République Algérienne Démocratique et Populaire

Minsitère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : Analyse Mathématique

présentée par

Miri Sofiane El-Hadi

Problèmes elliptiques et paraboliques avec terme singulier

Soutenue devant le jury composé de :

M. Ghouali. N.	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. Peral. I.	Professeur, Université autonome de Madrid	Examinateur
M. Bouguima. S.M.	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
M. Mokrane. A.	Professeur, ENS Kouba	Examinateur
M. Touaoula. M.T.	Maître de Conférences, Université de Tlemcen	Examinateur
M. Abdellaoui. B.	Maître de Conférences, Université de Tlemcen	Directeur de thèse

Département de Mathématiques
Faculté des sciences
BP 119 Tlemcen
mirisofiane@yahoo.fr

A la mémoire de mes parents.

"Les bienfaits que nous avons reçus de nos parents sont les plus grands de tous."

Socrate ; Le monde grec - Ve s. av. J.-C.

Remerciements

Je tiens tout d'abord, à adresser mes plus vifs et plus sincères remerciements à M. Abdellaoui. B, je remercie en lui le chercheur de renom qui m'a donné l'opportunité de travailler sous sa direction, je remercie en lui le directeur de thèse à l'engagement total, aux conseils avisés et aux indications toujours fructueuses, enfin je remercie en lui l'ami au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur Ghouali. N, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je prie M. le Professeur Peral. I, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

J'adresse à M. le Professeur Bouguima. S. M, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement, M. le Professeur Mokrane. A, d'avoir accepter de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Je renouvelle mes remerciements à M. le Maître de Conférences Touaoula. M. T, pour faire partie du jury, mais aussi pour avoir partagé son bureau avec moi, pour m'avoir fait don de quelques idées lumineuses dont il est le seul à avoir le secret, pour avoir contribué à l'enrichissement de cette thèse, mais avant tout je le remercie pour son amitié indéfectible.

J'ai une pensée toute particulière pour M. le Professeur Dib. H, avec qui j'ai fait mes premières armes, c'est si peu dire que j'ai beaucoup appris à son contact ; mon seul regret, c'est d'avoir échoué à être son élève, là où lui à aisément réussi à être mon maître, qu'il trouve en ces quelques mots l'expression de ma totale reconnaissance et de mon éternelle gratitude.

Je remercie les amis ; les vrais, Tarik, Boumediene, Fakhreddine et Ali, pour leur soutien tout au long de ces années.

Je remercie M. Attar Ahmed, et je lui souhaite toute la réussite.

Je remercie ma soeur Karima, sans qui rien n'aurait été possible.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $I\!R^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$\alpha \wedge \beta$	$\max\{\alpha,\ \beta\}$
$D_i u = \partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	Dérivée partielle de u par rapport à x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$	Deuxième dérivée partielle de u par rapport à x_i, x_j
$Du = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
$D^2 u = (D_{ij} u)$	Matrice Hessienne associée à u
Δu	Laplacien de u
$\Delta_p u = \mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$	p-Laplacien de u
p'	Exposent conjugué de p, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
$p^* = \dfrac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$p^*_\gamma = \dfrac{p(N - p\gamma)}{(N - p(\gamma+1))}$	Exposent critique de Sobolev si $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$meas(A) = \|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
$\\|\cdot\\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\|\cdot\\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in I\!R^N$
ω_N	Mesure de la sphère unité de $I\!R^N$
ω'_N	Mesure de la boule unité de $I\!R^N$

Notation	Définition
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $I\!R^N$ / crochet de dualité X, X'
$\setminus$	Différence d'ensemble
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
δ_{ij}	Indice de Kronecker
δ_{x_0}	Mesure de Dirac centrée en x_0
$p.p$	Presque partout
$s.c.i.$	Semicontinue inférieurement
$s.c.s.$	Semicontinue superieurement
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V, 0)$
V^-	Partie negative de la fonction V, $V^- = \max(-V, 0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou$\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes de classe k sur Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ positives
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable $\exists C$ tal que $\|u(x)\| \leq C$ en p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espace des mesures de Radon dans Ω

Introduction

Cette Introduction est consacrée à signaler les résultats génériques et généraux, utiles à connaitre pour s'imprégner de la problématique étudiée dans cette thèse.

Il est à noter que les problèmes étudiés dans cette thèse, ne sont pas le fruit de l'imagination fertile d'un théoricien, bien au contraire, les problèmes traités trouvent leurs origines dans différents domaines nous citerons à titre d'exemple : la catalyse hétérogène chimique, la catalyse cinétique chimique, l'induction de chaleur ou encore l'induction électrique, la théorie des fluides non newtonien, et la théorie des fluides visqueux. Pour une plus ample discussion sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à [66] et [50].

0.1 Problèmes avec terme en gradient

Nous commençons par donner une description rapide des problèmes avec terme en gradient aussi appelés problèmes avec terme du premier ordre, et une description qui se veut non exhaustive de la littérature publiée dans ce domaine. La littérature relative au sujet est vaste et s'étale sur les quatre dernières décénnies, nous citreons à titre d'exemple quelques unes des références tout au long de ce prologue. L'équation linéaire

$$-\Delta u + \lambda u = b(x).\nabla u + f(x) \qquad dans\ \Omega$$

Ω étant un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ n'est autre que le problème stationnaire du problème de convection-diffusion suivant

$$u_t - \Delta u + \lambda u = b(x).\nabla u + f(x)$$

équation qui trouve son origine dans la description de différents phénomènes physiques, en mécaanique des fluide ou en océanographie.

Si l'on considère le problème linéaire plus général suivant

$$\begin{cases} -div(A(x)\nabla u) + \lambda u = H(x, \nabla u) + f(x) \quad dans\ \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

alors nous avons le théorème suivant assurant l'existence et l'unicité :

Théorème 0.1. Sous les hypothèses :

$$A(x) \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}, \quad A(x)\xi\xi \geq \alpha\left|\xi\right|^2, \text{ pour un } \alpha > 0, \text{et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

$$f \in H^{-1}(\Omega) \tag{3}$$

il existe une fonction $b \in (L^N(\Omega))^N$ telle que

$$|H(x, \xi)| \leq |b(x)| \left(|\xi| + 1\right) \tag{4}$$

$$|H(x, \xi) - H(x, \eta)| \leq |b(x)| \left|\xi - \eta\right| \tag{5}$$

et soit $\lambda \geq 0$. Le problème 1 possède une solution unique.

Nous remarquerons que dans le théorème précédent le comportement de H est au plus linéaire en gradient.

Si l'on s'interesse à un comportement superlinéaire en gradient nous avons les résultats suivants

Considérons à présent le problème -sur linéaire en gradient- suivant :

$$\begin{cases} -div(A(x)\nabla u) + \lambda u = \gamma\left|\nabla u\right|^q + f(x) \quad dans\ \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$1 < q \leq 2,\ \gamma > 0$. Pour se convaincre de la difficulté et du changement qualitatif et quantitatif par rapport au cas du comportement linéaire en gradient, présentons quelques exemples

Exemple 0.1. Soit Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$ considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

si $1+\frac{2}{N} < q < 2$, en plus de la solution triviale le problème 1 admet pour solution dans $H_0^1(\Omega)$, $u(x) = M\left(|x|^{-\alpha} - 1\right)$ avec $\alpha = \frac{2-q}{q-1}$ et $M = \frac{[N-1-(\alpha+1)]^{\frac{1}{q-1}}}{\alpha}$. Si $q = 2$, en plus de la solution triviale le problème 1 admet pour solution dans $H_0^1(\Omega)$, $u(x) = M\left|\log|x|\right|$.

L'exemple précédent montre que dans le cas d'une dépendance non linéaire du terme de premier ordre, l'unicité n'est plus garantie -et donc le lemme de comparaison lui non plus n'est plus valable- dans $H_0^1(\Omega)$. Le premier enseignement à en tirer est que que ceci n'est pas dû à la régularité de f, vu que $f \equiv 0$ dans l'exemple. En réalité la non unicité est dû au fait que $H_0^1(\Omega)$ n'est plus l'espace naturel pour la recherche de solution. On y reviendra plus tard.

Exemple 0.2. Considérons à présent l'exemple

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + \lambda f(x) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

alors le changement $v = e^u - 1$, permet de transformer le problème 7 sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f(x)(1+v) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $\lambda_1 = Inf\{\frac{\int |\nabla\varphi|^2 dx}{\int f\varphi dx}; \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$, la première valeur propre du laplacien associée à f sous les condition de Dirichlet. Si l'on choisit λ telle que $0 < \lambda_1 < \lambda$ donc par le principe du maximum $u \geq 0$; et par suite $v \geq 0$ est telle que

$$-\Delta v = \lambda f(x)(1+v) \geq \lambda_1 v$$

ce qui est impossible par la définition variationnelle de la première valeur propre. Donc si $\lambda_1 < \lambda$ le problème 7 ne possède pas de solution.

Ce dernier exemple montre que hormis l'unicité, l'existence elle aussi peut être perdue dans le cas de problème linéaire avec comportement superlinéaire en gradient.

Exemple 0.3. Considérons à présent l'exemple suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + f(x) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

avec $1 < q \leq 2$ et $f \geq 0$. Supposons que (8) admette une solution essayons d'obtenir des estimations sur f. Utilisons $|\varphi|^{q'}$ comme fonction test dans (1) avec $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, et $q' = \frac{q}{q-1}$; on obtient alors

$$q' \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi |\varphi|^{q'-1} dx = \int_\Omega |\nabla u|^q |\varphi|^{q'} dx + \int_\Omega f(x) |\varphi|^{q'} dx$$

on applique alors l'inégalité de Young au premier membre de l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi |\varphi|^{q'-1} dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^q |\varphi|^{q'} dx + C \int_\Omega |\nabla \varphi|^{q'} dx$$

donc f doit être telle que

$$\int_\Omega f(x) |\varphi|^{q'} dx \leq C \int_\Omega |\nabla \varphi|^{q'} dx \tag{9}$$

La dernière condition (9) n'est pas triviale, loin de là, pour se convaincre de la non trivialité de celle ci il suffit de considérer une fonction constante f, alors il est intuitif que cette constante ne peut être arbitrairement "grande" ce qui rejoint la conclusion du deuxième exemple. La condition (9) fera couler beacoup d'encre, et trouve plusieures variantes faisant appel parfois aux espaces de Morrey mais aussi à la très remarquable et remarquée notion de capacité [71].

L'indice $q^* = 1 + \frac{2}{N}$, est un indice critique en effet pour $q < q^*$, l'existence et l'unicité de solution sont garanties. Par contre pour $q > q^*$ cela n'est plus vrai comme le montre les exemple précédent Hormis les problèmes élliptiques avec dépendance linéaire en gradient, il n'existe pas de théorie générale traitant des problèmes avec terme du premier ordre, mais Il existe plusieurs résultats relatifs aux problèmes elliptiques avec dépendance sur linéaire en gradient nous citerons par exemple [3], [1], [29], [56], [70], et pour une approche par la théorie du potentiel des problèmes avec terme en gradient ; nous citerons en particulier [71]. Suite à l'étude des problèmes précédents, sont apparus de nouveau problèmes elliptiques avec terme en gradient et singularité nonlinéaire dont les plus simples représentants sont :

$$\begin{cases} -\Delta u \pm |\nabla u|^q \pm \frac{1}{u^\alpha} = \lambda f(x,u) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

avec $f(x,u)$ une fonction régulière et sous linéaire. Ces problèmes ont été traités par V. Radulesciu et al. dans une série d'articles publiés de 2003 à 2007, nous citerons entre autres [62], [63] et [54]. Il existe aussi d'autres types de problèmes où la singularité non linéaire est placée multiplicativement par rapport au terme en gradient :

$$\begin{cases} -\Delta u \pm \frac{|\nabla u|^q}{u^\alpha} = \lambda f(x) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega; \end{cases} \tag{11}$$

ces problèmes on été traité par plusieurs auteurs, nous citreons par exemple [22], [23] et [24], et en particulier lorsque le terme en gradient est placé comme terme de réaction, nous citerons le travail de Abdellaoui et al [6].

0.2 Quelques inégalités pratiques

Nous allons présenter quelques inégalités, algébriques et fonctionnelles qui seront utilisées dans cette thèse :

Inégalités algébrique

Soit ξ_1, $\xi_2 \in I\!R^N$, alors

1) si $p \leq 2$,

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq C(p)\frac{|\xi_2 - \xi_1|^2}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}}. \tag{12}$$

2) si $p > 2$,

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq \frac{C(p)}{2^p - 1}|\xi_2 - \xi_1|^p. \tag{13}$$

Inégalité de Hardy

$$\Lambda_{N,p}\int_\Omega \frac{|\phi|^p}{|x|^p}dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^p dx, \text{ pour toute } \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

où la constante $\Lambda_{N,p} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$ *est optimale et n'est jamais atteinte.*

Inégalité de Picone

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \geq 0$ et soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $-\Delta_p v \geq 0$; alors

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx \geq \int\limits_\Omega \frac{u^p}{v^{p-1}}\left(-\Delta_p v\right) dx$$

L'inégalité suivante est une inégalité faible de type Harnack , ce sera un outil efficace pour l'obtention d'estimations locales, on renvoie à [9] pour la démonstration.

Lemme 0.1. Soit $h \in L^\infty(\Omega)$ et $h \geq 0$ une fonction positive, soit v solution positive de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = h(x), & dans\ \Omega \\ v = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

alors pour tout $B_r \subset \Omega$ telle que $\overline{B_{4r}} \subset \Omega$, il existe une constante positive $c = c(r, N, p)$ telle que

$$\frac{v^{p-1}(x)}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{p-1}} \geq c \int\limits_{B_{2r}} h(y)dy, \forall x \in \Omega.$$

Tout au long de cette thèse nous serons amenés à composer avec des données dans L^1, ce qui impose d'utiliser des notions spécifiques de solutions.

0.3 Le cas elliptique

0.3.1 Sur la notion de solution

Définition 0.1. Soit le problème

$$\begin{cases} -div(a(x,u,\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$; et $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant :

$$a(x,s,\xi)\xi \geq \alpha\,|\xi|^p\,, \quad \alpha > 0 \tag{15}$$

$$|a(x,s,\xi)| \leq [|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + a_0(x)], \qquad a_0(x) \in L^{p'}(\Omega) \tag{16}$$

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta), \xi - \eta) > 0, \qquad \xi \neq \eta \quad \text{p.p,} \ \ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall\ \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^N \tag{17}$$

où, $f \in L^1(\Omega)$, on dit que u est une solution obtenue comme limite d'approximation (SOLA) du problème (14), s'il existe deux suites

$$f_n \in L^\infty(\Omega)\,,\ f_n \longrightarrow f \ \text{ fortement dans } L^1(\Omega)$$

$$u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,\ u_n \longrightarrow u \ \ p.p \text{ dans } \Omega$$

telles que

$$-div(a(x,u_n,\triangledown(u_n)) = f_n \ dans\ D'(\Omega)$$

Théorème 0.2. Soit $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème (14) admet une solution obtenue comme limite d'approximation, $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour chaque $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$

Pour un exposé plus détaillé sur la notion de (SOLA), on renvoie le lecteur à [47], [77], [94] et [52].

Définition 0.2. Soit $f \in L^1(\Omega)$. Une fonction mesurable $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant la condition $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour chaque $k > 0$, est dite solution entropique -

ou solution au sens d'entropie- du problème (14) si est elle vérifie l'inégalité

$$\int\limits_{\Omega} a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi)dx \leq \int\limits_{\Omega} T_k(u-\varphi)f dx$$

pour tout $k>0$ et pour toute fonction $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap L^{\infty}(\Omega)$.

Théorème 0.3. Soit $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème (14) admet une unique solution entropique.

Nous renvoyons le lecteur à [49], [39] pour de plus amples détails sur la notion de solution entropique.

Soit à présent $f=\mu$, une mesure de Radon à variation bornée. On appelle $p-capacit$é d'un compact $K \subset \Omega$ par rapport à Ω le réel

$$cap_p(K,\Omega) = \inf\{\int |\nabla\varphi|^p; \varphi \in C_0^{\infty}, \varphi \geq \chi_K\},$$

où χ_K est la fonction caractéristique de K. Si U est un ouvert de Ω, on définit alors sa $p-capacit$é par

$$cap_p(U,\Omega) = \sup\{cap_p(K,\Omega), K compact, K \subset \Omega\},$$

et la $p-capacit$é d'un sous-ensemble quelconque B de Ω est alors définie par

$$cap_p(B,\Omega) = \sup\{cap_p(U,\Omega), U ouvert, B \subset U\}.$$

Une mesure μ_0 est dite absolument continue par rapport à la $p-capacit$é, si elle est telle que $\mu(B)=0$ pour chaque $B \subset \Omega$ tel que $cap_p(B,\Omega)=0$. D'un autre côté une mesure μ_s est dite singulière par rapport à la $p-capacit$é si elle est concentrée en un ensemble de $p-capacit$é nulle.

Proposition 0.1. [58] Toute mesure de Radon μ à variation bornée dans Ω se décompose de manière unique $\mu=\mu_0+\mu_s$, μ_0 étant absolument continue par rapport à la $p-capacit$é et μ_s singulière par rapport à la $p-capacit$é.

Définition 0.3. Soit à présent $f=\mu$, une mesure de Radon à variation bornée. On dit que la fonction mesurable u est une solution renormalisée du problème (14) si elle est finie p.p, telle que $\forall k, T_k(u) \in W_0^{1,p}$; et pour toute fonction continue φ dans Ω on ait

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_{\{n \leq u \leq 2n\}} a(x, u, \nabla u) \nabla \varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu_s^+$$

et

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_{\{-n \leq u \leq -2n\}} a(x, u, \nabla u) \nabla \varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu_s^-$$

et

$$\int_\Omega h(u) a(x, u, \nabla u) \nabla \varphi dx + \int_\Omega h'(u) a(x, u \nabla u) \nabla u \varphi dx = \int_\Omega \varphi h(u) d\mu_0$$

pour chaque $h \in W^{1,\infty}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ et chaque $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$, telles que $\varphi h(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 0.4. Soit $f = \mu$ une mesure de Radon à variation bornée, alors le problème (14) admet une solution renormalisée.

Pour une lecture plus approfondie, relative à la notion de solution renormalisée et problèmes avec données mesures, on citera [49], [80] et [52].

Remarque 0.1. La notion de solution entropique est confondue avec la notion de solution renormalisée, lorsque $f \in L^1$, pour un exposé plus détaillé sur la notion de solutions, et la relation entre les différentes notions de solution, que se soit dans le cas elliptique ou parabolique, on conseille au lecteur de voir [86] et [53].

0.3.2 Principes de comparaison

L'existence ou l'absence d'un principe de comparaison, facilite ou complique énormément l'étude d'un problème elliptique ou parabolique, et en particulier si l'approche utilisée est non variationnelle. On utilisera à plusieurs reprises le principe de comparaison suivant

Théorème 0.5. Principe de comparaison Soit $1 < p$ et soit f une fonction positive continue telle que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$. Si $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

sont telles que

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(x,u), & u > 0 \text{ in } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(x,v), & v > 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{18}$$

Alors $u \geq v$ in Ω.

Ce théorème est dû à Abdellaoui et Peral [9], dans sa version générale, le cas $p = 2$, a été introduit par Brézis et Kamin [46]. Nous allons à présent présenter l'analogue du principe de comparaison précédent, où la l'opérateur p-laplacien est perturbé afin d'obtenir un opérateur fortement non dégénéré.

Sur un lemme de comparaison pour opérateurs non dégénérés

Lemme 0.2. Soit f une fonction -positive- telle que $\frac{f(u)}{u^{p-1}} \downarrow$, où $1 < p$. Supposons que $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ sont telles que

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u \geq f(u), & u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -L_\varepsilon v \leq f(v), & v > 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{19}$$

où $-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u)$. alors $u \geq v$ dans Ω.

Démonstration. Sans perte de généralité nous allons supposer que $\varepsilon = 1$, pour simplifier remplaçons L_ε par L. De (19) nous avons

$$\frac{-Lu}{u^{p-1}} + \frac{Lv}{v^{p-1}} \geq \frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}.$$

multiplions cette dernière inégalité par $(v^p - u^p)^+$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{-Lu}{u^{p-1}} + \frac{Lv}{v^{p-1}}\right)(v^p - u^p)^+ &\geq \int_\Omega \left(\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\right)(v^p - u^p)^+ \\ &= \int_{[v>u]} \left(\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\right)(v^p - u^p)^+. \end{aligned}$$

par les hypthèses émises sur f nous permet de conclure à la positivité du dernier terme dans l'inégalité précédente. Posons $w = (v^p - u^p)^+$, $\nabla w = p(v^{p-1}\nabla v -$

$u^{p-1}\nabla u)\chi_{[v\geq u]}$, ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \Big(\frac{-Lu}{u^{p-1}} + \frac{Lv}{v^{p-1}}\Big)w \\
= \; & \int_\Omega (1+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla u, \nabla(\frac{w}{u^{p-1}})\rangle - \int_\Omega (1+|\nabla v|^2)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla v, \nabla(\frac{w}{v^{p-1}})\rangle \\
= \; & \int_\Omega (1+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla u, \frac{u^{p-1}\nabla w - (p-1)u^{p-2}w\nabla u}{u^{2(p-1)}}\rangle \\
& - \int_\Omega (1+|\nabla v|^2)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla v, \frac{v^{p-1}\nabla w - (p-1)v^{p-2}w\nabla v}{v^{2(p-1)}}\rangle \\
= \; & \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} [p\frac{v^{p-1}}{u^{p-1}}(1+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\langle\nabla u,\nabla v\rangle - (p-1)\frac{v^p}{u^p}(1+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|^2] \\
& - \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} (1+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|^2] \\
& + \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} [p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}(1+|\nabla v|^2)^{\frac{p-2}{2}}\langle\nabla v,\nabla u\rangle - (p-1)\frac{u^p}{v^p}(1+|\nabla v|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla v|^2] \\
& - \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} (1+|\nabla v|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla v|^2] \\
: \; = & \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} K_1(x)dx + \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} K_2(x)dx.
\end{aligned}$$

Comme $u > 0$ et $v > 0$ dans Ω, alors si $|\nabla u(x)| = 0$, il en résulte que $K_1(x) = 0$, d'un autre côté si $|\nabla u(x)| > 0$, on obtient

$$K_1(x) = \frac{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}}{|\nabla u|^{p-2}}\Big(p\frac{v^{p-1}}{u^{p-1}}|\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u,\nabla v\rangle - (p-1)\frac{v^p}{u^p}|\nabla u|^p - |\nabla u|^p\Big).$$

L'utilisation de l'inégalité de Picone nous permet de conclure que $K_1 \leq 0$, idem que $K_2 \leq 0$, donc

$$\int_\Omega (\frac{-Lu}{u^{p-1}} + \frac{Lv}{v^{p-1}})w \leq 0$$

et donc comme conclusion nous avons

$$\int_{\Omega\cap[v\geq u]} (\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}})(v^p - u^p) \leq 0.$$

Mais sur l'ensemble $[v > u]$, $\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}} \geq 0$, donc $|[v > u]| = 0$. □

Remarque 0.2. Nous obtenons exactement le même résultat si la fonction f est remplacée par une fonction continue positive $f(x,u)$ telle que $\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} \downarrow$,

Le résultat suivant est une conséquence du Lemme 0.2.

Corollaire 0.1. Supposons que $f : \overline{\Omega}\times[0,+\infty)$ est une fonction Hôldérienne telle que $\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ est décroissante pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $t > 0$ et telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = 0$ uniformément pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors le problème

$$\begin{cases} -Lu = \lambda f(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{20}$$

possède une unique solution pour chaque $\lambda > 0$.

Remarque 0.3. Comme conséquence au résultats précédents nous pouvons conclure que pour tout $\lambda > 0$, le problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u = \lambda f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u > 0 \text{ in } \Omega, \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

possède une unique solution w_ε pour tout $\varepsilon > 0$. par les propriètés de f, il n'est pas compliqué de montrer que $w_\varepsilon \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, où w est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda f(x,w) \text{ dans } \Omega, \\ w > 0 \text{ dans } \Omega, \\ w \mid_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Il existe aussi un autre principe de comparaison, dû à Alaa-Pierre ; qui est très utile dans les problèmes avec laplacien et terme en gradient

Théorème 0.6. [18] Soit $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$, une fonction vectorielle telle que $a \in L^{N+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Soit $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \Delta w &\in L^1(\Omega) \\ \alpha w - \Delta w &\leq a.\nabla w \quad dans \quad D'(\Omega) \end{aligned}$$

alors $w \leq 0$

Nous n'avons pas connaissance de l'existence, du pendant du lemme précédent, lorsque le laplacien et remplacé par le p-laplacien. Ceci étant dit ; nous présentons le résultat de comparaison qui semble être le plus général, pour les problèmes comportant le p-laplacien et un terme de premier ordre.

Sur le Lemme de comparaison de Porretta

Ce premier appendice est dédié à la description des résultats obtenus dans [84]. Considérons la classe de problèmes elliptiques suivants :

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{23}$$

en gardant en tête que le modèle auquel on aspire n'est autre que

$$\begin{cases} -\triangle_p u + |\nabla u|^q = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $q \leq p$.

Théorème 0.1. Sous les hypothèses, $q > \frac{N(p-1)}{N-1}$, $1 < p \leq 2$ et

$$f = f_1(x) + div(f_2(x)) \quad \text{où} \quad f_1 \in L^1(\Omega) \text{ et } f_2 \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N \tag{24}$$

$$[a(x,\xi) - a(x,\eta)](\xi - \eta) \geq \alpha \left(|\xi|^2 - |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi - \eta|^2 \ , \quad \alpha > 0 \tag{25}$$

$$a(x,0) = 0 \tag{26}$$

$$|a(x,\xi)| \leq \beta \left(k(x) + |\xi|^{p-1}\right) \ , \quad \beta > 0, \quad k(x) \in L^{p'}(\Omega) \tag{27}$$

$$|H(x,\xi) - H(x,\eta)| \quad \leq \quad \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi - \eta| \,, \tag{28}$$

$$\gamma > 0,\ b(x) \in L^r(\Omega), \tag{29}$$

$$\text{où } 1 \ \leq \ q \leq p-1+\frac{p}{N} \text{ et } r \geq \frac{N\left(q-(p-1)\right)}{q-1} \quad (\text{ou } \ r=\infty \text{ si } q=1)\,. \tag{30}$$

Si u et v sont respectivement une sous et une sur-solution (renormalisée) de (23), vérifiant le critère de régularité suivant

$$(1+|u|)^{\overline{q}-1}\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } \ (1+|v|)^{\overline{q}-1}\, v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \overline{q} = \frac{(N-p)\left(q-(p-1)\right)}{p\,(p-q)} \tag{31}$$

alors $u \leq v$ dans Ω.

Théorème 0.2. Sous les hypothèses, $q < \frac{N(p-1)}{N-1}$, $2-\frac{1}{N} < p \leq 2$ et (24, 25, 26, 27), de plus

$$|H(x,\xi) - H\,(x,\eta)| \ \leq \ \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi-\eta|\,, \tag{32}$$

$$\gamma > 0,\ b(x) \in L^r(\Omega),$$
$$r > \frac{N(p-1)}{N(p-1)-(N-1)} \text{ et } 1 \leq q < \frac{N(p-1)}{(N-1)}.$$

Si u et v sont respectivement une sous et une sur-solution (renormalisée) de (23), alors $u \leq v$ dans Ω.

Théorème 0.3. Sous les hypothèses, $p > 2$, $q > \frac{p}{2} + \frac{(p-1)}{N-1}$, (26), (27) et

$$[a(x,\xi) - a\,(x,\eta)]\,(\xi-\eta) \geq \alpha \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi-\eta|^2 \ , \quad \alpha > 0$$

$$|H(x,\xi) - H\,(x,\eta)| \ \leq \ \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi-\eta|\,,\ \gamma > 0, \tag{33}$$
$$b(x) \ \in \ L^N(\Omega) \text{ où } 1 \leq q \leq \frac{p}{2} + \frac{p}{N}\ . \tag{34}$$

Si u et v sont respectivement une sous et une sur-solution (renormalisée) de (23), vérifiant le critère de régularité suivant

$$(1+|u|)^{\overline{q}-1}\,u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } (1+|v|)^{\overline{q}-1}\,v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \overline{q} = \frac{(N-p)\left(q-\frac{p}{2}\right)}{p\left(\frac{p}{2}+1-q\right)} \tag{35}$$

alors $u \leq v$ dans Ω.

0.4 Le cas parabolique

Nous allons à présent donner quelques définitions relatives aux problèmes paraboliques [34], [35], [36], [37], [49], [53] et [52].

0.4.1 Sur la notion de solution

Définition 0.4. Soit le problème parabolique

$$\begin{cases} u_t - div(a(x,u,\nabla u) = f & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{36}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$; et $a : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant :

$$a(x,t,s,\xi)\xi \geq \alpha\, |\xi|^p\,, \quad \alpha > 0 \tag{37}$$

$$|a(x,t,s,\xi)| \leq \nu[h(x,t) + |\xi|^{p-1} + |s|^{p-1}], \qquad \nu > 0,\ h(x,t) \in L^{p'}(Q_T) \tag{38}$$

$$(a(x,t,s,\xi) - a(x,t,s,\eta), \xi - \eta) > 0, \qquad \xi \neq \eta \quad \text{p.p, } \forall t \in (0,T)\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall\, \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^N \tag{39}$$

où $f \in L^{p'}(Q_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On dira que u est une solution faible de (36) si $u \in C((0,T)\,; L^2(\Omega)) \bigcap L^p((0,T)\,; W_0^{1,p}(\Omega))$ telle que

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0)dx - \int_0^T u\varphi_t dt + \int\int_{Q_T} a(x,t,u,\nabla u\nabla)\varphi dxdt = \int\int_{Q_T} f\varphi dxdt$$

pour chaque φ telle que $\varphi \in L^p((0,T)\,; W_0^{1,p}(\Omega))$ et $\varphi_t \in L^{p'}((0,T)\,; W^{-1,p'}(\Omega))$

vérifiant $\varphi(T)=0$.

Définition 0.5. Soit f une mesure de Borel bornée, on dira que u est une solution au sens des distrubutions de (36) si $u \in L^1((0,T)\,;W_0^{1,1}(\Omega))$, $\nabla u \in L^1(Q_T)$ telle que

$$-\int\int_{Q_T} u\varphi_t dxdt + \int\int_{Q_T} a(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi dxdt = \int\int_{Q_T}\varphi df$$

pour chaque φ telle que $\varphi \in C^\infty(Q_T)$,et $\varphi = 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega \times (0,T) \bigcup (\Omega \times \{T\})$

Définition 0.6. Soit $f \in L^1(Q_T)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$,on dira que u est une solution au sens d'entropie de (36) si $u \in C([0,T]\,;L^1(\Omega))$ et $T_k(u) \in L^p((0,T)\,;W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k>0$, telle que pour chaque $k>0$

$$\begin{gathered}\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T)\,dx - \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi)(T)\,dx + \int_0^T \varphi_t T_k(u-\varphi)\,dt \\ +\int\int_{Q_T} a(x,t,u,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi)\,dxdt \le \int\int_{Q_T} fT_k(u-\varphi)\,dxdt,\end{gathered}$$

pour toute $\varphi \in L^p((0,T)\,;W_0^{1,p}(\Omega)) \bigcap C([0,T]\,;L^1(\Omega)) \bigcap L^\infty(Q_T)$ telle que $\varphi_t \in L^{p'}((0,T)\,;W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(\Omega)\,;$ où $\Theta_k(s) = \int_0^s T_k(\tau)\,d\tau$.

Définition 0.7. On dira que u est une solution renormalisée de (36) si elle est telle que

$$u \in L^\infty((0,T)\,;L^1(\Omega))$$

$$T_k(u) \in L^p((0,T)\,;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ pour tout } k>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{n\le|u|\le 2n\}} |\nabla u|^p = 0$$

et pour toute fonction $S \in W^{2,\infty}(\Omega)$, C^1 par morceaux telle que S' est à support compact on ait

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(u)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x,t,u,\nabla u)S'(u)) + S''(u)a(x,t,u,\nabla u)\nabla u &= fS(u) \text{ dans } D'(\Omega) \\ S(u)\Big|_{(t=0)} &= S(u_0) \text{ dans } \Omega\end{aligned}$$

0.4.2 Lemme de comparaison

Théorème 0.7. [15]

Soit $u,\, v \in \mathcal{C}((0,T);L^1(\Omega)) \cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega))$, pour un $p > 1$, avec $|u_t - \Delta u| \in L^1(\Omega_T)$ et $|v_t - \Delta v| \in L^1(\Omega_T)$. Soit une fonction de Caratheodory $H(x,t,s)$ telle que, $H(x,t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(I\!R^N)$ pour chaque $(x,t) \in \Omega_T$ avec $\sup\limits_{s \in I\!R^N} |\nabla_s H(x,t,s)| = h(x,t) \in L^{2r}([0,T];L^{2p}(\Omega))$, pour $p,\, r > 1$ et $\dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{r} < 1$. Supposons que u et v vérifient

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & \geq & H(x,t,\nabla u) + f \text{ in } \Omega, \\ u(x,0) & = & u_0(x) \text{ in } \Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_t - \Delta v & \leq & H(x,t,\nabla v) + f \text{ in } \Omega, \\ v(x,0) & = & v_0(x) \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{40}$$

où $f \in L^1(\Omega_T)$, $u_0, v_0 \in L^1(\Omega)$ et $v_0(x) \leq u_0(x)$ in Ω. Alors $v \leq u$ in Ω_T.

Lorsque le laplacien est remplacé par le p-laplacien, aucun principe de comparaison analogue au précédent n'existe, d'où la difficulté à étudier les problèmes parabolique avec p-laplacien et terme en gradient.

Remarque 0.4. Dans cette thèse nous nous sommes limités au cas des conditions aux bords de type dirichlet, mais il existe aussi des résultats analogues relatifs au problèmes avec conditions de Neumann, nous invitons le lecteurs désirant se documenter sur le sujet à voir [20], [31] et [88].

Cette thèse à pour objectif l'étude de certains problèmes elliptique et paraboliques ; mettant en interaction un opérateur non linéaire le p-laplacien, un terme en gradient aussi appelé terme du premier ordre, et un terme singulier ; le but étant d'obtenir des résultats d'existence et de non existence. Les méthodes utilisées sont des méthodes non variationnelles basées sur la construction de problèmes approximants réguliers et plus simples à étudier, dont les solutions vont converger vers la solution du problème initial.

Les deux premiers chapitres sont dédiés à l'étude de problèmes elliptiques avec terme en gradient et singularité nonlinéaire. Le troisième et le quatrième chapitres quant à eux sont consacrés à l'étude de problèmes elliptiques et paraboliques avec un terme singulier consistant en un poids de Hardy.

0.5 Description du chapitre 1

Nous allons décrire les motivations et les travaux à l'origine du chapitre 1, ainsi que les méthodes utilisées pour traiter la problèmatique proposée.

On appelle équation de Lane-Emden-Fowler, toute équation du type

$$-\Delta u = \Psi(x, u, \nabla u) \quad \text{dans} \;\; \Omega$$

assujettie aux conditions

$$u > 0 \text{ dans } \;\Omega, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où Ψ possède une ou plusieures singularités. Ce type de problèmes singuliers trouve leur origine dans la description de plusieurs phénomènes physiques, mais plus particulièrement dans la modélisation en chimie de la catalyse hétérogène et la catalyse cinétique.

Dans le Chapitre 1 on s'interesse à étudier l'existence et la non existence de solution pour une version nonlinéaire de l'équation de Lane-Emden-Fowler, soit le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) = \pm |\nabla u|^{\nu} + \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{41}$$

Inspiré par une série d'articles ([62], [63] et [54]) de V. Radulesciu *et al.* parus durant la période 2003-2007, traitant des problèmes

$$\begin{cases} -\Delta u \pm g(u)\, q(d(x)) = \pm |\nabla u|^{\nu} + \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{42}$$

ces problèmes décrivent un phénomène chimique comme cela est décrit dans [54], la méthode utilisée est la méthode de sur et sous-solution, méthode que nous reprendrons dans le chapitre 1, d'ailleurs nous concerverons la même forme de sous solution et sur-solution par contre le principe d'itération, s'avère être plus ardue, nous adapterons des résultats partiels et éparses dûs à Poretta pour généraliser les résultats obtenus par V. Radulescu *et al.*, nous ferons aussi une étude pour une plus vaste classe de fonctions f.

On démontrera que sous la condition $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt = +\infty$, le problème étudié ne possède pas de solutions. Lorsque le terme en gradient est placé comme terme absorbant, on démontrera que si $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty$, alors sous certaines conditions sur q , g et f, et si $0 < \nu \leq p$, alors il existe un $\lambda^* > 0$ telque le problème possède au moins une solution entropique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour $\lambda > \lambda^*$ et ne possède pas de solution si $\lambda < \lambda^*$.

Lorsque le terme en gradient est placé comme terme de réaction, on obtiendra des résultats analogue, mais uniquement pour $0 < \nu \leq p - 1$.

0.6 Description du chapitre 2

Le chapitre 2 à pour objectif de généraliser le résultat obtenu par Abdellaoui Giachetti Peral Wallias [5] pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q\alpha} |\nabla u|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{43}$$

en remplaçant le laplacien par le p-laplacien. Les techniques utilisées sont des techniques non linéaires ce qui fait que ce problème se prète à la généralisation au problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q\alpha} |\nabla u|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{44}$$

par contre il reste - comme précédemment - une difficulté majeure, à savoir l'absence d'un lemme de comparaison. Pour ce faire on adaptera comme dans le chapitre 1 un résultat de Poretta.

On commencera par étudier le cas $f \in L^\infty(\Omega)$ et $q\alpha < 0$, où l'on démontrera l'existence d'une sursolution (radiale), et on procédera par approximation. On obtient plus précisemment les résultat suivants :

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$ et $q(\alpha+1) \leq 1$, alors il existe une solution indépendamment du choix de $||f||_\infty$. Par contre si $q(\alpha+1) > 1$, on devra supposer que λ est suffisamment petit pour assurer l'existence de solution.

2. Si $q\alpha < -1$ on démontre l'existence d'une solution distributionnelle positive pour tout f dans L^1.

3. Si $-1 \leq q\alpha < 0$ sous certaine hypothèses sur f, on démontrera que indépendamment du choix de λ, le problème en considération possède une solution positive.

4. On généralisera le résultat de multiplicité obtenu dans [3] pour la cas $q = 2$ avec $2\alpha \in [-1, 0)$.

0.7 Description du chapitre 3

Dans le chapitre 3, sera étudiée l'existence et la nonexistence de solution du problème

$$
(P_\pm)\begin{cases} -\Delta_p u \pm u^q = \lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega,\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases}
$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $q > p-1$ et h sont des fontions mesurables positives, vérifiant certaines hypothèses qui seront spécifiées ultérieurement. Le but étant d'étudier l'interaction entre le terme u^q, qui sera placé en réaction ou en absorbtion, et le poids de Hardy. Nous avons aussi dans l'esprit d'étudier le cas stationnaire du problème parabolique qui sera traité dans le chapitre suivant.

On peut résumer les résultats obtenus, dans les deux points suivants :

1. Si u^q apparait comme terme de réaction, alors on montre l'existence d'un exposent critique $q_+(\lambda)$, tel que pour $q > q_+$, le problème considéré ne possède pas de solution distributionnelle positive. Si $q < q_+$ on démontre l'existence de solution, sous des conditions sur h.
2. Si u^q apparait comme terme absorbant, alors on démontre l'existence d'un q_* tel que si $q > q_*$, le problème considéré possède une solution positive pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$. L'optimalité de q_* est démontrée, dans le sens où, si $q < q_*$, il y a non existence de solution pour $\lambda > \Lambda_{N,p}$.

0.8 Description du chapitre 4

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de problèmes parabolique,

$$
\begin{cases} (u^\theta)_t - \Delta_p u = \lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + f(x,t) \text{ dans } \Omega\times(0,T),\\ u \geq 0 \text{ et } u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega,\end{cases} \tag{45}
$$

il y'a ici deux types de difficultés, un problème p-laplacien parabolique et un problème dit doublement nonlinéaire, au départ ce sont deux problèmes séparés, mais on remarquera que les mêmes idées s'appliquent aux deux problèmes. Les problèmes étudiés sont fortement liés aux inégalités de Hardy de Picone et de

Harnack suivante

Inégalité de Harnack

Soit u supersolution faible et positive de $(u^{p-1})_t - \Delta_p u = 0$ dans $R = B_\delta(x_0) \times (t_0-\beta, t_0+\beta) \subset \Omega\times(0,T)$. Alors il existe une constante positive $C = C(N, \delta, t_0, \beta)$ telle que

$$\int_{R^-} u \leq C \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u,$$

avec $R^- = B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \times (t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta)$ et $R^+ = B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \times (t_0 + \frac{1}{4}\beta, t_0 + \beta)$.

On se retrouve devant la configuration " Harnack+Hardy=bolw up" observée pour la première fois par Abdellaoui et Peral, voir par exemple [10].

Nous montrerons l'existence d'un exposent de Fujita dans le cas général $\lambda \geq 0$.

Lorsque $\theta = 1$, le comportement de l'opérateur principal dépend des deux cas $p < 2$ ou $p > 2$.

1. Dans le cas où $p > 2$ et $\lambda > 0$, et sous des conditions convenables sur u_0 et f, on démontre l'existence d'un exposent critique $q_+(\lambda)$ tel que si $q > q(\lambda)$, aucune solution - dans un sens convenable- n'existe, ce qui marque la différence avec le cas $\lambda = 0$.
2. Si $p < 2$, nous obetenons un résultat d'existence et même dans certains cas l'extinction en temps fini.

Ces résultats font suite à ceux obtenus dans [61] et [17].

où Ω est soit un domaine régulier borné contenant l'origine ou $\Omega = I\!R^N$, $1 < p < N$, $q > 0$ et θ est soit égal à 1 ou égal à $p - 1$.
f et u_0 sont des fonctions positives telles que $f \in L^1(\Omega \times (0,T))$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$.

Chapitre 1

Une version nonlinéaire de l'équation de Lane-Emden-Fowler

Ce chapitre est le développement de l'article [78].

1.1 Introduction.

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un problème elliptique faisant intervenir d'une part le p-laplacien $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}.\nabla u)$ nous renvoyons le lecteur à [50] pour une vaste description des propriétés de cet opérateur ; d'une autre part un terme singulier et un terme en gradient

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g\left(u\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \pm \left|\nabla u\right|^{\nu} + \lambda f\left(x,u\right) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω est un domaine bornée de $\mathbb{R}^N$, $d\left(x\right) = dist\left(x, \partial\Omega\right)$, $\lambda > 0$, $0 < \nu \leq p$;
Nous conviendrons de placer ce problème sous le vocable problème de Lane Emden Fowler nonlinéaire.

La fonction g est supposée positive strictement décroissante et telle que $g \in$

$C^1(0,+\infty)$ avec

$$\lim_{t\to 0} g(t) = +\infty \tag{1.2}$$

clairement les fonctions $g(s) = \dfrac{1}{s^\beta}$, $\beta > 0$, font partie de ce type de fonctions ce seront d'ailleurs les fonctions modèles.

On supposera aussi que $f : \overline{\Omega} \times [0,+\infty)$ est une fonction Höldérienne (Hölder continue) croissante vérifiant

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \text{ est décroissante pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = +\infty \text{ et} \lim_{t\to +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = 0 \text{ uniformément pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.4}$$

La fonction $q : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ quant à elle est supposée Höldérienne (Hölder continue) décroissante.

Ces types de problèmes ont été proposés par des chimistes, en particulier dans l'étude de la catalyse hétérogène chimique et la catalyse cinétique chimique. Pour une plus ample discussion sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à [66].

L'idée de ce travail trouve son origine dans le papier [54] où le p-laplacien est remplacé par le laplacien ($p = 2$) l'équation est alors dite de Lane-Emden-Fowler , nous citerons par exemple les travaux [62] et [63] pour différentes approches au dit problème, ce n'est pas un problème complètement purement théorique car il trouve son origine en chimie. Nous ferons remarquer au lecteur que si le terme singulier $g(u)\,q(d(x))$ est remplacé par u^a avec $a > 0$ l'approche et les résultats sont complètement différents nous renvoyons le lecteur à [13]

Nous avons repris les mêmes idées de [54] pour faire l'étude du problème à savoir méthode non variationnelle consistant à construire une sous-solution et une sur-solution et utiliser la monotonie de l'opérateur principal, sauf que l'extension au p-laplacien rencontre une difficulté majeure aucun principe de comparaison général et générique pour l'opérateur $-\Delta_p u \pm |\nabla u|^\nu$ n'est établi, qui plus est le comportement diffère selon que l'on soit dans le cas $p < 2$ ou le cas $p > 2$, il est à noter que pour le cas $p < 2$ le principe de comparaison n'est connu que pour r $p \geq \frac{2N}{N+1}$. Nous avons donc dû adapter des résultats partiels globalement inspirés de [54].

Ce chapitre est organisé comme suit :

La section 1.2 est dédiée à l'étude du problème où le terme en gradient est placé comme terme absorbant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^{\nu} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

sous l'hypothèse $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt = +\infty$ un résultat de non existence est démontré. Il est à noter que l'hypothèse émise sur g, est essentielle, d'un autre côté si g est bornée, on peut alors obtenir l'existence de solutions par des arguments de compacité. Dans le cas où $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty$, en utilisant un argument de sous et sur-solution on démontre l'existence d'une solution au sens d'entropie pour λ assez "grand". Un résultat de non existence est démontré lorsque λ prend des valeurs assez "petites", nous démontrerons ainsi par un argument de continuité que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que que le problème (1.5) possède une solution, est un intervalle (λ^*, ∞). Dans la sous section 1.2.2 en plus de l'introduction de la nonlinéarité induite par le p-laplacien nous proposons d'affaiblir les conditions sur f en supposant que $f(x,s) = s^a + h$ où $h \in L^1(\Omega)$ et $a < p-1$, nous démontrons l'existence de solution entropique.

Le problème où le term en gradient est placé comme terme de réaction est étudié dans la section 1.3

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) = \lambda f(x,u) + |\nabla u|^{\nu} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

comme dans le premier cas, l'existence de la solution est démontré pour de "grandes" valeurs du paramètre et sous les hypothèses $0 < \nu < p-1$ et $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty$, et la nonexistence de solution est démontrée lorsque λ prend des valeurs assez "petites".

Un principe de comparaison et un résultat d'unicité relatif à l'opérateur strictement monotone $-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u), \varepsilon > 0$ est donné en appendice, ce résultat est une généralisation du résultat obtenu en [9].

Dans tout le chapitre nous utiliserons le très pratique lemme de comparaison suivant dont la preuve peut être retrouvée dans [12].

Théorème 1.1. Principe de comparaison Soit $1 < p$ et soit f une fonction positive continue telle que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$. Si $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sont telles que

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(x,u), & u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(x,v), & v > 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

Alors $u \geq v$ in Ω.

On utilisera aussi à volonté les inégalités algébriques suivantes, le lecteur pourra en trouver les démonstrations dans [93] et [76] ou encore [50]

Lemme 1.1. Soit ξ_1, $\xi_2 \in I\!R^N$, alors

1) si $p \leq 2$,

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq C(p)\frac{|\xi_2 - \xi_1|^2}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}}. \tag{1.8}$$

2) si $p > 2$,

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq \frac{C(p)}{2^p - 1}|\xi_2 - \xi_1|^p. \tag{1.9}$$

Nous rappelons aussi la définition de la notion de solution au sens d'entropie pour les problèmes elliptiques.

Définition 1.1. Soit u une fonction mesurable, on dira que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ si sa troncature $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$ où

$$T_k(s) = \begin{cases} k\, sgn\,(s) & si \quad |s| \geq k \\ s & si \quad |s| \leq k \end{cases} \tag{1.10}$$

Soit $F \in L^1(\Omega)$, alors $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ est dite solution d'entropie - ou solution au sens d'entropie- du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta_p u = F \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

si pour tout $k > 0$ et tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla(T_k(u-v)) \rangle = \int_\Omega F\, T_k(u-v). \tag{1.12}$$

Ainsi on dira que u est une solution d'entropie du problème (1.5) si

$$f(x,u), g(u)\, q(d(x)), |\nabla u|^\nu \in L^1(\Omega)$$

et la définition précédente appliquée pour $F(x) \equiv \lambda f(x,u) - g(u)\, q(d(x)) - |\nabla u|^\nu$. On recommande [30] pour plus de détails sur la notion de solution d'entropie.

Parmi les conséquences de la définition si u est une solution d'entropie de (1.5), alors à fortiori u est une solution au sens des distributions de (1.5).

1.2 Le terme en gradient comme terme absorbant

Dans cette section nous allons nous pencher sur le cas où le terme en gradient est placé comme terme absorbant, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^\nu = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

où f vérifie les conditions (1.3) et (1.4) avec $0 < \nu \leq p$, selon le comportement intégral du terme singulier $q(t)\, g(t)$ nous allons montrer l'existence ou la non existence de solution.

1.2.1 Résultats d'existence et de non existence

Nous introduisons le résultat de non existence suivant

Proposition 1.1. Si $\int\limits_0^1 q(t)\, g(t)\, dt = +\infty$, alors le problème (1.13) ne possède pas de solution dans l'espace d'energie $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Par l'absurde supposons que (1.13) possède une solution u, alors

$$-\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) \leq \lambda f(x,u)\,.$$

Soit v l'unique positive solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x,v) & \text{dans } \Omega, \\ v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'existence de v est assurée par la théorie variationnelle classique.

Par les propriètés de f et le principe de comparaison 1.1, on conclut que v vérifie

$$v \leq C_0 \varphi_1 \leq C_1 d(x)$$

où φ_1 la première fonction propre du p-laplacien, soit c'est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_1 = \lambda_1 |\varphi_1|^{p-2}\, \varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_1 > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où C_0, C_1 sont deux constantes positives.
Une fois encore l'utilisation de 1.1 nous permet de conclure que $u \leq v$. Considérons à présent le problème perturbé suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon + g(u_\varepsilon + \varepsilon)\, q(d(x) + \varepsilon) = \lambda f(x, u_\varepsilon) & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

alors u et v sont respectivement sous-solution et sur-solution of (1.14) ; la monotonie permet de conclure à l'existence d'une solution u_ε telle que $u \leq u_\varepsilon \leq v$. avec $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

En intégrant l'équation principale dans (1.14), on arrive à

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \Delta_p u_\varepsilon dx + \int_\Omega g\left(u_\varepsilon + \varepsilon\right) q\left(d\left(x\right) + \varepsilon\right) dx \\
&= \int_\Omega \lambda f\left(x, u_\varepsilon\right) dx \leq C_1 \int_\Omega u_\varepsilon^{p-1} dx + C_2 \leq C_1 \int_\Omega v^{p-1} dx + C_2 = M.
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$-\int_{\partial\Omega} \left|\nabla u_\varepsilon\right|^{p-2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \eta} d\sigma + \int_\Omega g\left(u_\varepsilon + \varepsilon\right) q\left(d\left(x\right) + \varepsilon\right) dx = M.$$

comme $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \eta} \leq 0$; sur $\partial\Omega$ alors

$$\int_\Omega g\left(u_\varepsilon + \varepsilon\right) q\left(d\left(x\right) + \varepsilon\right) dx \leq M$$

La décroissance de g nous amène à

$$\int_\Omega g\left(v + \varepsilon\right) q\left(d\left(x\right) + \varepsilon\right) dx \leq M$$

par passage à la limite, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\int_\Omega g\left(v\right) q\left(d\left(x\right)\right) dx \leq M$$

une fois de plus la monotonie de g et le fait que $v \leq C_1 d\left(x\right)$ nous permet de conclure que

$$\int_\Omega g\left(C_1 d\left(x\right)\right) q\left(d\left(x\right)\right) dx \leq M$$

ce qui contredit l'hypothèse $\int_0^1 q\left(t\right) g\left(t\right) dt = +\infty$. $\square$

Supposons à présent que

$$\int_0^1 q\left(t\right) g\left(t\right) dt < +\infty, \tag{1.15}$$

alors nous avons le résultat d'existence :

Théorème 1.2. Supposons que la condition (1.15) est vérifiée est que les conditions sur q , g et f sont satifaites. Si de plus $0 < \nu \leq p$, alors il existe un $\lambda^* > 0$ tel que le problème (1.13) possède au moins une solution entropique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour $\lambda > \lambda^*$ et ne possède pas de solution si $\lambda < \lambda^*$.

Démonstration. La démonstration est structurée en plusieurs étapes.

Etape 1 : Construction de sous et sur-solution

Pour montrer l'existence de solution nous allons utiliser un argument de sous et sur-solution ; pour cela considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda f(x, w) & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

par les hypothèses émises sur f, le problème (1.16) possède une unique solution w qui fournit par la même occasion une supersolution à (1.13). La construction d'une sous-solution s'avère être une tâche plus ardue, pour ce faire nous allons nous inspiré de la très élégante idée introduite dans [54] et inspirée par les conditions de Keller-Ossermann. Soit $\underline{u} = Mh(c\varphi_1)$ où M et c sont des contantes positives choisies ultérieurement et où φ_1 comme précédemment, désigne la première fonction propre p-laplacian et h est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} h''(t) = q(h(t))\, g(h(t)), \\ h' > 0, \\ h > 0, \\ h(0) = h'(0) = 0, \end{cases}$$

notons que l'existence de h est assurée par la condition $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty$.

Donc $\underline{u}$ vérifie

$$\begin{aligned} L_p(\underline{u}) &\equiv -\Delta_p \underline{u} + g(\underline{u})\, q(d(x)) + |\nabla \underline{u}|^\nu \\ &= M^{p-1}\left(\lambda_1 c h'(c\varphi_1)\varphi_1 - (p-1) h''(c\varphi_1)(h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p c^p\right) \\ &\quad + q(d(x))\, g(Mh(c\varphi_1)) + M^\nu c^\nu |\nabla\varphi_1|^\nu (h'(c\varphi_1))^\nu . \end{aligned}$$

Suppons que $M \geq 1$, alors $Mh(c\varphi_1) \geq h(c\varphi_1)$ ce qui conduit à $g(Mh(c\varphi_1)) \leq g(h(c\varphi_1))$, on obtient alors

$$\begin{aligned} & L_p(\underline{u}) \leq M^{p-1}\lambda_1 c h'(c\varphi_1)\varphi_1 - (p-1) M^{p-1} h''(c\varphi_1)(h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p c^p \\ & + q(d(x))\, g(h(c\varphi_1)) + M^\nu c^\nu |\nabla\varphi_1|^\nu (h'(c\varphi_1))^\nu \\ & \leq c\lambda_1 M^{p-1} h'(c\varphi_1)\varphi_1 - (p-1) M^{p-1} q(h(c\varphi_1)) g(h(c\varphi_1))(h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p c^p \\ & + q(d(x))\, g(h(c\varphi_1)) + M^\nu c^\nu |\nabla\varphi_1|^\nu (h'(c\varphi_1))^\nu . \end{aligned}$$

Comme $h(0) = 0$, par continuité de la fonction h on peut toujours choisir c suffisamment petit de manière à avoir $h(c\varphi_1) \leq d(x)$ et par suite $-q(h(c\varphi_1)) \leq -q(d(x))$, ce qui donne

$$\begin{aligned} & L_p(\underline{u}) \leq c\lambda_1 M^{p-1} h'(c\varphi_1)\varphi_1 - (p-1) c^p M^{p-1} q(d(x)) g(h(c\varphi_1))(h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p \\ & + q(d(x))\, g(h(c\varphi_1)) + M^\nu c^\nu |\nabla\varphi_1|^\nu (h'(c\varphi_1))^\nu \\ \leq\ & q(d(x))\, g(h(c\varphi_1)) \left[1 - (p-1) M^{p-1} (h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p c^p\right] \\ & + M^{p-1}\lambda_1 c h'(c\varphi_1)\varphi_1 + M^\nu c^\nu |\nabla\varphi_1|^\nu (h'(c\varphi_1))^\nu . \end{aligned}$$

Choisissons à présent $M > 1$ tel que

$$\left[1 - (p-1) M^{p-1} (h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p c^p\right] < 0,$$

comme $\lim_{t \to 0} g(t) = +\infty$, il en résulte que

$$\begin{aligned} & \lim_{d(x)\to 0} \Big(q(d(x))\, g(h(c\varphi_1)) \left[1 - (p-1) M^{p-1} (h'(c\varphi_1))^{p-2} |\nabla\varphi_1|^p c^p\right] + \\ & \qquad + M^{p-1}\lambda_1 c h'(c\varphi_1)\varphi_1 + M^\nu c^\nu |\nabla\varphi_1|^\nu (h'(c\varphi_1))^\nu \Big) = -\infty . \end{aligned}$$

On peut alors conclure à l'existence d'un domaine $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ tel que

$$L_p(\underline{u}) \equiv -\Delta_p \underline{u} + g(\underline{u})\, q(d(x)) + |\nabla \underline{u}|^\nu < 0 < \lambda f(x, \underline{u}) \qquad \text{pour tout } x \in \Omega \setminus \Omega_0.$$

Maintenant pour $x \in \omega \subset\subset \Omega$, on peut toujours choisir λ assez grand de manière à avoir

$$L_p(\underline{u}) \leq \lambda f(x, \underline{u}) \qquad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

On en arrive à la conclusion que $\underline{u}$ est une sous-solution de (1.13).

Le théorème 1.1 permet de conclure que $\underline{u} \leq w$.
Pour obtenir l'existence de solution il reste à utiliser un argument de monotonie pour déduire l'existence de solution. Et comme aucun principe de comparaison n'est connu pour ce type d'opérateurs comprenant le p-laplacien et un term de premier ordre - nous le répétons car c'est la principale difficulté-, nous devons donc composer avec plusieurs résultats partiels et pour différentes valeurs de p.

Les étapes 2, 3 et 4 suivantes sont dédiées à démontrer l'existence de solution pour $p < 2$; mais pour différents intervalles de p et ν ; l'étape 5 est quant à elle dédiée à l'étude du cas $2 < p$; la sixième et dernière étape quant à elle et consacrée à démontrer la non existence de solution pour de "petites" valeurs de λ.

Etape 2 : Résultat d'existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $1 \leq \nu \leq p - 1 + \frac{p}{N}$
Le but de la manoeuvre est d'adapter à notre opérateur les Théorèmes 3.1, 3.2 de [84] qui sont en fait des principes de comparaison pour l'opérateur $-\Delta_p u + |\nabla u|^\nu$ dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$. Introduisons la suite de fonctions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : $u_0 = \underline{u}$ et pour $n \geq 1$, u_n est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g(u_{n-1})\, q(d(x)) + |\nabla u_n|^\nu = \lambda f(x, u_{n-1}) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.17}$$

Notons tout d'abord que grâce au théorème 1.1 nous avons pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq w$. De plus la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en n ; en effet pour montrer la croissance de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nous allons utiliser les Théorèmes 3.1, 3.2 de [84].

Par construction u_1 est solution de

$$-\Delta_p u_1 + g(u_0)\, q(d(x)) + |\nabla u_1|^\nu = \lambda f(x, u_0).$$

par la définition de u_0 nous obtenons

$$-\Delta_p u_1 + |\nabla u_1|^\nu \geq -\Delta_p u_0 + |\nabla u_0|^\nu.$$

donc par le principe de comparaison de [84] on conclut que $u_1 \geq u_0$. Réitérons et montrons que $u_2 \geq u_1$, comme u_2 satisfait à

$$-\Delta_p u_2 + g(u_1)\, q(d(x)) + |\nabla u_2|^\nu = \lambda f(x, u_1),$$

et puisque g est décroissante il en découle que

$$-\Delta_p u_2 + g(u_0)\, q(d(x)) + |\nabla u_2|^\nu \geq \lambda f(x, u_1),$$

comme précédemment on obtient alors

$$-\Delta_p u_2 + |\nabla u_2|^\nu \geq -\Delta_p u_1 + |\nabla u_1|^\nu.$$

Donc $u_2 \geq u_1$. De proche en proche et en réutilisant la même méthode on démontre la croissance de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Maintenant utilisons u_n comme fonction test dans (1.17) par les propriètés de f on obtient que $|u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, d'où l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_n \to u$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < p^*$. Et comme $\underline{u} \leq u \leq w \in L^\infty(\Omega)$, donc $u \in L^\infty(\Omega)$ et par suite $u_n \to u$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma > 1$. Ce qui permet de conclure que $|\nabla u_n|^\nu \to |\nabla u|^\nu$ dans $L^1(\Omega)$; par l'hypothèse faite sur ν on peut observer que $\nu < p$, utilisons à présent $(u - u_n)$ comme fonction test dans (1.17) nous obtenons alors

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega g(u_{n-1})\, q(d(x))\, (u - u_n) dx$$
$$+ \int_\Omega |\nabla u_n|^\nu (u - u_n) dx = \lambda \int_\Omega f(x, u_{n-1})(u - u_n) dx.$$

Le théorème de la convergence dominée et les hypothèse émises sur f, il vient que

$$\lambda \int_\Omega f(x,u_{n-1})(u-u_n)dx = o(1).$$

L'utilisation de l'inégalité de Hölder et par le fait que $\nu < p$ on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^\nu (u-u_n)dx \leq (\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx)^{\frac{\nu}{p}} (\int_\Omega (u-u_n)^{\frac{p}{p-\nu}} dx)^{\frac{p-\nu}{p}} = o(1).$$

Nous nous intéressons à présent au terme $\int_\Omega g\left(u_{n-1}\right) q\left(d\left(x\right)\right)(u-u_n)dx$. On a

$$g\left(u_{n-1}\right) q\left(d\left(x\right)\right)\left(u-u_n\right) \to 0 \text{ p.p. in } \Omega.$$

Du fait que $\{u_n\}_n$ est croissante en n on obtient

$$g\left(u_{n-1}\right) q\left(d\left(x\right)\right)\left(u-u_n\right) \leq Cg\left(\underline{u}\right) q\left(d\left(x\right)\right),$$

par (1.15) et par la définition de $\underline{u}$ on obtient

$$\int_\Omega g\left(\underline{u}\right) q\left(d\left(x\right)\right) dx < \infty.$$

Le théorème de la convergence dominée permet de conclure que

$$\int_\Omega g\left(u_{n-1}\right) q\left(d\left(x\right)\right)\left(u-u_n\right)dx = o(1),$$

en combinant toutes les estimations obtenues jusque là on arrive à

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx = o(1).$$

A présent l'utilisation de l'inégalité de Young donne

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^p dx &= \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx + o(1) \\
&\leq \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^{p-1} \left|\nabla u\right| dx + o(1) \\
&\leq \frac{p-1}{p} \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^p + \frac{1}{p} \int_\Omega \left|\nabla u\right|^p dx + o(1)
\end{aligned}$$

soit

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + o(1)$$

et par suite

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx \leq \limsup \int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx,$$

donc $||u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ et l'on conclut à la convergence au sens fort.

Etape 3 : Résultat d'existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $p-1+\frac{p}{N} \leq \nu \leq p$

Afin de construire une suite monotone et d'être toujours couvert par les théorèmes [84] nous allons adopter une nouvelle forme de problèmes approximants.

Comme $\frac{2N}{N+1} \leq p$, donc $p-1+\frac{p}{N} \geq 1$ on a alors que $\nu \geq 1$.

pour chaque $n \in I\!N^*$ fixé, on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in I\!N}$ comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour tout $k \geq 1$, $v_{k,n}$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_{k,n} + g\left(v_{k-1,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + \dfrac{|\nabla v_{k,n}|^\nu}{1+\frac{1}{n}|\nabla v_{k,n}|^\nu} = \lambda f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{in } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.18}$$

Nous allons tout d'abord montrer la croissance de la suite $\{v_{k,n}\}_{k\in I\!N}$ en k et que $v_{k,n} \leq w$ pour tout $k \geq 0$. Pour alléger l'écriture nous allons noter

$$H_n(\xi) = \frac{|\xi|^\nu}{1+\frac{1}{n}|\xi|^\nu} \text{ where } \xi \in I\!R^N,$$

donc $v_{1,n}$ vérifie l'équation

$$-\Delta_p v_{1,n} + g\left(v_{0,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + H_n(\nabla v_{1,n}) = \lambda f\left(x, v_{0,n}\right).$$

Par la définition de $v_{0,n}$ on obtient

$$-\Delta_p v_{1,n} + H_n(\nabla v_{1,n}) \geq -\Delta_p v_{0,n} + H_n(\nabla v_{0,n});$$

comme $\nu \geq 1$, H_n saitisfait les hypothèses requises dans le principe de comparaison [84], ce qui nous permet de conclure $v_{1,n} \geq v_{0,n}$. De la même manière et en réitérant le même procèdé on arrive à montrer que $v_{k,n} \geq v_{k-1,n}$ pour tout $k \in I\!N^*$. Maintenant nous allons appliquer la même technique que l'étape précédente , on utilise $v_{k,n}$ comme fonction test dans (1.18) et vu les propriètés de f on obtient que $||v_{k,n}||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, ce qui montre que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifie $v_{k,n} \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par les mêmes arguments de compacité utilisé dans l'étape 2, on montre que $v_{k,n} \to u_n$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et par la même occasion on a

$$v_{k,n} \geq v_{k,n+1} \text{ for all } k \geq 1.$$

Donc u_n est une solution minimale pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g\left(u_n\right) q\left(d\left(x\right)\right) + \dfrac{|\nabla u_n|^\nu}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^\nu} = \lambda f\left(x,u_n\right) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.19}$$

avec $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$; donc $\underline{u} \leq u_n \leq w \in L^\infty(\Omega)$. Maintenant, comme précédemment utilisons u_n comme fonction test dans (1.19) on obtient les mêmes conclusions qui sont $||u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$ et l'existence d'une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $\nu < p$, en reprenant exactement le même procédé on obtient que $u_n \to u$ fortement $W_0^{1,p}(\Omega)$ et ainsi l'existence de solution est démontrée.
Si $\nu = p$, les arguments de l'étape 2 nous permettent de conclure que

$$g\left(u_{n-1}\right) q\left(d\left(x\right)\right) \to g\left(u\right) q\left(d\left(x\right)\right) \text{ fortement dans } L^1(\Omega)$$

et

$$f(x,u_{n-1}) \to f(x,u_{n-1}) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Posons $k_n(x) \equiv f(x,u_{n-1}) - g\left(u_{n-1}\right)$, alors

$$-\Delta_p u_n + |\nabla u_n|^p = k_n(x)$$

avec $k_n \to k \equiv f(x,u) - g\left(u\right)$ fortement dans $L^1(\Omega)$, l'utilisation des résultat de [85] nous permettent de conclure $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, le résultat en découle.

Etape 4 : Résultat d'existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $0 < \nu \leq 1$

Toujours pour être dans les bonnes conditions d'application du principe de comparaison de [85] nous introduisant une nouvelle forme d'approximation en effet posons

$$Q_n(\xi) = (|\xi| + \frac{1}{n})^\nu \text{ où } \xi \in I\!R^N,$$

et pour chaque $n \in I\!N^*$ fixé, on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in I\!N}$ comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{k,n}$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_{k,n} + g\left(v_{k-1,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + Q_n(\nabla v_{k,n}) = \lambda f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.20}$$

Comme précédemment on arrive à démontrer que $v_{k,n} \leq w$ pour tout $k \geq 0$; car rappelons le Q_n satisfait aux condition du théorème [84].

Nous allons à présent montrer que la suite $\{v_{k,n}\}_{k\in I\!N}$ est croissante en k pour chaque n fixé. Observons que $v_{1,n}$ satisfait à l'équation

$$-\Delta_p v_{1,n} + g\left(v_{0,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + Q_n(\nabla v_{1,n}) = \lambda f\left(x, v_{0,n}\right),$$

et par définition de $v_{0,n}$ nous obtenons que

$$-\Delta_p v_{1,n} + Q_n(\nabla v_{1,n}) \geq -\Delta_p v_{0,n} + Q_n(\nabla v_{0,n}).$$

Encore une fois l'utilisation du principe de comparaison [84], permet de conclure que $v_{1,n} \geq v_{0,n}$, et de proche en proche par le même argument que $v_{k,n} \geq v_{k-1,n}$ pour tout $k \in I\!N^*$ donc $\{v_{k,n}\}_{k\in I\!N}$ est croissante en k pour chaque n fixé.

Maintenant fixons k nous allons montrer que $v_{k,n} \leq v_{k,n+1}$. Par les propriètés de f et g il est suffisant de montrer que $v_{1,n} \leq v_{1,n+1}$. Par définition de $v_{1,n}$ et $v_{1,n+1}$ on a

$$-\Delta_p v_{1,n} + Q_n(\nabla v_{1,n}) = -\Delta_p v_{1,n+1} + Q_{n+1}(\nabla v_{1,n+1}) \leq -\Delta_p v_{1,n+1} + Q_n(\nabla v_{1,n+1}).$$

l'utilisation du principe de comparaison de [84] permet de conclure que $v_{1,n} \leq v_{1,n+1}$, en réitérant le même procédé on obtient que $v_{k,n} \leq v_{k,n+1}$.

Finalement, l'utilisation des mêmes idées que les étapes précédentes va nous permettre de conclure ; en effet utilisons $v_{k,n}$ comme fonction test dans (1.20) par les propriètés de f on obtient que $||v_{k,n}||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, d'où l'existence de $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $v_{k,n} \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par les mêmes arguments de compacité utilisés dans les étapes précédentes on arrive à montrer que $v_{k,n} \to u_n$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u_n est la solution minimale de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g\left(u_n\right) q\left(d\left(x\right)\right) + Q_n(\nabla u_n) = \lambda f\left(x, u_n\right) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

avec $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Il vient que $\underline{u} \leq u_n \leq w \in L^\infty(\Omega)$. Encore une fois l'utilisation de u_n comme fonction test dans (1.20) on obtient $||u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$; d'où l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $\nu < p$, les mêmes arguments que les étapes précédentes permettent de conclure que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et le résultat d'xistence est démontré.

Etape 5 : Resultat d'existence pour $2 < p$ ***et*** $\nu \leq p$

L'absence de principe de comparaison pour notre opétrateur dans le cas $p > 2$, nous impose d'introduire une perturbation non pas dans le terme en gradient mais dans le p-laplacien lui même ; nous introduisons alors pour $\varepsilon > 0$ les problèmes perturbés suivants

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u + g\left(u\right) q\left(d\left(x\right)\right) + |\nabla u|^\nu = \lambda f\left(x, u\right) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

avec

$$-L_\varepsilon u = -\text{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u).$$

un tel choix est toujours motivé par le fait que ce type de problème possède un principe de comparaison.

Nous allons commencer par montrer que le problème (2.11) possède une solution minimale u_ε au moins pour de "petites" valeurs de ε .

Fixons $\varepsilon > 0$, on définit alors w_ε comme étant l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon w_\varepsilon = \lambda f(x, w_\varepsilon) & \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.23}$$

(La preuve de l'unicité est une conséquence du principe de comparaison présenté en introduction.)

Il est clair que w_ε procure une super solution bornée de (2.11).

comme $\varphi_1 \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors par continuité pour ε "petit" nous obtenons que $\underline{u} = Mh(c\varphi_1)$ est aussi sous solution de (2.11) avec $g(\underline{u})\,q(d(x)) \in L^1(\Omega)$.

Maintenant fixons ε et considérons la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour tout $k \geq 1$, $v_{k,n}$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon v_{k,n} + g(v_{k-1,n})\,q(d(x)) + D_n(\nabla v_{k,n}) = \lambda f(x, v_{k-1,n}) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.24}$$

où

$$D_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{|\xi|^\nu}{1 + \frac{1}{n}|\xi|^\nu} & \text{si} \quad 1 < \nu \leq p, \\ \\ (|\xi| + \frac{1}{n})^\nu & \text{si} \quad \nu \leq 1, \end{cases}$$

il est clair que $v_{k,n} \leq w_\varepsilon$ pour tout $k \geq 0$.

Nous allons montrer que la suite $\{v_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante en k pour tout n fixé, en effet observons que $v_{1,n}$ vérifie l'équation

$$-L_\varepsilon v_{1,n} + g(v_{0,n})\,q(d(x)) + D_n(\nabla v_{1,n}) = \lambda f(x, v_{0,n}).$$

Par définition de $v_{0,n}$ nous obtenons

$$-L_\varepsilon v_{1,n} + D_n(\nabla v_{1,n}) \geq -L_\varepsilon v_{0,n} + D_n(\nabla v_{0,n}).$$

L'utilisation du principe de comparaison du Théorème 4.1 dans [84], on obtient que $v_{1,n} \geq v_{0,n}$. Ainsi par réiteration de la même démarche on aboutit à $v_{k,n} \geq v_{k-1,n}$ pour tout $k \in I\!N^*$ et la croissance de $\{v_{k,n}\}_{k\in I\!N}$ en k est démontrée.

Utilisons $v_{k,n}$ comme fonction test dans (2.13) comme précédemment on abtient que $||v_{k,n}||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, d'où l'existence de $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $v_{k,n} \rightharpoonup u_n$ faiblement $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par les mêmes arguments de compacités que dans l'etape 2 on obtient que $v_{k,n} \to u_n$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et ainsi u_n est la solution minimale du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u_n + g\left(u_n\right) q\left(d\left(x\right)\right) + D_n(\nabla u_n) = \lambda f\left(x, u_n\right) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.25}$$

il faut à présent passer à la limite en n.

Utilisons u_n comme fonction test dans (1.25) vu les propriètés de f et de g on obtient que $||u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, d'où l'existence de $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si $\nu < p$, par les mêmes arguments de compacité que dans l'étape 2 et l'utilisation des résultats de [85] nous obtenons que $u_n \to u_\varepsilon$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u_ε la solution minimale du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u_\varepsilon + g\left(u_\varepsilon\right) q\left(d\left(x\right)\right) + |\nabla u_\varepsilon|^\nu = \lambda f\left(x, u_\varepsilon\right) & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.26}$$

Si $\nu = p$, on reprend alors les mêmes arguments que dans l'étape 3 et les résultats de compacité de [85] nous obtenens la convergence forte de la suite $\{u_n\}_{n\in I\!N}$. Donc l'existence d'une solution minimale de (1.26)est demontrée dans ce cas aussi.

Reste à se débarasser de ε en le faisant tendre vers 0, il est à noter que la suite $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ n'est pas nécessairement monotone en ε. Utilisons u_ε comme fonction test dans (1.26) comme précédemment on en arrive à la conclusion $||u_\varepsilon||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$ et par suite $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme $\nu < p$, les mêmes arguments de compacité utilisés plus haut permettent de conclure à la convergence forte $u_\varepsilon \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^\nu = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.27}$$

il est clair alors que $\underline{u} \leq u \leq w$.

Etape 6 : Résultat de non existence pour $\lambda \leq \lambda^*$

Pour completer la démonstration reste à prouver la non existence de solution pour de petite valeurs de λ - rappelons que nous avons eu besoin d'imposer que λ soit assez grand pour pouvoir construire la sous solution $\underline{u} = Mh(c\varphi_1)$. Comme conséquence à l'hypothèse $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = +\infty$ on a

$$\lim_{t\to 0} \left(f(x,t) - q(d(x))\, g(t)\right) = -\infty, \text{ uniformément dans } \Omega,$$

donc il va exister un certain $t_0 > 0$ tel que pour chaque $0 < t < t_0$ on a

$$\left(f(x,t) - q(d(x))\, g(t)\right) < 0.$$

Suite à l'hypothèse (1.3), nous avons

$$\frac{f(x,t) - q(d(x))\, g(t)}{t^{p-1}} \leq \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \leq \frac{f(x,t_0)}{t_0^{p-1}} \leq m$$

où $m = \max\limits_{\overline{\Omega}}(\frac{f(x,t_0)}{t_0^{p-1}})$, ce qui permet d'avoir

$$\left(f(x,t) - q(d(x))\, g(t)\right) \leq mt^{p-1}.$$

Posons $\lambda_0 = \min\left(1, \frac{\lambda_1}{2m}\right)$ et soit $\lambda < \lambda_0$ fixé.

Supposons par l'absurde que le problème (1.13) possède une solution $\tilde{u}$, donc

$$\begin{aligned} -\Delta_p \tilde{u} &= \lambda f(x,\tilde{u}) - g(\tilde{u})\, q(d(x)) - |\nabla \tilde{u}|^{\nu} \\ &\leq \lambda f(x,\tilde{u}) - \lambda g(\tilde{u})\, q(d(x)) + (\lambda - 1)\, g(\tilde{u})\, q(d(x)) \\ &\leq \lambda\left(f(x,\tilde{u}) - g(\tilde{u})\, q(d(x))\right) \\ &\leq \frac{\lambda_1}{2m} m \tilde{u}\, |\tilde{u}|^{p-2} \leq \frac{\lambda_1}{2} \tilde{u}\, |\tilde{u}|^{p-2}. \end{aligned}$$

ainsi $\tilde{u}$ procure une sous solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda_1}{2} u^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.28}$$

ce qui implique que $\tilde{u} \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\tilde{u}$ est une solution non triviale de (1.13)- du fait de la première valeur propre du p-laplacien est isolée positive.

Reste à montrer la dépendance continue de $\lambda > 0$; soit

$$A \equiv \{\lambda > 0; \ \text{tel que (1.13) possède une solution}\}$$

et posons $\lambda^* = \inf A$. Nous allons montrer que si $\lambda > \lambda^*$, $\lambda \in A$. Fixons $\lambda_1 \in A$ et soit $\lambda_2 > \lambda_1$, considérons u_{λ_1} une solution de (1.13) avec $\lambda = \lambda_1$, il est clair que u_{λ_1} est une sous solution pour le problème (1.13) considéré avec $\lambda = \lambda_2$. D'un autre côté w_2 la solution du problème (1.16) avec $\lambda = \lambda_2$, est une sursolution et par comparaison, on conclut que $u_{\lambda_1} \leq w_2$. On réutilise le procédé d'itération comme précédemment pour obtenir l'existence d'une solution u_{λ_2} de (1.13) considéré avec $\lambda = \lambda_2$. En conclusion $\lambda_2 \in A$ ce qui termine la démonstration. □

Remarque 1.1.

1. Vu les hypothèses imposées sur f l'existence d'une sur-solution est toujours assurée pour toute valeur du paramètre $\lambda > 0$, par contre pour la construction de la sous-solution $\underline{u}$ nous avons du imposé une condition de

"grandeur" sur λ.

2. L'idée constructive de la sous solution est fortement liée aux conditions de Keller-Ossermann [65], nous reviendrons sur ce point en appendice 2 de ce chapitre .

3. La preuve d'existence de solution est basée sur le fait que f est croissante et sur le principe de comparaison de l'opérateur

$$L(u) \equiv -\Delta_p u + |\nabla u|^\nu.$$

Dans le cas particulier où $\nu = p$, on peut directement montrer un principe de comparaison pour l'opérateur

$$L(u) \equiv -\Delta_p u + |\nabla u|^p - f(x,u)$$

sous la condition que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$ et sans restriction sur les valeurs de p, ainsi pour assurer l'existence de solution il suffit de supposer que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$ et une condition supplémentaire sur le comportement asymptotique de f quand $s \to \infty$.

En effet pour prouver le principe de comparaison dans ce cas supposons $p > 1$ et considérons $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telles que $u_1, u_2 > 0$ dans Ω et

$$-\Delta_p u_1 + |\nabla u_1|^p \geq f(x,u_1), \ -\Delta_p u_2 + |\nabla u_2|^\nu \leq f(x,u_2).$$

posons alors $v_i = (p-1)(1 - e^{-\frac{u_i}{p-1}}), i = 1,2$, un calcul direct nous amène à obtenir que $0 < v_i < p-1$ dans Ω et

$$-\Delta_p v_1 \geq D(x,v_1), \ -\Delta_p v_2 \leq D(x,v_2),$$

où $D(x,s) = (1 - \frac{s}{p-1})^{p-1} f\Big(x, -(p-1)\log(1 - \frac{s}{p-1})\Big)$. L'utilisation de l'hypothèse que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$, nous obtenons que $\frac{D(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$. L'utilisation du principe de comparaison introduit dans [9] ; et dont une brève description est présentée en introduction, permet de conclure que $v_1 \geq v_2$ et donc que $u_1 \geq u_2$, d'où le résultat.

4. L'hypothèse $p \geq \frac{2N}{N+1}$ semble être naturelle et nécessaire ; car sinon (et à notre connaissance) il n'existe pas principe de comparaison similaire à celui introduit dans [84].

5. Dans le cas $\nu = p$, pour montrer la convergence forte dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ on peut utiliser la désormais classique méthode initié dans [40], et qui consiste à utiliser $\Phi(u_\varepsilon - u)$, où $\Phi(s) = se^{\theta s^2}$, $\theta > 0$, comme fonction test, utiliser des estimations a priori, puis passer à la limite .

   La section suivante est consacrée à proposer d'autres arguments pour montrer l'existence de solution dans le cas d'un second membre "irrégulier".

1.2.2 Résultat d'existence avec donnée L^1

Dans cette section nous allons essayer d'affaiblir les conditions imposées jusque là sur f . Plus précisemment nous allons considérer des fonctions f de la forme $f(x,s) = \lambda s^\alpha + h(x)$ où $\alpha < p-1$ et $h \in L^1(\Omega)$. Le but étant de prouver l'existence de solution même en la présence d'un terme en gradient d'un opérateur principal nonlinéaire et d'un second membre dans $L^1(\Omega)$ - nous ferons remarquer qu'un tel résultat n'existe pas même dans le cadre linéaire des équations de Lane-Emden-Fowler introduit dans [54]- . Nous avons donc le théorème d'existence suivant :

Théorème 1.3. Soient g, q satisfaisant aux mêmes conditions que dans la section précédente, et telles que
$\int_0^1 q(t)g(t)dt < +\infty$. soit $0 < \alpha < p-1$, alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda^*$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^\nu = \lambda (u^\alpha + h(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.29}$$

possède une solution au sens d'entropie u.

Démonstration. Soit $h \in L^1(\Omega)$ une fonction positive et posons $h_n \equiv T_n(h)$, où T_n est la troncature usuelle comme définie dans (1.10), notons que $h_n \uparrow h$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v + g\left(v\right) q\left(d\left(x\right)\right) + \left|\nabla v\right|^{\nu} \\ \quad = \lambda \left(\dfrac{v^{\alpha}}{1+v^{\alpha}} + h_1\left(x\right) \right) & \text{dans } \Omega, \\ v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.30}$$

Par les résultats de la section précédente nous pouvons affirmer l'existence d'un $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda^*$, le problème (2.24) possède une sous solution $\underline{u}_1$ avec $\underline{u}_1 = Mh\left(c\varphi_1\right)$ (On fera remarquer que l'existence λ^* ne dépend que de la construction de la sous solution, et que $\lambda^* \nrightarrow \infty$.)

Soit w_n l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w_n = \lambda w_n^{\alpha} + h_n, & \text{dans } \Omega, \\ w_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Il est clair que $w_n \uparrow w$, l'unique solution entropique du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda w^{\alpha} + h, & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On renvoie à [9] pour une étude détaillée de ce type de problème.

Par le principe de comparaison du Théorème 1.1 on conclut que $\underline{u}_1 \leq w_n \leq w$.

Fixons λ^* et supposons que $\lambda > \lambda^*$, alors par le Théorème (1.2) on conclut que la suite de problème approximants

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g\left(u_n\right) q\left(d\left(x\right)\right) + \left|\nabla u_n\right|^{\nu} \\ \quad = \lambda \left(\dfrac{u_n^{\alpha}}{1+\frac{1}{n}u_n^{\alpha}} + h_n\left(x\right) \right) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.31}$$

possèdent une solution u_n telle que $\underline{u}_1 \leq u_n \leq w_n$.

Pour revenir à notre problème initial il est donc nécessaire de passer à la limite dans la suite $\{u_n\}_{n\in I\!N}$, pour cela nous allons suivre les mêmes arguments de [40] et [38]. Fixons $\lambda > \lambda^*$, alors

$$-\Delta_p u_n + g(u_n)\, q(d(x)) + |\nabla u_n|^\nu \leq \lambda\left(u_n^\alpha + h_n(x)\right),$$

utilisons $T_k(u_n)$ comme fonction test dans la dernière inégalité, nous obtenons alors

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^\nu\, T_k(u_n)\, dx + \int_\Omega g(u_n)\, q(d(x))\, T_k(u_n)\, dx$$
$$\leq \int_\Omega \lambda\left(u_n^\alpha + h_n(x)\right) T_k(u_n)\, dx.$$

comme $\int_\Omega g(u_n)\, q(d(x))\, T_k(u_n)\, dx \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p\, dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^\nu\, T_k(u_n)\, dx &\leq \int_\Omega \lambda\left(u_n^\alpha + h_n(x)\right) T_k(u_n)\, dx \\ &\leq \lambda k \int_\Omega u_n^\alpha dx + \lambda k \int_\Omega h_n(x)\, dx.\end{aligned}$$

Par le fait que $u_n^\alpha \leq w^\alpha \in L^1(\Omega)$ on obtient alors

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p\, dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^\nu\, T_k(u_n)\, dx \leq Ck$$

et par suite

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p\, dx \leq Ck \text{ et } k \int_{u_n \geq k} |\nabla u_n|^\nu\, dx \leq Ck. \tag{1.32}$$

L'utilisation de l'estimation précédente et par le fait que $\nu \leq p$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^\nu\, dx \leq C \text{ pour tout } n \in I\!N. \tag{1.33}$$

En conséquence des résultats obtenus dans [30] nous pouvons affirmer l'existence d'une fonction mesurable u telle que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, et à une sous suite près notée aussi $\{u_n\}_{n\in I\!N}$, il en résulte que $T_k u_n \rightharpoonup T_k u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_n^\alpha \to u^\alpha$ fortement dans $L^1(\Omega)$, comme $\underline{u}_1 \le u \le w$, alors le théorème de la convergence dominée permet de dire que

$$\lambda\left(\frac{u_{n-1}^\alpha}{1+\frac{1}{n}u_{n-1}^\alpha}+h_n(x)\right) \to \lambda(u^\alpha+h) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Nous nous intéressons à présent au terme $g(u_n)\,q(d(x))$. Par les propriètés de g et de q et par le fait que $\underline{u}_1 \le u_n$ pour tout n on a

$$g(u_n)\,q(d(x)) \le g(\underline{u}_1)\,q(d(x)) = g(Mh(c\varphi_1))\,q(d(x)),$$

par la définition de la sous solution $\underline{u}_1$ -on renvoie au Théorème 1.2- on a

$$g(u_n)\,q(d(x)) \le Cg(h(c\varphi_1))\,q(d(x)) \le Cg(h(c\varphi_1))\,q(h(c\varphi_1)) \in L^1(\Omega),$$

comme $\int_0^1 q(t)\,g(t)\,dt < +\infty$, par le théorème de la convergence dominée et la continuité de g on obtient

$$g(u_n)q(d(x)) \to g(u)q(d(x)) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Pour simplifier l'écriture notons $l_n(x) \equiv \lambda\left(\frac{u_{n-1}^\alpha}{1+\frac{1}{n}u_{n-1}^\alpha}+h_n(x)\right) - g(u_n)q(d(x))$, alors

$$l_n \to \lambda u^\alpha + h - g(u)q(d(x)) \equiv l \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

ce qui permet de conclure que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est solution de l'équation

$$-\Delta_p u_n + |\nabla u_n|^\nu = l_n. \tag{1.34}$$

Pour montrer la convergence forte du terme en gradient nous allons suivre la même technique que dans [74]. Soit $h > k > 0$ à choisir ultérieurement. Posons $w_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u))$, il est clair que $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $\nabla w_n \equiv 0$ pour $u_n > M \equiv 4k + h$. Utilisons alors w_n comme fonction test dans

(1.34) il en découle que

$$\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx + \int_\Omega w_n|\nabla T_M(u_n)|^\nu = \int_\Omega w_n l_n dx.$$

Notons alors que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx\\
&= \int_{u_n\le k} |\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla w_n dx + \int_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx\\
&\ge \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla (T_k(u_n)-T_k(u))dx - \int_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|dx,
\end{aligned}$$

où la dernière intégrale est estimée comme suit

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx\\
&= \int\limits_{h>u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx + \int\limits_{u_n>h} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx\\
&= \int\limits_{h>u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_{2k}(k-T_k(u))dx\\
&+ \int\limits_{h<u_n<M} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_{2k}(u_n-h+k-T_k(u))dx\\
&= -\int\limits_{h>u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_k(u)dx +\\
&\int\limits_{h<u_n<h+k+T_k(u)} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla (u_n-h+k-T_k(u))dx\\
&\ge -\int\limits_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|dx,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

par suite

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\right)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))dx\\
&= \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))dx\\
&- \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))dx\\
&\le \int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx + \int_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|dx\\
&- \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))dx.
\end{aligned}$$

Analysons à présent chaque terme dans la dernière inégalité. Par le fait que

$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ il en découle que, lorsque $n \to \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla T_k\,(u)\,|^{p-2}\nabla T_k(u)(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u))dx = o(1)$$

Comme $\chi_{\{u_n>k\}}|\nabla T_k(u)| \to 0$ fortement dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to \infty$, et comme $|\nabla T_M(u_n)|$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, il en résulte que

$$\int_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|dx \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega (|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u))(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u))dx \\
& + \int_\Omega w_n|\nabla T_M(u_n)|^\nu \\
\leq \; & \int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n dx + \int_\Omega w_n|\nabla T_M(u_n)|^\nu + o(1) \\
& \leq \int_\Omega |w_n||l_n|dx + o(1)
\end{aligned}$$

Il est à noter que $w_n \to T_{2k}(u - T_h(u))$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma > 1$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |w_n||l_n|dx = \int_\Omega |T_{2k}(u - T_h(u))||l|dx.$$

comme $T_{2k}(u - T_h(u)) \to 0$ quand $h \to \infty$ dans la topologie $*$ -faible de L^∞ , donc pour chaque k fixé et pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons l'existence de $h_1(\varepsilon) >> k$ tel que pour $h > h_1(\varepsilon)$, on a

$$\int_\Omega |T_{2k}(u - T_h(u))||l|dx \leq \varepsilon.$$

Portons notre attention sur le terme $\displaystyle\int_\Omega w_n|\nabla u_n|^\nu dx$.

Commençons par étudier le cas $\nu < p$.

Par la définition de w_n on a $w_n \geq 0$ sur l'ensemble $\{u_n > k\}$, il en découle que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w_n|\nabla u_n|^\nu dx &= \int_{u_n>k} w_n|\nabla u_n|^\nu dx + \int_{u_n<k} w_n|\nabla u_n|^\nu dx \\
&\geq \int_{u_n<k} w_n|\nabla u_n|^\nu dx = \int_\Omega w_n|\nabla T_k(u_n)|^\nu dx,
\end{aligned}$$

comme $\nu < p$, alors l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_n||\nabla T_k(u_n)|^\nu dx &\leq \Big(\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p dx\Big)^{\frac{\nu}{p}}\Big(\int_{u_n\leq k}|w_n|^{\frac{p}{p-\nu}}dx\Big)^{\frac{p-nu}{\nu}}\\ &\leq C\Big(\int_{u_n\leq k}|w_n|^{\frac{p}{p-\nu}}dx\Big)^{\frac{p-nu}{\nu}}.\end{aligned}$$

Il est alors clair que

$$\int_{u_n\leq k}|w_n|^{\frac{p}{p-\nu}}dx \to \int_{u<k}|T_{2k}(u-T_h(u))|^{\frac{p}{p-\nu}}dx,$$

on peut alors choisir $h_2(\varepsilon) >> k$ afin d'avoir

$$\int_{u<k}|T_{2k}(u-T_h(u))|^{\frac{p}{p-\nu}}dx \leq \varepsilon \text{ if } h \geq h_2(\varepsilon).$$

Donc pour $h \geq \max\{h_1(\varepsilon), h_2(\varepsilon)\}$, nous avons

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u))(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))dx \leq \varepsilon.$$

Si $p > 2$, par utilisation de l'inégalité (1.9) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\Big)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))\,dx\\ &\geq C_1\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^p\,dx.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Ainsi $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et l'existence de solution est démontrée. Dans le cas ou $p < 2$ on utilise l'inégalité 1.8, il en résulte alors

$$C(p)\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)|+|\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}}dx \leq o(1).$$

L'usage de l'inégalité de Hölder donne

$$\int_\Omega \left|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\right|^p \, dx =$$
$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p}{(|\nabla T_k(u)| + |\nabla T_k(u_n)|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla T_k(u)| + |\nabla T_k(u_n)|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx \leq$$
$$\Big(\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)| + |\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}} dx\Big)^{\frac{p}{2}} \Big(\int_\Omega (|\nabla T_k(u_n)|^p + |\nabla T_k(u)|^p) dx\Big)^{\frac{2-p}{2}} \leq$$
$$C\Big(\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)| + |\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}} dx\Big)^{\frac{p}{2}},$$

donc

$$\int_\Omega \left|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\right|^p \, dx \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

et alors $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, et le résultat est démontré. Pour traiter le cas $\nu = p$, il est nécessaire d'utiliser une autre fonction test. Considérons

$$v_n = T_{2k}((u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)))_+.$$

et utilisons v_n comme fonction test dans (1.34) on obtient alors

$$\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla v_n dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^p v_n dx = \int_\Omega v_n l_n dx.$$

Observons que pour $h \geq h(\varepsilon) >> k$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_\Omega v_n l_n dx \right| \leq \varepsilon,$$

alors par un calcul similaire à celui de (1.35), on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla v_n dx \right| \leq \varepsilon, \tag{1.37}$$

Posons $B_n = \{x \in \Omega : u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u) \geq 0\}$, alors comme précédemment on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |\nabla T_M\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla v_n dx = \\
&\int_{\{u_n\le k\}\cap B_n} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla v_n dx + \\
&\int_{\{u_n> k\}\cap B_n} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla v_n dx \ge \\
&\int_{B_n} |\nabla T_M\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla (T_k(u_n)-T_k(u))dx - \\
&\int_{u_n>k} |\nabla T_M\left(u_n\right)|^{p-2}|\nabla T_M(u_n)||\nabla T_k(u)|dx.
\end{aligned}$$

L'estimation (1.35), conduit à

$$\int_{u_n>k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|dx \to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

Maintenant l'estimation (1.37) donne

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_n} |\nabla T_k\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx \le 0. \tag{1.38}$$

Pour l'ensemble $\Omega\backslash B_n$, on utilise $v_n = T_{2k}((u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)))_-$. Le même calcul précédent, en choisissant $h \ge h_1(\varepsilon) >> k$, nous permet de conclure que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega\backslash B_n} |\nabla T_k\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx \le 0. \tag{1.39}$$

En combinant les estimatons (3.2) et (3.3), on arrive à

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega} |\nabla T_k\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx \le 0.$$

Notons que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(|\nabla T_k\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_k\left(u_n\right) - |\nabla T_k\left(u\right)|^{p-2}\nabla T_k\left(u\right)\right)\left(\nabla T_k\left(u_n\right)-\nabla T_k\left(u\right)\right)dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla T_k\left(u_n\right)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx + o(1);
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u))(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))dx \le \varepsilon.$$

Ainsi, et comme dans le cas précédent on obtient que $T_k(u_n)\to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ le résultat en découle alors.

Comme conclusion on obtient que pour tout $k>0$,

$$\nabla u_n \to \nabla u_n \quad p.p. \ in \ \Omega$$

pour parachever la démonstration il reste à démontrer la convergence de la suite $\{|\nabla u_n|^\nu\}_n$ dans $L^1(\Omega)$. De (1.33) on sait que $\{|\nabla u_n|^\nu\}_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Comme $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, alors dans le but d'appliquer le lemme de Vitali il suffit de montrer l'équi-intégrabilité de la suite $\{|\nabla u_n|^\nu\}_n$. Observons que

$$\int_E |\nabla u_n|^\nu\, dx = \int_{E\cap\{u_n\le k\}} |\nabla u_n|^\nu\, dx + \int_{E\cap\{u_n\ge k\}} |\nabla u_n|^\nu\, dx,$$

donc pour un k fixé, nous avons

$$\int_{E\cap\{u_n\le k\}} |\nabla u_n|^\nu\, dx = \int_E |\nabla T_k(u_n)|^\nu\, dx \le \int_E |\nabla T_k(u_n)|^p\, dx.$$

Comme $\{T_k(u_n)\}_n$ converge fortement vers $T_k(u)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors pour $meas(E)<\eta$, on a

$$\int_{E\cap\{u_n\le k\}} |\nabla u_n|^\nu\, dx < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.40}$$

Pour estimer le terme $\int_{E\cap\{u_n\ge k\}} |\nabla u_n|^\nu\, dx$ on utilise $\Gamma_k(u_n)$ comme fonction test dans (1.34) où $\Gamma_k(s)$ est définie par

$$\Gamma_k(s) = \begin{cases} 0 & si \ \ 0\le s\le k-1, \\ s-(k-1) & si \ \ k-1\le s\le k, \\ 1 & si \ \ k\le s, \end{cases}$$

il est clair que $0 \leq \Gamma_k(s) \leq 1$. On obtient

$$\int_\Omega -\Delta_p u_n \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) dx + \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^\nu \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) = \int_\Omega l_n(x) \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) dx.$$

Comme $\int_\Omega l_n(x) \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) dx \to 0$ quand $k \to \infty$ uniformément en n, il en résulte que

$$\int_{\{k-1 \leq u_n \leq k\}} \left|\nabla u_n\right|^p + \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^\nu \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) \leq o(1),$$

ce qui permet de conclure que $\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^\nu \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ et par suite

$$\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^\nu \chi_{\{\{u_n \geq k\}\}} \leq \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^\nu \left(\Gamma_k\left(u_n\right)\right) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.41}$$

Par (1.40) et (1.41) on obtient l'équi-intégrabilité $\left|\nabla u_n\right|^\nu$, par passage à la limite dans (1.34) ; on obtient que u est une solution au sens d'entropie de (1.29) d'où le résultat. □

1.3 Le terme en gradient comme terme de réaction

Dans cette section nous allons nous interesser au problème où le terme en gradient est placé comme terme de réaction c'est à dire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g\left(u\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \lambda f\left(x, u\right) + \left|\nabla u\right|^\nu & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.42}$$

avec cette fois $\nu < p - 1$.

La présence du terme singulier $g(u)q(d(x))$ procure un changement fondamental avec les résultats obtenus pour des problèmes qui peuvent parraître similaire étudiés par exemple dans [40], [92] et bien d'autres.

Théorème 1.4. Supposons que $\int\limits_0^1 q\left(t\right) g\left(t\right) dt < +\infty$ et que q , g et f vérifient les mêmes hypothèses que dans la première section, alors pour $0 < \nu < p - 1$ il va exister un $\lambda^* > 0$ tel que le problème (1.42) possède au moins une solution entropique pour $\lambda > \lambda^*$ et ne posède pas de solution pour $\lambda < \lambda^*$.

Démonstration. Pour $\lambda > \lambda^*$ le même choix de fonction $\underline{u} = Mh\,(c\varphi_1)$ comme dans la preuve du Théorème 1.2 procure toujours une sous-solution au problème (1.42), reste donc à construire une sur-solution, pour cela considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f\,(x,u) + 1 & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.43}$$

vu les hypothèses imposées sur f , l'existence d'une unique solution positive v telle que $v \in \mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ avec $\sigma < 1$ pour le problème (1.43), est assurée par la théorie classique de problème elliptique quasilinéaire, voir par exemple [9] ou [50]. Donc pour $C > 1$ on a

$$\begin{aligned} -\Delta_p\,(Cv) &= C^{p-1}\,(\lambda f\,(x,v) + 1) \\ &= C^{p-1}\lambda f\,(x,v) + C^{p-1}. \end{aligned}$$

par l'hypothèse (1.3) on obtient

$$\begin{aligned} -\Delta_p\,(Cv) &= C^{p-1}\lambda f\,(x,v) + C^{p-1} \\ &\geq \lambda f\,(x,Cv) + C^{p-1}, \end{aligned}$$

comme $\nu < p-1$ on peut toujours choisir C suffisamment "grand" de telle sorte à avoir $C^{p-1} > C^{\nu}\,|\nabla v|^{\nu}$, donc

$$-\Delta_p\,(Cv) \geq \lambda f\,(x,Cv) + |\nabla\,(Cv)|^{\nu}$$

ainsi $\overline{u} = Cv$ est une sur solution du problème (1.42).

Maintenant que nous tenons notre sur et sous-solution qui sont comparables $\underline{u} \leq \overline{u}$ par le principe de comparaison d Théorème 1.1, pour montrer l'existence de solution il suffit de mettre en oeuvre un schéma itératif semblable à celui présenté en première section.

Premier cas $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $\nu < p-1$

Comme $p < 2$, donc $\nu < 1$, alors comme dans la démonstration du Théorème 1.2 nous obtenons l'existence de u_n, la solution minimale du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g\left(u_n\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \lambda f\left(x, u_n\right) + Q_n(\nabla u_n) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.44}$$

où

$$Q_n(\xi) = (|\xi| + \frac{1}{n})^\nu \text{ où } \xi \in I\!R^N$$

il en découle aussi que $\underline{u} \leq u_n \leq \overline{u}$. L'usage de u_n comme fonction test dans (1.44) et par le fait que $\nu < p-1$ on arrive à $||u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$ par le même procédé que précédemment on arrive à $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Du fait que $\nu < p$, en reprenant les même arguments de compacité que précédemment on arrive à démontrer que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, le résultat en découle.

Deuxième cas $2 < p$ ***et*** $\nu < p-1$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, nous allons montrer que le problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u + g\left(u\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \lambda f\left(x, u\right) + |\nabla u|^\nu & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.45}$$

avec

$$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u).$$

possède une solution minimale u_ε au moins pour de petite valeur de ε , vérifiant $\underline{u} \leq u_\varepsilon \leq \overline{u}$.

Comme $\underline{u}, \overline{u} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors pour ε suffisamment petit et par des arguments de continuité $\underline{u}$ (respectivement $\overline{u}$) est sous-solution (respectivement sur-solution) de (1.45) avec $g\left(\underline{u}\right) q\left(d\left(x\right)\right) \in L^1(\Omega)$.

Fixons ε suffisamment petit, et considérons

$$D_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{|\xi|^\nu}{1+\frac{1}{n}|\xi|^\nu} \text{ si } 1 < \nu < p-1, \\ (|\xi| + \frac{1}{n})^\nu \text{ si } \nu \leq 1. \end{cases}$$

Soit u_n la solution minimale du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u_n + g\left(u_n\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \lambda f\left(x, u_n\right) + D_n(\nabla u_n) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.46}$$

Notons que $u_n = \lim\limits_{k\to\infty} v_{n,k}$ où la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in I\!N}$ est définie comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{k,n}$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon v_{k,n} + g\left(v_{k-1,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \lambda f\left(x, v_{k-1,n}\right) + D_n(\nabla v_{k,n}) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilisons u_n comme fonction test dans (1.46) et par les proprietés de f on obtient que $||u_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, d'où l'existence de $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par les mêmes arguments de compacités utilisés dans Etape 2 du Théorème 1.2 nous obtenons que $u_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u_ε est la solution minimale de (1.45), de plus $\underline{u} \leq u_\varepsilon \leq \overline{u}$.

Reste à passer à la limite en ε, Notons que l'utilisation de u_ε comme fonction test dans (1.45) nous obtenons que $||u_\varepsilon|| \leq C$ et donc $u_\varepsilon \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Encore une fois, par le même argument de compacité $u_\varepsilon \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g\left(u\right) q\left(d\left(x\right)\right) = \lambda f\left(x, u\right) + |\nabla u|^\nu & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.47}$$

Résultat de non existence

La dernière étape consiste à démontrer que pour de "petites" valeur de λ le problème (1.42) ne possède pas de solution. Procédons par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de paramètres $\lambda_n \searrow 0$, et qu'il existe u_n solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g(u_n)\, q(d(x)) = \lambda_n f(x, u_n) + |\nabla u_n|^\nu & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit w_n la solution minimale du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w_n = \lambda_n f(x, w_n) + (|\nabla w_n| + \frac{1}{n})^\nu & \text{dans } \Omega, \\ w_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.48}$$

telle que $u_n \leq w_n$, observons que (1.48) possède bien une solution ; voir par exemple [92], l'adjonction du terme $\frac{1}{n}$ n'a d'intérêt que pour le cas où $\nu < 1$ et peut être supprimer sinon. Nous allons montrer que $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, où w est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = |\nabla w|^\nu & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui est identiquement nulle par le résultat de [92]. Pour ce faire utilisons w_n comme fonction test dans (1.48), alors

$$\int_\Omega (-\Delta_p w_n)\, w_n dx = \int_\Omega (|\nabla w_n| + \frac{1}{n})^\nu w_n dx + \int_\Omega \lambda_n f(x, w_n)\, w_n dx$$

ce qui donne

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p\, dx = \int_\Omega (|\nabla w_n| + \frac{1}{n})^\nu w_n dx + \int_\Omega \lambda_n f(x, w_n)\, w_n dx.$$

Par (1.4), nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p\, dx \leq \int_\Omega (|\nabla w_n| + \frac{1}{n})^\nu w_n dx + \lambda_n \int_\Omega |w_n|^p\, dx + C_1.$$

A présent l'usage consécutif des inégalités de Poincaré et de Hölder on arrive

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx \le \int_\Omega |\nabla w_n|^\nu \, w_n dx + \lambda_n C_2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx + C_1 \\
&\le \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{\nu}{p}} \left(\int_\Omega |w_n|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{p-\nu-1}{p}} + \lambda_n C_2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx + C_1.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
C_3 \int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx &\le C_4 \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{\nu}{p}} \left(\int_\Omega |w_n|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + C_1 \\
&\le C_5 \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{\nu}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + C_1 \\
&\le C_5 \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{\nu}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + C_1 \\
&\le C_5 \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{\nu+1}{p}} + C_1.
\end{aligned}$$

comme $\frac{\nu+1}{p} < 1$, on en conclut que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx \le C.$$

Ainsi, à une sous suite près, $w_n \rightharpoonup w$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc $f(x, w_n) \to f(x, w)$ fortement dans $L^s(\Omega)$ quand $n \to \infty$ pour tout $s < \frac{p^*}{p-1}$. Nous passons à la convergence forte de $w_n \to w$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$; si $1 < \nu < p-1$ par la définition de $\{w_n\}_n$ on voit que $\{w_n\}_n$ est croissante en n, donc $w = \limsup_{n\to\infty} w_n$. comme $-\Delta_p w_n \ge 0$, alors

$$0 \le \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla (w - w_n) \, dx = \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla w dx - \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx.$$

Remarquons que par l'inégalité de Young on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla w dx \le \frac{p-1}{p} ||w_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{p} ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

donc $||w_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$; et par suite $||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le \liminf_{n\to\infty} ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Ce qui donne

$$\liminf_{n\to\infty} ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \limsup_{n\to\infty} ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

d'où la convergence $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

si $\nu \leq 1$ utilisons $(w_n - w)$ comme fonction test dans (1.48), et observons que

$$\int_\Omega \lambda_n f\left(x, w_n\right)\left(w_n - w\right) dx \to 0,$$

l'utilisation de l'inégalité de Hölder et par le fait que $\frac{p-\nu}{p} < p < p^*$ on obtient

$$\int_\Omega (|\nabla w_n| + \frac{1}{n})^\nu \left(w_n - w\right) dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{\frac{\nu}{p}} \left(\int_\Omega |w_n - w|^{\frac{p}{p-\nu}} \, dx\right)^{\frac{p-\nu}{p}} \to 0$$

et dans ce cas aussi nous obtenons la convergence $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Par les résultats de [92], on sait que $w \equiv 0$.

Le fait que $0 \leq u_n \leq w_n$ et par le même types d'estimations utilisées pour w_n on obtient que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $u_n \to 0$ fortment aussi dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^\nu \phi dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

et

$$\lambda_n \int_\Omega f(x, u_n) \phi dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

ainsi nous obtenons

$$\int_\Omega g(u_n) q(d(x)) \phi dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse (1.2). Ce qui nous permet de conclure que (1.42) ne possède pas de solution pour de petite valeurs de λ.

Pour démontrer la dépendance continue de $\lambda > 0$ on utilise les même arguments que du Théorème 1.2 ce qui termine la preuve. □

1.4 Annexe : Sur les conditions de Keller-Ossermann

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats concernant les conditions de Keller-Ossermann. Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = +\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.49}$$

où f est une fonction positive définie sur $[0, +\infty)$, de classe C^1 , avec $f'(s) \geq 0$, $f(0) = 0$. La condition $u = +\infty$ sur $\partial\Omega$, est à comprendre dans le sens $\lim\limits_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = +\infty$. Les solutions de (1.49) sont dites solutions larges, ou "Blow up solutions". Nous avons alors le théorème suivant dû à Keller et Osserman

Théorème 1.1. [65] Le problème (1.49), admet une solution si et seulement si

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{F(t)}} dt < \infty \text{ où } F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

La condition $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{F(t)}} dt < \infty$, est connu de nos jours sous le vocable condition de Keller-Osserman. L'étude de la condition de Keller-Osserman ainsi que les problèmes du type (1.49) ; ont été traités par plusieurs auteurs et sont toujours d'actualité.

Lorsque $f(u) = u^p$, avec $p > 1$ le changement $v = \frac{1}{u}$, transforme le problème (1.49) en

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{2-p} - 2v^{-1} |\nabla v|^2 & \text{dans } \Omega \\ v > 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on se retrouve devant un problème elliptique, avec terme en gradient et terme singulier. Il y aurait dont une relation implicite entre les problèmes à solution larges (1.49), les conditions de Keller Osserman, et les problèmes elliptique avec terme de premier ordre et singularité.

Chapitre 2

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'interesse au problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q\alpha} |\nabla u|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

qui est une généralisation du problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{q\alpha}|\nabla u|^q + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

étudié dans [5] ; où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $f(x) \geq 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ et $q \in (1, 2]$.

Il a été récemment montré par Giachetti et Murat dans [67], que le problème

$$-\Delta u + au = \frac{|\nabla u|^2}{u^k} + f(x)$$

avec $k > 0$, $a > 0$, $f \in L^\infty(\Omega)$, possède une solution distributionnelle $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour $k < 1$, et $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour $k \geq 1$.

Nous allons essayer de montrer les points suivants :

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$ et $q(\alpha+1) \leq 1$, alors il existe une solution indépendamment du choix de $||f||_\infty$. Par contre si $q(\alpha+1) > 1$, on devra supposer que λ est suffisamment petit pour assurer l'existence de solution.
2. Si $q\alpha < -1$ on démontre l'existence d'une solution distributionnelle positive pour tout f dans L^1.
3. Si $-1 \leq q\alpha < 0$, sous certaines hypothèses sur f, on démontrera que indépendamment du choix de λ, le problème en considération possède une solution positive.
4. On généralisera le résultat de multiplicité obtenu dans [3] pour la cas $q = 2$ avec $2\alpha \in [-1, 0)$.

Ce chapitre est organisé comme suit :

La première section est consacrée à l'étude du cas $f \in L^\infty(\Omega)$. Dans ce cas particulier on construira une sursolution radiale, chose qui ne sera plus possible par la suite.

Dans la deuxième section on traitera le cas plus général $f \in L^1(\Omega)$, dans l'absence d'une sursolution et d'un principe de comparaison général, on démontrera l'existence de solution, en procédant par approximation et en imposant des restrictions sur le choix de a.

La troisième section, quant à elle est dédiée à montrer un résultat de multiplicité de solutions, en mettant en évidance la relation du problème traité avec un problème quasilinéaire avec donnée mesure.

La dernière section sera dédiée à élargir le choix de a imposé dans la section deux.

Il est à noter, que comme pour le chapitre précédent la principale difficulté dans l'étude d'un problème quasilinéaire avec terme singulier proposé, c'est l'absence d'un lemme de comparaison général.

Soit $F \in L^1(\Omega)$, alors on rappelle que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ sera dite solution entropique ou solution au sens d'entropie de

$$\begin{cases} \Delta_p u = F \text{ dans } \Omega, \\ \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

si pour tout $k > 0$ et tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla(T_k(u-v)) \rangle = \int_\Omega F\, T_k(u-v). \tag{2.4}$$

Ainsi, nous dirons que u est une solution entropique de (2.1) si

$$u^{q\alpha}\, |\nabla u|^q + \lambda f \in L^1(\Omega)$$

et la définition précédente est vérifiée pour $F(x) \equiv u^{q\alpha}\, |\nabla u|^q + \lambda f$.

Nous noterons que si u est une solution entropique, alors c'est aussi une solution distributionnelle de (2.1).

On rappelle aussi le résultat suivant [30], précédemment utilisé dans le premier chapitre

Théorème 2.1. Supposons que $1 < p$ et $F \in L^1(\Omega)$. Soit $\{f_n\}_n \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to F$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Soit $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = f_n \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors il existe $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ telle que u est l'unique solution entropique de (3.2), $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $|\nabla u_n|^{p-1} \to |\nabla u|^{p-1}$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.

Nous utiliserons souvent le résultat de compacité suivant tout au long de ce chapitre ; résultat qui garantit la convergence forte dans un espace de Sobolev adéquat. La preuve en est obtenue dans [9], [78].

Lemme 2.1. Soit $\{u_n\}_n$ une suite de fonctions positives, uniformément bornée dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ et $u_n \leq u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $-\Delta_p u_n \geq 0$, alors $u_n \to u$ fortement dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$.

On fera aussi appelle au résultat suivant, qui n'est autre qu'une version affaiblie du résultat de compacité précédent

Lemme 2.2. Soit $\{u_n\}_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ une suite de fonctions positives telle que $-\Delta_p u_n \geq 0$, et telle que $\{u_n\}_n$ est uniformément bornée dans $W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ pour $\max\{p-1,1\} < q \leq p$ avec $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ et $u_n \leq u$ for all $n \in I\!N$. Si $q < p$, on supposera aussi que la suite $\{T_k(u_n)\}_n$ est uniformément bornée dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ pour k fixé. Alors $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ fortement dans $(L^p_{loc}(\Omega))^N$.

Nous utiliserons à volonté le lemme de comparaison de Porretta [84] donné en introduction et déja exploité dans le chapitre précédent, mais aussi à une de ses variantes que l'on énonce dans le lemme suivant :

Lemme 2.3. Soit g une fonction positive telle que $g \in L^\rho(\Omega)$ avec $\rho > \frac{N}{p}$ et $a > 0$. Supposons que w_1, w_2 soient deux fonctions positives telles que $w_1, w_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 \leq \dfrac{1}{(w_1+c)^a} \dfrac{|\nabla w_1|^q}{1+s|\nabla w_1|^q} + g & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p w_2 \geq \dfrac{1}{(w_2+c)^a} \dfrac{|\nabla w_2|^q}{1+s|\nabla w_2|^q} + g & \text{dans } \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

où $c, s > 0$, alors $w_2 \geq w_1$ dans Ω.

Démonstration. On conviendra de poser

$$H_n(\xi) = \frac{|\xi|^q}{1+s|\xi|^q}, \xi \in \mathbb{R}^N$$

On a

$$-\Delta_p w_1 + \Delta_p w_2 \leq \frac{H(\nabla w_1)}{((w_1+c))^a} - \frac{H(\nabla w_2)}{((w_2+c))^a}$$
$$\leq \frac{1}{(w_1+c)^a}\left(H(\nabla w_1) - H(\nabla w_2)\right) + H(\nabla w_2)\left(\frac{1}{(w_1+c)^a} - \frac{1}{(w_2+c)^a}\right)$$
$$\leq \frac{1}{(w_1+c)^a}\left(H(\nabla w_1) - H(\nabla w_2)\right) + H(\nabla w_2)\left(\frac{1}{(w_1+c)^a} - \frac{1}{(w_2+c)^a}\right).$$

En utilisant $(w_1 - w_2)_+$ comme fonction test dans l'inégalité précédente, et en utilisant le fait que

$$\int_\Omega H(\nabla w_2)\left(\frac{1}{(w_1+c)^a} - \frac{1}{(w_2+c))^a}\right)(w_1 - w_2)_+ \leq 0$$

et par les mêmes arguments que ceux de [87], il en découle que $(w_1 - w_2)_+ = 0$. D'où le résultat. $\square$

2.2 Résultat d'existence pour $q\alpha < 0$ et $f \in L^\infty(\Omega)$

Dans cette section on se limitera au cas $q\alpha < 0$ et f essentiellement bornée.

Considérons l'équation

$$-\Delta_p w \geq w^{q\alpha} |\nabla w|^q$$

En posant $w = Ar^{-\beta}$ où $\beta > 0,\ 0 < r \leq 1$ et $A > 0$, on obtient

$$-\Delta_p w = (A\beta)^{p-1}\left[(-\beta - 1)(p-1) + N - 1\right] r^{(-\beta-1)(p-1)-1}. \tag{2.7}$$

D'un autre côté, nous avons

$$w^{q\alpha} |\nabla w|^q = A^{q\alpha+q}\beta^q r^{-q\alpha\beta - q(\beta+1)}$$

la positivité des exposents nous amène à

$$0 < \beta < \frac{N-1}{p-1} - 1$$

et donc

$$(A\beta)^{p-1}\left[(-\beta-1)(p-1)+N-1\right] r^{(-\beta-1)(p-1)-1} \geq A^{q\alpha+q}\beta^{q} r^{-q\alpha\beta-q(\beta+1)} \tag{2.8}$$

comme $r \leq 1$ on doit avoir

$$\beta\left(q(\alpha+1)-(p-1)\right) \leq (p-q)$$

on distingue alors deux cas

- Si $q(\alpha+1)-(p-1) \leq 0$, alors $q(\alpha+1) \leq (p-1)$ i.e. $q\alpha \leq p-1-q$ ce qui est toujours verifié pour $0 < \beta < \left(\frac{N-1}{p-1} - 1\right)$ dû au fait que $q \leq p$, l'inégalité (2.7) peut alors être réecrite

  $$A^{p-1-q(\alpha+1)}\left[(-\beta-1)(p-1)+N-1\right] \geq \beta^{q-p+1} r^{(\beta+1)(p-1)+1-q\alpha\beta-q(\beta+1)}$$

  comme $\beta\left(q(\alpha+1)-(p-1)\right) \leq (p-q)$ on a $(\beta+1)(p-1)+1-q\alpha\beta-q(\beta+1) \geq 0$, on peut alors toujours choisir A suffisamment grand tel que la dernière inégalité soit vérifiée. Ainsi nous obtenons une sursolution dans $B_1(0)$
- Si $q(\alpha+1)-(p-1) > 0$ i.e.$q(\alpha+1) > (p-1)$ on doit alors ajouter une condition sur β pour que l'inégalité (2.8) soit vérifiée ; à savoir

  $$\beta\left(q(\alpha+1)-(p-1)\right) \leq (p-q)$$

  et donc

  $$\beta \leq \frac{p-q}{q(\alpha+1)-p-1}$$

  ainsi, sous la condition $0 < \beta < \min\left\{\frac{N-1}{p-1} - 1, \frac{p-q}{q(\alpha+1)-p-1}\right\}$ et A suffisamment petit on obtient la sursolution.
- Supposons que $f \in L^{\infty}(\Omega)$, alors si $q(\alpha+1) \leq (p-1)$, en choisissant

$R > 0$ tel que $\overline{\Omega} \subset B_R(0)$ and let $0 < \beta < \frac{N-1}{p-1} - 1$. On pose alors $w(x) = A|x|^{-\beta}$, w est une sursolution de (2.1) si

$$[(-\beta-1)(p-1)+N-1] \geq A^{q(\alpha+1)-\{p-1\}}\beta^{q-p+1}r^{(\beta+1)(p-1)+1-q\alpha\beta-q(\beta+1)}+\frac{\|f\|_\infty}{(\beta A)^{p-1}} \tag{2.9}$$

où A est choisit suffisamment grand et $\|f\|_\infty$ suffisement petit, ou de manière équivalente $\lambda < \lambda_0$ petit. Notons que w est une sur-solution non bornée du problème (2.1), mais par une translation de la singularité en dehors de Ω on peut toujours obtenir une sursolution bornée, qu'on notera aussi w.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème suivant

Théorème 2.2. Supposons que $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ et $1 \leq q \leq p$, alors le problème (2.1) possède une solution positive.

Démonstration. Pour alléger la notation, on conviendra de poser $a = q\alpha$. Soit la suite $\{u_n\}_n$ définie par : u_0 est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et pour $n \geq 1$, u_n est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{H_n(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

où

$$H_n(\xi) = \frac{|s|^q}{1 + \frac{1}{n}|s|^q}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On affirme alors que la suite $\{u_n\}_n$ est croissante en n et pour tout $n \geq 0$,

$u_n \leq w$. En effet,

$$-\Delta_p u_n + \Delta_p u_{n+1} = \frac{H(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} - \frac{H\left(\nabla u_{n+1}\right)}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^a}$$

$$= \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^a}\left(H\left(\nabla u_n\right) - H\left(\nabla u_{n+1}\right)\right) + H\left(\nabla u_{n+1}\right)\left(\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^a} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^a}\right)$$

$$\leq \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^a}\left(H\left(\nabla u_n\right) - H\left(\nabla u_{n+1}\right)\right) + H\left(\nabla u_{n+1}\right)\left(\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n+1})^a} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^a}\right).$$

En prenant $(u_n - u_{n+1})_+$ comme fonction test dans l'inégalité précédente, et par le fait que

$$\int_\Omega H\left(\nabla u_{n+1}\right)\left(\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n+1})^a} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^a}\right)(u_n - u_{n+1})_+ \leq 0$$

et par les mêmes arguments que ceux introduit dans [87], il en découle que $(u_n - u_{n+1})_+ = 0$. On obtient ainsi la monotonie escomptée.

On affirme à présent que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Notons que $u_n \leq w$, puisque $-\Delta_p u_n \geq 0$, alors

$$\int_\Omega -\Delta_p u_n (w - u_n)\psi^p \geq 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \psi \geq 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi^p \quad &\leq \quad \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla w| \psi^p + p \int_\Omega \psi^{p-1}(w - u_n)|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \psi| \\
&\leq \quad \frac{p-1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi^p + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w|^p \psi^p + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi^p + C(\varepsilon)\int_\Omega |\nabla \psi|^p
\end{aligned}$$

En choisissant ε petit, on obtient que $|\nabla u_n|$ est bornée dans $L^p_{loc}(\Omega)$ ce qui prouve notre affirmation.

Nous obtenons donc $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $u_n \uparrow u$ fortement dans $L^\sigma_{loc}(\Omega)$ pour tout $\sigma \leq p^*$. En remarquant que $\underline{u} \leq u \leq w \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et donc $u_n \to u$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma > 1$.

Il nous suffira donc de démontrer que

$$\frac{H_n(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} \to \frac{|\nabla u_n|^q}{u^a} \text{ fortement dans } L^1_{loc}.$$

Rappelons que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et par le fait que $u_n \uparrow u$ pour tout n et $-\Delta_p u_n \geq 0$, alors par le Lemme 2.1 on conclut que

$$u_n \to u \text{ fortement dans } W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Comme $u_n \geq u_0 \geq C(k)$ dans chaque compact $K \subset\subset \Omega$, alors par le théorème de la convergence dominée on obtient que

$$\frac{H_n(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} \to \frac{|\nabla u_n|^q}{u^a} \text{ fortement dans } L^1_{loc}.$$

ce qui achève la preuve. □

Dans le cas $q \leq 1$, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.3. $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ et $0 < q \leq 1$, le problème (2.1) possède une solution positive.

Démonstration. Dans ce cas on pose

$$H_n(\xi) = (|s| + \frac{1}{n})^{\nu} \text{ où } s \in \mathbb{R}^N,$$

Il est clair que H_n satisfait les hypothèses du lemme de comparaison de Porretta [87], on procède alors comme dans la démonstration du Théorème 2.2, en definissant la suite $\{u_n\}_n$ par

$$-\Delta_p u_n = \frac{H\left(\nabla u_n\right)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + \lambda f,$$

et

$$-\Delta_p u_0 = \lambda f$$

où comme dans le cas précédent, en passant à la limite, on obtient l'existence d'une solution $u \leq w$. $\square$

Dans le cas dégénéré $p > 2$, comme pour le chapitre précédent, nous allons devoir approximer la partie principale de l'opérateur afin de nous ramener dans un cadre où un principe de comparaison existe.

Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on pose

$$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u).$$

Alors nous avons le lemme suivant

Lemme 2.4. Supposons que $p > 2$, alors le problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u = u^{\alpha q} |\nabla u|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $q \leq p$, possède une solution minimale bornée $u_\varepsilon \in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)$ au moins pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Démonstration. Soit w la supersolution définie plus haut, comme

$$-L_\varepsilon w \to -\Delta_p w \text{ dans } \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \text{ pour } \varepsilon \to 0,$$

on obtient (en cherchant une sursolution radiale, et par un calcul similaire à celui effectué plus haut) l'existence d'un ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$-L_\varepsilon w \geq w^{\alpha q} |\nabla w|^q + \lambda f.$$

Fixons ε et définissons v_ε comme étant l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon v_\varepsilon = \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ v_\varepsilon > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

Il est clair que v_ε est une sous solution bornée de (2.11) et que $v_\varepsilon \leq w$.

On définit alors la suite $\{v_n\}_n$ comme suit : $v_0 = v_\varepsilon$ et pour $n \geq 1$, v_n et solution du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon v_n = \dfrac{H\left(\nabla v_n\right)}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^a} + \lambda f\left(x\right) & \text{dans } \Omega, \\ \qquad v_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \qquad v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

où

$$H_n(\xi) = \begin{cases} \frac{|\xi|^q}{1+\frac{1}{n}|\xi|^q} & \text{si} \quad 1 < q \leq p \\ \\ (|\xi| + \frac{1}{n})^q & \text{si} \quad q \leq 1 \end{cases}$$

On affirme alors que la suite $\{v_n\}_n$ est croissante en n. Ceci découle du Théorème 4.1 dans [87] et par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du Théorème 2.2. Fixons $\psi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ tel que $\psi \geq 0$, comme $-L_\varepsilon v_n \geq 0$, alors

$$\int_\Omega -L_\varepsilon v_n(w - v_n)\psi^p \geq 0.$$

En appliquant successivement l'inégalité de Hölder et de Young on obtient que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^p \psi^p \leq C.$

Ainsi nous obtenons l'existence de $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $v_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, $u \leq w$ et $v_n \uparrow u$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \geq 1$.

On affirme alors que $v_n \to u$ fortement dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Notons que par la convergence faible on obtient

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla v_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} (\nabla v_n \nabla u)\psi^p \to \int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 \psi^p,$$

comme $v_n \leq u$, alors $\displaystyle\int_\Omega -L_\varepsilon v_n(u - v_n)\psi^p \geq 0$. Donc

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla v_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla v_n|^2 \psi^p \leq \int_\Omega (\varepsilon + |\nabla v_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} (\nabla v_n \nabla u)\psi^p + o(1) \to \int_\Omega |\nabla u|^p \psi^p.$$

Par suite $||\psi v_n||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to ||\psi u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ ce qui montre notre affirmation.

Comme $v_n \geq v_0 \geq C(K) > 0$ pour chaque compact K, alors

$$\frac{H(\nabla v_n)}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^a} \to u^{\alpha q}|\nabla u|^q \text{ fortement dans } L^1_{loc}.$$

D'où l'existence de solution. □

Il reste à passer à la limite $\varepsilon \to 0$, pour cela nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.4. Supposons que $p > 2$ et $1 \leq q \leq p$, alors le problème (2.1) possède une solution distributionnelle positive.

Démonstration. Fixons $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et soit u_ε, la solution minimale de (2.11). Notre objectif est de faire tendre $\varepsilon \to 0$. Il est clair que $u_\varepsilon \leq w$.

Nous allons montrer que $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Pour ce faire nous utiliserons le fait que $u_\varepsilon \leq w$, alors $\displaystyle\int_\Omega -L_\varepsilon u_\varepsilon(w - u_\varepsilon)\psi^p \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2\psi^p \leq \int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}(\nabla u_\varepsilon \nabla w)\psi^p +\\ p\int_\Omega (w - u_\varepsilon)\psi^{p-1}(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_\varepsilon \nabla \psi\\ \leq \theta \int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2\psi^p + C(\theta)\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla w|^2\psi^p + C\int_\Omega |\nabla \psi|^p,\end{aligned}$$

et par suite

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2\psi^p \leq C\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla w|^2\psi^p + C.$$

Pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla w|^2\psi^p \leq \sigma\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p\psi^p + c(\sigma)\int_\Omega |\nabla w|^p\psi^p + C(\Omega),$$

alors en choisissant σ suffisamment petit, on obtient $||\psi u_\varepsilon||_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leq C$, et donc $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Ainsi nous obtenons l'existence de $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ et $u \leq w$ et $u_\varepsilon \to u$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \geq 1$.

L'utilisation de ψ comme fonction test dans (2.11) et par le fait que $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, il en découle que

$$\int_\Omega \Big(u_\varepsilon^{\alpha q}|\nabla u_\varepsilon|^q + \lambda f\Big)\psi \leq C \text{ pour tout } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Par le principe de maximum fort on conclut que $u_\varepsilon \geq v_0 \geq C(K) > 0$ pour tout compact K. Pour parachever la démonstration il nous reste à montrer que

$$|\nabla u_\varepsilon|^p \to |\nabla u|^p \text{ fortement dans } L^1_{loc}.$$

Commençons par le cas $q < p$, en prenant $(u_\varepsilon - u)\psi$ comme fonction test dans (2.11) et par la convergence faible de u_ε, on arrive à

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2\psi - \int_\Omega |\nabla u|^p\psi \leq \int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha q}|\nabla u_\varepsilon|^q(u_\varepsilon - u)\psi + o(1).$$

Comme $u_\varepsilon \leq w \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha q}|\nabla u_\varepsilon|^q(u_\varepsilon - u)\psi \leq C_1\Big(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p\psi\Big)^{\frac{q}{p}}\Big(\int_\Omega |u_\varepsilon - u|^{\frac{p}{p-q}}\psi\Big)^{\frac{p-q}{p}} \leq o(1).$$

Ainsi,

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2\psi - \int_\Omega |\nabla u|^p\psi \leq o(1).$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\limsup \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p\psi \leq \limsup \int_\Omega |\nabla u|^p\psi.$$

Par suite $|\nabla u_\varepsilon|^p \to |\nabla u|^p$ fortement dans L^1_{loc} d'où le résultat pour le cas $q < p$. Considérons à présent le cas $q = p$. Soit $K(s) = se^{\alpha s^2}$, où $\alpha >> 1$, à préciser ultérieurement, par l'utilisation de $K(u_\varepsilon - u)\psi$ comme fonction test dans (2.11), il découle que

$$\int_\Omega K'(u_\varepsilon - u)(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_\varepsilon\nabla(u_\varepsilon - u)\psi + \int_\Omega K(u_\varepsilon - u)(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_\varepsilon\nabla\psi =$$
$$\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha q}|\nabla u_\varepsilon|^p K(u_\varepsilon - u)\psi + o(1) + o(1).$$

Analysons chaque terme dans la dernière expression.

$$\int_\Omega K'(u_\varepsilon - u)(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u)\psi =$$
$$\int_\Omega K'(u_\varepsilon - u)\Big\{(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon - (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\Big\}\nabla(u_\varepsilon - u)\psi + o(1) \geq$$
$$C\int_\Omega K'(u_\varepsilon - u)|\nabla(u_\varepsilon - u)|^p\psi.$$

D'un autre côté nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha q}|\nabla u_\varepsilon|^p K(u_\varepsilon - u)\psi &\leq C_1\int_\Omega |\nabla(u_\varepsilon - u)|^p K(u_\varepsilon - u)\psi + \int_\Omega |\nabla u|^p K(u_\varepsilon - u)\psi \\ &\leq C_1\int_\Omega |\nabla(u_\varepsilon - u)|^p K(u_\varepsilon - u)\psi.\end{aligned}$$

En combinant les estimations précédentes, on obtient

$$\int_\Omega (K'(u_\varepsilon - u) - C_1K'(u_\varepsilon - u))|\nabla(u_\varepsilon - u)|^p\psi \leq o(1).$$

Comme

$$K'(s) - C_1K'(s) = e^{\alpha s^2}\Big(2\alpha s^2 + 1 - C_1 s\Big)$$

alors on peut toujours choisir α suffisamment grand de sorte à avoir $K'(s) - C_1K'(s) \geq C_2 > 0$, donc $\int_\Omega |\nabla(u_\varepsilon - u)|^p\psi \leq o(1)$. Ce qui achève la preuve.

□

Nous allons à présent nous interesser à la régularité des solutions, pour cela nous enonçons le théorème suivant :

Théorème 2.5. La solution u du problème (2.1) obtenue dans les théorèmes précédents, satisfait à

1 $u^{\frac{\gamma}{q}+1} \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\gamma > -\frac{(\alpha q+1)}{p-q}$ *si* $p > q$ *et* $\alpha q \leq -1$

2 $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *si* $p > q$ *et* $-1 < \alpha q < 0$

Démonstration. Commençons par le premier cas, supposons que $\alpha q \leq -1$, alors $a \geq 1$.

Soit u_n solution de (2.10) et considérons $\theta = (a - 1 + \gamma)\frac{q}{p}$ où $\gamma > \dfrac{q(a-1)}{p-q}$.

Par l'inégalité de Young il découle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_n^\gamma |\nabla u_n|^q dx &= \int_\Omega u_n^\theta |\nabla u_n|^q u_n^{\gamma-\theta} dx \\ &\leq \rho \int_\Omega u_n^{\frac{\theta p}{q}} |\nabla u_n|^p dx + C(\rho) \int_\Omega u_n^{\frac{p(\gamma-\theta)}{p-q}} dx\end{aligned}$$

En prenant $u_n^{\frac{\theta p}{q}+1}$ comme fonction test dans (2.10) , et par le fait que $u_n \leq w \leq C$, on obtient

$$\int_\Omega -\Delta_p u_n u_n^{\frac{\theta p}{q}+1} dx = \left(\frac{\theta p}{q}+1\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^p u_n^{\frac{\theta p}{q}} \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q u_n^{\frac{\theta p}{q}+1-a} + C$$

comme $\gamma = \frac{\theta p}{q} + 1 - a$ et en choisissant ρ suffisamment petit

$$\int_\Omega u_n^\gamma |\nabla u_\varepsilon|^q dx \leq C + C(\rho) \int_\Omega u_n^{\frac{p(\gamma-\theta)}{p-q}} dx \leq C$$

ainsi $u_n^{\frac{\gamma}{q}+1}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ alors $u^{\frac{\gamma}{q}+1} \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Passons à présent au second cas ; Supposons que $-1 < \alpha q < 0$ et donc $a < 1$.

Le même calcul pour le précédent cas avec $\gamma = 0$, ce qui implique que $-\frac{\theta p}{p-q} \geq -1$, donne

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q dx \leq \rho \int_\Omega u_n^{\frac{\theta p}{q}} |\nabla u_n|^p dx + C(\rho) \int_\Omega u_n^{\frac{-\theta p}{p-q}} dx.$$

Par utilisation de $u_n^{\frac{\theta p}{q}+1}$ comme fonction test dans (2.10) on obtient

$$\left(\frac{\theta p}{q}+1\right) \int_\Omega u_n^{\frac{\theta p}{q}} |\nabla u_n|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q u_\varepsilon^{\frac{\theta p}{q}+1-a} dx + \int_\Omega f u_n^{\frac{\theta p}{q}+1} dx,$$

comme $a < 1$ et $\theta > 0$ et par le Lemme 0.1 et le fait que $C_2 \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < u_\varepsilon < C$ on obtient

$$C \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^q dx \leq C_1 + C_2 \left(dist(x, \partial\Omega)\right)^{-\frac{\theta p}{p-q}} \leq C.$$

Alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ $\square$

2.3 Le cas $q\alpha < 0$ et $f \in L^1(\Omega)$

Le but dans cette section est d'analyser le cas où $f \in L^1(\Omega)$ et $q\alpha < 0$. Contrairement au cas précédent, nous ne pouvons plus compter sur l'existence d'une sur-solution, nous allons donc contourner cette lacune, en établissant des estimations à priori pour les solutions des problèmes approximants ensuite passer à la limite dans des espaces convenables.

Pour traiter ce cas plus compliqué et plus complexe que le cas avec donnée dans L^∞, nous allons commencer par donner des estimations a priori, qui seront très utiles voire essentielles par la suite. Considérons les problèmes approximants suivants

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^p}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour $a > 1$, utilisons $K(u) = e^{-\frac{\beta}{u^{a-1}}}$ comme fonction test,

$$(a-1)\int_\Omega \frac{\beta}{u_n^a} e^{-\frac{\beta}{u_n^{a-1}}} |\nabla u_n|^p \, dx \le \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{u_n^a} e^{-\frac{\beta}{u_n^{a-1}}} dx + \int_\Omega T_n(f)\, e^{-\frac{\beta}{u_n^{a-1}}},$$

et par suite

$$[\beta(a-1) - 1] \int_\Omega \frac{1}{u_n^a} e^{-\frac{\beta}{u_n^{a-1}}} |\nabla u_n|^p \, dx \le C.$$

Il suffit alors de choisir $[\beta(a-1) - 1] > 0$ ou encore $\beta \ge \frac{1}{a-1}$ pour avoir

$$\int_\Omega \frac{1}{u_n^a} e^{-\frac{\beta}{u_n^{a-1}}} |\nabla u_n|^p \, dx \le C,$$

on introduit alors la nouvelle fonction

$$H(s) = \int_0^s \frac{1}{\sigma^{\frac{a}{p}}} e^{-\frac{\beta}{p\sigma^{a-1}}} d\sigma, \tag{2.14}$$

vérifiant $H(0) = 0$ et

$$|\nabla H(u)|^p = \frac{1}{u^a} e^{-\frac{\beta}{u^{a-1}}} |\nabla u_\varepsilon|^p ,$$

soit

$$\int_\Omega |\nabla H(u)|^p \, dx = \int_\Omega \frac{1}{u^a} e^{-\frac{\beta}{u^{a-1}}} |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx \leq C$$

d'un côté l'inégalité de Poincaré appliquée à H donne

$$c \int_\Omega |H(u)|^p \, dx \leq \int_\Omega |\nabla H(u)|^p \, dx \leq C$$

et d'un autre côté l'inégalité de Sobolev donne

$$c \left(\int_\Omega |H(u)|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \int_\Omega |\nabla H(u)|^p \, dx \leq C$$

où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev, par le fait que

$$H(s) \geq C_1 s^{1-\frac{a}{p}} - C_2$$

on obtient

$$\int_\Omega u^{p-a} dx \leq K_1 \tag{2.15}$$

et

$$\int_\Omega u^{(p-a)\frac{p^*}{p}} dx \leq K_2 \tag{2.16}$$

Nous utiliserons par la suite, et selon la nécessité soit (2.15) ou (2.16), même si la seconde estimation est plus fine que la première. Si l'on remplace p par q et comme $q < p$ par Holderisation on obtient les mêmes estimations. Il est aussi à observer que l'on est pas arrivé à obtenir une estimation aussi fine que celle obtenue dans [5], cela semble être naturel et probablement dû a la qualité non-linéaire du p-laplacien.

Nous énonçons le résultat d'existence suivant

Théorème 2.6. Soit f une fonction positive telle que $f \in L^1(\Omega)$. Supposons que $p-1 < q \leq p$ et $1 < a < p(\frac{p^* - (p-1)}{p^*})$, alors le problème (2.1) possède une solution distributionnelle u telle que $u^{q\alpha}|\nabla u|^q \in L^1_{loc}(\Omega)$, $|\nabla u| \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$, et $H(u) \in W^{1,p}_0(\Omega)$, où H est définie dans (2.14) avec $\beta > \frac{1}{-q\alpha - 1}$.

Démonstration. On convient de poser $-q\alpha = a$, soit u_n une solution du problème approximant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \dfrac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.17}$$

Soit $\rho \in W^{1,p}_0(\Omega)$, la solution du problème

$$-\Delta_p \rho = T_1(f),$$

on a $u_n \geq \rho$ pour tout n. Alors par le principe de maximum fort, pour tout ensemble compact A de Ω, il existe une constante positive $C(A)$ telle que $u_n \geq C(A)$ dans K pour tout n.

D'un côté d'après (2.16) on sait que

$$\int_\Omega u_n^{(p-a)\frac{p^*}{p}} dx \leq C.$$

D'un autre côté, soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$, l'utilisation de $\dfrac{\varphi^p}{(u_n)^s}$, $s > 0$ à préciser, comme fonction test dans (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} &-s\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(u_n)^{s+1}}\varphi^p dx + p\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p-2}}{(u_n)^s}\nabla u_n \varphi^{p-1}\nabla\varphi dx \\ = &\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q}\frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\frac{\varphi^p}{(u_n)^s}dx + \int_\Omega T_n(f)\frac{\varphi^p}{(u_n)^s}dx, \end{aligned}$$

par suite

$$s\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(u_n)^{s+1}}\varphi^p dx \leq p\int_\Omega \varphi^{p-1}\frac{|\nabla u_n|^{p-1}}{(u_n)^s}|\nabla\varphi|\, dx,$$

par l'inégalité de Young

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(u_n)^{s+1}}\varphi^p dx \quad\leq\quad \varepsilon \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(u_n)^{s+1}}\varphi^p dx + C(\varepsilon)\int_\Omega |\nabla\varphi|^p u_n^{p-1-s} dx.$$

En choisissant $s+1 \geq p-(p-a)\frac{p^*}{p}$, alors par l'estimation (2.16), on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(u_n)^{s+1}}\varphi^p dx \leq C \text{ pour tout } n. \tag{2.18}$$

D'après (2.16) et (2.18) on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\varphi^p \leq c,$$

donc en utilisant $|\nabla T_k(u_n)|\varphi$ comme fonction test dans (2.19), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \varphi \leq C_1 k + C_2,$$

et l'affirmation est démontrée. Par les mêmes arguments utilisés dans [30] on arrive à montrer que $\{|\nabla u_n|\}_n$ est bornée dans $L^s_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$. Nous allons à présent démontrer la convergence forte des troncatures dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Pour cela on suivra scrupulusement les mêmes démarches que [5]. Nous allons séparer les deux cas $q<p$ et $q=p$. Supposons d'abord que $q<p$, définissons $w_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u))$ et soit $M = 4k+h$. On utilise alors $w_n\varphi$ comme fonction test dans (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_n \varphi dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n w_n \nabla\varphi dx \\ =\ &\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q}\frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a} w_n\varphi dx + \int_\Omega T_n(f(x))\, w_n\varphi dx, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n\varphi dx+\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n w_n\nabla\varphi dx\\
\leq\ &\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(u_n)^a}|w_n|\varphi dx+\int_\Omega T_n(f(x))|w_n|\varphi dx.
\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n\varphi dx\\
=&\int_{u_n\leq k}|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla w_n\varphi dx+\int_{u_n>k}|\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n\varphi dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla w_n\varphi dx\\
\geq&\int_{u_n\leq k}|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\left(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\right)\varphi dx\\
&-\int_{u_n>k}|\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|\varphi dx\\
=&\int_{u_n\leq k}\Big(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\Big)\left(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\right)\varphi dx\\
&+\int_{u_n\leq k}\Big(|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\Big)\left(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\right)\varphi dx\\
&-\int_{u_n>k}|\nabla T_M(u_n)|^{p-1}|\nabla T_k(u)|\varphi dx
\end{aligned}$$

Supposons que $p>2$, comme, pour chaque $\xi_1;\ \xi_2$ dans $I\!R^N$,

$$\Big(|\xi_2|^{p-2}\xi_2-|\xi_1|^{p-2}\xi_1\Big).(\xi_2-\xi_1)\geq K|\xi_2-\xi_1|^p \text{ où } k>0,$$

alors,

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p \varphi dx \\
\leq\; & K' \int_\Omega \left(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u)\right)(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u))\varphi dx \\
\leq\; & K' \int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla w_n \varphi dx \\
& - K' \int_{u_n \leq k} \left(|\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u)\right)(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u))\varphi dx \\
& + K' \int_{u_n > k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1} |\nabla T_k(u)| \varphi dx.
\end{aligned}$$

Par le fait que $\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u)$, on obtient

$$\int_{u_n \leq k} \left(|\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u)\right)(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u))\varphi dx = o(1).$$

En remarquant que $\chi_{\{u_n > k\}} |\nabla T_k(u)| \to 0$ in $L^p_{loc}(\Omega)$ et par le fait que $|\nabla T_M(u_n)|^{p-1}$ est bornée dans $L^{p'}_{loc}(\Omega)$, il en résulte que

$$\int_{u_n > k} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1} |\nabla T_k(u)| \varphi dx \to 0,$$

ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p \varphi dx \;\leq\; & K' \int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla w_n \varphi dx + o(1) \\
\leq\; & K' \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(u_n)^a} |w_n| \varphi dx + K' \int_\Omega T_n(f(x)) |w_n| \varphi dx \\
& - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n w_n \nabla \varphi dx.
\end{aligned}$$

Notons que $w_n \to T_{2k}(u - T_h(u))$ fortement dans $L^\alpha_{loc}(\Omega)$ pour tout $\alpha \geq 1$.

Puisque $\{|\nabla u_n|^{p-1}\}_n$ est bornée dans $L^s_{Loc}(\Omega)$ pour $s < \frac{N}{N-1}$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n w_n \nabla \varphi dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u T_{2k}(u - T_h(u)) \nabla \varphi dx$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} T_n\left(f(x)\right)|w_n|\,\varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\left|T_{2k}\left(u - T_h\left(u\right)\right)\right|\varphi dx.$$

Notons que, pour $h \to \infty$, $T_{2k}\left(u - T_h\left(u\right)\right) \to 0$ dans $L^{\infty}\left(\Omega\right)$ pour la topologie *- faible pour chaque k fixé.

Comme $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \in L^1\left(\Omega\right)$; on obtient alors

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla T_k\left(u_n\right) - \nabla T_k\left(u\right)|^p \varphi dx \leq K' \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{\left(u_n\right)^a}|w_n|\,\varphi dx + o(1).$$

Rappelons que nous sommes dans le cas $q < p$, et donc

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{\left(u_n\right)^a}|w_n|\,\varphi dx \leq \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^p}{\left(u_n\right)^a}\varphi dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|w_n|^{\frac{p}{p-q}}}{\left(u_n\right)^a}\varphi dx\right)^{\frac{p-q}{p}}.$$

Par (2.18)(en choisissant $s+1=a$), on arrive à $\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^p}{\left(u_n\right)^a}\varphi dx \leq C$, donc

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{\left(u_n\right)^a}|w_n|\,\varphi dx \leq C\left(\int\limits_{\Omega} \frac{|w_n|^{\frac{p}{p-q}}}{\left(u_n\right)^a}\varphi dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \leq C\left(\int\limits_{\Omega} w_n^{\frac{p}{p-q}}\varphi dx\right)^{\frac{p-q}{p}}.$$

En faisant tendre $h \to \infty$ et $n \to \infty$, pour k fixé, il en découle que

$$\left(\int\limits_{\Omega} w_n^{\frac{p}{p-q}}\varphi dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \to 0.$$

par suite on conclut que $T_k\left(u_n\right) \to T_k\left(u\right)$ fortement dans $W^{1,p}_{loc}\left(\Omega\right)$ d'où le résultat pour ce cas.

Si $p \leq 2$, on utilisera l'inégalité

$$\left(|\xi_2|^{p-2}\xi_2 - |\xi_1|^{p-2}\xi_1\right).\left(\xi_2 - \xi_1\right) \geq K\frac{|\xi_2 - \xi_1|^2}{\left(|\xi_2| + |\xi_1|\right)^{2-p}}$$

et en suivant la même argumentation comme pour le cas $p > 2$, on arrive à

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u_n)| + |\nabla T_k(u)|)^{2-p}} \varphi dx \longrightarrow 0.$$

comme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p \varphi dx = \\
= &\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p}{(|\nabla T_k(u_n)| + |\nabla T_k(u)|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla T_k(u_n)| + |\nabla T_k(u)|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \varphi dx \\
\leq &\left(\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u_n)| + |\nabla T_k(u)|)^{2-p}} \varphi dx \right)^{\frac{p}{2}} \times \\
&\times \left(\int_\Omega (|\nabla T_k(u_n)| + |\nabla T_k(u)|)^p \varphi dx \right)^{\frac{(2-p)}{2}}
\end{aligned}$$

alors on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p \varphi dx \longrightarrow 0$$

Revenons à présent au cas $q = p$.

Comme plus haut, soit $w_n = (T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)))_+$, l'utilisation de $v_n = w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}}$ comme fonction test dans (2.19), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n w_n \nabla \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx \\
&+ \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{u_n^a} w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx \\
\leq &\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^a} w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx + \int_\Omega T_n(f) w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n w_n \nabla \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx \\
\leq &\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^a} w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx + \int_\Omega T_n(f) w_n \varphi e^{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}} dx.
\end{aligned}$$

Notons que $u \geq C'$ dans $K \equiv \mathrm{Supp}\varphi$, alors en en déduit que $e^{\overline{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}}} \leq C$.

Par le mêmes calculs du premier cas on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p \varphi e^{\overline{\frac{1}{(a-1)u_n^{a-1}}}} dx \longrightarrow 0 \text{ as } n \longrightarrow \infty$$

Donc $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.

Comme conséquence on a alors

$$\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi \to \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^a}\varphi \qquad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Pour obtenir l'existence on utilisera le lemme de Vitali.

Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable, alors

$$\begin{aligned}\int_E \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi dx &= \int_{E\cap\{u_n<k\}} \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi dx \\ &+ \int_{E\cap\{u_n\geq k\}} \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi dx.\end{aligned}$$

comme le premier terme du côté droit de l'agalité converge, il nous reste à traiter le dernier terme, alors

$$\begin{aligned}\int_{E\cap\{u_n\geq k\}} \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi dx &\leq \int_{u_n\geq k} \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^a}\varphi dx \\ &\leq \int_{u_n\geq k} \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^a}\varphi dx \\ &\leq \frac{1}{k^\sigma}\int_{u_n\geq k} \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^{a-\sigma}}\varphi dx.\end{aligned}$$

En choisissant $\sigma > 0$ telle que $\sigma < a$ et $\sigma + 1 \geq p - (p-a)\frac{p^*}{p}$, par l'estimation (2.18), il découle que $\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^{a-\sigma}}\varphi dx \leq C$, alors

$$\int_{E\cap\{u_n\geq k\}} \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi dx \leq \frac{C}{k^\sigma}.$$

Ainsi pour k suffusemment grand on obtient l'estimation désirée. Le lemme de Vitaly permet de conclure que

$$\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q}\frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi \to \frac{|\nabla u_n|^q}{u_n^a}\varphi \qquad \text{fortement dans } L^1(\Omega)$$

et comme conséquence on a le résultat d'existence. □

Nous allons à présent énoncer des résultats complétant le Théorème 2.6. Considérons le cas où $a \geq p(\frac{p^*-(p-1)}{p^*})$. Par soucis de simplification nous noterons $p_1 = p(\frac{p^*-(p-1)}{p^*})$.

Théorème 2.7. Supposons que $\frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2$. Soit f une fonction positive telle que $f \in L^1(\Omega)$, $p-1 < q \leq p$ et $a \geq p_1$, alors le problème (2.1) possède une solution distributionnelle u, telle que $\frac{|\nabla u|^q}{u^a} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{(p-1)N}{N-1}$, et $H(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, où H est définie dans (2.14) avec $\beta > \frac{1}{a-1}$.

Démonstration. Dans le cas $a < p_1$, l'estimation principale fut (2.16) qui n'est plus valable lorsque $a \geq p_1$.

Soit Ω_1 un domaine borné régulier de $I\!R^N$ tel que $\Omega \subset\subset \Omega_1$ et fixons $1 < \sigma < p_1$. En convenant que $f \equiv 0$ dans $\Omega_1 \backslash \Omega$.

Soit v_n une solution du problème approximant

$$\begin{cases} -\Delta_p v_n = C\dfrac{|\nabla v_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla v_n|^q}\dfrac{1}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^\sigma} + T_n(f) & \text{dans } \Omega_1 \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \end{cases} \tag{2.19}$$

où $C > 0$ est une constante positive à choisir ultérieurement. Comme $1 < \sigma < p_1$, alors en utilisera les mêmes arguments que ceux de la démonstration du Theorem 2.6, pour montrer que

1. $\displaystyle\int_{\Omega_1} v_n^{(p-\sigma)\frac{p^*}{p}}\,dx \leq C,$
2. $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|\nabla v_n|^p}{(u_n)^{s+1}}\varphi^p dx \leq C,$
3. $\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^p \varphi^p \leq Ck$

où $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1)$

Soit $\rho_1 \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$ l'unique solution positive de

$$-\Delta_p \rho_1 = T_1(f) \text{ dans } \Omega_1.$$

Notons que $v_n \geq \rho_1 \geq C(\Omega)$ dans Ω. Comme $a > \sigma$, alors

$$\frac{1}{(v_n + \frac{1}{n})^\sigma} \geq \frac{(C(\Omega))^{a-\sigma}}{(v_n + \frac{1}{n})^a} \text{ dans } \Omega.$$

En choisissant C telle que $C(C(\Omega))^{a-\sigma} \geq 1$,on obtient

$$-\Delta_p v_n \geq \frac{|\nabla v_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla v_n|^q} \frac{1}{(v_n + \frac{1}{n})^a} \text{ dans } \Omega.$$

Considérons alors u_n, la solution du problème approximant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \dfrac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Puisque $p \geq \frac{2N}{N+1}$, alors d'après le lemme de comparaison de Porretta, $u_n \leq u_{n+1}$ et $u_n \leq v_n$ dans Ω, pour tout $n \geq 0$. Par les estimations précédentes appliquées à $\{v_n\}_n$ on obtient l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n \uparrow u$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \leq (p-\sigma)\frac{p^*}{p}$. En choisissant alors σ proche de 1, on obtient que la suite $\{u_n^{p-1}\}_n$ est bornée dans $L^\theta(\Omega)$ pour tout $\theta < \frac{p^*}{p}$.

Par le Lemme 0.1, il découle que

$$\int_K \left(\frac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f)\right) \leq C(K) \text{ pour tout } n.$$

En utilisant $T_k(u_n)\varphi$ comme fonctions test dans (2.20) on obtient que $\{T_k(u_n)\}_n$ est bornée dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

Par les arguments de [30] on obtient alors $\{|\nabla u_n|^{p-1}\}_n$ est bornée dans $L^s_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.

En suivant les mêmes démarches que celles du Théorème 2.6, on arrive à démontrer que

$$\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q}\frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi \to \frac{|\nabla u|^q}{u^a}\varphi \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

et l'existence de solution en découle. □

On se penche à présent sur le cas $p > 2$, et on a le résultat suivant :

Proposition 2.1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et supposons que $1 < \sigma < p_1$, alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$, le problème

$$-L_\varepsilon(v) = \frac{|\nabla v|^q}{v^\sigma} + f \text{ dans } \Omega, \tag{2.21}$$

possède une solution distributionnelle v_ε telle que $H(v_\varepsilon) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Considérons le problème approximant

$$\begin{cases} -L_\varepsilon(v_n) = \dfrac{H(\nabla v_n)}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^\sigma} + T_n(f) & \text{dans } \Omega_1, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{2.22}$$

et

$$\begin{cases} -L_\varepsilon(v_0) = T_1(f) & \text{dans } \Omega_1, \\ v_{0,\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

où

$$H(\xi) = \frac{|\xi|^q}{1+\frac{1}{n}|\xi|^q}.$$

Par le Lemme de comparaison de Poretta cité en introduction et adapté plus haut ; il découle que $\rho \le v_n \le v_{n+1}$ pour tout $n \ge 1$. Posons $K(s) = e^{-\frac{\beta}{s^{\sigma-1}}}$, $s \ge 0$, où $\beta > \frac{1}{\sigma-1}$.

En utilisant $K(u_n)$ comme fonction test dans (2.22), il découle que

$$\int_\Omega \frac{1}{v_n^\sigma} e^{-\frac{\beta}{v_n^{\sigma-1}}} |\nabla v_n|^p \, dx \le C \text{ pour tout } n \ge 1 \text{ et pour tout } \varepsilon > 0.$$

Ainsi, comme dans la démonstration du théorème 2.6, on arrive à obtenir

$$\int_\Omega v_n^{(p-\sigma)\frac{p^*}{p}} dx \leq C \text{ uniformément en } n \text{ et } \varepsilon. \tag{2.23}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$, en utilisant $\dfrac{\varphi^p}{(v_n)^s}$, $s+1 \geq p-(p-a)\frac{p^*}{p}$, comme fonction test dans (2.22), on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^p}{(v_n)^{s+1}} \varphi^p dx \leq C \text{ pour tout } n \text{ et tout } \varepsilon \tag{2.24}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-1} \varphi^p \leq C \text{ pour tout } n \text{ et tout } \varepsilon.$$

De la même manière on obtient que

$$\int_K \frac{|\nabla v_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla v_n|^q} \frac{1}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) \leq C(K) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Par les mêmes estimations précédentes, et en utilisant $T_k(v_n)\varphi$ comme fonction test dans (2.22), il découle que $\{T_k(u_n)\}_n$ est bornée dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Comme $\{v_n\}_n$ est monotone en n, par une variation du lemme de compacité Lemme2.2, on obtient

$$T_k(v_n) \to T_k(v) \text{ fortement dans } W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Pour terminer la démonstration il suffit de montrer que

$$\frac{|\nabla v_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla v_n|^q} \frac{1}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^a}\varphi \to \frac{|\nabla u_n|^q}{v_n^a}\varphi \qquad \text{fortement dans } L^1(\Omega)$$

Ce qui n'est autre qu'une conséquence de (2.24) et du Lemme de Vitali. □

Nous avons à présent le théorème suivant :

Théorème 2.8. Supposons que $p > 2$. Soit f une fonction positive telle que $f \in L^1(\Omega)$, $p-1 < q \leq p$ et $a \geq p_1$, alors le problème (2.1) possède une solution distributionnelle u telle que $\frac{|\nabla u|^q}{u^a} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{(p-1)N}{N-1}$, et $H(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ où H est définie dans (2.14), avec $\beta > \frac{1}{a-1}$.

Démonstration. Soit Ω_1 un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ tel que $\Omega \subset\subset \Omega_1$ et fixons $1 < \sigma < p_1$. En convenant - comme précédemment- de poser $f \equiv 0$ dans $\Omega_1 \backslash \Omega$. Considérons le problème approximant

$$\begin{cases} -L_{\frac{1}{n}}(v_n) = C\dfrac{H(\nabla v_n)}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\sigma}} + T_n(f) & \text{dans } \Omega_1, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{2.25}$$

où $C > 0$ à choisir ultérieurement. comme pour la démonstration du Théorème 4.41, on considère les problèmes approximants suivants sur Ω

$$\begin{cases} -L_{\frac{1}{n}}(u_n) = \dfrac{H(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{a}} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.26}$$

Comme $v_n \geq C(\Omega) > 0$ dans Ω, au moins our $n \geq n_0$, en choisissant C tel que $C(C(\Omega))^{a-\sigma} \geq 1$, on obtient que

$$-L_{\frac{1}{n}}(v_n) = \frac{H(\nabla v_n)}{(v_n + \frac{1}{n})^a} + T_n(f) \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi, par le lemme de comparaison de Porretta il découle que $u_n \leq v_n$ pour tout n. Par la proposition 2.1, on a que

$$\int\limits_{\Omega_1} v_n^{(p-\sigma)\frac{p^*}{p}} dx \leq C \text{ uniformément en } n.$$

Par suite

$$\int\limits_{\Omega} u_n^{(p-\sigma)\frac{p^*}{p}} dx \leq C \text{ uniformément en } n.$$

Par l'hypothèse sur σ, il résulte que $(p-\sigma)\frac{p^*}{p} > p-1$.

En prenant $\frac{\varphi^p}{u_n^s}$ comme fonction test dans (2.26) et par l'estimation précédente, on conclut que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(u_n)^{s+1}} \varphi^p dx \leq C \text{ et } \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1} \varphi^p \leq C \text{ uniformément en } n.$$

En utilisant $T_k(v_n)\varphi$ comme fonction test dans (2.26), il découle que $\{T_k(u_n)\}_n$ est bornée dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

Nous obtenons alors l'existence de u telle que $T_k(u) \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, $H(u) \in W^{1,p}_0(\Omega)$, et par passage à la limite (modulo une sous suite), $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Pour obtenir la convergence forte de $T_k(u_n)$, on prend $w_n\varphi$ comme fonction test dans (2.26) où $w_n = T_{2k}\left(u_n - T_h\left(u_n\right) + T_k\left(u_n\right) - T_k\left(u\right)\right)$ et en reprenant le mêmes arguments que ceux de la démonstration du Théorème 2.6 et par le Lemme de Vitali on obtient que

$$\frac{H\left(\nabla u_n\right)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a}\varphi \to \frac{|\nabla u|^q}{u^a}\varphi \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Ce qui termine la démonstration

□

2.4 Résultat de multiplicité pour le cas $q = p$ et $-1 < p\alpha \leq 0$

Dans cette section nous nous limiterons au cas $q = p$ et $0 \leq -q\alpha < 1$. Sous certaines hypothèses à émettre sur f, nous allons démontrer que le problème (2.1) possède une infinité de solutions.

L'idée principale étant de trouver une relation entre le problème traité (2.1) et un problème quasilinéaire avec donnée mesure. Cette manière de faire pour démontrer la multiplicité fut introduite pour la première fois dans [3] avec $\alpha = 0$. Le cas $p = 2$ et $0 < -q\alpha \leq 1$ a été traité dans [6]. Posons $a = -q\alpha$, et soit

$$H\left(s\right) = \begin{cases} \frac{p-1}{p}s^{\frac{p}{p-1}} & \text{si } a = 1 \\ \int\limits_0^s e^{\frac{1}{(p-1)(1-a)}\sigma^{1-a}}d\sigma & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

et $D(s) = \Big(H'(H^{-1}(s)\Big)^{p-1}$. Il est clair que si $a = 1$, alors $D(s) = (\frac{p}{p-1}s)^{\frac{1}{p}}$.

Observons que si $a < 1$, alors

$$\frac{D(s)}{s^{p-1}} = \frac{\Big(H'(H^{-1}(s)\Big)^{p-1}}{s^{p-1}},$$

en posant $\sigma = H^{-1}(s)$, on a

$$\frac{D(s)}{s^{p-1}} = \left(\frac{H'(\sigma)}{H(\sigma)}\right)^{p-1}$$

Par un calcul direct on arrive a montrer que $\frac{H'(\sigma)}{H(\sigma)} \to 0$ quand $\sigma \to \infty$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } C(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } D(s) \leq \varepsilon s^{p-1} + C(\varepsilon), s \geq 0. \tag{2.27}$$

On obtient aussi que $\frac{D(s)}{s^{\theta(p-1)}} \to \infty$ si $s \to \infty$ pour tout $\theta < 1$ et $D(s) \approx s^{p-1}$ si $s \backsim 0$.

Comme $\frac{H'(\sigma)}{H(\sigma)}$ est une fonction décroissante, alors $\frac{D(s)}{s^{p-1}}$ est aussi décroissante.

Considérons le changement de fonction $v = H(u)$, si u résoud (2.1), v satisfait à

$$-\Delta_p v = \lambda D(v) f. \tag{2.28}$$

Notons que si $a = 1$, alors

$$-\Delta_p v = \lambda f\left(\frac{p}{p-1} v\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui a une unique solution variationnelle si $f \in L^s(\Omega)$ pour $s \geq \frac{pp^*}{pp^*-(p+1)}$, pour plus de détails voir [9].

Si $f \in L^s(\Omega)$ pour $s > \frac{N}{p}$, alors la fonctionnelle d'énergie

$$J(v) = \frac{1}{p}\int |\nabla v|^p - \lambda \int \overline{D}\,(v)\, f$$

avec $\overline{D}\,(s) = \displaystyle\int_0^s D\,(t)\,dt$, est bien définie et admet un minimum global pour tout $\lambda > 0$. Ainsi nous obtenons l'existence de solution $v_0 \in W_0^{1,p}\,(\Omega)$ de (2.28).

Comme $\frac{D(s)}{s^{p-1}}$ est décroissante, alors la solution est unique. Par suite, $u_0 \equiv H^{-1}(v_0)$ est solution de (2.1) avec $H(u_0) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le principal résultat de cette section est le suivant

Théorème 2.9. Supposons que $q = p$ et $-1 \leq q\alpha < 0$. Soit f une fonction positive telle que $f \in L^m(\Omega)$, $m > \dfrac{N}{p}$, alors pour tout $\lambda > 0$, le problème (2.1) possède une infinité de solutions positives, dont au moins une est bornée, verifiant pour tout $r < \frac{N}{N-1}$, si $\alpha > -\frac{1}{2}$,

$$\int_\Omega e^{\frac{r}{1+2\alpha}u^{1+2\alpha}}|\nabla u|^r dx < \infty$$

et si $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\int_\Omega u^r|\nabla u|^r dx < \infty \text{ pour tout } r < \frac{N}{N-1}.$$

Avant de montrer le Théorème 4.41, nous avons besoin d'énoncer quelques résultats préliminaires

Lemme 2.5. Soit μ une mesure de Radon bornée positive, alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda D(v) f + \mu & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.29}$$

admet une solution renormalisée.

Démonstration. On procède par approximation. Soit v_n, l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_n = \lambda f D(v_n) + h_n & \text{dans } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.30}$$

où $h_n \in L^\infty(\Omega)$, $\|h_n\|_{L^1} \leq c$ et $h_n \longrightarrow \mu$ au sens des mesures

on affirme que $||v_n||_{L^r(\Omega)} \leq C$ pour tout $r < \dfrac{(p-1)N}{N-p}$ et pour tout $n \geq 1$. Pour démontrer l'affirmation on pose $L_n(x) \equiv \lambda f D(v_n) + h_n$, alors par les résultats obtenus dans [69] on sait que, pour tout $r < \dfrac{(p-1)N}{N-p}$,

$$||v_n||_{L^r(\Omega)} \leq C||L_n||_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.31}$$

Rappelons que $D(s) \leq \varepsilon s^{p-1} + C(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. En choisissant $r > p-1$, on obtient

$$\int_\Omega fD(v_n) \leq \varepsilon \int_\Omega f v_n^{p-1} + C \leq \varepsilon \Big(\int_\Omega v_n^r \Big)^{\frac{p-1}{r}} \Big(\int_\Omega f^{\frac{r}{r-(p-1)}} \Big)^{\frac{r-(p-1)}{r}} + C.$$

Comme $\frac{r}{r-(p-1)} < \frac{N}{p}$, alors

$$\int_\Omega fD(v_n) \leq C\varepsilon ||v_n||_{L^r}^{\frac{p-1}{r}} + C.$$

En combinant cette estimation et (2.31) on obtient l'estimation désirée, et l'affirmation est démontrée.

Alors $||L_n||_{L^1} \leq C$. Par la théorie classique des solutions renormalisées [49], on peut affirmer l'exsitence d'une fonction mesurable v telle que $|\nabla v|^{p-1} \in L^{s_1}(\Omega)$ pour tout $s_1 < \frac{N}{N-1}$, $v^{p-1} \in L^{s_2}(\Omega)$ pour tout $s_2 < \frac{N}{N-p}$, $v_n \to v$ fortement dans $L^{s_2}(\Omega)$ pour tout $s_2 < \frac{N}{N-p}$ et $-\Delta_p v_n \to -\Delta_p v$ au moins dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Et par suite $fD(v_n) \to fD(v)$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et par suite v est une solution renormalisée de (2.29). □

On peut à présent démontrer le Théorème 4.41

Démonstration. du Théorème 4.41

Soit μ une mesure positive bornée de Radon concentrée dans l'ensemble U de p-capacité nulle (on renvoie à l'Introduction de cette thèse pour la définition de la notion de p-capacité) et soit v la solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda D(v) f + \mu & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

v peut aussi être vue comme limite de $\{v_n\}$ solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p v_n = \lambda D(v_n) f + h_n & \text{dans } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.32}$$

où $h_n \in L^\infty(\Omega)$, $\|h_n\|_{L^1} \leq c$ and $h_n \longrightarrow \mu$ au sens des mesures. Alors nécessairement $v_n \geq v_0$ définie plus haut.

Par l'utilisation de $\left(1-\frac{1}{(1+v_n)^\theta}\right)$ $\theta>0$, comme fonction test dans (2.32), on montre que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^p}{(v_n+1)^{\theta+1}}dx \leq C$$

On pose $u_n = H^{-1}(v_n)$, alors

$$-\Delta_p u_n = \frac{|\nabla u_n|^p}{u_n^a} + \lambda f + \frac{h_n}{D(v_n)}.$$

Par les propriètés des solutions renormalisées, on a

$$\frac{|\nabla v_n|^p}{(D(v_n))^{\frac{p}{p-1}}(H^{-1}(v_n))^a} \to \frac{|\nabla v|^p}{(D(v))^{\frac{p}{p-1}}(H^{-1}(v))^a} \text{ fortement dans } L^1_{loc}(\Omega).$$

et par suite

$$\frac{|\nabla u_n|^p}{u_n^a} \to \frac{|\nabla u|^p}{u^a} \text{ fortement dans } L^1_{loc}(\Omega).$$

Donc pour montrer la multiplicité il suffit de démontrer que

$$\frac{h_n}{D(v_n)} \to 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Soit alors U_ϵ un ensemble ouvert, $U\subset U_\epsilon$, tel que $\text{cap}_{1p}(U_\epsilon)<\epsilon$. On procède comme dans [3]. Considérons $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $||\phi||_{W_0^{1,p}}<\epsilon$ et $\phi(x)\geq 1$ si $x\in U_\epsilon$, par l'inégalité de Picone appliquée à v_n on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^p dx \geq \int_\Omega \frac{-\Delta_p v_n}{v_n^{p-1}}|\phi|^p dx \geq \int_\Omega \frac{h_n}{v_n^{p-1}}|\phi|^p dx.$$

Par suite $\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{v_n^{p-1}}dx \leq \varepsilon$. Par les propriètés de D, on conclut que

$$\begin{aligned}\int_{U_\varepsilon}\frac{h_n}{D(v_n)}dx &= \int_{U_\varepsilon\cap\{v_n\leq 1\}}\frac{h_n}{D(v_n)}dx + \int_{U_\varepsilon\cap\{v_n>1\}}\frac{h_n}{D(v_n)}dx \\ &\leq C\int_{U_\varepsilon\cap\{v_n\leq 1\}}\frac{h_n}{v_n^{p-1}}dx + C_2\int_{U_\varepsilon\cap\{v_n>1\}}\frac{h_n}{v_n^{\theta(p-1)}}dx\end{aligned}$$

pour un certain $\theta<1$. On utilise alors l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\int_{U_\varepsilon\cap\{v_n>1\}}\frac{h_n}{v_n^{\theta(p-1)}}dx \leq ||h_n||_{L^1}^{1-\theta}\int_{U_\varepsilon}(\frac{h_n}{v_n^{p-1}}dx)^\theta \leq C\varepsilon^\theta.$$

Ce qui permet de conclure que

$$\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{D(v_n)} dx \leq C_1 \varepsilon + C \varepsilon^\theta.$$

Comme $v_n \geq v_0$ in Ω, alors $D(v_n) \geq C$ dans le support de φ, et par suite

$$\int\limits_{\Omega \setminus U_\varepsilon} \frac{h_n |\varphi|}{D(v_n)} dx \longrightarrow 0$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque 2.1. Dans le cas où $\mu \equiv 0$, alors $v \in L^\infty(\Omega)$, ainsi en revenant à $u \equiv H^{-1}(v)$, on obtient une solution bornée du problème (2.1). De plus, puisque v est unique, on en conclut que dans ce cas le problème (2.1), lui aussi possède une solution bornée unique.

On peut résumer les principaux résultats de ce chapitre dans le tableau suivant :

	f	λ	résultat
$q(\alpha+1) \leq 1$	$\in L^\infty(\Omega)$	quelconque	existence
$q(\alpha+1) > 1$	$\in L^\infty(\Omega)$	suffisamment petit	existence
$q\alpha < -1$	$\in L^1(\Omega)$	quelconque	existence
$-1 \leq q\alpha < 0$	$\in L^1(\Omega)$ vérifiant certaine extra conditions	quelconque	existence

Chapitre 3

Sur un problème elliptique avec poids de Hardy et termes en absorbtion-réaction

Ce chapitre est le développement de l'article [79]

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et la nonexistence de solution du problème

$$(P_\pm)\begin{cases} -\Delta_p u \pm u^q = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $q > p-1$ et h sont des fontions mesurables positives, vérifiant certaines hypothèses qui seront spécifiées ultérieurement. Le but étant d'étudier l'interaction entre le terme u^q, qui sera placé en réaction ou en absorbtion, et le poids de Hardy. Nous avons aussi dans l'esprit de préparer le terrain pour le chapitre suivant.

On peut résumer les résultats obtenus, dans les deux points suivants :

1. Si u^q apparait comme terme de réaction, alors on montre l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda)$, tel que pour $q > q_+$, le problème considéré ne

possède pas de solution distributionnelle positive. Si $q < q_+$ on démontre l'existence de solution, sous des conditions sur h.

2. Si u^q apparait comme terme absorbant, alors on démontre l'existence d'un q_* tel que si $q > q_*$, le problème considéré possède une solution positive pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$. L'optimalité de q_* est démontrée, dans le sens où, si $p-1 < q < q_*$, il y a non existence de solution pour $\lambda > \Lambda_{N,p}$.

Le problème $(P_\pm)$ est étroitement lié à l'inégalité de Hardy-Sobolev

$$\Lambda_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi|^p}{|x|^p}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p\, dx \text{ for all } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$$

où $\Lambda_{N,p} = (\frac{N-p}{p})^p$ est optimale et jamais atteinte, on renvoit le lecteur à [61] pour plus de détail sur le sujet.

Dans le cas où u^q apparait comme terme de réaction (problem (P_-)), alors pour $\lambda > \Lambda_{N,p}$, un résultat de nonexistence est démontré dans [9].

Le cas $p = 2$ et $\lambda \leq \Lambda_{N,2}$ à été traité dans [45], les auteurs y démontrent l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda)$, tel que l'existence de solution n'a lieu que si $q < q_+$.

Si $p \neq 2$ et $q \leq p^* - 1$, Le problème est largement étudié dans la littérature, nous citerons par exemple [4], où est obtenu le comportement exacte de la solution au voisinage de l'origine, et est aussi traité le cas où $\Omega = I\!R^N$.

Dans le cas où u^q apparait comme terme absorbant, alors si $\lambda = 0$, l'existence et l'unicité d'une solution entropique est obtenue dans [41]. Si $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$ et $h \in L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega)$, alors l'existence d'une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est obtenue, par l'utilisation de techniques variationnelles. Les auteurs démontrent que pour tout $h \in L^1(\Omega)$, il existe au moins une solution au sens des distributions. La régularité de la solution est obtenue en fonction de celle de h et en fonction de la valeur de γ.

Lorsque $\lambda > 0$, la situation est un peu différente, en particulier dans le cas où $\gamma = 0$ and $p = 2$, une condition supplémentaire sur l'intégrabilité de h au voisinage de l'origine est à imposer, pour assurer l'existence d'une solution distributionnelle ; on renvoit à [10] pour une plus ample discussion sur ce cas.

Le problem (P_{-}) peut aussi être considéré, comme le cas stationnaire associé au problème parabolique suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - \Delta_p u &=& \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + f,\ \ u \geq 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &=& 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &=& u_0(x), \ \ x \in \Omega, \end{array}\right.$$

problème auquel est consacré le chapitre 4 de cette thèse, et un article en préparation [8].

Comme précédemment, lorsqu'on considère des données dans L^1, on est amené à utiliser le concept de solution dans un sens faible, on rappelle les définitions suivantes :

Définition 3.1. On dit que u est une solution distributionnelle du problème $(P_{\pm})$ si $|\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, u^q, h \in L^1_{loc}(\Omega)$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle dx = \int_{\Omega} \Big(\lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} \pm u^q + h \Big) \phi dx. \tag{3.1}$$

Dans le cas où $\lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, u^q, h \in L^1(\Omega)$ on utilisera la notion de solution entropique.

Pour $k > 0$, on pose

$$T_k(s) = \left\{ \begin{array}{ll} s\,, & \text{si } |s| \leq k\,; \\ k\frac{s}{|s|}\,, & \text{si } |s| > k\,; \end{array}\right.$$

et $G_k(s) = s - T_k(s)$, on rappelle alors la définition :

Définition 3.2. Soit u une fonction mesurable, on dit que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ si $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Soit $F \in L^1(\Omega)$, alors $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution entropique de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = F \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{array}\right. \tag{3.2}$$

si pour tout $k > 0$ et tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla(T_k(u-v))\rangle dx = \int_\Omega F\, T_k(u-v)dx. \tag{3.3}$$

Ainsi on dira que u est une solution entropique du problème $(P\pm)$ si $\lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, u^q, h \in L^1(\Omega), |\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$ et la définition précédente à lieu pour $F(x) \equiv \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} \pm u^q + h$. On renvoie à [30] pour un exposé plus détaillé à ce sujet.

On rappelle le résultat d'existence suivant, obtenu dans [30].

Théorème 3.1. Supposons que $1 < p$ et $F \in L^1(\Omega)$. Soit $\{f_n\}_n \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to F$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Considérons $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = f_n \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors il existe $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ telle que u est l'unique solution entropique de (3.2), $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_n^{p-1} \to u^{p-1}$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-2}$ et $|\nabla u_n|^{p-1} \to |\nabla u|^{p-1}$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.

Ce chapitre est organisé comme suit ; la Section 3.2 est consacrée au problème (P_-). Dans la sousection 3.2.1 on démontre l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda)$, tel que un résultat de nonexistence à lieu pour $q > q_+(\lambda)$. Comme conséquence on démontre un résultat de "Blow-up" pour des problèmes approximants.

Le cas $q < q_+(\lambda)$ est étudié dans la sous section 3.2.2, sous certaines hypothèses sur h, on montre que le problème (P_-) possède une solution positive. Ce qui indique l'optimalité de $q_+(\lambda)$.

Le cas du terme absorbant, est considéré dans la Section 3.3, on montre l'existence d'un exposant q_* tel que si $q > q_*$, le problème (P_+) possède une solution entropique pour tout $\lambda > 0$ et $h \in L^1(\Omega)$.

Il est à noter que en l'absence du terme u^q, l'existence de solution à lieu si et seulement si $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$ avec de fortes conditions sur h. Ceci démontre l'effet conséquent du terme absorbant u^q.

L'optimalité de q_* est établie en démontrant que si $q < q_+$, alors pour $\lambda > \Lambda_{N,p}$, le problème (P_+) ne possède pas de solution positive. Quelque éventuelles extensions sont présentées en fin de section.

3.2 Problème avec terme de réaction

Dans cette section on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, avec $N \geq 3$, $1 < p < N$ et $q > p - 1$.

Considérons tout d'abord l'équation :

$$-\Delta_p w = \lambda \frac{w^{p-1}}{|x|^p}. \tag{3.5}$$

En posant $w(x) = C\,|x|^{-\alpha}$, il en résulte que

$$\frac{-1}{r^{N-1}} \left(|w'|^{p-2}\, w' r^{N-1}\right)' = \lambda w^{p-1} r^{-p}.$$

Ainsi, on obtient l'équation algébrique

$$D(\alpha) \equiv (p-1)\,\alpha^p - (N-p)\,\alpha^{p-1} + \lambda = 0 \tag{3.6}$$

Sous l'hypothèse $\lambda < \Lambda_{N,p} \equiv \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$, l'équation (3.6) possède exactement deux solutions $\alpha_1 < \frac{N-p}{p} < \alpha_2$ (pour le détail des calculs, on renvoie le lecteur à [4]).

Comme $\lambda > 0$, par le principe de maximum fort et un bon choix de fonction de comparaison, on arrive à démontrer que $w(x) \to \infty$ quand $|x| \to 0$. Le résultat suivant donne un résultat plus précis sur le comportement de toutes sur-solution de (3.4) au voisinage de l'origine, la preuve en est donnée dans [4].

Lemme 3.1. Supposons que $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ est une sursolution positive de (3.5), alors si $u \not\equiv 0$, il existe une constante positive C, et une "petite" boule $B_\eta(0) \subset\subset \Omega$

telles que

$$u \geq C|x|^{-\alpha_1} \text{ dans } B_\eta(0) \tag{3.7}$$

où α_1 est défini plus haut.

3.2.1 Résultat de non existence ; l'exposant optimal

Supposons que $\lambda < \Lambda_{N,p}$, on recherche les solutions radiales de l'équation elliptique

$$-\Delta_p w = \lambda \frac{w^{p-1}}{|x|^p} + w^q, \ \ x \in I\!R^N. \tag{3.8}$$

Alors en posant $w(x) = |x|^{-\alpha}$, il en découle que

$$((p-1)\,\alpha^p - (N-p)\,\alpha^{p-1} - \lambda) r^{-\alpha(p-1)-p} = r^{-\alpha q} \tag{3.9}$$

par identification, on obtient que $\alpha = \dfrac{p}{1+q-p}$, $q > p-1$, et $\alpha < \dfrac{N-p}{p-1}$.
Comme $\dfrac{w^{p-1}}{|x|^p} \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $w^q \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors par les résultats du Lemme 3.1 il découle que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, ce qui est équivalent à

$$\frac{p}{\alpha_2} + p - 1 < q < \frac{p}{\alpha_1} + p - 1, \tag{3.10}$$

On pose

$$q_+(\lambda) \equiv \frac{p}{\alpha_1} + p - 1 \text{ et } q_-(\lambda) \equiv \frac{p}{\alpha_2} + p - 1, \tag{3.11}$$

ainsi

$$p - 1 < q_-(\lambda) < p^* - 1 < q_+(\lambda).$$

avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
comme en est en présence d'une équation avec second membre dans L^1, alors on utilisera le concept de solution entropique introduit dans la Définition 3.2
Nous sommes à présent prêt à enoncer et à démontrer le résultat de non existence.

Théorème 3.2. Supposons que $q > q_+(\lambda) \equiv \left((p-1) + \frac{p}{\alpha_1}\right)$. Alors pour tout

$\lambda > 0$, le problème (3.4) ne possède aucune solution (entropique) positive.

Pour démontrer ce théorème ; on aura recours à l'inégalité de Picone [19], déja énoncée plus haut, et que l'on rappelle ici dans une autre version

Théorème 3.3. (Picone inequality) Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $-\Delta_p v \gneqq 0$ est une mesure de Radon bornée $v \gneqq 0$, alors pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega (\frac{|u|^p}{v^{p-1}})(-\Delta_p v) dx.$$

Preuve du Théorème 3.2

Si $\lambda > \Lambda_{N,p}$, alors la nonexistence de solution est démontrée dans [9]. Considérons donc le cas $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$.

On procède par l'absurde. Soit u une solution entropique de (3.4), alors par un argument d'approximation comme dans [9], on obtient l'existence d'une solution entropique minimale, obtenue comme limite d'une suite de solution de problèmes approximants. On note u cette solution minimale. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_r(0))$, alors l'inégalité de Picone du Théorème 3.3 appliquée à u, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)} |\nabla \varphi|^p \, dx &\geq \int_{B_r(0)} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi|^p \, dx \geq \lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx + \int_{B_r(0)} u^{q-p+1} |\varphi|^p \, dx \\ &\geq \lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx + \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^{\alpha_1(q-p+1)}} dx.\end{aligned}$$

Si $q > q_+(\lambda)$, alors $\alpha_1 (q - p + 1) > p$, on arrive ainsi à une contradiction avec l'inégalité de Hardy, et la non existence de solution découle. $\square$

Remarque 3.1. Comme les arguments utilisés dans la démonstration précédente, sont des arguments locaux, on en conclut que le problème (3.4), ne possède aucune sur-solution non triviale, dans le sens $\lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \in L^1_{loc}(\Omega)$ en n'importe quel domaine contenant l'origine.

Théorème 3.4. Supposons que $g : I\!R \to [0, \infty)$ est une fonction continue telle que $g(s) > 0$ si $s > 0$ et

$$\liminf_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s^q} = c > 0 \text{ pour un certain } q > q_+(\lambda).$$

alors on a les résultats suivants :

1. Si $g(0) = 0$, alors l'unique solution entropique du problème

$$-\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + g(u), \text{ dans } \Omega, u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{3.12}$$

   est $u = 0$.

2. Si $g(0) > 0$ alors le problème (3.12), n'admet aucune solution entropique positive.

comme conséquence on a le résultat de Blow-up suivant.

Théorème 3.5. Fixons $q > q_+(\lambda)$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$. Posons $a_n(x) = \min\{n, \frac{1}{|x|^p}\}$, $D_n(s) = \min\{n, s^q\}$, $s \geq 0$.
Soit $\{h_n\}_n \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $h_n \geq 0$ et $h_n \uparrow h \in L^1(\Omega)$. Et soit u_n la solutions minimale du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda a_n(x) u_n^{p-1} + g_n(u_n) + h_n \text{ dans } \Omega, \\ u_n \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Alors $u_n(x) \to \infty$ quand $n \to \infty$ uniformément en $x \in \Omega$

Commençons par rappeler le Lemme introduit dans [9], qui sera essentiel dans la démonstration de 3.5.

Lemme 3.2. Soit w l'unique solution positive dans l'espace d'energie du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = f \text{ dans } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

où $f \in L^\infty(\Omega)$ et $f \geq 0$. Alors pour toute boule $B_r \subset \Omega$ telle que $\overline{B}_{4r} \subset \Omega$, il existe une constante positive $c = c(r, N, p)$ telle que,

$$\frac{u^{p-1}(x)}{(d(x, \partial\Omega))^{p-1}} \geq c \int_{B_{2r}} f(y)dy \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{3.15}$$

Preuve du Théorème (3.5).

Comme $\lambda < \Lambda_{N,p}$, il existe une solution minimale dans l'espace d'energie $u_n \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.13). Par le fait que $\lambda a_n(x) u_n^{p-1} + g_n(u_n) + h_n$ est décroissante en n, alors on conclut que $\{u_n\}_n$ est croissante en n.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \Omega$, tel que $\sup_n u_n(x_0) = c_0 < \infty$, alors par le Lemme (3.2) pour une boule satisfaisant à $0 \in B_{2r} \subset \Omega$, on obtient que

$$\int_{B_r} (\lambda a_n(x) u_n^{p-1} + g_n(u_n) + h_n) dx \leq c_1 \text{ pour tout } n.$$

Comme $F_n(x) := \lambda a_n(x) u_n^{p-1} + g_n(u_n) + h_n$ est croissante, on obtient que $F_n \to w$, $n \to \infty$ dans $L^1(B_{2r})$ vers $w \geq 0$. En initialisant $v_0 = 0$, on définit la suite,

$$\begin{cases} -\Delta_p v_{n+1} = \lambda a_{n+1}(x) v_n^{p-1} + g_n(v_n) + h_n \text{ dans } B_r, \\ v_{n+1}|_{\partial B_r} = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Comme $\lambda a_n(x) s^{p-1} + g_n(s) + h_n$ est croissante en n, par comparaison on obtient que $v_n \leq v_{n+1}$.

On affirme alors que, $v_n \leq u_n$ dans $B_r(0)$ pour tout $n \in I\!N$.

En effet, pour démontrer l'affirmation précédente, nous allons utiliser la récurrence. On a $-\Delta_p v_1 = h_1 \leq -\Delta_p u_1$ et puisque $u_1|_{\partial B_r} > 0 = v_1|_{\partial B_r}$ on conclut que $v_1 \leq u_1$. Supposons que $v_n \leq u_n$. Rappelons que $u_n \leq u_{n+1}$, alors par le fait que

$$\lambda a_{n+1}(x) v_n^{p-1} + g_n(v_n) + h_n \leq a_{n+1}(x) u_{n+1}^{p-1} + g_n(u_{n+1}) + h_{n+1},$$

on arrive à montrer que

$$-\Delta_p v_{n+1} \leq -\Delta_p u_{n+1} \text{ et } u_{n+1} \geq v_{n+1} \text{ sur } \partial B_r.$$

Donc $v_{n+1} \leq u_{n+1}$ et l'affirmation est démontrée.

De plus nous avons que

$$\int_{B_r} |\nabla T_k(v_n)|^p dx \leq k \int_{B_r} \Big(a_{n+1}(x) u_{n+1}^{p-1} + g_n(u_{n+1}) + h_{n+1} \Big) dx \leq ck,$$

il en découle que $T_k(v_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(B_r)$ pour tout $k > 0$. Donc

$T_k(v_n) \rightharpoonup T_k(v)$ faiblement dans $W_0^{1,p}(B_r)$

Comme $\{T_k(v_n)\}_n$ est croissante en n, par une légère modification des arguments de compacité de [30] on arrive à démontrer que $T_k(v_n) \to T_k(v)$ fortement dans $W_0^{1,p}(B_r)$. Ainsi, v est une solution entropique de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda \dfrac{v^{p-1}}{|x|^p} + v^q + h \text{ dans } B_r, \\ v \geq 0 \text{ dans } B_r \text{ et } v \neq 0, \\ v|_{\partial Br} = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

avec $q > q_+(\lambda)$. ce qui est en contradiction avec le résultat de non existence du Théorème (3.2).

Donc pour tout $x_0 \in \Omega$, $u_n(x_0) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et la preuve est achevée. □

3.2.2 Résultat d'existence pour $q < q_+(\lambda)$.

Pour parachever l'optimalité de l'exposant $q_+(\lambda)$ nous allons démontrer le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.6. Supposons que $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$ et que $q < q_+(\lambda)$, alors

1. Si $q < p^* - 1$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$, alors pour $h \equiv 0$, le problème (3.4) possède une solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Si $q < p^* - 1$ et $\lambda = \Lambda_{N,p}$, alors pour $h \equiv 0$, le problème (3.4) possède une solution positive $u \in W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < p$.
3. Si $p^* - 1 \leq q < q_+(\lambda)$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$, alors il existe une constante positive c telle que si $h(x) \leq \frac{c}{|x|^p}$, alors le problème (3.4)possède une solution entropique positive u telle que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

Démonstration. Nous allons séparer la démonstration en plusieurs étapes :

Premier cas : $q < p^* - 1$ ***et*** $\lambda < \Lambda_{N,p}$.

Dans ce cas, le problème (3.4) possède une structure variationnelle, dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors on peut obtenir une solution, en cherchant les points critiques de la fonctionnelle :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx.$$

Par application directe du théorème de Mountain-Pass [21], on obtient l'existence de solution positive.

Deuxième cas $q < p^* - 1$ ***et*** $\lambda = \Lambda_{N,p}$**.**

Pour obtenir l'existence de solution sans ce cas, on utilise l'inégalité de Hardy-Sobolev "améliorée" suivante, obtenue dans [14] ; pour chaque $s < p$, il existe une constante positive $C \equiv C(N,p,s,\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (|\nabla u|^p - \Lambda_{N,p}\frac{|u|^p}{|x|^p})dx \geq C\|u\|^p_{W_0^{1,s}(\Omega)} \text{ pour tout } u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{3.18}$$

Soit à présent $\{\lambda_n\}_n$ une suite réelle, strictement croissante, telle que $\lambda_n \uparrow \Lambda_{N,p}$ quand $n \to \infty$. Par l'étude dans le premier cas, on sait que le prblème

$$-\Delta_p u_n = \lambda_n \frac{u_n^{p-1}}{|x|^p} + u_n^q, \text{ dans } \Omega, u_n \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.19}$$

possède bien une solution positive u_n obtenue par l'utilisation du théorème de Mountain-Pass [21]. Observons que

$$J_{\lambda_n}(u_n) = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1})\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^p}\,dx\Big) \equiv C_n$$

où

$$C_n = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_n}(\gamma(t))$$

avec

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = v\}$$

et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega v_+^{q+1}\,dx << 0.$$

il est clair alors que $J_{\lambda_n}(v) << 0$ uniformément pour $\lambda_n \in [0, \Lambda_{N,p}]$. Soit $\gamma(t) = tv$, alors $\gamma \in \Gamma$, donc

$$C_n \leq \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_n}(tv) \leq A,$$

où

$$A = \max_{t\in[0,1]}(\frac{t^p}{p}\int |\nabla v|^p dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int v_+^{q+1} dx).$$

On en conclut que $(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1})\Big(\int |\nabla u_n|^p\, dx - \frac{\lambda}{p}\int \frac{|u_n|^p}{|x|^p}\, dx\Big) \leq A.$

En utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev "améliorée" (3.18), il découle que $\|u_n\|^p_{W_0^{1,s}(\Omega)} \leq C$ pour tout $s < p$ et pour tout $n \geq 1$.

Comme $q + 1 < p^*$, on obtient l'existence de $1 < s_0 < p$, tel que $q + 1 < s_0^* \equiv \dfrac{s_0 N}{N - s_0}$. Fixons s_0 de sorte à obtenir l'estimation précédente, ainsi $\|u_n\|^p_{W_0^{1,s_0}(\Omega)} \leq C$. De la même manière et en utilisant (3.18), on obtient l'existence d'une constante positive a, telle que $J_{\lambda_n}(u_n) \geq a$; ceci découle du fait que $a^p - Ca^{q+1} > 0$ si a est suffisamment "petit".

Ainsi nous obtenons l'existence de $u_0 \in W_0^{1,s_0}(\Omega)$, telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,s_0}(\Omega)$ et $u_n \to u$ fortement dans $L^{q+1}(\Omega)$.

Comme $J_{\lambda_n}(u_n) = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1})\int_\Omega (u_n)_+^{q+1}\, dx \to (\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1})\int_\Omega (u_0)_+^{q+1}\, dx$, alors $u_0 \gneqq 0$ et u_0 résolvent

$$-\Delta_p u_n = \Lambda_{N,p}\frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q, \text{ dans } \Omega, u_n \in W_0^{1,s_0}(\Omega)$$

au moins au sens des distributions. Il est alors clair que, par le calcul précédent que $u_0 \in W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < p$. Et l'existence de solution est démontrée. ***Troisième cas*** $q_-(\lambda) \leq q < q_+(\lambda)$ ***et*** $\lambda < \Lambda_{N,p}$. Rappelons que $p - 1 < q_-(\lambda) < p^* - 1 < q_+(\lambda)$. Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset\subset B_R(0)$, alors par un argument de dilatation, et sans perte de généralité, on peut toujours supposer que $R = 1$. Supposons aussi que $h(x) \leq \dfrac{c}{|x|^p}$, où $c > 0$ sera choisit ultérieurement. Par un argument de continuité, on obtient l'existence de $\lambda_1 > \lambda$ tel que $q_-(\lambda_1) < q < q_+(\lambda_1)$. Posons $w(x) = |x|^{-\alpha} - 1$ pour $x \in B_1(0)$, avec $\alpha = \dfrac{p}{q - (p-1)}$, alors

$\dfrac{w^{p-1}}{|x|^p} + w^q \in L^1(B_1(0))$ et w est solution de

$$-\Delta_p w = \lambda_1 \frac{(w+1)^{p-1}}{|x|^p} + (w+1)^q \text{ dans } \mathcal{D}'(B_1(0)).$$

Dû à l'hypothèse $\lambda < \lambda_1$, on obtient l'existence d'une constante positive $c_1 > 0$ telle que

$$\lambda_1 \frac{(w+1)^{p-1}}{|x|^p} \geq \lambda \frac{w^{p-1}}{|x|^p} + \frac{c_1}{|x|^p}.$$

En choisissant $c \leq c_1$, alors on obtient une sur solution du problème (3.4). Par des arguments de monotonie on obtient l'existence de solution. □

3.3 Problème avec terme absorbant

Dans cette section, on se penche sur l'existence de solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^q = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

Théorème 3.7. Supposons que $q > q_* \equiv \frac{N(p-1)}{N-p}$, alors pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$, le problème (3.20) possède une solution entropique minimale positive

Nous ferons appel, au principe de comparaison (déja cité en amont) introduit dans [9] :

Démonstration. Soit $h_n \equiv T_n(h)$ et $a_n(x) = \frac{1}{|x|^p + \frac{1}{n}}$. Par un argument de sou-sur solution, on obtient l'existence d'une solution positive unique du problème

$$-\Delta_p w_n + w_n^q = h_n, w_n \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La positivité de w_n est une conséquence du principe de maximum fort introduit dans [95], l'unicité quant à elle, est une conséquence du principe de comparaison 1.1.

On affirme que le problème approximant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + u_n^q = \lambda a_n(x) T_n(u_n^{p-1}) + h_n, \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_n \geq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

possède une solution positive unique u_n, telle que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. En effet, commençons par montrer l'existence. Definissons v_n comme étant l'unique solution de

$$-\Delta_p v_n = \lambda a_n(x) n + h_n, v_n \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

alors v_n est une sur solution du problème (3.21). Comme $\underline{u} \equiv 0$ est une sous solution pour le problème (3.21), alors par itération, on obtient l'existence de solution u_n telle que $u_n \leq v_n$. La positivité de u_n découle du principe de maximum de Vazquez [95]. Pour obtenir l'unicité, on utilisera le Lemme 1.1. Soit $D_n(x,s) \equiv \lambda a_n(x) T_n(s^{p-1}) + h_n(x) - s^q$, $s \geq 0$, alors en remarquant que pour tout $s > 0$, $\dfrac{D_n(x,s)}{s^{p-1}}$ est une fonction décroissante, alors l'unicité en découle. Par le fait que $D_n(x,s) \leq D_{n+1}(x,s)$, il en découle que u_{n+1} est une sur solution de (3.21), ainsi $u_n \leq u_{n+1}$ et l'affirmation est démontrée.

Soit $k > 0$ fixé, utilisons $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.20) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla T_k u_n|^p \, dx + \int_\Omega u_n^q T_k u_n \, dx \\ &= \lambda \int_\Omega a_n(x)\, T_n(u_n^{p-1}) T_k(u_n) dx + \int_\Omega h_n(x) T_k u_n \, dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder on arrive à

$$\lambda \int_\Omega a_n(x)\, T_n(u_n^{p-1}) dx \leq \lambda \Big(\int_\Omega u_n^q dx \Big)^{\frac{p-1}{q}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\frac{pq}{q-(p-1)}}} dx \Big)^{\frac{q-(p-1)}{q}}.$$

Rappelons que $q > \frac{N(p-1)}{N-p}$, alors $\frac{pq}{q-(p-1)} < N$, et donc

$$\lambda \int_\Omega a_n(x)\, T_n(u_n^{p-1}) T_k(u_n) dx \leq C\lambda \Big(\int_\Omega u_n^q dx \Big)^{\frac{p-1}{q}}.$$

Par suite

$$\int_\Omega |\nabla T_k u_n|^p \, dx + \int_\Omega u_n^q T_k u_n \, dx \le Ck\lambda \Big(\int_\Omega u_n^q dx \Big)^{\frac{p-1}{q}} + k||h||_{L^1}.$$

En observant que

$$\int_\Omega u_n^q T_k u_n \, dx \ge \int_\Omega u_n^q \, dx - C(k).$$

Alors

$$\int_\Omega |\nabla T_k u_n|^p \, dx + \int_\Omega u_n^q \, dx \le C(k, \lambda, ||h||_{L^1}).$$

Ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_n^q \, dx &\le C \text{ uniformément en n,} \\ \int_\Omega a_n(x) \, T_n(u_n^{p-1}) \, dx &\le C \text{ uniformément en n.} \end{aligned}$$

Par la monotonie de la suite $\{u_n\}_n$, on obtient l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n^q \uparrow u^q$ et $a_n(x) \, T_n(u_n^{p-1}) \uparrow \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

En posant $f_n = a_n(x) \, T_n(u_n^{p-1}) - u_n^q$, alors $f_n \to f \equiv \frac{u^{p-1}}{|x|^p} - u^q$ fortement dans $L^1(\Omega)$. En suivant la même démarche que dans [30], on obtient que u est une solution entropique de (3.20). Il est alors aisé de démontrer que si v est une autre solution entropique positive de (3.20), alors $v \ge u_n$ pour tout $n \ge 0$, et donc $v \ge u$. □

Pour montrer l'optimalité des conditions du théorème 3.7, on énonce le résultat suivant :

Théorème 3.8. Supposons que $p - 1 < q < q_*$. Si $\lambda > \Lambda_{N,p}$, alors le problème (3.20) ne possède pas de sursolution faible, dans le sens que u^q, $\dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, |\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$ et

$$\int \Big((-\Delta_p u)\phi + |u|^q \phi \Big) dx \ge \lambda \int \frac{u^{p-1} \, \phi}{|x|^p} dx + \int h(x) \phi \, dx, \ \text{ pour toute } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut toujours supposer que $h \in L^\infty(\Omega)$. On procède par l'absurde. Supposons que pour un certain $\lambda > \Lambda_{N,p}$, le problème (3.20) possède une solution faible u, dans le sens défini dans le théorème précédent. Soit Ω_1 un domaine régulier tel que $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, alors u est une sur solution pour le problème (3.20) dans Ω_1. Ainsi, par itération, on obtient l'existence de u_1, la solution entropique positive minimale de (3.20) dans Ω_1. Il est clair que $u_1^{p-1} \in L^s(\Omega_1)$ pour tout $s < \frac{N}{N-p}$.

Soit $B_\eta(0) \subset\subset \Omega_1$ où η est un constante suffisamment petite, que sera choisit ultérieurement. Considérons $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\eta(0))$, comme $u_1 > 0$ dans $B_\eta(0)$, par l'inégalité de Picone, on obtient

$$\int_{B_\eta(0)} |\nabla \phi|^p dx \geq \lambda \int_{B_\eta(0)} \frac{|\phi|^p}{|x|^p}\, dx - \int_{B_\eta(0)} u_1^{q-(p-1)} |\phi|^p. \tag{3.22}$$

Comme $q < q_*$, alors $(q-(p-1))\frac{p^*}{p^*-p} < \frac{N(p-1)}{N-p}$, Par l'application successive de l'inégalité de Hölder et de Sobolev, on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_{B_\eta(0)} u^{q-(p-1)} |\phi|^p dx &\leq \left(\int_{B_\eta(0)} |\phi|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{B_\eta(0)} u^{(q-(p-1))\frac{p^*}{p^*-p}} dx\right)^{\frac{p^*-p}{p}} \\
&\leq S^{-1} \int_{B_\eta(0)} |\nabla \phi|^p dx \left(\int_{B_\eta(0)} u^{(q-(p-1))\frac{p^*}{p^*-p}} dx\right)^{\frac{p^*-p}{p}}.
\end{aligned}$$

Par le fait que $(q-(p-1))\frac{p^*}{p^*-p} < \frac{N(p-1)}{N-p}$, on obtient que

$$\lim_{r\to 0} \int_{B_\eta(0)} u^{(q-(p-1))\frac{p^*}{p^*-p}} dx = 0.$$

Comme $\lambda > \Lambda_{N,p}$, on obtient l'existence de $\varepsilon > 0$, tel que par un choix judicieux de η on obtient

$$\frac{\lambda}{1 + S^{-1}\left(\int_{B_\eta(0)} u^{(q-(p-1))\frac{p^*}{p^*-p}} dx\right)^{\frac{p^*-p}{p}}} \geq \Lambda_{N,p} + \varepsilon.$$

Ainsi, de retour à (3.22) on obtient

$$\int_{B_\eta(0)} |\nabla \phi|^p dx \geq (\Lambda_{N,p} + \varepsilon) \int_{B_\eta(0)} \frac{|\phi|^p}{|x|^p}\, dx$$

ce qui contredit l'inégalité de Hardy. $\square$

Remarque 3.2. Fixons $q > p-1$ et soit g une fonction mesurable telle que

$g \geq 0$ et $g^{\frac{q}{q-(p-1)}} \in L^1(\Omega)$, alors par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 3.7, on arrive à montrer que

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^q &= \lambda g(x)u + h(x) \text{ dans } \Omega, \\ u &> 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

Possède une solution entropique positive, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$. Dans ce cas on dira que g est un *poids admissible* relativement au problème (3.23).

On peut résumer les principaux résultats de ce chapitre dans le tableau suivant :

	u^q	h	résultat
$q > q_+$	réaction	quelleconque	non-existence
$q < q_+$	réaction	vérifiant certaines conditions	existence
$q > q_*$	absorbant	quelleconque	existence
$q > q_*$	absorbant	quelleconque	non-existence

Chapitre 4

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Ce chapitre est consacré à l'étude des problèmes paraboliques du type

$$\begin{cases} (u^\theta)_t - \Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + f(x,t) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u \geq 0 \text{ et } u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où θ est soit 1 ou $(p-1)$, $N \geq 3$, $\Omega \subset I\!\!R^N$ est un ouvert borné régulier tel que $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $q > 0$ et $u_0 \geq 0$, $f \geq 0$ vérifiant des hypthèses qui seront spécifiées plus bas.

Le but étant l'étude des conditions d'existence et de nonexistence et le phénomène de blow-up en connection avec l'inégalité de Harnack faible.

Notons que par homogénéité, lorsque $\theta = p-1$, l'opérateur principal $(u^{p-1})_t - \Delta_p u$, vérifie une inégalité de Harnack classique (see [72]). Ainsi le comportement de cet opérateur reste similaire au cas linéaire de l'équation de la chaleur. Nous montrerons l'existence d'un exposant de Fujita dans le cas général $\lambda \geq 0$.

Lorsque $\theta = 1$, le comportement de l'opérateur principal dépend des deux cas $p < 2$ ou $p > 2$.

1. Dans le cas où $p > 2$ et $\lambda > 0$, et sous des conditions convenables sur u_0 et f, on démontre l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda)$ tel que si $q > q(\lambda)$, aucune solution - dans un sens convenable- n'existe. ce qui marque la différence avec le cas $\lambda = 0$.

2. Si $p < 2$, nous obetenons un résultat d'existence et même dans certains cas l'extinction en temps fini pour tout $\lambda > 0$.

Ces résultats font suite à ceux obtenus dans [61] et [17].

où Ω est soit un domaine régulier borné contenant l'origine ou $\Omega = I\!R^N$, $1 < p < N$, $q > 0$ et θ est soit égal à 1 ou égal à $p - 1$.
f et u_0 sont des fonctions positives telles que $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$. Vu la présence du poids de Hardy , ces problèmes sont étroitement liés à l'inégalité de Hardy, présentée en introduction et au chapitre précédent.
Le cas $p = 2$, avec un problème considéré sans le terme de réaction u^q, est largement et complètement traité dans [25] où les auteurs montrent l'existence et la non existence de solutions selon que $\lambda \leq \Lambda_N$ ou $\lambda > \Lambda_N$. Le problème considéré lorsque $\lambda > 0$, en présence du terme de réaction u^q, est traité dans [14] ; les auteurs y prouvent l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda)$ dépendant uniquement de λ et tel que le problème n'admet de solution si et seulement si $q < q_+(\lambda)$. Le résultat d'existence d'un exposant du type Fujita y est aussi démontré.

Le cas $p \neq 2$ et $\theta = 1$ fut traité par différents auteurs. Le cas $\lambda > 0$ et $\theta = 1$ est traité dans [61] où le problème est complètement analysé mais dans l'absence du terme de réaction. Dans [17], sous la condition $p < \frac{2N}{N+2}$ et des hypthèses spécifiques sur f and u_0, les auteurs y démontrent aussi l'existence de solution pour tout $\lambda > 0$. L'intervalle d'existence de p pour qu'une extinction en temps fini est aussi obtenu. L'extension de ces résultats dans le cas ou le poids de Hardy est remplacé par des poids de Caffarelli-Khon-Nirenberg est traité dans [48].

Pour $\theta \neq 1$ et $\lambda = 0$, on renvoie le lecteur à [55] où le cas unidimensionnel et sans terme de réaction est étudié.

Pour $\theta = p - 1$ L'inégalité de Harnack classique est obtenue dans [72] pour l'équation homogène. Cette propriètè sera largement utiliseé par la suite et sera d'une grande utilité dans notre travail.

Le cas elliptique avec $p = 2$ est étudié dans [45], où les auteurs arrivent à démontrer l'existence d'un exposant critique $q(\lambda)$ au dela duquel aucune solution ditributionnelle positive n'existe. Le même résultat reste valable dans le cas semilinéaire parabolique et avec le même exposant critique, résultat démontré dans [14]. L'extension de ces résultats au cas du p-laplacien s'avère être plus compliquée ceci étant du à l'absence d'une inégalité de Harnack classique mais aussi à l'aspect nonlineaire et non homogène du problème traité, pour pallier à ces difficultés nous nous inspirerons des idées utilisées dans [61].

Rappelons tout d'abord quelques notions et définitions de solutions qui seront utilisées par la suite

Définition 4.1. On dira que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega \times (0,T))$ ssi $T_k(u) \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$ avec $T_k(u)$ est la troncature définie comme précédemment par

$$T_k(u) = \begin{cases} u \text{ si } |u| < k. \\ k\dfrac{u}{|u|} \text{ si } |u| \geq k. \end{cases}$$

Définition 4.2. Soient f, u_0 deux fonctions positives telles que $f \in L^1(\Omega \times (0,T))$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$. Une fonction $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ est une solution au sens d'entropie ou solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

si $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega \times (0,T))$ et

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Theta_k(u-v)(T) + \int_0^T \langle v_t, T_k(u-v)\rangle + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla(T_k(u-v))\rangle \\ &= \int_\Omega \Theta_k(u_0 - v(0)) + \int_\Omega \int_0^T f T_k(u-v), \end{aligned} \tag{4.3}$$

pour tout $k > 0$ et pour chaque $v \in L^p((0,T), W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty([0,T] \times \Omega) \cap$

$C([0,T];L^1(\Omega))$ où
$$\Theta_k(s)=\int_0^s T_k(t)dt.$$
il est à noter que
$$\int_\Omega u_tT_k(u)dx=\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \Theta(u)dx\right)$$
$$\int_\Omega \Theta_k(u(t))dx-\int_\Omega \Theta_k(u(0))dx=\int_0^t\int_\Omega u_tT_k(u)dxdt.$$
Le théorème suivant est démontré dans [35], voir aussi [87].

Théorème 4.1. Soit Ω un domaine régulier borné, $f\in L^1(\Omega\times(0,T))$, $u_0\in L^1(\Omega)$, alors le problème (4.2) possède une solution unique au sens d'entropie $u\in C([0,T],L^1(\Omega))$.

L'utilisation de la monotonie de l'opérateur permet d'obtenir le principe de comparaison suivant

Lemme 4.1. Soient u, v deux solutions entropiques de (4.2) avec les données respectives f,u_0 et g,v_0 ; telles que $0\le g\le f$ et $v_0\le u_0$, alors $0\le u\le v$.

4.1 Etude du problème doublement nonlinéaire

Dans cette section nous nous penchons sur l'étude du problème dit doublement nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases}\left(u^{p-1}\right)_t-\Delta_p u &= \lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}+u^q \text{ dans } \Omega\times(0,T)\,,\\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega\times(0,T)\,,\\ u\left(x,0\right) &= u_0\left(x\right) \text{ dans } \Omega,\\ \end{cases}\tag{4.4}$$

with $\lambda<\left(\frac{N-p}{p}\right)^p=\Lambda$. L'origine de l'appélation est évidente vu que l'opérateur principal $\left(u^{p-1}\right)_t-\Delta_p u$ présente une nonlinéarité en la dérivée temporelle et une non linéarité en l'opérateur p-laplacien, bien qu'il puisse parraître inabordable de prime abord, cet opérateur possède deux qualité et pas des moindres ; en effet par [72] on sait que $\left(u^{p-1}\right)_t-\Delta_p u$ vérifie une inégalité de Harnack classique, mais aussi il est clair que l'opérateur en question est homogène.

Lemme 4.2 (Inégalité de Harnack). Soit u supersolution faible et positive de $(u^{p-1})_t - \Delta_p u = 0$ dans $R = B_\delta(x_0) \times (t_0 - \beta, t_0 + \beta) \subset \Omega \times (0,T)$. Alors il existe une constante positive $C = C(N, \delta, t_0, \beta)$ telle que

$$\int_{R^-} u \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{R^+} u,$$

avec $R^- = B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \times (t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta)$ et $R^+ = B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \times (t_0 + \frac{1}{4}\beta, t_0 + \beta)$.

Commençons par analyser le cas où $\lambda = 0$, soit donc l'équation

$$\left(u^{p-1}\right)_t - \Delta_p u = 0 \text{ dans } I\!R^N, \tag{4.5}$$

Pour trouver une solution auto-similaire de (4.5) nous allons donc chercher u sous la forme $u(r,t) = t^{-\mu}\phi(\frac{r}{t^\nu})$, remplaçons u par cette expression dans (4.5), et posons $s = \dfrac{r}{t^\nu}$ et $\nu = \dfrac{1}{p}$, on arrive à

$$(v^{p-1})_t - (p-1)|v'|^{p-2}v'' - \left(\frac{N-1}{r}\right)|v'|^{p-2}v' = 0,$$

donc

$$(p-1)|\phi'|^{p-2}\phi'' + \left(\frac{N-1}{s}\right)|\phi'|^{p-2}\phi' + \frac{p-1}{p}s\phi^{p-2}\phi'^{p-1}(s) = 0. \tag{4.6}$$

En multipliant la dernière équation par s^{N-1} et en posant $\mu = \dfrac{N}{p(p-1)}$ on trouve

$$\left(s^{N-1}|\phi'|^{p-2}\phi'\right)' + \frac{1}{p}\left(s^N|\phi|^{p-2}\phi\right)' = 0,$$

en particulier

$$|\phi'|^{p-2}\phi' + \frac{1}{p}s|\phi|^{p-2}\phi = 0,$$

soit

$$|\phi'|^{p-2}\phi' = -\frac{1}{p}s|\phi|^{p-2}\phi.$$

en utilisant l'expression de la fonction inverse de $h(t) = |t|^{p-2}t$ on obtient

$$\phi'(s) = -(\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}} s^{\frac{1}{p-1}} \phi(s).$$

La résolution de la dernière équation différentielle et en posant $s = \frac{|x|}{t^{\frac{1}{p}}}$ on obtient finalement la solution auto-similaire suivante :

$$v(x,t) = t^{-\frac{N}{p(p-1)}} \exp\Big\{ -(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}) \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{t^{\frac{1}{p-1}}}) \Big\}. \tag{4.7}$$

Pour le cas $\lambda > 0$ nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.3. Soit u une solution du problème (4.4), alors $u(x,t) \to \infty$ quand $|x| \to 0$ pour chaque $t > 0$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Harnack introduite dans [72] nous savons que $u \geq C$ *dans* $B_r(0) \times (t_1, t_2)$ pour tout $t_1 > 0$. Rappelons que

$$-\Delta_p \left(\log \frac{r}{|x|} \right) = \frac{C_1}{|x|^p},$$

on pose alors $v(t,x) = \varepsilon (t - t_1)^a \left(\log \frac{r}{|x|} \right)$, ce qui donne

$$\begin{cases} (v^{p-1})_t - \Delta_p v & \leq \quad \varepsilon (t_2 - t_1)^{a(p-1)-1} \frac{C_2}{|x|^p} \text{dans } B_r(0) \times (t_1, t_2), \\ v & = 0 \quad \text{sur } \partial B_r(0) \times (t_1, t_2), \\ v(t_1, x) & = 0 \quad \text{dans } B_r(0), \end{cases}$$

ainsi, en choisissant ε suffisamment petit, on arrive à

$$\left(v^{p-1}\right)_t - \Delta_p v \leq \left(u^{p-1}\right)_t - \Delta_p u \text{ dans } B_r \times (t_1, t_2).$$

Le principe de comparaison permet de conclure que $v \leq u$ dans $B_r \times (t_1, t_2)$. ainsi

$$\lim_{|x| \to 0} u(x,t) = \infty,$$

d'ou le résultat. □

Dans le lemme suivant nous donnons des précisions sur le comportement de la solution au voisinage du point $(0, t)$.

Lemme 4.4. Soit u une solution entropique du problème (4.4), alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que

$$u(x,t) \geq C(\varepsilon)|x|^{-\alpha_1+\epsilon} \text{ dans } B_r \times (t_1, t_2).$$

Pour montrer le lemme 4.4 rappelons le lemme de comparaison suivant - lemme déjà utilisé précédemment dans cette thèse- introduit dans [9].

Démonstration. Nous allons utiliser les mêmes arguments que ceux présentés dans [61] et [16]. Modulo une translation dans le temps on peut toujours supposer que $t_1 = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha > 1$ tel que $\frac{(p-1)(\alpha_1-\varepsilon)+p}{p(p-1)} < \alpha$ et définissons $a = \frac{\alpha(p-1)^2}{\alpha(p-1)-1}$. Il en découle alors que $a > p - 1$.

On pose alors $w_n = t^\alpha z_n$ avec $z_0 = \eta$ et pour $n \geq 1$, z_n est solution de

$$\begin{cases} c z_n^a - \Delta_p z_n &= \lambda \dfrac{z_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} \text{ dans } B_r, \\ z_n &= \eta \text{ sur } \partial B_r. \\ & \end{cases} \tag{4.8}$$

Un calcul direct conduit à

$$(w_n^{p-1})_t - \Delta_p w_n = \alpha^{p-1} t^{\alpha(p-1)-1} z_n^{p-1} + t^{\alpha(p-1)}(-\Delta_p z_n),$$

comme $a > p - 1$, l'inégalité de Young assure l'existence de deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$\begin{aligned} (w_n^{p-1})_t - \Delta_p w_n &\leq \alpha^{p-1}(c_1 t^{\alpha(p-1)} z_n^a + c_2) + t^{\alpha(p-1)}(-\Delta_p z_n), \\ &\leq t^{\alpha(p-1)}(\alpha^{p-1} c_1 z_n^a - \Delta_p z_n) + \alpha c_2 \\ &\leq \lambda t^{\alpha(p-1)} \frac{z_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} + \alpha c_2, \\ &\leq \lambda \frac{w_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} + \alpha c_2. \end{aligned}$$

Comme u est solution de (4.4) et par le fait que $u(x,t) \to \infty$ quand $|x| \to 0$

uniformément en $t \in (t_2, t_3)$, on peut toujours choisir $B_R(0)$ petite à souhait telle que $u^q(x,t) \geq M \geq \alpha c_2$ pour tout $(x,t) \in B_R(0) \times (t_2, t_3)$. Modulo une translation en t on suppose à présent que $t_2 = 0$. Posons $w_0(x,t) = \eta$ et pour $n \geq 1$,

$$\begin{cases} (w_n^{p-1})_t - \Delta_p w_n & \leq & \lambda \dfrac{w_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} + \alpha c_2 \text{ dans } B_R \times (0, T_1)\,, \\ w_n(x,t) & = & t^\alpha \eta \text{ sur } \partial B_R \times (0, T_1)\,, \\ w_n\,(x,0) & = & 0 \text{ dans } B_R. \\ \end{cases} \tag{4.9}$$

En choisissant η suffisamment petit, et par un processus d'itération et l'utilisation du principe de comparaison on conclut que pour tout $n \in I\!N$,

$$u \geq w_n \text{ dans } B_R \times (0, T_1)\,. \tag{4.10}$$

Analysons à présent le comportement de la suite $\{z_n\}_{n \in I\!N}$, solutions des problèmes (4.41). Posons $v_n = z_n - \eta$, alors $v_0 \equiv 0$ et

$$\begin{cases} -\Delta_p v_n & = \lambda \dfrac{(v_{n-1}+\eta)^{p-1}}{|x|^p} - c(v_n+\eta)^a \text{ dans } B_R, \\ v_n & = 0 \text{ sur } \partial B_R. \end{cases} \tag{4.11}$$

On arrive aisément à démontrer que $v_n \to v$ où v résoud

$$\begin{cases} -\Delta_p v = & \lambda \dfrac{(v+\eta)^{p-1}}{|x|^p} - c(v+\eta)^a \text{ dans } B_R, \\ v = 0 & \qquad\qquad \text{sur } \partial B_R, \end{cases} \tag{4.12}$$

Par le principe de maximum fort de [82] et le lemme 1.1 on conclut que (4.12) possède une unique solution positive v ; en effet en posant $f(x,v) = \lambda(\frac{v+\eta}{|x|^p} - c(v+\eta)^{\frac{\alpha(p-1)}{\alpha-1}}$, alors

$$\frac{f(.,v)}{v^{p-1}} = \lambda \frac{(\frac{v+\eta}{v})^{p-1}}{|x|^p} - c\frac{(v+\eta)^{\frac{\alpha(p-1)}{\alpha-1}}}{v^{p-1}}.$$

pour R suffisement petit $\dfrac{\partial}{\partial v}(\dfrac{f(.,v)}{v^{p-1}}) < 0$, et l'unicité en découle. En posant

$z = v + \eta$ alors z est solution de

$$\begin{cases} cz^{\frac{\alpha(p-1)}{\alpha-1}} - \Delta_p z = \lambda \dfrac{z^{p-1}}{|x|^p} & \text{dans } B_R, \\ z = \eta & \text{sur } \partial B_R. \end{cases} \tag{4.13}$$

Posons à présent $z_A(x) = A|x|^{-\alpha_1+\varepsilon}$, par les hypothèses sur a et en choisissant A suffisamment petit z_A est solution du problème (4.13) pour tout ε. Le lemme 1.1 permet de conclure que $z_A \leq z$, le passage à la limite dans la suite $\{w_n\}_{n\in I\!N}$ nous amène à la conclusion

$$u(x,t) \geq C|x|^{-\alpha_1+\epsilon} \text{ dans } B_r(0) \times \left(t_2, \tilde{t}\right),$$

d'où le résultat. □

Nous allons à présent énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 4.2.

1. Si $\lambda > \Lambda_N$, alors le problème (4.4) ne possède aucune solution positive entropique.
2. Si $\lambda \leq \Lambda_N$ et $q > q_+(\lambda)$, alors le problème (4.4) ne possède aucune solution positive.

Démonstration. 1. Si $\lambda > \Lambda_N$, alors la non existence est une conséquence directe de l'inégalité de Picone comme cela est fait dans (voir [16]).

2. Considérons donc le second cas et procédons par un raisonnement par l'absurde. Soit u une solution positive de (4.4), alors le lemme 4.4 permet d'assurer l'existence d'une petite boule $B_r(0)$ telle que

$$u \geq C|x|^{-\alpha_1+\epsilon} \text{ dans } B_r(0) \times (t_1, t_2). \tag{4.14}$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_r)$, par l'inégalité de Picone on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |\nabla\varphi|^p \, dx &\geq \int_{B_r(0)} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi|^p \, dx \\ &\geq \int_{B_r(0)} u^{q-(p-1)} |\varphi|^p \, dx + \lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx - \int_{B_r(0)} \frac{(u^{p-1})_t}{u^{p-1}} |\varphi|^p \, dx. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps l'équation (4.14), on obtient

$$\begin{aligned}(t_2-t_1)\int_{B_r(0)}|\nabla\varphi|^p\,dx &\geq C'(t_2-t_1)\int_{B_r(0)}|x|^{-\alpha_1(q-(p-1))}|\varphi|^p\,dx\\ &+\lambda(t_2-t_1)\int_{B_r(0)}\frac{|\varphi|^p}{|x|^p}dx\\ &-(p-1)\int_{B_r(0)}\log(u(x,t_2))|\phi|^p dx.\end{aligned}$$

Notons que $\log(u(x,t_2))$ est bien définie car $u(x,t)>>1$ dans $B_r(0)\times(t_1,t_2)$, on obtient alors

$$\int_{B_r(0)}\log(u(x,t_2))|\phi|^p dx\leq\Big(\int_{B_r(0)}|\phi|^p dx\Big)^{\frac{p}{p^*}}\Big(\int_{B_r(0)}(\log(u(x,t_2)))^{\frac{N}{p}}dx\Big)^{\frac{p}{N}},$$

du fait que $\log(s)\leq c_0s^\gamma+c_1$ pour tout $s>1$ et pour un quelconque exposant $\gamma>0$ où c_0 et c_1 sont des constantes positves fixées . En choisissant $\gamma<<\frac{p}{N}$ on obtient $\int_{B_r(0)}(\log(u(x,t_2)))^{\frac{N}{p}}dx\leq C(t_2)$. L'utilisation de l'inégalité de Sobolev on arrive à la conclusion que

$$\int_{B_r(0)}|\nabla\varphi|^p\,dx\geq C(t_1,t_2)\int_{B_r(0)}\frac{|\varphi|^p}{|x|^{\alpha_1(q-(p-1))}}dx;$$

comme $q>q_+(\lambda)\equiv\Big((p-1)+\frac{p}{\alpha_1}\Big)$, alors $\alpha_1(q-(p-1))>p$ on aboutit à une contradiction à l'inégalité de Hardy. Ainsi le résultat de non existence en découle. □

Une des conséquences de ce résultat de non existence est que on peut affirmer une complète explosion Blow-up instantanné des problèmes d'approximations suivants :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(u_n^{p-1})}{\partial t}-\Delta_p u_n &= \lambda a_n(x)u_n^{p-1}+g_n(u_n)\text{ dans }\Omega\times(0,T),\\ u_n(x,t) &= 0\text{ sur }\partial\Omega\times(0,T),\\ u_n(x,0) &= u_0(x)\text{ dans }\Omega,\end{cases}\tag{4.15}$$

où $a_n(x)=\min\{n,\dfrac{1}{|x|^p}\}$ et $g_n(s)=\min\{n,s^q\}$. En effet par l'inégalité de Harnack du Lemme 4.2 on démontre que pour chaque $(x_0,t_0)\in\Omega\times(0,T)$,

$u_n(x_0, t_0) \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Dans le cas où $q < q_+(\lambda)$, nous avons le résultat d'existence suivant ce qui démontre l'optimalité de $q_+(\lambda)$.

Théorème 4.3. Supposons que $q < q_+(\lambda)$, alors sous certaines conditions sur u_0, le problème (4.4) possède une solution minimale positive.

Démonstration. Il est clair que si $q \leq p^* - 1$ et $u_0 \in L^p(\Omega)$, alors nous obtenons l'existence de solution dans l'espace d'énérgie $L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega))$ par les méthodes classiques. Dans le cas où $p^* - 1 < q < q_+(\lambda)$, pour obtenir l'existence de solution nous utilisons des arguments de monotonie. En effet notons que par un calcul direct nous pouvons construire une supersolution radiale de l'opérateur elliptique construite sous la forme $A|x|^{-\beta}$, sous l'hypothèse $u_0(x) \leq A|x|^{-\beta}$ et par un procédé d'itération on aboutit au résultat désiré. □

4.2 Le problème de Cauchy pour l'opérateur doublement nonlinéaire

Dans [57], Fujita considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u^p,\ x \in I\!R^N,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0,\ x \in I\!R^N, \end{cases} \tag{4.16}$$

où $1 < p < \infty$. Il y démontre que si $1 < p < 1 + \dfrac{2}{N}$, il existe un certain $T > 0$ tel que la solution du problème (4.16) est telle que $||u(\cdot, t_n)||_\infty \to \infty$ quand $t_n \to T$. Cependant si $p > 1 + \dfrac{2}{N}$, alors les solutions globales et non globales co-existent les premières dans le cas où la donnée initiale est soumise à une condition de petitesse, et les secondes dans le cas de larges conditions initiales sont considérées. L'indice $1 + \dfrac{2}{N}$ est souvent appelé l'exposant critique de Fujita pour le Blow-up relatif à l'équation de la chaleur. De plus il est démontré que pour le cas limite $p = 1 + \dfrac{2}{N}$, la solution tend vers l'infini pour une certaine norme en temps fini, pour plus de détails on renvoie le lecteur à [96] .

4.2.1 exposant de Fujita pour $\lambda \geq 0$

Supposons que $0 \leq \lambda < \Lambda_N$ et considérons le problème de Cauchy

$$(u^{p-1})_t - \Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } I\!R^N, u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } I\!R^N, \tag{4.17}$$

avec $p-1 < q < p_+(\lambda)$. Il est clair que $u \notin L^\infty$, comme dans le cas $p=2$, le blow-up sera obtenu dans un espace de Lebesgue avec poids convenable. Plus précisément on a la définition suivante :

Définition 4.3. Soit $u(x,t)$ une solution positive de (4.17), on dira que u explose en temps fini (Blow up in finite time) s'il existe un $T^* < \infty$ tel que

$$\lim_{t \to T^*} \int_{B_r(0)} |x|^{-\alpha_1} u^{p-1}(x,t)\, dx = \infty,$$

sur toute boule $B_r(0)$.

Dans le but d'obtenir l'exposant critique de Fujita, au dela duquel l'explosion au sens de la définition 4.3 a lieu nous allons chercher une famille de sous-solutions de (4.17) sous la forme $w(r,t,T) = (T-t)^{-\theta} \zeta \left(\dfrac{r}{(T-t)^\beta} \right)$, avec θ, $\beta > 0$ à spécifier et $\zeta > 0$ une fonction régulière. Notons $s = \dfrac{r}{(T-t)^\beta}$, on a alors

$$\begin{aligned} &w_t = (T-t)^{-\theta-1}(\theta\zeta + \tfrac{\beta r}{(T-t)^\beta}\zeta'(s)),\\ &w_r(r,t) = (T-t)^{-\theta-\beta}\zeta'(s),\\ &w_{rr}(r,t) = (T-t)^{-\theta-2\beta}\zeta''(s). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nous voudrions avoir

$$(w_t)^{p-1} - (p-1)|w'|^{p-2}w'' - \left(\frac{N-1}{r}\right)|w'|^{p-2}w' - \lambda \frac{w^{p-1}}{r^p} \leq w^q, \tag{4.19}$$

en posant $\theta = \dfrac{1}{q-(p-1)}$, $\beta = \dfrac{1}{p}$ et en remplaçant cette valeur dans (4.18), alors (4.19) devient

$$-(p-1)|\zeta'|^{p-2}\zeta'' - \left(\frac{N-1}{s}\right)|\zeta'|^{p-2}\zeta' + \frac{p-1}{p} s \zeta^{p-2}\zeta' + (\theta(p-1) - \frac{\lambda}{s^p})\zeta^{p-1}(s) \leq \zeta^q \tag{4.20}$$

Supposons que $\zeta(s) = A\phi(s)$ avec $\phi(s) = s^{-\alpha_1} Exp\Big\{ -(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}) s^{\frac{p}{p-1}} \Big\}$, $A > 0$. alors

$$\zeta'(s) = A\phi(s)D(s)$$

et

$$\zeta''(s) = A\phi(s)K(s)$$

où

$$D(s) = -\frac{\alpha_1}{s} - \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} s^{\frac{1}{p-1}}$$

et

$$K(s) = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_1}{s^2} + (\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})^2 s^{\frac{2}{p-1}} + \frac{2\alpha_1(p-1) - 1}{p^{\frac{p}{p-1}}} s^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

Il découle de l'équation (4.20) que

$$-(p-1)|D|^{p-2}K - \left(\frac{N-1}{s}\right)|D|^{p-2}D' + \frac{p-1}{p} sD + (\theta(p-1) - \frac{\lambda}{s^p}) \leq A^{q-(p-1)}\phi^{q-(p-1)}. \tag{4.21}$$

quand $s \to 0$, le premier terme dans (4.21) est équivalent à

$$-\frac{(p-1)\,\alpha_1^p - (N-p)\,\alpha_1^{p-1} + \lambda}{s^p} - \frac{p-1}{p}\alpha_1 + \frac{p-1}{q-(p-1)}.$$

comme $(p-1)\,\alpha_1^p - (N-p)\,\alpha_1^{p-1} + \lambda = 0$, alors l'équation (4.21)est satisfaite au moins lorsque $s \to 0$.

Considérons à présent le cas où $s \to \infty$, dans ce cas le premier terme dans (4.21) est équivalent à

$$-(p-1)\Big\{(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})^p + \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}\Big\} s^{\frac{p}{p-1}} \to \infty \text{ as } s \to \infty.$$

Donc en choisissant A suffisamment grand on arrive à conclure que (4.21) est vérifiée pour tout $s \geq 0$. ce qui permet de conclure que

$$w(x,t,T) = A(T-t)^{-\frac{1}{q-(p-1)}} (\frac{r}{(T-t)^{\frac{1}{p}}})^{-\alpha_1} \mathrm{Exp}\Big\{ -(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})(\frac{r}{(T-t)^{\frac{1}{p}}})^{\frac{p}{p-1}} \Big\},$$

où $r = |x|$ nous procure une famille de sous solutions du problèmes (4.17).

Soit $B_r(0)$ une boule de $\mathbb{R}^N$ centrée à l'origine, alors

$$\int_{B_r(0)} |x|^{-\alpha_1} w^{p-1}(x,t,T)\,dx =$$
$$C(T-t)^{-\frac{1}{q-(p-1)}+\frac{N}{p}-\frac{\alpha_1}{p}} \int_0^{\frac{r}{(T-t)^{1/p}}} \mathrm{Exp}\Big\{-(p-1)\Big(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}\Big)s^{\frac{p}{p-1}}\Big\} s^{N-p\alpha_1-1}\,ds.$$

Si $q < p-1+\dfrac{p(p-1)}{N-\alpha_1}$, nous avons alors $-\dfrac{1}{q-(p-1)}+\dfrac{N}{p}-\dfrac{\alpha_1}{p} < 0$. Donc

$$\lim_{t\to T}\int_{B_r(0)} |x|^{-\alpha_1} w^{p-1}(x,t,T)\,dx = \infty.$$

On peut donc conclure que $F(\lambda) = p-1+\dfrac{p(p-1)}{N-\alpha_1}$ est un exposant de type Fujita relatif au problème (4.17).

Il est à notre que pour $0<\lambda\le\Lambda_N$,

$$p-1 < p-1+\frac{p(p-1)}{N} = F(0) < F(\lambda) < q_-(\lambda) \le p^*-1 \le q_+(\lambda) < \infty.$$

il vient que $F(\lambda) < q_+(\lambda)$, Pour montrer que $F(\lambda) < q_-(\lambda)$ il suffit de montrer que

$$(p-1)\alpha_2+\alpha_1 < N-p. \tag{4.22}$$

Pour obtenir l'estimation précédente nous allons utiliser les définitions de α_2 et α_1. Rappelons que $h(\alpha_i)=0$ pour $i=1,2$ et $\alpha_1<\alpha_2$ pour $\lambda>0$, donc

$$\begin{aligned}(p-1)\alpha_2+\alpha_1 &= (N-p)-\frac{\lambda}{\alpha_2^{p-1}}+\alpha_1\\ &< (N-p)-\frac{\lambda}{\alpha_1^{p-1}}+\alpha_1 = \frac{\alpha_1^p+(N-p)\alpha_1^{p-1}-\lambda}{\alpha_1^{p-1}}\\ &= p\alpha_1 < N-p,\end{aligned}$$

par suite (4.22) est vérifiée et $F(\lambda) < q_-(\lambda)$.

Soit à présent u une sur solution positive du problème (4.17) telle que $u(x,T)\ge C|x|^{-\alpha_1}$ pour un certain $T>0$, on pose $\overline{u}(x,t)=u(x,t+T)$, alors $\overline{u}$ résoud (4.17) avec $\overline{u}(x,0) \geq C|x|^{-\alpha_1}$. Notons que

$$w(x,0,T) = AT^{-\frac{1}{q-(p-1)}}(\frac{|x|}{T^{\frac{1}{p}}})^{-\alpha_1}\exp\Big\{-(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})(\frac{|x|}{T^{\frac{1}{p}}})^{\frac{p}{p-1}}\Big\},$$

on peut alors choisir A suffisamment petit de manière à avoir $w(x,0,T) \leq \overline{u}(x,0)$.

Fixons A dans les mêmes conditions précédentes, nous allons montrer que $\overline{u}(x,t) \geq w(x,t,T), \forall t < T$. Soit $k(s) = s^{p-1}$ pour $s \geq 0$, nous obtenons alors

$$k(w)_t - k(\overline{u})_t - \Delta_p w + \Delta_p \overline{u} \leq \lambda\Big(\frac{k(w)}{|x|^p} - \frac{k(\overline{u})}{|x|^p}\Big) + (k(w))^{\frac{q}{p-1}} - (k(\overline{u}))^{\frac{q}{p-1}}.$$

pour contourner les complications causées par le poids de Hardy nous procédons par approximation. Posons $w_n(x,t,T) = w(r+\frac{1}{n},t,T)$, alors

$$w_n(x,t,T) = A(T-t)^{-\frac{1}{q-(p-1)}}\Big(\frac{|x|+\frac{1}{n}}{(T-t)^{\frac{1}{p}}}\Big)^{-\alpha_1}\text{Exp}\Big\{-(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})(\frac{|x|+\frac{1}{n}}{(T-t)^{\frac{1}{p}}})^{\frac{p}{p-1}}\Big\}.$$

Il vient immédiatement que $w_n \in L^\infty$ satisfait à

$$k(w_n)_t - \Delta_p w_n \leq \lambda\frac{k(w_n)}{(|x|+\frac{1}{n})^p} + (k(w_n))^{\frac{q}{p-1}},$$

d'où

$$k(\overline{u})_t - \Delta_p \overline{u} \geq \lambda\frac{k(\overline{u})}{(|x|+\frac{1}{n})^p} + (k(\overline{u}))^{\frac{q}{p-1}},$$

et par suite on conclut que

$$k(w_n)_t - k(\overline{u})_t - \Delta_p w_n + \Delta_p \overline{u} \leq \frac{\lambda}{(|x|+\frac{1}{n})^p}\Big(k(w_n) - k(\overline{u})\Big) + (k(w_n))^{\frac{q}{p-1}} - (k(\overline{u}))^{\frac{q}{p-1}}. \tag{4.23}$$

Posons

$$\psi_\sigma(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \leq 0, \\ 1 & \text{si} \quad s \geq \sigma, \\ \frac{s}{\sigma} & \text{si} \quad 0 < s < \sigma, \end{cases} \tag{4.24}$$

et utilisons $\psi_\sigma((w_n - \overline{u})_+)$ comme fonction test dans (4.23), la monotonie du

$p-$laplacien et le fait que w_n est essentiellement bornée permet de conclure que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (k(w_n)-k(\overline{u}))_t \psi_\sigma((w_n-\overline{u})_+)dtdx \le C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (k(w_n)-k(\overline{u}))\psi_\sigma((w_n-\overline{u})_+)dtdx.$$

En faisant tendre $\sigma \to 0$ on arrive à

$$\int_{w_n>\overline{u}} (k(w_n) - k(\overline{u}))_t dxdt \le C \int_{w_n>\overline{u}} (k(w_n) - k(\overline{u}))dxdt,$$

comme $\{w_n > \overline{u}\} = \{k(w_n) > k(\overline{u})\}$, une integration en t donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} (k(w_n(x,T)) - k(\overline{u}(x,T)))_+ dx \le \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (k(w_n(x,t)) - k(\overline{u}(x,t)))_+ dxdt.$$

Par l'inégalité de Gronwall permet de dire que $k(w_n(x,t)) - k(\overline{u}(x,t)))_+ \equiv 0$, donc $\overline{u}(x,t) \ge w_n(x,t), \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite $\overline{u} \ge w$ et le résultat est démontré.

Nous pouvons donc énoncer le théorème

Théorème 4.4. supposons que $q < F(\lambda) \equiv p - 1 + \dfrac{p(p-1)}{N-\alpha_1}$ et soit u une solution du problème (4.17) telle que $u(x,T) \ge C|x|^{-\alpha_1}$ pour un certain $T > 0$, alors u explose en temps fini dans le sens de la définition 4.3.

Remarque 4.1.

1. Il est clair que si $u_0(x) \ge C|x|^{-\alpha_1}$, alors la solution u explose, dans le sens de la définition 4.3.

2. La condition sur le comportement de u au voisinage de l'origine semble être naturelle du fait que l'on ait démontrer dans le Lemme (4.4) que $u(x,t) \ge C|x|^{-\alpha_1+\varepsilon}$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Notons que dans le cas $p = 2$, un changement de fonction et l'utilisation d'une inégalité de Harnack pondérée nous obtenons que $u(x,t) \ge C|x|^{-\alpha_1}$ pour tout $t > 0$.

4.2.2 Existence globale pour $F(\lambda) < q < q_+(\lambda)$

Dans le but d'obtenir l'existence globale de solution, nous allons recherché des supersolutions w verifiant

$$(w^{p-1})_t - (p-1)|w'|^{p-2}w'' - \left(\frac{N-1}{r}\right)|w'|^{p-2}w' - \lambda\frac{w^{p-1}}{r^p} \geq w^q \tag{4.25}$$

Supposons que $w(r,t,T) = (T+t)^{-\theta}g\Big(\dfrac{r}{(T+t)^{\beta}}\Big)$ avec θ, $\beta > 0$ à choisir. On pose $s = \dfrac{r}{(T+t)^{\beta}}$, on a alors

$$\begin{aligned} &w_t = -(T+t)^{-\theta-1}(\theta g + \tfrac{\beta r}{(T+t)^{\beta}}g'(s)),\\ &w_r(r,t) = (T+t)^{-\theta-\beta}g'(s),\\ &w_{rr}(r,t) = (T+t)^{-\theta-2\beta}g''(s). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Comme précédemment dans le but d'obtenir une homogénéité, choisissons $\theta = \dfrac{1}{q-(p-1)}$ et $\beta = \dfrac{1}{p}$. Ainsi (4.25) donne

$$(p-1)|g'|^{p-2}g'' + \left(\frac{N-1}{s}\right)|g'|^{p-2}g' + \frac{p-1}{p}sg^{p-2}g' + (\frac{\lambda}{s^p} + \theta(p-1))g^{p-1}(s) + g^q \leq 0. \tag{4.27}$$

Posons $g(s) = A\phi(cs)$ avec $\phi(s) = s^{-\gamma}\exp\Big\{-(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})s^{\frac{p}{p-1}}\Big\}$, $A > 0$, où $\gamma > \alpha_1$, à convenablement choisir ultérieurement, alors

$$g'(s) = Ac\phi(cs)D(cs) \text{ et } g''^2\phi(cs)K(cs)$$

où

$$D(s) = -\frac{\gamma}{s} - \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}s^{\frac{1}{p-1}} \text{ et } K(s) = \frac{\gamma^2+\gamma}{s^2} + (\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})^2 s^{\frac{2}{p-1}} + \frac{2\gamma(p-1)-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}s^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

Donc par (4.27) il découle que

$$\begin{aligned} &(p-1)c^p|D(cs)|^{p-2}K(cs) + c^{p-1}\left(\tfrac{N-1}{s}\right)|D(cs)|^{p-2}D'(cs) + \tfrac{p-1}{p}csD(cs)\\ &+(\theta(p-1) + \frac{\lambda}{s^p}) + A^{q-(p-1)}\phi^{q-(p-1)}(cs) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Quand $s \to 0$, le membre de gauche dans (4.28) est équivalent à

$$\frac{1}{s^p}\Big\{(p-1)\gamma^p + (p-N)\gamma^{p-1} + \lambda\Big\} - \frac{p-1}{p}\gamma + \frac{p-1}{q-(p-1)} + A^{q-(p-1)}s^{-\gamma(q-(p-1))},$$

comme $\gamma > \alpha_1$, alors $(p-1)\gamma^p + (p-N)\gamma^{p-1} + \lambda < 0$. Par le fait que $q < q_+(\lambda)$, il s'en suit que $\alpha_1 < \frac{p}{q-(p-1)}$, et on peut ainsi choisir γ suffisamment proche de α_1 tel que $\alpha_1 < \gamma < \frac{p}{q-(p-1)}$. Donc quand $s \to 0$,

$$\begin{aligned}&(p-1)c^p|D(cs)|^{p-2}K(cs) + c^{p-1}\left(\tfrac{N-1}{s}\right)|D(cs)|^{p-2}D'(cs) + \tfrac{p-1}{p}csD(cs)\\ &+(\theta(p-1) + \frac{\lambda}{s^p}) + A^{q-(p-1)}\phi^{q-(p-1)}(cs) \le 0.\end{aligned}$$

Nous nous interessons maintenant au cas où $s \to \infty$, dans ce cas le premier membre de l'équation (4.28) est équivalent à

$$(p-1)s^{\frac{p}{p-1}}c^{\frac{p}{p-1}}\Big\{(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})^p c^p - (p-1)\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}\Big\}.$$

En choisissant $c < 1$ suffisamment petit on arrive à avoir $(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})^p c^p - (p-1)\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}$, et par suite

$$\begin{aligned}&(p-1)c^p|D(cs)|^{p-2}K(cs) + c^{p-1}\left(\tfrac{N-1}{s}\right)|D(cs)|^{p-2}D'(cs) + \tfrac{p-1}{p}csD(cs)\\ &+(\theta(p-1) + \frac{\lambda}{s^p}) + A^{q-(p-1)}\phi^{q-(p-1)}(cs) \le 0\end{aligned}$$

quand $s \to \infty$.

Comme $\alpha_1 < \gamma < \frac{p}{q-(p-1)}$ et $\beta = \dfrac{1}{p}$, alors $-\frac{p-1}{p}\gamma - \theta(p-1) < 0$. En choisssant A suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned}&(p-1)c^p|D(cs)|^{p-2}K(cs) + c^{p-1}\left(\tfrac{N-1}{s}\right)|D(cs)|^{p-2}D'(cs) + \tfrac{p-1}{p}csD(cs)\\ &+(\theta(p-1) + \frac{\lambda}{s^p}) + A^{q-(p-1)}\phi^{q-(p-1)}(cs) \le 0\end{aligned}$$

pour tout $s \ge 0$.

Ainsi nous obtenons une famille de sursolutions globalement définies en temps.

Il est à noter que

$$w(x,0) = AT^{-\frac{1}{q-(p-1)}}|cx|^{-\gamma}\exp\Big\{-(\frac{c^{\frac{p}{p-1}}}{T^{\frac{1}{p-1}}})(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})|x|^{\frac{p}{p-1}}\Big\},$$

alors nous définissons une classe de fonctions u_0 telles que

$$u_0(x) \leq |x|^{-\gamma}\exp\Big\{-D(\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}})|x|^{\frac{p}{p-1}}\Big\} \text{ pour } D > 0.$$

Notons que pour $t = 0$ on peut toujours trouver $T > 0$ et $c < 1$ proche de 1 tels que $w(x,0) \geq u_0(x)$, et on conclut que w est bien une sur solution de (4.17) quand u_0 vérifie la condition imposée. Comme $v(x,t) = 0$ est une solution, on démontre par un procédé d'itération l'existence d'une solution globale positive de (4.17).

Remarque 4.2. Dans le cas où $p-1 < q < q_+(\lambda)$, alors sous une condition convenable sur la condition initiale, on peut obtenir un blow-up de la solution dans $L^p_{loc}(I\!R^N)$. Plus précisemment, supposons que $u_0(x) \geq \phi$ où $\phi \geq 0$ est telle que $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, supp$(\phi) \subset B_0(R)$ et

$$\frac{1}{q+1}\int\limits_{I\!R^N} \phi^{q+1}dx > \frac{1}{p}\int\limits_{I\!R^N}\Big(|\nabla\phi|^p - \lambda\frac{\phi^p}{|x|^p}\Big)dx, \tag{4.29}$$

alors si u est une solution positive du problème (4.17) avec $u_0(x) \geq \phi$ satisfaisant (4.29), alors u explose en temps fini, dans le sens où il existe $T^* < \infty$ tel que

$$\int_{B_R(0)} u^p(x,t)dx \to \infty \text{ as } t \to T^*.$$

Par l'absurde, soit u la solution du problème (4.17) avec la condition initiale u_0, et tel que pour chaque $T > 0$

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_{B_R(0)} u^p(x,t)dx \leq M(T) < \infty. \tag{4.30}$$

Soit w la solution minimale du problème

$$\begin{cases} (w^{p-1})_t - \Delta_p w &= \lambda \dfrac{w^{p-1}}{|x|^p} + w^q \text{ dans } B_R(0) \times (0, T(w)), \\ w(x,t) &> 0 \text{ dans } B_R(0) \times (0, T(w)), \\ w(x,0) &= \phi \text{ si } x \in B_R(0). \end{cases} \tag{4.31}$$

Comme $w \in L^p(0, T(w); W_0^{1,p}(B_R(0))) \cap L^\infty(B_R(0) \times (0, T(w))$, et comme u est une sursolution pour le problème (4.31), alors $w \leq u$ et par suite $T(w) = \infty$. Définissons *l'energie* en temps,

$$E(t) = \frac{1}{p} \int_{B_R(0)} |\nabla w|^p dx - \frac{\lambda}{p} \int_{B_R(0)} \frac{w^p}{|x|^p} dx - \frac{1}{q+1} \int_{B_R(0)} w^{q+1} dx.$$

Un calcul direct montre que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\langle w_t, w_t \rangle \leq 0 \text{ ainsi par l'hypothèse } \phi, \;\; E(t) \leq 0.$$

Comme conséquence, l'utilisation de w comme fonction test dans (4.31), il en découle

$$\frac{d}{dt} \int_{B_R(0)} w^p(x,t) dx \geq C \Big(\int_{B_R(0)} w^p(x,t) dx \Big)^{\frac{q+1}{p}}.$$

comme $q > p - 1$, alors par intégration on obtient que

$$\int_{B_R(0)} w^p(x,t) dx \to \infty \text{ as } t \to T^* < \infty,$$

ce qui est en contradiction avec (4.30). D'ou le résultat de blow-up.

4.3 Résultats d'existence pour $\theta = 1$ et $p < 2$: Présence et absence d'extinction en temps fini

Cette section est dédiée à l'étude du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{cases} \tag{4.32}$$

avec $p < 2$, bien qu'en apparence très différents, on retrouvera beaucoup de points communs avec l'étude faite précédemment pour le problème doublement nonlinéaire mais aussi quelque différences significatives. Le but de cette partie est de montrer que sous certaines conditions adéquates sur u_0 et f l'existence de solutions pour $q > q_+(\lambda)$ et $\lambda > \Lambda_N$. Ce qui mettra en evidence la différence entre le problème (4.32) et (4.1) et mettra en exergue l'importance du rôle de l'inégalité de Harnack.

Nous commençons par énoncer le pricipal résultat d'existence

Théorème 4.5. Supposons que $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ et que $q_+(\lambda) \equiv \left((p-1) + \frac{p}{\alpha_1}\right) < q < 1$. Soit $u_0 \in L^1(\Omega)$ une fonction positive telle que $u_0(x) \leq \dfrac{c}{|x|^{\frac{p}{2-p}}}$, alors pour chaque $\lambda > 0$, le problème (4.32) possède une solution positive minimale.

Démonstration. Pour montrer l'existence de solution nous allons commencer par rechercher un "bonne" sur solution, l'usage de monotonie de l'opérateur nous permettra de conclure. On peut toujours supposer que $\Omega \subset\subset B_0(1)$.

Comme $1 < p < \frac{2N}{N+2}$, alors $q_+(\lambda) < q < 1$. En effet commencer par observer $\frac{p}{2-p} < \frac{N-p}{N}$, ce qui permet de conclure que $\frac{p}{2-p} < \alpha_2$. Par un calcul direct nous obtenons que $h(\frac{p}{2-p}) > 0$ où h est définie dans (3.6), donc $\frac{p}{2-p} < \alpha_1$ et par suite $q_+(\lambda) < 1$.

Posons

$$S_{\lambda_0}(x,t) = \lambda_0 \left(\frac{t + T_0}{|x|^p}\right)^{\frac{1}{2-p}}$$

où $\lambda_0 > 0$ sera ultérieurement choisi, donc si $1 < p < \frac{2N}{N+1}$, par les résultats de [17] on sait que S_{λ_0} vérifie

$$(S_{\lambda_0})_t - \Delta_p S_{\lambda_0} = \lambda_0 \frac{S_{\lambda_0}^{p-1}}{|x|^p}$$

Fixons $\lambda_0 = \lambda + \lambda_1$, alors

$$(S_{\lambda_0})_t - \Delta_p S_{\lambda_0} = \lambda \frac{S_{\lambda_0}^{p-1}}{|x|^p} + \lambda_1 \frac{S_{\lambda_0}^{p-1}}{|x|^p}.$$

Comme $q < 1$, il est toujours possible de choisir λ_1 et T_0 de sorte à avoir

$$\lambda_1 \frac{S_{\lambda_0}^{p-1}}{|x|^p} \geq S_{\lambda_0}^q,$$

ainsi S_{λ_0} nous fournit une sur-solution pour le problème (4.32) il suffit alors juste de comparer les conditions initiales. il est clair que $S_{\lambda_0}(x,0) = \lambda_0 \left(\frac{T_0}{|x|^p}\right)^{\frac{1}{2-p}}$. En choisissant λ_0 de sorte à avoir $\lambda_0 T_0^{\frac{1}{2-p}} \geq c$, il s'en suit que $S_{\lambda_0}(x,0) \geq u_0(x)$. Comme $p < \frac{2N}{N+2}$, alors $\lambda \frac{S_{\lambda_0}^{p-1}}{|x|^p} + \lambda_1 \frac{S_{\lambda_0}^{p-1}}{|x|^p} \in L^1(\Omega \times (0,T))$. Ce qui permet de conclure que S_{λ_0} est bien une sur-solution de (4.32). Considérons à présent le schéma itératif suivant : $w_0 \equiv 0$ et w_n définie comme étant les solutions positives des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial w_n}{\partial t} - \Delta_p w_n & = & g_n(x, w_{n-1}) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ w_n(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ w_n(x,0) & = & T_n(u_0) \text{ dans } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.33}$$

où $s \geq 0$, $g_n(x,s) = \lambda \dfrac{s^{p-1}}{|x|^p + \frac{1}{n}} + s^q$. Il est alors clair que $w_0 \leq S_{\lambda_0}$ et par itération on obtient $w_n \leq w_{n+1} \leq S_{\lambda_0}$ pour tout n. Ainsi nous obtenons l'existence de $w \equiv \limsup w_n \leq S_{\lambda_0}$ telle que w résoud (4.32) au moins au sens d'entropie. D'où le résultat. $\square$

Pour le cas $\lambda \leq \Lambda_N$, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 4.6. Soit $1 < p < 2$ et supposons que $\lambda \leq \Lambda_N$, alors pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et pour tout $q \leq 1$, le problème (4.32) possède une solution minimale positive $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, de plus si $p > \frac{2N}{N+2}$, sous certaines conditions (de petitesse) sur $\|u_0\|_{L^2}$, il existe un temps fini T^* pour lequel $u\,(.,t) \equiv 0$ pour tout $t \geq\ T^*$.

Démonstration. Commençons par considérer le cas $q = 1$. Soit u_n la solution minimale du problème approximant suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_p u_n & = & \lambda \dfrac{u_n^{p-1}}{|x|^p + \frac{1}{n}} + u_n \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n(x,0) & = & u_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

l'utilisation de u_n comme fonction test dans le problème précédent conduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^p\, dx \leq \lambda \int_\Omega \frac{u_n^p}{|x|^p} dx + \int_\Omega u_n^2 dx.$$

par l'inégalité de Hardy on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega u^2 dx + \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq 0. \tag{4.34}$$

L'inégalité de Gronwall nous permet d'avoir

$$\int_\Omega u^2(x,T) dx + \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p\, dxdt \leq ||u_0||_{L^2} e^{\frac{1}{2}T}.$$

Ainsi nous obtenons une suite $\{u_n\}_{n\in I\!N}$ bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^2(\Omega \times (0,T))$, le résultat d'existence en découle par un classique procédé itératif et des arguments de monotonie. Supposons à présent que $\frac{2N}{N+2} < p < 2$, l'usage de l'inégalité de Sobolev dans (4.34) nous amène à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega u^2 dx + C\left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p*}} \leq 0$$

où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ l'exposant critique de Sobolev. Il en résulte que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\int_\Omega u^2 dx\right) + C\left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda}\right) e^{-2t}\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p*}} \leq 0$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\int_{\Omega}u^2dx\right)+C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)e^{-(2-p)t}\left(\int_{\Omega}\left(e^{-2t}\left|u\right|\right)^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p*}}\leq 0.$$

comme $\frac{2N}{N+2}<p<2$, alors $p^*>2$, en posant alors $F\left(t\right)=e^{-2t}\int_{\Omega}u^2dx$, nous obtenons

$$F'+C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)e^{-(2-p)t}F^{\frac{p}{2}}\leq 0,$$

et donc

$$\frac{F'\left(t\right)}{F^{\frac{p}{2}}\left(t\right)}\leq -C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)e^{-(2-p)t},$$

en intégrant par rapport au temps nous obtenons

$$F^{1-\frac{p}{2}}\left(t\right)-F^{1-\frac{p}{2}}\left(0\right)\leq C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\left[\frac{1}{2-p}e^{-(2-p)t}-\frac{1}{2-p}\right],$$

et par suite

$$F^{1-\frac{p}{2}}\left(t\right)\leq F^{1-\frac{p}{2}}\left(0\right)+C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\left[\frac{1}{2-p}e^{-(2-p)t}-\frac{1}{2-p}\right],$$

ou encore

$$F\left(t\right)\leq\left\{F^{1-\frac{p}{2}}\left(0\right)+C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\left[\frac{1}{2-p}e^{-(2-p)t}-\frac{1}{2-p}\right]\right\}^{\frac{2}{2-p}}.$$

du fait que $F\left(0\right)=\int_{\Omega}u^2\left(x,0\right)dx=\left\|u_0\right\|_{L^2}$; alors si

$$\left\|u_0\right\|_{L^2}\leq\left[C\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\frac{1}{2-p}\right]^{\frac{2}{2-p}}$$

nous obtenons $F(t)\leq 0$ pour $T^*=T^*\left(\lambda,p\right)$ le résultat d'extinction en découle. Considérons à présent le cas où $q<1$. Les mêmes estimations du cas précédent permettent de conclure à l'existence d'une solution minimale. Par contre pour montrer l'extinction en temps fini nous devons effectuer quelques modifications. Comme $p>\frac{2N}{N+2}$ et $\lambda<\Lambda_N$, on peut choisir $0<s<1$, assez proche de 1 de sorte à avoir $\dfrac{sp^p}{(s+p-1)^p} - \dfrac{\lambda}{\Lambda} > 0$ et

$$(s+p-1)\,\frac{N}{N-p} > s+1 > q+s.$$

Utilisons $u^s \;\; s > 0$; comme fonction test dans (4.32) on arrive à

$$\frac{1}{s+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{s+1}dx + s\int_\Omega u^{s-1}\left|\nabla u\right|^p dx = \lambda\int_\Omega \frac{u^{s+p-1}}{|x|^p}dx + \int_\Omega u^{q+s}dx,$$

et par suite

$$\frac{1}{s+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{s+1}dx + \frac{sp^p}{(s+p-1)^p}\int_\Omega \left|\nabla u^{\frac{(s+p-1)}{p}}\right|^p dx = \lambda\int_\Omega \frac{u^{s+p-1}}{|x|^p}dx + \int_\Omega u^{q+s}dx.$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev et la condition sur s on obtient

$$\frac{1}{s+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{s+1}dx + \left(\frac{sp^p}{(s+p-1)^p} - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\int_\Omega \left|\nabla u^{\frac{(s+p-1)}{p}}\right|^p dx \le \int_\Omega u^{q+s}dx.$$

L'usage de l'inégalité de Sobolev nous améne à

$$\frac{1}{s+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{s+1}dx + c\left(\frac{sp^p}{(s+p-1)^p} - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\left(\int_\Omega u^{\frac{(s+p-1)}{p}p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \le \int_\Omega u^{q+s}dx.$$

Comme $(s+p-1)\,\frac{N}{N-p} > s+1 > q+s$, alors par l'inégalité d'interpolation dans les espaces de Lebesgue nous donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{q+s}dx &\le C_\varepsilon\int_\Omega u^{s+1}dx + \varepsilon\int_\Omega u^{s+p-1}dx \\ &\le C_\varepsilon\int_\Omega u^{s+1}dx + \varepsilon\left(\int_\Omega u^{\frac{s+p-1}{p}p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.\end{aligned}$$

En combinant les dernières inégalités et en choisissant ε suffisamment petit on arrive à

$$\frac{1}{s+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{s+1}dx + c\left(\frac{sp^p}{(s+p-1)^p} - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)\left(\int_\Omega u^{\frac{(s+p-1)}{p}p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \le \bar{C}\int_\Omega u^{1+s}dx.$$

Posons $F(t) = e^{-\bar{C}t}\int_\Omega u^{s+1}dx$, alors comme dans le cas $q = 1$, on obtient

$$F' + Ce^{-c_1 t}F^{\frac{s+p-1}{s+1}} \leq 0$$

où $c_1 > 0$ ne dépend que de s, N, p et $\bar{C}$, et comme dans le cas précédent , si $F(0) \equiv \int_\Omega u_0^{s+1}dx$ est suffisamment petit nous obtenons l'extinction en temps fini . Comme Ω est borné sous la condition convenue sur $||u_0||_{L^2}$ on arrive à la conclusion, ce qui achève la preuve. □

Dans le cas où $q < p - 1$, un autre phénomène apparait, plus précisemment nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.7. Soit $1 < p < 2$ et soit $q < p - 1$, alors le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.35}$$

possède une solution globale u telle que $u(x,t) > 0$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \Omega$, et donc pas d'extinction en temps fini.

Démonstration. La preuve est basée sur un argument de sous et sur-solutions. Comme précédemment et sans perte de généralité supposons que $\Omega \subset B_1(0)$. Comme $p < 2$, alors $q < 1$. Commençons par construire une sous-solution. Soit $\mu(t) = (1-q)t^{\frac{1}{1-q}}$, alors $\mu(0) = 0$. Considérons w l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \lambda \dfrac{w^{p-1}}{|x|^p + 1} + w^q \text{ dans } \Omega, \\ w &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.36}$$

Il vient que $w \in L^\infty(\Omega)$. Posons $v(x,t) = \mu(\varepsilon t)w(x)$, alors v est solution de

$$\begin{aligned} v_t - \Delta_p v &= \varepsilon\mu^q(\varepsilon t)w(x) + \mu^{p-1}\Big(\varepsilon t)(\lambda \frac{w^{p-1}}{|x|^p + 1} + w^q\Big) \\ &\leq \lambda \frac{v^{p-1}}{|x|^p} + \varepsilon\mu^q(\varepsilon t)w(x) + \mu^{p-1}(\varepsilon t)w^q(x). \end{aligned}$$

Il est clair que $\mu^{p-1}(\varepsilon t) \leq c_0 \mu^q(\varepsilon t)$ pour tout $t \in [0, T]$ et $w \leq c_1 w^q$ dans Ω, ainsi on peut toujours choisir ε et C, ne dépendant que de T et c_1 tels que

$$v_t - \Delta_p v \leq \lambda \frac{v^{p-1}}{|x|^p} + v^q \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

ainsi v est une sous-solution de (4.35). et du fait que w est une sur-solution de (4.35) avec $v \leq cw$ dans $\Omega \times (0, T)$, ainsi par un argument de sous et sur-solution nous obtenons l'existence de solution $u \geq v$ dans $\Omega \times (0, T)$. Il est clair que $u(x, t) > 0$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. $\square$

Remarque 4.3. Le même résultat est obtenu pour

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \dfrac{u^q}{|x|^p} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.37}$$

où $1 < p < 2$ et $q < p - 1$, en effet on peut démontrer que le problème (4.37) possède une solution globale u telle que $u(x, t) > 0$ pour tout $t > 0$ and $x \in \Omega$. Pour s'en convaincre il suffit de reprendre les mêmes arguments que précédemment.

4.4 $\theta = 1$ et $p > 2$, résultats de non existence et d'explosion régionale

Dans cette section nous supposons que $\theta = 1$ et $p > 2$, et sous certaines conditions sur u_0 et f, nous allons démontrer un résultat de non existence pour $q > q_+(\lambda)$ et comme conséquence nous allons obtenir un résultat d'explosion régionale.

4.4.1 Résultat de non existence

Considérons le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u\,(x,0) &= u_0\,(x) \;\text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.38}$$

avec $\lambda < \Lambda_N$ et $q > q_+(\lambda)$. Par solution de (4.38) comme précédemment nous voulons dire une solution entropique obtenue comme limite de solutions de problèmes approximants.
Commençons par établir le résultat de non existence suivant :.

Théorème 4.8. Supposons que $q > q(\lambda)$ et soit v une solution du problème

$$\begin{cases} v_t - \Delta_p v &= 0 \text{ dans } \Omega_1 \times (0,T)\,, \\ v(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \times (0,T), \\ v\,(x,0) &= v_0\,(x) \;\text{ dans } \Omega_1, \end{cases} \tag{4.39}$$

où $v_0 \in L^\infty$. Supposons que $v(x,t) \geq C > 0$ dans $B_r(0) \times (t_1,t_2) \subset \Omega_1 \times (0,T)$, alors le problème (4.38) ne possède aucune solution entropique u telle que $u \geq v$ dans $\Omega_1 \times (0,T)$.

Démonstration. Nous procédons par l'absurde. Supposons que le problème (4.38) possède une solution u telle que $u \geq v$ dans $\Omega \times (0,T)$, alors $u(x,t) \geq C > 0$ dans $B_r(0)\times(t_1,t_2)$. Comme $-\Delta_p\left(\log\frac{r}{|x|}\right) = \frac{C_N}{|x|^p}$, en posant $w(x,t) = \varepsilon\,(t-t_1)^a\left(\log\frac{r}{|x|}\right)$, il vient que w est solution de

$$\begin{cases} w_t - \Delta_p w &\leq \varepsilon\left(\widetilde{t} - t_{21}\right)^{a(p-1)} \frac{C_2}{|x|^p} \text{ dans } B_r\,(0) \times (t_1,t_2), \\ w(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial B_r\,(0) \times (t_1,t_2), \\ w\,(x,t_1) &= 0 \text{ dans } B_r. \end{cases}$$

En choisissant ε suffisamment petit

$$\varepsilon\left(\widetilde{t} - t_2\right)^{a(p-1)} \frac{C_2}{|x|^p} \leq \lambda \frac{C^{p-1}}{|x|^p}$$

on arrive à

$$w_t - \Delta_p w \le u_t - \Delta_p u \text{ in } B_r(0) \times (t_1, t_2).$$

alors par le principe de comparaison classique on montre que $w \le u$ et donc $\lim_{|x|\to 0} u(x,t) = \infty$ uniformément pour $t \in (t_1, t_2)$. Nous allons de plus montrer

$$u \ge C|x|^{-\alpha_1+\epsilon} \text{ dans } B_\rho(0) \times \left(t_1, \tilde{t}\right) \subset B_r(0) \times (t_1, t_2). \tag{4.40}$$

modulo une translation, on peut toujours supposer que $t_1 = 0$. Fixons ε suffisamment petit et soit $\alpha > 1$ tel que $\frac{(p-1)(\alpha_1-\varepsilon)}{\alpha-1} < p$. Posons $w_n = t^\alpha z_n$ où z_n est solution du problème

$$\begin{cases} cz_n^a - \Delta_p z_n = \lambda \dfrac{z_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} & \text{dans } B_\rho(0), \\ z_n = \eta & \text{dans } \partial B_\rho(0), \\ z_0 = \eta, \end{cases} \tag{4.41}$$

avec $a = \dfrac{\alpha(p-1)}{\alpha - 1}$, $R << 1$ et c est une constante positive à détérminer ulterieurement. Comme dans la preuve du lemme 4.4 et l'utilisation de l'inégalité de Young nous permet d'obtenir

$$(w_n)_t - \Delta_p w_n \le \lambda \frac{w_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} + \alpha c_2.$$

Comme u est solution de (4.38) et du fait que $u(x,t) \to \infty$ quand $|x| \to 0$ uniformément en $t \in (t_1, t_2)$, on peut choisir ρ de manière à avoir $u^q(x,t) \ge \alpha c_2$ dans $B_\rho(0) \times (0, t_2)$. Ce qui nous amène à conclure que

$$\begin{cases} (w_n)_t - \Delta_p w_n & \le & \lambda \dfrac{w_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} + \alpha c_2 \text{ dans } B_\rho \times (0, T_1), \\ w_n(x,t) & = & t^\alpha \eta \text{ sur } \partial B_\rho \times (0, T_1), \\ w_n(x, 0) & = & 0 \text{ dans } B_\rho. \end{cases} \tag{4.42}$$

Choisissons à présent η suffisamment petit, l'usage d'un principe de comparaison et d'un procédé d'itération nous permettent de conclure que

$$u \geq w_n \text{ in } B_\rho \times (0, T_1) \text{ pour tout } n \in I\!N. \tag{4.43}$$

Par les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du lemme 4.4 on montre que $z_n \to z$ fortement dans $W_0^{1,p}(B_\rho)$ où z est l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} cz^{\frac{\alpha(p-1)}{\alpha-1}} - \Delta_p z = \lambda \dfrac{z^{p-1}}{|x|^p} & \text{dans } B_\rho, \\ z = \eta & \text{sur } \partial B_\rho. \end{cases} \tag{4.44}$$

Il est à noter que $z_A(x) = A|x|^{-\alpha_1+\varepsilon}$, pour$A$ petit, est une sous-solution de (4.44), ainsi par le lemme 1.1 on conclut que $z \geq z_A$, par passage à la limite on arrive à (4.40) . Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_r)$, avec $r << \rho$, L'usage de l'inégalité de Picone comme dans [9] on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |\nabla\varphi|^p \, dx &\geq \int_{B_r(0)} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi|^p \, dx \\ &\geq \int_{B_r(0)} u^{q-(p-1)} |\varphi|^p \, dx + \lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx - \int_{B_r(0)} \frac{u_t}{u^{p-1}} |\varphi|^p \, dx. \end{aligned}$$

Par un intégration par rapport au temps et (4.40), il s'en suit que

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1) \int_{B_r(0)} |\nabla\varphi|^p \, dx \;\; &\geq \;\; C' \int_{B_r(0)\times(t_1,t_2)} |x|^{-\alpha_1(q-(p-1))} |\varphi|^p \, dxdt + \\ &+\lambda \int_{B_r(0)\times(t_1,t_2)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dxdt - \int_{B_r(0)\times(t_1,t_2)} \frac{u_t}{u^{p-1}} dxdt. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
(t_2 - t_1) \int_{B_r(0)} |\nabla \varphi|^p \, dx \quad \geq \quad & C' (t_2 - t_1) \int_{B_r(0)} |x|^{-\alpha_1 (q-(p-1))} |\varphi|^p \, dx + \\
& + \lambda (t_2 - t_1) \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx \\
& - \frac{1}{2-p} \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{u^{p-2}(t_2, x)} - \frac{1}{u^{p-2}(t_1, x)} \right) |\varphi|^p \\
\geq \quad & C' (t_2 - t_1) \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^{\alpha_1 (q-(p-1))}} + \lambda (t_2 - t_1) \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} + \\
& - \frac{1}{2-p} \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{u^{p-2}(t_2, x)} \right) |\varphi|^p \, dx.
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} |\nabla \varphi|^p \, dx + \frac{1}{2-p} \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{u^{p-2}(t_2, x)} \right) |\varphi|^p \, dx \geq C' \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^{\alpha_1 (q-(p-1))}} + \\
+ \lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx.
\end{aligned}$$

Notons que $u(x,t) \geq c$ *dans* $B_r(0) \times (t_1, t_2)$, par l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-p} \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{u^{p-2}(t_2, x)} \right) |\varphi|^p \, dx \quad & \leq \quad C \int_{B_r(0)} |\varphi|^p \, dx \\
& \leq \quad C \int_{B_r(0)} |\nabla \varphi|^p \, dx.
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\int_{B_r(0)} |\nabla \varphi|^p \, dx \geq C' \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^{\alpha_1 (q-(p-1))}} dx + \lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx,$$

Comme $q > \left((p-1) + \frac{p}{\alpha_1} \right)$, alors $\alpha_1 (q - (p-1)) > p$, et on arrive à une contradiction à l'inégalité de Hardy-Sobolev, et d'où le résultat de non existence. □

Corollaire 4.1. Supposons que la donnée initiale u_0 vérifie

$$u_0(x) \geq C \text{ dans } B_r(0) \subset \Omega, \tag{4.45}$$

alors le problème (4.38) ne possède pas de solution positive.

Démonstration. Soit w une solution de type Barenblatt de l'équation

$$v_t - \Delta v = 0,$$

alors w est donnée par

$$w(x,t) = t^{-\gamma N}\Big(M - \frac{(p-2)\gamma^{\frac{1}{p-1}}}{p}\xi^{\frac{p}{p-1}}\Big)_+^{\frac{p-2}{p-1}}$$

où $M > 0$ est une constante positive, $\gamma = \frac{1}{N(p-2)+p}$ et $\xi = \frac{|x|}{t^\gamma}$. On pose $v(x,t) = w(x,t+s)$, en choisissant M, T_1 et s tels que

$$\begin{cases} v_t - \Delta_p v &= 0 \text{ dans } B_r(0) \times (0,T_1) \\ v(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial B_r(0) \times (0,T_1) \\ v\,(x,0) &\leq \frac{C}{2} \text{ sur } \partial B_r(0). \end{cases} \tag{4.46}$$

Comme $u_0(x) \geq C$ dans $B_r(0) \subset \Omega$, alors par comparaison nous pouvons conclure que $u \leq v$ dans $B_r(0) \times (0,T_1)$. Le théorème 4.8 permet de conclure à lo non existence. □

Remarque 4.4. 1. Le même résultat de non existence reste valable pour le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + f\,(x,t) \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u\,(x,0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

si l'on suppose que $f(x,t) \geq C > 0$ dans $B_r(0) \times (t_1,t_2) \subset \Omega \times (0,T)$.

2. Sous les conditions du théorème 4.8 et avec un calcul similaire on peut aussi démontrer que le problème (4.38) ne possède aucune supersolution u avec $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega \times (0,T))$ et $\lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \in L^1(\Omega \times (0,T))$

4.4.2 Blow-up régional pour les problèmes d'approximation

Comme conséquence aux résultats de non existence précédents nous allons démontrer un résultat de blow up pour certains problèmes approximants.
Par la suite nous aurons besoin de l'inégalité de Harnack suivante, dont la démonstration peut être retrouvée dans [51].

Théorème 4.9. (Inégalité de Harnack faible). Supposons que u est une solution positive du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u &= f(x,t) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.47}$$

où $p > 2$, $f(x,t) \leq M$ et $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$. De plus supposons que $u(x,t_0) > 0$, alors il existe une constante $B > 1$ ne dépendant que de N et de p, telle que

$$\forall (x_0,t_0) \in \Omega \times (0,T), \forall r, \theta > 0 \text{ tel que } B_{4r}(x_0) \subset \Omega \text{ et } t_0 + \theta < T \text{ on a}$$

$$\int_{B_r(x_0)} u(x,t_0)dx \leq B\left\{ \left(\frac{r^p}{\theta}\right)^{\frac{1}{p-2}} + \left(\frac{\theta}{r^p}\right)^{\frac{N}{p}} \left[\inf_{B_r(x_0)} u(.,t_0+\theta)\right]\right\}.$$

Nous avons alors le lemme :

Lemme 4.5. Soit u_n la solution minimale positive du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_p u_n &= \lambda a_n(x) u_n^{p-1} + g_n(u_n) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n(x,0) &= u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.48}$$

où $a_n(x) = \min\{n, \dfrac{1}{|x|^p}\}$ et $g_n(s) = \min\{n, s^q\}$. Supposons que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ est telle que $u_0 \geq c > 0$ dans $B_\eta(0) \subset \Omega$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $r(\alpha) > 0$ avec $B_{4r}(0) \subset \Omega$, tel que

$$\int_{B_r} u_n(x,t)dx \to \infty \text{ quand } n \to \infty \text{ si } t \geq T(\alpha). \tag{4.49}$$

Démonstration. L'existence de solution minimale positive est démontrée en utilisant un argument de monotonie et d'estimations a priori. Il est clair que $u_n \leq u_{n+1}$. Nous allons procéder par un raisonnement par l'absurde, supposons que pour tout $r_0 > 0$ tel que $B_{4r_0}(0) \subset\subset \Omega$, on ait

$$\int_{B_{r_0}} u_n(x,\tau)dx \leq C(\tau) \text{ pour chaque } n \text{ et pour chaque } t \geq T.$$

Comme $\{u_n\}_n$ est une suite croissante, nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable $u(x,\tau) \in L^1(B_{r_0})$ telle que $u_n(x,\tau) \uparrow u(x,\tau)$ pour tout $x \in B_{r_0}$. En choisissant r suffisamment petit on a alors $u_0 \geq c_0 > 0$ dans B_r, alors comme dans la démonstration du théorème 4.8 nous obtenons que $u \geq u_n \geq c > 0$ in $B_r(0) \times (\frac{\tau}{2}, \tau)$. Par utilisation de l'inégalité de Harnack du théorème 4.9 nous arrivons à $\displaystyle\int_{B_{r_0}} u_n(x,t)dx \leq C(r_0,\tau)$ pour tout $0 < t \leq \tau$. Il en découle alors $\displaystyle\int_{B_{r_0}} u(x,t)dx < \infty$ pour tout $0 < t \leq \tau$.

Par un raisonnement similaire à celui émis dans la preuve du théorème 4.8 nous pouvons voir que

$$\lim_{|x|\to 0} u(x,t) = \lim_{|x|\to 0}\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \infty \text{ uniformément pour } t \in (\frac{\tau}{2}, \tau)$$

et

$$u_n(x,t) \geq w_n(x,t) \text{ dans } B_R \times (t_1,t_2) \tag{4.50}$$

où w_n est la solution de (4.42) obtenue dans la section précédente.

Let $\phi \in C_0^\infty(B_r(0))$ où $r_0 << 1$, alors $(x,t) \in B_r(0) \times (\frac{\tau}{2}, \tau)$, nous obtenons

$$\int_{B_{r_2}} |\nabla\phi|^p dx \geq \int_{B_{r_2}} \frac{-\Delta_p u_n}{u_n^{p-1}} |\phi|^p dx.$$

et par suite

$$\int_{B_{r_2}} |\nabla\phi|^p dx \geq \lambda \int_{B_{r_2}} a_n(x)|\phi|^p dx + \int_{B_{r_2}} \frac{g_n(u_n)}{u_n^{p-1}}|\phi|^p dx - \int_{B_{r_2}} \frac{\partial_t u_n}{u_n^{p-1}}|\phi|^p dx.$$

Soit $\frac{\tau}{2} < t_1 < t_2 < \tau$. En intégrant sur (t_1,t_2) il en découle que

$$(t_2 - t_1)\int_{\Omega} |\nabla\phi|^p dxdt \geq \lambda(t_2 - t_1)\int_{\Omega} a_n(x)|\phi^p|dx +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{r_2}} \frac{g_n(u_n)}{u_n^{p-1}}\phi^p dxdt - \frac{1}{p-2}\int_{B_{r_2}} \frac{\phi^p}{u_n(x,t_2)^{p-2}}dx.$$

comme $\{u_n\}_n$ est croissante, par passage à la limite $n \to \infty$ et par le fait que $-\dfrac{\phi^p}{u_n(x,t_2)^{p-2}} \geq -\dfrac{\phi^p}{u_1(x,t_2)^{p-2}}$, nous obtenons

$$(t_2 - t_1)\int_{\Omega} |\nabla\phi|^p dxdt + \int_{\Omega} \frac{|\phi^p|}{u_1(x,t_2)^{p-2}}dx \geq \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{r_0}} u^{q-(p-1)}|\phi|^p dxdt.$$

Comme $(x,t) \in B_{r_0}\times(t_1,t_2)$, donc $\dfrac{1}{u^{p-2}(x,t_1} \leq C$ et $u^{q-(p-1)} \geq C|x|^{-(q-(p-1))(\alpha_1-\varepsilon)}$ pour chaque $\varepsilon > 0$, ainsi nous arrivons à

$$\int_{B_{r_2}} |\nabla\phi|^p dx \geq C\int_{B_{r_2}} \frac{|\phi|^p}{|x|^{-(q-(p-1))(\alpha_1-\varepsilon)}}dx.$$

En choisissant ε petit de sorte à avoir $(q-(p-1))(\alpha_1-\varepsilon) > p$, nous obtenons une contradiction à l'inégalité de Hardy-Sobolev. Ainsi pour tout $t \in (0,T)$ nous avons

$$\int_{B_r(0)} u_n(x,t)dx \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

$\square$

Comme conséquence aux résultats précédents nous avons le résultat de bolw-up régional suivat :

Théorème 4.10. Soit u_n la solution minimale positive du problème (4.48), avec $u_0 \geq c > 0$ dans $B_\eta(0) \subset \Omega$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $r(\alpha) > 0$ vérifiant $\lim u_n(x_0,t_0) = \infty$ pour tout $x_0 \in B_r(0)$ et $t \geq T(\alpha)$.

Remarque 4.5. Le même résultat de blow-up reste valable pour les problèmes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_p u_n &= \lambda a_n(x)u_n^{p-1} + g_n(u_n) + f(x,t) \text{ dans } \Omega\times(0,T), \\ u_n(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega\times(0,T), \\ u_n(x,0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où $f(x,t) \geq C > 0$ dans $B_r(0) \times (t_1, t_2) \subset \Omega \times (0,T)$

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, *Multiplicity Result for Quasilinear Elliptic Problems with General Growth in the Gradient.* Journal : Adv. Nonlinear Stud. **8**, no. 2 (2008), 289-301.

[2] B. Abdellaoui, E. Collorado, I. Peral,*Some improved Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Calc. Var. **23**,(2005), 327-345.

[3] B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio, I. Peral *Some Remarks on Elliptic Problems with Critical Growth in the Gradient.* J. Diff. Eq. **222** (2006), 21–62.

[4] B. Abdellaoui, V. Felli, I. Peral,*Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian., Boll.Unione Mat. Ital. Sez. B . (8)*, 9, (2006), no.2, 445-484.

[5] B. Abdellaoui, D. Giachetti, I. Peral, M. Walias *Elliptic problems with nonlinear terms depending on the gradient and singular on the boundary.* to appear in Nonlinear Analysis (2010). doi : 10. 1016/j.na.2010. 10. 008.

[6] B. Abdellaoui, D. Giachetti, I. Peral, M. Walias *The equation* $-\Delta(u^m) - \lambda\frac{u^m}{|x|^2} = |Du|^q + cf(x)$ *: existence and non existence depending on the parameter* m, q, preprint.

[7] B. Abdellaoui, S. Merchán, *General multiplicity result for an extended Kardar Parisi Zhang model*, preprint.

[8] B. Abdellaoui, S.E. Miri, I. Peral, T.M. Touaoula, *Some remarks on quasilinear parabolic problems with singular potential and a reaction term.* to appear.

[9] B. Abdellaoui, I. Peral. Existence and non existence results for quasilinear elliptic equations involving the plaplacian with a critical potential. Annali di Matematica. 182 (2003) 247-270.

[10] B. Abdellaoui, I. Peral, *A note on a critical problem with natural growth in the gradient*, Jour. Euro. Math. Soc, **6**,(2006), 119-136

[11] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear parabolic equations related to Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities.* NoDEA. 14 (2007), no. 3-4, 335-360.

[12] B. Abdellaoui, I. Peral, *The Equation* $-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = |\nabla u|^p + cf(x)$, *the optimal power*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (**5**) Vol VI, 2007, 159-183.

[13] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, *Breaking of resonance and regularizing effect of a first order term in some elliptic equations*, Ann. I. H. Poincaré-AN **25** (2008), 969-985.

[14] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, *Influence of the Hardy potential in a semilinear heat equation.* Proc. Royal. Soc. Edinburgh. Sect A, 139, (2009), 897-926.

[15] B. Abdellaoui, I.Peral, A. Primo, Optimal results for parabolic problems arising in some physical models with critical growth in the gradient respect to a Hardy potential, Adv. Math. Vol. **225**, no. 6, (2010), 2967-3021

[16] J.A. Aguilar, I. Peral, *Positive radial solutions of quasilinear equations involving supercritical growth.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 5 (1998), no. 3, 309-331.

[17] J.A. Aguilar, I. Peral *Global behaviour of the Cauchy Problem for some Critical Nonlinear Parabolic Equations*, SIAM Journal in Mathematical Analysis 31 (2000), no. 6, 1270-1294.

[18] N.E. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures* SIAM J. Math. Anal., **24**, (1993), 23-35.

[19] W. Allegretto, Y. X. Huang *A Picone's identity for the* $p-$ *Laplacian and applications*, Nonlinear Ana. T.M.A. **32**, no. 7, (1998), 819-830.

[20] A. Alvino, A. Cianchi, V. Maz'ya, A. Mercaldo, *Well-posed elliptic Neumann problems involving irregular data and domains* Ann. I. H. Poincaré-AN **27** (2010), 1017-1054.

[21] Ambrosetti, A. Rabinowitz, P.H., *variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis **14** (1973), 349-381.

[22] David Arcoya, Sara Barile, Pedro J. Martinez-Aparicio, Singular quasilinear equations with quadratic growth in the gradient without sign condition, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 350 (2009) 401-408.

[23] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P. J. Martinez-Aparicio, L. Orsina, F. Petitta, *Existence and non-existence of solutions for singular quadratic quasilinear equations*, J. Differential Equations, **246** (2009) 4006-4042.

[24] D. Arcoya, L. Boccardo, T. Leonori, A. Porretta, *Some elliptic problems with singular natural growth lower order terms*, J. Differential Equations, **249** (2010) 2771-2795.

[25] P. Baras, J. Goldstein, *The heat equation with a singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 121-139.

[26] P. Baras, M. Pierre *SingularitÚs Úliminables pour des Úquations semi-linÚaires,* Ann. Inst. Fourier **34**, no. 1 (1984), 185-206.

[27] G. Barles, F. Murat, Uniqueness and the maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions, Arch. Rational Mech. Anal. 133 (1995), no. 1, 77-101.

[28] G. Barles, A-P. Blanc, C. Georgelin, M. Kobylanski, Remarks on the maximum principle for nonlinear elliptic PDEs with quadratic growth conditions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 28 (1999), no. 3, 381-404.

[29] G. Barles, A. Porretta, Uniqueness for unbounded solutions to stationary viscous HamiltonJacobi equations, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa Cl. Sci. (5) 5 (2006), 107-136.

[30] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, M. Pierre, J.L. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. **22** (1995), 241-273.

[31] M.F. Betta,*Neumann problems : comparison results.* Rend. Accad. Sci. Fis. Nat. Napoli. (4) **57** (1990), 41-58.

[32] F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M. Porzio, Uniqueness of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower order term and right-hand side in L1. A tribute to J. L. Lions, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 239-272.

[33] F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M. Porzio, Uniqueness results for nonlinear elliptic equations with a lower order term, Nonlinear Anal. 63 (2005), 153-170.

[34] D. Blanchard, *Truncation and monotonicity methods for parabolic equations.* Nonlinear anall. **21** (1993), 725-43.

[35] D. Blanchard, F. Murat, *Renormalized solution of nonlinear parabolic problems with L^1 data : existence and uniqueness.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997), no. 6, 1137-1152.

[36] D. Blanchard, F. Murat, H. Redwane *Exixtence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems.* J. Differential Equations. **177** (2001), 331-374.

[37] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989), 149-169.

[38] L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat, *A unified representation of two existence results for problems with natural growth*, Research Notes in Mathematics **296** (1993), 127-137.

[39] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. H. Poincaré **13**, (1996), 539-551.

[40] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations*, J. Anal. Math. **73**, (1997), 203-223.

[41] L. Boccardo, T. Gallouët, J.L. Vázquez *Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restrictions on the data.* J. Differential Equations **105** (1993), no. 2, 334-363

[42] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Existence des solutions non bornées pour certains équations quasi-linéaires*, Portugal Math., **41**, (1982), 507–534.

[43] L. Boccardo, M. M. Porzio *Quasilinear elliptic equations with subquadratic growth*,J. Differential Equations, Volume **229**, Issue 1, (2006), 367-388.

[44] H. Brezis, X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solution,* Boll. Unione. Mat. Ital. Sez. B, **8**, (1998), 223-262.

[45] H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei *On a semilinear equation with inverse-square potential.* Selecta Math. 11, (2005), 1-7.

[46] Brezis, H., Kamin, S., *Sublinear elliptic equations in* $I\!R^N$, Manuscripta Math. **74**, (1992), pp. 87-106.

[47] A. Dall'aglio, *Approximated solution of equations with* L^1 *data. Application to the H-convergence of quasilinear parabolic equations* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **170** (1996), 207-240.

[48] A. Dall'aglio, D. Giachetti, I. Peral, *Results on parabolic equations related to some caffarelli-Khon-Nirenberg inequalities.* Siam J. Math. Anal, 36, (2004), no. 3, 691-716.

[49] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (**4**), 28(1999), no. 4, 741–808.

[50] J. I. Díaz, Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. Vol I. Elliptic Equations, Pitman, London, 1985

[51] E. DiBenedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[52] R. Di Nardo, *nonlinear elliptic and parabolic equations with measure data*, Thèse de Doctorat, Université FEDRICO II, Napoli, 2008.

[53] J. Droniou, A. Prignet, *Equivalence between entropy and renormalized solutions for parabolic equations with smooth measure data*, NoDEA **14** (2007), 181-205.

[54] L. Dupaigne, M. Ghergu, V. Radulescu, *Lane-Emden-Fowler equations with convection and singular potential*, J. Math. Pures Appl. **87** (2007), 563-581.

[55] J. R. Esteban, J. L. Vázquez, *Homogeneous diffusion in* $\mathbf{R}$ *with power-like nonlinear diffusivity.* Arch. Rational Mech. Anal. 103 (1988), no. 1, 39-80.

[56] V. Ferone, B. Messano, Comparison and existence results for classes of nonlinear elliptic equations with general growth in the gradient, Adv. Nonlinear Stud. 7 (2007), no. 1, 31-46.

[57] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 13 (1966), 109-124.

[58] M. Fukushima, K. Sato, *On the closable part of pre Dirichlet forms and finite support of the underlying measures* Osaka. J. Math. **28** (1991), 517-535.

[59] V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov, A. A. Samarskii, *Unbounded solutions of the Cauchy problem for the parabolic equation* $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$. Doklady AN SSSR, Ser. Math. Phys. 252 (1980) 1362-1364 (in Russian) ; English translation : Sov. Phys. Dokl. 25 (1980), 458-459.

[60] V. A. Galaktionov, H. A. Levine, *A general approach to critical Fujita exponents in nonlinear parabolic equations.* Nonlinear Analysis T.M.A. 324 (1998), 1005-1027.

[61] J. García Azorero, I. Peral, *Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Diff. Eq. 144 (1998), 441-476.

[62] M. Ghergu, V. Radulescu, *Bifurcation ad asymptotics for the Lane-Emden-Fowler equation*, C ; R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **337** (2003), 259-264.

[63] M. Ghergu, V. Radulescu, *Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term*, J. Math. Anal. Appl. **333** (2007), 265-273

[64] M. Ghergu, V. Radulescu, *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations : Monotonicity, Analytic, and Variational Methods,* Contemporary Mathematics and Its Applications, vol. 6, Hindawi Publ. Corp. 2008.

[65] M. Ghergu, V. Radulescu, *Singular elliptic problems : Bifurcation and asymptotic analysis.* Oxford University Press **37**, 2008.

[66] M. Ghergu, V. Radulescu, *Nonlinear PDEs : Mathematical Models in Biology, Chemistry and Population Genetics,* Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, Heidelberg, 2011

[67] D. Giachetti, F. Murat, *An elliptic problem with a lower order term having singular behavior*. Boll. Unione Mat. Ital. (**9**), 2(2009), no. 2, 349-370.

[68] D.Gilbarg, N. Trudinger, Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin/New-York, 1983.

[69] N.Grenon, Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 19 (2002), no. 1, 1-11.

[70] N. Grenon, F. Murat, A. Porretta, Existence and a priori estimate for elliptic problems with subquadratic gradient dependent terms, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006), 23-28.

[71] K Hansson, V.G. Maz'ya, I.E. Verbitsky, *Criteria of solvability for multidimensional Riccati equations*, Ark. Mat., **37**, (1999), 87-120.

[72] J. Kinnunen and T. Kuusi, *Local behavior of solutions of doubly nonlinear parabolic equations,* Math. Ann. Vol. 337 (2007), 705-528

[73] L. Korkut, M. Pašić, D. Žubrinić, *Some qualitative properties of solutions of quasilinear elliptic equations and applications*, J. Diff. Eq. **170**, (2001), 247-280.

[74] C. Leone, A. Porretta, *Entropy solutions for nonlinear elliptic equations in* L^1, Nonlinear Anal. T.M.A **32**, (1998), 325-334.

[75] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France **93**, (1965), 97ö107.

[76] P. Lindqvist,*On the equation* $\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$. Proc. Amer. Math. Soc. **109**, no. 1 (1990), 157-164.

[77] V. G. Maz'ya, *On weak solutions of the Dirichlet and Neumann problems*, Trans. Moscow Math. Soc. **20** (1969), 135-172.

[78] S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior*, Advanced Nonlinear Studies. 12 (2012), 19-48.

[79] S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and a reaction-absorbtion term*, à paraître dans Differential Equations and applications.

[80] F. Murat, *Equations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure*, Actes du 26èmes Congrés National d'Analyse Numérique. Les Karellis, France. (1994), A12-A24.

[81] M. Picone, *Sui valori eccezionali di un paramtro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine*, Ann. Scuola. Norm. Pisa. 11 (1910), 1-144.

[82] J.L. Vázquez, *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations*, Applied Math. and Optimization 12 (1984), no. 3, 191-202.

[83] A. Perrotta, A. Primo *Regularizing effect of a gradient term in problem involving the p-Laplacian Operator.* To appear in Advanced Nonlinear Studies.

[84] A. Porretta, *On the comparison principle for p-Laplace type operators with first order terms*, Resultsand developments , Quaderni di Matematica **23**, Department of Mathematics, Seconda Universit'a di Napoli, Caserta, 2008.

[85] A. Porretta, *Nonlinear equations with natural growth terms and measure data*, 2002-Fez conference on Partial Differential Equations, Electronic Journal of Differential Equations, Conference **09** 2002, 183-202.

[86] A. Prignet, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel*, Thèse de Doctorat. UMPA-ENS Lyon. (1997).

[87] A. Prignet, *Existence and uniqueness of entropy solution of parabolic problems with L^1 data*, Nonlinear Anal. T.M.P. 28 (1997), no. 12, 1943-1954.

[88] A. Prignet, *Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure*, Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. **6** (1997), 297-318.

[89] A. Primo Ramos, *Influence of the Hardy potential on elliptic and parabolic problems* , Thèse de Doctorat, Université Autonome de Madrid, 2008.

[90] P. Pucci , J. Serrin, *The Maximum Principle, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhäuser Basel (2007).

[91] P. Quittner, Ph. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States*, Birkhauser Advanced Texts, Birkhauser, Basel (2007)

[92] D. Ruiz, *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems*, J. Differential Equations **199** (1) (2004), 96-114.

[93] I. Shafrir, *Asymptotic behaviour of minimizing sequences for Hardy inequality.* Commun. Contemp. Math. **2** (2000), 151-189.

[94] G. Talenti, *Linear elliptic P.D.E's : level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions* Boll. Un. Mat. **4-B** (1985), 917-949.

[95] J.L. Vázquez, *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations*, Applied Math. and Optimization **12** (1984), no. 3, 191-202.

[96] F. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation.* Israel J. Math. 38, (1981), no. 1-2, 29-40.

[97] H. Zou, *A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations*, Calc. Var. 33 (2008) 417-437.

Index des notations