

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr BelKaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



THESE

Etude d'un modèle mathématique modélisant la compétition entre deux sous populations

pour obtenir le grade de

Docteur

Présentée par : M^{elle} Ouassila HENAOUI

Soutenue le: 31 / 01 / 2013, devant le jury composé de:

| | | |
|----------------------|-------------------------|--------------------------------------|
| Président: | Mohamed. Bouchekif | Pr. Univ. Tlemcen |
| Examineurs: | Mouffak. Benchohra | Pr. Univ. Sidi Bel Abbes |
| | Lahecen. Guedda | M.C.A Univ. Tiaret |
| | Tewfik. Mehdjoub | M.C.A Univ. Tlemcen |
| Encadreur: | Sidi. Mohamed. Bouguima | Pr. Univ. Tlemcen |
| Co-encadreur: | Kamel. Hamdache | Pr. Ecole Polytechnique Paris |

Année Universitaire : 2012-2013

A la mémoire de mon père.

Notations

Nous reprenons ici certaines notations énoncées dans [13], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra voir Adams [1]. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On définit pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ des fonctions mesurables telles que

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty.$$

Lorsque $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ représente l'espace des fonctions mesurables et bornées presque partout avec

$$\|u\|_{\infty} = \text{ess sup} \{ |u(x)| \mid x \in \Omega \}.$$

Pour chaque $a \in L^\infty(\Omega)$, on note $a_{\text{inf}} = \text{ess inf}(a)$ et $a^{\text{sup}} = \text{ess sup}(a)$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ sa longueur. On note

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right]^{1/p}$$

où D^α désigne la dérivée faible d'ordre α .

On désigne par $C(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Pour chaque $a \in C(\Omega)$, on note $a_{\min} = \min_{x \in \Omega} (a)$ et $a^{\max} = \max_{x \in \Omega} (a)$.
 Pour m un entier positif on définit l'espace

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{u : D^\alpha u \in C(\overline{\Omega}), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

où D^α désigne la dérivée fort d'ordre α .

Soit $0 < \nu < 1$, $C^\nu(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions holdériennes d'exposant ν muni de la norme

$$\|u\|_\nu = \|u\| + \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\nu}$$

et $C^{m+\nu}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions de $C^m(\overline{\Omega})$ telles que les dérivées d'ordre m sont holdériennes d'exposant ν avec la norme

$$\|u\|_{m,\nu} = \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta u\| + \sum_{|\beta|=m} \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x - y|^\nu}$$

Soit E un espace de Banach, on note $\mathbb{E} = E \times E$ un espace de Banach muni de la norme

$$\|(u, v)\|_{\mathbb{E}} = \max\{\|u\|_E, \|v\|_E\}.$$

On définit le cône positif de \mathbb{E} par

$$\mathcal{P}(\mathbb{E}) = \{(u, v) \in \mathbb{E} : u \geq 0 \text{ et } v \geq 0\},$$

il admet un intérieur non vide:

$$\text{int}\mathcal{P}(\mathbb{E}) = \{(u, v) \in \mathbb{E} : u > 0 \text{ et } v > 0\}$$

Les relations d'ordre \geq et \gg dans \mathbb{E} sont définies pour tout $U, V \in \mathbb{E}$ par

$$U \geq V \quad \text{si} \quad U - V \in \mathcal{P}, \text{ on dit que } (U - V) \text{ est positive.}$$

$$U > V \quad \text{si} \quad U - V \in \mathcal{P} - \{0\}, \text{ on dit que } (U - V) \text{ est strictement positive.}$$

$$U \gg V \quad \text{si} \quad U - V \in \text{int}\mathcal{P}, \text{ on dit que } (U - V) \text{ est fortement positive.}$$

Dans cette thèse on fixe $p > n$ et on note

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega), \quad \mathbb{W}^p(\Omega) = W^{2,p}(\Omega) \times W^{2,p}(\Omega)$$

et

$$\mathbb{W}_{\mathfrak{B}}^p(\Omega) = \{U \in \mathbb{W}^p : \mathfrak{B}U = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Table des Matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciments | 1 |
| Notations | 3 |
| Liste des figures | 8 |
| Liste des tableaux | 9 |
| I Introduction générale | 10 |
| 1 Quelques notions en biologie et en écologie | 13 |
| 1.1 Population | 13 |
| 1.2 Population structurée | 14 |
| 1.3 Interactions dans les populations | 14 |
| 2 Modélisation mathématique en biologie et en écologie | 15 |
| 2.1 Modèles simples | 15 |
| 2.1.1 Modèle de Malthus: | 16 |
| 2.1.2 Modèle logistique (modèle de verhulst): | 17 |
| 2.2 Modèles structurés | 19 |
| 2.2.1 Modèles structurés en âges | 20 |
| 2.2.2 Modèles structurés en stades | 20 |
| 2.2.3 Modèles structurés en espace | 21 |
| 3 Présentation des résultats obtenus | 23 |
| 3.1 Présentation du modèle | 23 |
| 3.2 Présentation de quelques résultats connus | 25 |
| 3.3 Présentation des résultats obtenus | 26 |
| 3.3.1 Système elliptique | 26 |
| 3.3.2 Système parabolique | 29 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| II | Système linéaire coopératif | 32 |
| 4 | Principe du maximum pour les équations elliptiques linéaires | 33 |
| 4.1 | Principe du maximum et valeur propre | 33 |
| 4.2 | Propriétés de la valeur propre principale | 35 |
| 5 | Système linéaire coopératif | 37 |
| 5.1 | Introduction | 37 |
| 5.2 | Principe du maximum et valeur propre | 37 |
| 5.3 | Quelques propriétés de la valeur propre | 41 |
| 5.4 | Une autre caractérisation du principe du maximum. | 41 |
| III | Modèle structuré en deux stades avec compétition | 45 |
| 6 | Système elliptique modélisant deux sous populations | 46 |
| 6.1 | Introduction | 46 |
| 6.2 | Existence et non existence des solutions | 46 |
| 6.3 | Unicité des solutions | 50 |
| 6.4 | Stabilité des solutions | 54 |
| 6.5 | Quelques remarques | 55 |
| 6.5.1 | Cas où les coefficients sont des fonctions continues | 55 |
| 6.5.2 | Cas où les coefficients a, b, c et d sont des constants | 57 |
| 7 | Système parabolique modélisant deux sous populations | 58 |
| 7.1 | Introduction | 58 |
| 7.2 | Préliminaires | 59 |
| 7.3 | Existence globale des solutions | 60 |
| 7.3.1 | Existence locale | 60 |
| 7.3.2 | Existence globale | 63 |
| 7.4 | Système quasimonotone | 64 |
| 7.5 | Existence d'un attracteur global | 66 |
| 7.6 | Comportement asymptotique des solutions | 70 |
| 8 | Simulations numérique | 74 |
| IV | Annexe | 80 |
| A. | Rappels sur la théorie spectrale | 81 |
| B. | Théorème du point fixe | 82 |
| C. | Rappels sur la théorie des semi-groupes | 83 |

TABLE DES MATIÈRES **7**

Perspectives **86**

Bibliographie **88**

Liste des Figures

Liste des Tables

| | | |
|-----|--|----|
| 8.1 | Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.1 et 8.2. . . . | 75 |
| 8.2 | Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.3 et 8.4. . . . | 76 |
| 8.3 | Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.5 et 8.6. . . . | 77 |
| 8.4 | Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.7 et 8.8. . . . | 78 |
| 8.5 | Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.9 et 8.10. . . . | 79 |

Partie I

Introduction générale

Dans la majorité des modèles mathématiques étudiés, les différences entre les individus d'une même population ont été ignorés. En effet, les individus d'une même population ont été traité comme étant identiques. Mais les populations biologiques sont généralement constituées d'une grande diversité de groupes d'âge, leurs dynamiques sont souvent très différentes (les habitudes alimentaires, la vulnérabilité face aux prédateurs etc). Il est donc nécessaire de prendre cette diversité en compte dans les modèles.

Les individus de nombreuses espèces ont une vie composée d'une séquence de stades dans laquelle leurs caractéristiques sont similaires à celles des autres individus dans le même stade et sensiblement différentes de celles des individus dans des autres stades. La plupart des espèces montrent visiblement des changements morphologiques; comportementales ou biochimiques qui définissent les limites de ces stades.

Les individus peuvent modifier radicalement la nature de leurs interactions avec leurs environnements, ils peuvent alors changer leurs milieu de ressources. Par conséquence la compétition entre les individus est réduite, au moins entre les individus de différents stades, par exemple quelques insectes, amphibiens et de nombreux invertébrés marins.

Cependant, d'autres espèces ont des cycles de vie plus simples où les individus subissent moins de changements au cours de leurs développement et donc la compétition par différents stades est augmentée, que ce soit par le partage des ressources communes limitées ou en interaction directe. C'est le cas pour la plupart des poissons, des oiseaux, des mammifères, de nombreuses plantes (voir [25], [26]).

Une question qui se pose dans ces types de modèles est: quels sont les effets de cette compétition sur la dynamique de la population? se stabilise-t-elle ou déstabilise la population et dans quel sens?

De nombreux auteurs ont étudiés des différents types de modèles structurés en stades (voir, par exemple, [2], [19], [44], [68], [69]). La dépendance spatiale a été ignorée dans les modèles ci-dessus. Toutefois, dans de nombreux systèmes écologiques, les populations étudiées peuvent se disperser dans l'espace (voir [30], [67], [70], [71]). Cette dispersion spatiale résulte de la tendance de certaines individus à se déplacer vers des régions où la densité de population est plus faible (cause de la limitation des ressources).

En particulier, quelques études sur la compétition entre les jeunes et les adultes ont fait leur apparition dans la littérature, certains auteurs qui s'intéressent au modèle de proie-prédateur, modèle de compétition ou hôte-parasite ont également explorés la possibilité que soit l'une des populations (voir [19], [30], [68], [70]), ou les deux sont structurées en sous-populations adultes et juvéniles (voir [69]).

Dans ce travail, nous étudions la dynamique d'une population structurée en deux sous-populations, adultes et jeunes, qui sont en compétition pour les ressources.

Cette thèse se divise en trois parties. Dans la première partie introductive, nous commencerons par définir dans un premier chapitre quelques notions classiques en biologie et en écologie et plus particulièrement en dynamique des populations qui seront utilisées dans la suite.

Après un court historique des modèles mathématiques en biologie et en écologie, dans le chapitre 2, nous présentons dans le chapitre qui suit, le modèle et les principaux résultats qui font l'objet de cette étude.

La seconde partie est consacrée à l'étude des systèmes linéaires coopératifs. En fait, nous donnons le théorème du principe du maximum fort et d'autres outils de base qui seront utilisés dans l'étude du système stationnaire.

La troisième partie est composée de trois chapitres, les deux premiers qui correspondent à deux articles dont le premier est paru dans [37] et le deuxième a été soumis dans [33].

L'origine biologique du système que l'on étudie impose de se restreindre aux solutions positives. Donc dans le chapitre 6, Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une solution positive du système stationnaire. Notre approche est basée sur le principe du maximum du système linéaire coopératif et la théorie du point fixe. La méthode itérative de sous-solutions et sur-solutions nous permettra d'étudier l'unicité des solutions et nous allons établir leurs stabilité.

Dans le chapitre 7, nous discutons l'existence et l'unicité des solutions locales. Des estimations a priori permettent d'établir l'existence globale des solutions et l'existence d'un ensemble compact qui attire toutes les solutions. Un tel ensemble est appelé un attracteur global. Nous étudions ensuite le comportement asymptotique de la solution par rapport à la solution stationnaire.

Finalement, le chapitre 8 est consacré à des simulations numériques du système sous MATLAB.

Chapitre 1

Quelques notions en biologie et en écologie

Dans ce chapitre introductif, on ne fait que définir quelques notions classiques en biologie et en écologie et plus particulièrement en dynamique des populations qui seront utilisées dans la suite.

On peut distinguer deux objectifs de la modélisation mathématique. Le premier permet d'écrire et comprendre les phénomènes observés. Le second consiste à prévoir les dynamiques et donc à répondre à une demande sociale en donnant des informations nécessaires à la prise de décision.

Dans la seconde moitié du 20^{ème} siècle, la modélisation mathématique a fait l'objet de nombreuse recherche dans plusieurs domaines en particulier la biologie des populations, l'écologie et l'épidémiologie.

- La dynamique des populations est l'étude des tailles de population au cours du temps.

- L'étude de la dynamique des interactions entre les humains et des agents pathogènes fait l'objet de l'épidémiologie.

1.1 Population

Une population est un ensemble d'êtres vivants (individus), animaux ou végétaux, appartenant à la même espèce, vivant dans le même milieu et au même moment et qui sont capable de se reproduire entre eux.

Exemples:

- Des bactéries cultivées dans une petite soucoupe.
- Des petits rongeurs dans une forêt.
- Des poissons dans un lac.

1.2 Population structurée

Une population peut se décomposer en sous catégories ou sous populations en fonction de leur âge ou d'une caractéristique quelconque (taille, durée ou la gravité de la pathologie).

Exemples:

- Il est nécessaire de distinguer entre les individus immatures et les individus adultes capable de se reproduire.
- Les bactéries pour se diviser doit atteindre une certaine taille.

1.3 Intéractions dans les populations

Diverses interactions ont lieu entre les individus d'une même population, ou encore entre ceux de populations différentes. Ces interactions peuvent prendre diverses formes dont les plus importantes sont:

Prédation: C'est la consommation d'un organisme vivant, animal ou végétal, par un autre. Elle maintient l'état sanitaire des populations en éliminant les plus faibles et les malades, les individus en bonne santé échappent plus facilement à leurs ennemis.

Compétition: Deux êtres vivants entrent en compétition lorsqu'ils se disputent une même ressource, qui par ailleurs se trouve en quantité insuffisante dans le milieu. La ressource qui est disputée peut être l'alimentation, un lieu de nidification, etc.

La compétition peut se produire entre individus de la même espèce: c'est la compétition dite *intraspécifique*. Elle peut aussi se produire entre individus d'espèces différentes: elle est dite *interspécifique*.

Une autre forme importante d'interaction concerne celle entre les différents groupes de la population en présence d'une épidémie. Par exemple la maladie "Gonorrhée", due à la bactérie "Neisseria Gonorrhoeae", est responsable d'infection sexuellement transmissible.

Chapitre 2

Modélisation mathématique en biologie et en écologie

La complexité des phénomènes à étudier dans la nature nécessite le recours à des modèles simplifiés (des modèles mathématiques). Nous allons présenter, d'une manière historique, le développement des modèles mathématiques en biologie et en écologie (voir [55]) afin d'aboutir au modèle discuter dans cette thèse. Dans un premier temps nous présentons deux modèles simples pour des populations non structurées. Ensuite nous verrons quelques modèles structurés (en âges, en stades, en groupes, en espace).

2.1 Modèles simples

Un modèle est une version simplifiée du phénomène réel étudié. L'un des premiers modèles mathématiques en biologie remonte au 13^{ème} siècle dit "*problème de Fibonacci*". A partir d'une suite de récurrence, il modélise une population de lapins. Il fallut ensuite attendre la fin du 18^{ème} siècle et 19^{ème} siècle pour que d'autres modèles apparaissent: le modèle de Malthus (1798)[51] puis le modèle de Verhulst (1838)[65] .

Tout d'abord, pour écrire un modèle mathématique simple, on considère que tous les individus d'une population sont écologiquement (resp biologiquement) équivalents:

- Tous les individus ont le même cycle de vie,
- A chaque stade de vie correspond un ensemble précis de processus écologiques,
- Pour le même milieu, la probabilité des processus écologiques est la même pour tous les individus.

2.1.1 Modèle de Malthus:

• Modèle en temps discret

Dans ce modèle on étudie les effectifs d'une population, noté u_t , à des instants d'observation t , avec $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$, mesuré en minute, heures, journées, années,...

On suppose qu'on regarde la variation de la population entre deux instants t et $t + 1$.

$$u_{t+1} - u_t = N_t - M_t + I_t - E_t \quad (2.1)$$

où N_t : nombre de naissances entre les deux instants.

M_t : nombre de décès entre les deux instants.

I_t : nombre d'individus immigrés entre les deux instants.

E_t : nombre d'individus émigrés entre les deux instants.

Pour simplifier, on suppose que l'on considère une population fermée au mouvement migratoires (sans émigration ni immigration).

Les nombres de naissances et de morts dans une population, pendant une période de courte durée, sont proportionnels

- à l'effectif de cette population.
- à la durée de cette période.

On note par

\mathcal{N} le taux de natalité, le nombre d'individus moyens produits par individus présents par unité de temps,

\mathcal{M} le taux de mortalité, la proportion d'individus qui meurent par unité de temps.

L'équation (2.1) devient:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \mathcal{N}u_t - \mathcal{M}u_t + u_t \\ &= (r + 1)u_t \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $r = \mathcal{N} - \mathcal{M}$. Le paramètre $r + 1$ est appelé le taux de croissance de la population.

La suite u_t est une suite géométrique de raison $(r + 1)$, ce qui donne

$$u_{t+1} = (r + 1)^t u_0,$$

où u_0 est l'effective initial de la population (à l'instant $t = 0$).

Pour t grand la dynamique de la population à l'instant t dépend de r :

Si $r = 0$: l'effective de la population reste constant au cours du temps.

Si $r < 0$: l'effective de la population tend vers 0.

Si $r > 0$: l'effective de la population augmente (croissance infinie).

En temps discret, on sait pas ce qui se passe entre deux instants t et $t + 1$. Ce type de modèle est souvent utilisé en biologie à cause des rythmes saisonniers des populations. Il est pratique pour les populations dont les générations ne se chevauchent pas (certains insectes, des plantes annuelles).

• Modèle en temps continu

Un modèle en temps continu permet de connaître à tout moment l'effectif de la population. Entre deux instants très proches t et $t + dt$ ($dt \rightarrow 0$) la variation de la population est notée du . Le modèle (2.2) permet d'exprimer la variation du par:

$$du = \mathcal{N} \times dt \times u(t) - \mathcal{M} \times dt \times u(t).$$

On écrit

$$\frac{du}{dt} = ru(t),$$

où r est le taux de croissance de la population. En intégrant, on trouve

$$u(t) = u_0 e^{rt}.$$

Donc la dynamique de la population est similaire à celle du modèle à temps discret:

- Si $r = 0$, la population reste constante, avec $u(t) = u_0 \quad \forall t \geq 0$.
- Si $r < 0$, la population décroît exponentiellement vers 0, $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.
- Si $r > 0$, la population croît exponentiellement vers infinie, $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Ce modèle de base peut être utilisé pour présenter des populations humaines ou bactériennes car il n'y a pas de saison de reproduction.

2.1.2 Modèle logistique (modèle de verhulst):

• Modèle en temps continu

Une des limites du modèle précédent vient du fait que cela suppose des ressources infinies puisque la population augmente d'une manière exponentielle vers l'infinie. Pour le rendre un peu plus réaliste, on peut supposer que les ressources du milieu sont limitées et donc une compétition entre les individus apparaisse. A l'approche de cette limite le taux de mortalité augmente et la croissance de la population diminue progressivement jusqu'à devenir nulle. Si la population est grande le taux de mortalité augmente beaucoup du fait de la compétition et donc dépend de l'effectif de la population. Avec cette définition le taux d'accroissement est donné par:

$$r(u) = r - cu,$$

où c représente la compétition due à la limite des ressources du milieu.

Le modèle logistique est représenté par l'équation

$$\frac{du}{dt} = r \left(1 - \frac{u}{K}\right) \times u, \quad (2.3)$$

où $K = \frac{r}{c}$ est appelé la capacité d'accueil du milieu, et qui représente donc la densité d'individus qui peuvent vivre simultanément sans nuire de la compétition.

Point d'équilibre: A l'équilibre les effectifs de la population ne varient plus:

$$r \left(1 - \frac{u}{K} \right) \times u = 0$$

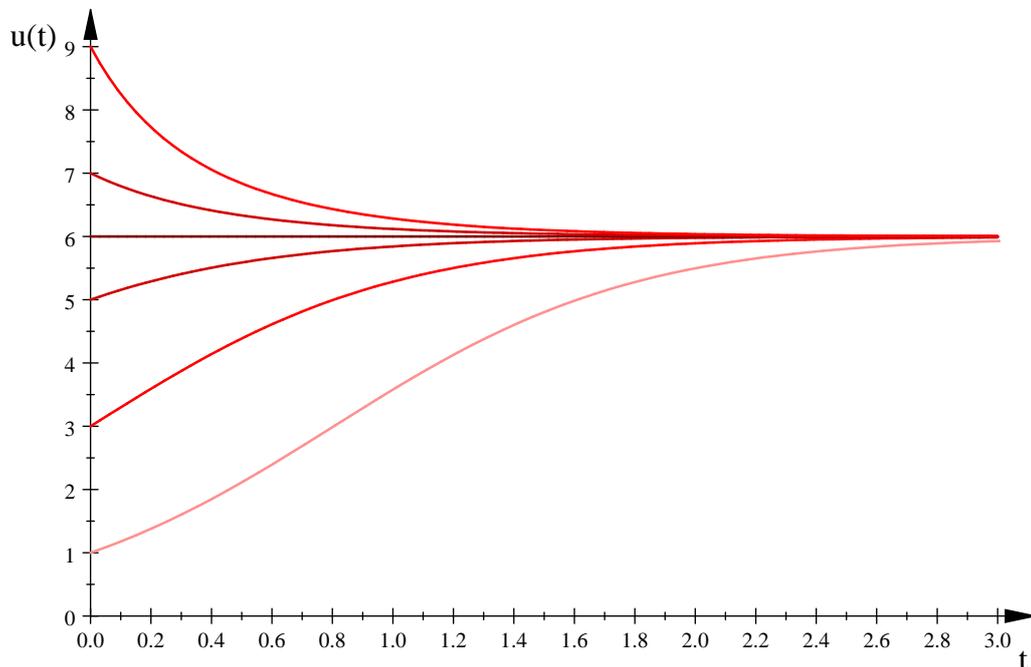
Le système (2.3) admet les points d'équilibres $u_* = 0$ si $r < 0$ et $u_* = K$ si $r > 0$.

Stabilité: Le point $u_* = 0$ est un équilibre instable (si on introduit quelques individus dans le milieu $u(t)$ croît et donc s'éloigne de 0). Par contre $u_* = K$ est stable (si $u_0 > K$ il y a trop d'individus par rapport aux capacités du milieu, donc $u(t)$ décroît et tend vers K , et inversement si $u_0 < K$).

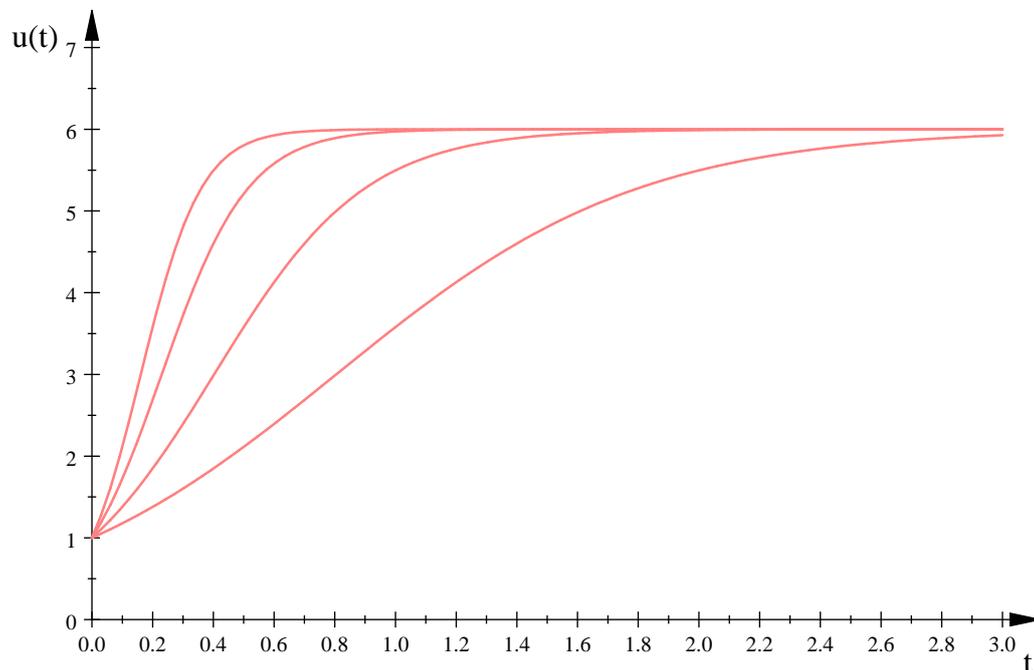
Comportement asymptotique: En intégrant l'équation (2.3) on obtient

$$u(t) = \frac{Ku_0 e^{rt}}{K + u_0(e^{rt} - 1)} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

- Si $r = 0$, alors $u(t) = u_0 \quad \forall t \geq 0$,
- Si $r < 0$, alors $u(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$,
- Si $r > 0$, alors $u(t) \rightarrow K$ quand $t \rightarrow +\infty$.



$K = 6, r = 2$ et u_0 varie.



$$u_0 = 1, K = 6, r \text{ varie.}$$

Sur les graphes figure 2.1 et figure 2.2, nous pouvons voir l'influence du taux de croissance r et la capacité limite K sur la variation des effectifs de la population.

- La variation de la population dépend de K par rapport à la condition initiale u_0 .
- Plus r est grand, plus la population va croître rapidement vers le point d'équilibre.

Remarque: Les modèles précédents négligent plusieurs points :

- * L'hétérogénéité des paramètres entre différentes classes d'individus :
 - Les juvéniles ne se reproduisent pas.
 - Les individus âgés ont un taux de mortalité plus élevé, etc.
- * L'hétérogénéité spatiale ou temporelle de l'environnement.

La mortalité ne sera pas la même toute l'année ou en tout point de localisation de la population. Par exemple elle sera plus grande en hiver à cause du froid.

2.2 Modèles structurés

Dans ce type de modèle les individus de la population ne seront plus considérés comme tous identiques. Nous allons présenter ici que les modèles, en temps continu, qui seront utilisés par la suite.

2.2.1 Modèles structurés en âges

Les individus d'une population naissent, grandissent, arrivent à la maturité, se reproduisent puis meurent, donc le taux de mortalité et de natalité est différent selon l'âge des individus. On ne considèrera pas ce type de modèle dans ce travail.

2.2.2 Modèles structurés en stades

Dans certaines espèces les populations sont difficiles à modéliser en fonction de l'âge, il est parfois plus intéressant d'utiliser des modèles structurés en stades. On commence par donner un exemple où la population est structurée en deux stades et de la même manière on obtient un modèle plus générale à n stades.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = av - eu \\ \frac{dv}{dt} = bu - (f + a)v \end{cases}$$

où $u(t)$: la densité de la population des adultes à l'instant t ;

$v(t)$: la densité de la population des juveniles à l'instant t ;

a : le taux de passage du stade juvenile au stade adulte;

b : le taux de natalité des juveniles;

e : le taux de mortalité des adultes ;

f : le taux de mortalité des juveniles.

Si on prend en considération la compétition entre les individus de la population le système devient

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = av - eu - c_1u^2 - c_2uv \\ \frac{dv}{dt} = bu - (f + a)v - d_1v^2 - d_2vu \end{cases}$$

où c_i et d_i ($i = 1, 2$) représentent la compétition entre les individus du même stade ou de différents stades. Ce système doit être complété par des valeurs des deux sous populations au temps initial (conditions initiales).

On remarque que l'équation de chacune des variables dépend de la seconde variable, elles sont donc couplées.

Les modèles cités ci-dessus sont appliqués à une seule population, mais les populations ne vivent pas isolées et sont donc en interactions entre elles. En 1925, Volterra, motivé par des questions relatives à l'augmentations des poissons (des sardines et des requins) dans la mer Adriatique pendant la gerre, a proposé son fameux modèle "proie-prédateur". Dans la même époque, un modèle similaire a été développé par Lotka. Le modèle de compétition entre les différents populations a été écrit pour la première fois dans les année 20 pour étudier la dynamique des populations de lièvres et de lynx.

2.2.3 Modèles structurés en espace

Nous avons jusqu'à présent négligé la dépendance spatiale des populations étudiées. Pour en tenir compte, nous allons montrer comment représenter des populations en évolution dans l'espace et dans le temps (voir [48], [49], [55]).

On suppose que les individus de la population résident dans une région Ω (un ouvert de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$). On suppose qu'en chaque point $x \in \Omega$, les individus ont une probabilité identique de se déplacer d'un côté ou de l'autre. On note $u(t, x)$ la densité d'une population en $x \in \Omega$ à l'instant t ; c'est le nombre d'individus par unité de volume. Soit x un point de l'habitat Ω , $\{O_n \subset \Omega\}_{n=1}^\infty$ est une suite de régions spatiales entourant le point x , leur mesure spatiale $|O_n|$ tend vers 0, lorsque $n \rightarrow \infty$ et $O_{n+1} \subset O_n$ alors

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Nombre d'individus dans } O_n \text{ au temps } t}{|O_n|}.$$

La population totale dans n'importe quelle sous région O de Ω , à l'instant t est

$$\int_O u(t, x) dx.$$

Supposons que la variation de la population au cours du temps est due au flux à travers ∂O , le bord de O . La loi de conservation donne

$$\frac{d}{dt} \int_O u(t, x) dx = \int_O \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = - \int_{\partial O} J(t, s) \cdot \eta(s) ds, \quad (2.5)$$

où $J(t, s) \cdot \eta(s)$ designera le flux d'individus par unité de temps à travers un élément de surface perpendiculaire au vecteur normale $\eta(s)$ au point s .

D'après le théorème de divergence on a

$$\int_{\partial O} J(s, t) \cdot \eta(s) ds = \int_O \operatorname{div}_x [J(x, t)] dx, \quad (2.6)$$

où $\operatorname{div}_x [J(x, t)]$ est la divergence, par rapport à la variable x , du flux $J(x, t)$. Donc de (2.7) et (2.8) on obtient

$$\int_O \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}_x [J(t, x)] \right) dx = 0.$$

Comme O est arbitraire, alors u est une solution de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}_x [J(t, x)] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega.$$

La loi de Fick exprime que les individus se déplacent des régions où la densité de population est plus grande à des régions où cette densité est plus faible et leur flux

est proportionnel à la variation de la densité. Le coefficient de proportionnalité, noté D , est appelé coefficient de diffusion (il peut dépendre de la position spatiale $D = D(x)$). En outre, le signe de cette dérivée de u par rapport à x est opposé à celui du flux. En effet, si la densité est décroissante en x , comme les individus se déplacent aléatoirement, le flux est orienté positivement. Il en découle la relation

$$J(t, x) = -D(x)\nabla u(t, x).$$

où $\nabla u(t, x)$ est le gradient du vecteur u par rapport à x . On obtient ainsi l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}_x [D(x)\nabla u] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega.$$

Dans le cas particulier où le coefficient de diffusion est constant (indépendant de x), l'expression précédente devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0.$$

Rappelons que nous avons supposé, momentanément, que la variation de la population au cours du temps est due au flux à travers le bord de O , mais on peut évidemment ajouter tous les termes, vus dans les sections précédentes, décrivant la dynamique de la population étudiée et les regrouper ici sous le nom de *terme de réaction*, noté $F(u)$. Donc l'équation devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}_x [D(x)\nabla u] = F(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega.$$

Ce type d'équation porte le nom d'*équation de réaction-diffusion*.

Ces systèmes d'équations de réaction-diffusion décrivent la manière dont la concentration ou la densité distribuée dans l'espace varie sous l'influence de deux processus : les interactions locales des populations, et la diffusion qui provoque la propagation des populations dans l'espace.

Il est très important de préciser la manière dont les individus se comportent aux bords du domaine. Restent-ils dans le domaine? Peuvent-ils en sortir? disparaissent-ils? et si oui de quelle manière ?

Deux types de conditions aux bords sont utilisées dans cette thèse:

a) *Conditions aux bords de Dirichlet* sont des conditions qui fixent la valeur de u sur le bords

$$u(t, x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

b) *Conditions aux bords de Neumann* sont des conditions qui fixent le flux d'individus vers l'extérieur

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est le vecteur normal.

Ce choix est conditionné par l'hypothèse que la population évolue dans un domaine isolé.

Chapitre 3

Présentation des résultats obtenus

3.1 Présentation du modèle

L'objet de cette thèse est l'étude d'un système de réaction diffusion qui modélise la dynamique d'une population structurée en deux sous-populations, adultes et jeunes en compétition pour les ressources:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_1 u = a(x)v - e(x)u - c(x)u(u+v) & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}_2 v = b(x)u - f(x)v - d(x)v(u+v) & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \\ \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}v = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x); v(0, x) = v_0(x) & \text{dans } \bar{\Omega}. \end{array} \right. \quad (\text{SP})$$

où Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$). L'opérateur \mathcal{L}_k (pour $k \in \{1, 2\}$) est un opérateur elliptique d'ordre deux sous forme divergence

$$\mathcal{L}_k u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.1)$$

où $a_{ij}^k \in C^1(\bar{\Omega})$. L'opérateur peut alors s'écrire sous la forme non divergence

$$\mathcal{L}_k u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij}^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.2)$$

où $b_i^k \in C(\bar{\Omega})$.

On suppose que les coefficients a_{ij}^k sont symétriques $a_{ij}^k = a_{ji}^k$ et vérifiant les conditions d'ellipticité: Il existe $\theta_k > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x) \xi_i \xi_j \geq \theta_k |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$$

- ★ La fonction u représente la concentration de la population des adultes,
- ★ v représente la concentration de la population des juveniles,
- ★ a désigne le taux de la population des juveniles qui deviennent adultes,
- ★ Le coefficient b est le taux de natalité des juveniles produit par les adultes,
- ★ e le taux de mortalité des adultes,
- ★ $\mathfrak{f} = f + a$ avec f le taux de mortalité des juveniles,
- ★ Les fonctions c et d mesurent la compétition entre les adultes et les juveniles.

Les coefficients du système $a, b, e, \mathfrak{f}, c, d \in L^\infty(\Omega)$ sont des fonctions positives et bornées dans Ω . Les conditions initiales u_0 et v_0 sont des fonctions positives et bornées dans $\overline{\Omega}$.

L'opérateur \mathfrak{B} représente les conditions de bord de Dirichlet

$$u = v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

ou bien de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On considère le système elliptique associé au système (SP)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = a(x)v - e(x)u - c(x)u(u+v) & \text{dans } \Omega \\ \mathcal{L}_2 v = b(x)u - \mathfrak{f}(x)v - d(x)v(u+v) & \text{dans } \Omega \\ \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{SE})$$

Le système (SE) s'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{cases} \mathcal{L}U = AU + N(U) & \text{dans } \Omega \\ \mathfrak{B}U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} -e(x) & a(x) \\ b(x) & -\mathfrak{f}(x) \end{pmatrix}$$

et N le terme non linéaire tel que

$$N(U)(x) = \begin{pmatrix} -c(x)u(u+v) \\ -d(x)v(u+v) \end{pmatrix}.$$

3.2 Présentation de quelques résultats connus

Dans le cas particulier où $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = -\Delta$ et c, d sont des constantes, le système (SP) et le système stationnaire associé (SE) ont été discutés comme étant un problème de contrôle optimal dans [8], [15] et [46].

Sous certaines conditions les auteurs ont montré que le problème (SE), pour les conditions au bord de Neumann dans [8] et pour les conditions de Dirichlet dans [15], admet une unique solution strictement positive.

Soit

$$C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} = \{(e, f) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) : 0 \leq e \leq \delta_1, 0 \leq f \leq \delta_2\},$$

où δ_1, δ_2 sont des constantes positives fixées.

Considérons le problème de valeurs propres suivant:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k w + q(x) w = \rho w & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On note par $\varphi_1(\mathcal{L}_k + q)$ l'unique fonction propre associée à la valeur propre principale $\rho_1(\mathcal{L}_k + q)$ qui vérifie $\varphi_1(\mathcal{L}_k + q) > 0$ dans Ω et $\|\varphi_1(\mathcal{L}_k + q)\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

Théorème 3.1 ([8]) : *Supposons que $c, d \in \mathbb{R}^+$*

$$a_{\inf} b_{\inf} > \delta_1 \delta_2, \quad (\text{H1})$$

$$\begin{cases} a^{\sup} \leq a_{\inf} (1 + \Gamma) \\ b^{\sup} \leq b_{\inf} (1 + \Gamma^{-1}) \end{cases} \quad \text{où } \Gamma = \frac{a_{\inf}/c}{b_{\inf}/d}. \quad (\text{H2})$$

Alors, pour chaque $(e, f) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, il existe une unique solution strictement positive de (SE).

Théorème 3.2 ([15]) : *Supposons que $c, d \in \mathbb{R}^+$*

$$a_{\inf} b_{\inf} > \rho_1(-\Delta + \delta_1) \rho_1(-\Delta + \delta_2), \quad (\text{H1})$$

$$\begin{cases} a^{\sup} \leq a_{\inf} (1 + \Gamma) \\ b^{\sup} \leq b_{\inf} (1 + \Gamma^{-1}) \end{cases} \quad \text{où } \Gamma = \frac{a_{\inf}/c}{b_{\inf}/d}. \quad (\text{H2})$$

Alors, pour chaque $(e, f) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, il existe une unique solution strictement positive (u, v) du système (SE). De plus,

$$(u, v) \in \left[0, \frac{a_{\inf}}{c}\right] \times \left[0, \frac{b_{\inf}}{d}\right].$$

Dans le cas où $\mathcal{L}_i = -d_i\Delta$, $a, b, e, f \in C(\overline{\Omega})$ et c, d sont des constantes non nulles, K.J.Brown et Y. Zhang [14] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une solution strictement positive du système (SE) avec les conditions au bord de Neumann, en terme de la valeur propre principale du système linéaire correspondant.

Théorème 3.3 : *Le système (SE) admet une solution fortement positive si, et seulement si,*

$$\lambda_1^\Omega(A) < 0$$

où $\lambda_1^\Omega(A)$ valeur propre principale de l'opérateur $(\mathcal{L} - A(x))$.

Dans mon mémoire de magistère [36], nous avons démontré le résultat obtenu par K.J.Brown et Y. Zhang [14] dans le cas où c, d sont deux fonctions continues strictement positives et avec des conditions au bord de Dirichlet, par une approche basée sur la théorie d'indice d'un point fixe qui est une méthode de continuation différente de la méthode de monotonie utilisée dans [14]. Nous avons démontré les résultats suivants:

1) Si

$$\sqrt{a_{\min} b_{\min}} > \rho_1(-\Delta + e + f),$$

alors le système (SE) admet une solution strictement positive.

2) Si le système (SE) admet une solution strictement positive alors

$$a^{\max} b^{\max} > \rho_1(-\Delta + e) \rho_1(-\Delta + f).$$

3.3 Présentation des résultats obtenus

Nous décrivons ici les principaux résultats obtenus dans cette thèse. Nous commençons par donner quelques résultats pour le système stationnaire.

3.3.1 Système elliptique

Dans [8] et [15] les auteurs ont énoncé un résultat d'existence et d'unicité des solutions strictement positives. La condition d'existence est plus faible dans [12] et [14], elle est donnée en terme de la valeur propre principale du système linéaire correspondant. Il sera intéressant d'établir une condition équivalente en terme des coefficients du système.

Supposons que les coefficients c et d sont des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$.

Tout d'abord nous avons généralisé dans [37] les résultats d'existence obtenus dans [12] et [14] en éliminant la condition

$$(C_2) \quad c(x) > 0 \text{ et } d(x) > 0 \text{ dans } \Omega.$$

Les coefficients $c(x)$ et $d(x)$ ne sont pas nécessairement strictement positives veut dire qu'il peut y avoir des régions dans Ω où il y a suffisamment de ressources et donc la compétition entre les individus est nulle dans ces régions.

Nous allons montrer le théorème suivant:

Théorème 3.4 *Le système (SE) admet une solution fortement positive si, et seulement si,*

$$\lambda_1^\Omega(A) < 0.$$

Si la condition (C_2) est vérifiée alors une solution fortement positive (u, v) , si elle existe, est unique. De plus,

$$(u, v) \in \left[0, \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}}\right] \times \left[0, \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}\right].$$

Cela est une conséquence du théorème suivant:

Théorème 3.5 *Supposons que $\lambda_1^\Omega(A) < 0$. Si les conditions*

$$(C_2) \quad c(x) > 0 \quad \text{et} \quad d(x) > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

et

$$(C_R) \quad \begin{cases} a^{\sup} \leq e_{\inf} \Gamma + c_{\inf} R_1 (1 + \Gamma) \\ b^{\sup} \leq f_{\inf} \Gamma^{-1} + d_{\inf} R_2 (1 + \Gamma^{-1}) \end{cases} \quad \text{où} \quad \Gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution de (SE) dans

$$[\varepsilon\varphi_1, R_1] \times [\varepsilon\varphi_2, R_2],$$

où ε est suffisamment petit et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A)$.

Il est clair que la condition (C_R) est toujours vérifiée dans les cas suivants:

- 1) Si $R_1 \geq \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}}$ et $R_2 \geq \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}$;
- 2) Si $R_1 = R_2 \geq \max \left\{ \left(\frac{a^{\sup} - e_{\inf}}{2c_{\inf}} \right), \left(\frac{b^{\sup} - f_{\inf}}{2d_{\inf}} \right) \right\}$.

Remarque 3.1 *Nous allons montrer dans le chapitre 5 que si a et b sont des constantes, alors $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ si et seulement si,*

$$ab > \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f).$$

par conséquent,

$$\max \left\{ \left(\frac{a^{\sup} - e_{\inf}}{2c_{\inf}} \right), \left(\frac{b^{\sup} - f_{\inf}}{2d_{\inf}} \right) \right\} > 0.$$

Maintenant on suppose que les coefficients c et d ne sont pas nécessairement strictement positives et on considère la matrice suivante

$$A_r(x) = \begin{pmatrix} -e(x) - 2rc(x) & a(x) \\ b(x) & -f - 2rd(x) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.6 *Supposons que $\lambda_1^\Omega(A) < 0$. Si il existe $r > 0$ tel que*

$$\lambda_1^\Omega(A_r) > 0.$$

Alors, il existe une unique solution de (SE) dans

$$\left[\varepsilon \varphi_1, \frac{r}{\varepsilon} \psi_1 \right] \times \left[\varepsilon \varphi_2, \frac{r}{\varepsilon} \psi_2 \right]$$

où ε est suffisamment petit et (ψ_1, ψ_2) la fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A_r)$.

Nous démontrons ensuite la stabilité des solutions.

Théorème 3.7 *Si (u_*, v_*) est une solution de (SE) telle que*

$$u_* < \frac{a_{\inf}}{c^{\sup}} \quad \text{et} \quad v_* < \frac{b_{\inf}}{d^{\sup}}$$

Alors (u_, v_*) est stable.*

Corollaire 3.1 *Supposons que les coefficients σ, b, c et d sont constants. Si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$, alors l'unique solution fortement positive de (SE) est stable.*

Si on suppose que les coefficients a, b, e, f sont des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$ alors on obtient le théorème suivant, qui donne plus de propriétés aux solutions

Théorème 3.8 *Supposons que (SE) admet une solution strictement positive (u, v) . Alors elle vérifie*

$$\|(u, v)\| < R$$

si, et seulement si,

$$R > -\frac{\lambda_1^\Omega(A)}{2M}.$$

où $M = \max\{c^{\max}, d^{\max}\}$.

Dans le cas particulier où $\mathcal{L}_k = -\sigma_k \Delta, \sigma_k > 0$ ($k = 1, 2$), nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes des Théorèmes 3.4 et 3.8 en fonction des coefficients du système.

Corollaire 3.2 *Le système (SE) admet une solution strictement positive (u, v) telle que*

$$\|(u, v)\| < R$$

si, et seulement si,

$$\int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx > \rho_1^{\Omega}(e) \rho_1^{\Omega}(f) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx$$

$$\int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx < [\rho_1^{\Omega}(e) + 2MR] [\rho_1^{\Omega}(f) + 2MR] \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx$$

où, pour $i = \overline{1, 2}$, $\mathfrak{F}_i = \varphi_i \phi_1(-\sigma_1 \Delta + e)$, $\mathfrak{T}_i = \varphi_i \phi_1(-\sigma_2 \Delta + f)$ (pour $i = 1, 2$) et pour simplifier les écritures on note ici $\rho_1^{\Omega}(q) = \rho_1^{\Omega}(-\sigma_1 \Delta + q)$.

Il est important de noter que les conséquences de ces résultats sont prouvées dans [8], [12], [14], [15] et que l'hypothèse (H_2) n'est pas nécessaire pour montrer l'unicité des solutions, elle sert à clarifier le domaine d'existence de la solution.

3.3.2 Système parabolique

Nous allons étudier le problème (SP) en utilisant la théorie des semi-groupes. On considère l'opérateur

$$-\mathcal{A}_p = - \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 + e & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 + f \end{pmatrix}$$

défini sur $D(\mathcal{A}_p) = \mathbb{W}_{\mathfrak{g}}^p(\Omega)$ et qui engendre un semi-groupe analytique, compact et positif sur $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, on introduit la puissance fractionnaire de l'opérateur \mathcal{A}_p

$$\mathcal{A}_p^{\alpha} : D(\mathcal{A}_p^{\alpha}) \rightarrow \mathbb{L}^p(\Omega) \quad (3.3)$$

où $D(\mathcal{A}_p^{\alpha})$ est le domaine de l'opérateur \mathcal{A}_p^{α} qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|U\|_{\alpha} = \|\mathcal{A}_p^{\alpha} U\|_{\mathbb{L}^p}.$$

Nous allons montrer l'existence d'une unique solution globale de (SP).

Théorème 3.9 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha})$ alors le système (SP) admet une unique solution globale notée $U(t, U_0)$ pour $t \geq 0$.*

De plus, si U_0 est strictement positive alors la solution est fortement positive.

Soit $R_1, R_2 > 0$, on considère l'espace métrique complet défini par

$$W_{\Lambda}^{\alpha} = \{\phi \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha}) : \phi(x) \in \Lambda = [0, R_1] \times [0, R_2], x \in \Omega\}.$$

En utilisant des résultats établis dans [52] et [63] on obtient le résultat suivant:

Proposition 3.1 *Supposons que la condition*

$$\left(\widehat{C}_R\right) \begin{cases} a^{\sup} \leq c_{\inf} R_1 (1 + \Gamma) \\ b^{\sup} \leq d_{\inf} R_2 (1 + \Gamma^{-1}) \end{cases} \quad \text{où } \Gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

est vérifiée. Si $U_0 \in W_\Lambda^\alpha$, alors pour tout $t \in [0, \tau_{\max}) : U(t) \in W_\Lambda^\alpha$.

Il est clair que la condition $\left(\widehat{C}_R\right)$ est toujours vérifiée si

$$R_1 = \max \left\{ \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}}, \|u_0\|_\infty \right\} \quad \text{and} \quad R_2 = \max \left\{ \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}, \|v_0\|_\infty \right\}.$$

Par conséquent, on obtient $\tau_{\max} = +\infty$.

Afin de montrer l'existence d'un attracteur global, nous avons besoin de montrer le résultat suivant:

Proposition 3.2 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est strictement positive. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, u_0)\|_\infty \leq \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, v_0)\|_\infty \leq \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}},$$

Théorème 3.10 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est strictement positive. Le semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ associé au système (SP) admet un attracteur global compact dans $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ pour $\alpha_0 \in (\alpha, 1)$.*

En générale, on n'a pas l'injection suivante

$$D(\mathcal{A}_p^\alpha) \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathfrak{R}}^{2\alpha, p},$$

cependant elle est vraie dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, voir [6]. Dans le cas des conditions au bord de Neumann, il est approprié de travailler avec des espaces de Banach échelonnés donnés par l'interpolation au lieu des espaces définies par la puissance fractionnaire.

Corollaire 3.3 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est strictement positive.*

Pour $2\alpha_0 - \frac{n}{p} > 1 + \nu$, le semi-groupe associé au système (SP) admet un attracteur global compact dans $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$ for $\nu \in (0, 1)$.

Par la suite, on suppose $2\alpha_0 - \frac{n}{p} > 1 + \nu$ et nous étudions le comportement asymptotique des solutions de (SP) par rapport à la solution d'équilibre. Tout d'abord on suppose que c et d sont des fonctions continues et on note

$$\Lambda_* = [0, R'_1] \times [0, R'_2]$$

$$\text{où } R'_1 = \frac{a_{\inf}}{c^{\sup}} \quad \text{et} \quad R'_2 = \frac{b_{\inf}}{d^{\sup}}.$$

Théorème 3.11 *Supposons que $U_0 \in W_{\Lambda_*}^{\alpha_0} - \{0\}$. Si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ et la condition $(\widehat{C_{R'}})$ est vérifiée, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, U_0) = U_*,$$

où $U_* \gg 0$ est un unique point d'équilibre de (SP) dans $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$.

Corollaire 3.4 *Supposons que a, b, c et d sont des constantes. Si $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ est strictement positive et*

$$ab > \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, U_0) = U_*,$$

où $U_* \gg 0$ est un point d'équilibre de (SP) dans $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$.

Proposition 3.3 *Si $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ est strictement positive et $\lambda_1(A) < 0$ alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, u_0) \leq R \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, v_0) \leq R,$$

$$\text{où } R = \max \left\{ \left(\frac{a^{\sup} - e_{\inf}}{2c_{\inf}} \right), \left(\frac{b^{\sup} - f_{\inf}}{2d_{\inf}} \right) \right\}.$$

Partie II

Systeme linéaire coopératif

Chapitre 4

Principe du maximum pour les équations elliptiques linéaires

Il est bien connu que le principe de maximum dans ses différentes versions est un outil très important dans l'analyse des équations aux dérivées partielles telles que l'existence, l'unicité et l'étude qualitative des solutions. Par exemple, la méthode de sous et sur-solutions est basée sur le principe de maximum (voir [57], [60], [62]). Les bonnes références générales pour différentes formes du principe du maximum sont données dans [31] et [59].

4.1 Principe du maximum et valeur propre

Dans cette section, nous donnons la caractérisation du principe de maximum fort pour les équations elliptiques du second ordre en terme de la positivité de la valeur propre principale et en terme d'existence d'une stricte sur-solution. Ce résultat a été caractérisé dans le cas des conditions au bord de Dirichlet dans [50] et étendu au cas des conditions au bord plus générales dans [7] et [24]. Des extensions aux domaines plus générales ont été étudiés dans [10].

Tout d'abord on considère le problème au bord suivant, noté par $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k w + q(x) w = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Définition 4.1 *On dit qu'une fonction $\bar{w} \in W^{2,p}(\Omega)$ est une sur-solution de $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$ si elle vérifie le système suivant:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k \bar{w} + q(x) \bar{w} \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} \bar{w} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Une sur-solution est dite stricte, si au moins l'une des inégalités est stricte.

4. Principe du maximum pour les équations elliptiques linéaires 34

Définition 4.2 *On dit que le problème $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfait le principe du maximum fort si pour toute sur-solution $w \in W^{2,p}(\Omega)$, l'une des assertions suivantes est vérifiée:*

$$w \equiv 0 \quad \text{ou bien} \quad w \gg 0.$$

En d'autres termes, 1) Si $w \in W^{2,p}(\Omega)$ satisfait

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k w + q(x) w \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}w \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec l'une des inégalités est stricte, alors $w \gg 0$.

2) $w \equiv 0$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k w + q(x) w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On peut reformuler le Theorem 6.1 dans [3] pour obtenir le théorème suivant:

Théorème 4.1 *Il existe $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $K > \omega_0$ le problème $(\mathcal{L}_k + q + K, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfait le principe du maximum fort.*

Considérons le problème aux valeurs propres suivant:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k w + q(x) w = \rho w & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

dans $W^{2,p}(\Omega)$ et on note par \mathfrak{L}_k^p la fermeture de l'opérateur $(\mathcal{L}_k + q)|_{W^{2,p}(\Omega)}$ dans $L^p(\Omega)$. Alors le problème (4.2) peut s'écrire:

$$\mathfrak{L}_k^p w = \rho w \quad \text{dans } L^p(\Omega).$$

Le spectre et l'espace propre de \mathfrak{L}_k^p sont indépendants de $p > N$. De plus, Par le principe du maximum fort et la généralisation du Théorème de Krein Rutman (voir Appendix A) ainsi que le Théorème 3 dans [56], on obtient le résultat suivant (voir aussi la Section 2 dans [7]).

Théorème 4.2 *Il existe au moins une valeur propre réelle du problème (4.2), notée $\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)$, appelée valeur propre principale de $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$ dans Ω . Elle est simple et elle possède une unique fonction propre fortement positive et normalisée $\phi_1(\mathcal{L}_k + q)$, appelée fonction propre principale. De plus, $\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)$ est la seule valeur propre de (4.2) qui possède une fonction propre positive. Toute autre valeur propre ρ de (4.2) vérifie $\text{Re } \rho > \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)$ et*

$$(\mathfrak{L}_k^p + K)^{-1} : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

est positive, compacte et irréductible pour $K > -\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)$.

Remarque 4.1 *Toute stricte sur-solution positive de $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$ est fortement positive.*

La caractérisation du principe de maximum fort est donnée par le théorème suivant (voir Section 2 de [7], [24] et [50]).

Théorème 4.3 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$ admet une stricte sur-solution positive;
- (ii) $(\mathcal{L}_k + q, \mathfrak{B}, \Omega)$ vérifie le principe de maximum fort;
- (iii) $\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q) > 0$.

4.2 Propriétés de la valeur propre principale

Dans cette section nous allons utiliser le Théorème 4.3 pour donner quelques propriétés de la valeur propre principale $\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)$.

Proposition 4.1 1) *Soit q_1 et q_2 deux fonctions dans $L^\infty(\Omega)$ telles que $q_1 < q_2$. Alors on a*

$$\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1) < \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_2).$$

2) *Soit Ω_1 un sous domaine de Ω avec le bord $\partial\Omega_1$ assez régulier. Alors*

$$\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q) < \rho_1^{\Omega_1}(\mathcal{L}_k + q).$$

Preuve. 1) Soit $\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1)$ une valeur propre du problème (4.2) dont la fonction propre associée est $\phi_1 = \phi(\mathcal{L}_k + q_1)$. Alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k \phi_1 + q_1 \phi_1 = \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1) \phi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} \phi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'autre part on a

$$[\mathcal{L}_k + q_2 - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1)] \phi_1 = [\mathcal{L}_k + q_1 - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1)] \phi_1 + (q_2 - q_1) \phi_1 > 0.$$

On remarque que ϕ_1 est une stricte sur-solution du système

$$\begin{cases} [\mathcal{L}_k + q_2 - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1)] w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il découle du Théorème 4.3 que

$$\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_2 - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q_1)) > 0.$$

4. Principe du maximum pour les équations elliptiques linéaires 36

2) Soit $\phi = \phi(\mathcal{L}_k + q)$ une fonction propre associée à la valeur propre principale $\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)$. Alors

$$\begin{cases} [\mathcal{L}_k + q - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)] \phi = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathfrak{B}\phi > 0 & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Ce qui signifie que la fonction ϕ est une stricte sur-solution positive du système $(\mathcal{L}_k + q - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q), \mathfrak{B}, \Omega_1)$ et donc grâce au Théorème 4.3 on trouve que

$$\rho_1^{\Omega_1}(\mathcal{L}_k + q - \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_k + q)) > 0.$$

■

Chapitre 5

Systeme linéaire coopératif

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étend les résultats du Chapitre précédent aux systèmes linéaires coopératifs. C'est-à-dire nous donnons une caractérisation du principe du maximum fort en terme de la positivité de la valeur propre principale et en terme d'existence d'une stricte sur-solution.

Le principe du maximum pour les systèmes coopératives a été déjà discuté par plusieurs auteurs sous diverses hypoyhèses ([4], [11], [22], [28], [39], [53], [54], [64]). Dans [20] Correa et Souto ont donné une approche basée sur la théorie d'indice d'un point fixe pour obtenir le principe du maximum.

Nous supposons que e et f ne sont pas nécessairement positives.

5.2 Principe du maximum et valeur propre

Considérons le système linéaire associé au système (SE)

$$\begin{cases} \mathcal{L}U = AU & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (SL)$$

Si $\sigma(x) \geq 0$ et $b(x) \geq 0$ dans Ω , on dit que (SL) est un système linéaire coopératif et la matrice $A(x)$ est une matrice coopérative. Si $a > 0$ et $b > 0$ alors $A(x)$ est dite fortement coopérative (voir [54]).

Définition 5.1 *On dit que $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{W}^p(\Omega)$ est une sur-solution de (SL) si*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 \bar{u} \geq a(x) \bar{v} - e(x) \bar{u} & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 \bar{v} \geq b(x) \bar{u} - f(x) \bar{v} & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} \bar{u} \geq 0, \mathfrak{B} \bar{v} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Une sur-solution est dite stricte, si au moins l'une des inégalités est stricte.

Définition 5.2 *On dit que le système (SL) satisfait le principe du maximum fort si pour toute sur-solution $U \in \mathbb{W}^p(\Omega)$ de (SL) l'une des assertions suivantes est vérifiée:*

$$U \equiv 0 \quad \text{ou bien} \quad U \gg 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

La validité du principe du maximum fort est garantie si nous supposons que

$$a(x) > 0 \quad \text{et} \quad b(x) > 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{C}_1)$$

Ainsi, pour le reste de la thèse nous supposons que cette condition est satisfaite.

Lemme 5.1 *L'opérateur*

- 1) $(\mathcal{L}^p - A + KI) : \mathbb{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\Omega)$ est inversible.
- 2) $(\mathcal{L}^p - A + KI)^{-1}$ est compact.

Preuve. Les coefficients $a, b, e, f \in L^\infty(\Omega)$ sont des fonctions bornées dans Ω , alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|AU\|_{\mathbb{L}^p} \leq c \|U\|_{\mathbb{L}^p}.$$

Nous choisissons K assez grand tel que

$$\|(\mathcal{L} - A + KI)U\|_{\mathbb{L}^p} \geq (K - c) \|U\|_{\mathbb{L}^p} > 0 \quad \text{pour tout } U \neq 0.$$

Cela montre que $(\mathcal{L}^p - A + KI) : \mathbb{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\Omega)$ est inversible (voir [21] p.p 346).

D'autre part, puisque

$$(\mathcal{L}^p - A + KI)^{-1} = (\mathcal{L}^p + KI)^{-1} + (\mathcal{L}^p - A + KI)^{-1} A (\mathcal{L}^p + KI)^{-1},$$

alors $(\mathcal{L}^p - A + KI)^{-1}$ est compact (voir [4]). ■

Théorème 5.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) (SL) admet une stricte sur-solution positive dans $\mathbb{W}^p(\Omega)$;
- (ii) (SL) vérifie le principe de maximum fort;
- (iii) L'opérateur $(\mathcal{L} - A)$ admet une valeur propre principale $\lambda_1^\Omega(A) > 0$.

Remarque 5.1 *L'assertion (i) peut être énoncée de deux manières:*

$$1) U_0 \gg 0 \text{ satisfait } (\mathcal{L} - A)U_0 > 0,$$

$$\text{ou } 2) U_0 \gg 0 \text{ satisfait } (\mathcal{L} - A)U_0 = 0 \text{ et } U_0 > 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La preuve du Theorem 5.1 est donnée dans [12] et [14] dans des cas particuliers, pour aider le lecteur nous fournissons la preuve complète.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) Soit $(u_1, v_1) \in \mathbb{W}^q(\Omega)$ une stricte sur-solution du système (SL) avec $q > n$. Puisque $W^{2,p_2}(\Omega) \subset W^{2,p_1}(\Omega)$ pour $p_2 > p_1$, en remplaçant p ou q par $p \wedge q$, nous pouvons supposer que $(u_1, v_1) \in \mathbb{W}^p(\Omega)$. Supposons que le résultat soit faux, alors

$$(i) \quad u_1 \equiv v_1 \equiv 0,$$

$$(ii) \quad u_1 \gg 0, \quad v_1 \gg 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ne sont pas vérifiées.

Pour $t \in [0, 1]$, on définit

$$u_t = (1 - t) u_0 + t u_1,$$

$$v_t = (1 - t) v_0 + t v_1.$$

Puisque $u_0, v_0 \gg 0$ dans Ω , Alors il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que

$$u_t, v_t \gg 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \forall t \in [0, t_0[,$$

et de plus, u_{t_0} ou bien v_{t_0} ne s'annule pas dans $\bar{\Omega}$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$\exists \hat{x} \in \Omega : u_{t_0}(\hat{x}) = 0.$$

D'autre part, on a u_{t_0} et v_{t_0} vérifie

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_{t_0} - e(x) u_{t_0} \geq a(x) v_{t_0} & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} u_{t_0} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

et ainsi

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_{t_0} - e(x) u_{t_0} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} u_{t_0} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum on a

$$u_{t_0} \equiv 0 \quad \text{ou bien } u_{t_0} \gg 0.$$

Puisque u_{t_0} s'annule dans Ω , alors $u_{t_0} \equiv 0$. Par la suite, grâce à l'hypothèse (C_1) l'équation (5.1) implique que $v_{t_0} \equiv 0$.

Puisque u_1 et v_1 non identiquement nulles alors $t_0 < 1$ et

$$u_{t_0} = (1 - t_0) u_0 + t_0 u_1 = 0,$$

$$v_{t_0} = (1 - t_0) v_0 + t_0 v_1 = 0,$$

implique que

$$u_1 = \frac{(1-t_0)}{t_0} u_0 \gg 0,$$

$$v_1 = \frac{(1-t_0)}{t_0} v_0 \gg 0,$$

ce qui entraîne une contradiction.

(ii) \Rightarrow (iii) Tout d'abord nous allons montrer que $(\mathcal{L} - A + KI)^{-1}$ admet une valeur propre principale positive.

Soit $G \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que $G > 0$. Supposons que $U = (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} G$ alors

$$(\mathcal{L} - A + KI)U \geq 0.$$

Choisissons K assez grand tel que

$$a(x) - e(x) - K < 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$b(x) - f(x) - K < 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors $(K, K)^t$ est une stricte sur-solution du système

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI)U = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque (i) \Rightarrow (ii) alors le système satisfait le principe du maximum. Par conséquent, comme U est non identiquement nulle, alors $U \gg 0$.

L'opérateur $(\mathcal{L} - A + KI)^{-1}$ est compact et fortement positive alors d'après le Théorème de Krein Rutman, il existe $\psi \gg 0$ et $\mu > 0$ telles que

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} \psi = \mu \psi & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}\psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par conséquent $\lambda_1^\Omega(A) = \frac{1}{\mu} - K$. Supposons que $\lambda_1^\Omega(A) \leq 0$, alors

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A)\psi = \lambda_1^\Omega(A)\psi \leq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}\psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le principe de maximum implique que $\psi \leq 0$, ce qui entraîne une contradiction.

(iii) \Rightarrow (i) Soit φ une fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A)$. Alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi - A\varphi = \lambda_1^\Omega(A)\varphi > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On conclut donc que φ est une positive stricte sur-solution du système (SL). ■

5.3 Quelques propriétés de la valeur propre

Par un raisonnement similaire à celui de la Proposition 4.1, on obtient les propriétés suivantes de la valeur propre principale $\lambda_1^\Omega(A)$ que nous utiliserons par la suite.

Proposition 5.1 1) Soit A_1 et A_2 deux matrices fortement coopératives telle que $A_1 < A_2$. Alors

$$\lambda_1^\Omega(A_1) < \lambda_1^\Omega(A_2).$$

2) Soit Ω_1 un sous domaine de Ω avec le bord $\partial\Omega_1$ assez régulier. Alors

$$\lambda_1^\Omega(A) < \lambda_1^{\Omega_1}(A).$$

5.4 Une autre caractérisation du principe du maximum.

Le théorème suivant nous fournit une autre caractérisation du principe du maximum. Ce théorème ainsi que le Théorème 4.3 sont prouvés dans [54] pour l'espace $C^2(\Omega) \times C^2(\Omega)$.

Théorème 5.2 Le système (SL) vérifie le principe du maximum si et seulement si,

$$\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f) > 0 \quad (5.2)$$

$$\text{spr}((\mathcal{L}_1 + e)^{-1} [a(x)(\mathcal{L}_2 + f)^{-1} [b(x).]]) < 1 \quad (5.3)$$

Preuve. Supposons que (SL) vérifie le principe du maximum. Soit $(g_1, g_2) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que $(g_1, g_2) > 0$, alors le système suivant

$$\begin{cases} [\mathcal{L}_1 + e(x)]u = a(x)v + g_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ [\mathcal{L}_2 + f(x)]v = b(x)u + g_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0, \mathfrak{B}v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

admet une solution $u, v \gg 0$. Ce qui implique que

$$\begin{cases} a(x)v + g_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ b(x)u + g_2(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

D'après le principe du maximum pour les équations (Théorème 4.3) on a

$$\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f) > 0$$

En éliminant v de la seconde equation de (5.4) et substituant le résultat dans la première equation on obtient

$$u = ((\mathcal{L}_1 + e)^{-1} [a(x) (\mathcal{L}_2 + f)^{-1} [b(x) u]]) + g(x)$$

où

$$g(x) = (\mathcal{L}_1 + e)^{-1} g_1(x) + (\mathcal{L}_1 + e)^{-1} [a(x) (\mathcal{L}_2 + f)^{-1} g_2(x)] \gg 0 \quad (5.5)$$

Puisque l'opérateur

$$(\mathcal{L}_1 + e)^{-1} [a(x) (\mathcal{L}_2 + f)^{-1} [b(x) .]]$$

est un endomorphisme compact de $L^p(\Omega)$ et préservant l'ordre fortement alors le Théorème 3.2 dans [5] implique que

$$\text{spr}((\mathcal{L}_1 + e)^{-1} [a(x) (\mathcal{L}_2 + f)^{-1} [b(x) .]]) < 1.$$

Inversement, supposons que

$$\rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) > 0 \quad \text{et} \quad \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f) > 0.$$

Pour tout $(g_1, g_2) > 0$ la fonction $g(x)$ définie par (5.5) est fortement positive. D'après la condition (5.3) et le Théorème 3.2 dans [5] l'équation

$$u = ((\mathcal{L}_1 + e)^{-1} [a(x) (\mathcal{L}_2 + f)^{-1} [b(x) u]]) + g(x)$$

admet une unique solution $u \gg 0$. Par la suite

$$b(x) u + g_2(x) > 0$$

D'après la seconde equation de (5.4) on obtient $v \gg 0$. ■

Corollaire 5.1 *Supposons que a et b sont des constantes. Alors $\lambda_1^\Omega(A) > 0$ si et seulement si,*

$$\begin{aligned} \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f) > 0 \\ ab < \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f). \end{aligned}$$

Remarque 5.2 *Supposons que a et b sont des constantes. Alors $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ si et seulement si,*

$$\begin{aligned} \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f) > 0 \\ ab > \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f). \end{aligned}$$

Maintenant, on considère le cas particulier où $\mathcal{L}_k = -\sigma_k \Delta$ pour $k = 1, 2$.

Soit $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ une fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A)$, alors on a :

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta \varphi_1 + e(x) \varphi_1 - a(x) \varphi_2 = \lambda_1^\Omega(A) \varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ -\sigma_2 \Delta \varphi_2 + f(x) \varphi_2 - b(x) \varphi_1 = \lambda_1^\Omega(A) \varphi_2 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B} \varphi_1 = 0, \mathfrak{B} \varphi_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

Proposition 5.2 $\lambda_1^\Omega(A) > 0$ si et seulement si,

$$\rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(-\sigma_2 \Delta + f) > 0,$$

$$\int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx < \rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) \rho_1^\Omega(-\sigma_2 \Delta + f) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx,$$

où $\mathfrak{F}_i = \varphi_i \phi_1(-\sigma_1 \Delta + e)$, $\mathfrak{T}_i = \varphi_i \phi_1(-\sigma_2 \Delta + f)$ (pour $i = 1, 2$)

Preuve. En multipliant la première équation du système (E) par la fonction propre $\phi_1(e) = \phi_1(-\sigma_1 \Delta + e)$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} [\rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) - \lambda_1^\Omega(A)] \varphi_1 \phi_1(e) dx = \int_{\Omega} a(x) \varphi_2 \phi_1(e) dx.$$

pour simplifier les écritures, on note $\mathfrak{F}_i = \varphi_i \phi_1(e)$ pour $i = \overline{1, 2}$.

$$\rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx - \lambda_1^\Omega(A) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx = \int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \quad (5.6)$$

De façon similaire, si en multipliant la seconde équation du système (E) par $\phi_1(f) = \phi_1(-\sigma_2 \Delta + f)$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\rho_1^\Omega(-\sigma_2 \Delta + f) \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx - \lambda_1^\Omega(A) \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx = \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx \quad (5.7)$$

où $\mathfrak{T}_i = \varphi_i \phi_1(f)$ pour $i = 1, 2$.

Par conséquent, l'équation (5.6) et (5.7) donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx - \rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) \rho_1^\Omega(-\sigma_2 \Delta + f) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx \\ &\quad - \lambda_1^\Omega(A) \left[\rho_1^\Omega(-\sigma_2 \Delta + f) \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx - \lambda_1^\Omega(A) \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx \right] \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \\ &\quad - \lambda_1^\Omega(A) \left[\rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \right] \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx. \end{aligned}$$

D'après l'équation (5.7) on a

$$\left[\rho_1^\Omega(-\sigma_2\Delta + f) \int_\Omega \mathfrak{T}_2 dx - \lambda_1^\Omega(A) \int_\Omega \mathfrak{T}_2 dx \right] > 0.$$

Then $\lambda_1^\Omega(A) > 0$ si et seulement si,

$$\rho_1^\Omega(-\sigma_1\Delta + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(-\sigma_2\Delta + f) > 0,$$

$$\int_\Omega a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_\Omega b(x) \mathfrak{T}_1 dx < \rho_1^\Omega(-\sigma_1\Delta + e) \rho_1^\Omega(-\sigma_2\Delta + f) \int_\Omega \mathfrak{F}_1 dx \int_\Omega \mathfrak{T}_2 dx.$$

■

Remarque 5.3 On considère que $f = e + k, k \in \mathbb{R}$, cela veut dire que pour $i = \overline{1, 2}$, $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{T}_i$. Si a et b sont des constantes alors $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ si et seulement si,

$$\begin{aligned} \rho_1^\Omega(-\sigma_1\Delta + e) > 0, \quad \rho_1^\Omega(-\sigma_2\Delta + f) > 0 \\ ab > \rho_1^\Omega(-\sigma_1\Delta + e) \rho_1^\Omega(-\sigma_2\Delta + f) \end{aligned}$$

Partie III

Modèle structuré en deux stades avec compétition

Chapitre 6

Systeme elliptique modelisant deux sous populations

6.1 Introduction

Les solutions du systeme elliptique representent les solutions d'equilibre du systeme (SP) qui ne dependent pas du temps. Elles sont souvent decrites comme des etats asymptotiques atteints par des solutions du problemes paraboliques. Ce chapitre s'organise comme suit : Nous allons donner dans la section 6.2 une condition necessaire et suffisante pour montrer l'existence d'une solution positive du systeme (SE). Notre approche est basee sur le principe du maximum du systeme lineaire cooperatif et la theorie du point fixe. La methode iterative de sous-solutions et sur-solutions nous permettra dans la section qui suit d'etudier l'unicite des solutions. La section 6.3 est consacree a l'etude de la stabilite des etats stationnaires.

Dans ce chapitre on suppose que les coefficients c et d sont des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$.

6.2 Existence et non existence des solutions

En premier lieu, remarquons que $(u, v) = (0, 0)$ est une solution de (SE). Si $(u, 0)$ est une solution de (SE), c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = -e(x)u - c(x)u^2 & \text{dans } \Omega, \\ 0 = b(x)u & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme on a $b > 0$ alors $u \equiv 0$.

De même si $(0, v)$ une solution de (SE) on a

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 v = -f(x)v - d(x)v^2 & \text{dans } \Omega, \\ 0 = a(x)v & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme $a > 0$ alors $v \equiv 0$.

Nous concluons que le système (SE) ne possède pas de solutions sous la forme

$$(u, 0), (0, v) \quad \text{avec } u \neq 0, v \neq 0.$$

Soit C le cône positif de $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$ pour $\nu \in (0, 1)$ et

$$C_R = C \cap \overline{B}(0, R), \quad \partial C_R(0, R) = C \cap \partial \overline{B}(0, R),$$

où $B(0, R)$ est une boule dans $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$ de rayon $R > 0$.

On définit la couronne

$$\mathfrak{C}(\varepsilon, R) = \left\{ U \in C : \varepsilon \leq \|U\|_{1,\nu} \leq R \right\}.$$

On définit l'opérateur non linéaire T , pour $\nu \in (0, 1)$,

$$T : C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$$

de telle manière que ses points fixes soient des solutions de (SE) .

Pour $U \in C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$, $T(U)$ vérifie

$$\begin{cases} T(U) = (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} (N(U) + KU) & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}[T(U)] = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On choisit $K > 0$ assez grand tel que

$$\lambda_1^\Omega(A) + K > 0$$

et pour tout $U \in C_R$ on a

$$M(u + v) \leq K.$$

Théorème 6.1 *Le système (SE) admet une solution positive dans $\mathfrak{C}(\varepsilon, R)$ si, et seulement si,*

$$\lambda_1^\Omega(A) < 0.$$

Preuve. 1) On note $\tilde{U} = T(U)$. Pour $U \in C_R$, le système suivant

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI)\tilde{U} = N(U) + KU \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}\tilde{U} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

satisfait le principe du maximum, alors $T(U) \geq 0$. L'opérateur

$$T : C_R \rightarrow C^{1+\nu}(\bar{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\bar{\Omega})$$

est compact et il peut s'écrire

$$\begin{aligned} T(U) &= (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} (N(U) + KU), \\ &= U_1 + K(\mathcal{L} - A + KI)^{-1} U. \end{aligned}$$

2) Pour $U \in \partial C_R$, on a

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI)U_1 = N(U) < 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}U_1 \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors le principe du maximum implique que $U_1 < 0$. Puisque

$$0 < \lambda_1^\Omega(\mathcal{L} - A + KI) < K,$$

alors

$$\mu = \lambda_1^\Omega(K(\mathcal{L} - A + KI)^{-1}) > 1.$$

Donc pour $U \in \partial C_R$

$$T(U) = U_1 + K(\mathcal{L} - A + KI)^{-1} U < \mu U \quad \forall \mu > 1.$$

3) $T(U)$ a une autre représentation:

$$\begin{aligned} T(U) &= (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} [N(U) - \lambda_1(A)U + KU + \lambda_1^\Omega(A)U], \\ &= U_2 + (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} KU + (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} \lambda_1^\Omega(A)U. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que pour $U \in \partial C_\varepsilon$ on a

$$u \leq \frac{-\lambda_1^\Omega(A)}{2M} \quad \text{et} \quad v \leq \frac{-\lambda_1^\Omega(A)}{2M}$$

où $M = \max\{c^{\max}, d^{\max}\}$.

Alors le système suivant

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI) U_2 = N(U) - \lambda_1^\Omega(A) U & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}(U_2) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

vérifie le principe du maximum, et donc $U_2 \geq 0$. Par conséquent pour $U \in \partial C_\varepsilon$

$$T(U) > U + (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} \lambda_1^\Omega(A) U = \alpha U \quad \forall \alpha < 1.$$

4) Le système (SE) ne possède pas de solutions sous la forme

$$(u, 0), (0, v) \quad \text{avec} \quad u \neq 0, v \neq 0.$$

Alors pour $U \in \partial C_\varepsilon$

$$N(U) + KU \geq 0 \text{ et } N(U) + KU \neq 0.$$

D'après le principe du maximum on a $T(U) \gg 0$.

Par conséquent, d'après le Théorème 20.2 dans [23], l'opérateur T admet un point fixe dans $\mathfrak{C}(\varepsilon, R)$.

La condition $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ est aussi nécessaire pour montrer l'existence d'une solution fortement positive. Supposons maintenant que le système (SE) admet une solution fortement positive $U = (u, v)^t$ alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u + [e(x) + c(x)(u+v)]u - a(x)v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v + [f(x) + d(x)(u+v)]v - b(x)u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En d'autre terme U est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1^\Omega(A_q) = 0$ de l'opérateur $\mathcal{L} - A_q(x)$ avec

$$A_q(x) = \begin{pmatrix} -e(x) - q_1(x) & a(x) \\ b(x) & -f(x) - q_2(x) \end{pmatrix}$$

où $q_1(x) = c(x)(u+v)$ et $q_2(x) = d(x)(u+v)$.

Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A)$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - A_q(x) - \lambda_1^\Omega(A)I) \varphi &= (\mathcal{L} - A(x) - \lambda_1^\Omega(A)I) \varphi + (A(x) - A_q(x)) \varphi, \\ &= (u+v) \begin{pmatrix} c(x) \varphi_1 \\ d(x) \varphi_2 \end{pmatrix} > 0. \end{aligned}$$

On remarque que φ est une stricte sur-solution du système

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A_q(x) - \lambda_1^\Omega(A) I) U = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}(U) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc l'opérateur $(\mathcal{L} - A_q(x) - \lambda_1^\Omega(A) I)$ est fortement positive et admet une valeur propre principale $\gamma > 0$. Cela montre que $\lambda_1^\Omega(A) = -\gamma < 0$. ■

6.3 Unicité des solutions

La méthode itérative de sous-solutions et sur-solutions nous permet d'étudier l'unicité des solutions. En donnant plusieurs choix de la sur-solution le domaine d'existence change.

Tout d'abord nous allons donner les définitions de sous-solution et sur-solution.

Définition 6.1 On dit que $U^0 = (u^0, v^0)$ est une sur-solution de (SE) si

$$\begin{cases} \mathcal{L}U^0 - AU^0 - N(U^0) \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}U^0 \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

De la même façon, $U_0 = (u_0, v_0)$ est une sous-solution si elle satisfait les inégalités inverses de (6.1).

En utilisant cette définition on montre le lemme suivant:

Lemme 6.1 1) Si $U^0 = (u^0, v^0)$ est une sur-solution de (SE) alors

$$T(U^0) \leq U^0.$$

2) Si $U_0 = (u_0, v_0)$ est une sous-solution de (SE) alors

$$T(U_0) \geq U_0.$$

Preuve. 1) Par définition de T on a

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI) T(U^0) = N(U^0) + KU^0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}[T(U^0)] = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque $U^0 = (u^0, v^0)$ est une sur-solution de (SE) alors

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI) [T(U^0) - U^0] = N(U^0) - (\mathcal{L} - A) U^0 \leq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}[T(U^0) - U^0] \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par conséquent le principe de maximum implique que $T(U^0) \leq U^0$.
Par un raisonnement similaire, on montre 2). ■

Considérons les conditions suivantes

$$c(x) > 0 \text{ et } d(x) > 0 \text{ dans } \Omega. \quad (C_2)$$

et

$$\begin{cases} a^{\sup} \leq e_{\inf} \Gamma + c_{\inf} R_1 (1 + \Gamma) \\ b^{\sup} \leq f_{\inf} \Gamma^{-1} + d_{\inf} R_2 (1 + \Gamma^{-1}) \end{cases} \quad \text{où } \Gamma = \frac{R_1}{R_2}. \quad (C_R)$$

Proposition 6.1 *Supposons que $\lambda_1(A) < 0$. Si les conditions (C_2) et (C_R) sont vérifiées. Alors, il existe une solution minimale et une solution maximale de (SE) dans*

$$\mathcal{D} = [\varepsilon\varphi_1, R_1] \times [\varepsilon\varphi_2, R_2],$$

où ε est suffisamment petit et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A)$.

Preuve. 1) Nous allons montrer que la restriction de T sur l'intervalle

$$\mathcal{D} = [\varepsilon\varphi_1, R_1] \times [\varepsilon\varphi_2, R_2]$$

préserve l'ordre. Soit $U_1, U_2 \in \mathcal{D}$ deux fonctions arbitraires telles que $U_1 \geq U_2$.
On a

$$T(U_1) - T(U_2) = (\mathcal{L} - A + KI)^{-1} [N(U_1) - N(U_2) + K(U_1 - U_2)].$$

Pour $K > 0$ assez grand le système suivant

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - A + KI)\tilde{U} = N(U_1) - N(U_2) + K(U_1 - U_2) & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}\tilde{U} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

vérifie le principe du maximum et on obtient donc

$$T(U_1) \geq T(U_2).$$

2) On considère les deux suites $U_n, U^n \in \mathcal{D}$ avec $n \geq 1$, définies par

$$\begin{cases} U_n = T(U_{n-1}), \\ U_0 = (\varepsilon\varphi_1, \varepsilon\varphi_2)^t. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U^n = T(U^{n-1}), \\ U^0 = (R_1, R_2)^t. \end{cases}$$

Si on choisit ε suffisamment petit tel que

$$\varepsilon\varphi_1 \leq \frac{-\lambda_1^\Omega(A)}{2M} \quad \text{et} \quad \varepsilon\varphi_2 \leq \frac{-\lambda_1^\Omega(A)}{2M}.$$

où $M = \max \{c^{\max}, d^{\max}\}$, alors $(\varepsilon\varphi_1, \varepsilon\varphi_2)^t$ est une sous-solution de (SE) .
D'après le Lemme 6.1 on a

$$T(U_0) \geq U_0.$$

D'autre part, on montre aussi que $(R_1, R_2)^t$ est une sur-solution de (SE) .
Il suffit de remarquer que

$$\mathcal{L}U^0 - AU^0 - N(U^0) = - \begin{pmatrix} v^0 (a^{\sup} - e_{\inf}\Gamma - c_{\inf}u^0(1 + \Gamma)) \\ u^0 (b^{\sup} - f_{\inf}\Gamma^{-1} - d_{\inf}v^0(1 + \Gamma^{-1})) \end{pmatrix} \geq 0.$$

3) Par conséquent la suite U_n est croissante, U^n est décroissante et

$$U_0 \leq U_1 \leq \dots \leq U_n \leq \dots \leq U^n \leq \dots \leq U^1 \leq U^0.$$

Donc les limites suivantes existent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(U_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U_* = T(U_*),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(U^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} U^n = U^* = T(U^*).$$

On déduit que $U_*, U^* \in \mathcal{D}$ sont des points fixes de l'opérateur T vérifiant

$$U_* \leq U^*$$

pas nécessairement différents.

4) Soit $U \in \mathcal{D}$ une autre solution de (SE) . Alors d'après 1) et 2) on a

$$U_n \leq U \leq U^n.$$

Donc

$$U_* \leq U \leq U^*.$$

■

Théorème 6.2 *Supposons que $\lambda_1^\Omega(A) < 0$. Si les conditions (C_2) et (C_R) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution de (SE) dans*

$$\mathcal{D} = [\varepsilon\varphi_1, R_1] \times [\varepsilon\varphi_2, R_2]$$

où ε est suffisamment petit.

Preuve. Soit $U_* = (u_*, v_*)$, $U^* = (u^*, v^*)$ respectivement une solution minimale et une solution maximale de (SE) dans \mathcal{D} . En d'autre terme U_* (respectivement U^*) est une fonction propre principale associée à $\lambda_1^\Omega(A_*) = 0$

(respectivement $\lambda_1^\Omega(A^*) = 0$) de l'opérateur $\mathcal{L} - A_*(x)$ (respectivement $\mathcal{L} - A^*(x)$) avec

$$A_*(x) = \begin{pmatrix} -e(x) - c(x)(u_* + v_*) & a(x) \\ b(x) & -f(x) - d(x)(u_* + v_*) \end{pmatrix}$$

et

$$A^*(x) = \begin{pmatrix} -e(x) - c(x)(u^* + v^*) & a(x) \\ b(x) & -f(x) - d(x)(u^* + v^*) \end{pmatrix}.$$

Supposons que $U_* \neq U^*$ alors $A_*(x) < A^*(x)$. D'après la Proposition 5.1 on a

$$\lambda_1^\Omega(A^*) < \lambda_1^\Omega(A_*).$$

Ce qui entraîne une contradiction. ■

Remarque 6.1 *Il est clair que la condition (C_R) est toujours vérifiée dans les cas suivants:*

1) Si

$$R_1 \geq \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \quad \text{et} \quad R_2 \geq \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}.$$

2) Si $R_1 = R_2 = R$ tel que

$$R \geq \max \left\{ \left(\frac{a^{\sup} - e_{\inf}}{2c_{\inf}} \right), \left(\frac{b^{\sup} - f_{\inf}}{2d_{\inf}} \right) \right\}.$$

Maintenant on suppose que les coefficients $c(x)$ et $d(x)$ ne sont pas nécessairement strictement positives. Cela veut dire qu'il peut y avoir des sous régions dans Ω où il y a suffisamment de ressources et donc la compétition entre les individus est nulle.

Considérons la matrice suivante

$$A_r(x) = \begin{pmatrix} -e(x) - 2rc(x) & a(x) \\ b(x) & -f - 2rd(x) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 6.1 *Supposons que $\lambda_1^\Omega(A) < 0$. Si il existe $r > 0$ tel que*

$$\lambda_1^\Omega(A_r) > 0.$$

Alors, il existe une unique solution de (SE) dans

$$\mathcal{D} = \left[\varepsilon\varphi_1, \frac{r}{\varepsilon}\psi_1 \right] \times \left[\varepsilon\varphi_2, \frac{r}{\varepsilon}\psi_2 \right]$$

où ε est suffisamment petit et (ψ_1, ψ_2) la fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A_r)$.

Preuve. Puisque $(\psi_1, \psi_2) \gg 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\psi_1 \geq \varepsilon \text{ et } \psi_2 \geq \varepsilon.$$

Il est alors facile de montrer que $\frac{r}{\varepsilon}(\psi_1, \psi_2)$ est une sur-solution de (SE) .

Par conséquent le résultat découle immédiatement de la preuve de la Proposition 6.1 et du Théorème 6.2. ■

6.4 Stabilité des solutions

Dans cette section, nous discutons la stabilité des états équilibres. Rappelons que le point d'équilibre (u^*, v^*) du système (SE) est stable si toutes les valeurs propres de l'opérateur linéarisé

$$\mathcal{L} - A - N'(u_*, v_*),$$

où $N'(u_*, v_*)$ désigne la dérivée de N au point (u^*, v^*) , admet une partie réelle strictement négative. On a alors le résultat suivant:

Théorème 6.3 *Si (u_*, v_*) est une solution de (SE) telle que*

$$u_* < \frac{a_{\inf}}{c^{\sup}} \text{ et } v_* < \frac{b_{\inf}}{d^{\sup}}.$$

Alors (u_, v_*) est stable.*

Preuve. On veut montrer que toutes les valeurs propres de $\mathcal{L} - A - N'(u_*, v_*)$ ont la partie réelle strictement positive avec

$$A + N'(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} -e(x) - c(2u_* + v_*) & a - cu_* \\ b - dv_* & -f(x) - d(u_* + 2v_*) \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$u_* < \frac{a_{\inf}}{c^{\sup}} \text{ et } v_* < \frac{b_{\inf}}{d^{\sup}},$$

alors $L - A - N'(u_*, v_*)$ est un système coopérative et donc admet une valeur propre principale μ_1 telle que

$$Re(\mu) \geq \mu_1$$

pour toute autre valeur propre μ . Donc il suffit de montrer que $\mu_1 > 0$.

Comme $U_* = (u_*, v_*)$ est une solution de (SE) on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - A - N'(u_*, v_*))U_* &= (\mathcal{L} - A)U_* - N(U_*) + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(u_* + v_*), \\ &= \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(u_* + v_*). \end{aligned}$$

Alors U_* est une stricte sur-solution du système

$$\begin{cases} [\mathcal{L} - A - N'(u_*, v_*)] U = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathfrak{B}U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par conséquent l'opérateur $\mathcal{L} - A - N'(u_*, v_*)$ est fortement positive et admet une valeur propre principale $\mu_1 > 0$. ■

6.5 Quelques remarques

6.5.1 Cas où les coefficients sont des fonctions continues

Dans cette sous section on suppose que les coefficients a, b, e, f, c et d sont des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$.

Proposition 6.2 *Si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$, alors il existe solution positive (u, v) telle que*

$$\|(u, v)\| \geq -\frac{\lambda_1^\Omega(A)}{2M}.$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du Theorem 6.1. Il suffit de remarquer que, dans la partie 3) de la preuve, pour $U \in \partial C_\rho$

$$\begin{aligned} N(U) - \lambda_1^\Omega(A) U &\geq -[M(u+v) + \lambda_1(A)] U, \\ &\geq -(2M\rho + \lambda_1^\Omega(A)) U = 0. \end{aligned}$$

avec $\rho = -\frac{\lambda_1^\Omega(A)}{2M}$. ■

Théorème 6.4 *Supposons que (SE) admet une solution positive (u, v) . Alors elle vérifie*

$$\|(u, v)\| < R$$

si, et seulement si,

$$R > -\frac{\lambda_1^\Omega(A)}{2M}.$$

Preuve. On peut choisir $K = 2MR$, alors on a

$$\lambda_1^\Omega(A) + K > 0$$

et pour tout $U \in C_R$ on a

$$M(u+v) \leq K.$$

D'après le Théorème 6.1, il existe une solution positive (u, v) telle que

$$\|(u, v)\| < R.$$

il clair d'après le théorème précédent que la condition

$$R > -\frac{\lambda_1^\Omega(A)}{2M}$$

est aussi nécessaire. ■

Maintenant, on considère le cas particulier où $\mathcal{L}_k = -\sigma_k \Delta$ ($k = 1, 2$).

Corollaire 6.2 *Le système (SE) admet une solution positive (u, v) telle que*

$$\|(u, v)\| < R$$

si, et seulement si,

$$\int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx > \rho_1^\Omega(e) \rho_1^\Omega(f) \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx,$$

$$\int_{\Omega} a(x) \mathfrak{F}_2 dx \int_{\Omega} b(x) \mathfrak{T}_1 dx < [\rho_1^\Omega(e) + 2MR] [\rho_1^\Omega(f) + 2MR] \int_{\Omega} \mathfrak{F}_1 dx \int_{\Omega} \mathfrak{T}_2 dx$$

où, pour $i = \overline{1, 2}$, $\mathfrak{F}_i = \varphi_i \phi_1(-\sigma_1 \Delta + e)$, $\mathfrak{T}_i = \varphi_i \phi_1(-\sigma_2 \Delta + f)$ (pour $i = 1, 2$) et pour simplifier les écritures on note ici $\rho_1^\Omega(q) = \rho_1^\Omega(-\sigma_k \Delta + q)$.

Preuve. La preuve découle immédiatement de la Proposition 5.2 et le Théorème 6.4 ■

Il est important de noter que les conséquences suivantes sont prouvées dans [12]. Si on considère que $f = e + k$, $k \in \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{T}_i$ (for $i = \overline{1, 2}$) et donc on obtient les résultats de [12].

1) Si

$$a_{\min} b_{\min} > \rho_1^\Omega(-\Delta + e) \rho_1^\Omega(-\Delta + f),$$

alors le système (SE) admet une solution positive.

2) Si

$$a^{\max} b^{\max} \leq \rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + e) \rho_1^\Omega(-\sigma_1 \Delta + f),$$

alors le système (SE) n'admet aucune solution positive.

La condition (H_1) dans [8] et (H'_1) dans [15] implique que $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ alors d'après le Théorème 6.2 et la remarque 6.1, le système (SE) admet une unique solution dans

$$\mathcal{D} = \left[\varepsilon \varphi_1, \frac{a^{\sup}}{c} \right] \times \left[\varepsilon \varphi_2, \frac{b^{\sup}}{d} \right]$$

où ε est suffisamment petit et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction propre associée à $\lambda_1^\Omega(A)$.

De plus, la condition (H_2) dans [8] et [15] implique (C_R) avec $R_1 = \frac{a_{\inf}}{c}$ and $R_2 = \frac{b_{\inf}}{d}$ d'où l'existence de la solution dans

$$\mathcal{D}' = \left[\varepsilon\varphi_1, \frac{a_{\inf}}{c} \right] \times \left[\varepsilon\varphi_2, \frac{b_{\inf}}{d} \right] \subset \mathcal{D}.$$

En déduit que l'hypothèse (H_2) n'est nécessaire pour montrer l'unicité des solutions, elle sert à clarifier le domaine d'existence de la solution.

6.5.2 Cas où les coefficients a, b, c et d sont des constants

Dans cette sous section on se restreint, pour les résultats de ce chapitre, au cas où les coefficients a, b, c et d sont des constantes.

Corollaire 6.3 *Le système (SE) admet une solution positive si, et seulement si,*

$$ab > \rho_1^\Omega (\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega (\mathcal{L}_2 + f)$$

où $\rho_1^\Omega (\mathcal{L}_k + q)$ valeur propre principale de l'opérateur $(\mathcal{L}_k + q)$.

Corollaire 6.4 *Une solution positive, si elle existe, est unique. De plus, elle appartient à*

$$\mathcal{D} = [0, R] \times [0, R]$$

où $R \geq \max \left\{ \left(\frac{a - e_{\inf}}{2c} \right), \left(\frac{b - f_{\inf}}{2d} \right) \right\}$.

Corollaire 6.5 *Le système (SE) admet une solution positive (u, v) telle que*

$$\|(u, v)\| < R$$

si, et seulement si,

$$\begin{aligned} ab &> \rho_1^\Omega (\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega (\mathcal{L}_2 + f), \\ ab &< [\rho_1^\Omega (\mathcal{L}_1 + e) + 2MR] [\rho_1^\Omega (\mathcal{L}_2 + f) + 2MR]. \end{aligned}$$

Corollaire 6.6 *Une solution positive de (SE) , si elle existe, est stable.*

Chapitre 7

Systeme parabolique modelisant deux sous populations

7.1 Introduction

L'une des questions importante pour un probleme modelisant un phenomene naturel, est l'etude du comportement a long terme de ses solutions (les comportements asymptotiques des solutions globales et l'existence d'un attracteur global) car elles determinent la stabilite du phenomene. Un interet particulier pour un modele ecologique est de predire l'existence de solutions strictement positives pour tous les temps futurs.

Le point de depart pour etudier le comportement a long terme des solutions de (SP) est de definir un semi-groupe dans un espace de Banach convenable. Ensuite, on essaie de prouver que le systeme dynamique est dissipatif et possede un attracteur global qui capture le comportement asymptotique.

Les methodes basees sur des comparaisons entre differentes solutions d'un modele de reaction-diffusion ou entre les solutions des differents modes jouent un role important dans la theorie mathematique des modes de reaction-diffusion. Les theoremes de comparaison fournissent une technique de base pour l'application de la theorie de l'iteration monotone ([47], [57]) ou semi-groupe monotones ([41], [63], [66]).

Dans le cas des systemes qui satisfont les principes de comparaison (la condition de la quasimonotonie), les sous et sur-solutions peuvent etre utilise pour construire des sequences d'iteration qui convergent de facon monotone vers la solution d'equilibre, qui est, une solution du probleme elliptique associe.

7.2 Préliminaires

Dans cette section, nous ne définirons que les notions importantes dont nous serviront par la suite, pour plus de détail voir l'annexe et les références [32],[38],[58],[61]. Nous allons tout d'abord introduire la notion de semi-groupe de l'opérateur elliptique (3.1) dans l'espace L^p pour $1 < p < \infty$.

On considère les opérateurs linéaires fermés

$$\begin{cases} A_p^1 = \mathcal{L}_1 + e, \\ A_p^2 = \mathcal{L}_2 + f, \end{cases}$$

sur le domaine $D(A_p^k) = W_{\mathfrak{s}}^{2,p}(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$. Il est prouvé dans [3] que

$$T(t) = e^{-\mathcal{A}_p t} = (e^{-A_p^1 t}, e^{-A_p^2 t}) \quad \text{for } t \geq 0$$

est un semi-groupe analytique, compact et positif sur $\mathbb{L}^p(\Omega)$ engendré par l'opérateur

$$-\mathcal{A}_p = \begin{pmatrix} -A_p^1 & 0 \\ 0 & -A_p^2 \end{pmatrix}$$

et défini sur $D(\mathcal{A}_p) = D(A_p^1) \times D(A_p^2)$.

Pour tout $\alpha > 0$, on introduit la puissance fractionnaire de l'opérateur \mathcal{A}_p

$$\mathcal{A}_p^\alpha : D(\mathcal{A}_p^\alpha) \rightarrow \mathbb{L}^p(\Omega) \quad (7.1)$$

où $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est le domaine de l'opérateur \mathcal{A}_p^α qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|U\|_\alpha = \|\mathcal{A}_p^\alpha U\|_{\mathbb{L}^p}.$$

Le résultat suivant décrit quelques propriétés de base de l'opérateur de la puissance fractionnaire (7.1) (voir [38],[61]).

Théorème 7.1 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- 1) Pour $t > 0$, le semi-groupe $e^{-\mathcal{A}_p t} : \mathbb{L}^p \rightarrow D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est borné,
- 2) $e^{-\mathcal{A}_p t} \mathcal{A}_p^\alpha U = \mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p t} U \quad \forall U \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$,
- 3) Pour $t > 0$, $\mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p t} : \mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^p$ est borné,
- 4) Pour $\alpha_1 > \alpha_2$, $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_1}) \subset D(\mathcal{A}_p^{\alpha_2})$ est compact,
- 5) Il existe C_α, ω des constantes positives telles que

$$\|e^{-\mathcal{A}_p t}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^p, D(\mathcal{A}_p^\alpha))} = \|\mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p t}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^p)} \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\omega t} \quad \text{pour tout } t > 0. \quad (7.2)$$

Nous avons besoin au préalable d'énoncer les injections suivantes que nous utiliserons dans la suite.

Proposition 7.1 *Pour $\alpha \in (0, 1)$, les injections continues suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_p^\alpha) &\subset \mathbb{W}^{k,p} && \text{if } 2\alpha > k, \quad k \geq 0, \\ D(\mathcal{A}_p^\alpha) &\subset \mathbb{L}^\infty && \text{if } 2\alpha > \frac{n}{p}, \\ D(\mathcal{A}_p^\alpha) &\subset C^\nu(\bar{\Omega}) \times C^\nu(\bar{\Omega}) && \text{if } 2\alpha - \frac{n}{p} > \nu > 0. \end{aligned}$$

7.3 Existence globale des solutions

7.3.1 Existence locale

Dans le cadre de la théorie du semi-groupe nous allons montrer l'existence d'une unique solution locale de (SP) , pour plus de détail voir [32],[38],[58],[61]. Pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, nous allons étudier le problème (SP) sur $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ puisque, en utilisant les injections ci-dessus, le terme de réaction

$$F : D(\mathcal{A}_p^\alpha) \rightarrow \mathbb{L}^p$$

tel que pour $x \in \Omega$:

$$F(U(t))(x) = \begin{pmatrix} f_1(x, u, v) \\ f_2(x, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x)v - c(x)u(u+v) \\ b(x)u - d(x)v(u+v) \end{pmatrix}.$$

est bien défini et localement lipschitzienne et continue sur $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ (voir Lemma 7.1 dans la suite).

Le système (SP) peut s'écrire sous forme une équation d'évolution abstraite dans $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ par

$$(P) \begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = \mathcal{A}_p U(t) + F(U(t)) & t > 0, & (P1) \\ U(0) = U_0. & & (P2) \end{cases}$$

où

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t, \cdot) \\ v(t, \cdot) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

on écrit la solution de (P) sous forme intégrale en utilisant la formule de la variation des constantes.

Définition 7.1 1) La fonction U est dite solution locale de (P) sur $[0, \tau)$ dans $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ si $U \in C([0, \tau), D(\mathcal{A}_p^\alpha))$ et elle satisfait la formule de la variation des constantes

$$U(t) = e^{-\mathcal{A}_p t} U_0 + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_p(t-s)} F(U(s)) ds \quad \forall t \in [0, \tau)$$

où l'intégrale au sens de Bochner dans \mathbb{L}^p est dans $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$.

2) La fonction U est dite une solution classique de (P) sur $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ si

$$U \in C^1((0, \tau), D(\mathcal{A}_p^\alpha)) \cap C([0, \tau), D(\mathcal{A}_p^\alpha))$$

avec $U(t) \in D(\mathcal{A}_p)$ pour $t > 0$ telle que (P1) et (P2) sont satisfaites.

Lemme 7.1 La fonction $F : D(\mathcal{A}_p^\alpha) \rightarrow \mathbb{L}^p$ est continue et pour tout ensemble borné B dans $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ il existe deux constants K, K' qui dependent de B telles que F vérifie

$$i) \|F(U)\|_{\mathbb{L}^p} \leq K \quad \text{pour tout } U \in B,$$

$$ii) \|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathbb{L}^p} \leq K' \|U_1 - U_2\|_\alpha \quad \text{pour tout } U_1, U_2 \in B.$$

Preuve. Soit β une constante positive et

$$B = \{U \in D(\mathcal{A}_p^\alpha) : \|U\|_\alpha \leq \beta\}.$$

i) Puisque les coefficients du système (SP) sont bornés, alors il existe une constante $D > 0$ telle que

$$D = \max \{\|a\|_\infty, \|b\|_\infty, \|c\|_\infty, \|d\|_\infty\}.$$

On a $\forall t > 0, U \in B$:

$$\begin{aligned} \|F(U)\|_{\mathbb{L}^p} &\leq D \|U\|_{\mathbb{L}^p} + D \|u(u+v)\|_{L^p} + D \|v(u+v)\|_{L^p}, \\ &\leq D \|U\|_{\mathbb{L}^p} + D \|(u+v)\|_\infty \|U\|_{\mathbb{L}^p}, \\ &\leq D |\Omega|^{1/p} (1 + \|(u+v)\|_\infty) \|U\|_\infty. \end{aligned}$$

où $|\Omega| = \int_\Omega 1 dx$. Alors en utilisant l'inégalité suivante

$$\|U\|_\infty \leq C \|U\|_\alpha \quad \text{for } \alpha > \frac{n}{2p}.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|F(U)\|_{\mathbb{L}^p} &\leq D |\Omega|^{1/p} (1 + C \|U\|_\alpha) \|U\|_\alpha, \\ &\leq D |\Omega|^{1/p} (1 + C\beta) \beta = K. \end{aligned}$$

ii) soit $t > 0, U_1, U_2 \in B$, alors

$$\begin{aligned}
\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathbb{L}^p} &\leq 1D \|U_1 - U_2\|_{\mathbb{L}^p} + D \|u_1(u_1 + v_1) - u_2(u_2 + v_2)\|_{L^p} \\
&\quad + D \|v_1(u_1 + v_1) - v_2(u_2 + v_2)\|_{L^p}, \\
&\leq 1D \|U_1 - U_2\|_{\mathbb{L}^p} \\
&\quad + D \|u_1^2 - u_2^2 + u_1(v_1 - v_2) + v_2(u_1 - u_2)\|_{L^p} \\
&\quad + D \|v_1^2 - v_2^2 + v_1(u_1 - u_2) + u_2(v_1 - v_2)\|_{L^p}, \\
&\leq D [1 + (\|U_1\|_\infty + \|U_2\|_\infty)] \|U_1 - U_2\|_{\mathbb{L}^p}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathbb{L}^p} \leq K' \|U_1 - U_2\|_\alpha.$$

■

Théorème 7.2 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ alors le système (SP) admet une unique solution classique.*

Preuve. En utilisant le Théorème 47.1 dans [61] et le Lemme 7.1, on obtient l'existence et l'unicité du solution U sur un intervalle d'existence maximale $[0, \tau_{\max})$ pour $\tau_{\max} > 0$.

$$U \in C([0, \tau_{\max}), D(\mathcal{A}_p^\alpha)).$$

On représente cette solution sous forme intégrale par

$$U(t) = e^{-\mathcal{A}_p t} U_0 + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_p(t-s)} F(U(s)) ds \quad \forall t \in [0, \tau_{\max}).$$

On a (voir [38], p 71)

$$U \in C^\mu([0, \tau_{\max}), D(\mathcal{A}_p^\alpha))$$

pour une certaine constante $\mu > 0$ et

$$t \longmapsto \frac{dU}{dt}(t) \in D(\mathcal{A}_p^\beta) \quad \text{pour tout } \beta \in (0, 1),$$

est continue et localement holdérienne dans $[0, \tau_{\max})$. Par conséquent, d'après la théorie de régularité de Schauder U est une solution classique de (SP). ■

7.3.2 Existence globale

Pour tout $t > 0$, la fonction $U_0 \mapsto U(t, U_0) = U(t)$ est continue et on écrit

$$U(t, U_0) = S(t)U_0$$

où $S(t)$ est un opérateur non linéaire qui vérifie les propriétés du semi-groupe sur $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$

- 1) $\forall U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha) : S(0)U_0 = U_0$,
- 2) $\forall U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha), \forall t, s \geq 0 : S(t+s)U_0 = S(t) \circ S(s)U_0$,
- 3) $\forall t > 0$, la fonction $U_0 \mapsto S(t)U_0$ est continue.

voir p.p 237 dans [61] pour plus de détails.

Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème 47.4 dans [61].

Théorème 7.3 *Supposons que (SP) admet une unique solution dans $[0, \tau_{\max})$ pour un $\tau_{\max} > 0$ maximal.*

$$\text{If } \tau_{\max} < +\infty \text{ then } \lim_{t \rightarrow \tau_{\max}} \|U(t)\|_\alpha = \infty.$$

Donc pour établir l'existence globale de la solution, il suffit de montrer que la solution est bornée dans $[0, \tau_{\max})$.

On considère l'espace métrique complet

$$W_\Lambda^\alpha = \{ \phi \in D(\mathcal{A}_p^\alpha) : \phi(x) \in \Lambda = [0, R_1] \times [0, R_2], x \in \Omega \}.$$

En utilisant les résultats dans [52] et [63] le domaine W_Λ^α est positivement invariant par rapport au semi-groupe $(S(t), t \geq 0)$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

- 1) $T(t)W_\Lambda^\alpha \subset W_\Lambda^\alpha$ pour tout $t \geq 0$,
- 2) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{dist}(U + hF(U), \Lambda) = 0$ si $U \in \Lambda$.

La limite dans 2) est vérifiée si

3) Les fonctions $f_i(x, u, v) : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ (pour $i = 1, 2$) vérifient les conditions suivantes pour tout $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} f_1(x, 0, v) &\geq 0 & \text{et} & & f_1(x, R_1, v) &\leq 0 & \quad \forall v \in [0, R_2], \\ f_2(x, u, 0) &\geq 0 & \text{et} & & f_2(x, u, R_2) &\leq 0 & \quad \forall u \in [0, R_1]. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe des conditions 1) et 3).

Proposition 7.2 *Supposons que la condition*

$$\begin{cases} a^{\sup} \leq c_{\inf} R_1 (1 + \Gamma) \\ b^{\sup} \leq d_{\inf} R_2 (1 + \Gamma^{-1}) \end{cases} \quad \text{où } \Gamma = \frac{R_1}{R_2}. \quad (\widehat{C}_R)$$

est vérifiée. Si $U_0 \in W_\Lambda^\alpha$, alors pour tout $t \in [0, \tau_{\max}) : U(t) \in W_\Lambda^\alpha$.

Remarque 7.1 *Il est clair que la condition (\widehat{C}_R) est toujours vérifiée si*

$$R_1 = \max \left\{ \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}}, \|u_0\|_\infty \right\} \quad \text{and} \quad R_2 = \max \left\{ \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}, \|v_0\|_\infty \right\}.$$

Par conséquent, on obtient $\tau_{\max} = +\infty$.

7.4 Système quasimonotone

Les principaux outils de ce chapitre est le théorème de comparaison et de monotonie. Dans la suite, nous donnons des résultats préliminaires du principe de comparaison (voir [63] et [18]) qui seront utiles lorsque on prouve quelques résultats sur le comportement asymptotique des solutions de (SP) .

Soit $F^\pm(U(t)) = (f_1^\pm, f_2^\pm)^t$ deux fonctions définies par

$$f_1^-(x, u, v) = a_{\inf} v - 2c^{\sup} ru,$$

$$f_2^-(x, u, v) = b_{\inf} u - 2d^{\sup} rv$$

où $r = R_1 + R_2$ (R_1, R_2 sont données Proposition 7.2 et Remarque 7.1) and

$$f_1^+(u, v) = a^{\sup} v - c_{\inf} u(u + v),$$

$$f_2^+(u, v) = b^{\sup} u - d_{\inf} v(u + v).$$

La fonction $F^\pm : \Lambda^\pm \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite quasimonotone non décroissante dans l'ensemble Λ^\pm , si pour tout $(u, v) \in \Lambda^\pm$ on a

- i) $v \mapsto f_1^\pm(u, v)$ est une fonction non décroissante pour tout u fixé.*
- ii) $u \mapsto f_2^\pm(u, v)$ est une fonction non décroissante pour tout v fixé.*

Alors la fonction F^\pm est quasimonotone non décroissante dans Λ^\pm avec

$$\Lambda^- = [0, r] \times [0, r] \quad \text{et} \quad \Lambda^+ = \left[0, \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \right] \times \left[0, \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}} \right].$$

Considérons (P^\pm) les problèmes auxiliaires de (P)

$$(P^\pm) \begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = \mathcal{A}_p U(t) + F^\pm(U(t)) & t > 0, \\ U(0) = U_0^\pm. \end{cases}$$

et on note $U^\pm(t, U_0^\pm)$, pour tout $t \geq 0$, la solution globale de (P^\pm) , de plus elle est unique.

Théorème 7.4 *Supposons que $F^\pm : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux fonctions quasimonotones non décroissantes telles que pour tout $U \in \Lambda$ on a*

$$F^-(U) \leq F(U) \leq F^+(U)$$

et $U_0, U_0^\pm \in \Lambda$ satisfait

$$U_0^- \leq U_0 \leq U_0^+.$$

Alors l'unique solution $U(t, U_0)$, pour tout $t \geq 0$, de (SP) vérifie

$$U^-(t, U_0^-) \leq U(t, U_0) \leq U^+(t, U_0^+).$$

Ce Théorème montre que (P) engendre un semi-groupe monotone si F est une fonction quasimonotone non décroissante.

Corollaire 7.1 *Soit F une fonction quasimonotone non décroissante dans Λ . Si $U_0, V_0 \in \Lambda$ telles que $V_0 \leq U_0$ alors*

$$U(t, V_0) \leq U(t, U_0).$$

Si de plus, $V_0 \neq U_0$ alors

$$U(t, V_0) \ll U(t, U_0).$$

Proposition 7.3 *Si $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est strictement alors la solution $U(t, U_0)$ de (P) est fortement positive pour tout $t > 0$.*

Preuve. La fonction F^- est quasimonotone non décroissante dans Λ^- . Pour tout $x \in \Omega$ on prend

$$U_0^-(x) = U_0(x) \in \Lambda^-.$$

Puisque $(0, 0)$ est une unique solution de (SP^-) avec $U_0^- \equiv 0$ et grâce au Corollaire 7.1 la solution $U^-(t, U_0^-)$ est fortement positive.

D'autre part, d'après le Théorème 7.4 on a

$$U^-(t, U_0^-) \leq U(t, U_0).$$

Ce qui complète la preuve. ■

7.5 Existence d'un attracteur global

Dans cette section, nous allons étudier l'existence d'un attracteur global de $S(t)$ sur $D(\mathcal{A}_p^\alpha)$, Pour cela, il est nécessaire de montrer le résultat suivant

Proposition 7.4 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est strictement positive. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, u_0)\|_\infty \leq \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, v_0)\|_\infty \leq \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}.$$

Preuve. D'après la Remarque 7.1 on observe que pour tout $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ il existe $s \geq 1$ tel que

$$\|u_0\|_\infty \leq s \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} = r_1 \quad \text{et} \quad \|v_0\|_\infty \leq s \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}} = r_2$$

et donc $U(t, U_0) \in W_{\Lambda_s^+}^\alpha$ où

$$\Lambda_s^+ = \left[0, s \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}}\right] \times \left[0, s \frac{b^{\sup}}{d_{\inf}}\right].$$

Chosissons $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ et on définit

$$s_0 = \inf \left\{ s \geq 1 : U(t) \in W_{\Lambda_s^+}^\alpha \quad \text{pour tout } t \geq 0 \right\}.$$

En multipliant la première équation du système (SP) (E) par u^{2l-1} pour $l = 1, 2, \dots$, et en intégrant sur Ω , on obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \int_\Omega \frac{d}{dt} u^{2l} dx &\leq \int_\Omega u^{2l-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^1(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx - \int_\Omega e u^{2l} dx \\ &\quad + c_{\inf} \int_\Omega \left[\frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} - u \right] v u^{2l-1} dx - c_{\inf} \int_\Omega u^2 u^{2l-1} dx, \\ &\leq -(2l-1) \int_\Omega u^{2l-2} \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}^1 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx - \int_\Omega e u^{2l} dx \\ &\quad + c_{\inf} \int_\Omega \left[s_0 \frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} - u \right] r_2 u^{2l-1} dx - c_{\inf} \int_\Omega u^2 u^{2l-1} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u^{2l} dx &\leq -\frac{2l-1}{l^2} \theta_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u^l}{\partial x_i} \right)^2 dx + c_{\inf} r_2 (s_0 - \varepsilon) \left(\frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \right) \int_{\Omega} u^{2l-1} dx \\ &\quad - c_{\inf} r_2 \int_{\Omega} u^{2l} dx + c_{\inf} \int_{\Omega} (\varepsilon r_2 r_1 - u^2) u^{2l-1} dx \end{aligned}$$

où ε est suffisamment petit pour que $\varepsilon r_2 r_1 - u^2 \leq 0$.

En utilisant l'inégalité de Young on a

$$\frac{1}{2l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2l} dx \leq c_{\inf} r_2 \int_{\Omega} \frac{1}{2l} (s_0 - \varepsilon)^{2l} \left(\frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \right)^{2l} dx + c_{\inf} r_2 \int_{\Omega} \frac{(u^{2l-1})^q}{q} dx - c_{\inf} r_2 \int_{\Omega} u^{2l} dx$$

avec $q = \frac{2l}{2l-1}$. On obtient alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2l} dx + c_{\inf} r_2 \int_{\Omega} u^{2l} dx \leq c_{\inf} r_2 (s_0 - \varepsilon)^{2l} \left(\frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \right)^{2l} |\Omega|.$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$ pour tout $t > 0$ on a

$$\int_{\Omega} u^{2l} dx \leq (s_0 - \varepsilon)^{2l} \left(\frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \right)^{2l} |\Omega| + \int_{\Omega} u_0^{2l} dx e^{-c_{\inf} r_2 t}.$$

En prenant la racine $2l$ et en faisant tendre l vers l'infinie on obtient

$$\|u\|_{\infty} \leq (s_0 - \varepsilon) \left(\frac{a^{\sup}}{c_{\inf}} \right) + \|u_0\|_{\infty} e^{-d_{\inf} r_1 t}.$$

Par un raisonnement similaire, on a

$$\|v\|_{\infty} \leq (s_0 - \varepsilon) \left(\frac{b^{\sup}}{d_{\inf}} \right) + \|v_0\|_{\infty} e^{-d_{\inf} r_1 t}.$$

Supposons que $s_0 - \varepsilon \geq 1$. Alors il existe $\tau > 0$ pour tout $t > \tau$

$$U(t, U_0) \in W_{\Lambda_{(s_0 - \varepsilon)}^+}^{\alpha}.$$

Ce qui contredit le fait que s_0 est minimal. ■

Théorème 7.5 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha})$ est strictement positive. Alors il existe une fonction continue et positive $K_1(\|U_0\|_{\alpha})$ qui dépend de $\|U_0\|_{\alpha}$ et une constante positive K_2 telles que*

$$\|U(t)\|_{\alpha} \leq K_1(\|U_0\|_{\alpha}), \quad \forall t \geq 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)\|_{\alpha} \leq K_2.$$

Preuve. Soit $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$. La solution du problème (SP) est donnée par

$$U(t) = e^{-\mathcal{A}_p t} U_0 + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_p(t-s)} F(U(s)) ds.$$

En appliquant \mathcal{A}_p^α aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$\mathcal{A}_p^\alpha U(t) = \mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p t} U_0 + \int_0^t \mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p(t-s)} F(U(s)) ds.$$

l'estimation (7.2) dans le Théorème 7.1 donne

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_\alpha &= \|\mathcal{A}_p^\alpha U(t)\|_{\mathbb{L}^p} \leq \|\mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p t} U_0\|_{\mathbb{L}^p} + \int_0^t \|\mathcal{A}_p^\alpha e^{-\mathcal{A}_p(t-s)}\|_{\mathfrak{L}(\mathbb{L}^p)} \|F(U(s))\|_{\mathbb{L}^p} ds, \\ &\leq C_0 e^{-\omega t} \|U_0\|_\alpha + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\omega(t-s)} \|F(U(s))\|_{\mathbb{L}^p} ds. \end{aligned}$$

D'après la Remarque 7.1 et la preuve du Lemme 7.1, il existe une fonction continue et positive $K_0(\|U_0\|_\infty)$ qui dépend de $\|U_0\|_\infty$ et une constante positive K'_0 telles que

$$\|F(U(s))\|_{\mathbb{L}^p} \leq \begin{cases} K_0(\|U_0\|_\infty) & \text{pour } 0 \leq s \leq \eta, \\ K'_0 & \text{pour } s > \eta. \end{cases}$$

Alors en divisant l'intégrale en deux intégrales sur $(0, \eta)$ et (η, ∞) , on obtient

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_\alpha &\leq C_0 e^{-\omega t} \|U_0\|_\alpha + C_\alpha K_0(\|U_0\|_\infty) \int_0^\eta (t-s)^{-\alpha} e^{-\omega(t-s)} ds \\ &\quad + C_\alpha K'_0 \int_\eta^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\omega(t-s)} ds, \\ &\leq C_0 e^{-\omega t} \|U_0\|_\alpha + K_0(\|U_0\|_\infty) C_\alpha \eta t^{-\alpha} e^{-\omega t} + C_\alpha K'_0 \int_0^\infty \mu^{-\alpha} e^{-\omega \mu} d\mu. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\int_0^\infty \mu^{-\alpha} e^{-\omega \mu} d\mu = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\omega^{1-\alpha}}.$$

Donc, il existe une fonction continue et positive $K_1(\|U_0\|_\infty)$ telle que

$$\|U(t)\|_\alpha \leq K_1(\|U_0\|_\infty).$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)\|_\alpha \leq C_\alpha K'_0 \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\omega^{1-\alpha}} = K_2.$$

■

Afin de montrer l'existence d'un attracteur global, nous avons besoin de montrer le résultat suivant

Proposition 7.5 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$ est strictement positive. Pour tout $\alpha_0 \in (\alpha, 1)$ le semi-groupe*

$$S(t) : D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0}) \longrightarrow D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$$

associé au système (SP) admet les propriétés suivantes:

- 1) $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$,
- 2) $S(t)$ est dissipatif,
- 3) Les orbites d'un ensemble borné sont bornés.

Preuve. La première propriété 1) est donnée par l'injection compact

$$D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0}) \hookrightarrow D(\mathcal{A}_p^\alpha) \text{ for } \alpha_0 > \alpha.$$

voir Lemma 22.1 in [61] et le Théorème 7.1. Les conditions 2) et 3) découle immédiatement du Théorème 7.5. En effet, on peut choisir B dans 2) une boule dans $[D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})]^+$ de rayon $2K_2$ où K_2 est la constante donnée dans le Théorème 7.5. ■

Théorème 7.6 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ est strictement positive. Le semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ associé au système (SP) admet un attracteur global compact dans $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ pour $\alpha_0 \in (\alpha, 1)$.*

Preuve. En utilisant le Corollaire précédent et le Corollaire 23.13 in [61], on montre l'existence d'un attracteur global, compact de (SP). ■

Remarque 7.2 *En général, on n'a pas l'injection suivante*

$$D(\mathcal{A}_p^\alpha) \hookrightarrow \mathbb{W}_{\mathfrak{B}}^{2\alpha, p}.$$

mais elle est vraie dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, voir [6]. Dans le cas des conditions au bord de Neumann, il est approprié de travailler avec des espaces de Banach échelonnés donnés par interpolation au lieu des espaces définis par la puissance fractionnaire. Par interpolation \mathcal{A}_p muni des conditions au bord de Neumann admet des espaces de Banach échelonnés associés

$$E_p^\alpha := [E_p^1, E_p^0]_\alpha$$

où $[\cdot, \cdot]_\alpha$ be the complex interpolation functor of exponent α , (voir [6]). Cet espace vérifie les injections continues

$$E_p^\alpha := [\mathbb{W}_{\mathfrak{B}}^{2, p}, \mathbb{L}^p]_\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^{2\alpha} \text{ for } 0 \leq \alpha \leq 1$$

où $\mathbb{H}_p^{2\alpha}(\Omega)$ des espaces potentiel de Bessel. On note que pour le cas $p = 2$, les espaces potentiel de Bessel E_2^α coincide avec les espaces de la puissance fractionnaire de l'opérateur \mathcal{A}_p .

Corollaire 7.2 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ est strictement positive. Pour $2\alpha_0 - \frac{n}{p} > 1 + \nu$, le semi-groupe associé au système (SP) admet un attracteur global compact dans $C^{1+\nu}(\bar{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\bar{\Omega})$ for $\nu \in (0, 1)$.*

7.6 Comportement asymptotique des solutions

Par la suite, on suppose $2\alpha_0 - \frac{n}{p} > 1 + \nu$ et nous étudions le comportement asymptotique des solutions de (SP) par rapport à la solution d'équilibre.

Lemme 7.2 *Supposons que $U_0, U_* \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ vérifie*

$$U(t, U_0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} U_* \text{ dans } D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0}).$$

Alors U_ est un point d'équilibre de (SP) dans $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$.*

Preuve. En utilisant la continuité de $S(t)$ pour $t > 0$ et l'hypothèse on a

$$S(s)U_* = S(s)\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)U_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t+s)U_0 = U_*.$$

Alors U_* est un point d'équilibre de (SP) . ■

Par la suite, on suppose que c et d sont des fonctions continues. Nous remarquons que F est une fonction quasimonotone non décroissante dans

$$\Lambda_* = [0, R'_1] \times [0, R'_2]$$

où $R'_1 = \frac{a_{\inf}}{c_{\sup}}$ et $R'_2 = \frac{b_{\inf}}{d_{\sup}}$.

Lemme 7.3 *Supposons que $U_0 \in W_{\Lambda_*}^{\alpha_0} - \{0\}$. Si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ et la condition $(\widehat{C}_{R'})$ est vérifiée. Si \underline{U}, \bar{U} une sous et sur-solution de (SE) alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)\underline{U} = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)\bar{U} = U_*.$$

où $U_ \gg 0$ est l'unique point d'équilibre de (SP) dans $C^{1+\nu}(\bar{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\bar{\Omega})$.*

Preuve. Pour tout $U_0 \in W_{\Lambda_*}^{\alpha_0} - \{0\}$ le système (SP) admet une unique solution fortement positive et donc il existe $t_1 > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que

$$S(t_1)U_0 \geq \varepsilon\varphi = \underline{U}$$

avec φ une fonction propre associée à la valeur propre principale $\lambda_1^\Omega(A)$.

D'après la Proposition 7.3 et la condition $(\widehat{C}_{R'})$, il existe un temps $T \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a

$$\underline{U} \leq S(t)\underline{U} \leq \bar{U}$$

où $\bar{U} = \left(\frac{a_{\inf}}{c^{\sup}}, \frac{b_{\inf}}{d^{\sup}} \right)$. La monotonie du semi-groupe $S(t)$ (voir Corollaire 7.1) donne

$$\underline{U} \leq S(T)\underline{U} \leq S(2T)\underline{U} \leq \bar{U}.$$

Et on observe à partir du processus d'itération $n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{U} \leq S(T)\underline{U} \leq \dots \leq S((n-1)T)\underline{U} \leq S(nT)\underline{U} \leq \bar{U}.$$

Alors $\{S(nT)\underline{U}\}_n$ est une suite croissante et bornée par \bar{U} . Puisque $S(t)$ est compact $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$, il existe une sous suite croissante $\{n_k\}_k$ tend vers ∞ telle que $S(n_k T)\underline{U}$ converge vers un élément $\underline{U}_* \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$.

Nous allons montrer que \underline{U}_* est unique. Supposons que il existe une autre sous suite $\{m_k\}_k$ tend vers ∞ telle que $S(m_k T)\underline{U}$ converge vers certain élément $\underline{W}_* \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$. Par la monotonie de $\{S(nT)\underline{U}\}_n$, pour tout k il existe $l(k)$ tel que

$$S(m_{l(k)} T)\underline{U} \geq S(n_k T)\underline{U}.$$

Passant à la limite quand $k \rightarrow \infty$ on obtient

$$\underline{W}_* \geq \underline{U}_*.$$

Un argument similaire montre

$$\underline{U}_* \geq \underline{W}_*.$$

Donc, on a $S(nT)\underline{U}$ converge vers un élément unique $\underline{U}_* \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$.

Maintenant, nous allons montrer que la solution $S(t)\underline{U}$ converge vers \underline{U}_* quand $t \rightarrow \infty$.

Soit $\{t_n\}_n$ une suite de temps qui tend vers l'infini. On peut écrire

$$t_n = q_n T + \tau_n$$

avec q_n est un entier non négative et $0 \leq \tau_n < T$. On suppose que $\{q_n\}_n$ est une suite strictement croissante. on a

$$\begin{aligned} S(t_n)\underline{U} &= S((q_n - 1)T) \circ S(\tau_n + T)\underline{U}, \\ &\geq S((q_n - 1)T)\underline{U}. \end{aligned}$$

D'autre part, $\tau_n < T$ on peut prendre $t_1 = 2T - \tau_n$ et on a

$$S(2T - \tau_n)\underline{U} \geq \underline{U}.$$

Alors

$$\begin{aligned} S(t_n)\underline{U} &= S(q_n T) \circ S(\tau_n)\underline{U}, \\ &\leq S(q_n T) \circ S(2T)\underline{U} = S((q_n + 2)T)\underline{U}. \end{aligned}$$

Dons, Passant à la limite quand $k \rightarrow \infty$ on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \underline{U} = \underline{U}_*.$$

D'après le lemma précédent on a \underline{U}_* est un point d'équilibre. Similaire on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \overline{U} = \overline{U}_*$$

où \overline{U}_* un point d'équilibre.

Finalement, d'après l'hypothèse $\lambda_1(A) < 0$ alors (SP) admet un unique point d'équilibre U_* fortement positive. On déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \underline{U} = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \overline{U} = U_*.$$

■

Théorème 7.7 *Supposons que $U_0 \in W_{\Lambda_*}^{\alpha_0} - \{0\}$. Si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ et la condition $(\widehat{C}_{R'})$ est vérifiée, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, U_0) = U_*$$

où $U_* \gg 0$ est l'unique point d'équilibre de (SP) dans $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$.

Preuve. D'après Corollaire 7.1 et le Lemme 7.3 on a pour tout $t \geq 0$:

$$S(t + t_1) U_0 \geq S(t) \underline{U}$$

et

$$S(t + t_1) U_0 \leq S(t + t_1) \overline{U}$$

avec $\underline{U} = \varepsilon \varphi$ est sous-solution et $\overline{U} = \left(\frac{a_{\inf}}{c^{\sup}}, \frac{b_{\inf}}{d^{\sup}} \right)$ est une sur-solution de (SE).

On conclut que pour tout $t \geq 0$

$$S(t) \underline{U} \leq S(t + t_1) U_0 \leq S(t + t_1) \overline{U}.$$

Quand $t \rightarrow \infty$, d'après le Lemme 7.3, la solution de (SP) converge vers l'unique point d'équilibre U_* qui est fortement positive. ■

Corollaire 7.3 *Supposons que les coefficients a, b, c et d sont constants. Si $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ est strictement positive et $ab > \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + f)$ alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, U_0) = U_*$$

où $U_* \gg 0$ est l'unique point d'équilibre de (SP) dans $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\nu}(\overline{\Omega})$.

Preuve. D'après la Proposition 7.4, il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $t > \tau$:

$$u(t, u_0) \leq \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad v(t, v_0) \leq \frac{b}{d}.$$

On peut prendre $t' > \tau$ tel que

$$u'_0 = u(t', u_0) \quad \text{et} \quad v'_0 = v(t', v_0).$$

Alors d'après le Théorème précédent on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t + t') U_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) U'_0 = U_*$$

où $U_* \gg 0$ est un point d'équilibre (SP). ■

Proposition 7.6 *Supposons que $U_0 \in D(\mathcal{A}_p^{\alpha_0})$ est strictement positive. Si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ Alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, u_0) \leq R \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, v_0) \leq R$$

$$\text{où } R = \max \left\{ \left(\frac{a^{\sup} - e_{\inf}}{2c_{\inf}} \right), \left(\frac{b^{\sup} - f_{\inf}}{2d_{\inf}} \right) \right\}.$$

Preuve. Si on note

$$A^+(x) = \begin{pmatrix} -e(x) & a^{\sup} \\ b^{\sup} & -f(x) \end{pmatrix}$$

alors on montre facilement que si $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ alors $\lambda_1^\Omega(A^+) < 0$. Par conséquent, le système (SP^+) admet un point d'équilibre $U_*^+ \gg 0$.

En utilisant le théorème de comparaison et le Corollaire 7.3 on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, U_0) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} U^+(t, U_0) = U_*^+.$$

Le Théorème 6.2 et la Remarque 6.1 donnent $u_*^+ \leq R$ et $v_*^+ \leq R$. ■

Remarque 7.3 *La condition $\lambda_1^\Omega(A) < 0$ implique que*

$$a^{\sup} b^{\sup} > \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_1 + e) \rho_1^\Omega(\mathcal{L}_2 + f)$$

par conséquent,

$$\max \left\{ \left(\frac{a^{\sup} - e_{\inf}}{2c_{\inf}} \right), \left(\frac{b^{\sup} - f_{\inf}}{2d_{\inf}} \right) \right\} > 0.$$

Chapitre 8

Simulations numérique

Nous présentons ici quelques résultats obtenus lors des simulations numériques avec le logiciel MATLAB. En conservant la présentation biologique posée dans la première partie, nous allons présenter les résultats observés sur l'évolution en temps des densités de deux sous populations des adultes et des juveniles.

Pour nos simulations numériques, les coefficients du modèles sont des constantes fixées et présentées dans les tableaux mentionnés dans la suite et pour simplifier, le coefficient de diffusion sera pris égal à 1 pour les deux sous populations. Ces deux sous populations évoluent dans un milieu fermé que nous allons représenter dans la suite par le domaine Ω ($\Omega = [0, 1]$ ou bien $\Omega = [0, 4\pi]$).

On peut donc attendre deux comportements différents, selon la valeur des coefficients. Soit on a extinction totale de la population, correspondant à l'état stationnaire trivial, soit on a un unique état stationnaire non trivial qui est stable.

On considère donc le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = av - eu - cu(u + v) & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta v = bu - (a + f)v - dv(u + v) & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \\ \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}v = 0 & \text{sur } (0, \infty) \partial \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0; v(0, x) = v_0 & \text{dans } \bar{\Omega}. \end{array} \right.$$

où \mathfrak{B} représente les conditions de bord de Dirichlet ou bien de Neumann

Cas 1: Condition au bord de Neumann

Dans une première simulation, les coefficients et les conditions initiales ont les valeurs données dans la Table 8.1.

| | a | e | c | b | f | d | u_0 | v_0 |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-------|
| Figure 8.1 | 4 | 7 | 2 | 13 | 2 | 1 | 0.7 | 0.7 |
| Figure 8.2 | // | // | // | // | // | // | 0.1 | 0.1 |

Table 8.1: Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.1 et 8.2.

Nous obtenons, après avoir simulé sur une durée de 100 ans, les densités de population données dans la Figure 8.1 et 8.2.

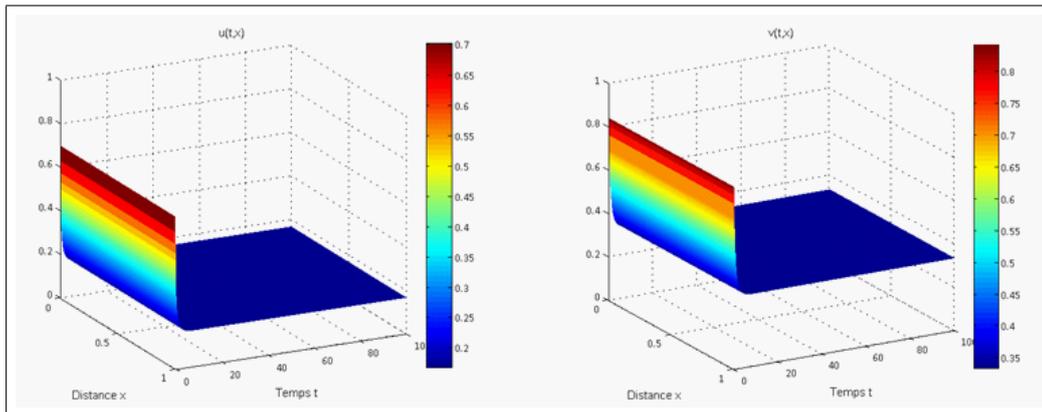


Figure 8.1: Les densités décroissent rapidement vers l'état stationnaire.

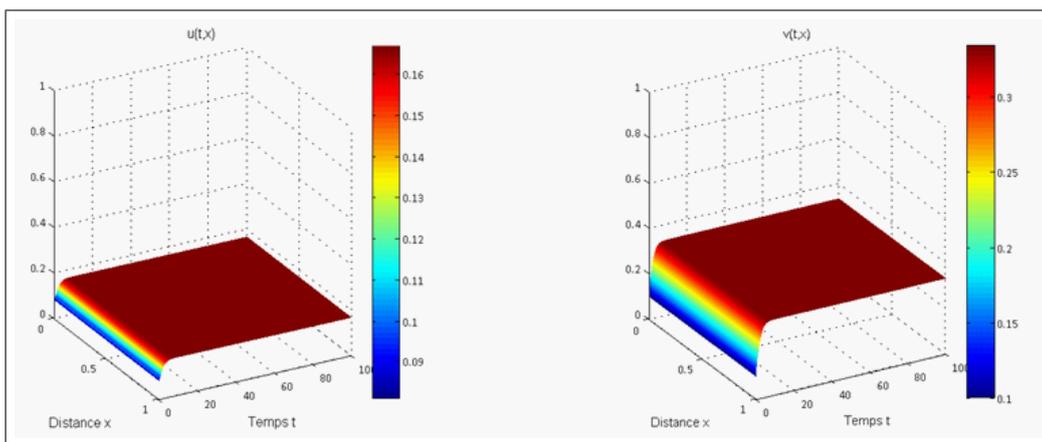


Figure 8.2: Les densités croient rapidement vers l'état stationnaire.

Nous voyons sur les graphes Figure 8.1 et Figure 8.2 que les densités convergent rapidement vers l'état stationnaire. Puisque $ab > e(a + f)$, alors les dynamiques sont en accord avec les résultats mathématiques obtenus dans le chapitre 7.

Dans une seconde simulation, nous nous plaçons dans un cadre plus réaliste et considérer des conditions initiales qui peuvent être localement nulles dans Ω . Les graphes Figure 8.3 et Figure 8.4 sont obtenues à partir des valeurs données dans la Table 8.2 et représentent une situation similaire à celle des graphes Figure 8.1 et Figure 8.2.

| | a | e | c | b | f | d | u_0 | v_0 |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------------------------|--------------------------|
| Figure 8.3 | 4 | 7 | 2 | 13 | 2 | 1 | $1+\sin(x+3*\pi/2)$ | $1+\sin(x+3*\pi/2)$ |
| Figure 8.4 | // | // | // | // | // | // | $0.1+0.1\sin(x+3*\pi/2)$ | $0.1+0.1\sin(x+3*\pi/2)$ |

Table 8.2: Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.3 et 8.4.

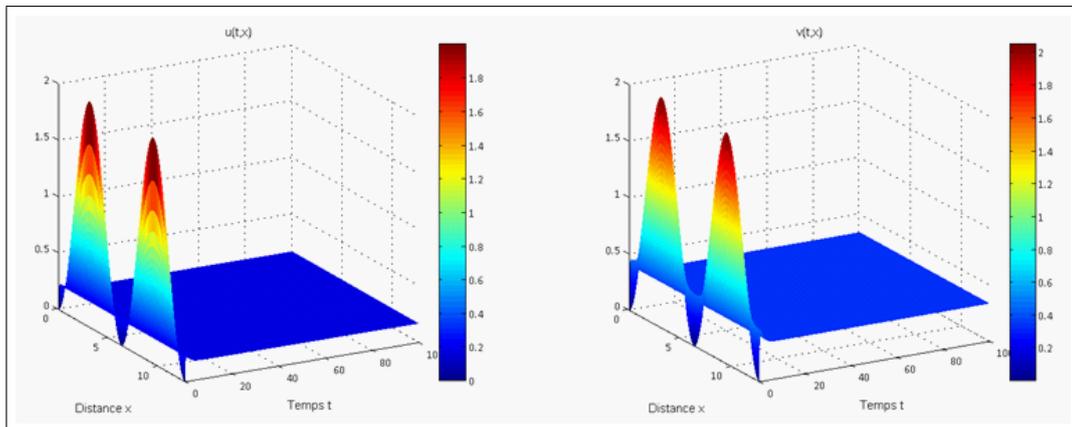


Figure 8.3: Les densités décroissent rapidement vers l'état stationnaire.

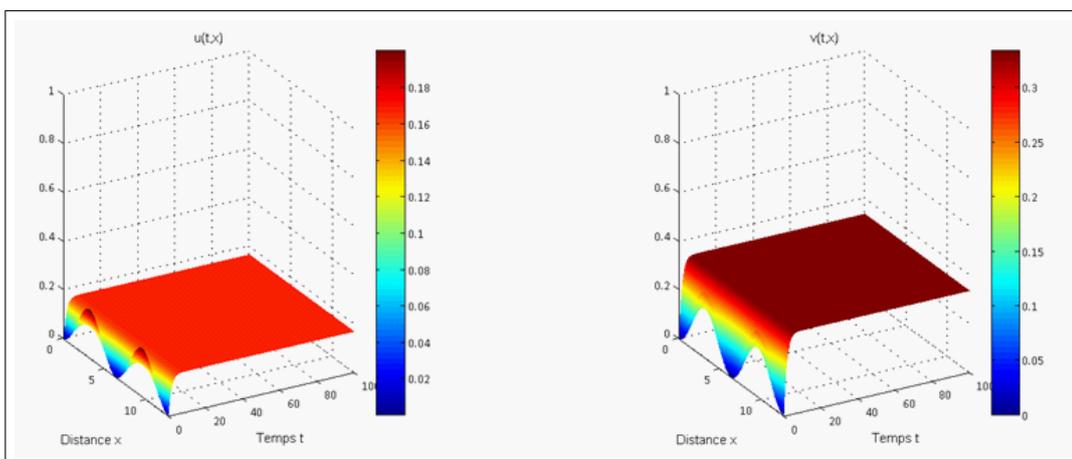


Figure 8.4: Les densités croient rapidement vers l'état stationnaire.

Puisque $ab > e(a + f)$ alors quelque soit la population initiale, non identiquement nulle, les densités convergent vers l'état stationnaire (voir le chapitre 7).

Dans la Table 8.3, nous considérons cette fois-ci le taux de mortalité e supérieurs (c'est-à-dire $e = 9$) de sorte que $ab < e(a + f)$. Nous allons prendre deux cas comme conditions initiales: (u_0, v_0) fortement positives dans Ω ou bien (u_0, v_0) peut être localement nulle dans Ω .

| | a | e | c | b | f | d | u_0 | v_0 |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------------------------|-----------------------------|
| Figure 8.5 | 4 | 9 | 2 | 13 | 2 | 1 | 0.7 | 0.7 |
| Figure 8.6 | // | // | // | // | // | // | $1 + \sin(x + 3 * \pi / 2)$ | $1 + \sin(x + 3 * \pi / 2)$ |

Table 8.3: Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.5 et 8.6.

Nous obtenons, après une simulation sur 100 ans, l'extinction des deux sous populations, ces résultats sont décrits dans les Figure 8.5 et 8.6.

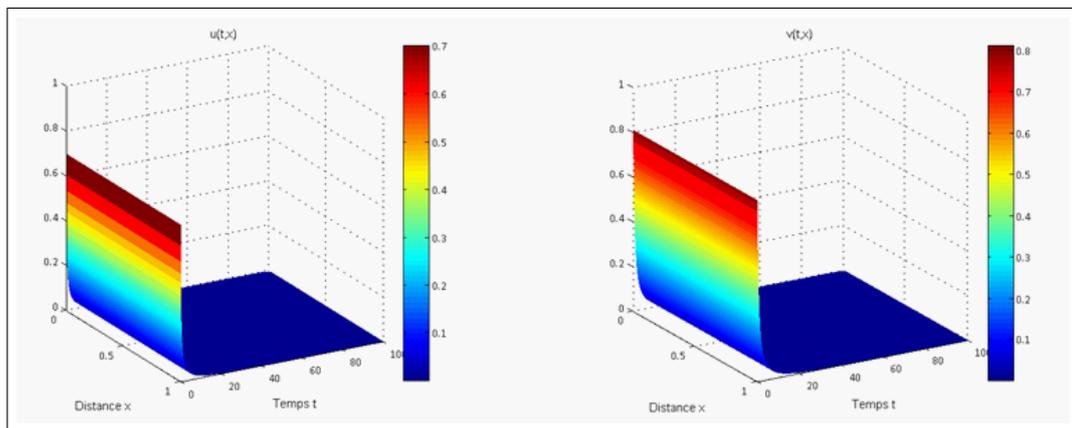


Figure 8.5: Extinction des deux sous populations

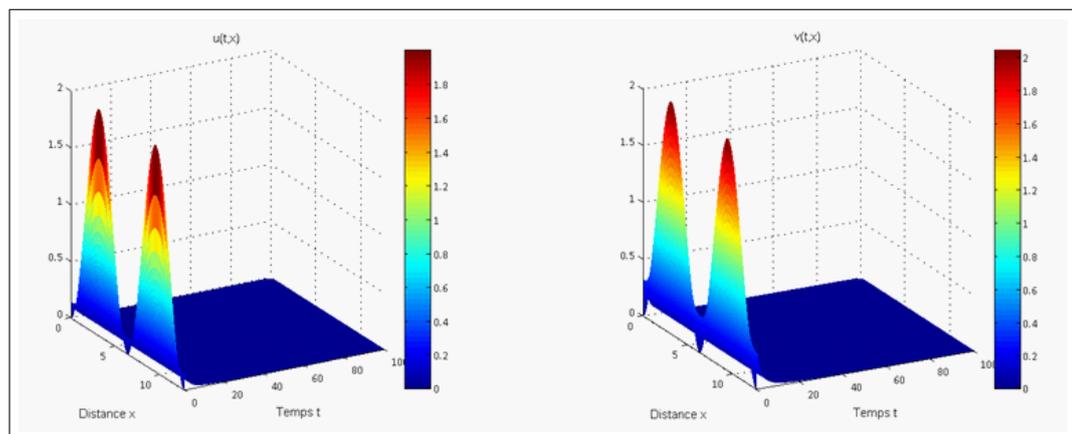


Figure 8.6: Extinction des deux sous populations

Nous avons vu dans le chapitre 6 que lorsque $ab < e(a + f)$, le seul état stationnaire de ce système est l'état trivial. On ne peut donc espérer trouver d'autres états stationnaires pour le système (SP).

Cas 2: Condition au bord de Dirichlet

Nous conservons les valeurs des coefficients données dans la Table 8.1 (et c'est aussi les mêmes valeurs de la Table 8.2) et nous allons prendre deux exemples de conditions initiales.

| | a | e | c | b | f | d | u_0 | v_0 |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------------------------|--------------------------|
| Figure 8.7 | 4 | 7 | 2 | 13 | 2 | 1 | $1+\sin(x+3*\pi/2)$ | $1+\sin(x+3*\pi/2)$ |
| Figure 8.8 | // | // | // | // | // | // | $0.1+0.1\sin(x+3*\pi/2)$ | $0.1+0.1\sin(x+3*\pi/2)$ |

Table 8.4: Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.7 et 8.8.

Nous voyons sur les graphes Figure 8.7 et Figure 8.8 que les densités convergent rapidement vers l'état stationnaire. Comme pour les simulations précédentes, les dynamiques sont en accord avec les résultats mathématiques obtenus dans le chapitre 7.

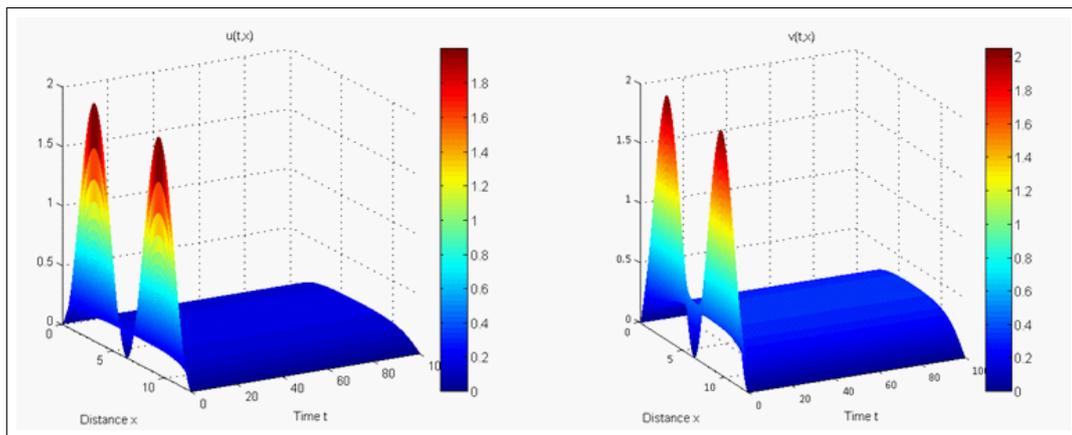


Figure 8.7: Convergence vers l'état stationnaire.

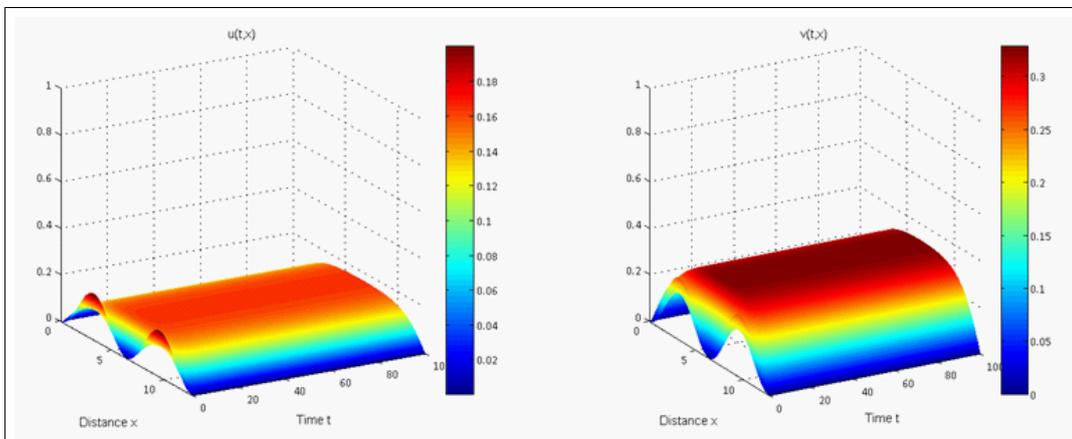


Figure 8.8: Convergence vers l'état stationnaire.

Enfin, le dernier cas que nous présentons ici dans les Figures 8.9 et 8.10 est une situation similaire à celle des conditions au bord de Neumann, c'est-à-dire nous allons modifier les coefficients du système de sorte que

$$ab < \rho_1^\Omega (\Delta + e) \rho_1^\Omega (\Delta + a + f).$$

| | a | e | c | b | f | d | u_0 | v_0 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------------------------|--------------------------|
| Figure 8.9 | 4 | 9 | 2 | 13 | 2 | 1 | $1+\sin(x+3*\pi/2)$ | $1+\sin(x+3*\pi/2)$ |
| Figure 8.10 | // | // | // | // | // | // | $0.1+0.1\sin(x+3*\pi/2)$ | $0.1+0.1\sin(x+3*\pi/2)$ |

Table 8.5: Coefficients et conditions initiales pour les figures 8.9 et 8.10.

Dans les Figure 8.9 et 8.10, nous présentons les résultats obtenus pour les valeurs données dans la Table 8.5. Ce qui correspond à l'extinction des deux sous populations.

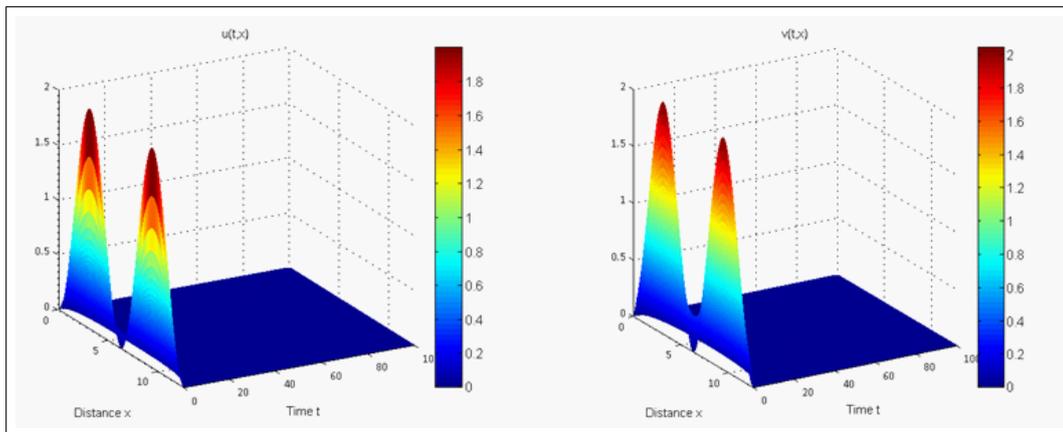


Figure 8.9: Extinction des deux sous populations

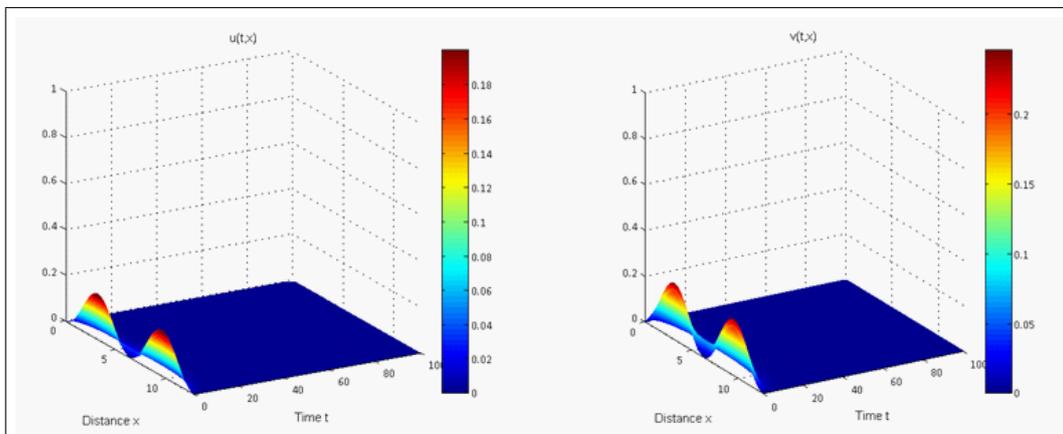


Figure 8.10: Extinction des deux sous populations

Partie IV

Annexe

A. Rappels sur la théorie spectrale

Soit X un espace de Banach réel associé à la norme notée par $\|\cdot\|_X$.

Définition 8.1 Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Un nombre λ complexe est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $u \in X$, $u \neq 0$ tel que $Au = \lambda u$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre de A .

Définition 8.2 Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire fermé dans X . L'ensemble résolvant de \mathcal{A} , noté $\rho(\mathcal{A})$ est

$$\rho(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ existe et borné dans } X \},$$

i.e. l'ensemble des λ pour lesquels les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $(\lambda I - \mathcal{A})$ est injectif,
- (ii) $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$,
- (iii) $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur borné.

On définit pour $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, la résolvante de \mathcal{A} par

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

On dit que λ est une valeur propre si $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$.

Définition 8.3 Soit $\mathcal{A} : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. On dit que \mathcal{A} est à résolvant compact si $R(\lambda, \mathcal{A}) : X \longrightarrow X$ est un application compacte pour un $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Théorème 8.1 (de Krein-Rutman) Soit C un cône, avec intérieur $\text{int}C \neq \emptyset$. Si \mathcal{A} est un opérateur compact strictement positif dans C , alors il existe $u \in \text{int}C$ et il existe $\lambda > 0$ tels que

$$\mathcal{A}u = \lambda u$$

De plus, λ est l'unique valeur propre associée à un vecteur propre positif de \mathcal{A} dans C .

B. Théorème du point fixe

Soient X un espace de Banach réel associé à la norme notée par $\|\cdot\|_X$, C le cône positive de X et

$$C_R = C \cap \overline{B}(0, R), \quad \partial C_R(0, R) = C \cap \partial \overline{B}(0, R)$$

où $B(0, R)$ est une boule dans X de rayon $R > 0$.

On définit la couronne

$$\mathfrak{C}(\varepsilon, R) = \{U \in C : \varepsilon \leq \|x\|_X \leq R\}.$$

Nous allons énoncé le Théorème 20.2 dans [23].

Théorème 8.2 *Soient $0 < \varepsilon < R$, $T : C_R \rightarrow C$ un opérateur compact tels que*

$$i) \quad Tx \neq \mu x \quad \text{pour } \|x\|_X = R \text{ et } \mu > 1,$$

$$i) \quad Tx \neq \mu x \quad \text{pour } \|x\|_X = \varepsilon \text{ et } \mu < 1,$$

$$i) \quad \inf \{\|Tx\|_X : \|x\|_X = \varepsilon\} > 0.$$

Alors l'opérateur T admet un point fixe dans $\mathfrak{C}(\varepsilon, R)$.

C. Rappels sur la théorie des semi-groupes

Dans cette section, on va introduire certaines notions de la théorie des semi-groupes. La plupart des résultats énoncés se trouvent dans [27], [29], [32], [38], [58].

Soit X un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_X$. Dans toute la suite, on notera par I , l'opérateur identité sur X .

A.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 8.4 Une famille d'opérateurs $T(t) : X \rightarrow X$ dépendant du paramètre réel $t \geq 0$ est appelée semi-groupe, si elle satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $T(t + s) = T(t)T(s)$ pour $t, s \geq 0$;
- (ii) $T(0)x = x$, pour tout $x \in X$.
- (iii) pour tout $t \geq 0$, $T(t) : X \rightarrow X$ est une application continue.

De plus, $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit C_0 -semi-groupe si pour tout $x \in X$ fixé, l'application $t \mapsto T(t)x$ est continue sur $[0, \infty)$.

Définition 8.5 Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire \mathcal{A} défini sur le domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{pour } x \in D(\mathcal{A})$$

Théorème 8.3 Si \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X , alors $D(\mathcal{A})$ est dense dans X et \mathcal{A} est un opérateur fermé.

Donc l'espace $D(\mathcal{A})$ est muni de la norme du graphe

$$\|x\|_{D(\mathcal{A})} = \|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X.$$

Proposition 8.1 Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X , il existe deux constantes réelles ω et M telles que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

A.2 Semi-groupe compact

Définition 8.6 Un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X est dit compact pour tout $t > 0$ si $T(t) : X \rightarrow X$ est un opérateur compact pour tout $t > 0$.

Théorème 8.4 Soit \mathcal{A} un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X avec $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est compact si \mathcal{A} est à résolvante compacte.

Théorème 8.5 Soit \mathcal{A} un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X avec $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) \mathcal{A} est à résolvante compacte.
- (ii) L'injection canonique $i : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ est compacte.

A.3 Opérateurs sectoriels

Définition 8.7 Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire sur X . On dit que \mathcal{A} est sectoriel si les deux propriétés suivantes sont satisfaites:

- (i) \mathcal{A} est fermé, à domaine $D(\mathcal{A})$ dense dans X .
- (ii) $\exists \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\exists M \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$, tels que:

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq a \text{ et } \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi\} \subseteq \rho(\mathcal{A}).$$

et

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

A.4 Semi-groupe analytique

Définition 8.8 Un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X est dit semi-groupe analytique si pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est analytique sur $]0, \infty[$

Une classe importante de C_0 -semi groupe dans l'étude du système de non-linéaires paraboliques systèmes aux dérivées partielles est un semi groupe analytique, cette importance est donnée par le résultat suivant (Voir Théorème 36.2 [61])

Proposition 8.2 Si \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique alors $-\mathcal{A}$ est un opérateur sectoriel.

A.5 Puissances fractionnaires

Définition 8.9 Soit \mathcal{A} un opérateur sectoriel défini sur X , tel que $\operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) > 0$. Pour tout $\alpha > 0$, on note l'opérateur $\mathcal{A}^{-\alpha}$ défini par

$$\mathcal{A}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds$.

Définition 8.10 Soit \mathcal{A} un opérateur sectoriel défini sur X , tel que $\operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) > 0$. On définit, la famille d'opérateurs $(\mathcal{A}^\alpha)_{\alpha \geq 0}$ par $\mathcal{A}^0 = I$ et pour tout $\alpha > 0$, \mathcal{A}^α est l'inverse de $\mathcal{A}^{-\alpha}$ et $D(\mathcal{A}^\alpha) = \operatorname{Im}(\mathcal{A}^{-\alpha})$.

L'espace $D(\mathcal{A}^\alpha)$ est muni de la norme du graphe

$$\|x\|_\alpha = \|\mathcal{A}^\alpha x\|_X.$$

Théorème 8.6 Soit $-\mathcal{A}$ un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ tel que $\operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) > 0$. Les propriétés suivantes sont vérifiées:

- 1) Pour $t > 0$ et $\alpha \geq 0$, le semi-groupe $T(t) : X \rightarrow D(\mathcal{A}^\alpha)$ est borné,
- 2) pour tout $U \in D(\mathcal{A}_p^\alpha)$, $T(t)\mathcal{A}^\alpha x = \mathcal{A}^\alpha T(t)x$,
- 3) Pour $t > 0$, $\mathcal{A}^\alpha T(t) : X \rightarrow X$ est borné,
- 4) Pour $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_1}) \subset D(\mathcal{A}_p^{\alpha_2})$,
- 5) Si $T(t)$ est compact alors $\forall \alpha_1 > \alpha_2$, $D(\mathcal{A}_p^{\alpha_1}) \subset D(\mathcal{A}_p^{\alpha_2})$ est compact.
- 6) Il existe C_α, ω des constantes positives telles que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X, D(\mathcal{A}^\alpha))} = \|\mathcal{A}^\alpha T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\omega t} \text{ pour tout } t > 0.$$

A.6 Attracteur global

Soient M un espace métrique complet et $(T(t))_{t \geq 0} : M \rightarrow M$ un semi-groupe.

Définition 8.11 Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit dissipatif s'il existe un ensemble borné $B \subset M$ tel que

$$\forall x \in M, \exists \tau = \tau(x) > 0 : T(t)x \in B \text{ pour } t \geq \tau.$$

Théorème 8.7 Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ admet un attracteur global compact si

- 1) $T(t)$ is a compact for $t > 0$;
- 2) $(T(t))_{t \geq 0}$ is point dissipative.
- 3) Les orbites d'un ensemble borné sont bornés. C'est-à-dire Pour tout ensemble $C \subset M$ borné, $\{S(t)C : t \geq 0\}$ est borné.

Remarque 8.1 Un attracteur global, si il existe, est unique.

Perspectives

Dans ce travail nous avons étudié un modèle mathématique pour une population structurée en deux stades. Un modèle plus général avec n stades a été discuté dans [34], [35], [42] et [43] dont certains résultats sont des extensions des résultats donnés dans [8], [15] et [14]. Il semble qu'on peut faire les mêmes démarches utilisées dans cette thèse pour étudier le modèle avec n stades et donc généraliser les résultats donnés dans [34], [35], [42] et [43].

Il est facile de proposer de nouveaux problèmes de recherche. Il suffit de considérer soigneusement les hypothèses et les circonstances dans lesquelles il a été possible d'établir le modèle. Il n'est pas de généraliser, mais d'envisager des hypothèses plus générales qui ont de l'intérêt, en tenant compte de l'interprétation du modèle.

1) Il sera intéressant d'étudier le système avec des hypothèses plus générales, lorsque les coefficients a et b ne sont pas nécessairement strictement positives dans le domaine Ω . On peut trouver des régions de Ω où il y a pas de naissance des juveniles et des régions où tous les juveniles meurent (ne deviennent pas adultes).

2) En introduisant un terme non locale dans la quantité qui contrôle la compétition des individus dans la recherche de la nourriture, le modèle devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_1 u = a(x)v - e(x)u - c(x)u \int_{\Omega} (u+v) & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}_2 v = b(x)u - f(x)v - d(x)v \int_{\Omega} (u+v) & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}v = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x); v(0, x) = v_0(x) & \text{in } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

où $\int_{\Omega} (u+v) dx$ désigne la population totale.

Cela signifie que la compétition ne dépend pas seulement des individus situés dans la région x mais dépend aussi des autres individus qui sont en quête de la nourriture dans tout le domaine Ω .

3) On pourrait également tenir compte des variations saisonnières ou plus généralement de la dépendance en temps des coefficients du système.

Cette hypothèse permet de prendre en compte le fait que pour certaines espèces:

- La reproduction s'effectue sur une période fixe de quelques mois, hors de cette période le taux de fertilité serait nul. Par exemple: les poissons, les oiseaux marins.

- La mortalité ne sera pas la même toute l'année. Par exemple elle sera plus grande en hiver à cause du froid.

4) Le système étudié peut être interprété dans d'autres situations en biologie comme par exemple la maladie "Gonorrhéa" en épidémiologie (voir [9], [17], [40], [45]).

Bibliographie

- [1] R. Adams, Sobolev spaces, Academic Press (1975).
- [2] R. Agarwal, L. Chen et S. Liu, Recent Progress on Stage-Structured Population Dynamics, *Mathematical and Computer Modelling* 36 (2002) p.p 1319-1360.
- [3] H. Amann, Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems, *Israel J. Math*, 45 (1983), 225-254.
- [4] H. Amann, Maximum principles and principal eigenvalues, in: J. Ferrera, J. López-Gómez, F.R. Ruiz del Portal (Eds.), *Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology*, Elsevier, Amsterdam, (2005) p.p. 1–60.
- [5] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM*, 18 (1976), p.p 620-709
- [6] H. Amann, Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in: Schmeisser/Triebel: *Function Spaces. Differential Operators and Nonlinear Analysis*. Teubner Texte zur Mathematik, 133 (1993) p.p 9-126.
- [7] H. Amann and J. Lopez-Gomez, A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems, *J. Differential Equations* 146 (1998), p.p 336-374.
- [8] O.Arino and J.A.Montero, Optimal control of a nonlinear elliptic population system , *Proc. Edinburgh Math*, 116, (2000), p.p 225-241.
- [9] G.Aronsson and I Mellander . A deterministic model in biomathematics. Asymptotic behavior and threshold conditions, *Math. Biosci.* 49 (1980) p.p 207-222 .
- [10] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. R. S. Varadhan, The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains, *Comm. Pure Appl. Math.* 47 (1994), p.p 47-92.

-
- [11] Birindelli, I., Mitidieri, E., and Sweers, G., Existence of the principal eigenvalue for cooperative elliptic systems in a general domain, *Differ. Uravn.* 35 (1999), p.p 325–333.
- [12] S.M. Bouguima, S. Fekih, W. Hennaoui, Spacial structure in a juvenile-adult model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 9 (2008) p.p 1184-1201.
- [13] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1993.
- [14] J. Brown, Y. Zhang, On a system of reaction–diffusion equations describing a population with two age-groups, *J. Math. Anal. Appl.* 282 (2) (2003) p.p 444-452.
- [15] A. Canada, P. Magal, J.A. Montero, Optimal control of harvesting in a nonlinear elliptic system arising from population dynamics, *J. Math. Anal. Appl.* 254 (2001) p.p 571-586.
- [16] R. S. Cantrell, C. Cosner, *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations* John Wiley & Sons, (2003).
- [17] V. Capasso, *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Lecture Notes in Biomath. Springer Verlag (1993).
- [18] A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, T. Dlotko, Abstract parabolic problems in ordered Banach spaces, *Colloq. Math.* 90 (2001), p.p 1-17.
- [19] L. Chen, W. Wang, A Predator-Prey System with Stage-Structure for Predator, *Computers Math. Applic.* 33, No. 8, (1997) p.p 83-91.
- [20] F.J. Correa and M.A. Souto, On maximum principles for cooperative elliptic systems via fixed point index, *Nonlinear Analysis*, 26 (1996), p.p 997-1006.
- [21] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Vol. 2. Springer-Verlag, Berlin, (1988).
- [22] de Figueiredo, D.G., and Mitidieri, E., Maximum principles for cooperative elliptic systems, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 310 (1990), p.p 49-52.
- [23] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1985).
- [24] M. Delgado, J. López-Gómez and A. Suárez, On the Symbiotic Lotka Volterra Model with Diffusion and Transport Effects, *Journal of Differential Equations* 160 (2000) 175-262.
- [25] B. Ebenman, Niche differences between age classes and intraspecific competition in age-structured populations, *J. Theor. Biol.* 124 (1987).

-
- [26] B.Ebenman, Competition between age classes and population dynamics J .Theor.Biol, 131 (1988).
- [27] K-J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer (1999).
- [28] J. Fleckinger - J. Hernandez - F. de Thelin, On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems, Diff and Int. Eq, V.7, N.3-4, (1994), p.p 689-698.
- [29] A. Friedman, Partial differential equations, Holt, Reinhart and Winston, New York, (1969).
- [30] S. Gaucel and D. Pontier, How predator food preference can change the destiny of native prey in predator-prey systems. Biological Invasions, 7 (2005) p.p 795-806.
- [31] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order, Springer, Berlin (1977).
- [32] J. K. Hale, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Amer. Math. Soc., Providence (1988).
- [33] K. Hamdache, O. Henaoui. Parabolic system modeling two subpopulations, to appear in Nonlinear Analysis, soumis.
- [34] L. J. Hei, Existence and uniqueness of coexistence states for an elliptic system coupled in the linear part, Nonlinear Analysis: Real World Applications 5 (2004) p.p 881-893.
- [35] L. J. Hei and J. H. Wu, Existence and Stability of Positive Solutions for an Elliptic Cooperative System, Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol. 21, No. 5, (2005) p.p 1113-1120.
- [36] O.Henaoui, Memoire de magistère (2005)
- [37] O. Henaoui. An elliptic system modeling two subpopulations, Nonlinear Analysis: Real World Applications 13, Issue 6 (2012) p.p 2447-2458.
- [38] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin (1981).
- [39] Hess, P ., On the eigenvalue problem for weakly coupled elliptic systems, Arch. Rat. Mech. Anal. 81 (1983), p.p 151-159.
- [40] H.W. Hethcote and J.A. Yorke , Gonorrhoea Transmission Dynamics and Control. Lecture Notes in Biomathematics 56. Springer, Berlin (1984).

-
- [41] M. Hirsch, Systems of differential equations which are competitive or cooperative I: Limit sets. *SIAM J. Appl. Math.* 13 (1982), p.p 167-179.
- [42] C-H. Jia and D-X. Feng, On Optimal Control Problem of a Nonlinear Elliptic Population System, *Acta Automatica Sinica*, V. 31, N. 2 (2005) p.p 176-181.
- [43] C-H. Jia and D-X. Feng, An Optimal Control Problem of a Coupled Nonlinear Parabolic Population System, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* V. 23, N. 3 (2007) p.p 377-38.
- [44] T. Kostova, J. Li, M. Friedman, Two models for competition between age classes *Mathematical Biosciences* 157 (1999) p.p 65-89.
- [45] A. Lajmanovich and J.A. Yorke, A deterministic model for gonorrhoea in a nonhomogeneous population, *Math. Biosci.* 28 (1976) p.p 221-236.
- [46] S.M Lenhart and J.A. Montero, Optimal control of harvesting in a parabolic system modeling two subpopulations, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* V. 11, N. 7 (2001) p.p 1129-1141
- [47] A.W. Leung, *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations*. Kluwer Academic, MA, Boston. (1989).
- [48] J.D. Logan, *An introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, Wiley, New York, (1994).
- [49] J.D. Logan, *Applied Mathematics, a contemporary approach*, Wiley, New York, (1987).
- [50] J. López-Gómez, The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems, *J. Differential Equations* 127 (1996) p.p 263-294.
- [51] P.H. Malthus, *An Essay on the Principle of Population*. (First edition), London. (1798).
- [52] R. H. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Wiley and Sons, New York, (1976).
- [53] Mitidieri, E., and Sweers, G., Weakly coupled elliptic systems and positivity, *Math. Nachr.* 173 (1995), p.p 259-286.
- [54] M. Molina-Meyer, Existence and uniqueness of coexistence states for some nonlinear elliptic systems, *Nonlinear Anal. TMA* 25(1995) p.p 279-296.
- [55] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1993).

- [56] B. De Pagter, Irreducible compact operators, *Math. Z.* 192 (1986), p.p 149-153.
- [57] C.V.Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, (1992).
- [58] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1983).
- [59] Protter, M.H., and Weinberger, H.F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1984).
- [60] Sattinger, D.H., Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.* 21 (1971), p.p 979-1000.
- [61] G.R. Sell and Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations*, Springer, New York, (2002).
- [62] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Springer-Verlag, New York, (1983).
- [63] H. L. Smith, *Monotone Dynamical Systems, an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, *Math. Surveys and Monographs*, 41, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1995).
- [64] Sweers, G., Strong positivity in $C(\Omega)$ for elliptic systems. *Math. Z.* 209 (1992), p.p 251-271.
- [65] P.F. Verhulst, A note on the law population growth. *Correspondence Mathématique et Physique Publiée par A. Quetelet*, vol. 10, Brussels, (1838).
- [66] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*. Springer-Verlag, New York (1970).
- [67] Z. Wang, J. Wu, Qualitative analysis for a ratio-dependent predator-prey model with stage structure and diffusion, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 9 (2008) p.p 2270-2287.
- [68] Z. Wang, J. Wu et Z. Zhang, Periodic Solutions of Nonautonomous Stage-Structured Cooperative System *Computers and Mathematics with Applications* 47 (2004) p.p 699-706.
- [69] R. Xu, M. A. J. Chaplain and F. A. Davidson, Modelling and Analysis of a Competitive Model with Stage Structure, *Mathematical and Computer Modelling* 41 (2005) p.p 150-175.

-
- [70] R. Xu, A reaction–diffusion predator–prey model with stage structure and nonlocal delay, *Applied Mathematics and Computation* 175 (2006) p.p 984–1006
- [71] R. Xu, M. A. J. Chaplain and F. A. Davidson, Global convergence of a reaction–diffusion predator–prey model with stage structure and nonlocal delays, *Computers and Mathematics with Applications* 53 (2007) p.p 770–788.
- [72] A. Yagi. *Abstract Parabolic Evolution Equations and Their Applications*,. Springer-Verlag, (2010).

ملخص :

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة نموذج ديناميكي لفئة مقسمة إلى قسمين الفرعيين من نفس النوع المتنافسين على الموارد. نيبين وجود حل وحيد محلي. تقديرات مسبقة تضمن الوجود الإجمالي للحلول و وجود جاذب إجمالي. نعرض وجود وتفرد حلول التوازن من خلال منح الظروف اللازمة والكافية ونقرر الاستقرار. وأخيراً، ندرس سلوك التقارب للحلول بالنسبة لحالة التوازن.

كلمات مفتاحية: مبدأ الحد الأقصى؛ نظرية النقطة الثابتة؛ نظرية نصف زمرة؛ جاذب إجمالي؛ السلوك المقارب؛ الاستقرار.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier un modèle de dynamique de population structuré en deux sous-populations de la même espèce en compétition pour les ressources. Nous examinons l'existence et l'unicité des solutions locales. Des estimations a priori permettent d'établir l'existence globale des solutions et l'existence d'un attracteur global. Nous montrons l'existence et l'unicité des solutions d'équilibre en donnant des conditions nécessaires et suffisantes puis nous établissons leur stabilité. Finalement, nous étudions le comportement asymptotique des solutions par rapport à l'état d'équilibre.

Mots-clefs : Principe du maximum; Théorie du point fixe; Théorie du semi-groupe; Attracteur globale; Comportement asymptotique; Stabilité.

Abstract

The aim of this thesis is to study a model of two subpopulations of the same species competing for resources. We discuss the existence and the uniqueness of mild solutions. A priori estimates guaranteed the global existence of solutions and the global attractor. We show the existence and uniqueness of coexistence states of the system by giving necessary and sufficient conditions and we establish their stability. Finally, we investigate the asymptotic behavior of solution in relation to the corresponding steady-state solution

Keywords: Maximum principle; Fixed point theory; Semigroup theory; Global attractor; Asymptotic behavior; Stability.