to +\infty} \int_{|x|>R} \frac{|u_n|^p}{|x|^p} dx$

Soient $\varepsilon > 0$, et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ concentrée en x_i telle que:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \\ 0 & \text{si } |x - x_i| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

De plus on suppose que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$,et $|\nabla\varphi| \leq \frac{4}{\varepsilon}$.

En choisissant $(u_n\varphi)$ comme fonction test, on obtient que

$$\langle J'(u_n), u_n\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1} u_n |\nabla\varphi| - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} |u_n|^p \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \varphi.$$

Passons à limite en n, il résulte que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\nu - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} |u_0|^p \varphi + \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1} u_n |\nabla\varphi| .$$

En fin, pour $\varepsilon \to 0$,

$$\mu_i - \nu_i \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to+\infty} \langle J'(u_n), u_n\varphi\rangle = 0.$$

Donc d'aprés les propriétés de ν_i et μ_i, on déduit que soit $\nu_i = \mu_i \geq S^{\frac{N}{p}}$,soit $\nu_i = \mu_i = 0$.

Soit $R > 0$, on définit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 & si \quad |x| > R + 1. \\ 0 & si \quad |x| < R. \end{cases}$$

et $|\nabla\psi| \leq \frac{4}{R}$. Par la définition de S_λ , on a:

$$S_{\lambda+h(\infty)} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n\psi)|^p dx - (\lambda + h(\infty)) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n\psi|^p}{|x|^p} dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n\psi|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi\nabla u_n + u_n\nabla\psi|^p dx \geq (\lambda + h(\infty)) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n\psi|^p}{|x|^p} dx + S_{\lambda+h(\infty)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n\psi|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}. \tag{3.4}$$

On va prouver que

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\psi\nabla u_n + u_n\nabla\psi|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi^p |\nabla u_n|^p dx\right\} = 0. \tag{3.5}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\psi\nabla u_n + u_n\nabla\psi|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi^p |\nabla u_n|^p dx\right\} = 0.$$

Notons que pour $X, Y \in \mathbb{R}^N$, on a l'inégalité suivante

$$||X + Y|^p - |X|^p| \leq C \left(|X|^{p-1} |Y| + |Y|^p\right).$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |\psi \nabla u_n + u_n \nabla \psi|^p - \psi^p |\nabla u_n|^p \right| dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\psi \nabla u_n|^{p-1} |u_n \nabla \psi| + |u_n \nabla \psi|^p \right) dx.$$

D'aprés l'inégalité de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n| \, |\psi \nabla u_n|^{p-1} |\nabla \psi| \, dx \leq \left(\int_{R<|x|<R+1} |u_n|^p |\nabla \psi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{R<|x|<R+1} |\nabla u_n|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| \, \psi^{p-1} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla \psi| \, dx &\leq C \left(\int_{R<|x|<R+1} |u_0|^p |\nabla \psi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{R<|x|<R+1} |u_0|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{R<|x|<R+1} |\nabla \psi|^N \, dx \right)^{\frac{p}{N}} \\
&\leq \bar{C} \left(\int_{R<|x|<R+1} |u_0|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}}.
\end{aligned}$$

On conclut alors que

$$\lim_{R \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| \, \psi^{p-1} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla \psi| \, dx \leq \bar{C} \lim_{R \to +\infty} \left(\int_{R<|x|<R+1} |u_0|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} = 0.$$

De même, on peut prouver que :

$$\lim_{R \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |\nabla \psi|^p \, dx = 0.$$

Alors par (3.4) et (3.5), on déduit que:

$$\mu_\infty - (\lambda + h(\infty))\gamma_\infty \geq S_{(\lambda + h(\infty))} \nu_\infty^{\frac{p}{p^*}}.$$

Puisque $\lim_{R \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \langle J'(u_n); u_n \psi \rangle = 0$, on obtient que $\mu_\infty - (\lambda + h(\infty))\gamma_\infty \leq \nu_\infty$. Il résulte que soit $\nu_\infty = 0$, soit $\nu_\infty \geq S_{(\lambda + h(\infty))}^{\frac{N}{p}}$.

De même façon on peut traiter le cas où $x = 0$, on déduit alors que

$$\nu_0 = 0, \quad \text{ou bien} \quad \nu_0 \geq S_{(\lambda + h(0))}^{\frac{N}{p}}.$$

Il résulte finalement que

$$\begin{aligned} c &= J(u_n) - \frac{1}{p} \langle J'(u_n); u_n \rangle + o(1) \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx + o(1) \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p^*} dx + \nu_0 + \nu_\infty + \sum_{j \in \mathcal{J}} \nu_j \right\} + o(1). \end{aligned}$$

S'il existe $j \in \mathcal{J} \cup \{0, \infty\}$ tel que $\nu_j \neq 0$, alors on obtient que $c \geq c^*$, contradiction avec l'hypothèse sur c. Donc $\nu_j = \mu_j = 0, \ \forall j$ et le résultat est démontré.

■

On pose: $H := \max\{h(0), h(\infty)\}$, et soit $(w_n)_n$ une suite minimisante de $S_{(\lambda+H)}$. Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour que $c < c^*$.

Théorème 3.7 *:[1]*
On suppose que h vérifie (h_1) et (h_2) et qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que:

$$(H_1) \quad \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \frac{w^p_{\mu_0}(x)}{|x|^p} dx > H \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^p_{\mu_0}(x)}{|x|^p} dx$$

alors le problème (P_2) possède une solution positive.

Preuve: Soit $\mu_0 > 0$ fixé vérifiant l'hypothèse (H_1).
Pour $t \geq 0$,on pose

$$f(t) = J(tw_{\mu_0}) = \frac{t^p}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\mu_0}|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} w^p_{\mu_0} dx \right) - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |w_{\mu_0}|^{p^*} dx$$

On remarque facilement que f atteint son maximum pour $t_0 > 0$ et il existe certain $\varrho > 0$ tel que $J(tw_{\mu_0}) < 0$ si $||tw_{\mu_0}|| \geq \varrho$.
Par un calcul simple, on trouve que

$$t_0 = \left[\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\mu_0}|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} w^p_{\mu_0} dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_{\mu_0}|^{p^*} dx} \right]^{\frac{N-p}{p^2}}$$

et

$$J(t_0 w_{\mu_0}) = \max_{t \geq 0} J(tw_{\mu_0}) = \frac{1}{N} \left[\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\mu_0}|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda + h(x)}{|x|^p} w^p_{\mu_0} dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_{\mu_0}|^{p^*} dx} \right]^{\frac{N}{p}}$$

Utilisant (H_1) , on obtient que

$$J(t_0 w_{\mu_0}) < \frac{1}{N}\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_{\mu_0}|^p dx - (\lambda+H)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{w_{\mu_0}^p}{|x|^p}dx}{\int_{\mathbb{R}^N}|w_{\mu_0}|^{p^*}dx}\right]^{\frac{N}{p}} = \frac{1}{N}S_{(\lambda+H)}^{\frac{N}{p}} \leq c^*$$

On pose

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C([0,1], \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0)=0, J(\gamma(1))<0\right\}.$$

Soit

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)).$$

Comme $J(t_0 w_{\mu_0}) < c^*$, alors l'existence d'un point critique u_0 est assurée par *le Théorème du Col* et le théorème 3.6. Il reste à montrer qu'on peut choisir $u_0 \geq 0$.

On considère *la variété de Nehari* associée à J définie par

$$\begin{aligned} M &= \left\{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N); u \neq 0; \langle J'(u); u\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N); u \neq 0; \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\lambda+h(x)}{|x|^p}|u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}dx\right\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $u_0, |u_0| \in M$. Comme u_0 est une solution du problème (P_2) , on peut alors montrer facilement que $c = J(u_0) = \min_{u\in M} J(u)$. Par conséquent $J(|u_0|) = \min_{u\in M} J(u)$ et donc $|u_0|$ est un point critique de J. Par le principe de maximum fort, on déduit alors que $u_0 > 0$

■

Remarque 3.1 *La condition (H_1) est vérifié si $\lim_{x\to+\infty} h(x) = h(0) = 0$.*

3.4 Application III:

Perturbation dans le terme critique

Dans cette partie, on démontre un résultat d'existence d'une solution positive pour un problème où il y a une perturbation dans le terme critique, plus précisément, on considère le problème suivant:

$$(P_3)\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda}{|x|^p}u^{p-1} + k(x)u^{p^*-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0, x \in \mathbb{R}^N, \qquad\qquad u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

avec $N \geq 3$ et k une fonction positive.

On suppose que

$$k \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N) \quad \text{ et } \|k\|_\infty > \max\{k(0), k(\infty)\} \qquad (K_0)$$

Où $\qquad k(\infty) := \limsup_{|x|\to\infty} k(x).$

Comme dans la partie précédente, les solutions du (P_3) sont des points critiques d'une fonctionnelle énergie

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{p}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda}{|x|^p} |u|^p\, dx\right] - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} k(x)\, |u|^{p^*}\, dx.$$

Théorème 3.8 *:[1]*
soit $(u_n)_n \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ une suite de Palais-Smale de J_λ i.e

$$J_\lambda(u_n) \to c < \infty \qquad et \quad J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Si

$$c < \tilde{C}(\lambda) := \frac{1}{N}\min\left\{S^{\frac{N}{p}}\, \|k\|_\infty^{-\frac{N-p}{p}}\ , S_\lambda^{\frac{N}{p}}\,(k(0))^{-\frac{N-p}{p}}\ , S_\lambda^{\frac{N}{p}}\,(k(\infty))^{-\frac{N-p}{p}}\right\}$$

alors $(u_n)_n$ admet une sous suite convergente dans $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

La preuve du Théorème 3.8 est similaire à celle du Théorème3.6. Si k est une fonction radiale, on peut alors montrer le résultat suivant :

Lemme 3.9 *Définissons*

$$\tilde{c}_1(\lambda) := \frac{1}{N} S_\lambda^{\frac{N}{p}} \min\left\{ (k(0))^{-\frac{N-p}{p}} \, , (k(\infty))^{-\frac{N-p}{p}} \right\}$$

Si $(u_n)_n \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ une suite de Palais-Smale de J_λ au niveau c avec $c < \tilde{c}_1(\lambda)$, alors $(u_n)_n$ a une sous suite convergeante.

On définit:

$$b(\lambda) := \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad k(0) = k(\infty) = 0 \\ \frac{1}{N} S_\lambda^{\frac{N}{p}} \min\left\{ (k(0))^{-\frac{N-p}{p}} \, , (k(\infty))^{-\frac{N-p}{p}} \right\} & \text{si non} \end{cases}$$

Lemme 3.10 *:[1]*
Si la fonction k vérifie l'hypothèse (K_0), alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} \|k\|_\infty^{-\frac{N-p}{p}} \leq b(\lambda) \qquad \textit{pour toute } \lambda \leq \varepsilon_0.$$

et

$$\tilde{c}(\lambda) = \tilde{c} \equiv \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} \|k\|_\infty^{-\frac{N-p}{p}} \qquad \textit{pour toute } 0 < \lambda \leq \varepsilon_0.$$

Preuve: *Par l'hypothèse (K_0) et le fait que $S_\lambda \underset{\lambda \to 0}{\to} S$, on déduit que si λ suffisamment petit, alors :*

$$\frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} \|k\|_\infty^{-\frac{N-p}{p}} \leq b(\lambda)$$

d'où le résultat. ■

Par conséquent, on obtient le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.9 *Soit k une fonction positive telle que (K_0) est satisfaite. On suppose qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} k(x) w_{\mu_0}^{p^*}(x) dx > \max\{k(0) \, , k(\infty)\} \int_{\mathbb{R}^N} w_{\mu_0}^{p^*}(x) dx$$

avec w_{μ_0} est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \frac{\lambda}{|x|^p} w^{p-1} + w^{p^*-1} \ \textit{dans} \ \mathbb{R}^N \\ w(x) > 0, x \in \mathbb{R}^N, \qquad\qquad u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Alors le problème (P_3) admet une solution positive.

Preuve: la preuve est similaire à celle du théorème3.7.
■

Conclusion

La Méthode de Concentration-Compacité consiste à analyser le problème de compacité d'une suite de Plais-Smale bornée. Pour les cas critiques ,les injections compactes sont en défaut, et en général, il n'y a pas de condition de Palais-Smale global.

La Méthode de Concentration-Compacité consiste à trouver des niveaux de compacité perticuliers. Elle pertmet de résoudre des problèmes elliptiques quasilinéaires faisant intervenir l'exposant critique ou dans des domaines non bornés.
Enfin, sous des conditions sur le niveau d'énergie, on peut récupérer la compacité perdue.

On peut résumer les résultats obtenus dans ce mémoire dans le tableau suivant:

	h	Ω borné	$\Omega = \mathbb{R}^N$
$q < p-1$	n'est pas constante	existence	existence
$q < p-1$	constante	existence	non-existence
$q = p-1$	constante	non-existence dans les domaines étoilés	existence
$q > p-1$	constante	non-existence	non-existence

Problèmes Ouverts

1. le problème considéré :

$$-\Delta_p u \equiv div(|\nabla u|^{p-2} |\nabla u|) := \frac{\lambda h(x)}{|x|^p} |u|^{r-1} \ u + g(x) |u|^{p^*-1} \ u \ \text{ dans } \Omega$$

   avec Ω est un domaine borné non étoilé , l'identité de *Pohozaev* n'affirme pas qu'il n'y a pas des solutions .

2. Ω est un domaine borné et $0 \in \partial\Omega$: Problèmes d'existence, non-existence, comportement de la solution dans un voisinage de 0.

Bibliographie

[1] B.Abdellaoui, V.Felli, I.Peral , *Existence and Nonexistence Results for Quasilinear Elliptic Equations Involving The p-Laplacian*,Bollettino U.M.I ,(8) 9-B (2006) 445-484.

[2] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian*, Ann. Mat. Pura. Applicata, Vol. 182 (2003), 247–270.

[3] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems*, Mém. Soc. Math. France (N.S.), no. 49 (1992).

[4] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in some Elliptic Problems*, Journal of Functional Anal. Vol. 122, no. 2 (1994), 519-543.

[5] H. Brezis , *Analyse fonctionnelle*, Edition Dunod, paris ,(1999)

[6] M.Braine, G.Pagès , *Théorie de L'intégration*, Edition Vuibert, Paris ,(Mars 2006)

[7] J. García Azorero, I. Peral, *Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems,* J. Diff. Eq. Vol. 144 (1998), 441-476.

[8] O. Kavian , *Introduction à la théorie des points critique*, Edition : Springer, France, paris 1993

[9] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1,* Rev. Matemática Iberoamericana, 1 (1985), no. 1, 145–201.

[10] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2,* Rev. Matemática Iberoamericana, 1 (1985), no. 2, 45–121.

[11] I. Peral ,*Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian.*Second School of Non linear Functional Analysis and Applications to Differential Equations.21 April-9 May 1997.

[12] M. Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine,* Ann. Scuola. Norm. Pisa. Vol. 11 (1910), 1-144.

[13] J. Simon, *Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans* $\mathbb{R}^N$*,* Lectures Notes in Math, no. 665, P. Benilan editor, Springer Verlag, 1978.

[14] P. Tolksdorf, *Regularity for more general class of quasilinear elliptic equations,* J. Diff. Eq. Vol. 51 (1984), 126-150.

[15] S.Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with singular coefficient and critical exponent,* Adv. Diff. Equ. Vol. 1, no. 2 (1996), 241-264.

[16] M. Struwe , *variational Methods. Applications to nonlinear PDEand Hamiltonain Systems*, Edition : Springer ,(2000).

[17] J.L. Vázquez, *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations*, Applied Math. and Optimization. Vol. 12, no. 3 (1984), 191-202.

[18] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.