

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abou-Bekr Belkaid -Tlemcen
Faculté de technologie
Département de génie civil

Projet de fin d'étude:
Pour l'obtention du diplôme de master
Option : « infrastructure de base et géotéchnique - travaux publiques - »

Thème

Etude de la Non-linéarité de l'écoulement dans un milieu poreux

Présenté par **Mr boursali bilal**

Soutenu le : **02 / 10 / 2013** , devant les jury composés de :

Mr Zadjaoui Abdeljalil	Univ. Tlemcen	Président
Mr Bedjaoui MC	Univ. Tlemcen	Examineur
Mme Rouissat Nadia	Univ. Tlemcen	Examinatrice
Mr Benyelles Zoheir	Univ. Tlemcen	Encadreur
Mme Benadla Zahira	Univ. Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2012 - 2013

Dédicace

Avec l'aide du tout Puissant, j'ai pu réaliser ce modeste travail que je dédie :

A mes chers parents sur qui j'ai pu compter et me ressourcer d'affection et de bénédictions durant toute ma vie ;

A mon frère, ayoub, et mes deux sœurs souad et farida qui m'ont beaucoup soutenue et encouragée même au-delà des mers ;

A mes encadreur Mr benyelles zoheir et Mme benadla zahira qui n'ont pas cessé de m'encourager sagement aux moments de détresse;

A mes chers amis : hafid ,mohammed, younes ,abdelkader, amine, Djilali, sidehmed, riyad, otmane, yassine , hadjer, fatima, youcef, Lakhder, walid, soufiane, abdeslem ;

A toutes les personnes que j'aime.

Remerciements

Je tient tout d'abord à remercie ALLAH qui m'a poussée à réaliser ce travail

Je remercie vivement Mr benyelles zoheir chef de département de génie civil à l'Université Aboubekr Belkaid _Tlemcen, qui a bien voulu accepter de me prendre en charge pour réaliser ce modeste travail dont le mérite lui revient grâce à son aide à la fois matérielle et morale, ses conseils précieux et sa gratitude.

Je remercie aussi Zahira Benadla pour la Direction scientifique de ce travail, leur haute compétence, qu'elle trouve Ici l'expression de mes profondes gratitude.

Je remercie vivement les membres de mon jury : Zadjouï abdeljalil, maître de conférence "A" à l'Université Aboubekr Belkaid _Tlemcen, d'avoir accepté de présider le jury, Mr bedjaoui MC chargée de cours à l'Université Aboubekr Belkaid _Tlemcen, et Mme rouissat N Chargé de cours à l'Université Aboubekr Belkaid_ Tlemcen, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Il m'est agréable de remercier abdeljalil zadjouï , zahira benadla , rouissat nadia , tahar berrabah amina , Ghazali sabah pour ses concours précieux à un moment sensible du déroulement de ma thèse.

Je me dois de remercier mes enseignants préférés Mr boukli hacene sidi mohammed el amine, Mr zendagui djawad , Mr djafour mustafa , pour l'aide permanente qu'ils m'ont apportée tout au long de ma vie à l'université

Résumé :

Le but de ce travail permet de résoudre l'équation de l'écoulement dans le sol non saturé,

Le deuxième but est d'utiliser un code de calcul basé sur la méthode des éléments finis, pour résoudre cette équation non linéaire dans le milieu non saturé.

Ce code permet de calculer des grandeurs telles que : la charge hydraulique, la pression interstitielle le gradient et la vitesse d'écoulement.

Notre modélisation numérique par la méthode des éléments finis établit par un code s'intitule « ANSYS » version 11

Mots clés : élément finis – écoulement – milieu poreux – non linéaire – partiellement saturée – transitoire – succion

ABSTRACT

The aim of this work made it possible to solve the equation of flow in the unsaturated soil,

The second goal is to use a computer code based on the finite element method to solve this nonlinear equation in unsaturated media.

This code is used to calculate parameters such as: the hydraulic load, pore pressure gradient and flow velocity.

Our numerical modeling by the finite element method established by a code called "ANSYS" version 11

Keywords: finite element _ flow _ porous medium _ nonlinear _ partially saturated _ Transitional _ suction

ملخص

الهدف من هذا العمل يمكن من حل معادلة التدفق في التربة غير المشبعة

الهدف الثاني هو استخدام برنامج حساب على أساس طريقة العناصر المحددة في حل هذه المعادلة غير الخطية في التربة غير المشبعة.

ويستخدم هذا البرنامج لحساب المقادير مثل: الحمل الهيدروليكي، المسام التدرج الضغط وسرعة تدفق.

لدينا النمذجة العددية من خلال طريقة العناصر المحدودة التي وضعتها مدونة تسمى "ANSYS" الإصدار 11

كلمات البحث: العناصر المحدودة - تدفق - مسامية متوسطة - غير الخطية - المشبعة جزئياً - الانتقالية - شفت

TABLE DES MATIERES

I	INTRODUCTION GENERALE	1
I.1	Introduction :	1
I.2	Problématique :	1
I.3	Méthode de résolution du problème :	2
II	Introduction aux problèmes d'écoulements dans les milieux poreux saturée.....	3
II.1	Rappels géotechniques :	3
II.1.1	Représentation physique du sol :	3
II.1.2	L'eau dans le sol :	3
II.1.3	La porosité :	4
II.1.4	La perméabilité :	4
II.1.5	Vitesse de l'eau dans le sol :	5
II.2	Définitions fondamentales :	5
II.2.1	Milieu poreux :	5
II.2.2	Homogénéité isotrope et anisotrope :	6
II.2.3	Milieu saturé / non saturé en eau :	6
II.3	Historique sur les écoulements dans les milieux poreux :	6
II.4	Aperçu générale sur le processus de l'écoulement dans un milieu poreux :	7
II.5	Écoulements en milieu poreux saturé :	8
II.6	Loi de DARCY :	8
II.7	Domaine de validité de la loi de darcy :	9
II.8	Les limitations de la loi de Darcy :	9
II.9	Les équations de l'écoulement en milieu saturé (loi de Laplace) :	10
III	Écoulement dans les milieux poreux non saturés « caractéristiques générales et description du phénomène »	11
III.1	Introduction :	11
III.2	Caractérisation des sols non saturés :	11
III.3	Principes des écoulements en milieu poreux non saturés :	12
III.3.1	Caractéristiques générales :	12
III.3.2	Phénomène de succion :	12
III.3.3	Description du phénomène d'infiltration en zone non saturé :	13
III.3.4	Généralisation de la loi de darcy :	13
III.3.5	Modèle de Richards :	15
IV	Résolution numérique de l'équation d'infiltration.....	17

IV.1	Introduction :	17
IV.2	Modélisation des écoulements en milieu poreux :	17
IV.3	Formulation intégrale :	18
IV.3.1	Résidus pondérés :	18
IV.4	Méthode de GALERKIN :	19
IV.4.1	Application :	19
IV.4.2	Intégration par parties (formes intégrales faibles) :	20
IV.5	Analyse par la méthode des éléments finis :	21
IV.5.1	Introduction à la notion éléments finis :	21
IV.5.2	Calcul sur un élément de référence et isoparamétrique :	23
IV.6	Élément utilisé et transformation :	24
IV.7	Intégration numérique :	26
IV.7.1	Principe :	26
IV.7.2	Intégration à deux dimensions quadratique de Gauss:	27
IV.8	Calcul de la pression interstitielle:	28
V	Procédure d'analogie thermique.....	30
V.1	Analogie Thermique	30
V.2	.Définition des propriétés du milieu :	30
V.3	Identification des variables étudiées.....	32
V.4	Etablissement des lois de la physique :	33
V.5	CONCLUSION :	36
VI	Modélisations numériques de l'écoulement dans les milieux poreux non saturée.....	37
VI.1	Introduction :	37
VI.2	Recharge d'une nappe à surface libre :	37
VI.3	Géomètre et donnée de modèle :	37
VI.4	Le maillage :	39
VI.5	Résultats :	39
VII	Colonne de sol non saturé :	42
VII.1	Présentation du test :	42
VII.2	Résultats :	43
VII.3	Commentaires :	45
VIII	Conclusion général :	46

I INTRODUCTION GENERALE

I.1 Introduction :

Du point de vue des propriétés physiques, hydriques et mécaniques, le sol peut être considéré comme un milieu poreux. Dans le cas le plus général, il se présente comme un système comprenant trois phases que l'on retrouve dans la nature : solide, liquide et gazeuse. La phase solide est représentée par les particules du sol, la phase liquide par l'eau du sol et la phase gazeuse par l'air du sol. Les interactions physico-chimiques entre ces différentes phases font que nous sommes en présence d'un milieu très complexe. Le caractère poreux résulte de l'organisation des constituants du sol à différents niveaux Ceci fait que l'on distingue souvent l'assemblage des particules élémentaires (argiles, matières organiques, limons, sables) qui est un niveau d'organisation qui définit un premier système de porosité dit texturai en raison de l'importance qu'y prennent la constitution granulométrique et minéralogique du sol et l'agrégation des assemblages élémentaires en ensembles cohérents (1).

L'étude de l'écoulement de l'eau à travers les sols peut être importante à différents points de vue. Dans un premier cas, la quantité d'eau en mouvement peut être la considération primordiale, ce qui est, par exemple le cas lorsqu'on est en présence d'une perte d'eau provenant d'ouvrages destinés à la retenir. Dans un second cas, l'écoulement établit une configuration des pressions interstitielles qui, du fait de leur influence sur la résistance au cisaillement, peuvent être responsable de l'apparition de conditions critiques de stabilité. Dans un troisième type de problème, des modifications dans les conditions d'écoulement peuvent donner naissance à des variations de volume dans les sols où elles se produisent, lesquelles à leur tour produisent des tassements ou des soulèvements de la surface du sol (2).

I.2 Problématique :

La mécanique des sols s'est généralement intéressée dans le passé à l'étude de matériaux totalement saturés en eau ou parfaitement secs. Or en génie civil, et spécialement en ingénierie de l'environnement, on rencontre fréquemment des problèmes qui impliquent des sols ou des roches sous saturation partielle (3).

Les problèmes posés par les écoulements de l'eau à travers les sols sont :

- L'estimation du débit de l'écoulement
- La localisation du domaine sujet à l'infiltration
- Les problèmes de stabilité

Généralement en génie civil ces problèmes deviennent beaucoup plus préoccupants quand il s'agit d'étudier la stabilité des grands ouvrages car La plupart des accidents en géotechnique sont dus à la présence d'eau (2)

I.3 Méthode de résolution du problème :

L'utilisation des méthodes numériques et des logiciels des calculs donne actuellement un grand avantage pour la résolution et la compréhension des problèmes physiques complexes et surtout dans le domaine non linéaire (3).

Dans les dernières décennies, il y a eu apparition de méthodes numériques pour trouver la solution à des équations complexes. Compte tenu du développement rapide de l'informatique, ces méthodes devenues très utilisées dans plusieurs domaines notamment pour les problèmes d'écoulement dans les milieux poreux(2)

Les modèles numériques constituent aujourd'hui l'outil principal pour étudier les problèmes d'écoulement souterrain à l'échelle régionale. Ceci s'explique par le fait que le domaine souterrain est difficilement accessible et représente jusqu'à présent un domaine non encore bien cerné du point de vue hydrogéologique. Deux méthodes numériques sont classiquement utilisées pour étudier l'écoulement en milieu souterrain, il s'agit de la méthode des différences finies et de celle des éléments finis conformes. Cette dernière est plus adaptée que celle des différences finies en ce qui concerne la discrétisation spatiale de milieux à géométrie complexe. Elle fournit une approximation de la charge piézométrique sur l'ensemble du domaine modélisé ainsi que le champ de vitesse obtenu par dérivation de la charge piézométrique(1)

Si les premières applications de la méthode des éléments finis ont été orientées vers la résolution des équations d'équilibre en élasticité ou en élastoplasticité, il est très vite apparu que cette méthode pouvait aussi être utilisée pour la résolution de nombreux problèmes physiques régis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles, comme par exemple celui de la répartition de la charge hydraulique dans les écoulements en milieu poreux(1)

Cette méthode permet la résolution des problèmes très variés (anisotrope, non linéaire ...) elle s'accommode très bien aux géométries complexes et aux irrégularités et permet aussi la prise compte de divers condition aux limit

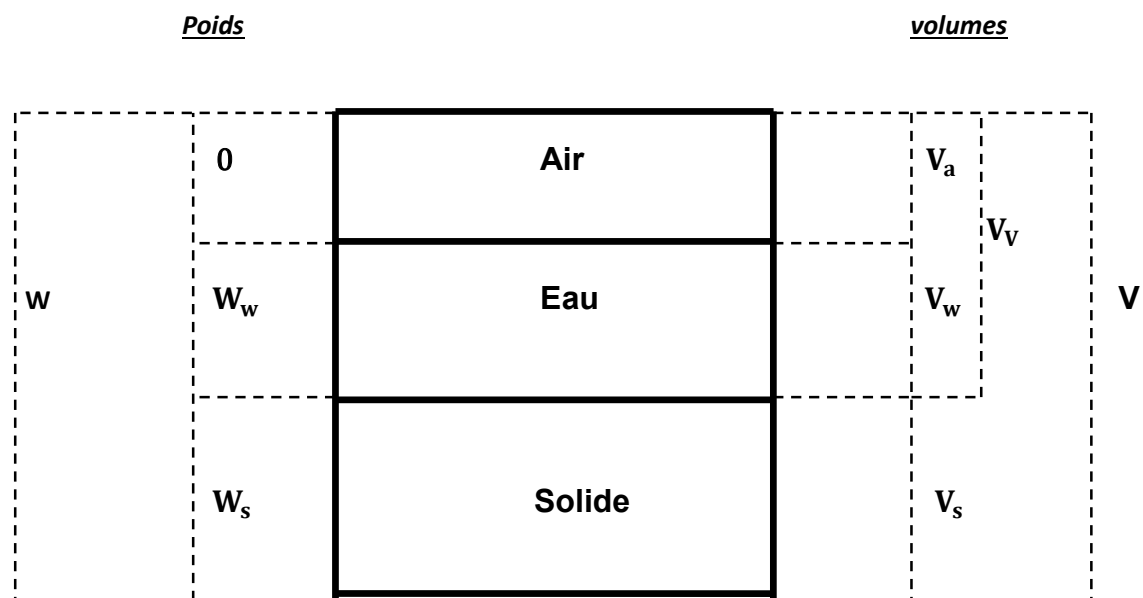
II Introduction aux problèmes d'écoulements dans les milieux poreux saturée

II.1 Rappels géotechniques :

II.1.1 Représentation physique du sol :

Avant d'analyser le comportement mécanique des sols, il est nécessaire de définir un certain nombre de caractéristiques physiques qui permettront de préciser l'importance de ces différentes phases par rapport à l'ensemble.

A cet effet, nous considérons la représentation suivante d'un sol dans laquelle les trois phases seraient séparées.



W : poids totale

W_s : poids des grains solides

W_w : poids de l'eau

V : volume total

V_s : volume des grains solides

V_w : volume de l'eau

V_a : volume de l'air

FIG II.1. Représentation physique du sol

II.1.2 L'eau dans le sol :

L'eau se présente dans le sol sous différentes formes :

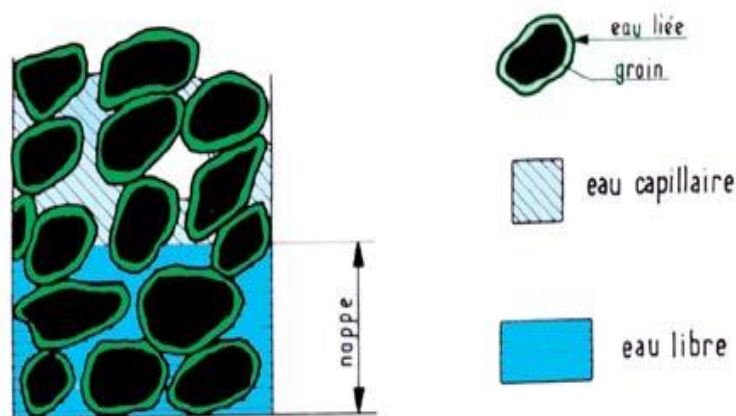
- l'eau de constitution : qui entre dans la composition chimique des minéraux dont les

particules de sol sont formées

- **l'eau liée ou absorbé** : à la surface des grains très fins, qui est orientée par les forces d'attraction moléculaire et les forces électrostatiques ; elle a une viscosité élevée et ne transmet pas les pressions

- **l'eau libre** : qui circule librement dans les pores du sol sous l'effet des forces de pesanteur

- **l'eau capillaire** : qui, dans les sols non saturés, en présence d'air ou d'autres gaz, est retenue dans les canaux les plus fins du sol par les forces capillaires.



États de l'eau dans les sols

FIG II.2 état de l'eau dans le sol

II.1.3 La porosité :

Les sols sont généralement constitués de particules solides formant un squelette autour duquel subsistent des espaces vides. Ces vides sont occupés soit par de l'air, soit par de l'eau et représentent alors la fraction du matériau poreux susceptible de contenir de l'eau et définissent ainsi la porosité. Elle représente alors une caractéristique statique des terrains et est indépendante du mouvement de l'eau qui peut s'y trouver.

Pour un échantillon donné, la porosité totale se définit comme un pourcentage de vide par rapport au volume total de l'échantillon(4).

La porosité dépend principalement de :

la forme des grains : sphériques, allongés, angulaires

la distribution des tailles

l'intensité de la cimentation de la roche

II.1.4 La perméabilité :

Le coefficient de proportionnalité entre la vitesse de l'écoulement de l'eau et le gradient

hydraulique dans un sol notée k est appelé coefficient de perméabilité du sol.

La perméabilité dépend de l'état de serrage du sol, et elle peut varier pour un même sol car elle dépend de la texture du sol, c'est-à-dire de la forme, de la dimension et de l'arrangement des particules solides, des inclusions organiques et des vides associés.

II.1.5 Vitesse de l'eau dans le sol :

L'eau qui s'écoule dans un sol circule dans les interstices entre les grains qui forment des canaux de tailles variables. Les trajectoires réelles des filets liquides sont assez tortueuses et il n'est pas possible de définir les vitesses réelles de l'eau. Comme on s'intéresse surtout au mouvement global du fluide on définit des trajectoires fictives et des vitesses moyennes.

- Soit q le débit de l'eau s'écoulant dans un tube de sol au travers d'une surface d'air totale S (grains + vides). Par définition la vitesse de décharge de l'eau dans le sol, notée v , est égale au rapport
$$V = \frac{q}{S}$$

L'équation du débit à travers une section S de sol, s'écrit alors en fonction de i et K :

$$q = K \cdot i \cdot S$$

II.2 Définitions fondamentales :

II.2.1 Milieu poreux :

Le milieu poreux est l'ensemble de grains solides ou d'agrégats autour desquels existent des espaces vides appelés pores, qui peuvent être interconnectés ou non.

Un terrain est donc dit poreux s'il contient des vides (ou des pores). Ces derniers forment à travers le massif un réseau de canaux très fins qui permettent la circulation de l'eau.

Les milieux poreux sont des milieux perméables, comportant des vides interstitiels interconnectés appelés pores, assimilables macroscopiquement à un milieu continu à la différence d'un milieu fissuré polyphasique(4).

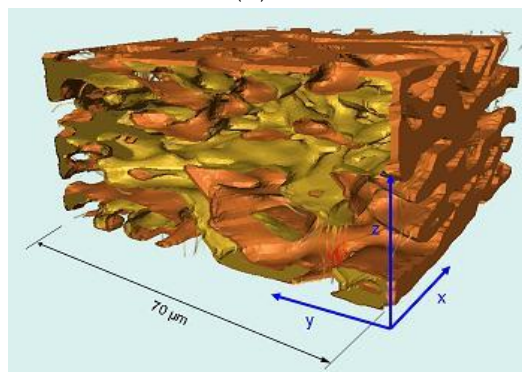


FIG II,3 exemple d'un milieu poreux

II.2.2 Homogénéité isotrope et anisotrope :

_ Un terrain est dit homogène s'il présente en tout point, dans une direction donnée, la même résistance à un écoulement de l'eau.

_ si la résistance d'un terrain à l'écoulement est la même dans toutes les directions, il est dit isotrope. Dans le cas contraire le terrain est dit anisotrope

En réalité la plupart des terrains sont anisotropes(5).

II.2.3 Milieu saturé / non saturé en eau :

Les trois états hydriques principaux des complexes eaux / sol ou air permettent de définir, le milieu saturé dont la totalité des vides (volume des vides) est remplie d'eau, le milieu non saturé est partiellement remplie d'eau.

Pour déterminer l'état du sol, on définit « S_r » le degré de saturation qui est le rapport du volume de l'eau au volume des vides(4).

Si $S_r = 0$ le milieu est dit sec

$S_r = 1$ le milieu est dit saturé

$0 < S_r < 1$ le milieu est partiellement saturé

II.3 Historique sur les écoulements dans les milieux poreux :(13)

Les premières recherches fructueuses concernant les infiltrations sont faites par darcy publiée en 1856. Les premières applications étaient limitées aux sables. L'argile était supposée imperméable. Ensuite 1886, forcheimer démontra que la distribution de la pression d'eau dans les milieux poreux et la vitesse d'écoulement pouvaient être déterminée au moyen de l'équation de Laplace. C'est vers 1900 que les méthodes de résolution de cette équation ont apparus et pouvaient être appliquées aux barrages.

En 1911 de nouvelles formules pour le calcul des infiltrations sont développées par Slichter et Hazen concurremment avec le concept du linge de saturation proposée par J.Djusten.

En 1922, Terzagui donna une explication correcte du phénomène de renard et montra, un an après, que la loi de darcy s'appliquait aux argiles. Il attira aussi l'attention avec sa thèse sur le phénomène de consolidation des argiles et la notion de pression naitra et apporta le principe unificateur qui permettait à la mécanique des sols d'exister entant que telle.

En 1937 Casagrande publia une synthèse de ses travaux connaissances sur les infiltrations à travers les barrages et démontra que la loi de Darcy et l'équation de Laplace étaient à la base de ces études

II.4 Aperçu générale sur le processus de l'écoulement dans un milieu poreux :

L'écoulement de l'eau dans un milieu poreux désigne généralement le passage de l'eau de l'extérieur vers l'intérieur du sol ainsi que sa redistribution dans la zone non saturée. Le processus de l'écoulement a été largement étudié aussi bien par les physiciens du sol que les hydrologues.

A montré que lorsque la pluie atteint la surface du sol, elle s'infiltré à une vitesse décroissante avec le temps

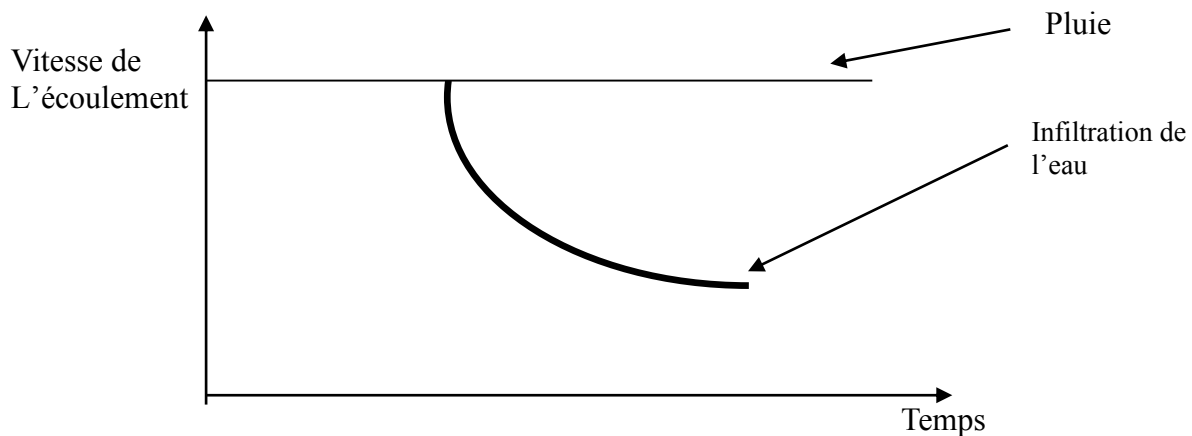


FIG II.4 décroissance de la capacité d'infiltration en fonction du temps

L'eau pèpère la surface du sol par l'action combinée des forces gravitationnelles et capillaires. Les deux force agissent dans la direction verticale et provoquent la percolation vers le bas

Le taux de l'eau qui s'écoule dans le sol dépend de plusieurs paramètres, soit l'intensité et la nature de la précipitation ; la condition de la surface du sol ; la densité ; les propriétés physique du sol (porosité, dimension des grains et des pores, teneur en eau, saturation du sol ... etc.)(6)

La circulation d'eau au voisinage ou au contact de l'infrastructure d'un ouvrage, peut mettre en danger la stabilité de ce dernier. Pour cela il est nécessaire d'étudier deux procédures déférentes :

⇒ D'une part les infiltrations ont pour conséquence des pertes d'eau dont il faudra réduire le volume à une valeur déterminée dépendante de l'économie de projet.

⇒ D'autre part, elles peuvent mettre en jeu la sécurité de l'ouvrage et compromettre sa

stabilité, si certaines précautions ne sont pas prise en compte, contre les risques qu'entraînent de grands gradients hydrauliques et de grandes pressions interstitielles(9).

II.5 Ecoulements en milieu poreux saturé :

La description de la dynamique de la phase liquide d'un sol repose sur l'analyse des diverses forces qui la conditionnent et de la cinématique qui en résulte. Elle peut être plus ou moins complexe, selon les caractéristiques du milieu dans lequel cette dynamique est étudiée. L'attention se porte ainsi tout d'abord sur la situation dans laquelle cette description est la plus simple, soit sur les écoulements en milieu saturé. Ces derniers forment en effet un cas particulier des écoulements en milieu variablement saturé.

La description des transferts de l'eau dans le sol repose sur l'association d'une loi de comportement dynamique et d'une loi de continuité. La loi dynamique traduit en effet l'existence, en régime permanent, d'une relation univoque entre les forces que subit une particule de fluide et ses caractéristiques cinématiques, à savoir vitesse et accélération. Lorsque l'intensité des termes de cette loi dynamique évolue dans le temps, soit en régime variable, il devient nécessaire de recourir à la loi de continuité, qui permet, par l'application du principe de conservation de la masse, de décrire complètement le phénomène sur le plan quantitatif.

Pour un sol saturé, le coefficient de perméabilité est supposé K constant, et ceci est vérifié dans la plupart des cas.

Dans un sol non saturé, l'écoulement est également dû au gradient de la charge hydraulique totale.

Dans les deux cas, l'eau s'écoule d'un point de haute charge hydraulique vers un point de basse charge hydraulique, que la pression d'eau soit positive (dans un sol saturé) ou négative (dans un sol non saturé).

II.6 Loi de DARCY :

Le savant français, HENRY DARCY, réussissait en 1856, son expérience classique sur l'écoulement vertical de l'eau au travers d'un échantillon de sable saturée d'eau. La loi formulée au cours de l'expérience représente la base des solutions théoriques actuelles au problème de l'écoulement des fluides en milieu poreux saturé.

En constatant que le débit est proportionnel à une constante caractérisant le sol, darcy a proposé la formule empirique suivant qui porte le nom de loi de darcy(8) :

$$\frac{Q}{S} = k \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta l}$$

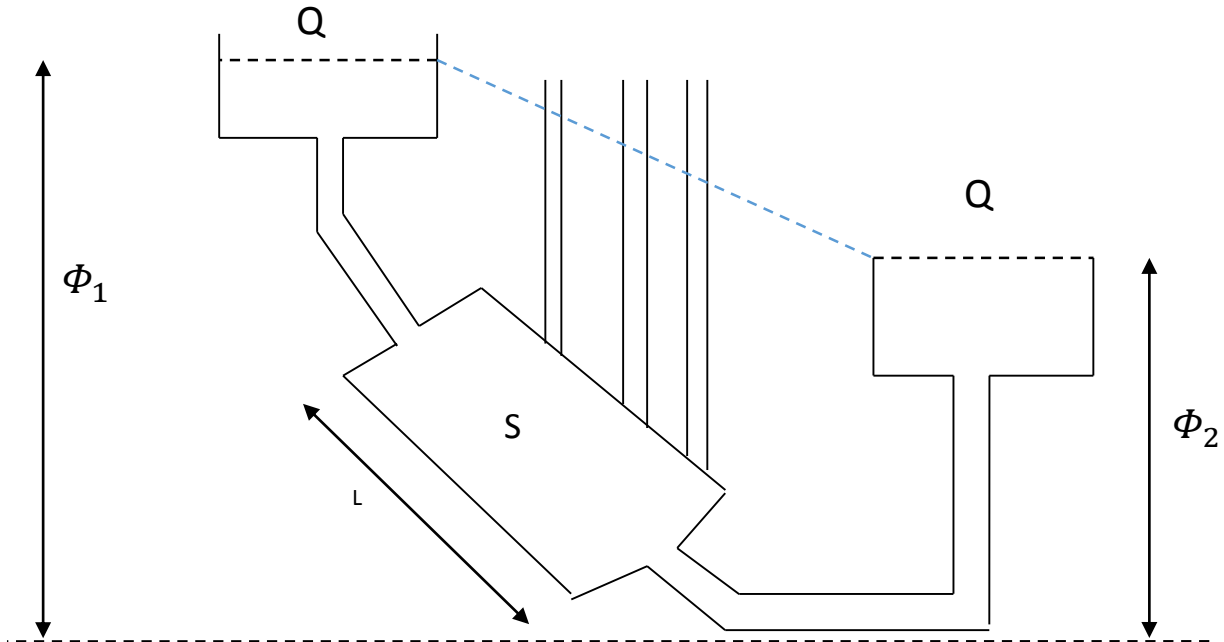


FIG II.5 expérience de darcy

II.7 Domaine de validité de la loi de darcy :

La loi de Darcy est bien vérifiée pour tous les sols dans le domaine des vitesses de décharge usuelles. On constate toutefois des écarts par rapport à la loi de Darcy dans le cas de :

- Très faibles vitesses de décharge → écarts dus à la présence des couches d'eau adsorbées qui peuvent ralentir ou annuler l'écoulement
- Fortes vitesses de décharge → écarts dus probablement à l'effet de forces d'inertie dans un mouvement non uniforme qui provoque des turbulences. Toutefois, ces fortes vitesses de décharge ne sont pratiquement jamais atteintes, sauf éventuellement dans certaines zones restreintes du milieu.

L'utilisation de la loi de Darcy est donc en pratique pleinement justifiée d'autant plus que D'autres sources d'erreur telles que la non homogénéité des sols réels, la modification de l'arrangement du squelette solides sous l'effet de l'écoulement, les variations de température qui Modifiée la viscosité de l'eau(1).

II.8 Les limitations de la loi de Darcy (1):

La loi de Darcy a été établie dans des conditions d'écoulement particulières qui limitent sa validité. Les principales hypothèses qui la sous-tendent son :

- Matrice solide homogène, isotrope et stable
- Fluide homogène, isotherme et incompressible
- Energie cinétique négligeable
- Régime d'écoulement permanent
- Ecoulement laminaire

II.9 Les équations de l'écoulement en milieu saturé (loi de Laplace) :

Si l'on considère un sol soumis à un écoulement quelconque, en combinant la condition de continuité et la loi de darcy nous obtenons le système suivant qui nous permet d'obtenir l'équation tridimensionnelle de LAPLACE :

$$\frac{\partial(V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots \text{(Condition de continuité)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = -k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ V_y = -k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ V_z = -k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{(Loi de DARCY)}$$

Où :

V_x, V_y, V_z Sont les composantes du vecteur vitesse de l'écoulement suivant les axes x, y, z

Φ représente la charge hydraulique

Soit la loi de LAPLACE :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

A noter que cette équation concerne la charge hydraulique exclusivement, elle suffit à caractériser tout écoulement souterrain dans un sol. Autrement dit, l'équation de LAPLACE est considérée comme une loi mathématique régissant les écoulements stationnaires en milieu poreux. Pour ce faire elle doit être soumise à des conditions aux limites imposées sur le domaine considéré(7)

III Écoulement dans les milieux poreux non saturés « caractéristiques générales et description du phénomène »

III.1 Introduction :

Il est important d'évoquer à présent les effets de la non-saturation sur le comportement mécanique des sols car ils peuvent exercer une influence importante sur la pérennité des ouvrages. Leur prise en compte constitue l'un des objectifs de ce chapitre.

En effet il est nécessaire de ne plus dissocier le comportement mécanique du comportement hydraulique, puisqu'en général les infrastructures des ouvrages sont soumis à la fois à des sollicitations d'origine mécanique et hydrique.

Bien que ce couplage soit facilement pris en compte dans le cas d'un sol totalement saturé, il est beaucoup moins pour un sol partiellement saturé.

Lors de cette dernière décennie, les problèmes liés aux écoulements dans les sols non saturés ont fait l'objet de nombreux travaux de recherches en tenant compte d'une interaction triphasique(9).

III.2 Caractérisation des sols non saturés :

Dans la plus part des cas, le sol se trouve dans un état partiellement saturé. Il est constitué d'une matrice interférée par un espace contenant deux phases : l'une liquide et l'autre gazeuse, en interaction d'une façon permanente. Cet espace poreux constitue l'espace à travers lequel s'effectue l'échange de la masse fluide et du volume gazeux.

La notion de « sol partiellement saturé » a été discutée par plusieurs auteurs. Ils ont distingué plusieurs états de non saturation :

- Sol semi saturé ou les deux phases liquides et gazeuses sont continués. La phase gazeuse et donc à pression constante, égale à la pression atmosphérique.
- Sol à phase liquide divisée. Cette dernière est considérée comme une solution dont la composition varie dans le temps et dans l'espace.

L'interaction entre cette phase et la phase gazeuse est toutefois plus importante que dans le sol semi saturé(9).

III.3 Principes des écoulements en milieu poreux non saturés :

III.3.1 Caractéristiques générales :

L'équation de l'écoulement est obtenue en combinant l'équation dynamique, qui est la loi de Darcy, écrite dans le cas non saturé avec la loi de conservation de masse, théoriquement, la loi de Darcy dans le cas saturé peut être déduite des équations générales de Navier-Stokes de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible moyennant deux approximations la première que les forces d'inertie sont négligeable devant les forces visqueuses et la seconde la vitesse de l'écoulement très faible.

Il est aussi à noter que l'équation d'écoulement peut être déterminée par l'équation de Richards qui est une équation unidimensionnelle et fortement non linéaire compte tenu des variations importantes que subissent la conductivité hydraulique et la succion en fonction de la teneur en eau hydraulique des sols non saturés, pour ces raisons, il est difficile d'atteindre des solutions analytique.

Et aussi la complexité d'appliquer l'équation de Richards réside dans les conditions Aux limites inconnues, et de leur variation, sur la surface de suintement du domaine de l'écoulement.

III.3.2 Phénomène de succion : (15)

La notion de la succion ou tension capillaire ψ est liée à un milieu non saturé, elle traduit le comportement physique de l'eau dans les pores qui est influencé par le Pourcentage de l'air, la pression capillaire n'existe qu'à la présence d'une phase gazeuse puisque elle provient de la tension qui se développe à l'interface air-eau.

La succion matricielle est due à l'affinité physique de l'eau à la surface des particules Du sol et aux faibles diamètres des pores capillaires. Quand un sol est saturé, tous les Pores sont remplis d'eau et ont une conductivité hydraulique relative à l'eau Maximale. Quand le sol devient non saturé, une partie de l'espace poral se remplit D'air et la surface conductrice d'une section d'écoulement décroît de façon Correspondante.

La différence la plus importante entre les écoulements non saturé et saturé réside

Dans la conductivité hydraulique, En effet, au fur et à mesure que la succion Augmente ce sont des pores de plus en plus grands et aussi les plus conducteurs quise Vident les premiers, et laissant l'écoulement se faire uniquement dans les pores plus petits. Les pores vides doivent aussi être contournés ce qui entraîne une augmentation de la tortuosité pendant le drainage.

III.3.3 Description du phénomène d'infiltration en zone non saturé : (10)

La plupart des processus de circulation de l'eau dans le sol et dans la zone racinaire de la plupart des plantes se déroulent dans des conditions de sols non saturés. Les processus d'écoulement non saturé sont en général compliqués et difficiles à décrire quantitativement car ils donnent lieu souvent à des variations de l'état et de la teneur en eau du sol pendant l'écoulement. Ces variations impliquent des relations complexes entre la teneur en eau (humidité), la succion et la conductivité qui peuvent être influencées par l'hystérèse. Avant de discuter de la circulation de l'eau dans un milieu non saturé, il peut être utile de rappeler quelques phénomènes relatifs aux écoulements en milieu saturé.

En hydrogéologie, la zone non saturée est la partie du sous-sol située entre la surface du sol et la surface de la nappe phréatique. Dans cette zone, les pores du sol sont partiellement remplis d'eau et d'air, contrairement à la zone saturée dans laquelle la totalité du système poreux est rempli d'eau et contient la nappe phréatique.

Au sein de la zone non saturée, plusieurs phénomènes physiques ou hydrauliques telles que l'infiltration, l'évaporation et la recharge de la nappe phréatique, peuvent avoir lieu. En supposant le sol comme un milieu poreux homogène et indéformable et l'air comme une phase gazeuse continue et à pression atmosphérique, l'infiltration de l'eau peut être décrite par l'équation de Richards. Cette équation est obtenue en couplant l'équation de conservation de masse à la loi de Darcy généralisée. Cette équation est hautement non linéaire à cause de la dépendance de la conductivité hydraulique et de la charge hydraulique à la saturation en eau .

III.3.4 Généralisation de la loi de darcy :

Il est clair que la loi de darcy, telle qu'elle a été décrite précédemment a été formulée pour une seule direction qui est celle de l'écoulement pour un terrain homogène et isotrope

L'étude des écoulements à plusieurs dimensions et dans des terrains anisotrope nécessite la

généralisation de la loi de darcy qui consiste que ce dernier telle qu'elle résulte de l'expérience de la perméabilité est valable en tout point du terrain et dans toutes les directions.(4)

Si le mouvement a lieu dans une direction quelconque. Les composants du vecteurs vitesses par rapport aux axes de coordonnées (x, y, z) pour un terrain anisotrope sont déterminées comme suite :

$$\vec{V} = - \bar{K} \vec{\text{grad}} \Phi$$

où : \bar{K} : tenseur de perméabilité

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \bar{K} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\bar{K} = \begin{vmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{YZ} \\ K_{XZ} & K_{YZ} & K_{ZZ} \end{vmatrix}$$

$$V_x = -K_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - K_{xz} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$V_y = -K_{yx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - K_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - K_{yz} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$V_z = -K_{zx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - K_{zy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - K_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Dans la direction principale d'anisotrope d'un milieu on aura

$$K_{ij}=0 \text{ pour } i \neq j$$

Et par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = -K_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ V_y = -K_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ V_z = -K_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{array} \right.$$

III.3.5 Modèle de Richards :

L'équation générale des écoulements non saturés découle de la combinaison de la loi dynamique et de l'équation de continuité. Diverses formulations sont possibles, selon que les divers termes dont cette équation est composée soient exprimés en fonction de la teneur en eau ou de la charge de pression et selon qu'ils soient développés sous forme de dérivées partielles ou non.

Dans sa forme la plus simple, soit avec la teneur en eau pour variable principale, les écoulements en milieu non saturée sont gouvernés par l'équation de richard (1931) :(7)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]$$

Avec :

t : temps [T]

z : profondeur orientée positivement vers le bas [L]

θ : Teneur en eau volumique [$L^3 L^{-3}$]

$k(\theta)$: Conductivité hydraulique [L T⁻¹]

$\varphi(\theta)$: charge hydraulique [L]

Ce modèle dépend des deux relations fonctionnelles $k(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ qui doivent être connues.

A cause de non linéarité de ces équations, il est pratiquement impossible d'avoir une solution analytique excepté certains cas particuliers. Par conséquent, les méthodes numériques sont largement utilisées pour résoudre l'équation de l'écoulement en milieu poreux non saturé

IV Résolution numérique de l'équation d'infiltration

IV.1 Introduction :

L'utilisation des méthodes numériques et des logiciels des calculs donne actuellement un grand avantage, pour la résolution et la compréhension des problèmes physiques complexes surtout dans le domaine non linéaire, et parmi ces méthodes de calcul on donne :

- Méthode des caractéristiques (M.C) ;
- Méthode des différences finies (M.D.F) ;
- Méthode des éléments finis (M.E.F) ;
- Méthode des volumes finis (M.V.F).

La méthode des éléments finis est la méthode numérique la plus employée en mécanique des solides. Les non linéarités peuvent être prises en compte assez facilement.

Les éléments finis développés sont de type iso paramétrique. La pression d'eau est l'inconnue principale dans notre formulation.

Pour la résolution de l'équation de l'écoulement dans le sol non saturé on utilise la méthode des éléments finis, et comme l'analyse par cette méthode faite dans un système continu dans un système discret, on utilise l'analyse dans le système continu car l'écoulement dans le milieu poreux possède un nombre de degré de liberté infini.

On dit aussi un système est stationnaire si ses variables ne dépendent pas du temps.

L'écoulement de l'eau dans le sol saturé est un système stationnaire, par contre l'écoulement de l'eau dans le sol non saturé est un système non stationnaire car le degré de saturation est changé pendant l'écoulement donc en fonction du temps.

IV.2 Modélisation des écoulements en milieu poreux :(15)

Dans la modélisation des écoulements en milieux poreux, on distingue deux méthodes d'approche. La première méthode est celle qui repose sur la modélisation dite « saturée non saturé » ou « complète » (Kacimov, 2000) qui considère l'ensemble du système constitué par la nappe et la zone non saturée entre la surface du sol et le toit de la nappe. Dans ce cas, le modèle est fondé sur l'équation dite de Richards (1931), et nécessite – outre la définition des

conditions aux limites – la connaissance de deux fonctions décrivant les propriétés hydrodynamiques du sol (relation: succion_teneur en eau, relation: conductivité hydraulique_teneur en eau). La deuxième méthode est celle qui repose sur la modélisation dite « saturée » qui est obtenu à partir d'un certain nombre de simplifications dues aux problèmes de non linéarité de l'équation de Richards compte tenu des variations importantes que subissent la conductivité hydraulique et la succion en fonction de la teneur en eau hydraulique des sols non saturés. Pour cette raison, à part des cas bien précis, unidimensionnels très souvent et à conditions aux limites draconiennes (Philip, 1973 ; youngs, 1960), rares ont été les solutions analytiques pour ces problèmes.

D'autres non linéarités proviennent non seulement de la variabilité des paramètres hydrodynamiques (perméabilité et teneur en eau), mais aussi de la nature des conditions aux limites inconnues (surface de suintement) du domaine de l'écoulement.

Tous ces problèmes de non linéarité, ajoutés à la difficulté parfois d'obtenir des données expérimentales fiables pour les courbes de perméabilité et les courbes de rétention d'eau du sol non saturé, ont motivé un certain nombre de simplifications débouchant sur cette deuxième méthode de modélisation qui repose sur l'approche mathématique, appelée « classique » des problèmes à surfaces libres ou à frontières libres.

IV.3 Formulation intégrale :

IV.3.1 Résidus pondérés :

Considérons un système physique continu stationnaire dont le comportement est représenté par un système d'équations aux dérivés partielles, linéaire ou non linéaire d'ordre m :

$$\mathcal{L}(u) + f_v = 0 \quad (\text{IV .1})$$

Sur le domaine v les conditions aux limites s'écrivent :

$$C(u) = f_s \quad (\text{IV .2})$$

Sur La Frontière s , les fonctions u constituent une solution du problème d'équilibre si elles satisfont à la fois les deux fonctions précédentes.

On appelle résidu la quantité :

$$R(u) = \mathcal{L}(u) + f_v \quad (5) \quad (IV.3)$$

Qui s'annule évidemment quand u est solution de deux équations précédentes (IV.1) et (IV.2) .

On peut généraliser la formule de résidus dans un système non-stationnaire (cas d'écoulement dans le sol non saturé)

La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions u qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V \langle \Psi \rangle \{ R(u) \} dV = \int_V \langle \Psi \rangle \{ \mathcal{L}(u) + f_v \} dV = 0 \quad (5) \quad (IV.4)$$

Pour toute fonction de pondération Ψ appartenant à un ensemble de fonctions $E\Psi$, u appartenant à l'ensemble E_u des solutions admissibles qui satisfont les conditions aux limites et qui sont dérivables jusqu'à l'ordre m . En plus, toute solution de la fonction u qui vérifie l'équation (IV.1) et (IV.2) vérifie également l'équation (IV.4). la fonction $u(x)$ est appelé fonction solution, $\Psi(x)$ est appelé fonction de pondération ou encore fonction_test.

Dans une autre façon, la méthode de résidu consiste à éliminer dans chaque nœud le reste de la pression interstitielle entre la solution approchée et la valeur exacte, puis on peut annuler la somme des restes par la formule intégrale.

IV.4 Méthode de GALERKIN :

La méthode de GALERKIN consiste à choisir comme fonctions de pondération Ψ les fonctions d'interpolation de la fonction inconnue dans l'élément considéré. Soit :

$$\Psi = N_r \quad (5) \quad (IV.5)$$

IV.4.1 Application :

A partir de l'équation (IV.3) on écrit l'expression du résidu :

$$R(\Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (IV.6)$$

Donc l'équation (IV.4) s'écrit:

$$\int_V \langle \Psi \rangle \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (\text{IV.7})$$

IV.4.2 Intégration par parties (formes intégrales faibles) :

L'intégration par parties de (IV.4) fournit des formes intégrales dites faibles qui présentent les avantages suivants :

- L'ordre maximum des dérivées de la fonction u qui apparaissent dans la forme intégrale diminue. Les conditions de dérivabilités de u sont donc moins fortes.
- Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par la fonction u .

La modélisation de l'écoulement dans le sol faite dans le plan (X,Z) donc, on intègre dans le plan.

Intégration par parties de l'équation (IV.7) donne suivant X:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) \left[\frac{\partial}{\partial X} \left[K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right] \right] d\Omega^e = \\ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left[\Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right] - K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} \right] d\Omega^e \end{aligned} \quad (\text{IV.8.a})$$

Et suivant Z :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \Psi(X, Z) \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left[K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right] \right] d\Omega^e = \\ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left[\Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right] - K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} \right] d\Omega^e \end{aligned} \quad (\text{IV.8.b})$$

L'équation (IV.7) devient:

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial X} \left[\Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right] d\Omega^e - \int_{\Omega^e} K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} d\Omega^e +$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial Z} \left[\Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right] d\Omega_e - \int_{\Omega_e} K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \Psi(X, Z) \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega_e = 0 \quad (\text{IV.9})$$

On applique le théorème de divergence de GREEN GAUSS avec un vecteur normal au contour de l'élément on obtient : (11)

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial X} \left[\Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right] d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial Z} \left[\Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right] d\Omega_e = \oint_{\Gamma} \Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\Gamma \quad (\text{IV.10})$$

On aura alors une nouvelle expression de l'équation (IV.9) :

$$\oint_{\Gamma} \Psi(X, Z) K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\Gamma - \int_{\Omega_e} K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \Psi(X, Z) n \frac{\partial S_r}{\partial P_w} \frac{\partial P_w}{\partial t} d\Omega_e = 0 \quad (\text{IV.11.a})$$

$$\text{Tel que : } \lambda = K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

λ : représente la densité du flux, elle est représenté par la condition de NEUMAN. Donc l'équation (IV.11.a) devient :

$$\oint_{\Gamma} \Psi(X, Z) \lambda d\Gamma - \int_{\Omega_e} K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial X} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} K(P_w) \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \Psi(X, Z)}{\partial Z} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \Psi(X, Z) n \frac{\partial S_r}{\partial P_w} \frac{\partial P_w}{\partial t} d\Omega_e = 0 \quad (\text{IV.11.b})$$

IV.5 Analyse par la méthode des éléments finis :

IV.5.1 Introduction à la notion éléments finis :

La recherche d'une solution approchée par la méthode des éléments finis comporte deux étapes. La première concerne le choix des fonctions d'interpolation et la seconde

est liée au choix des fonctions de pondération qui minimisent l'erreur entre la solution approximée et la solution exacte. La discrétisation spatiale de ce système d'équations est effectuée à l'aide d'une interpolation linéaire pour approximer la solution sur chaque élément linéaire.

En divisant le problème en éléments finis on peut écrire la pression interstitielle ou l'inconnue du problème sous la forme :

$$P_w = \sum_{k=1}^n N_k P_K \quad (11) \quad (IV.12)$$

A partir de l'équation (III.3) de la formule de la charge hydraulique, on obtient les dérivées partielles suivant (X,Z) respectivement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial P_w}{\partial X} \quad (IV.13.a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial P_w}{\partial Z} + 1 \quad (11) \quad (IV.13.b)$$

On remplace les résultats précédents dans l'équation (IV.11.b) :

$$\oint_{\Omega^e} \Psi \lambda d\Gamma - \int_{\Omega^e} \frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} P_w \frac{\partial \Psi}{\partial X} d\Omega_e - \int_{\Omega^e} \frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} P_w \frac{\partial \Psi}{\partial Z} d\Omega_e - \int_{\Omega^e} K(P_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega_e - n \int_{\Omega^e} \Psi \cdot \frac{\partial S_r}{\partial P_w} N_s \frac{\partial P_w}{\partial t} d\Omega_e = 0 \quad (IV.14)$$

Cette équation corresponde à un seul élément, on écrit l'équation pour m élément c.à.d. en forme de matrice :

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} \left(\frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) P d\Omega_e + \sum_{e=1}^m n \int_{\Omega^e} \Psi \cdot \frac{\partial S_r}{\partial P_w} N_s \frac{\partial P_w}{\partial t} d\Omega_e + \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} K(P_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega_e - \sum_{e=1}^m \oint_{\Omega^e} \Psi \lambda d\Gamma = 0 \quad (IV.15)$$

On remplace la formule (IV.5) de Galerkin, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} \left(\frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} \frac{\partial N_r}{\partial X} + \frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} \frac{\partial N_r}{\partial Z} \right) P d\Omega_e + \\ & \sum_{e=1}^m n \int_{\Omega^e} N_r \cdot \frac{\partial S_r}{\partial P_w} N_s \frac{\partial P_w}{\partial t} d\Omega_e + \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} K(P_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega_e - \\ & \sum_{e=1}^m \oint_{\Omega^e} N_r \lambda d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (IV.16)$$

La forme générale :

$$[K]\{P\} + [C] \left\{ \frac{dP}{dt} \right\} + \{J\} = 0 \quad (IV.17)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} \left(\frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial X} \frac{\partial N_r}{\partial X} + \frac{K(P_w)}{\gamma_w} \frac{\partial N_s}{\partial Z} \frac{\partial N_r}{\partial Z} \right) d\Omega_e. \quad (IV.18)$$

$$[C] = \sum_{e=1}^m n \int_{\Omega^e} N_r \cdot \frac{\partial S_r}{\partial P_w} N_s d\Omega_e. \quad (IV.19)$$

$$\{J\} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} K(P_w) \frac{\partial N_s}{\partial Z} d\Omega_e - \sum_{e=1}^m \oint_{\Omega^e} N_r \lambda d\Gamma = 0. \quad (IV.20)$$

IV.5.2 Calcul sur un élément de référence et isoparamétrique :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence: un élément de référence V' est un élément de forme très Simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel V par une transformation géométrique .

Le calcul se fait sur un élément de référence carré à 8 nœuds, la transformation d'une intégrale d'un élément réel à un élément de référence se fait par :

$$\int_V f(X, Z) dX dZ = \int_{V'} f(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta \quad (5) \quad (IV.21.a)$$

On remplace les bornes d'intégration d'un élément carré, donc l'équation (III.20.a) devient :

$$\int_V f(X, Z) dX dY = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta . \quad (\text{IV .21.b})$$

$\det(J)$: Déterminant de la matrice Jacobienne.

On a la relation de transformation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{IV .22.a})$$

Ce que nous noterons :

$$\{\partial_\xi\} = [J] \{\partial_X\} \quad (\text{IV .22.b})$$

Où $[J]$ est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique.

Cette dernière permet décrire les dérivées par rapport à (X, Z) en dérivées par rapport à (ξ, η) .

Pour un élément sous sa forme iso paramétrique, elle s'écrit :

$$[J] = [B_e] [\{X_n\}; \{Z_n\}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{IV .23})$$

Tel que :

$$\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (\text{IV .24})$$

Avec :

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{IV .25})$$

On notera par $[j]$ l'inverse de $[J]$; $([J] = [j]^{-1})$

Elle s'écrit :

$$[j] = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{IV .26})$$

IV.6 Élément utilisé et transformation :

On utilise un élément carré à 8 nœuds . Sa base polynomiale est :

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle \quad . \quad (11) \quad (IV.27)$$

A partir de la base polynomiale on peut obtenir les fonctions d'interpolation N_i . (voir les étapes dans la référence [13]). La géométrie de l'élément est donc approchée par le biais de fonctions d'interpolation géométrique. Ces fonctions d'interpolations $N_i(\xi, \eta)$ sont définies sur l'élément de référence ; elles permettent de connaître les coordonnées (X, Z) d'un point quelconque de l'élément réel à partir de ses coordonnées (ξ, η) de son antécédent dans l'élément de référence et des coordonnées (X_i, Z_i) des nœuds (de numéro local) de l'élément réel. (5)

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) X_i. \quad (IV.28.a)$$

Et :

$$Z = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) Z_i. \quad (5) \quad (IV.28.b)$$

Un élément est isoparamétrique lorsqu'il est basé sur des fonctions interpolations identiques pour sa géométrie de la relation (IV.28.a) et (IV.28.b) et ses inconnues de la relation (IV.12).

Pour assurer la continuité de la solution sur l'élément et, éventuellement, la continuité de ses dérivées, il faut que les fonctions $N_i(\xi, \eta)$ soient continues et éventuellement à dérivées continues.

De même si l'on veut assurer la continuité de la solution et de ses dérivées aux frontières des éléments il faut que la solution et ses dérivées dépendent de manière unique des variables nodales des nœuds de la frontière.

Les fonctions d'interpolations et leurs dérivées par rapport à ξ et η sont dans le tableau suivant :

TAB (IV .1) : les fonctions d'interpolations

	$\{N\}$	$\left\{\frac{\delta N}{\delta \xi}\right\}$	$\left\{\frac{\delta N}{\delta \eta}\right\}$
1	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
2	$\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$	$-(1-\eta)\xi$	$\frac{-(1-\xi^2)}{2}$
3	$\frac{-(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
4	$\frac{(1+\xi)(1+\eta^2)}{2}$	$\frac{(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\xi)\eta$
5	$\frac{-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
6	$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$	$-(1+\eta)\xi$	$\frac{(1-\xi^2)}{2}$
7	$\frac{-(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
8	$\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$\frac{-(1-\eta^2)}{2}$	$-(1-\xi)\eta$

IV.7 Intégration numérique :

IV.7.1 Principe :

Soit à calculer l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ sur le segment $[x_0, x_1]$.

Le principe est de construire un polynôme d'interpolation de $f(x)$ et d'intégrer ce polynôme

Le problème est de choisir un nombre de points d'interpolation optimum et un emplacement optimum de ces points. La méthode de Gauss que nous allons exposer répond à ces deux problèmes.

Par contre, les méthodes classiques utilisent des points équidistants, et parmi ces méthodes classiques on donne :

- Méthode des trapèzes.
- Méthode de Simpson

Toutes les méthodes d'intégration numérique sont basées sur le principe suivant :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^r w_i f(x_i) \quad (5) \quad (IV.29)$$

r: nombre de points d'intégration.

$f(x_i)$: Valeur de la fonction au point de coordonnées x_i .

La méthode de Gauss est une méthode très utilisée dans laquelle les r coefficients w_i et les r abscisses x_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m=2r-1$.

w_i : Coefficients de pondération appropriés ou poids.

IV.7.2 Intégration à deux dimensions quadratique de Gauss:

Le principe de l'intégration numérique à deux dimensions est le même que l'intégration analytique à variables séparées, il s'agira donc d'intégrer suivant X, par exemple en considérant que Z est constante et inversement.

Nous obtenons une expression sous la forme :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, z) dx dz = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j f(x_i, z_j) \quad (11) \quad (IV.30)$$

r_1, r_2 : représentent les points d'intégration respectivement suivant x, z. Les coefficients w_i, w_j, w_k et les abscisses ξ_i, ξ_j et η_i, η_k sont donner dans Le tableau suivant :

TAB (IV.2) : les points de GAUSS

$r = r_1 \times r_2$	ξ_i	η_i	w_i
2x2	0	0	0,8888888888888889
	$\pm 0,774596669241483$	$\pm 0,774596669241483$	0,5555555555555556

IV.8 Calcul de la pression interstitielle:

Le calcul de la pression interstitielle P_w dans un point quelconque de l'élément quadrilatère à 8 nœuds se fait par interpolation des valeurs de la pression interstitielle P_w de chaque nœud de l'élément .

La solution de l'équation de l'écoulement dans le sol non saturé est basé sur la détermination de la valeur de la pression interstitielle P_w .

Cette dernière dépend du degré de saturation S_r et du coefficient de perméabilité K et vis versa dans un écoulement non stationnaire.

En pratique on obtient les valeurs des ces trois facteurs (P_w, S_r, K) par la courbe de rétention du sol qui relie la pression interstitielle P_w avec le degré de saturation (ou la teneur en eau volumique) et on obtient la valeur de la perméabilité.

Dans notre programme il existe un procédure qui donne ces valeurs.

$$[K] \{P_n^{(m)}\} = -[C] \frac{\{P_n^{(m)}\} - \{P_{n-1}^{(m)}\}}{\Delta t} - \{J\} \quad (IV .31)$$

Pour résoudre ce système d'équation on a besoin d'un point de départ dans ce système d'équation non linéaire qui base sur la variation de coefficient de la perméabilité k en fonction de la pression interstitielle P_w et le degré de saturation S_r . On commence par une valeur arbitraire de préférence nulle, c'est plus simple, de la pression interstitielle P_w . Cela nous permet de fixer les paramètres K et S_r pour commencer la solution au temps $t=0$.

Dans la partie droite de l'équation suivante :

$$([K] + [\frac{C}{\Delta t}]) \{P_n^{(m)}\} = [\frac{C}{\Delta t}] \{P_{n-1}^{(m)}\} - \{J\} \quad (IV .32)$$

On obtient:

$$([K] + [\frac{C}{\Delta t}]) \{P_1^{(0)}\} = -[\frac{C}{\Delta t}] \{J\} \quad (IV .33)$$

Cette valeur du vecteur $\{P_1^{(0)}\}$ qui est arbitraire, ne donne pas les valeurs exactes de degré de saturation S_r et le coefficient de perméabilité K , correspondant à la valeur de la pression interstitielle.

Donc pour corriger on refait le calcul avec les nouvelles valeurs de la pression jusqu'à

convergence à la solution en utilisant le critère de convergence suivant :

$$\left\{ P_n^{(m)} \right\} - \left\{ P_{n-1}^{(m)} \right\} \leq \varepsilon . \quad (\text{IV .34})$$

ε : représente une valeur donnée (tolérance).

m : un cycle du temps.

n : une itération.

Après la vérification de cette condition , les valeurs de degré de saturation S_r et du coefficient de perméabilité K sont des valeurs réels (corrects) .

Puis le cycle du temps est changé , et on répète le même calcul dans le nouveau cycle avec détermination de degré de saturation S_r et du coefficient de perméabilité K en utilisant bien sur les pressions interstitielles du cycle précédent.

La convergence à la solution du système à un temps t est obtenue quand la pression interstitielle entre deux itérations est presque nulle, un critère de convergence est défini tel que la différence du vecteur solution de l'itération n et de l'itération n_1 est inférieure à une tolérance donnée

La vérification entre deux vecteurs de la pression successifs dans deux itérations du temps, se fait par :

$$\left\{ P_n^{(m)} \right\} = \left\{ P_{n-1}^{(m)} \right\} \quad (\text{IV .35})$$

V Procédure d'analogie thermique

V.1 Analogie Thermique

En particulier, les problèmes de répartition de la charge hydraulique dans les écoulements en milieu poreux qui, tout comme les problèmes de répartition de température ou de potentiel électrique, se ramènent à la résolution d'une équation de type $\Delta(u) = f$ peuvent être traités aisément par la méthode des éléments finis.

Après avoir posé l'équation de Laplace, on abordera la technique générale de résolution.

Les premières applications de la méthode des éléments finis ont été orientées vers les résolutions des équations d'équilibre en élasticité ou en elastoplasticité, il est très vite apparu que ces méthodes pouvaient aussi être utilisées pour la résolution de nombreux problèmes physiques régis des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Après avoir présenté l'équation de Laplace dans la géotechnique, où elle a la même forme que dans la thermique. Dans la résolution numérique, la résolution thermique est plus facile que d'autre forme. Pour résoudre le problème d'infiltration, on présente une analogie entre la thermique et hydraulique. Dans le paragraphe suivant, on va présenter les différentes quantités dans les deux domaines et présenter l'analogie.

V.2 Définition des propriétés du milieu :

Les propriétés et variables physiques qui nous intéressent sont de cinq types. Pour permettre une solution quantitative des problèmes physiques, ces propriétés doivent être traduites en termes mathématiques en identifiant le type de variable dont il s'agit (scalaire, tenseur, vecteur) puis être quantifiées selon un système d'unités. Les types de propriétés sont définis comme suit :

La propriété définissant la quantité de matière ou d'énergie, c'est le sujet central du phénomène physique étudié. Dans le cas de la thermique, il s'agit de la chaleur tandis que dans celui de l'écoulement, c'est la masse de fluide.

Mathématiquement, la quantité de matière ou d'énergie est une variable scalaire. Pour la thermique, la quantité de chaleur W est exprimée en joules (J) (unités d'énergie ou de travail). En hydrogéologie, la quantité de fluide est généralement définie par sa masse M (kg), ou par son volume V (m³) (à densité constante).

La propriété définissant le potentiel. Le paramètre qui régit le transfert de matière ou d'énergie constitue le potentiel. Lorsque le potentiel est égal partout dans un domaine, il n'y a pas de transfert de masse ou d'énergie. Par contre, des différences de potentiel provoquent le transfert de masse ou d'énergie. Les changements du potentiel selon les différences directions dans un domaine donné définissent le gradient de potentiel dans ce domaine. Dans le cas de la thermique, c'est la température qui constitue le potentiel puisqu'elle contrôle le transfert de la chaleur, celle-ci étant transférée des secteurs chauds (à haute température) vers les secteurs froids (à basse température). Dans le cas de l'écoulement en milieux poreux, c'est la charge hydraulique qui constitue le potentiel puisque l'écoulement se fait des secteurs à haute charge hydraulique vers ceux à faible charge hydraulique.

Le potentiel U est une variable mathématique scalaire définie en tout point du domaine considéré. Le gradient de potentiel $\text{grad } U$ est un vecteur. En thermique, la température T est spécifiée en degrés kelvin (K) et la valeur du gradient thermique dans une direction donne en K/m (ou de façon équivalente en $^{\circ}C/m$). En hydrogéologie, la charge hydraulique h est exprimée en mètres d'eau (m), de sorte que le gradient hydraulique est sans dimensions (m/m).

La propriété définissant le flux de masse ou d'énergie. Ce paramètre indique la quantité et la direction dans laquelle la masse ou l'énergie est transférée en fonction du temps à travers une surface unitaire dans les matériaux sous l'effet du gradient de potentiel. Dans le cas de la thermique, il s'agit du flux de chaleur généré par le gradient de température. Dans le cas de l'écoulement, nous nous intéressons au flux de masse (ou volumétrique) de fluide à travers les matériaux découlant du gradient hydraulique.

De façon mathématique, le flux est aussi un vecteur. En thermique, le flux de chaleur q_h est exprimé en quantité de chaleur par unité de temps et de surface ($G/s \cdot m^2$ ou W/m^2). En hydrogéologie, le flux de fluide q est généralement exprimé en volume de fluide (à densité constante) par unité de temps et de surface (m^3/s ou m/s) ou, plus rarement, en masse de fluide par unité de surface ($kg/s \cdot m^2$).

La propriété des matériaux définissant leur capacité de stockage ou d'emmagasinement. Cette propriété indique la quantité de matière ou d'énergie qui peut être contenue dans un volume unitaire de matériel. Dans le cas de la thermique, c'est l'enthalpie H qui définit la quantité de chaleur contenue dans les matériaux. Dans le cas de l'écoulement saturé (nappes captives), c'est l'emmagasinement spécifique SS qui définit la capacité de stocker de l'eau.

Mathématiquement, cette propriété est scalaire et représente la quantité de masse ou

d'énergie emmagasinée par unité de volume du domaine. En thermique, la capacité de stockage de l'énergie thermique est représentée par l'enthalpie volumique h_p (J/m^3) qui est le produit de la densité du matériel ρ (kg/m^3) par sa capacité thermique c ($J/kg.K$) et la température T ($^{\circ}C$) ($h_p = \rho \cdot c \cdot T$). En hydrogéologie, la capacité d'emmagasinement est représentée par l'emmagasinement spécifique SS qui représente le volume d'eau produit par un milieu poreux par unité de volume de l'aquifère pour un abaissement unitaire de la charge hydraulique (m^3 / m^3 , $m = m_{-1}$)

La propriété des matériaux définissant leur capacité à transférer de la masse ou de l'énergie. Cette propriété indique la facilité avec laquelle la masse ou l'énergie peut être transférée à travers les matériaux sous l'influence d'un gradient de potentiel. Ce paramètre constitue généralement la constante de proportionnalité dans les lois de comportement régissant les flux de masse ou d'énergie discutées plus loin. Dans le cas de la thermique, la capacité des matériaux à transférer de la chaleur par conduction est caractérisée par leur conductivité thermique. La conductivité hydraulique K indique (partant de la capacité des milieux poreux (ou fracturés) à transférer un volume d'eau.

Cette propriété est représentée par un tenseur mathématiquement. Puisque ces propriétés sont habituellement définies comme la constante de proportionnalité reliant le flux au gradient du potentiel, leurs unités dépendent des lois de comportement.

V.3 Identification des variables étudiées.

Les inconnues à définir dans le domaine étudié pour un problème de la physique sont :

le potentiel, $u(x,y,z,t)$;

l'emmagasinement, $M(x,y,z,t)$;

les flux, $q(x,y,z,t)$.

Le vecteur q est composé de 3 fonctions scalaires, les trois composantes du flux dépendant du choix de coordonnées utilisé pour le représenter.

Dans un système cartésien, on a:

$$q(x, y, z, t)$$

$$q(x, y, z, t) = q_x(x, y, z, t)$$

$$(z(x, y, z, t))$$

La variable temps t est présentée lorsque le problème à résoudre est en régime transitoire, c'est-à-dire que les conditions dans le domaine étudié changent en fonction du temps. Dans le cas contraire ou les conditions sont fixes dans le temps, le problème à résoudre est en régime permanent et la variable temps n'a plus à être considérée.

V.4 Etablissement des lois de la physique :

Deux types de lois de la physique sont utilisés pour résoudre un problème :

Une loi de comportement (ou de constitution)

Une loi de conservation

Exprimées mathématiquement et combinées, ces lois permettent de dériver les équations aux dérivées partielles qui représenteront le problème physique à résoudre.

Une loi de comportement établit une relation entre le potentiel et le flux. Très souvent, ces lois ont été établies d'abord de façon empirique et prennent la forme mathématique générale :

$$q(x, y, t) = - [k] \text{grad}(U)$$

Où q est le vecteur de flux, $\text{grad}(U)$ est le gradient du potentiel U et $[K]$ est le paramètre de transfert (facteur de proportionnalité). Le signe négatif indique que le flux est positif lorsque le gradient du potentiel est négatif, c'est-à-dire qu'il diminue dans la direction de transfert. Quelques lois de cette forme sont résumées dans le tableau

Tableau : Principales lois de comportement (13)

Loi de comportement	Quantité Transférée	Potentiel	Constante de Proportionnalité
<i>Fourier</i>	Chaleur par Conduction	Température	Conductivité Thermique
<i>Darcy</i>	Fluide dans un milieu poreux	Charge Hydraulique	Conductivité Hydraulique

La loi de conservation permet de dériver la forme générale de l'équation différentielle fondamentale applicable à de nombreux problèmes de la physique. On obtient une équation aux dérivées partielles représentant la loi de conservation :

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + f_v - \frac{\partial M}{\partial t} = 0$$

$$-\nabla q + f_v = \frac{\partial M}{\partial t}$$

Si on remplace la loi de comportement dans la loi de conservation, on obtient une équation différentielle générale applicable à tous les phénomènes physiques.

$$K_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + f_v = \frac{\partial M}{\partial t} \quad (13) \quad V.1$$

Un cas particulier intéressant de la relation V.1 est celui représentant le régime permanent en l'absence de source. Dans ce cas, le terme de changement d'emmagasinement est nul de même que le terme source et on obtient l'équation de Laplace (si $K_x = K_y$, i.e. le matériel est isotrope)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{V.2})$$

Dans le cas de la conduction thermique, si on remplace dans l'équation V.1 par la loi de comportement (fourrier) et le terme d'emmagasinement, on obtient

$$K_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + f_v = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans le cas de l'écoulement, on a la même équation v.1 ou on intègre la loi de comportement (loi de Darcy), on obtient

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + Q = m_w \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t}$$

Toutes les équations citées précédemment est en bidimensionnel. On peut avoir les équations en tridimensionnel, on appliquant la même procédure et les mêmes principes dans quelque soit dans la thermique ou clans l'infiltration dans les milieux poreux.

L'équation différentielle d'infiltration avec absence de source et l'emmagasinement

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}) = 0$$

L'équation différentielle d'infiltration avec absence de source et présence de l'emmagasinement

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

Dans la thermique, l'équation différentielle de la conduction thermique se présente comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

En absence d'emmagasinement l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}) = 0 \quad (13)$$

V.5 CONCLUSION :

On peut constater que l'équation de la place prend la même forme quelque soit le problème traite, thermique ou d'infiltration dans les milieux poreux. Donc, on peut faire une analogie entre ces deux lois.

Dans notre étude, nous avons adopte une analyse thermique au lieu d'une analyse d'infiltration. Tout simplement car le logiciel utilise ne nous permet pas de faire une étude d'infiltration. Donc nous avons choisi d'étudier le problème thermiquement et par analogie nous obstinerons nos pressions interstitielles ou charges hydrauliques recherchées.

VI Modélisations numériques de l'écoulement dans les milieux poreux non saturée

VI.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'application du modèle d'écoulement via des études numériques des transferts bidimensionnels de l'eau dans la zone non saturée, application à l'étude de la recharge d'une surface libre / infiltration dans une colonne du sol non saturée.

Ce modèle numérique permet notamment de décrire les écoulements dans l'ensemble du massif, tout en considérant la continuité entre les zones saturées et non saturées. Il permet, par ailleurs, d'étudier aussi bien l'évolution des caractéristiques de l'écoulement dans le temps en régime transitoire que la résolution du problème permanent. La formulation théorique est fondée sur l'approche monophasique de Richards, 1931 qui généralise l'équation de l'écoulement aux zones de pressions d'eau positives et négatives.

Les équations et les modèles mathématiques utilisables pour décrire correctement ces transferts ont déjà donné lieu à des publications.

Notons simplement que ces équations sont fortement non linéaires à cause de la variation rapide de la perméabilité et de la succion avec teneur en eau.

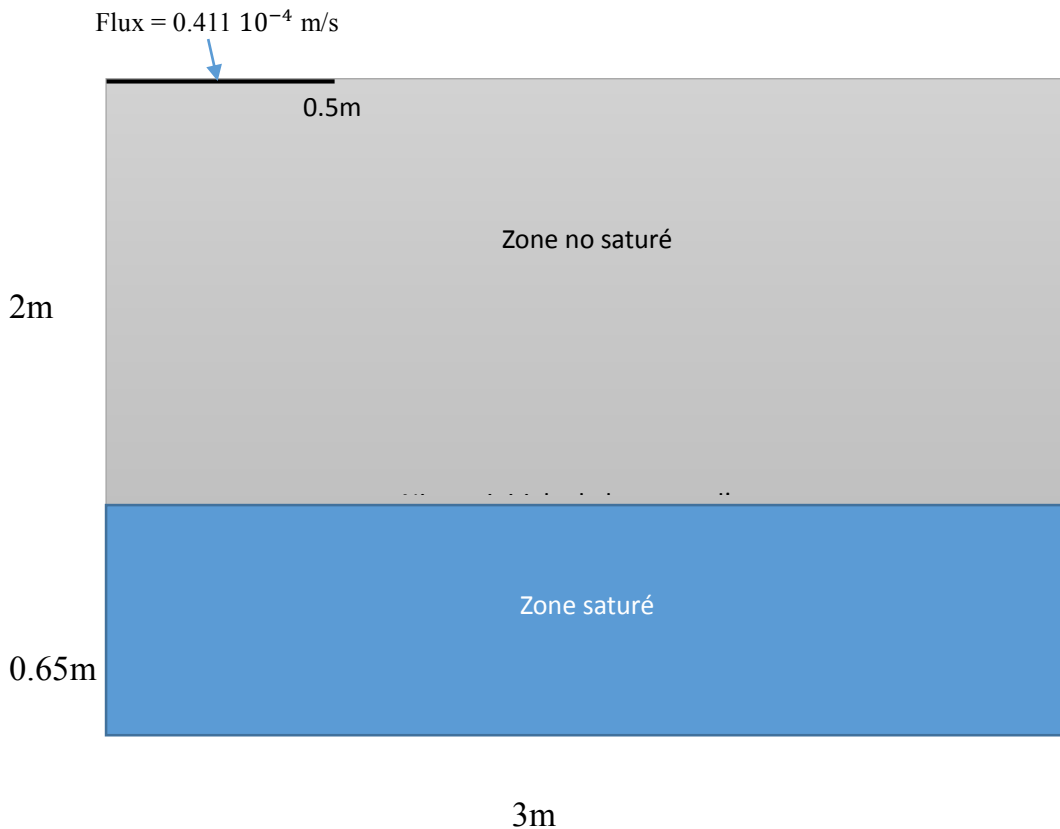
Ce travail a été réalisé à l'aide du code de calcul ANSYS version 11 au département de génie civil de l'université ABOU BEKR BELKAID.

VI.2 Recharge d'une nappe à surface libre :

Le premier cas étudié est la recharge d'une nappe à surface libre.

VI.2.1 Géométrie et donnée de modèle :

La figure VI.1 représente la géométrie détaillée de la surface étudiée, elle précise les conditions aux limites et le chargement.



La figure VI.1 représentation de la géométrie du massif

A l'instant 0, le massif de sol est en équilibre hydrostatique à la charge $\Phi = 0.65 \text{ m}$, autrement dit le sol est saturé pour $y \leq 0.65 \text{ m}$ et non saturé au – delà.

Aux instants $t \geq 0$ on impose sur la partie centrale du bord supérieur du massif un flux entrant constant $q = 0.411 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$

Il comporte 58 pas du temps durant une période de $8\text{h} = 28800 \text{ s}$

Les caractéristiques du massif du sol sont :

$$k_s = 9.722 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\theta_s = 0.3$$

Le chargement :

$$\Phi = 0.65 \text{ m} \quad q = 0.411 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

VI.3 Le maillage :

Un maillage automatique a été opté pour la structure générale avec des éléments quadratiques à 4 nœuds.

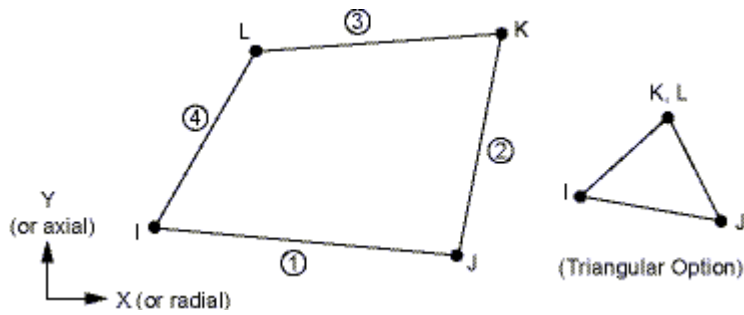


Figure 6.2 géométrie de l'élément plane 55 (help ansys)

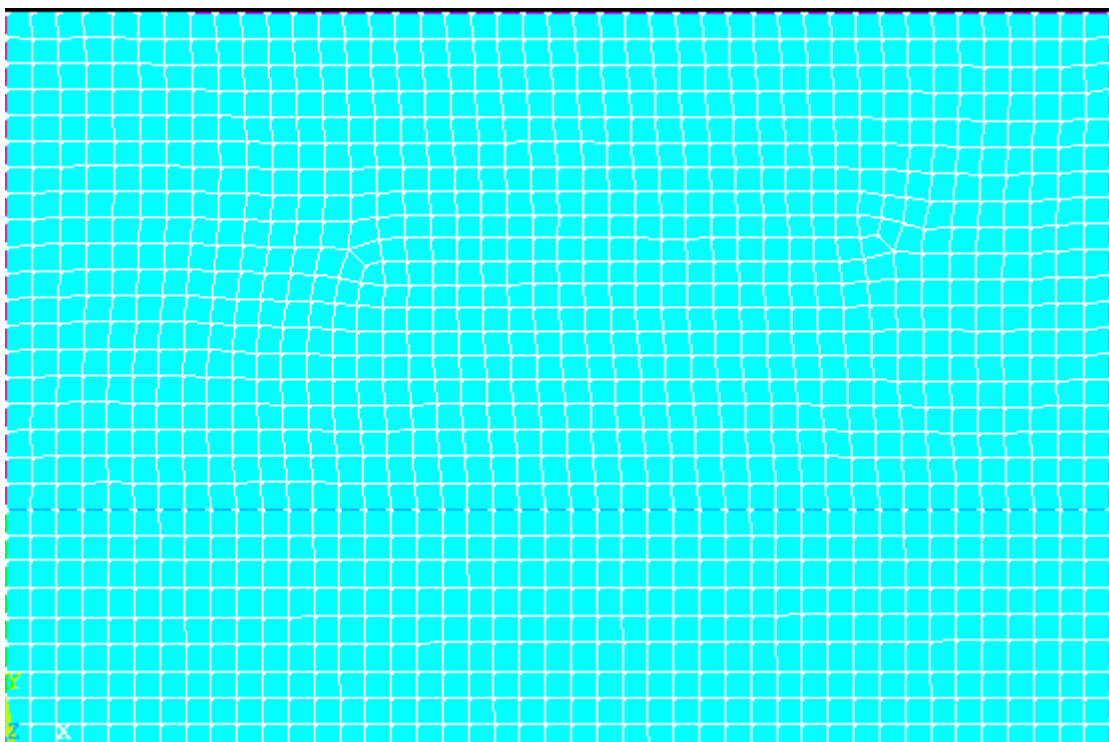


Figure VI.3. maillage du massif su sol

VI.4 Résultats :

Les figures VI.4 et VI.5 montre la distribution de la charge hydraulique pendant 4 heure et 8 heure respectivement.

Les figures VI.6, VI.7, VI.8, VI.9 , VI.10 et VI.11 présente l'évolution de la charge hydraulique en fonction du temps du nœud 282 pendant 30 min, 1h, 2h, 4h, 8h et 10h respectivement

La figure VI.11 montre l'évolution de la charge hydraulique le long de la hauteur du massif du sol

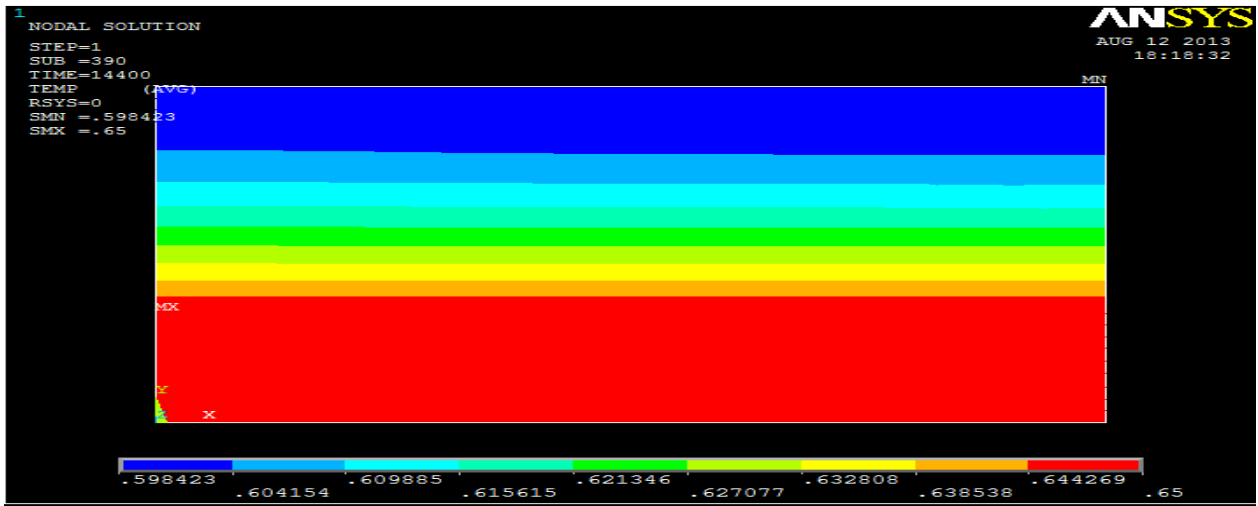


Figure VI.4 distribution de la charge hydraulique t= 4h

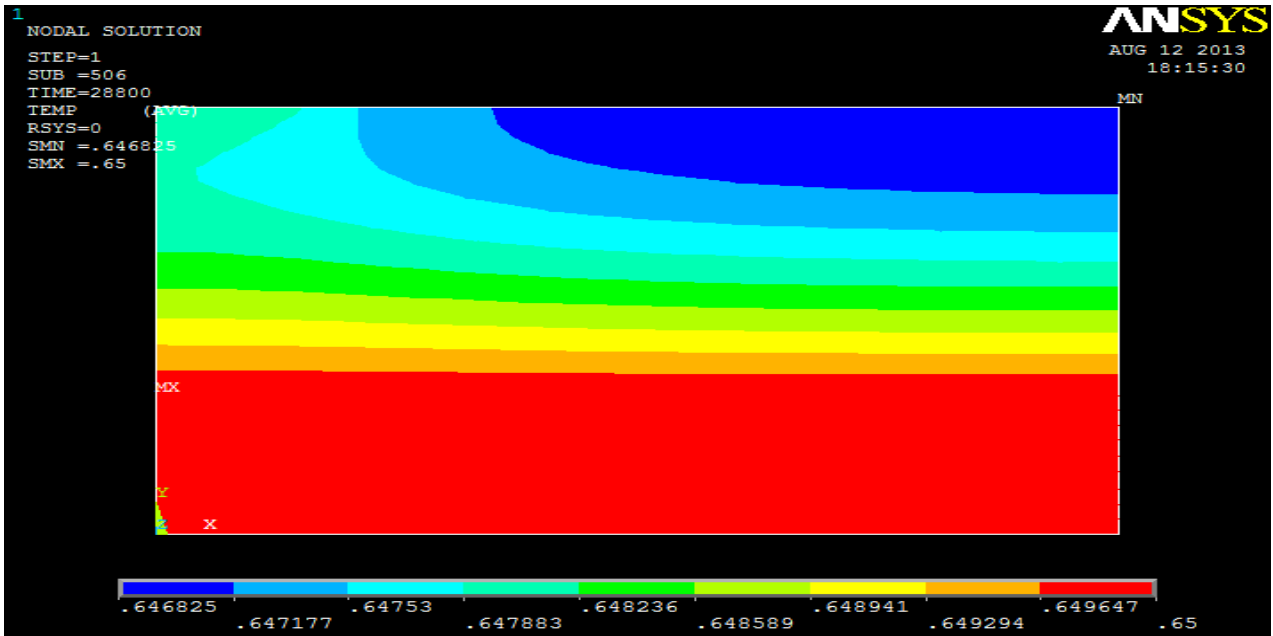


Figure VI.5 distribution de la charge hydraulique t= 8h

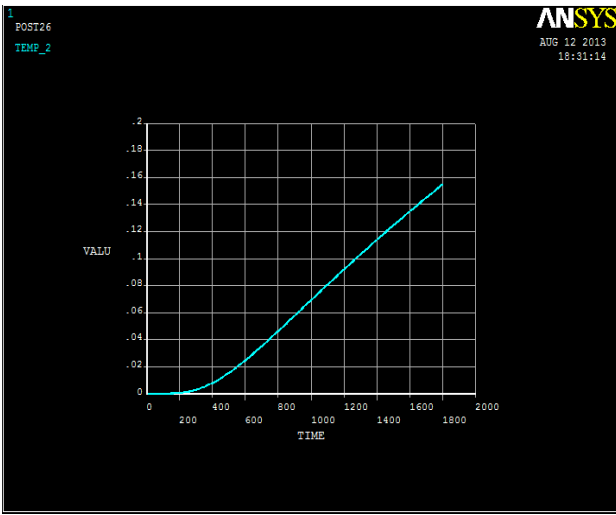


Fig.VI.6 Nœud 282 t = 30 min

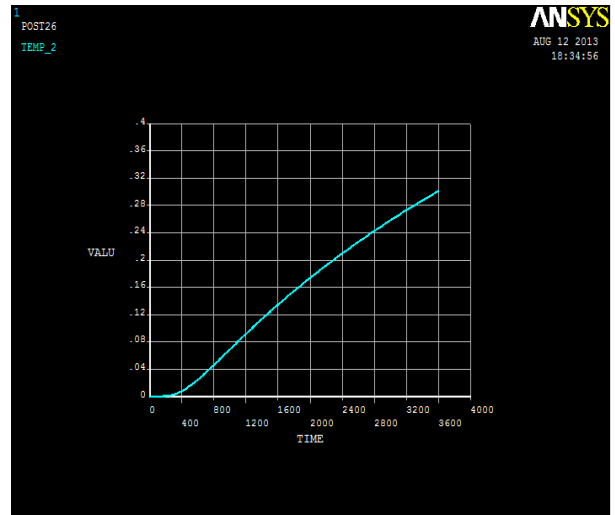


Fig.VI.7 Nœud 282 t = 1h

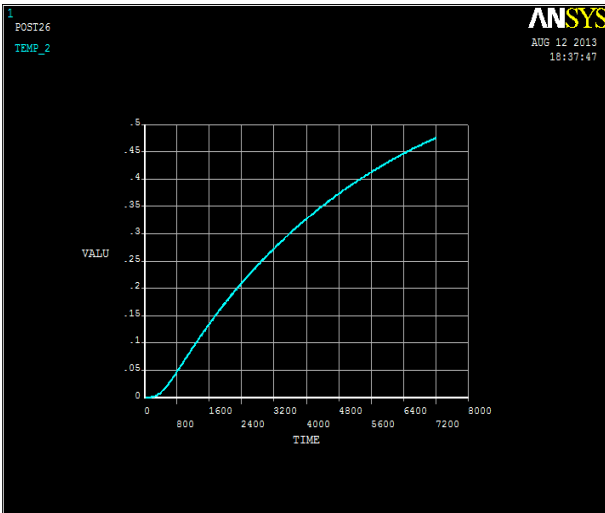


Fig.VI.8 Nœud 282 t = 2h

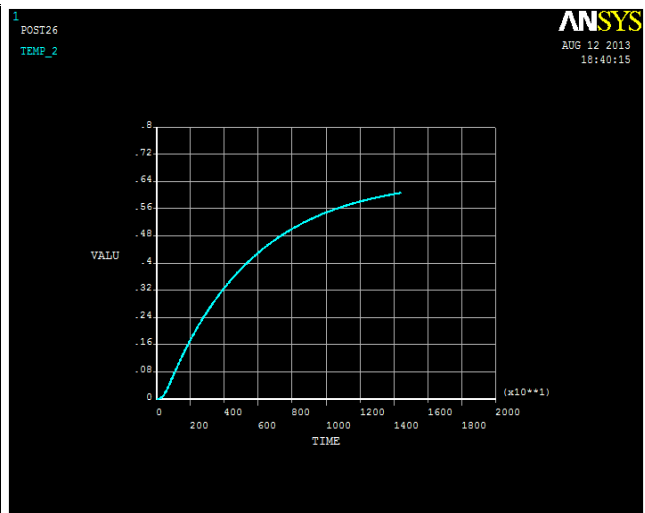


Fig.VI.9 Nœud 282 t = 4h

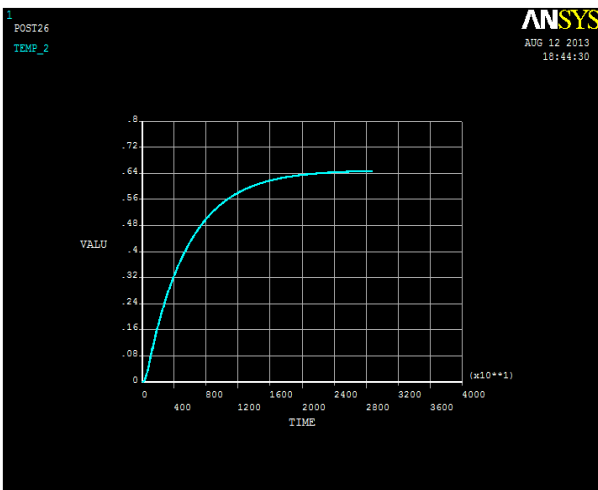


Fig.VI.10 Nœud 282 t = 8h

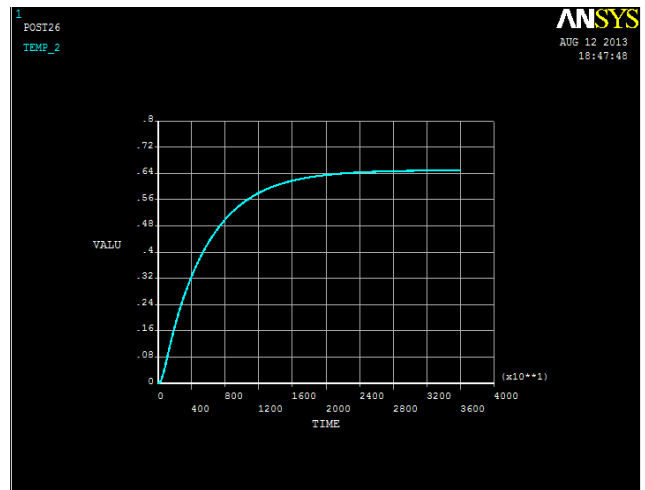


Fig.VI.11 Nœud 282 t = 10h

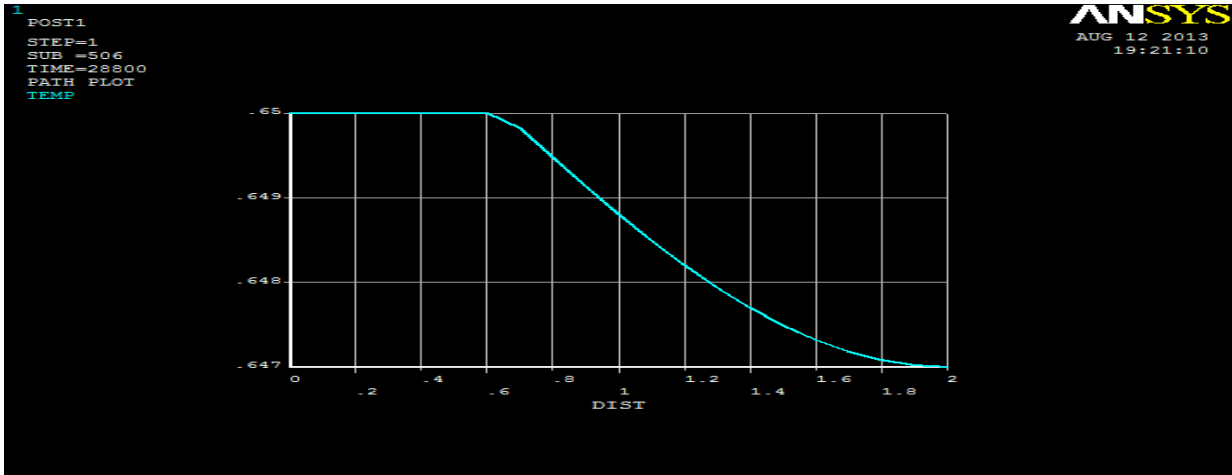
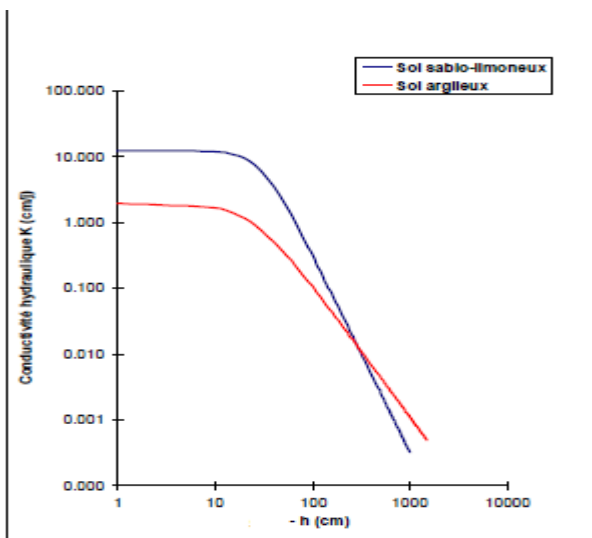


Figure VI.12 variation de la charge hydraulique en fonction de la profondeur z au milieu du massif du sol

VII Colonne de sol non saturé :

VII.1 Présentation du test :

Il s'agit d'une colonne de sol de hauteur 1 m et de largeur 0,20 m. La conductivité hydraulique et la teneur en eau volumétrique de ce sol sont déduites par les courbes suivantes :



Example of hydraulic conductivity functions $K(h)$

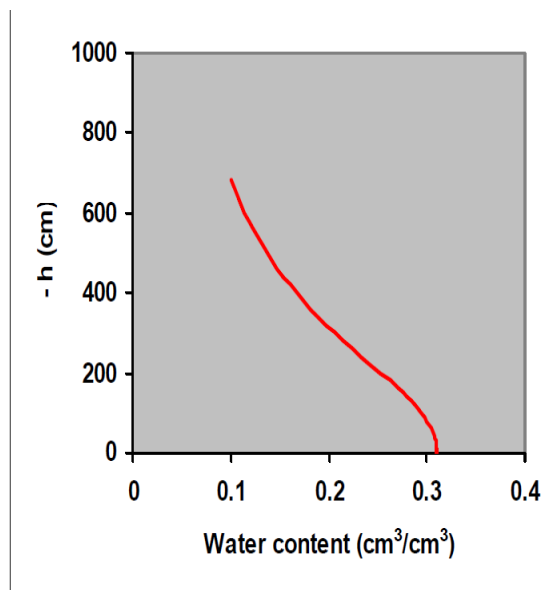


fig VI.14 teneur en eau en fonction de

Fig VI.13 conductivité hydraulique en fonction de

La charge hydraulique

la charge hydraulique

VII.2 Résultats :

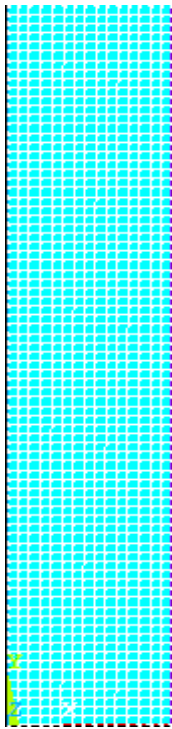


Fig. VI.15 maillage de la colonne

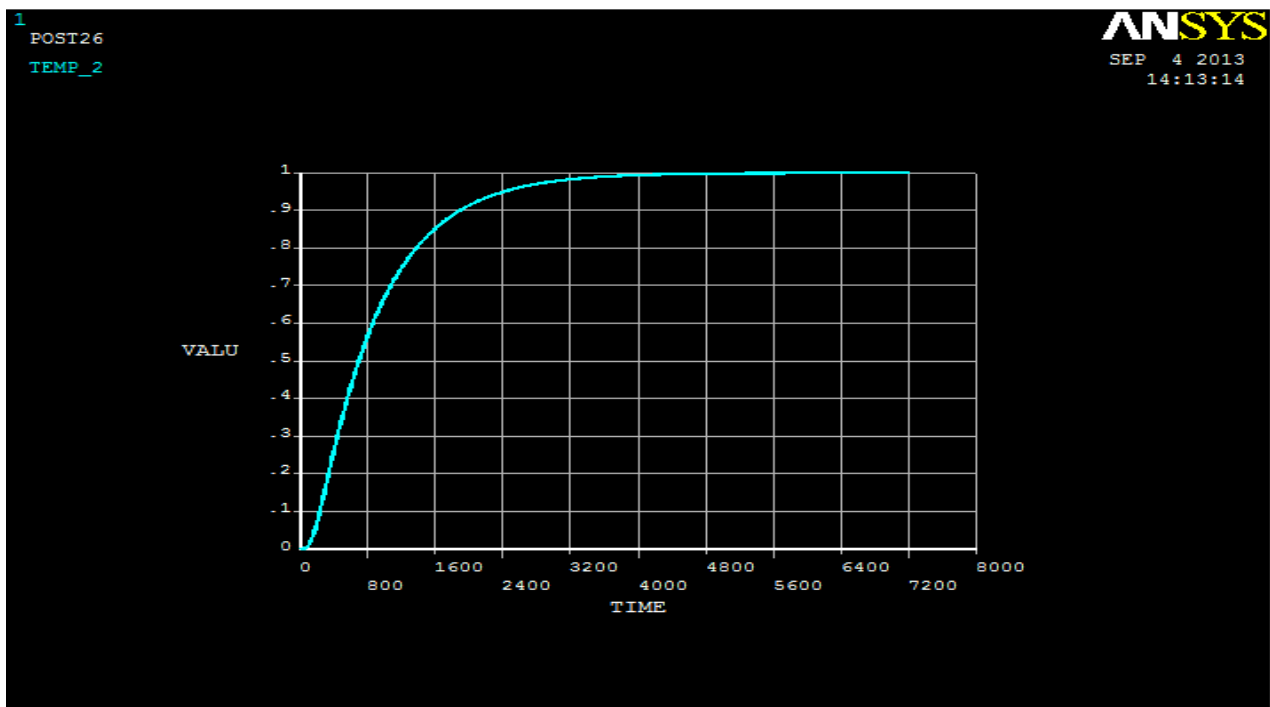


Fig.VI.16 charge hydraulique en fonction du temps à 1m de profondeur

On suit l'évolution de la charge hydraulique le long de la colonne en fixant le temps jusqu'à attendre la saturation total de colonne du sol.

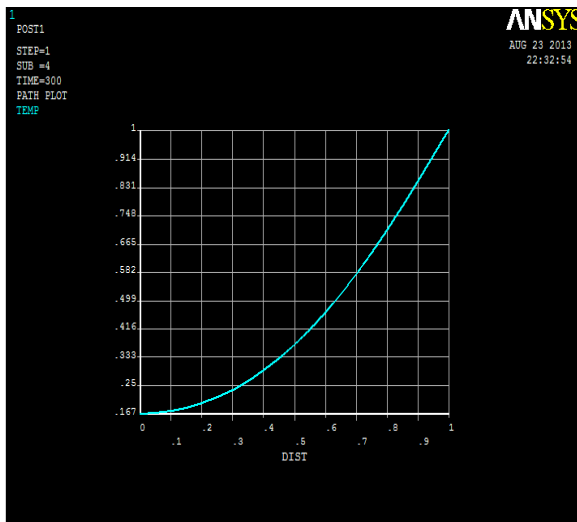


Fig.VI.17 $h=f(z)$ au temps $t = 5\text{min}$

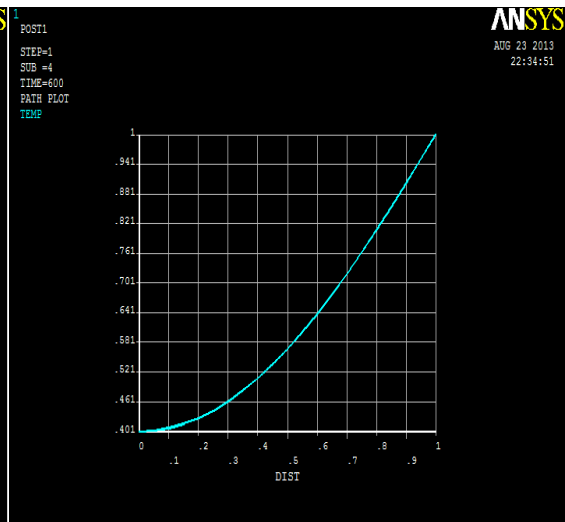


Fig.VI.18 $h=f(z)$ au temps $t = 10\text{min}$

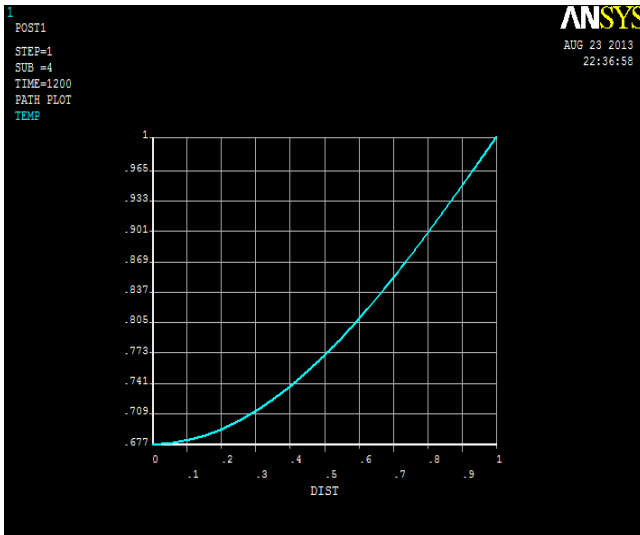


Fig.VI.19 $h=f(z)$ au temps $t = 20\text{min}$

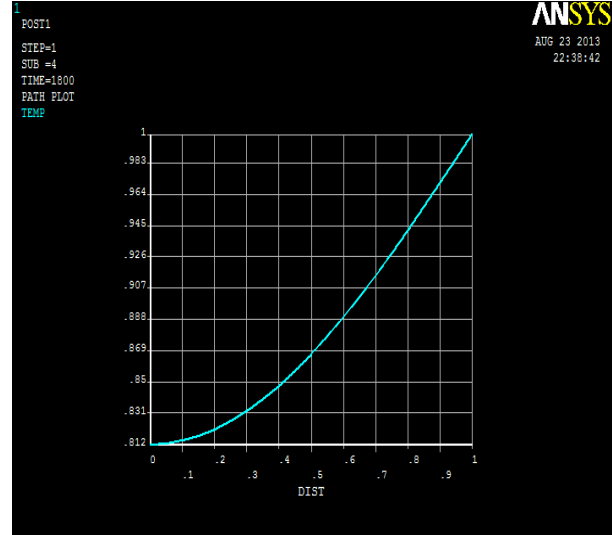


Fig.vi.20 $h=f(z)$ au temps $t = 30\text{min}$

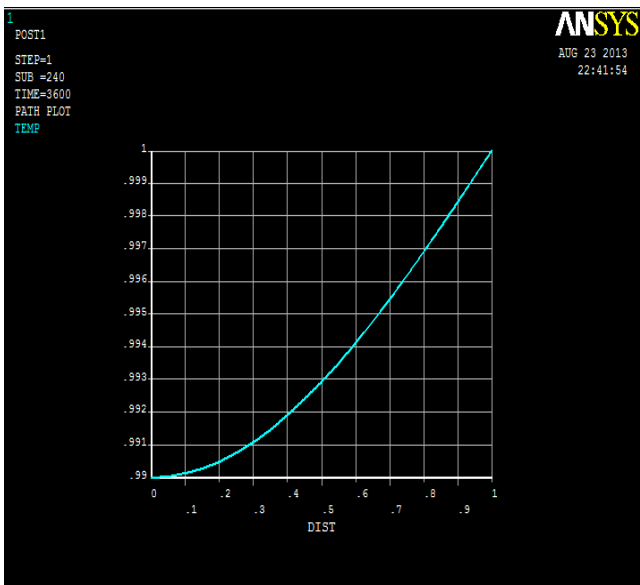


Fig.6.21 $h=f(z)$ au temps $t = 1\text{ heure}$

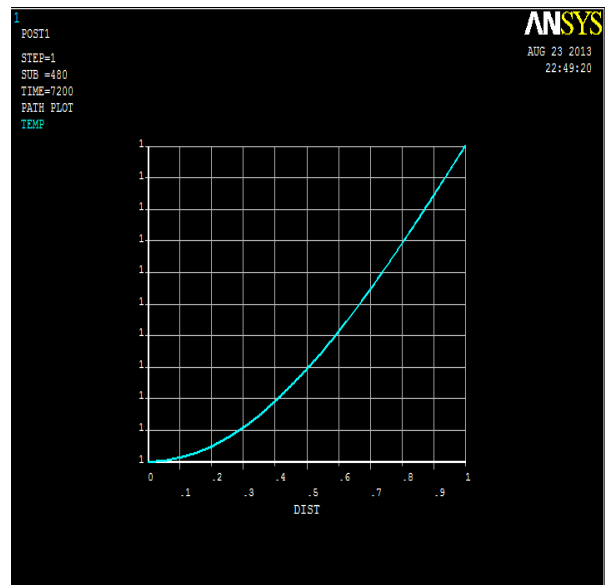


Fig.6.22 $h=f(z)$ au temps $t = 2\text{ heures}$

VII.3 Commentaires :

Après avoir traité les deux exemples cités, les conclusions suivantes ont pu être tirées :

L'étude de l'écoulement de l'eau dans les milieux poreux est importante en plus est un vaste domaine, cette étude donne une bonne compréhension des différentes caractéristiques du sol comme la perméabilité et la vitesse d'infiltration de l'eau dans le sol, l'eau qu'est un facteur très important dans le changement de propriété mécanique du sol, en plus cette étude spécifie les différentes entre les types des sols comme la perméabilité même en a la même taille de la matrice solide mais la distribution des pores fait la différence.

L'utilisation des codes de calculs dans le Domain non linéaire, comme l'écoulement dans le sol non saturée donne des bonnes résultats, le choix de type de maillage joue un rôle très important car dans le même problème d'infiltration et dans le même exemple l'utilisation de différentes maillages donne des résultats différentes .

VIII Conclusion général :

Les écoulements en milieux poreux jouent un rôle prépondérant dans différentes domaines des sciences et de l'ingénieur, la variété de problème provoqué par l'écoulement de l'eau dans le sol est vaste et sa multiplicité d'application est d'une importance considérable pour le concepteur afin d'améliorer les conditions d'exécution des travaux et d'assuré la stabilité hydraulique des ouvrages.

Malgré des hypothèses simplificatrices, la description des processus d'écoulement en non saturé est en général très complexe, car souvent ils donnent lieu à des variations de l'état hydrique du sol pendant l'écoulement. Ces variations impliquent des relations complexent entre la teneur en eau, la succion et la conductivité hydraulique.

Ce travail a permis de développer un outil d'étude performant de la migration de l'eau dans les milieux poreux saturés ou non saturés. Il se présente comme un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis par le code ANSYS, on parle de l'analogie thermique_ hydraulique

Ce travail est une modeste contribution à la connaissance de l'analyse des écoulements en régime transitoire. Cette étude a nécessité en premier lieu, une synthèse des travaux réalisés dans le domaine en question, ainsi que la représentation de tous les moyens nécessaires au traitement par élément finis.

Cette analyse permis de tirer les conclusions suivantes :

- la méthode des éléments finis est un outil très puissant pour l'analyse des écoulements.
- l'ingénieur doit être en mesure d'estimer tout toutes les conséquences de l'évolution de la charge au sein de l'infrastructure surtout lorsqu'un nouveau régime d'écoulement n'ai pas atteint
- la non saturation est directement liée au coefficient k qui lui-même dépend de la teneur en eau volumique, sa valeur influe directement sur le régime d'écoulement.

En fin ce travail ne pouvant être qu'une partie d'une recherche approfondie dans ce domaine

IX Bibliographie

1. **DIAW, H. BAMBA.** *modélisation du transfert de l'eau en milieu poreux non saturée:application a l'étude de la recharge des nappes d'eau souterraines de la région SOUDANO-SAHELIENNE.* Burkina Faso : Institut Français de recherche scientifique pour le développement en Coopération, 1996. THESE.
2. **KH, HAMID.** *etude des infiltration de l'eau a travers un modèle réduit de barrage en terre .* TLEMCCEN : UNIVERSITE DE TLEMCCEN INSTITUT GENIE CIVIL, 1995. PFE.
3. **D.ABDELHADI.** *les écoulements dans les milieux poreux non saturée.* TLEMCCEN : UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID DEPARTEMENT GENIE CIVIL, 2011. PFE.
4. **AHMED, N.** *modélisation numérique des écoulements dans les milieux poreux par la méthode des difference finis.* tlemcen : université de tlemcen département d'hydraulique, 1997.
5. **N.BOURSALI et MA ,DJAZIRI.** *analyse des écoulements dans les milieux poreux par la méthode des éléments finis.* TLEMCCEN : UNIVERSITE DE TLEMCCEN INSTITUT DE GENIE CIVIL, 1993. PFE.
6. **H, MEKKAOUI et A, GHENNANE.** *étude expérimental et simulation numérique de l'écoulement dans un sol non saturée.* tlemcen : université tlemc en, 2002. PFE.
7. **M.SAID.** *écoulement au travers les milieux poreux.approche stochastique.* TIZI OUZOU : UNIVERSITE MOULOUD MAMMERRI , 2012. PFE.
8. **M, DONALD, I, NORUM et M, JOHN.** *infiltration et physique de l'écoulement de l'eau en milieu poreux.* 1980.
9. **A.ZADJAOUI.** *resolution de l'équation de l'écoulement en regime transitoire dans les milieux poreux.* TLEMCCEN : UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID INSTITUT DE GENIE CIVIL, 1996. PFE.
10. **AHMED, A.** *modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogène .* TOULOUS : INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE, 2007. THESE.
11. **Z,BENYELLES.** (1988) : Modelling the flow of water into a partly saturated soil. Thesis of Master of Science by Reseach, 299 pages, University College, Cardiff ; United Kindom.
12. **Zadjaoui A.** (2000) : Etude des écoulements autour des tunnels : analyse bibliographique et modélisation numérique par la méthode des éléments finis. Thèse de magistère, Département de Génie Civil, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de Tlemcen, Algérie, 182 pages.
13. **M.GHFIR .**(2008) : étude de comportement d'un barrage a noyon centrale en tenant compte l'effet de contact. Thèse de magistère, Département de Génie Civil, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de Tlemcen, Algérie,114 page

14. **A, MUSY et M, SOUTTER** . physique du sol .presses polytechnique et universitaires romandes.1991 331 page

15. **A,MESSAMEH** . (1997) simulation numérique des écoulements souterraines en régime transitoire .
thèse de magister univercité de biskra