Université Abou Bakr
Belkaid de Tlemcen

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

Sur un problème à frontière libre

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 Octobre 2010

pour l'obtention du

Doctorat En Mathématiques
(spécialité Analyse fonctionnelle et Applications)

par

BENSID SABRI

Composition du jury

Président :	M. Benalili	Professeur à l'université Abou Bakr Belkaid.
Directeur de thèse :	S.M. Bouguima	Professeur à l'université Abou Bakr Belkaid.
Examinateurs :	M. Benchohra	Professeur à l'université Djilali Liabes.
	M. Benmouna	Professeur à l'université Abou Bakr Belkaid.
	M. Mechab	Professeur à l'université Djilali Liabes.
	R. Monneau	Professeur à l'école des Ponts ParisTech.
Invité :	B. Abdellaoui	Maitre de conférence à l'université Abou Bakr Belkaid.

Laboratoire des systèmes dynamiques et Applications — L 16

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie le BON DIEU tout puissant qui m'a donné la force et la volonté d'achever cette réalisation et nous lui rendons grâce.

Mes remerciments s'adressent en tout premier lieu à mon directeur de thèse Sidi Mohamed Bouguima qui a su guider mes travaux avec compétence, dynamisme et gentillesse. Travailler avec lui fut un grand honneur et une occasion de profiter de sa culture scientifique, de son intuition, de sa rigueur mathématique, mais aussi de ses qualités humaines. Merci de m'avoir révélé mon potentiel et de m'avoir introduit au monde de la recherche mathématique. Merci aussi de m'avoir aidé dans des moments difficiles au cours de mon parcours scientifique.

Je tiens a remercier Monsieur M. Benalili, Professeur à l'université de Tlemcen, qui m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence du jury, qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaisance à M. Benchohra, professeur à l'université de Bel-Abbes qui a accepté d'être membre du jury. Il a dirigé mes premiers pas dans l'univers des inclusions différentielles, il y a six ans et qui m'ont aidé dans mon parcours d'apprenti-chercheur.

Un grand merci aussi à M. Benmouna, professeur à l'université de Tlemcen et M. Mechab professeur à l'université de Bel-Abbes qui m'ont honoré en acceptant d'être examinateurs dans ce jury et d'être présents ici aujourd'hui.

Mes remerciments s'adressent aussi à Régis Monneau, professeur à l'école des Ponts ParisTech qui m'a fait le grand honneur de faire partie de ce jury. Je lui exprime mes remerciements pour ses intéressants commentaires et critiques à l'égard de cette thèse.

Je tiens à remercier aussi B. Abdellaoui, maitre de conférence à l'université de Tlemcen qui fait partie de mon jury comme invité pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je salue les membres du séminaire de travail à l'université de Tlemcen avec les différentes discussions enréchissantes qui m'ont aidé à améliorer ma culture mathématique.

Je tiens également à remercier tous les gens qui m'ont aidé de prés ou de loin dans mon travail, ainsi toutes mes collègues thésards ou autres sans oublier tous les enseignants qui ont influencé ma formation mathématique.

Vient maintenant le tour de ma famille qui a joué un rôle essentielle durant ces années. Merci à mes parents pour m'avoir toujours laissé le choix dans mes décisions et m'avoir soutenu pendant toutes ma formation. Merci aussi à mes deux frères.

Je dédie cette thèse
à mon père Mostefa,
à ma mère Fatiha,
à mes deux frères
Sofiane et Yacine.
et à ma femme Wassila.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Cette thèse porte sur l'étude mathématique d'un problème à frontière libre.

1 Résumé

Cette thèse présente des résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour des problèmes elliptiques à second membre discontinu. De tels problèmes apparaissent naturellement dans plusieurs phénomènes de sciences appliquées comme en physique des plasmas, milieux poreux et combustion. Ces problèmes formulés dans un domaine borné sont souvent appelés problèmes à frontière libre . La première partie de cette thèse est consacrée aux propriétés des solutions d'un problème elliptique à second membre discontinu défini sur la boule unité où la solution est nulle sur le bord. Nous proposons une méthode non variationnelle. Dans la deuxième partie, nous utilisons les résultats obtenus pour étudier l'effet de la perturbation sur la frontière libre. Cette étude est basée sur les méthodes locales ce qui permet de détecter aussi un phénomène de bifurcation. Dans la troisième partie, nous nous intéressons à la régularité de la frontière libre en utilisant la méthode des hodographes. Finalement la dernière partie de la thèse porte sur l'influence de la discontinuité dans les problèmes étudiés, une telle étude repose sur l'approche des inégalités variationnelles.

2 Motivations physiques

Les frontières libres sont des courbes ou surfaces inconnues qui séparent deux régions différentes. Un exemple pour motiver notre travail est l'équilibre d'un plasma confiné. Nous proposons dans cette section une description de l'expérience qui aboutit à la formulation mathématique de notre problème.

Le plasma consiste en un gaz ionisé porté à très haute température et à fusion nucléaire. Il n'y a pas de parois métalliques qui résistent à une telle température, pour cela, on a recours au champ magnétique pour assurer le confinement. L'objectif est de déterminer l'état d'équilibre du plasma, autrement dit un bon confinement. L'équilibre est étudié dans une enceinte toroidale (Tokamak) en présence des courants de confinement.

Le tokamak est une machine conçue pour réaliser une fusion thermonucléaire contrôlée. Cette réaction exige un bon confinement où les lignes du champ se referment sur elles mêmes. Pour cela on utilise une déscription MHD (magnétohydrodynamique) qui permet de donner une idée sur la géométrie du plasma.

L'evolution du champ magnétique dans un conducteur (un plasma dans le cas présent) est traduite par l'equation suivante

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) + \eta \Delta \overrightarrow{B}, \qquad (1)$$

où $\overrightarrow{B}$: champ magnétique (Tesla),

$\overrightarrow{V}$: vitesse de propagation du fluide (m^2/s)

$\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$: coefficient de diffusion magnétique (m/s).

μ_0 : la perméabilité et σ : la conductivité.

Cette formulation est obtenue à partir des equations de Maxwell et l'équation d'induction([93]).Les deux termes qui figurent dans l'équation (1) décrivent deux mécanismes différents : la convection et la diffusion.

Le premier terme dépend de la vitesse du fluide, le second dépend de la résistivité. Supposons maintenant que le deuxième terme de l'équation (1) soit nul. Ce cas limite est obtenu en considérant que la conductivité électrique σ est infinie. Ceci correspond à une déscription de la magnétohydrodynamique(MHD), où le champ évolue par convection, entraîné par la matière. Cela est traduit par l'équation (2)

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}), \qquad (2).$$

La convection est un mode de transport d'énergie qui peut se transformer en chaleur ou en électricité. La magnétohydrodynamique (MHD) est une déscription où se déplacent les molécules et les atomes ionisés par l'action des forces de Laplace (Magnétique et électrique). Les équations de la MHD s'obtiennent par la linéarisation des équations d'hydrodynamique et des équations de Maxwell . Les équations de la MHD idéale (non résistive). Dans le cas d'un plasma parfaitement conducteur et compressible, les équations MHD s'écrivent

$$\begin{cases} div(\overrightarrow{B}) = 0 \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 j \\ \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) \\ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{grad}p \end{cases}$$

où p est la force de pression et j la densité du courant.
La résolution de ce système d'équations dans un plasma est associée à des conditions aux limites adéquates qui conduisent à l'équation de Grad Shafranov.

Pour pouvoir simplifier l'équation de Grad Shafranov , on utilise le principe d'orthogonalisation où les lignes de flux sont des contours emboîtés les uns dans les autres comme un maillage. La résolution dans l'espace de flux équivaut à résoudre l'équation de Laplace. Autrement dit l'équation de Grad Shafranov se réduit à une équation contenant le Laplacien.

Pour plus de détails, voir [22].

3 Formulation mathématique

Afin de déterminer le comportement du flux du champ magnétique dans le plasma, nous formulons la configuration torroidale à l'aide des coordonnées cylindriques de sorte que le problème se réduit au cas bidimensionnel dans la section méridienne du tore. Cette dernière est un ouvert Ω dont le plasma occupe une région inconnue $\Omega_p \subset \Omega$.

La région $\Omega_v = \Omega \setminus \overline{\Omega_p}$ est supposé entièrement vide (absence de courants inducteurs extérieurs à l'enceinte). En utilisant les équations de Maxwell et les conditions satisfaites par le flux du champ magnétique que nous noterons par u, nous avons

$$\begin{cases} -\Delta u = j + J & \text{dans } \Omega_p, \\ -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_v \\ u = constante & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où j désigne la densité de courant intérieur supposée constante et J est la densité de courant du plasma.

Soit $\varepsilon > 0$, la perméabilité diélectrique et supposons que J soit proportionnelle au flux i.e $J = \varepsilon u$. En appliquant le principe du maximum, on obtient que $u > 0$.

En introduisant la fonction $u = v - 1$, on aura alors

$$(3) \begin{cases} -\Delta v = \lambda + \varepsilon v & \text{si } v > 1, \\ -\Delta v = 0 & \text{si } v < 1 \\ u = \gamma & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec λ un paramètre réels positif et γ est une constante donnée.

Le problème (3) peut s'écrire comme

$$(4) \begin{cases} -\Delta v = (\lambda + \varepsilon v)H(v-1) & dans \quad \Omega \\ u = \gamma & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où H est la fonction de Heaviside i.e

$$H(t) = 1 \quad si \quad t \geq 0 \quad et \quad H(t) = 0 \quad si \quad t < 0.$$

4 Historique du problème.

Dans cette section, nous considérons quelques travaux se rapportant à notre problème. Cet historique est en aucun cas exhaustive.

L.E. Frankael et M.S. Berger, en 1974 dans [66] ont initié l'étude des problèmes elliptiques à second membre discontinu. Les auteurs ont étudié des équations gouvernant le mouvement d'un fluide idéale et les méthodes d'approches sont purement variationnelles. Depuis, l'étude de ces problèmes n'a cessé de se développer. Nous signalons le travail de R.Temam [109] qui a généralisé le problème précédent pour une large classe de fonctions.

En 1981, R. Alexander et B. Fleishman [5] ont changé le cadre traditionnelle en introduisant un problème elliptique à second membre discontinu qui comporte la fonction de Heaviside. Ils démontrent l'existence des solutions et caractérisent leurs frontières libres.
Durant la même période, G. Keady [80] a repris le problème de Alexander et Fleishman pour étudier les propriétés qualitatives de l'ensemble "frontière libre" en précisant le diamètre et l'aire de l'ensemble.

Quelques années plus tard, A. Ambrosetti et M. Badiale [13] ont étudié un problème général qui comporte un second membre discontinu en utilisant les méthodes variationnelles. D'autres généralisations ont été faite pour le p-Laplacien. (Voir [20]).

5 Énoncé des résultats

Dans cette section, nous résumons les résultats essentiels de cette thèse.
Notre but dans cette thèse est d'étudier le problème à frontière libre suivant :

$$(P_h)\begin{cases} -\Delta u = f(u)H(u-\mu) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = h & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, f, h des fonctions données, H est la fonction de Heaviside et μ est un paramètre réel positive.

Avec des estimations à priori, nous montrons que le problème (P_h) se ramène au cas où $f(u) = \lambda$ une constante i.e

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda H(u-\mu) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = h & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons d'abord étudié le problème (P_0) dit problème réduit en démontrant l'existence de deux solutions radiales positives. Nous avons démontré le théorème suivant.

Supposons les hypothèses suivantes.

f_1) La fonction f est $k-$lipstchizienne, croissante, positive et il existe deux constantes $k, \beta > 0$ telles que $f(s) \leq ks + \beta$ avec $k < \min\{\lambda_1, 1\}$.

f_2) La fonction f est dérivable et constante sur l'intervalle de la forme $[0, c]$ où $c > \frac{\beta}{2n-k}$.

f_3) Il existe $\mu^* > 0$ telle que

$$\frac{f(\mu^*)}{\mu^*} = M_n,$$

où

$$M_n = \frac{n(n-2)}{(\frac{2}{n})^{\frac{2}{n-2}} - (\frac{2}{n})^{\frac{n}{n-2}}}.$$

L'existence des solutions du problème réduit (P_0) est donnée par ce théorème.

Théorème 0.1 *a) Supposons que $f_1), f_2)$ et $f_3)$ sont satisfaites. Alors le problème réduit (P_0) admet une solution $u > 0$ telle que la frontière libre $\{(r, \theta) \in \Omega; u(r, \theta) = \mu^*\}$ est une sphere de rayon $r_0 = (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$.*

b) Supposons que $f_1), f_2)$ sont satisfaites. Si

$$\frac{f(\mu)}{\mu} > M_n,$$

alors le problème réduit (P_0) possède deux solutions positives, radiales et leurs frontières libres sont respectivement deux sphères de rayons r_1 et r_2 différents de $(\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$.

Un deuxième résultat d'existence de solutions qui concerne le problème (P_h) obtenu en étudiant l'effet de la perturbation h sur les solutions du problème réduit (P_0) et leurs frontières libres. On a alors, le théorème suivant

Théorème 0.2 *Supposons que $f_1), f_2)$ sont satisfaites et il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\frac{f(\mu)}{\mu} > M_n,$$

où

$$M_n = \frac{n(n-2)}{(\frac{2}{n})^{\frac{2}{n-2}} - (\frac{2}{n})^{\frac{n}{n-2}}}, \qquad \textit{pour} \quad n \geq 3.$$

Soit $||h||_\infty = \max_{x \in \partial\Omega} |h(x)|$. Si la fonction h est assez petite avec $0 \leq ||h||_\infty < \mu$, alors le problème (P_h) possède deux solutions positives et leurs frontières libres sont des hypersurfaces analytiques.

La démonstration est basée sur la formulation d'une équation intégrale de la solution et en utilisant le théorème des fonctions implicites pour démontrer l'existence de la perturbation causée par h.

Dans le cas où le théorème des fonctions implicites ne fonctionne plus, un phénomène de bifurcation apparaît pour le problème réduit (P_0) et nous utilisons le théorème de bifurcation de Crandall-Rabinowitz pour démontrer l'émergence des solutions bifurquées.

Une autre question étudié dans cette thèse concerne la régularité optimale de la frontière libre. Après qu'on a démontré une régularité initiale de la frontière, nous avons utilisé la méthode des hodographes pour obtenir l'analyticité. On a le résultat suivant.

Proposition 0.1 *Sous les conditions du Théorème 0.2, la frontière libre est une hypersurface analytique.*

Nous nous intéressons ensuite à l'influence de la discontinuité sur les solutions. Pour cela, on a étudié le problème suivant

$$(S_0) \begin{cases} -\Delta u = f(u)H(\mu - u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'une des difficultés est que la technique utilisée dans le premier chapitre n'est pas applicable. En plus un résultat d'unicité apparaît.

Nous avons supposé les hypothèses suivantes

$H_1)$ La fonction $f(s)$ est positive pour $s > 0$, croissante et f est k-Lipschitzienne avec $k \in (0, \lambda_1)$.

$H_2)$ Pour $\mu > 0$, on suppose

$$\delta := \frac{f(\mu)}{\mu} > \lambda_1$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

$H_3)$ La fonction $f(s)/s$ est décroissante.

Le résultat principal obtenu est le théorème suivant.

Théorème 0.3 *Sous les hypothèses précédentes, le problème* (S_0) *possède une solution unique positive. En plus, l'ensemble* $\{x \in \Omega \quad u(x) = \mu\}$ *est une boule de rayon* $\rho \in (0,1)$ *centré à l'origine.*

La démonstration est basée sur la technique des inégalités variationelles combiné avec le théorème de point fixe.

1

Préliminaire

1.1 Rappels sur quelques espaces fonctionnels.

Le but de ce premier chapitre est d'introduire la terminologie et les outils qui seront utilisés tout au long de ce travail.

Soit Ω un sous ensemble ouvert, borné régulier et non vide de $\mathbb{R}^n, (n \geq 2)$. Soit $\partial\Omega$ sa frontière et $\overline{\Omega}$ la fermeture.

Soit $C^k(\overline{\Omega}), (k \geq 0)$ l'espace des fonctions continues dont toutes les dérivées jusqu'a l'ordre k sont continues sur $\overline{\Omega}$. On définit aussi l'espace

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

et on note $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.

Définition 1.1 *Pour $k \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$, on note $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions hölderiennes avec l'exposant α qui est constitué des fonctions $C^k(\overline{\Omega})$ telle que pour tout multi indice β, $|\beta| = k$*

$$\sup\{\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad x, y \in \Omega, x \neq y\} < \infty.$$

Définition 1.2 *Soit $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions de Lebesgue. L'espace de Sobolev, noté $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'a l'ordre m au sens des distributions s'identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall\alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$||u||_{m,p} = (\sum_{0\leq\alpha\leq m} ||D^\alpha u||_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.3 *On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|.\|_{m,p}$.*

Maintenant, on définit la trace d'une fonction u de $W^{m,p}(\Omega)$ sur le bord de Ω. Plus précisement :

Théorème 1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert régulier. Alors il existe une application linéaire et continue γ_0 dite "application trace" de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ telle que si $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$, l'image $\gamma_0(u)$ est la fonction $x \to u(x)$ bien définie sur $\partial\Omega$.*

La caractérisation des espaces de traces de ces fonctions est donnée par le théorème suivant

Théorème 1.2 *Les hypothèses étant celles du théorème précédent, on a alors*

$$W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \gamma_0(W^{m,p}(\Omega)).$$

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev, voir [1].

1.2 Résumé sur la théorie des systèmes elliptiques.

On commence cette section par rappeler les définitions d'une fonction et d'une frontière analytique.

1.2.1 Analyticité

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et définissons

$$D := (D_1, ..., D_n), \quad D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Définition 1.4 *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite analytique réelle sur Ω si pour tout $s_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et une constante $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telles que*

$$f(s) = \sum_k a_k(s - s_0)^k, \qquad |s - s_0| < r.$$

Définition 1.5 *Soit $w \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On dit que la frontière ∂w est analytique réelle si pour tout point $x_0 \in \partial w$, il existe $r > 0$ et une fonction analytique réelle $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ telles que, on a*

$$w \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r)/x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1}\}.$$

1.2.2 Système elliptique.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et définissons

$$D := (D_1, ..., D_n), \quad D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Soit $L_{kj}(y, D), 1 \leq j, k \leq n$ un opérateur différentiel avec des coefficients continus. Considérons le système d'equations aux dérivées partielles de variables $u^1, ..., u^n$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{kj}(y, D)u^j(y) = f_k(y) \quad dans \quad \Omega, \quad 1 \leq k \leq n \quad (1)$$

Définition 1.6 *Pour chaque équation, on introduit un nombre entier $s_k \leq 0$, appelé "Poids" et pour chaque variable un entier poids $t_j \geq 0$ telle que*

$$Ordre \quad L_{kj}(y, D) \leq s_k + t_j \quad dans \quad \Omega, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\max_k s_k = 0$$

On prend par convention $L_{kj}(y, D) \equiv 0 \quad si \quad s_k + t_j < 0$

Si on écrit

$$L_{kj}(y,D) = \sum_{|\alpha|\le s_k+t_j} a_{kj}^{\alpha}(y)D^{\alpha},$$

alors la *partie principale* de $L_{kj}(y,D)$ est notée $L'_{kj}(y,D)$ quand le polynôme

$$L'_{kj}(y,\xi) = \sum_{|\alpha|=s_k+t_j} a_{kj}^{\alpha}(y)\xi^{\alpha}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

est le *symbol principal* de $L_{kj}(y,D)$

Définition 1.7 *On dit que le système (1) est elliptique au point y_0 si la matrice*

$$(L'_{kj}(y_0,\xi))_{kj}$$

est non-dégénéré i.e $rang(L'_{kj}(y_0,\xi))_{kj} = n$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour chaque paire ce vecteur independent $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$, le polynôme

$$p(z) = det L'_{kj}(y_0, \xi + z\eta))$$

admet exactement $\mu = \frac{1}{2}degp$ racines avec une partie imaginaire positive et $\mu = \frac{1}{2}degp$ racines avec une partie imaginaire négative.

Remarque 1.1 *La condition des racines est vérifiée automatiquement si $n \ge 3$.*
Supposons que y_0 est fixé, les solutions de l'équation homogène avec les coefficients constants suivante

$$\sum_{j=1}^{n} L'_{kj}(y_0,D)u^j(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \le k \le n \quad (2)$$

qui ont la forme $u^j(y) = c^j e^{iy\xi}$, $c^j \in \mathbf{C}$, $0 \ne \xi \in \mathbb{R}^n$. Le système est non dégénéré ssi $c^1 = ... = c^n = 0$ pour tout $0 \ne \xi \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \Omega$ et toute solution est dite exponentielle , ce qui revient à dire que la condition de non-dégénèrence est vérifiée si la partie principale de (1) qui est (2) n'admet aucune solution exponentielle non triviale.

Considérons maintenant le système général d'équations

$$F_k(y, u(y), Du(y), ..., D^l u(y)) = 0 \quad dans \quad \Omega, \quad 1 \le k \le n \quad (3)$$

Où $u = (u_1, ..., u_n)$ et D^m représente la dérivée d'ordre m. Le système (3) est elliptique pour la solution u au point $y_0 \in \Omega$ s'ils existent les poids $s_1, ..., s_n$ et $t_1, ..., t_n$ tels que les équations linéarisées

$$\sum_{j=1}^{n} L_{kj}(y_0,D)\overline{u}^j(y) := \frac{d}{dt}F_k(y_0, u(y_0) + t\overline{u}, Du(y_0) + tD\overline{u}, ..., D^l u(y_0) + tD^l\overline{u})|_{t=0} = 0 \quad (SL)$$

constitue un système elliptique au point y_0 au sens précédent.

Supposons maintenant que Ω est de classe C^1 et soit $B_{hj}(y,D), 1 \le h \le \mu, 1 \le j \le n$ un opérateur différentiel avec des coefficients continus.

Définition 1.8 *On dit que l'ensemble des conditions aux bords*

$$\sum_{j=1}^{n} B_{hj}(y, D)u^j(y) = g_h(y) \quad sur \quad S \subset \partial\Omega, \quad 1 \leq h \leq \mu$$

est coercive au point y_0 pour le système (1) si

- *Le système (1) est elliptique au point y_0 et $2\mu = \sum_{j=1}^{n}(s_j + t_j) \geq 0$*
- *Ils existent des entiers $r_h, 1 \leq h \leq \mu$ tels que l'ordre de $B_{hj}(y_0, D)$ est au plus $r_h + t_j$*
- *Le problème homogène suivant*

$$\sum_{j=1}^{n} L'_{kj}(y_0, D)u^j(y) = 0 \quad dans \quad \{y \in \mathbb{R}^n : (y - y_0).\nu(y_0) > 0\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} B'_{hj}(y_0, D)u^j(y) = 0 \quad sur \quad \{u \in \mathbb{R}^n : (y - y_0)\nu(y_0) = 0\}$$

Où $1 \leq k \leq n, 1 \leq h \leq \mu$ et B'_{hj} la partie de B_{hj} d'ordre $r_h + t_j$ n'admet aucune solution exponentielle borné non triviale de la forme

$$u^j(y) = e^{i\xi(y-y_0)}\varphi_j((y - y_0).\nu(y_0)), 1 \leq j \leq n$$

pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal au vecteur normal $\nu(y_0)$ de $\partial\Omega$ au point y_0.

L'ensemble des conditions aux bords

$$G_h(y, u(y), Du(y), ..., D^l u(y)) = 0 \quad sur \quad S, \quad 1 \leq h \leq \mu \quad (4)$$

est coercive pour la solution u au point $y_0 \in S$ s'ils existent les poids $r_1, ..., r_n$ et $t_1, ..., t_n$ tels que l'ensemble des conditions aux bords

$$\sum_{j=1}^{n} B_{hj}(y_0, D)\overline{u}^j(y) := \frac{d}{dt}G_h(y_0, u(y_0) + t\overline{u}, Du(y_0) + tD\overline{u}, ..., D^s u(y_0) + tD^s\overline{u})|_{t=0} = 0$$

est coercive au point y_0 pour le système linéarisé (SL) au sens précédent.

Dans [83], on peut trouver les deux théorèmes classiques suivant

Théorème 1.3 *Supposons que $u^1, ..., u^n$ est solution de $(3) - (4)$ dans $\Omega \bigcup S$ et que F_k, $1 \leq k \leq n, \Phi_h, 1 \leq h \leq q$ sont des fonctions analytiques de $y, u^1, ..., u^n$ et leurs dérivées. Assumons que $u^j \in C^{t_j+r_0}(\overline{\Omega}), r_0 = max_h(0, 1 + r_h)$. Si les systèmes linéarisés de $(3) - (4)$ sont elliptiques et coercives au point 0, alors $(3) - (4)$ sont elliptiques et coercive dans un voisinage $(\Omega \bigcup S) \bigcap B_\varepsilon(0)$ pour un $\varepsilon > 0$.*

Théorème 1.4 *Supposons que $u = (u^1, ..., u^n)$ est solution de*

$$F_k(y, u(y), Du(y), ..., D^l u(y)) = 0 \quad dans \quad U, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3)$$

$$\Phi_h(y, u(y), Du(y), ..., D^l u(y)) = 0 \quad sur \quad S, \quad 1 \leq h \leq q \quad (4),$$

où $(3) - (4)$ est elliptique et coercive avec les poids $s_k, t_j, r_h, 1 \leq j, k \leq n, 1 \leq h \leq q$. Supposons que F_k, Φ_h sont des fonctions analytiques de y et des dérivées de u. Soit $r_0 = max_h(0, 1 + r_h)$. Si $u^j \in C^{t_j+r_0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\alpha > 0$, alors u^j sont analytiques dans $\overline{\Omega}$, $1 \leq j \leq n$.

1.3 Élément de la théorie de bifurcation.

Nous présentons ici deux théorèmes fondamentaux utilisés dans cette thèse. Le premier est le théorème des fonctions implicites et le deuxième concerne la bifurcation d'une valeur propre simple dû à Grandall-Rabinowitz.

Soient X, Y, Z trois espaces de Banach et $V \subset X, U \subset Y$ deux sous ensembles ouverts.

Théorème 1.5 *Soit $f \in C^k(V \times U, Z), k \geq 1$ et soit $(\lambda^*, u^*) \in V \times U$ telle que*

$$f(\lambda^*, u^*) = 0.$$

Si $f'_u(\lambda^*, u^*)$ est une application linéaire continue inversible, alors il existe un voisinage V^* de λ^* et un voisinage U^* de u^* et une application $g \in C^k(V^*, Y)$ telle que

$$f(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in V^* \times U^* \Leftrightarrow u = g(\lambda)$$

Pour la démonstration, on peut voir [6].

Maintenant, notons par $S = \{(\lambda, u) \in X \times Y, u \neq 0, f(\lambda, u) = 0\}$ l'ensemble des solutions non triviales de l'équation $f(\lambda, u) = 0$.
Il peut se passer que pour quelques valeurs du paramètre λ, il existe une ou plusieurs solutions de l'équation $f(\lambda, u) = 0$. Ces valeurs de λ sont appelées les points de bifurcation. La caractérisation de ces points est donnée par la proposition suivante

Proposition 1.1 *Une condition nécessaire pour que λ^* soit un point de bifurcation pour f est que la dérivée partielle $f'_u(\lambda^*, 0)$ est non inversible.*

En utilisant ce résultat, nous avons le théorème suivant.

Soient $N = Ker(f'_u(\lambda^*, 0))$ et R l'image de $f'_u(\lambda^*, 0)$. Introduisons les hypothèses suivantes

1. Supposons que la $dimN = CodimR = 1$.
2. La dérivée mixte $f''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0)u^* \notin R$, pour tout $u^* \in N$ avec $u^* \neq 0$.

Théorème 1.6 *(Crandall-Rabinowitz). Supposons que les deux hypothèses précédentes sont satisfaites.Alors $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation et il existe une courbe unique $(\lambda, \psi) : (-a, a) \to \mathbb{R} \times Z$ satisfaisant*

$$\begin{cases} f(\lambda(s), su^* + \psi(s)) = 0, \\ \lambda(0) = \lambda^*, \psi(0) = 0, \end{cases}$$

où $a > 0$ et Z est le complémentaire de N dans X.

Pour plus de détails, voir [55].

1.4 Fonction de Green et harmoniques sphériques.

Dans cette section, nous rappelons la théorie des harmoniques sphériques, ainsi quelques fonctions spéciales utiles pour la suite.

1.4.1 Harmoniques sphériques.

Soit $(x_1, .., x_n)$ les coordonnées cartésiennes d'un espace Euclidien de dimension q. Soit

$$\tau = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

alors la representation

$$x = \tau\xi$$

où $\xi = (\xi_1, .., \xi_q)$ et $|\xi| = 1$ représente un système de coordonnées de points sur la surface unité de dimension q.

On note par

$$\Delta_q = (\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_2})^2 + ... + (\frac{\partial}{\partial x_q})^2$$

l'opérateur de Laplace.

Définition 1.9 *Soit $H_n(x)$ un polynôme homogène de degré n en dimension q qui satisfait*

$$\Delta_q H_n(x) = 0.$$

Alors

$$S_n(\xi) = \frac{1}{\tau^n} H_n(\tau\xi) = H_n(\xi)$$

est dite harmonique sphérique de degré n en dimension q.

Définition 1.10 *Soit $P_n(t)$ un polynôme homogène de degré n avec les propriétés suivantes*

i) $P_n(1) = 1.$

ii) $P_n(t)$ *est la solution de l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}[(1 - t^2)\frac{d}{dt}P_n(t)] + n(n + 1)P_n(t) = 0.$$

Le polynôme $P_n(t)$ est dit "polynôme de Legendre".

Remarque 1.2 *Une formule qui détermine les polynômes de Legendre est la formule de Rodrigues suivante*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n]$$

pour un $t \in (0, 1)$.

Un résultat qui caractérise les harmoniques sphériques est donné par le théorème suivant

Théorème 1.7 *(Théorème d'addition).*
Soit $S_{n,j}$ une base orthonormale de $N(q, n)$ harmoniques sphériques d'ordre n et de dimension q. Alors

$$\sum_{j=1}^{N(q,n)} S_{n,j}(\xi)S_{n,j}(\eta) = \frac{N(q, n)}{w_q} P_n(\xi.\eta)$$

où $P_n(.)$ est un polynôme de Legendre de degré n et $w_q = \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{q\Gamma(\frac{q}{2})}$.

Un autre résultat nécessaire qui donne une propriété intéressante des polynômes de Legendre est le lemme suivant

Théorème 1.8 *Pour $q \geq 3, 0 \leq x < 1$ et $-1 \leq t \leq 1$. On a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(q) x^n P_n(q,t) = \frac{1}{(1+x^2-2xt)^{\frac{q-2}{2}}}$$

où $C_n(q) = \frac{\Gamma(n+q-2))}{\Gamma(q-2)\Gamma(n+1))}$.

Lemme 1.1 *Si $x = R\xi; y = \tau\eta$ et $R > \tau$, alors*

$$|x-y|^{2-q} = R^{2-q} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(q) (\frac{\tau}{R})^n P_n(\xi.\eta).$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [92].

1.4.2 Développement de la fonction de Green en harmoniques sphériques.

Cette sous section est consacrée au développement de la fonction de Green du Laplacien en harmoniques sphériques.

Soit $B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et w_n son volume.

Définition 1.11 *La solution fondamentale de l'équation de Laplace est donnée par*

$$G_0(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} lnr, & n = 2, \\ \frac{1}{n(2-n)w_n} r^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Ainsi la fonction de Green pour la boule unité est donnée par

$$G(x,y) = G_0(|x-y|) - G_0(|y||x - \frac{y}{|y|^2}|).$$

Voir [61], [62].

En utilisant les coordonnées polaires (r_0, θ) pour x et (r_0, θ') pour y, nous avons

$$G(r_0, \theta, r_0, \theta') = G_0(r_0\sqrt{2(1-cos\gamma)}) - G_0(\sqrt{1 + r_0^4 - 2r_0^2 cos\gamma}) \quad (A)$$

avec γ l'angle entre θ et θ'.

Maintenant, en utilisant le théorème d'addition précèdent, nous donnons un développement du second terme de (A). Nous avons

$$(C1) \quad G_0(\sqrt{1 + r_0^4 - 2r_0^2 cos\gamma}) = \frac{1}{n(2-n)w_n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+n-3)!}{l!(n-3)!} ((r_0)^2)^l P_l(n, cos\gamma)$$

avec

$$(C2) \quad P_l(n, cos\gamma) = \frac{nw_n}{N(n,l)} \sum_{m=1}^{N(n,l)} Y_{lm}(\theta) Y_{lm}(\theta')$$

où Y_{lm} est une base orthonormale d'harmonique sphérique de degré l et de dimension n et pour tout l, le nombre d'harmonique sphériques est

$$(C3) \quad N(n,l) = (2l+n-2)\frac{(l+n-3)!}{l!(n-2)!}$$

En utilisant (C1),(C2) and (C3), nous obtenons

$$(C4) \quad G_0(\sqrt{1+r_0^4-2r_0^2 cos\gamma}) = \frac{1}{(2-n)nw_n} - \sum_{l=1}^{\infty}\frac{r_0^{2l}}{2l+n-2}\sum_{m=1}^{N(n,l)} Y_{lm}(\theta)Y_{lm}(\theta')$$

D'autre part, nous utilisons le lemme 1.1 combiné avec le théorème d'addition pour obtenir

$$(C5) \quad G_0(|r_0\theta - r_0\theta'|) = \frac{r_0^{2-n}}{(2-n)nw_n} - r_0^{2-n}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l+n-2}\sum_{m=1}^{N(n,l)} Y_{lm}(\theta)Y_{lm}(\theta').$$

On remarque que les deux séries convergent uniformément dans $|\theta-\theta'| \geq \eta > 0$.
En combinant $(C4)$ et $(C5)$, nous obtenons le développement de la fonction de Green dans les harmoniques sphériques

$$G(r_0,\theta,r_0,\theta') = r_0^{2-n}\{\frac{r_0^{n-2}-1}{(n-2)nw_n} - \sum_{l=1}^{\infty}(\frac{1-r_0^{2l+n-2}}{2l+n-2})\sum_{m=1}^{n(N,l)} Y_{lm}(\theta)Y_{lm}(\theta')\}.$$

1.4.3 Quelques estimations utiles.

Lemme 1.2 *Soit x un vecteur fixe de la sphère unité ∂B_n dans la dimension n, alors il existe un système orthonormale $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ tel que les points de ∂B_n peuvent être représentés par*

$$\eta_n = cos\theta x + sin\theta\eta_{n-1}, \qquad pour \quad \theta \in [0,\pi],$$

avec $(x,\eta_n) = cos\theta$. Ici η_{n-1} est le vecteur unité dans l'espace engendré par $\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}$, et $(.,.)$ note le produit scalaire de x et η_n.

Preuve.
Tout d'abord, puisque $x_1 = x$ est différent de 0, alors il existe $(n-1)$-vecteurs $x_2,...,x_n$ tels que

$$S = \{x_1,x_2,...,x_n\}$$

est une base dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, nous utilisons le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt dans le sens suivant

$$y_n = x_1 = x$$

$$y_{n-1} = x_2 - c_1x_1$$

$$y_1 = x_n - c_{n-1}x_{n-1} - ...... - c_1x_1,$$

où c_i sont choisis pour orthogonaliser. Divisons y_i par sa norme $||y_i||$ pour trouver $\varepsilon_i = \frac{y_i}{||y_i||}, i = 1,2,...,n$.
Nous remarquons que puisque $\varepsilon_n = x$, alors, nous aurons que les points de ∂B_n sont représentés par

$$\eta_n = cos\theta x + sin\theta\eta_{n-1}$$

avec $\theta \in [0,\pi]$.

Lemme 1.3 *Soit $B_n(0,1)$ la boule unité de dimension n. Alors pour un $x \in \partial B_n(0,1)$.*

$$\int_{\partial B_n(0,1)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) \leq 2meas(\partial B_{n-1}(0,1))$$

où meas(.) est la mesure de Lebesgue.

Preuve.
Par le résultat du lemme précédent, on a

$$y = cos\theta x + \sin\theta \eta_{n-1},$$

avec $\theta \in [0,\pi]$.
D'autre part

$$\begin{aligned} |x-y| &= \sqrt{(x-y, x-y)} \\ &= \sqrt{||x||^2 + ||y||^2 - 2(x,y)} \\ &= \sqrt{2 - 2(x,y)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I := \int_{\partial B_n(0,1)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) &= \int_0^\pi \int_{\partial B_{n-1}(0,1)} (\sqrt{2-2cos\theta})^{2-n} (sin\theta)^{n-2} dw_{n-1}(y) d\theta \\ &= 2^{\frac{2-n}{2}} meas(\partial B_{n-1}(0,1)) \int_0^\pi (1-cos\theta)^{\frac{2-n}{2}} (sin\theta)^{n-2} d\theta \end{aligned}$$

Soit $cos\theta = t$, avec $t \in [-1,+1]$. Alors

$$\begin{aligned} I &= 2^{\frac{2-n}{2}} meas(\partial B_{n-1}(0,1)) \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\frac{2-n}{2}} (\sqrt{1-t^2})^{n-2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2^{\frac{2-n}{2}} meas(\partial B_{n-1}(0,1)) \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\frac{-1}{2}} (1+t)^{\frac{n-3}{2}} dt \\ &\leq 2^{\frac{-1}{2}} meas(\partial B_{n-1}(0,1)) \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\frac{-1}{2}} dt \\ &= 2meas(\partial B_{n-1}(0,1)). \end{aligned}$$

1.5 Rappel sur les inégalités variationnelles.

Nous rappelons ici quelques résultats essentiels que nous utilisons par la suite. Il s'agit de la théorie des inégalités variationnelles introduit et développé par G. Stampacchia.(Voir [83]).

Définition 1.12 *Soit X un espace de Banach reflexive avec un dual X'. On note par $< .,. >$ le produit dual entre X et X'.*
Soit $K \subset X$ un ensemble convexe borné et soit A un opérateur $A : K \to X'$.

L'inégalité

$$< Au, \xi - u > \geq 0 \qquad \forall \xi \in K.$$

est dite inégalité variationnelle.

Définition 1.13 *1)Un opérateur $A : K \to X'$ est dit monotone si*

$$< Au - Av, u - v > \geq 0 \qquad \forall u, v \in K.$$

2) Un opérateur A est dit strictement monotone si

$$< Au - Av, u - v >= 0 \quad \textit{implique} \quad u = v.$$

Un premier résultat concernant l'inégalité variationnelle est donné par le théorème suivant

Théorème 1.9 *Soit K en ensemble convexe borné de X et soit $A : K \to X'$ un opérateur monotone et continue dans un espace de dimension finie. Alors, il existe*

$$u \in K : \quad < Au, v - u > \geq 0, \qquad \forall v \in K.$$

En plus, si l'opérateur A est strictement monotone alors la solution u est unique.

Un cas particulier que nous utilisons dans cette thèse est l'inégalité variationnelle suivante.

Soit $K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \quad dans \quad \Omega\}$, avec Ω un domaine borné.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on a l'inégalité

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(\xi - u)dx \geq \int_\Omega f(\xi - u)dx, \qquad \forall \xi \in K \quad (I)$$

Soit L un opérateur qui vérifie $< Lu, v >= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \qquad$ avec $u, v \in H_0^1(\Omega)$, alors on a

Théorème 1.10 *Soit u une solution de l'inégalité variationnelle (I). Alors il existe une mesure de Radon positive μ telle que*

$$Lu = f + \mu \quad dans \quad \Omega$$

avec

$$supp\mu \subset \Gamma := \{x \in \Omega, u(x) = \psi(x)\}$$

En particulier,

$$Lu = f \quad dans \quad \Omega \setminus \Gamma.$$

Un autre résultat qui caractérise la régularité de la solution de l'inégalité variationnelle est le théorème suivant

Théorème 1.11 *Soient $f \in L^p(\Omega)$, et u solution de l'égalité variationnelle (I). Alors $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha = 1 - \frac{n}{p}$.*

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [83].

2

Problème réduit

Ce premier chapitre consacré au problème réduit, est constitué de trois sections, la première concerne les résultats obtenues par A. Ambrosetti et M. Badiale en utilisant les méthodes variationnelle [13]. Dans la deuxième section, on généralise l'étude du problème réduit pour un p-Laplacien et finalement nous introduisons une méthode non variationnelle pour obtenir un résultat nécessaire pour détecter d'éventuelle phénomène de bifurcation.

2.1 Méthode variationnelle.

Dans cette section, nous résumons l'approche variationnelle utilisé par Ambrosetti et Badiale [13] pour démontrer l'existence des solutions du problème réduit (P_0). L'idée essentielle est d'utiliser le principe dual de Clark [54]. Ce principe à été introduit en 1981 par F. Clark pour l'étude des systèmes Hamiltoniens (Voir [54]). En 1989, A. Ambrosetti et M. Badiale [13] ont utilisé ce principe pour l'étude du problème elliptique avec second membre discontinu tu type

$$(A.B)\begin{cases} -\Delta u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, h est une fonction donnée et f une fonction qui peut avoir des discontinuités.

Un cas particulier du problème $(A.B)$ est notre problème à frontière libre suivant

$$(P_0)\begin{cases} -\Delta u = f(u)H(u-\mu) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où H est la fonction de Heaviside et f une fonction continue.

Définition 2.1 *Une solution du problème réduit (P_0) est une fonction $u \in W^{2,2}(\Omega) \bigcap W_0^{1,2}(\Omega)$, satisfaisant le problème (P_0) au sens des distributions.*

Soit λ_1 la première valeur propre du Laplacien et φ_1 la fonction propre correspondate.

Supposons les hypothèses suivantes.

$A_1)$ La fonction $f(u) \geq 0$, pour $u \geq 0$, f est $k-$lipschitzienne avec $k \in (0, \lambda_1)$ et croissante.

A_2) Il existe $\mu > 0$ tel que pour $n \geq 3$, on a

$$2\lambda_1 \frac{||\varphi_1||_{L^1}}{||\varphi_1||_{L^2}^2} < \frac{f(\mu)}{\mu}.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Supposons que les hypothèses A_1) et A_2) sont satisfaites, alors le problème (P_0) admet deux solutions $u, v \in W^{2,2}(\Omega) \bigcap W_0^{1,2}(\Omega)$.*
En plus, u, v sont positives, radiales et leurs frontières libres $\{x \in \Omega : u(x) = \mu\}$ et $\{x \in \Omega : v(x) = \mu\}$ sont respectivement deux sphères de $\mathbb{R}^n$ centrées à l'origine et de rayons $r_1, r_2 \in (0, 1)$.

Remarque 2.1 *Pour démontrer l'existence des solutions pour le problème réduit (P_0), la méthode variationnelle classique ne peut pas être appliquée directement puisque la fonctionnelle associée au problème (P_0) n'est pas de classe C^1 (le second membre étant discontinu).*

Étapes essentielles de la preuve du Théorème 2.1.

Soit $p(u) = f(u)H(u - \mu)$. Le problème (P_0) devient

$$\begin{cases} -\Delta u = p(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Par le principe du maximum classique, les solutions u sont positives.

Soit $m > 0$ (assez grand) telle que $P_m(u) := p(u) + mu$ est croissante, alors le problème réduit peut être formulé sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = P_m(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On définit la fonction multivoque suivante

$$\widehat{p}(s) := \begin{cases} P_m(s) & \text{si } s \neq \mu, \\ T = [m\mu, f(\mu) + m\mu] & \text{si } s = \mu, \end{cases}$$

et p^* la fonction inverse $\widehat{p}$, i.e.

$$p^*(\sigma) = s \Leftrightarrow \sigma \in \widehat{p}(s).$$

La fonction p^* est définie dans $\mathbb{R}$, continue et vérifie

$$p^*(\sigma) = \mu \Leftrightarrow m\mu \leq \sigma \leq f(\mu) + m\mu$$

Soit

$$P^*(\sigma) = \int_0^\sigma p^*(\tau)d\tau$$

Par le Théorème 2.6, p 17 de [15], la fonction $P^*(\sigma) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les auteurs définissent ensuite l'opérateur de Green $G \in (E, E)$ où $E = L^2(\Omega)$ par :

$$G(\sigma) = u \Leftrightarrow (-\Delta + m)u = \sigma, \quad u \in W^{2,2}(\Omega) \bigcap W_0^{1,2}(\Omega).$$

Soit
$$J : E \to \mathbb{R}$$
la fonctionnelle
$$J(\sigma) = \int_\Omega [P^*(\sigma) - \frac{1}{2}\sigma G(\sigma)]dx.$$
En utilisant un théorème classique (voir Théorème 2.9 p 22 de [15]), on affirme que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Avec ces préparations, on peut donner un premier résultat concernant la fonctionnelle J.

Proposition 2.1 *[12] Soit $\sigma \in E$ telle que $J'(\sigma) = 0$, alors $u = G(\sigma)$ est solution du problème réduit.*

Maintenant, il reste à déterminer les points critiques de la fonctionnelle J. Pour cela on a le lemme suivant

Lemme 2.1 *[12] Il existe $v \in E$ telle que $J(v) = \min_{u \in E} J(u)$. En plus $|\{x \in \Omega, v(x) = \mu\}| = 0$ avec $|.|$ la mesure de Lebesgue.*

Le lemme 2.1 affirme que la fonctionnelle J possède un minimum globale au point v, ce qui assure l'existence d'une solution du problème réduit (P_0). D'autre part, les auteurs ont montré que sous certaines conditions sur le comportement de la fonction f par rapport à μ, la fonctionnelle J possède un autre point critique obtenue par le théorème du col. Pour obtenir ce point, il suffit de vérifier que la fonctionnelle J possède une géométrie du col dite "Mountain pass geometry".

On a les trois lemmes suivants.

Lemme 2.2 *Supposons que*
$$2\lambda_1 \frac{||\varphi_1||_{L^1}}{||\varphi_1||^2_{L^2}} < \frac{f(\mu)}{\mu}.$$
Alors, pour un $m > 0$ suffisamment petit, $J(\frac{f(\mu)}{\mu}\varphi_1) < 0$.

Lemme 2.3 *Il existe ρ, α_0 telles que*
$$J(e) \geq \alpha_0, \qquad pour \quad e \in E, \quad ||e||_{L^{\frac{2n}{n+2}}} = \rho.$$

Le troisième lemme montre que la fonctionnelle J vérifie la confition de Palais-Smale.

Lemme 2.4 *Soit $u_n \in E$, une suite de $(PS)_c$ $(c \in \mathbb{R})$, i.e*
$$J(u_n) \to c \quad et \quad J'(u_n) \to 0.$$
Alors, il existe $z \in E$ avec $J(z) = c, J'(z) = 0$ telle que u_n converge faiblement vers z.

Nous renvoyons le lecteur vers [12] pour les démonstrations complètes de ces lemmes.

Par l'application du théorème du col [16], les auteurs affirment que la fonctionnelle J possède un autre point critique u qui est solution du problème réduit.

Il reste à montrer la symétrie des solutions et caractériser les frontières libres correspondantes. Pour cela, ils démontrent le résultat suivant.

Proposition 2.2 *Sous les conditions précédentes, on a*

i) Les points critiques u et v sont symétriques.

ii) $\frac{\partial u}{\partial x_n} < 0$ *et* $\frac{\partial v}{\partial x_n} < 0$ *pour* $x_n > 0$.

iii) $|\{x \in \Omega, u(x) = \mu\}| = 0$ *et* $|\{x \in \Omega, v(x) = \mu\}| = 0$, *avec* $|.|$ *la mesure de Lebesgue.*

La preuve est basée sur la symmetrisation de Steiner [76]. Pour plus de détails voir [12].

Ainsi, les points critiques u et v de la fonctionnelle J sont des solutions radiales du problème réduit (P_0) et leurs frontières libres sont des sphères de rayons $r_1, r_2 \in (0, 1)$. Ceci prouve le Théorème 2.1.

2.2 Généralisation au p-Laplacien.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude du problème réduit suivant

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta_p u = f(u)H(u-\mu) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est le p-Laplacien ($p > 2$).

Le caractère non linéaire du p-Laplacien impose qu'il n'est pas facile de trouver une fonctionnelle dual de classe C^1 comme on a utilisés dans la précédente section. Pour cela, D. Arcoya et M. Calahorrano [20] ont utilisés une théorie des points critiques pour des fonctionnelle non différentiable dite localement lipschitzienne. Cette théorie développée par K.C.Chang [52] considère les points critiques de la fonctionnelle comme des solutions d'un problème multivoque associé à (P_1). Plus précisément, la fonctionnelle associée au problème réduit (P_1) est donnée par

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u(x))dx$$

avec $F(u) = \int_0^u f(s)H(s-\mu)$.

Nous remarquons que la fonctionnelle J n'est pas Frechet differentiable.

Définition 2.2 *Une solution du problème (P_1) est une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution du problème multivoque suivant*

$$-\Delta_p u \in \widehat{f}(u) \qquad p.p \quad dans \quad \Omega$$

avec $\widehat{f}$ est une fonction multivoque donnée par

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} f(s) & si \;\; s \neq \mu, \\ [0, f(\mu)] & si \;\; s = \mu. \end{cases}$$

Le résultat suivant démontré par D. Arcoya et M. Calahorrano [20] montre q'une solution du problème réduit (P_1) au sens de cette définition est un point critique de la fonctionnelle J i.e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $0 \in \partial J(u)$ où $\partial J(u)$ est le gradient généralisé de J (Voir [52]).

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta_p$ avec une fonction propre correspondante φ_1. (Voir [19]).

Nous supposons les hypothèses suivantes

A_1') La fonction f est croissante et il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$f(s) \leq \alpha |s|^{p-1} + \beta \qquad \text{avec} \quad \alpha < \lambda_1.$$

A_2') Il existe un $\mu > 0$ telle que

$$\frac{(f(\mu))^{\frac{1}{p-1}}}{\mu} > \frac{p' m(\Omega) \lambda_1^{\frac{1}{p-1}} (\int_\Omega |\varphi_1|^p)^{\frac{1}{p-1}}}{(\int_\Omega \varphi_1)^{\frac{p}{p-1}}}$$

avec p' qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $m(.)$ la mesure de Lebesgue.

Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant

Théorème 2.2 *Supposons que A_1') et A_2') sont satisfaites, alors il existe deux solutions positives $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telles que*

$$-\Delta_p u = f(u) H(u - \mu) \qquad p.p \quad dans \quad \Omega.$$

En plus u, v sont radiales et $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ et $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$ avec $r = |x|$.

La preuve du Théorème 2.2 est basée sur l'artifice du gradient généralisé qui consiste à montrer qu'il existe une fonction qui minimise la fonctionnelle J. D'autre part, et pour obtenir l'autre point critique, nous utiliserons une version du théorème de col donné par K.C. Chang[52].
Pour la symétrie des solutions, le même argument de la section précédente fonctionne et permet de conclure que les solutions sont radiales.

Remarque 2.2 *Le théorème 2.2 est un cas particulier du résultat obtenu par D. Arcoya et M. Calahorrano [20]. Plus précisément, ils étudient le problème suivant*

$$(A.C) \begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + h(x) & dans \;\; \Omega, \\ u = 0 & sur \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

avec Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $h \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p' = \frac{p}{p-1}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction discontinue.
Nous avons appliqués le résultat obtenu pour un second membre de la forme $f(u)H(u - \mu)$. Nous signalons qu'un travail similaire à été obtenu par S.M. Bouguima [31] où l'auteur a amélioré le résultat de Arcoya et Calahorrano. Dans ce travail, S.M. Bouguima a utilisé la méthode des sous et sur solutions combiné avec le gradient généralisé pour éliminer l'hypothèse A_1'). Voir [31].

2.3 Méthode non variationelle

Dans cette section, nous proposons une approche différente que celles des deux premières sections pour étudier le problème réduit (P_0). Nous allons montrer qu'on peut obtenir plus d'informations sur les solutions et leurs frontières libres par une méthode non variationnelle. [24]. Pour cela, nous introduisons les hypothèses suivantes

f_1) La fonction f est $k-$lipstchizienne, croissante, positive et il existe deux constantes $k, \beta > 0$ telles que $f(s) \leq ks + \beta$ avec $k < \min\{\lambda_1, 1\}$.

f_2) La fonction f est dérivable et constante sur l'intervalle de la forme $[0, c]$ où $c > \frac{\beta}{2n-k}$.

f_3) Il existe $\mu^* > 0$ telle que

$$\frac{f(\mu^*)}{\mu^*} = M_n,$$

où

$$M_n = \frac{n(n-2)}{(\frac{2}{n})^{\frac{2}{n-2}} - (\frac{2}{n})^{\frac{n}{n-2}}}.$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. Il donne l'existence des solutions du problème réduit (P_0) et caractérise leurs frontières libres.

Théorème 2.3 *a) Supposons que $f_1), f_2)$ et $f_3)$ sont satisfaites. Alors le problème réduit (P_0) admet une solution $u > 0$ telle que la frontière libre $\{(r, \theta) \in \Omega; u(r, \theta) = \mu^*\}$ est une sphere de rayon $r_0 = (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$.*

b) Supposons que $f_1), f_2)$ sont satisfaites. Si

$$\frac{f(\mu)}{\mu} > M_n,$$

alors le problème réduit (P_0) possède deux solutions positives, radiales et leurs frontières libres sont respectivement deux sphères de rayons r_1 et r_2 différents de $(\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$.

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 2.5 *(Estimation à priori)*
Si u est une solution positive, radiale du problème réduit (P_0), alors $0 < u \leq \frac{\beta}{2n-k}$ dans Ω.

Preuve. Tout d'abord, soit $\overline{u}$ une sursolution du problème réduit vérifiant

$$(\widetilde{P}) \begin{cases} -\Delta \overline{u} = k\overline{u} + \beta & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque la fonction $\overline{u} \to k\overline{u} + \beta$ est lipschtizienne, alors nous pouvons appliquer le fameux résultat de [70] pour conclure que $\overline{u}$ est radiale et satisfait

$$(\widetilde{P_r}) \begin{cases} -r^{1-n}\partial/\partial r(r^{n-1}\partial\overline{u}/\partial r) = k\overline{u} + \beta, & \textit{pour} \quad 0 < r < 1 \\ \overline{u}'(0) = 0 \\ \overline{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \rho}(\rho) &= -\rho^{1-n} \int_0^\rho s^{n-1}(k\overline{u}(s) + \beta)ds \\ &= -\frac{\beta\rho}{n} - k\rho^{1-n} \int_0^\rho s^{n-1}\overline{u}(s)ds. \end{aligned}$$

En intégrant entre $[0, r]$, on a

$$\overline{u}(r) - \overline{u}(0) = -\frac{\beta r^2}{2n} - k \int_0^r t^{1-n} \int_0^t \tau^{n-1}\overline{u}(\tau)d\tau dt.$$

Posons $r = 1$, nous observons que

$$\overline{u}(0) = \frac{\beta}{2n} + k\int_0^1 t^{1-n}\int_0^t \tau^{n-1}\overline{u}(\tau)d\tau dt.$$

Par ailleurs, nous utilisons le faite que $\overline{u}$ est strictement décroissante dans Ω (voir Théorème 2.1 de [70]), pour conclure que $\overline{u}(0) \geq \overline{u}(\tau)$, pour tout $\tau \in (0,1)$ et

$$\overline{u}(0) \leq \frac{\beta}{2n} + k\int_0^1 t^{1-n}\int_0^t \tau^{n-1}\overline{u}(0)d\tau dt.$$

On en déduit que,

$$\overline{u}(0) \leq \frac{\beta}{2n-k}.$$

Maintenant, soit u une solution du problème réduit (P_0) et soit $v = \overline{u} - u$.

Pour cela, on remarque que

$$\begin{array}{rcl} -\Delta v & = & -\Delta\overline{u} + \Delta u \\ & = & k\overline{u} + \beta - f(u) \\ & \geq & k\overline{u} + \beta - (ku + \beta) \\ & \geq & kv. \end{array}$$

La fonction v satisfait

$$\begin{cases} -\Delta v - kv \geq 0 & \text{dans } \ \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant le faite que $k < \lambda_1$ et le principe du maximum (voir [87]) , nous concluons que la fonction $v \geq 0$ dans Ω.

Notons que dans le cas où $-\Delta v = kv$, alors $v = 0$. Ainsi, $u = \overline{u}$ dans Ω. Ceci implique que $u(r) \leq \overline{u}(r)$. On en déduit que,

$$0 < u(r) \leq \frac{\beta}{2n-k}, \quad \textit{pour} \quad r \in [0,1).$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Maintenant, soit

$$w := \{(r,\theta) \in \Omega; 0 \leq r < r_0; \theta \in S\}.$$

Par la suite, nous aurons besoin du résultat d'existence suivant.

Proposition 2.3 *Supposons que la condition $f_1)$ est satisfaite, alors le problème*

$$(3) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \textit{dans } w, \\ u = \mu & \textit{sur } \ \partial w \end{cases}$$

admet une solution unique u, $\forall \mu > 0$

Preuve.

i)Existence.
Notons que par l'hypothèse f_1), il existe $k \in (0, \lambda_1), \beta > 0$ telles que :

$$0 \leq f(u) \leq k|u| + \beta$$

Nous montrerons que le problème (3) admet une sursolution $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(w) \cap C^{1,\alpha}(\overline{w})$ pour un $\alpha \in (0,1)$. En faite, comme $k \in (0, \lambda_1)$, alors le problème linéaire

$$(3i)\begin{cases} -\Delta\overline{u} = k\overline{u} + \beta & \text{dans } \Omega \\ \overline{u} = \mu & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution unique $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour un $\alpha \in (0,1)$. Voir [71], p107.

En appliquant le principe du maximum [87], théorème 2.5 , nous déduisons que

$$\overline{u} > \mu \qquad \text{dans} \quad \Omega.$$

Plus particulièrement, on a

$$\overline{u} > \mu \quad \text{dans} \quad \overline{w} \subset \Omega.$$

Ainsi

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} = k\overline{u} + \beta & \text{dans } w \\ \overline{u} > \mu & \text{sur } \partial w. \end{cases}$$

Ceci implique que $\overline{u}$ est une supersolution pour le problème (3).

D'autre part, nous remarquons que $\underline{u} = \mu$ est une sous-solution du problème (3).

Un résultat standard permet de conclure que le problème (3) possède une solution u avec $\mu \leq u \leq \overline{u}$ (Voir [62]).
ii) Unicité.
Supposons que v_1 et v_2 sont deux solutions de (3), alors

$$\begin{cases} -\Delta v_i = f(v_i) & \text{dans } w, \\ v_i = \mu & \text{sur } \partial w. \end{cases}$$

Pour $i = 1, 2$, nous définissons $u = v_1 - v_2$ et

$$\rho := \frac{1}{k}\frac{f(v_1) - f(v_2)}{v_1 - v_2} \quad \text{si} \quad v_1 \neq v_2 \quad \text{et} \quad \rho = 0 \quad \text{si} \quad v_1 = v_2$$

On peut remarquer que la fonction u vérifie

$$(4)\begin{cases} -\Delta u = k\rho u & \text{dans } w, \\ u = 0 & \text{sur } \partial w. \end{cases}$$

Soit $\lambda_i(\rho), i = 1, 2, ...$ les valeurs propres de (4). Alors

$$\lambda_1(\rho) \geq \lambda_1(1) = \lambda_1.$$

Puisque $\rho \leq 1$ et $k < \lambda_1$, alors nous avons $0 \leq k\rho < \lambda_1(\rho)$, qui implique que (4) admet seulement une solution triviale. Cette contradiction montre que $v_1 \equiv v_2$. Ceci conclut que (3) possède une solution unique.

Preuve du Théorème 2.3.

Tout d'abord, une éventuelle solution u et son gradient sont continues dans Ω. Une telle solution vérifie le problème (P_0) par le sens classique respectivement dans les deux régions $u > \mu$ et $u < \mu$.

Soit

$$\Gamma = \{(r_0, \theta), \theta \in S\} \qquad \text{pour} \quad r_0 \in (0, 1).$$

Ainsi, nous cherchons à obtenir une solution radiale $u(r)$ du problème (P_0) et une constante r_0 telles que

$$(P_w) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans} \;\; w, \\ -\Delta u = 0 & \text{dans} \;\; \Omega \setminus \overline{w}. \end{cases}$$

Si u est solution de (P_w) avec $u(r_0) = \mu$, alors par le principe du maximum, $u(r) > \mu$ pour $0 \leq r < r_0$. Pour $r > r_0$, u est une fonction harmonique, alors son maximum est atteint sur le bord. Le maximum μ est atteint sur la frontière libre Γ, donc $u < \mu$ et u satisfait le problème réduit (P_0).

Dans la région w, la solution u existe et est radiale (voir Proposition 2.3). Ceci permet de remarquer que le maximum de u est atteint en $r = 0$ (voir [70, Théorème 1]). Ainsi

$$d := \max_{\overline{w}} u = u(0) \geq \mu \quad \text{et} f(d) \geq f(\mu)$$

puisque f est croissante .

Maintenant, dans w, la fonction u vérifie

$$r^{1-n}\partial/\partial r(r^{n-1}\partial u/\partial r) = f(u).$$

et nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r}(r_0 - 0) &= -r_0^{1-n} \int_0^{r_0} s^{n-1} f(u(s)) ds \\ &\geq -r_0^{1-n} \int_0^{r_0} s^{n-1} f(d) ds \\ &= -\frac{r_0 f(d)}{n} \end{aligned}$$

où $\frac{\partial u}{\partial r}(r_0 - 0)$ est la dérivée à gauche de u au point $r = r_0$.

Dans la région, $u \geq \mu$, nous concluons que $f(u) \geq f(\mu)$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r}(r_0 - 0) &= -r_0^{1-n} \int_0^{r_0} s^{n-1} f(u(s)) ds \\ &\leq -r_0^{1-n} \int_0^{r_0} s^{n-1} f(\mu) ds \end{aligned}$$

$$= -\frac{r_0 f(\mu)}{n}.$$

Ainsi,

$$-\frac{r_0 f(d)}{n} \leq \frac{\partial u}{\partial r}(r_0 - 0) \leq -\frac{r_0 f(\mu)}{n}.$$

En appliquant le résultat du lemme 2.5, nous obtenons que $d \in (0, \frac{\beta}{2n-k}]$. Puisque f est constante sur cet intervalle, alors $f(d) = f(\mu)$. Nous déduisons que

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0 - 0) = -\frac{r_0 f(\mu)}{n} \tag{2.1}$$

D'autre part, en résolvant une équation différentielle dans la région $\Omega \setminus \overline{w}$, nous obtenons que

$$u(r) = \frac{\mu r^{2-n}}{r_0^{2-n} - 1} - \frac{\mu}{r_0^{2-n} - 1}.$$

Ceci implique que

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0 + 0) = \frac{(2-n)\mu}{r_0 - r_0^{n-1}}. \tag{2.2}$$

Maintenant, une solution radiale de (P_0) est obtenue si u vérifie les conditions de transmission sur la frontière libre, i.e, il existe $r_0 \in (0,1)$ tel que $u(r_0) = \mu$ et

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0 - 0) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_0 + 0). \tag{2.3}$$

En utilisant (2.1), (2.2) et (2.3), nous avons

$$\frac{f(\mu)}{\mu} = \frac{n(n-2)}{r_0^2 - r_0^n}. \tag{2.4}$$

Nous observons que la fonction $r_0 \to \frac{n(n-2)}{r_0^2 - r_0^n}$ possède un minimum unique M_n atteint au point $r_0 = (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$.
On constate par l'hypothèse f_3), qu'il existe μ^* tel que

$$\frac{f(\mu^*)}{\mu^*} = M_n,$$

ainsi, il s'ensuit que l'equation (2.4) possède une seule racine $r_0 = (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$ et nous obtenons la solution désirée u avec une frontière libre qui est une sphère de rayon r_0. Ceci termine la preuve du point a) de la proposition 2.3.

Maintenant, pour le cas b), si

$$\frac{f(\mu)}{\mu} > M_n,$$

l'équation (2.4) possède deux racines différentes de $(\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$. La preuve du théorème 2.3 est complète.

3

Problème perturbé

Dans ce chapitre, nous allons présenter des résultats d'existence et de multiplicité des solutions du problème (P_h) avec quelques propriétés sur leurs frontières libres correspondantes. L'objectif est de construire des solutions du problème perturbé à partir des solutions du problème réduit. Nous commençons par étudier l'effet de la perturbation h sur les solutions obtenues.

Ici, nous proposons d'étudier le problème à frontière libre suivant.

$$(P_h)\begin{cases} -\Delta u = f(u)H(u-\mu) & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = h & \text{sur} \quad \partial\Omega = S, \end{cases}$$

Où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et H est la fonction d'Heaviside,f, h sont des fonctions données et μ une constante.

3.1 Problème à frontière libre perturbé

Cette section est consacrée à l'étude de l'effet de la perturbation h sur les solutions du problème réduit (P_0) obtenue par la conclusion b) du Théorème 2.3. Nous allons présenter des résultats d'existence de solutions du problème à frontière libre (P_h) en utilisant le théorème des fonctions implicites. Une solution du problème (P_h) est une fonction $u \in W^{2,p}(\Omega), (p > 1)$ vérifiant

$$-\Delta u = f(u)H(u-\mu) \qquad \textit{dans} \quad \Omega,$$

et la trace de u sur $\partial\Omega$ est égale à h.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant

Théorème 3.1 *Supposons que $f_1), f_2)$ sont satisfaites et il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\frac{f(\mu)}{\mu} > M_n,$$

où

$$M_n = \frac{n(n-2)}{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n-2}} - \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{n-2}}}, \qquad \textit{pour} \quad n \geq 3.$$

Soit $||h||_\infty = \max\limits_{x\in\partial\Omega} |h(x)|$. Si h est assez petite avec $0 \leq ||h||_\infty < \mu$, alors le problème (P_h) possède deux solutions positives et leurs frontières libres sont des hypersurfaces analytiques.

La méthode de démonstration du Théorème 3.1 est divisée en trois étapes. Nous commençons par rappeler que sous les conditions de ce théorème, nous avons montré que le problème réduit (P_0) possède deux solutions radiales positives avec des frontières libres qui sont des sphères de rayons $r_1, r_2 \in (0, 1)$.

3.1.1 Ingrédients essentiels

Soit r_0 l'une des valeurs r_1 et r_2. Par le Théorème 2.3, nous assurons que $r_0 \neq (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$. Ainsi, la frontière libre est donnée par

$$u(r_0, \theta) = \mu.$$

Nous proposons de chercher une frontière libre sous la forme $r_0 + b(\theta), \theta \in S$ où b est une perturbation causée par h. Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites pour démontrer l'existence de la fonction b. A cet effet, considérons quelques ensembles utiles pour la suite.

Soit

$$B = \{b \in C(S, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad 0 \leq r_0 + b(\theta) < 1, \theta \in S\}.$$

Puisque, nous cherchons une solution dans $W^{2,p}(\Omega), p > 1$, alors la fonction h possède une trace dans $W^{2,p}(\Omega)$ sur la frontière $\partial\Omega$. Ainsi, h appartient à l'ensemble suivant

$$A = \{h \in W^{2-\frac{1}{p},p}(S, \mathbb{R}) : \quad p > 1\}.$$

Soit

$$w = \{(r, \theta) \in (0, 1) \times S : 0 \leq r < r_0 + b(\theta), \theta \in S\}.$$

Nous affirmons par la proposition 2.3 que dans la région w, le problème

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } w, \\ u = \mu & \text{sur } \partial w \end{cases}$$

possède une solution unique notée u^*. On note aussi χ_w la fonction caractéristique de w. Alors, on a le résultat suivant

Lemme 3.1 *Supposons que l'hypothèse $f_1)$ est satisfaite et que $0 \leq ||h||_\infty < \mu$, pour $\mu > 0$. Soit*

$$v = \begin{cases} u^* & \textit{dans } w, \\ \mu & \textit{dans } \Omega \setminus \overline{w}. \end{cases}$$

Alors le problème

$$(2) \begin{cases} -\Delta u = f(v)\chi_w(r, \theta) & \textit{dans } \Omega, \\ u = h & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution unique $U_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.
Si, en plus $U_0(r_0 + b(\theta), \theta) = \mu$ avec $0 \leq ||h||_\infty < \mu$ alors U_0 est solution du problème (P_h).

Preuve. Tout d'abord, nous observons que $f(v)\chi_w \in L^p(\Omega)$ pour $p > 1$, puisque

$$|f(v)\chi_w| \leq |f(v)| \leq k|v| + \beta$$

et v est bornée dans Ω, donc nous avons $f(v)\chi_w \in L^p(\Omega)$ pour tout $p > 1$ et du Théorème 9.15 p 241 de [71], il existe une solution U_0 du problème (2) dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Pour $p > n$, $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.
Nous remarquons que U_0 vérifie

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = f(v) & \text{dans } \ w, \\ -\Delta U_0 = 0 & \text{dans } \ \Omega \setminus w \\ U_0 = h & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

En plus, s'il existe une fonction $b \in B$ telle que $U_0(r_0 + b(\theta), \theta) = \mu$, alors U_0 devient une solution de

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = f(v) & \text{dans } \ w, \\ U_0 = \mu & \text{sur } \ \partial w \\ -\Delta U_0 = 0 & \text{dans } \ \Omega \setminus w \\ U_0 = h & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

L'unicité de la solution dans w, implique que

$$U_0 = u^* \quad \text{dans} \quad w.$$

Ainsi U_0 satisfait

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = f(U_0) & \text{dans } \ w, \\ U_0 = \mu & \text{sur } \ \partial w. \end{cases}$$

Par le principe du maximum,

$$\min_{\overline{w}} U_0 = \min_{\partial w} U_0 = \mu.$$

Donc, on obtient que $U_0 > \mu$ dans w.

De la même façons, nous avons

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{w}, \\ U_0 = h & \text{sur } \ \partial\Omega \\ U_0 = \mu & \text{sur } \ \partial w. \end{cases}$$

Comme $0 \leq ||h||_\infty < \mu$, alors

$$\max_{\Omega \setminus \overline{w}} U_0 = \max_{\partial w} U_0 = \mu$$

et nous obtenons que $U_0 < \mu$ dans $\Omega \setminus w$. Ainsi, la fonction U_0 vérifie

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = f(U_0) H(U_0 - \mu) & \text{dans } \ \Omega, \\ U_0 = h & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Ceci termine la preuve du lemme 3.1.

Un autre résultat utile pour la suite est le lemme suivant

Lemme 3.2 *Supposons que l'hyothèse $f_1)$ est satisfaite. La fonction u^* vérifie l'estimation suivante*

$$\mu \leq u^* \leq \frac{\beta}{2n-k}.$$

Preuve.
Nous rappelons que la fonction u^* est solution du problème suivant

$$(1)\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans} \quad w, \\ u = \mu & \text{sur} \quad \partial w. \end{cases}$$

Nous remarquons que $\underline{u} = \mu$ est une sous-solution du problème (1).

D'autre part, nous montrerons que le problème (1) admet une supersolution $\overline{u} \in C^2(w)$. En faite, comme $k \in (0, \lambda_1)$, alors le problème linéaire

$$(1i)\begin{cases} -\Delta \overline{u} = k\overline{u} + \beta & \text{dans} \quad \Omega \\ \overline{u} = \mu & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution unique $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour un $\alpha \in (0,1)$. Voir [71], p107.

En appliquant le principe du maximum [87], théorème 2.5 , nous déduisons que

$$\overline{u} > \mu \qquad \text{dans} \quad \Omega.$$

Plus particulièrement, on a

$$\overline{u} > \mu \quad \text{dans} \quad \overline{w} \subset \Omega.$$

Ainsi

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} = k\overline{u} + \beta & \text{dans} \quad w \\ \overline{u} > \mu & \text{sur} \quad \partial w. \end{cases}$$

Ceci implique que $\overline{u}$ est une supersolution pour le problème (1).

Un résultat standard permet de conclure que le problème (1) possède une solution u^* avec $\mu \leq u^* \leq \overline{u}$ (Voir [62]).

D'autre part, on sait que la fonction $\overline{u}$ est radiale et vérifie $\overline{u}(r) \leq \frac{\beta}{2n-k}$, pour $r \in (0,1)$. (Voir la preuve du lemme 2.5).
Ainsi par uncité de la solution u^* dans la région w, nous concluons que

$$\mu \leq u^* \leq \frac{\beta}{2n-k}.$$

Ceci termine la preuve du lemme 3.2.

Par ce résultat, nous pouvons conclure que

$$\mu \leq v \leq \frac{\beta}{2n-k},$$

ainsi, le problème (2) devient

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\mu)\chi_w(r,\theta) & \text{dans } \Omega, \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le résultat du lemme 3.1 permet d'assurer l'existence de solution du problème perturbé à partir de l'existence d'une fonction $b \in B$. ceci, nous ramène à résoudre l'equation

$$U_0(r_0 + b(\theta), \theta) = \mu \qquad \text{dans} \quad B. \qquad\qquad (E)$$

3.1.2 Représentation intégrale de la solution

Pour résoudre l'équation (E), nous avons besoin d'une forme explicite de la fonction U_0. Une telle forme est une representation intégrale donnée par le théorème suivant

Théorème 3.2 *La solution U_0 du problème (2) admet la representation suivante*

$$U_0(x) = \int_{\partial\Omega} P(x,y)h(y)dS - f(\mu)\int_{\Omega} G(x,y)\chi_w dy,$$

où P est le noyau de Poisson et G la fonction de Green.

Remarque 3.1 *La solution U_0 du problème (2) n'est pas de classe C^2, ainsi, nous ne pouvons pas appliquer le Théorème 12 p 35 de [62].*

Preuve du théorème 3.2. La démonstration est basée sur les lemmes suivants

Lemme 3.3 *Soit v_1 la fonction définie par*

$$v_1(x) = \int_S P(x,y)h(y)dS,$$

alors v_1 vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ v_1 = h & \textit{sur } \partial\Omega = S. \end{cases}$$

Preuve du lemme 3.3. Voir Théorème 2.6 p 20 de [71].

Lemme 3.4 *Soit $v_2(x)$ la fonction définie par*

$$v_2(x) = -f(\mu)\int_{\Omega} G(x,y)\chi_w dy.$$

Alors v_2 satisfait l'équation de Poisson $-\Delta v_2 = f(\mu)\chi_w$ dans Ω

Preuve du lemme 3.4. On remarque que la fonction de Green peut s'écrit sous la forme

$$G(x,y) = F(x,y) - \phi(x,y) \qquad \text{(Voir [61], p 58)}$$

où $F(x,y)$ est la solution fondamentale du Laplacien et $\phi(x,y)$ satisfait

$$\begin{cases} \Delta_y \phi(x,.) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi(x,.) = F(x,.) & \text{sur } \partial\Omega = S. \end{cases}$$

On écrit la fonction $v_2(x)$ comme

$$v_2(x) = v_3(x) - v_4(x)$$

où

$$v_3(x) = -f(\mu) \int_\Omega F(x,y)\chi_w dy,$$

et

$$v_4(x) = -f(\mu) \int_\Omega \phi(x,y)\chi_w dy.$$

Nous remarquons, par le faite que la fonction $\phi(x,y)$ est harmonique que

$$\begin{aligned} \Delta v_4(x) &= \Delta(-f(\mu) \textstyle\int_\Omega \phi(x,y)\chi_w dy) \\ &= -f(\mu) \textstyle\int_\Omega \Delta\phi(x,y)\chi_w dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maintenant, pour $v_3(x)$, nous posons $g(x) := f(\mu)\chi_w$ qui appartienne à $L^p(\Omega)$, pour $p > 1$

Il reste à montrer que $-\Delta v_3 = g$, pour cela, nous avons le résultat suivant

Proposition 3.1 *La fonction v_3 est dans l'espace de Beppo-Levi $B^{2,p}(\Omega)$ et vérifie $-\Delta v_3 = g$.*

Remarque 3.2 *L'espace de Beppo-Levi est définie comme suit*

$$B^{2,p}(\Omega) = \{u \in L^p_{loc}(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \in L^p(\Omega), i,j = 1,...,n\}.$$

Preuve de la proposition 3.1.

Premièrement, nous savons que pour un ensemble ouvert régulier, on a

$$\frac{\partial^2 v_3(x)}{\partial x_i x_j} = -\int_\Omega \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x_i x_j}[g(y) - g(x)]dy$$

$$+g(x)\int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y)n_j(y)dS \quad \text{p.p} \quad dans \quad \Omega \qquad (**)$$

(See [58], vol 1, p 292)

Nous observons aussi que la solution fondamentale est donnée par

$$F(x,y) = \frac{1}{n(n-2)w_n}|x-y|^{2-n}, \qquad pour \quad n \geq 3$$

où w_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, ceci implique que

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial n_x}(x,y) &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{\partial F}{\partial x_i}(x,y)n_i(y) \\ &= \tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)n(y) \\ &= -\tfrac{(x-y)}{nw_n|x-y|^n}n(y). \end{aligned}$$

Pour $y \in \partial\Omega$, la normale est donnée par $n(y) = \frac{x-y}{|x-y|}$.

Ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial n_x}(x,y) = -\frac{1}{nw_n|x-y|^{n-1}}, \qquad \forall n \geq 3.$$

Maintenant, puisque $v_3 \in B^{2,p}(\Omega)$ (Voir [58],Vol 4, corollaire 2, p 413), alors

$$\begin{aligned} \Delta v_3 &= g(x) \textstyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial n_x} dS \\ &= \frac{-g(x)}{nw_n} \textstyle\int_{\partial\Omega} dS \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

où $|x-y| = 1$ et $\int_{\partial\Omega} dS = nw_n$.

3.1.3 Résolution intégrale de l'équation.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution de l'équation intégrale (E). Nous passons aux coordonnées polaires, nous obtenons

$$U_0(r,\theta) = \int_S P(r,\theta,\theta')\, h(\theta')d\theta'$$

$$-f(\mu)\int_S d\theta' \int_0^r (r')^{n-1}\chi_w(r',\theta')G(r,\theta,r',\theta')\, dr'.$$

Nous définissons l'opérateur suivant

$$F : A \times \mathbb{R}^+ \times B \to C(S,R) \quad par :$$

$$F(h,\mu,b)(\theta) = U_0(r_0 + b(\theta),\theta) - \mu$$

i.e,

$$F(h,\mu,b)(\theta) = \int_S P(r_0 + b(\theta),\theta,\theta')\, h(\theta')d\theta'$$

$$-f(\mu)\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')} (r')^{n-1}G(r_0 + b(\theta),\theta,r',\theta')\, dr' - \mu.$$

Alors, nous avons le résultat suivant qui caractérise la frontière libre.

Théorème 3.3 *Sous les conditions f_1), f_2) et la fonction h est assez petite avec $0 \leq ||h||_\infty < \mu$, il existe un voisinage V de 0 dans A et une application unique $b : V \to B$ continûment differentiable telles que*
i) $b(0) = 0$
ii) $F(h,\mu,b(h)) = 0$ pour $h \in V$

Remarque 3.3 *1/Le théorème 3.3 montre que la dépendance de la frontière libre par rapport à h est continûment différentiable.*
2/Le théorème 4.2 dans [23] est vrai avec la condition f_2).

La preuve du Théorème 3.3 est basée sur le théorème des fonctions implicites et les lemmes suivants

Lemme 3.5 *L'opérateur F définie de $A \times \mathbb{R}^+ \times B$ vers $C(S, \mathbb{R})$ est continûment differentiable au point $(0, \mu, 0) \in A \times \mathbb{R}^+ \times B$.*

Preuve. Soit D_jF la dérivée de Frechet de F, par rapport à la variable d'ordre j $(j = 1, 2, 3.)$ Nous allons montrer que F est continûment différentiable par rapport à la variable b. Nous commençons par montrer que l'expression de la dérivée $D_3F(h, \mu, b)$ est donnée par

$$\begin{aligned} D_3F(h,\mu,b)\beta(\theta) \quad &= [\textstyle\int_S d\theta' \frac{\partial P}{\partial r}(r_0 + b(\theta), \theta, \theta')h(\theta') \\ &-f(\mu) \textstyle\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')} (r')^{n-1} dr' \frac{\partial G}{\partial r}(r_0 + b(\theta), \theta, r', \theta')]\beta(\theta) \\ &-f(\mu) \textstyle\int_S d\theta' (r_0 + b(\theta'))^{n-1} G(r_0 + b(\theta), \theta, r_0 + b(\theta'), \theta')\beta(\theta'). \end{aligned}$$

Soit $L = D_3F$, alors

$$F(h, \mu, b + \beta)(\theta) - F(h, \mu, b)(\theta) - L\beta(\theta) = I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 = \quad &\textstyle\int_S P(r_0 + b(\theta) + \beta(\theta), \theta, \theta')h(\theta')d\theta' - \int_S P(r_0 + b(\theta), \theta, \theta')h(\theta')d\theta' \\ &- \textstyle\int_S P_r h(r_0 + b(\theta), \theta, \theta')h(\theta')d\theta'\beta(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = \quad &-f(\mu) \textstyle\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')+\beta(\theta')} (r')^{n-1} dr' G(r_0 + b(\theta) + \beta(\theta), \theta, r', \theta') \\ &+f(\mu) \textstyle\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')} (r')^{n-1} dr' G(r_0 + b(\theta), \theta, r', \theta') \\ &+f(\mu) \textstyle\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')} (r')^{n-1} dr' G_r(r_0 + b(\theta), \theta, r', \theta')\beta(\theta) \end{aligned}$$

et

$$I_3 = f(\mu) \textstyle\int_S d\theta' [r_0 + b(\theta')]^{n-1} G(r_0 + b(\theta), \theta, r_0 + b(\theta'), \theta')\beta(\theta')$$

où

$$P_r = \frac{\partial P}{\partial r} \quad G_r = \frac{\partial G}{\partial r}$$

sont respectivement les dérivées partielles de P et G par rapport à r.

Tout d'abord, soit

$$\psi h(r, \theta) := \int_S P(r, \theta, \theta')h(\theta')d\theta', \qquad (r, \theta) \in (0, 1) \times S.$$

Par le théorème de Taylor, nous affirmons que

$$\psi h(r_0 + b(\theta) + \beta(\theta), \theta) - \psi h(r_0 + b(\theta), \theta) - \frac{\partial \psi}{\partial r} h(r_0 + b(\theta), \theta)\beta(\theta) = o(|\beta|_\infty) \quad \text{quand} \quad |\beta|_\infty \to 0.$$

Ainsi,

$$I_1 = o(|\beta|_\infty) \quad \text{quand} \quad |\beta|_\infty \to 0.$$

Soit

$$T = f(\mu) \int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')} (r')^{n-1} dr' G(r_0 + b(\theta) + \beta(\theta), \theta, r', \theta').$$

Nous ajoutons le terme T à I_2 et nous le supprimons, nous obtenons

$$I_2 = J_1 + J_2, \quad avec$$

$$\begin{aligned} J_1 = \quad & -f(\mu)\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')}(r')^{n-1}dr'G(r_0+b(\theta)+\beta(\theta),\theta,r',\theta') \\ & +f(\mu)\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')}(r')^{n-1}dr'G(r_0+b(\theta),\theta,r',\theta') \\ & +f(\mu)\int_S d\theta' \int_0^{r_0+b(\theta')}(r')^{n-1}dr'G_r(r_0+b(\theta),\theta,r',\theta'),\theta)\beta(\theta) \end{aligned}$$

et

$$J_2 = -f(\mu)\int_S d\theta' \int_{r_0+b(\theta')}^{r_0+b(\theta')+\beta(\theta')}(r')^{n-1}G(r_0+b(\theta)+\beta(\theta),\theta,r',\theta')dr'.$$

Par des arguments similaires, on a

$$J_1 = o(|\beta|_\infty) \quad \text{quand} \quad |\beta|_\infty \to 0.$$

Ainsi, il reste à estimer J_2+I_3. Pour cela, nous ajoutons et supprimons le terme suivant à J_2+I_3

$$f(\mu)\int_S d\theta' \int_{r_0+b(\theta')}^{r_0+b(\theta')+\beta(\theta')}(r')^{n-1}G(r_0+b(\theta),\theta,r',\theta')dr',$$

nous avons

$$\begin{aligned} J_2+I_3 = -f(\mu)\int_S d\theta' \int_{r_0+b(\theta')}^{r_0+b(\theta')+\beta(\theta')}(r')^{n-1}dr'[&G(r_0+b(\theta)+\beta(\theta),\theta,r',\theta') \\ &-G(r_0+b(\theta),\theta,r',\theta')] \\ -f(\mu)\int_S d\theta'[(\int_{r_0+b(\theta')}^{r_0+b(\theta')+\beta(\theta')}&(r')^{n-1}G(r_0+b(\theta),\theta,r',\theta')dr') \\ -(r_0+b(\theta'))^{n-1}G(r_0+b(\theta),&\theta,r_0+b(\theta'),\theta')\beta(\theta')]. \end{aligned}$$

Nous estimons seulement la deuxième intégrale, la première se traite de la même manière. Le faite que la fonction de Green se décompose en deux parties, une partie régulière et une autre singulière. Nous considérons la partie singulière. Soit

$$\begin{aligned} K := -f(\mu)\int_S d\theta' \int_{r_0+b(\theta')}^{r_0+b(\theta')+\beta(\theta')}(r')^{n-1}dr'[&G(r_0+b(\theta),\theta,r',\theta') \\ -\left(\frac{r_0+b(\theta')}{r'}\right)^{n-1} &G(r_0+b(\theta),\theta,r_0+b(\theta'),\theta')]. \end{aligned}$$

Soit D une boule de rayon $\gamma \in (0,1)$ et de centre $(r_0+b(\theta),\theta)$. Ainsi

$$K = \int_E Q = \int_{E\cap D} Q + \int_{E\cap D^c} Q$$

où E représente la région de l'intégration et Q l'intégrande. Alors, il existe deux constantes C, C' telles que

$$|\int_{E\cap D} Q| \le C' \int_0^\gamma r^{2-n} r^{n-1} dr \le C\gamma^2.$$

En dehors de D et par la formule des valeurs intermédiaires, nous déduisons que

$$|\int_{E\cap D^c} Q| \leq C' \int_{E\cap D^c} r^{1-n}|\beta|_\infty dr d\theta \leq C|\beta|_\infty^n \gamma^{1-n}.$$

En combinant les deux résultats, on a :

$$|\int_E Q| \leq C_1\gamma^2 + C_2\gamma^{1-n}|\beta|_\infty^n.$$

Choisissons $\gamma = |\beta|_\infty^{1-\tau}$, $\tau > 0$.

Il est facile de voir

$$|\int_E Q| = o(|\beta|_\infty)$$

quand $\beta \to 0$.

Maintenant, l'opérateur $L : U \to L(C(S))$ est une application continue dans un voisinage U de $(0, \mu, 0)$. En faite, L peut s'écrit comme

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0 + b(\theta), \theta)\beta(\theta) - (\phi\beta)(\theta)$$

où $(\phi\beta)(\theta) = f(\mu) \int_S (r_0 + b(\theta'))^{n-1} G(r_0 + b(\theta), \theta, r_0 + b(\theta'), \theta')\beta(\theta')d\theta'$.

L'application ϕ est continue, puisque la singularité de G est intégrable et $\frac{\partial u}{\partial r}$ dépend continûment de (h, μ, b) dans un voisinage de $(0, \mu, 0)$.

Ceci conclut que F est continûment différentiable au point $(0, \mu, 0) \in A \times \mathbb{R}^+ \times B$.

Lemme 3.6 *L'opérateur $D_3F(0, \mu, 0) \in L(C(S))$ est inversible.*

Preuve. De la forme de l'opérateur D_3F, nous avons

$$D_3F(0, \mu, 0)\beta(\theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta)\beta(\theta) - r_0^{n-1} \int_S f(\mu)G(r_0, \theta, r_0, \theta')\beta(\theta')d\theta',$$

ce qui implique que

$$D_3F(0, \mu, 0)\beta(\theta) = -\frac{f(\mu)r_0}{n}\beta(\theta) - r_0^{n-1} \int_S f(\mu)G(r_0, \theta, r_0, \theta')\beta(\theta')d\theta'.$$

Soit K l'opérateur intégrale définie par

$$K\beta(\theta) = \int_S G(r_0, \theta, r_0, \theta')\beta(\theta')d\theta'$$

considéré de l'espace $C(S)$ vers $C(S)$.

Pour montrer que l'opérateur D_3F est inversible, nous avons besoin de la compacité de l'opérateur K. Pour cela, nous montrerons dans la section suivante que K est continue, compact et que les valeurs propres de K notées σ_l sont données par

$$\sigma_l = -\frac{1}{r_0^{n-2}} \frac{1 - r_0^{2l+n-2}}{2l + n - 2}, \qquad \forall l \in \mathbb{N}.$$

L'inversibilité de l'opérateur D_3F est obtenue, si on démontre que

$$\frac{f(\mu)r_0}{n} + r_0^{n-1} f(\mu)\sigma_l \neq 0, \quad (I)$$

où σ_l sont les valeurs propres de K.

D'abord, nous remarquons que si $l \geq 1$, l'equation (I) est vérifiée. En faite,

$$\frac{r_0}{n} f(\mu) + r_0^{n-1} f(\mu)\sigma_l$$

$$= r_0 f(\mu)(\frac{1}{n} - \frac{1 - r_0^{2l+n-2}}{2l+n-2})$$

$$\geq r_0 f(\mu)(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}(1 - r_0^{2l+n-2})) = \frac{1}{n} r_0^{2l+n-2} > 0.$$

Pour $l = 0$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1 - r_0^{n-2}}{n-2} \neq 0,$$

puisque $r_0 \neq (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$. Ainsi, l'opérateur D_3F est inversible. Ceci termine la preuve du lemme 3.6.

3.1.4 Les valeurs propres de l'opérateur K.

Nous rappelons que l'opérateur K est définie par

$$K\beta(\theta) = \int_S G(r_0, \theta, r_0, \theta')\beta(\theta')d\theta'.$$

Dans cette partie, nous montrerons deux lemmes. Le premier montre la compacité de l'opérateur K et le deuxième caractérise les valeurs propres σ_l.

Lemme 3.7 *L'opérateur intégral K est continue et compact dans $C(S)$.*

Preuve. En utilisant les coordonnées cartésiennes, l'opérateur K s'écrit

$$K\tilde{\beta}(x) = \int_{\partial B(0,r_0)} G(x,y)\tilde{\beta}(y)dw_n(y),$$

où $dw_n(y)$ est l'élément de surface de la sphère $\partial B(0, r_0)$.

- Soit M l'ensemble des fonctions mesurables et bornées. Alors, il existe une constante positive $c_1 > 0$ telle que $|\tilde{\beta}| \leq c_1$, pour tout $\tilde{\beta} \in M$.

  Nous montrons que KM est borné et équicontinue. Nous avons

$$\begin{aligned} |K\tilde{\beta}| &\leq c_1 \textstyle\int_{\partial B(0,r_0)} |G(x,y)|dw_n(y) \\ &\leq c_1 \textstyle\int_{\partial B(0,r_0)} |G_0(|x-y|)|dw_n(y) + c_2. \end{aligned}$$

  Nous rappelons que $G_0(|y||x - \frac{y}{|y|^2}|)$ est une fonction régulière sur ∂B et bornée par une constante c_2. Il reste à estimer la deuxième intégrale, pour cela, nous fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $B_\varepsilon(x)$ est une boule de rayon ε centré à x. Alors

$$\begin{aligned} |K\tilde{\beta}| &\leq c_1 \textstyle\int_{\partial B(0,r_0)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) + c_2 \\ &= c_1 \textstyle\int_{\partial B \cap B_\varepsilon(x)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) + c_1 \textstyle\int_{\partial B \setminus B_\varepsilon(x)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) + c_2 \end{aligned}$$

La fonction $|x-y|^{2-n}$ est bornée sur $\partial B \setminus B_\varepsilon(x)$.

Maintenant, nous prouvons que

$$\int_{\partial B(0,r_0)\cap B_\varepsilon(x)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) \qquad \text{est bornée.}$$

Soit $\chi_{\partial B(0,r_0)\cap B_\varepsilon(x)}$ la fonction caractéristique $\partial B(0,r_0)\cap B_\varepsilon(x)$, alors on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,r_0)\cap B_\varepsilon(x)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) &= \int_{\partial B(0,r_0)} |x-y|^{2-n} \chi_{\partial B(0,r_0)\cap B_\varepsilon(x)} dw_n(y)\\ &\leq \int_{\partial B(0,r_0)} |x-y|^{2-n} dw_n(y) = r_0 \int_{\partial B(0,1)} |z_0-z|^{2-n} dw_n(z),\end{aligned}$$

où $x = r_0 z_0$ et $y = r_0 z$. La dernière intégrale est uniformément bornée.(Voir lemme 1.3, Préliminaire).

- Maintenant, nous montrons que $K(M)$ est équicontinue. On a

$$\begin{aligned}|(K\tilde{\beta})(x_1) - (K\tilde{\beta})(x_2)| &= |\textstyle\int_{\partial B}[G(x_1,y) - G(x_2,y)]\tilde{\beta}(y) dw_n(y)|\\ &\leq c_1 \textstyle\int_{\partial B} |G(x_1,y) - G(x_2,y)| dw_n(y)\end{aligned}$$

Soit $B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2)$ deux boules centrées respectivement aux points x_1, x_2 de rayons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit telles que

$$B_\varepsilon(x_1) \cap B_\varepsilon(x_2) = \emptyset$$

et soit $\eta > 0$ telle que $|x_1 - x_2| \leq \eta$, alors

$$\begin{aligned}c_1 \textstyle\int_{\partial B} |G(x_1,y) - G(x_2,y)| dw_n(y) &= c_1 \textstyle\int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |G(x_1,y) - G(x_2,y)| dw_n(y)\\ &+ c_1 \textstyle\int_{\partial B\setminus(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |G(x_1,y) - G(x_2,y)| dw_n(y)\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Le terme I_2 est bornée puisque la fonction de Green est uniformément continue sur $\partial B \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$. Pour le terme I_1, nous avons

$$I_1 = c_1 \textstyle\int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |(G_0(|x_1-y|) - G_0(|x_2-y|)) + \psi(x_1,x_2,y)| dw_n(y)$$

où ψ est la partie analytique de la fonction de Green.

Il nous reste à estimer le terme

$$c_1 \int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |G_0(|x_1-y|) - G_0(|x_2-y|) dw_n(y) := I$$

$$\begin{aligned}I &= \tfrac{c_1}{n(2-n)w_n} \textstyle\int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} ||x_1-y|^{2-n} - |x_2-y|^{2-n}| dw_n(y)\\ &\leq c_4 \textstyle\int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |(x_1-y)^{2-n} - (x_2-y)^{2-n}| dw_n(y).\end{aligned}$$

En utilisant l'identité algébrique

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=1}^{n} a^{n-j}b^{j-1},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
I &\leq c_4 \textstyle\int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |\frac{(x_1-x_2)}{(x_1-y)(x_2-y)} \sum_{j=1}^{n-2}(\frac{1}{(x_1-y)})^{n-2-j}(\frac{1}{(x_2-y)})^{j-1}|dw_n(y)\\
&\leq c_4|x_1-x_2| \textstyle\int_{\partial B\cap(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} |\sum_{j=1}^{n-2}(\frac{1}{(x_1-y)})^{n-1-j}(\frac{1}{(x_2-y)})^{j}|dw_n(y)\\
&= c_4|x_1-x_2| \textstyle\int_{\partial B\cap B_\varepsilon(x_1)} |\sum_{j=1}^{n-2}(\frac{1}{(x_1-y)})^{n-1-j}(\frac{1}{(x_2-y)})^{j}|dw_n(y)\\
&+ c_4|x_1-x_2| \textstyle\int_{\partial B\cap B_\varepsilon(x_2)} |\sum_{j=1}^{n-2}(\frac{1}{(x_1-y)})^{n-1-j}(\frac{1}{(x_2-y)})^{j}|dw_n(y)\\
&\leq |x_1-x_2|[c_5 \textstyle\int_{\partial B\cap B_\varepsilon(x_1)} |\sum_{j=1}^{n-2}(\frac{1}{(x_1-y)})^{n-1-j}|dw_n(y)\\
&+ c_6 \textstyle\int_{\partial B\cap B_\varepsilon(x_2)} |\sum_{j=1}^{n-2}(\frac{1}{(x_2-y)})^{j}|dw_n(y)].
\end{aligned}$$

Par la méthode précédente, nous concluons que les deux dernières intégrales sont bornées.

Finalement, nous avons

$$|(K\tilde{\beta})(x_1) - (K\tilde{\beta})(x_2)| \leq C|x_1-x_2|,$$

et par le théorème De Arzela-Ascoli, nous affirmons que $K\widetilde{\beta}$ est un opérateur compact.

Lemme 3.8 *Les valeurs propres de l'opérateur K sont*

$$\sigma_l = -\frac{1}{r_0^{n-2}}\frac{1-r_0^{2l+n-2}}{2l+n-2}, \qquad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Preuve. On sait, d'après la section 1.4.2 du préliminaire que

$$G(r_0,\theta,r_0,\theta') = r_0^{2-n}\{\frac{r_0^{n-2}-1}{(n-2)nw_n} - \sum_{l=1}^{\infty}(\frac{1-r_0^{2l+n-2}}{2l+n-2})\sum_{m=1}^{N(n,l)} Y_{lm}(\theta)Y_{lm}(\theta')\}$$

où

$$N(n,l) = (2l+n-2)\frac{(l+n-3)!}{l!(n-2)!} \qquad \forall l \in \mathbb{N}, \forall n \geq 3.$$

Les fonctions Y_{lm} sont les harmoniques sphériques de degré l et w_n note le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$.

De cette expression, nous pouvons lire les valeurs propres σ_{lm} et les fonctions propres de K qui sont

$$r_0^{n-2}\sigma_{lm} = -\frac{1-r_0^{2l+n-2}}{2l+n-2} \qquad \phi_{lm} = Y_{lm}, l \neq 0.$$

Pour $l=0$, nous avons

$$r_0^{n-2}\sigma_{00} = -\frac{1-r_0^{n-2}}{n-2} \qquad \phi_{00} = \frac{1}{\sqrt{nw_n}}.$$

3.1.5 Conclusion de la preuve du Théorème 3.1

Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont vérifiées, alors nous pouvons s'assurer de l'existence d'une fonction unique b vérifiant $U_0(r_0+b(\theta)) = \mu$. Nous avons aussi prouvé que le problème perturbé (P_h) admet une solution pour r_0 qui prend la valeur r_1 et r_2, ainsi, le problème perturbé possède deux solutions positives u et v qui correspond respectivement à la valeur r_1 et r_2.

3.2 Bifurcation pour un problème à frontière libre

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence des solutions du problème réduit dans le cas où $\frac{f(\mu)}{\mu} = M_n$ avec M_n la constante définie dans l'hypothèse f_3). Pour $l \geq 1$, nous remarquons que l'opérateur $D_3F(0,\mu^*,0)$ est inversible, mais pour $l=0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(\mu^*)r_0}{n} + r_0^{n-1}f(\mu^*)\sigma_0 &= r_0 f(\mu^*)(\frac{1}{n} - \frac{1-r_0^{n-2}}{n-2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'opérateur $D_3F(0,\mu^*,0)$ est non inversible donc le théorème des fonctions implicites ne fonctionne plus et un phénomène de bifurcation apparaît. Dans cette partie, nous montrerons l'émergence des solutions bifurquées du problème (P_0). Nous appliquons le théorème de Crandall-Rabinowitz [16]. Le résultat principal est le théorème suivant

Théorème 3.4 *Supposons que $f_1), f_2)$ et $f_3)$ sont satisfaites. Soit $Z = \{\xi \in C(S), \int_S \xi(y)dy = 0\}$. Alors, il existe*

i) un intervalle $I =]-\varepsilon, +\varepsilon[, \varepsilon > 0$.

ii) deux fonctions continues

$$\phi : I \to \mathbb{R} \quad et \quad \psi : I \to Z$$

avec $\phi(0) = \mu^*$ et $\psi(0) = 0$.

iii)un voisinage V de $(\mu^*, 0)$ dans $\mathbb{R} \times C(S)$ tel que pour tout $s \in I$, la paire suivante

$$(\mu, b) = (\phi(s), s\phi_{00} + s\psi(s))$$

est une solution de $F(0,\mu,b) = 0$ dans V où ϕ_{00} est une constante donnée.

Nous explorons ici le cas où $r_0 = (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$. Pour démontrer le théorème 3.4, nous avons besoin des conditions suivantes données sous forme de lemmes.

Lemme 3.9 *Soit $\phi_{00} := \frac{1}{nw_n,}$ où w_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Pour $\mu^* > 0$, le noyau de l'opérateur $D_3F(0,\mu^*,0)$ est de dimension une engendré par ϕ_{00}, et son image est de codimension une coïncidant avec l'espace des noyaux des fonctionnelle linéaire continues*

$$\Phi(\xi) = \int_S \xi(y)\phi_{00}dy.$$

Preuve. Notons que pour $\beta \in C(S)$, on a

$$D_3F(0,\mu^*,0)\beta(\theta) = \frac{r_0 f(\mu^*)}{n}\beta(\theta) + r_0^{n-1} f(\mu^*) K\beta(\theta).$$

Puisque

$$\frac{r_0 f(\mu^*)}{n} + r_0^{n-1} f(\mu^*)\sigma_0 = 0,$$

alors l'opérateur $D_3F(0,\mu^*,0)$ est non inversible. Ainsi,

$$D_3F(0,\mu^*,0)\phi_{00} = \frac{r_0 f(\mu^*)}{n}\phi_{00} ds + r_0^{n-1} f(\mu^*)\phi_{00} = 0.$$

Ceci implique que le noyau de l'opérateur $D_3F(0,\mu^*,0)$ est de dimension une engendré par ϕ_{00}. La fonction ϕ_{00} est la première fonction propre correspond à la première valeur propre σ_0. Nous avons montré que l'opérateur K est compact, ainsi l'équation

$$D_3F(0,\mu^*,0)\beta(\theta) = \xi(\theta)$$

possède une solution si ξ est orthogonal à ϕ_{00}.
Soit

$$\Phi(\xi) = \int_S \xi(\theta)\phi_{00} d\theta,$$

donc, il s'ensuit que

$$ImD_3F(0,\mu^*,0) = Ker\Phi.$$

Ceci termine la preuve du lemme 3.9.

Lemme 3.10 *La dérivée mixte $D_2D_3F(h,\mu,b)$ existe et continue dans un voisinage de $(0,\mu^*,0)$.*

La preuve de ce lemme est similaire à la démonstration du Lemme 3.5. Maintenant, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.11 *$D_2D_3F(0,\mu^*,0)\phi_{00}$ n'appartient pas à l'image de $D_3F(0,\mu^*,0)$.*

Preuve. Quand $h = 0$ et $b = 0$, on a

$$D_2D_3F(0,\mu^*,0)\phi_{00} = \frac{\partial}{\partial\mu}(\frac{\partial u}{\partial r}(r_0 + b(\theta),\theta))\phi_{00} \mid_{(h=0,\mu^*,b=0)}$$

Maintenant, la formule (2.2) dans le chapitre 2 montre que la dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(\frac{\partial u}{\partial r}(r_0)) \neq 0,$$

ceci conclut la preuve du lemme 3.11.

Preuve du Théorème 3.4. Nous appliquons le théorème de Crandall-Rabinowitz [16] pour montrer qu'il existe une fonction b de la forme

$$b(s) = s\phi_{00} + s\psi(s), \qquad \text{pour tout} \quad s \in]-\varepsilon,+\varepsilon[, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{(assez petit)}$$

avec ψ une fonction continue et vérifiant $\psi(0) = 0$.

4

Régularité de la frontière libre

4.1 Introduction

Ce chapitre concerne la régularité de la frontière libre obtenue dans le chapitre précédent dans le cas ou $r_0 \neq (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$. Nous sommes dans les conditions du théorème 3.1 et nous commençons par prouver un premier résultat de régularité

Proposition 4.1 *Soit $b \in C(S)$. Si u est solution de (P_h) telle que $u(r_0 + b(\theta), \theta) = \mu$, alors $b \in C^{1,\alpha}(S)$, pour $\alpha \in (0, 1)$.*

Avant de démontrer cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1 *Soient u solution du problème perturbé (P_h) et u_r solution du problème réduit (P_0). Si $||h||_\infty$ et b sont assez petites, alors pour $p > n$,*

$$||u - u_r||_{W^{2,p}} \qquad \textit{est assez petite.}$$

Preuve du lemme 4.1.
Puisque la fonction v satisfait

$$\mu \leq v \leq \frac{\beta}{2n - k},$$

alors $f(v) = f(\mu)$ (voir problème (2)) et la solution u du problème (2) possède la forme

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y)h(y)dy - f(\mu) \int_\Omega G(x, y)\chi_w dy$$

$$= u_h(x) + u_p(x) \quad \text{(voir page 31)}$$

où

$$u_h(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y)h(y)dy$$

et

$$u_p(x) = -f(\mu) \int_\Omega G(x, y)\chi_w dy.$$

De la même manière, la solution du problème réduit (P_0) possède la forme

$$u_r(x) = -f(\mu) \int_\Omega G(x, y)\chi_{w_r} dy$$

où $w_r = \{(r, \theta) \in \Omega, 0 \leq r < r_0, \theta \in S\}$.

Ainsi,

$$||u_h||_{C^0(\overline{\Omega})} \leq ||h||_\infty \max_{x\in\Omega} \int_{\partial\Omega} |P(x,y)|dy$$

et puisque

$$\begin{cases} -\Delta(u_p - u_r) = f(\mu)[\chi_w - \chi_{w_r}] & \text{dans } \Omega, \\ u_p - u_r = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous concluons de la théorie L_p des équations elliptiques (voir [32], p 198) qu'il existe une constane positive $C_1 > 0$ telle que

$$||u_p - u_r||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_1 ||\chi_w - \chi_{w_r}||_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci implique que si $||h||_\infty$ et b sont assez petites, alors $||u - u_r||_{W^{2,p}}$ est petite.

Preuve de la proposition 4.1.
Soit

$$F(\theta, g) = u(r_0 + g, \theta) - \mu = 0, \qquad \theta \in S, \quad g \in \mathbb{R}$$

On note que la solution radiale $u \in W^{2,p} \subset C^{1,\alpha}$, avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, $p > n$, donc F est de classe $C^{1,\alpha}$.
En utilisant le lemme 4.1, nous concluons que u est proche dans $C^{1,\alpha}$ à la solution du problème réduit, donc $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) \neq 0$.
Soit $\theta_0 \in S$, On pose $g_0 = b(\theta_0)$, on a alors

$$F(\theta_0, g_0) = u(r_0 + b(\theta_0), \theta_0) - \mu = 0$$

et

$$D_g F(\theta_0, g_0) = \frac{\partial u}{\partial g}(r_0 + g_0, \theta_0).$$

On sait que

$$\frac{\partial u}{\partial g}(r_0, \theta_0) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) \neq 0.$$

Maintenant, par l'application du théorème des fonctions implicites, on déduit qu'il existe $V(\theta_0)$ un voisinage de θ_0 et $V(g_0)$ un voisinage de g_0 et une solution unique g dans $C^{1,\alpha}$ telle que

$$g : V(\theta_0) \to V(g_0) \qquad \text{et} \quad g(\theta_0) = g_0.$$

On sait que $u(r_0 + b(\theta), \theta) - \mu = 0$, $\forall \theta \in V(\theta_0)$, alors par unicité, $b(\theta) = g(\theta), \forall \theta \in V(\theta_0)$ qui implique que $b \in C^{1,\alpha}(V(\theta_0))$. Puisque $\theta_0 \in S$ est arbitraire, alors on a $b \in C^{1,\alpha}(S)$.

Maintenant, pour traiter l'analyticité de la frontière libre, nous utilisons la transformation de l'Hodographe introduite par Kinderlehrer, Nirenberg et Spruck. Voir [83].

Soit u une solution du problème (P_h), et soit

$$\Gamma := \{(r, \theta)/u(r, \theta) = \mu\} = \{(r_0 + b(\theta), \theta), \theta \in S\}$$

sa frontière libre correspondante, avec r_0 différent de $(\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$.

Nous considérons une petite boule B de centre $x_0 = (r_0 + b(\theta_0), \theta_0) \in \Gamma$. On translate la boule pour avoir $x_0 = 0$, on utilise l'invariance du Laplacien par rotation et en écrivant Γ comme $\Gamma \cap B, v = u - \mu$, alors on a

$$(P) \begin{cases} -\Delta v + f(v+\mu) = 0 & \text{dans } \; B^+ = \{x = (x_1, ..., x_n), x_n > 0\}, \\ -\Delta v = 0 & \text{dans } B^- = \{x = (x_1, ..., x_n), x_n < 0\}, \\ v = 0 & \text{sur } \; \Gamma \end{cases}$$

On sait que $v \in C^{1,\alpha}(B^+ \cup \Gamma \cup B^-)$, et par le principe du maximum de Hopf, nous avons $\frac{\partial v}{\partial \nu}(0) < 0$, où ν est la normale extérieur de Γ avec $\nu = (0, 0, ..., -1)$. Alors

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_n}(0)\nu_i(0) = -\frac{\partial v}{\partial x_n}(0) < 0,$$

qui implique que

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(0) > 0.$$

Nous introduisons la transformation de l'Hodographe [83] comme

$$(H) \begin{cases} y_\sigma = x_\sigma & \sigma < n, \\ y_n = v(x) & x \in B. \end{cases}$$

L'application (H) transforme B^+, Γ et B^- en U^+, Σ et U^- respectivement avec

$$U^+ = \{y \in U, y_n > 0\},$$

$$U^- = \{y \in U, y_n < 0\}$$

et

$$\Sigma = \{y \in U, y_n = 0\}.$$

On peut définir encore la transformation inverse de (H), qui est donnée par

$$(H') \begin{cases} x_\sigma = y_\sigma & 1 \le \sigma \le n-1, \\ x_n = \psi(y) & y \in U. \end{cases}$$

Nous remarquons que $\psi \in C^{1,\alpha}(U^+ \cup \Sigma \cup U^-)$. Nous notons par $v_i, 1 \le i \le n$, la dérivée partielle par rapport à x_i, et $\psi_j, 1 \le j \le n$, la dérivée partielle par rapport à y_j.

L'une des propriétés importantes de cette transformation Hodographe est

$$\begin{aligned} dy_n = dv &= \sum_\sigma v_\sigma dx_\sigma + v_n dx_n \\ &= \sum_\sigma v_\sigma dx_\sigma + v_n d\psi \\ &= \sum_\sigma v_\sigma dx_\sigma + v_n(\sum_\sigma \psi_\sigma dy_\sigma + \psi_n dy_n) \\ &= \sum_\sigma (v_\sigma + v_n\psi_\sigma) dx_\sigma + v_n \psi_n dy_n. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} \psi_n v_n = 1 \\ \psi_\sigma v_n + v_\sigma = 0 \end{cases} \Rightarrow (P_1) \begin{cases} \psi_n = \frac{1}{v_n} \\ \psi_\sigma = \frac{-v_\sigma}{v_n}. \end{cases}$$

En utilisant cette propriété, nous avons

$$(P_2) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} = \partial_\sigma - \frac{\psi_\sigma}{\psi_n}\partial_n & 1 \leq \sigma \leq n-1, \\ \frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{1}{\psi_n}\partial_n & \text{avec} \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{cases}$$

4.2 L'analyticité de la frontière libre.

Dans cette partie, nous utilisons la transformation de l'hodographe pour obtenir l'analyticité de la frontière. Ainsi, nous avons le résultat suivant

Proposition 4.2 *Sous les conditions du Théorème 3.1, la frontière libre est une hypersurface analytique.*

La preuve de la proposition 4.2 est obtenue à l'aide de la construction d'une application transformant les deux différentes régions du problème (P_h) séparé par la frontière libre en des demi-espaces. L'équation aux dérivées partielles dans w et $\Omega \setminus w$ sont transformées en de nouvelles équations dans le demi espace et nous appliquons la théorie classique de régularité des systèmes elliptiques pour obtenir les résultats désirés.

Preuve de la proposition 4.2.

Nous commençons par établir les deux lemmes suivants.

Lemme 4.2

$$\begin{cases} v_{\sigma\sigma} = \frac{-\psi_{\sigma\sigma}}{\psi_n} + 2\frac{\psi_\sigma}{\psi_n^2}\psi_{\sigma n} - \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_n^3}\psi_{nn} \\ v_{nn} = \frac{-1}{\psi_n^3}\psi_{nn}. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant $(P_1), (P_2)$ pour v_σ et v_n, nous avons

$$v_{\sigma\sigma} = \frac{\partial v}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y_\sigma} - \frac{\psi_\sigma}{\psi_n}\frac{\partial v_\sigma}{\partial y_n}.$$

On sait que

$$\frac{\partial v_\sigma}{\partial y_\sigma} = -[v_n\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial y_\sigma} + \psi_\sigma\frac{\partial v_n}{\partial y_\sigma}] = -[v_n\psi_{\sigma\sigma} - \psi_\sigma\frac{\psi_{n\sigma}}{\psi_n^2}]$$

et

$$\frac{\partial v_\sigma}{\partial y_n} - [\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial y_n}v_n + \frac{\partial v_n}{\partial y_n}\psi_\sigma] = -v_n\psi_{n\sigma} + \psi_\sigma\frac{\psi_{nn}}{\psi_n^2}.$$

Combinant les deux résultats, on a alors

$$v_{\sigma\sigma} = -v_n\psi_{\sigma\sigma} + \psi_\sigma\frac{\psi_{n\sigma}}{\psi_n^2} - \frac{\psi_\sigma}{\psi_n}[-v_n\psi_{n\sigma} + \psi_\sigma\frac{\psi_{nn}}{\psi_n^2}]$$

$$v_{\sigma\sigma} = \frac{-\psi_{\sigma\sigma}}{\psi_n} + 2\frac{\psi_\sigma}{\psi_n^2}\psi_{\sigma n} - \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_n^3}\psi_{nn},$$

et pour v_{nn}, on a

$$v_{nn} = \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\psi_n}\frac{\partial v_n}{\partial y_n} = -\frac{\psi_{nn}}{\psi_n^3}.$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Ainsi, puisque la fonction v satisfait $\Delta v = \sum_\sigma v_{\sigma\sigma} + v_{nn}$, alors ψ satisfait l'équation nonlinéaire dans U^+

$$g(\psi, D\psi, D^2\psi) + f(y_n + \mu) = 0 \quad \text{dans} \;\; U^+,$$

où

$$g(\psi, D\psi, D^2\psi) = \frac{-1}{\psi_n}\sum_\sigma \psi_{\sigma\sigma} + \frac{2}{\psi_n^2}\sum_\sigma \psi_\sigma \psi_{\sigma n} - \frac{1}{\psi_n^3}(1 + \sum_\sigma \psi_\sigma^2)\psi_{nn}.$$

En plus, ψ satisfait $g(\psi, D\psi, D^2\psi) = 0$ dans U^-.

On note par $y = (y_1, ..., y_{n-1}, y_n) = (y', y_n)$, et nous définissons pour $y \in U^+$, $\phi(y) = \psi(y', -y_n)$. Alors ϕ satisfait l'équation dans U^+,

$$g(\phi, D\phi, D^2\phi) = 0.$$

Ainsi, nous obtenons le système suivant

$$(S_1) \qquad g(\psi, D\psi, D^2\psi) + f(y_n + \mu) = 0 \quad \text{dans} \;\; U^+$$

$$(S_2) \qquad g(\phi, D\phi, D^2\phi) = 0 \qquad\qquad \text{dans} \;\; U^+,$$

avec les conditions aux bord

$$(C) \begin{cases} \phi - \psi = 0 & \text{sur } \sum, \\ \phi_n + \psi_n = 0 & \text{sur } \sum. \end{cases}$$

Alors, nous prouvons le résultat suivant.

Lemme 4.3 *Le système $(S_1) - (S_2)$ est elliptique et les conditions aux bord (C) sont coercives au point* 0.

Preuve. On peut vérifier immédiatement que le système $(S_1) - (S_2)$ est elliptique au point 0. Il reste à prouver la coercivité de $(S_1) - (S_2) - (C)$. Pour cela, nous montrons que le système $(S_1) - (S_2)$ avec les conditions aux bord n'admet aucune solution exponentielle nontriviale. D'abord, on choisit les coordonnées suivantes

$$\psi_n(0) = \frac{1}{v_n(0)} > 0 \qquad \psi_\sigma(0) = -\frac{v_\sigma(0)}{v_n(0)} = 0, \qquad 1 \le \sigma \le n-1.$$

Ainsi, les équations linéarisées de $(S_1) - (S_2)$ avec les poids $s_1 = s_2 = 0, t_1 = t_2 = 2$, sont

$$(S_1*) \qquad \sum_\sigma \psi_{\sigma\sigma} + a^2\psi_{nn} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n_+$$

$$(S2*) \qquad \sum_\sigma \phi_{\sigma\sigma} + a^2\phi_{nn} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n_+$$

où $a = v_n(0) > 0$. Les conditions aux bord généralisées sont

$$(C)\begin{cases} \phi - \psi = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{n-1}, \\ \phi_n + \psi_n = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Introduisons les fonctions $\psi(y', t) = e^{i\xi' y'} w(t)$ et $\phi(y', t) = e^{i\xi' y'} m(t)$, pour $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Nous obtenons en remplaçant ϕ, ψ dans les équations $(S_1*) - (S_2*)$,

$$a^2 w''(t) - |\xi'|^2 w(t) = 0$$
$$a^2 m''(t) - |\xi'|^2 m(t) = 0,$$

avec les conditions $(C*)$

$$w(0) = m(0) = 0, \qquad w'(0) + m'(0) = 0.$$

Soit $X(t) = w(t) + m(t)$, alors nous avons

$$a^2 X''(t) - |\xi'|^2 X(t) = 0, \qquad (D)$$

La condition au bord $(C*)$ implique que $X(0) = 0$ et $X'(0) = 0$, qui donne

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 - c_1 = 0. \end{cases}$$

Ainsi $c_1 = c_2 = 0$, ce qui conclut que $X(t) = 0$.

Maintenant, soit $Y(t) = w(t) - m(t)$ avec $Y(0) = 0$, nous avons

$$Y(t) = c_3(e^{-\frac{|\xi'|}{a}t} - e^{\frac{|\xi'|}{a}t}).$$

La fonction $Y(t)$ est bornée si et seulement si $c_3 = 0$. Ceci nous ramène à $w(t) = m(t) = 0$, qui implique que $(S_1*) - (S_2*) - (C)$ n'admet aucune solution exponentielle nontriviale, donc $(S_1*) - (S_2*) - (C)$ est coercive au point 0. Ceci termine la preuve du lemme 4.2

Comme dans ce cas f est constante (voir p.32 et p.33) alors f est analytique, il suffit d'appliquer le Théorème 1.4 du préliminaire pour conclure que la frontière libre Γ est analytique.

Remarque 4.1 *La régularité de la frontière libre dans le cas où $r_0 = (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n-2}}$ reste un problème ouvert. Nous avons seulement montré l'existence d'une fonction continue b. Il semble qu'il est possible d'étudier la régularité optimale en utilisant les idées de L. Caffarelli dans [37, 38].*

5

L'influence de la discontinuité sur les solutions

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'influence de la discontinuité sur les solutions. En effet, la forme de la discontinuité dans le second membre du problème (P_0) à des effets surprenant sur la structure de l'ensemble des solutions et sur les frontières libres correspondantes. Plus précisément, si on remplace la fonction de Heaviside $H(u-\mu)$ par $H(\mu-u)$ dans le problème (P_0), nous obtenons le problème (S_0),

$$(S_0)\begin{cases} -\Delta u = f(u)H(\mu-u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ dans Ω sous les conditions de Dirichlet avec la fonction correspondante φ_1.

Nous remarquons que le problème (P_0) possède des solutions multiples, par contre le problème (S_0) admet une solution unique pour les mêmes fonctions f. Par exemple,

$$f(s) = ks + \beta \quad \text{avec} \quad 0 < k < \lambda_1 \quad \text{et} \quad \beta > 0$$

vérifiant

$$\frac{f(\mu)}{\mu} > \max(2\lambda_1 \frac{||\varphi_1||_{L^1}}{||\varphi_1||_{L^2}^2}, \lambda_1).$$

L'une des difficultés majeures dans l'étude du problème (S_0) est qu'on ne peut pas appliquer les techniques utilisées dans le chapitre 2 de cette thèse.

Pour l'étude d'existence de solution du problème (S_0), nous utilisons l'approche des inégalités variationnelles. L'idée clé est d'obtenir une équivalence entre les solutions du problème (S_0) et les solutions d'une certaine inégalité variationnelle. Par solution, nous voulons une fonction $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \xi dx = \int_\Omega f(u)H(\mu-u)\xi dx,$$

pour $\xi \in C_0^1(\Omega)$.

Nous supposons que :

H_1) La fonction $f(s)$ est positive pour $s > 0$, croissante et f est k-Lipschitzienne avec $k \in (0, \lambda_1)$.

H_2) Pour $\mu > 0$, on suppose

$$\delta := \frac{f(\mu)}{\mu} > \lambda_1$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

H_3) La fonction $f(s)/s$ est décroissante.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Sous les hypothèses précédentes, le problème* (S_0) *possède une solution unique positive. En plus, l'ensemble* $\{x \in \Omega, \quad u(x) = \mu\}$ *est une boule de rayon* $\rho \in (0,1)$ *centré à l'origine.*

La preuve de ce théorème est divisée en trois sections pour bien éclaircir les arguments utilisés.

5.1 Inégalités variationnelles.

L'intention de cette section est de justifier l'utilisation de l'approche des inégalités variationnelles.

Soit

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega) : v \leq \mu \quad \text{dans} \quad \Omega\}.$$

Pour $\widetilde{f} \in L^2(\Omega)$, il est bien connu que l'inégalité variationnelle

$$(1) \quad \int_\Omega \nabla v.\nabla(\xi - v)dx \geq \int_\Omega \widetilde{f}(\xi - v)dx, \qquad \forall \xi \in K$$

possède une solution unique v dans K. (Voir Théorème 1.9 du préliminaire.).

Nous définissons l'opérateur solution suivant

$$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

tel que $v = T(\widetilde{f})$. Dans le lemme suivant, nous donnons quelques propriétés intéréssantes de l'opérateur précédent.

Lemme 5.1 *L'opérateur solution* T *vérifie.*

1/ $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *est complètement continue .*

2/ $T(\widetilde{f}) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, *si* $\widetilde{f} \in L^p(\Omega); p > n$.

3/Si $\widetilde{f}_1 \leq \widetilde{f}_2$ *dans* Ω, *alors* $T(\widetilde{f}_1) \leq T(\widetilde{f}_2)$ *dans* Ω.

4/$T(\widetilde{f}) \geq 0$ *p.p dans* Ω, *quand* $\widetilde{f} \geq 0$ *p.p dans* Ω.

Preuve. 1) Tous d'abord, nous montrerons que l'opérateur T est complètement continu i.e

$$||T(\widetilde{f}_1) - T(\widetilde{f}_2)||_{H_0^1} \leq C||\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2||_{L^2}.$$

Notons $v_1 = T(\widetilde{f_1})$ et $v_2 = T(\widetilde{f_2})$. Alors, par l'inégalité variationnelle précédente, on a

$$\int_\Omega \nabla v_1.\nabla(v_2 - v_1)dx \geq \int_\Omega \widetilde{f_1}(v_2 - v_1)dx$$

$$\int_\Omega \nabla v_2.\nabla(v_1 - v_2)dx \geq \int_\Omega \widetilde{f_2}(v_1 - v_2)dx.$$

Ajoutant ces deux inégalités, nous obtenons

$$||v_1 - v_2||^2_{H^1_0} = \int_\Omega |\nabla(v_1 - v_2)|^2 dx \leq \int_\Omega (\widetilde{f_1} - \widetilde{f_2})(v_1 - v_2)dx$$

$$\leq ||\widetilde{f_1} - \widetilde{f_2}||_{L^2} ||v_1 - v_2||_{L^2}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré,

$$||v_1 - v_2||_{L^2} \leq C||v_1 - v_2||_{H^1_0} \quad \text{pour} \quad C > 0.$$

On a,

$$||v_1 - v_2||_{H^1_0} \leq C||\widetilde{f_1} - \widetilde{f_2}||_{L^2}.$$

2) Nous utilisons le faite que v vérifie l'inégalité variationnelle (1). Si $w = -v$, alors w est solution de

$$(2) \quad \int_\Omega \nabla w.\nabla(\xi - w)dx \geq \int_\Omega (-\widetilde{f})(\xi - w)dx, \qquad \forall \xi \in K'$$

où $K' = \{\xi \in H^1_0(\Omega), \xi \geq -\mu\}$.

Puisque la fonction $\widetilde{f} \in L^p(\Omega), p > n$ et l'ensemble K' possède la forme précédente, nous appliquons le théorème de régularité 1.11 du préliminaire pour conclure que la solution unique $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

3) Soit $w_i = -T(\widetilde{f_i}), i = 1, 2$ les solutions de l'inégalité variationnelle (2) avec $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}$ respectivement. Pour $0 \leq \psi \in H^1_0(\Omega)$, nous avons $w_1 + \psi \in K'$ puisque la fonction $w_1 \in K'$.

Dans l'inégalité variationnelle (2), nous remplaçons

$$\widetilde{f} = \widetilde{f_1}, w = w_1, \xi = w_1 + \psi.$$

Nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla w_1 \nabla \psi \geq \int_\Omega (-\widetilde{f_1})\psi dx.$$

D'autre part, $\widetilde{f_1} \leq \widetilde{f_2}$ qui implique que $(-\widetilde{f_1}) \geq (-\widetilde{f_2})$ dans Ω. Ainsi,

$$(3) \quad \int_\Omega \nabla w_1 \nabla \psi \geq \int_\Omega (-\widetilde{f_1})\psi dx \geq \int_\Omega (-\widetilde{f_2})\psi dx.$$

L'inégalité variationnelle (3) implique que w_1 est une supersolution de $-\Delta + \widetilde{f_2}$ et par le théorème 6.4, chapitre II de [83], nous concluons que

$$w_1 \geq w_2 \quad \text{i.e} \quad T(\widetilde{f_1}) \leq T(\widetilde{f_2}).$$

Puisque $T(0) = 0$, la propriété 4) est une conséquence directe de 3). Ceci termine la preuve du lemme.

De la définition de l'opérateur T, nous avons

$$T(\widetilde{f}) = -(\Delta)^{-1}\widetilde{f} \quad si \quad \widetilde{f} \geq 0$$

et

$$-(\Delta)^{-1}\widetilde{f} \leq \mu \quad \text{pour} \quad \mu > 0,$$

où $-(\Delta)^{-1}$ note l'inverse du $-\Delta$ sous les conditions de Dirichlet.

Maintenant, nous considérons l'opérateur $T_\delta : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ définie par

$$T_\delta(u) = T(\delta f(u))$$

où δ est la constante définie dans l'hypothèse H_2).

5.2 Résultat d'existence et d'unicité.

Dans cette section, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème S_0. Nous utilisons l'approche de point fixe combiné avec les techniques des inégalités variationnelles.

5.2.1 Existence des solutions.

Nous commençons par donner une équivalence entre solution du problème (S_0) et solution d'une inégalité variationnelle adéquate. Nous utilisons les idées de [57].

Théorème 5.2 *Supposons que $H_1), H_2)$ et $H_3)$ sont satisfaites. Alors v est solution du problème (S_0) si et seulement si v est un point fixe de T_δ dans K.*

Preuve.
Premièrement , notons que la solution u du problème (S_0) est strictement positive dans Ω. En effet, par l'inégalité de Harnack [71] , il existe une constante positive C telle que

$$0 < \sup_{\Omega_0} u \leq C \inf_{\Omega_0} u$$

quand $\Omega_0 = \{x \in \Omega / u(x) \leq \mu\}$.

Supposons que v est solution du problème (S_0), alors par le choix de $K := \{u \in H_0^1(\Omega) : v \leq \mu \quad \text{dans} \quad \Omega\}$, nous avons

$$\int_\Omega \nabla v . \nabla \xi dx = \int_\Omega f(v) H(\mu - v) \xi dx, \qquad \forall \xi \in H_0^1(\Omega)$$

Soit $\xi = \psi - v$ avec $\psi \in K$, alors

$$\int_\Omega \nabla v . \nabla(\psi - v) dx = \int_\Omega f(v) H(\mu - v)(\psi - v) dx$$

$$= \int_\Omega f(v)(\psi - v)dx + \int_\Omega f(v)(H(\mu - v) - 1)(\psi - v)dx$$
$$= \int_\Omega f(v)(\psi - v)dx + \int_{\{v \le \mu\}} f(v)(H(\mu - v) - 1)(\psi - v)dx$$
$$+ \int_{\{v > \mu\}} f(v)(H(\mu - v) - 1)(\psi - v)dx$$
$$\ge \int_\Omega f(v)(\psi - v)dx,$$

puisque

$$\int_{\{v>\mu\}} f(v)(H(\mu - v) - 1)(\psi - v)dx = -\int_{\{v>\mu\}} f(v)(\psi - v)dx$$

et

$$v(x) > \mu > \psi(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega \quad (\psi \in K).$$

la dernière inégalité implique que $\psi - v \le 0$. Ainsi

$$\int_{\{v>\mu\}} f(v)(H(\mu - v) - 1)(\psi - v)dx \ge 0.$$

Nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla(\psi - v)dx \ge \int_\Omega f(v)(\psi - v)dx, \qquad \forall \psi \in K.$$

Ceci implique que

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla(\psi - v)dx \ge \int_\Omega \frac{f(v)}{v} v(\psi - v)dx \qquad \forall \psi \in K$$
$$\ge \int_\Omega \frac{f(\mu)}{\mu} v(\psi - v)dx,$$

puisque $f(s)/s$ est décroissante et $v \le \mu$. Donc l'inégalité variationnelle devient

$$(1) \qquad \int_\Omega \nabla v.\nabla(\psi - v)dx \ge \delta \int_\Omega v(\psi - v)dx, \qquad \forall \psi \in K.$$

Maintenant, soit v solution de l'inégalité variationnelle (1). Du Théorème 1.10 dans le préliminaire, on sait que v vérifie

$$-\Delta v = f(v) - m \qquad dans \quad \Omega$$

où m est une mesure de Radon positive $supp(m) \subset \{x \in \Omega, v(x) = \mu\}$.

D'abord, nous remarquons que si $supp(m) = \emptyset$, alors v vérifie

$$-\Delta v = f(v) \quad dans \quad \Omega.$$

Ceci implique que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \xi dx = \int_\Omega f(v)\xi dx, \qquad \forall \xi \in H_0^1(\Omega).$$

Choisissons $\xi = \varphi_1$, où φ_1 est la fonction propre correspondante à λ_1, alors

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \int_\Omega f(v)\varphi_1 dx, \qquad (2).$$

D'autre part φ_1 vérifie

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \quad dans \quad \Omega$$

qui implique que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx, \qquad (3).$$

De (2) et (3), nous avons

$$\int_\Omega f(v)\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx.$$

Nous divisons par v, nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{f(v)}{v}\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 dx,$$

et par l'hypothèse H_3),

$$\frac{f(v)}{v} > \frac{f(\mu)}{\mu}, \quad pour \quad \mu > 0.$$

Ainsi,

$$\delta \int_\Omega \varphi_1 dx < \int_\Omega \frac{f(v)}{v}\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 dx.$$

Ceci implique que

$$\lambda_1 > \delta$$

qui est impossible par l'hypothèse H_2). Alors l'ensemble $\{x \in \Omega / v(x) = \mu\}$ à une mesure positive et par le théorème 6.19 de Lieb-Loss [86], nous concluons que

$$-\Delta v = 0 \quad p.p. \quad dans \quad \{v = \mu\}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$m = f(v) + \Delta v = f(v) \quad a.e \quad dans \quad \{v = \mu\}$$

et

$$m = 0 \quad p.p \quad dans \quad \{v < \mu\}.$$

Ceci implique que

$$m = f(\mu)\chi_{\{v=\mu\}}$$

et

$$-\Delta v = f(v) - f(\mu)\chi_{\{v=\mu\}}.$$

Donc, v vérifie

$$-\Delta v = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; v = \mu, \\ f(v) & \text{si} \;\; v < \mu. \end{cases}$$

Ceci conclue que v est solution du problème (S_0).

Maintenant, il reste à montrer que l'opérateur T_δ possède un point fixe dans K. Pour cela, on a la proposition suivante

Proposition 5.1 *Pour $\delta > 0$, l'opérateur T_δ possède un point fixe minimale dans K.*

Preuve. Nous montrerons que $u = T_\delta(u)$ dans K. Dans la région

$$\{x \in \Omega / v(x) \leq \mu\},$$

nous avons

$$\begin{cases} -\Delta v = f(v) & \text{dans} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous appliquons le principe du maximum de Hopf ([71]) pour conclure que

$$\frac{\partial v}{\partial n} < 0 \quad sur \quad \partial\Omega$$

où n est la normale extérieur. Ainsi, on a

$$v \geq \varepsilon\varphi_1 \quad dans \quad \Omega, \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0,$$

où φ_1 est la fonction propre correspondante à λ_1 avec $\max\limits_{\Omega} \varphi_1 = \mu$.

Soit

$$v_0 := \frac{\delta}{\lambda_1}\varepsilon\varphi_1(x) < \mu \quad \text{pour} \quad x \in \Omega, \quad \text{(nous choisissons un petit} \quad \varepsilon > 0).$$

La fonction v_0 vérifie

$$-\Delta v_0 = \delta\varepsilon\varphi_1$$

et par la formulation de l'opérateur T_δ, nous avons

$$v_0 = T_\delta(\varepsilon\varphi_1).$$

Dans l'ensemble K,

$$\mu \geq v(x) \geq \varepsilon\varphi_1(x) \quad pour \quad x \in \Omega$$

et par la monotonie de l'opérateur T_δ, nous avons

$$T_\delta(\mu) \geq T_\delta(\varepsilon\varphi_1)$$

et puisque $\delta > \lambda_1$, nous obtenons que

$$v_0 := T_\delta(\varepsilon\varphi_1) \geq \varepsilon\varphi_1.$$

D'autre part, par la définition de l'opérateur T_δ, nous avons que

$$T_\delta(\mu) = -(\Delta)^{-1}\mu \leq \mu \quad \forall x \in \Omega.$$

Ainsi,

$$\mu \geq T_\delta(\mu) \geq T_\delta(\varepsilon\varphi_1) \geq \varepsilon\varphi_1.$$

Si on note

$$w_0 = \varepsilon\varphi_1, \quad w_n = T_\delta^n(w_0)$$

nous déduisons

$$\mu \geq ... \geq w_{n+1} \geq w_n \geq ... \geq w_1 \geq w_0.$$

Puisque w_n est une suite croissante majorée, alors

$$\lim_{n\to\infty} w_n = w_\varepsilon^*$$

est un point fixe de T_δ dans K.

Maintenant, il reste à prouver que ce point fixe est indépendant de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0.)$

Soit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$. La monotonie de l'opérateur T_δ implique que

$$(T_\delta)^n(\varepsilon_1\varphi_1) \leq (T_\delta)^n(\varepsilon_2\varphi_1).$$

Il s'ensuit que,

$$w_{\varepsilon_1} \leq w_{\varepsilon_2}.$$

D'autre part, si ε_0 est suffisamment petit, alors nous pouvons trouver un entier positive n_0 tel que

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1(\frac{\delta}{\lambda_1})^{n_0} < 1.$$

Nous avons

$$(\frac{\delta}{\lambda_1})\varepsilon_1\varphi_1 < (\frac{\delta}{\lambda_1})^2\varepsilon_1\varphi_1 < ... < (\frac{\delta}{\lambda_1})^{n_0}\varepsilon_1\varphi_1 < \varphi_1 < \mu$$

(par la seconde partie de l'hypothèse H_2)). Donc, nous déduisons

$$T_\delta(\varepsilon_1\varphi_1) = (\frac{\delta}{\lambda_1})\varepsilon_1\varphi_1, \qquad (T_\delta)^2(\varepsilon_1\varphi_1) = (\frac{\delta}{\lambda_1})^2\varepsilon_1\varphi_1$$

et

$$(T_\delta)^{n_0}(\varepsilon_1\varphi_1) = (\frac{\delta}{\lambda_1})^{n_0}\varepsilon_1\varphi_1.$$

Alors

$$(T_\delta)^{n_0}(\varepsilon_1\varphi 1) \geq \varepsilon_0\varphi_1 > \varepsilon_2\varphi_1.$$

Maintenant, nous concluons que

$$(T_\delta)^{n+n_0}(\varepsilon_1\varphi_1) \geq (T_\delta)^n(\varepsilon_2\varphi_1), \quad \forall n \geq 1,$$

ceci implique

$$w_{\varepsilon_1} \geq w_{\varepsilon_2}.$$

Ainsi,

$$w_{\varepsilon_1} = w_{\varepsilon_2}$$

et la solution w_ε est indépendant du choix ε.

Remarque 5.1 *Si on note la fonction w_ε par w_0, alors par la précédente formulation $w_0 \leq v$ où v est un point fixe arbitraire de T_δ.*

5.2.2 Unicité.

Dans cette sous section, nous démontrons l'unicité de la solution du problème (S_0). Pour cela, soit w_1 un point fixe de l'opérateur T_δ dans K, vérifiant $w_1 \geq w_0$, et

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = f(w_1)H(\mu - w_1) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta w_0 = f(w_0)H(\mu - w_0) & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = w_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Multipliant les équations w_0, w_1 respectivement, nous obtenons

$$\int_\Omega w_1 f(w_0)H(\mu - w_0)dx = \int_\Omega \nabla w_0 \nabla w_1 dx = \int_\Omega w_0 f(w_1)H(\mu - w_1)dx.$$

Il suit que

$$\int_\Omega w_1 f(w_0)\chi_{D_0} dx = \int_\Omega w_0 f(w_1)\chi_{D_1} dx,$$

où $D_0 := \{x \in \Omega, w_0 < \mu\}$ et $\{x \in \Omega, w_1 < \mu\}$.

Ainsi,

$$\int_\Omega w_0 w_1 (\frac{f(w_0)}{w_0}\chi_{D_0} - \frac{f(w_1)}{w_1}\chi_{D_1})dx = 0.$$

Puisque $f(s)/s$ est décroissante par l'hypothèse H_3), et les fonctions w_0, w_1 sont positives, nous avons

$$0 \geq \int_\Omega w_0 w_1 \frac{f(w_1)}{w_1}(\chi_{D_0} - \chi_{D_1})dx.$$

Comme $\chi_{D_0} - \chi_{D_1}$ est positive, alors

$$\chi_{D_0} = \chi_{D_1}, \quad \text{presque partout dans} \quad \Omega.$$

Ainsi, l'ensemble $D_0 \setminus D_1$ à une mesure nulle.(Remarquons que $D_1 \subseteq D_0$ puisque $w_1 \geq w_0$.)

Soit $w = w_1 - w_0$. La fonction w vérifie

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -\Delta w_1 + \Delta w_0 \\ &= f(w_1) - f(w_0) \quad \text{p.p dans} \quad D_0. \end{aligned}$$

En utilisant le faite que $w_1 = w_0 = \mu$ dans $\Omega \setminus D_0$, nous aurons $w = 0$ et

$$-\Delta w = 0 \quad \text{p.p dans} \quad \Omega \setminus D_0.$$

Soit

$$\rho := \frac{1}{\delta}\frac{f(w_1) - f(w_0)}{w_1 - w_0} \quad \text{si} \quad w_1 \neq w_0 \quad \text{et} \quad \rho = 0 \quad \text{si} \quad w_1 = w_0$$

La fonction w vérifie

$$(P_w) \begin{cases} -\Delta w = k\rho w & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque la fonction f est k-lipschitzienne avec $k < \lambda_1$ et $\rho \leq 1$, alors $k\rho < \lambda_1$, qui implique que (P_w) possède la solution triviale. Ainsi, $w = 0$ et l'unicité est vérifiée.

5.3 Caractérisation de la frontière libre.

Cette partie est consacrée à la caractérisation de l'ensemble $E_\mu = \{x \in \Omega, u(x) = \mu\}$. Pour cela, nous utilisons les propriétés de symétrie de la solution u. Plus précisément, nous prouvons le résultat suivant

Proposition 5.2 *Soit u une solution positive du problème*

$$(S_0)\begin{cases} -\Delta u = f(u)H(\mu - u) & \textit{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous supposons que Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, la fonction f est croissante et μ est un paramètre positive. Alors la solution u est radiale.

Preuve. Nous procédons par étape.

Étape 1. Notations.

Soit $x = (x', x_n)$ où $x' = (x_1, .., x_{n-1})$ et choisissons un k tel que

$$T_k = \{x \in \Omega / \quad x_n = k\},$$

$$\Sigma_k = \{x \in \Omega / \quad x_n > k\},$$

$$x_k \quad \text{est la symétrie de} \quad x \quad \text{par rapport} \quad T_k,$$

$$\Sigma_k' \text{ est la symétrie de} \quad \Sigma_k \quad \text{par rapport} \quad T_k \quad \text{pour} \quad x \in \Omega.$$

Soit

$$x_k = (x', 2k - x_n) \text{ et } w_k(x) = u(x_k) - u(x).$$

Ètape 2. Nous prouvons que $w_k(x) > 0$ pour $x \in \Sigma_k$.

Tous d'abord, par le principe du maximum de Hopf, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \cap \{x_n > 0\}$$

qui implique que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) < 0$$

où ν est le vecteur unitaire normal. Ainsi, il existe k tel que $\Sigma_k \neq \emptyset$.

Le faite que k est arbitraire et $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) < 0$ pour $x \in T_k$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x \in \Sigma_k,$$

ceci implique que u est décroissante par rapport à x_n. Ainsi,

$$w_k(x) \geq 0, \quad \textit{pour} \quad x \in \Omega.$$

D'autre part, dans Σ_k

$$\begin{aligned}\Delta w_k(x) &= \Delta u(x_k) - \Delta u(x)\\ &= -f(u(x_k))H(\mu - u(x_k)) + f(u(x))H(\mu - u(x))\\ &\leq -f(u(x))H(\mu - u(x_k)) + f(u(x))H(\mu - u(x))\\ &\leq f(u(x))[H(\mu - u(x_k)) - H(\mu - u(x))] \leq 0.\end{aligned}$$

Sur $\partial\Sigma_k$, nous remarquons deux cas

1/ $\Omega \cap T_k$ implique que $u(x_k) = u(x)$
2/ $\partial\Omega \cap \partial\Sigma_k$ implique $u(x_k) \geq 0 = u(x)$ Ainsi,

$$(W)\begin{cases}\Delta w_k(x) \leq 0 & \text{pour} \quad x \in \Sigma_k,\\ w_k(x) \geq 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Sigma_k,\end{cases}$$

Le principe du maximum conclut que

$$w_k(x) > 0 \quad sur \quad \Sigma_k$$

Ètape 3. Soit $k_0 = \inf k$. Nous montrons que $k_0 = 0$.

Supposons que $k_0 > 0$ alors par la continuité de la fonction w_k, nous avons

$$w_{k_0}(x) > 0, \quad x \in \Sigma_{k_0}.$$

Soit $\delta > 0$ et K un ensemble compacte dans Σ_{k_0} tels que

$$|\Sigma_{k_0} \setminus K| < \delta/2.$$

Puisque la fonction $(x, k) \mapsto w_k(x)$ est continue sur Σ_k, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$w_{k_0-\varepsilon}(x) > 0, \quad x \in K.$$

Dans la région $\Sigma_{k_0-\varepsilon} \setminus K$, nous avons que

$$|\Sigma_{k_0-\varepsilon} \setminus K| < \delta$$

et la fonction $w_{k_0-\varepsilon}(x)$ vérifie le problème (W), puisque sur $\partial(\Sigma_{k_0-\varepsilon} \setminus K)$, $w_{k_0-\varepsilon}(x) \geq 0$.

Par le principe du maximum sur les petits domaines(voir p 59 de [97]). on a

$$w_{k_0-\varepsilon}(x) \geq 0, \qquad x \in \Sigma_{k_0-\varepsilon} \setminus K$$

et par le principe du comparaison , nous avons

$$w_{k_0-\varepsilon}(x) > 0, \qquad x \in \Sigma_{k_0-\varepsilon} \setminus K.$$

Ainsi, cette situation contradict le faite que k_0 est petit. Alors $k_0 = 0$.

Ètape 4. Puisque $k_0 = 0$, alors

$$u(x_{k_0}) \geq u(x)$$

Ainsi,
$$u(x', -x_n) \geq u(x', x_n) \qquad \textit{pour} \quad x \in \Omega \cap \{x_n > 0\}$$
La symétrie du domaine permet de refaire la même chose dans la région $\Omega \cap \{x_n < 0\}$. Nous aurons
$$u(x', -x_n) \leq u(x', x_n) \qquad \textit{pour} \quad x \in \Omega \cap \{x_n > 0\}$$
Ceci conclut que
$$u(x', -x_n) = u(x', x_n)$$

Remarque 5.2 *De la proposition 5.2, nous remarquons que la solution u vérifie*
$$-r^{1-n}\partial/\partial r(r^{n-1}\partial u/\partial r) = f(u) \quad \textit{pour} \quad r > 0$$
qui implique que
$$r^{n-1}\partial u/\partial r = -\int_0^r s^{n-1} f(u(s))ds$$
alors
$$\frac{\partial u}{\partial r}(r) = -r^{1-n}\int_0^r s^{n-1} f(u(s))ds < 0.$$
Pour terminer la preuve du Théorème 4.1, nous utilisons le résultat suivant

Lemme 5.2 *Soit γ une courbe de Jordan dans E_μ et w l'intérieur de contour γ. Alors $w \subset E_\mu$.*

Preuve.
Supposons le contraire, alors il existe $x_0 \in w$ qui satisfait $u(x_0) < \mu$. Nous considérons l'ensemble
$$w_1 := \{x \in \Omega / u(x) < \mu\}$$
qui est non vide et ouvert puisque u est continue. La fonction u vérifie
$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \; w_1, \\ u = \mu & \text{sur } \; \partial w_1. \end{cases}$$
Ainsi, par le principe du maximum $u \geq \mu$ dans w_1 qui est une contradiction.

Proposition 5.3 *Soit u une solution du problème (S_0), alors l'ensemble E_μ est une boule de rayon $r_0 \in (0, 1)$.*

Preuve. Puisque la solution u est radiale et décroissante, il existe un unique r_0 tel que $u(r_0) = \mu$. Ainsi, le lemme 5.2 implique que
$$E_\mu = \{x \in \Omega / \quad |x| \leq r_0\}.$$

6

Conclusion et perspectives.

Dans cette thèse, nous avons fait une contribution modèste à un sujet qui ne cesse de devenir important. Il y a plusieurs pistes de recherche que je voudrais détailler ici.

Les généralisations techniques.

Pour commencer, nous avons étudié un problème à frontière libre où il y a un Laplacien. Il serait intéréssant de généraliser l'étude pour un p-Laplacien avec $p \neq 2$. Une autre question completement ouvert est la généralisation de notre étude sur un domaine borné quelconque. Nous avons supposé ici seulement que le domaine est la boule unité pour utiliser la symétrie des solutions.
D'autres généralisations peuvent être faite telles que l'étude du problème avec condition de Neuman au bord ou conditions mixites, ainsi voir le même problème à frontière libre sous l'aspect des équations paraboliques.

Question de fonds.

Il y a également beaucoup de choses à explorer autour de ce problème à frontière libre. Nous avons montré dans cette thèse l'existence des solutions bifurquées pour le problème réduit. Il serait intéréssant de voir que se passe t-il à ces solutions après une perturbation. Dans le même cas, nous avons prouvé seulement l'existence d'une fonction continue b telle que la frontière libre possède la forme $r_0 + b$ où r_0 est une constante. Il semble qu'il est possible d'utiliser les idées de L. Caffarelli pour démontrer la régularité optimale de la frontière libre.
D'autres questions restent completement ouvertes telles que l'éffet de la perturbation h sur les solutions du problème (S_0), ainsi d'éventuelle phénomène de bifurcation.
Il reste à regarder notre problème sous l'angle de l'approche numérique, une telle technique peut nous aider à donner des interprétations physiques de notre étude.

Remarque 6.1 *il n 'est pas impossible que des erreurs aient pu se glisser dans le texte malgré tout le soin que diverses personnes ont pu apporté à la relecture de ce document.L'auteur sollicite l'indulgence du lecteur à ce sujet et l'en remercie par avance.*

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York-London, 1975.

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, *Comm. Pure. Appl. Math,* **12,** 623-727, (1959).

[3] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, *Comm. Pure. Appl. Math,* **17,** 35-92, (1964).

[4] R. Alexander, A discontinuous nonlinear eigenvalue/Free boundary problem, *Math. Meth in the Appl. Sci.* **4**, (1982), 131–142.

[5] R. Alexander, B. Fleishman, Perturbation and bifurcation in a free boundary problem. Trans. 26 Conf. Army Math, USARO, Research Triangle park, NC (1981), ARO Report 1-81.

[6] S. Alinhac, P. Gerard *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* InterEditions, Paris, 1991.

[7] H.W. ALt, L.A. Caffarelli, Existence and regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Reine Angew. Math*, **105**, 1981, 105-144.

[8] H.W. ALt, L.A. Caffarelli, A. Friedman, Axially symetric jet flows, *Arch. Rat. Mech. Anal*, **81** , 1983, 97-183.

[9] H.W. ALt, L.A. Caffarelli, A. Friedman, The dam problem with two fluids, *Comm. Pure. Apll. Math*, **27**, 1984, 601-645.

[10] H.W. ALt, L.A. Caffarelli, A. Friedman, Variational problems with two phases and their free boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc*, **282**, No. 2, 1984, 431-461.

[11] H. W. Alt, D. Philips, A free boundary problem for semilinear elliptic equations, *J. Reine Angew. Math*, **368**, 1986, 63-107.

[12] A. Ambrosetti, Critical points and nonlinear variational problems. Mémoires de la Société Mathématique de France, Sér. 2, **49** (1992), 1-139

[13] A. Ambrosetti, M. Badiale, The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl*, **140**, No.2,(1989), 363–373.

[14] A. Ambrosetti, M. Calahorrano, F. Dobarro, Global branching for discontinuous problems, *Commun. Math. Univ. Carolin.*, **31**, (1990), 213-222.

[15] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis,* Cambridge studies in advanced mathematics, **34**, 1993.

[16] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal*, **14**, (1973), 349-381.

[17] A. Ambrosetti, M. Struwe, Existence of steady vortex rings in an ideal fluid, *Arch. Rational Mech. Anal,* **108**, (1989) 97-109.

[18] A. Ambrosetti,R.E.L. Turner, Some discontinuous Variational Problems,*Differential and Integral Equations*, **1**, (3) (1988), 341-349.

[19] A. Anane, Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **305**, (1987), 725-728.

[20] D. Arcoya, M. Calahorrano, Some discontinuous problems with quasilinear operator,

J. Math. Anal. Appl. **187** (1994), 1059–1072.

[21] M. Badiale, G. Tarantello, Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinous nonlinearities, *Nonlinear. Anal.*, **29**, (1997), 639-677.

[22] Sifia Belgherras, Tayeb Benouaz, Ali Cheknane, Mathematical Model for Magneto hydrodynamic Equilibrium Study of Tokamak Plasma, International Review of Physics (I.RE.PHY), Vol.2,N.6, pp. 341-343, December 2008.

[23] S. Bensid, S.M. Bouguima, On a free boundary problem, *Nonl. Anal. T.M.A*,**68** (2008), 2328-2348.

[24] S. Bensid, S.M. Bouguima, Existence and multiplicity of solutions to elliptic problems with discontinuities and free boundary conditions, *EJDE*, **56**, (2010), 1-16.

[25] H. Berestycki, L. Nirenberg, S.R.S. Varadhan , The principle eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **47**, (1994), 47-92.

[26] H. Berestycki, H. Brezis , On a free boundary problem arising in plasma physics, *Nonl. Anal. T.M.A.*, **4** (1980), 415-436 .

[27] M.S. Berger, L.E. Fraenkel, Nonlinear desingularization in certain free boundary problem, *Comm. Math. Phys.*, **77** (1980), 149-172 .

[28] A. M. Bertone, J. Marcos do Ó, On a class of semilinear Schrodinger equations involving critical growth and discontinuous nonlinearities, *Nonlinear Anal.* **54**, (2003), 885-906.

[29] A. Boucherif, S.M. Bouguima, On a free boundary problem, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **19**, n 15, (1996), 1257-1264.

[30] A. Boucherif, S.M. Bouguima, Perturbation in a free boundary problem, *J. Math. Anal. Appl*, **185**, n 2, (1994), 430-437.

[31] S.M. Bouguima, A quasilinear elliptic problem with a discontinuous nonlinearity, *Nonl. Anal. T.M.A*, **25**, n 11,(1995), 1115-1121.

[32] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[33] H. Brezis, D. Kinderlehrer, The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities, *Indiana. Univ. Math. J*, **23**, No 9, (1974), 831-844.

[34] H. Brezis, G. Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquation elliptiques , *Bull. Soc. Math. France*, **23**, No 9, (1974), 831-844.

[35] L. A. Caffarelli, Free boundary problem : a survey, (1985).

[36] L. A. Caffarelli, A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, *Comm. Pure. Appl. Math*, **39**, no 5, (1986), 541-545.

[37] L.A. Caffarelli, The regularity of elliptic and parabolic free boundaries. *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), no. 4, 616–618.

[38] L. A. Caffarelli, The regularity of free boundaries in higher dimensions. *Acta Math.* **139** (1977), no. 3-4, 155–184.

[39] L.A. Caffarelli, Compacteness Methods in free boundary problems, *Comm. Partial. Differential. Equations*, **5**, no 4, (1980), 427-448.

[40] L.A. Caffarelli, A remark on the hausdorff measure of the free boundary, and the convergence of coincidence sets, *Boll. Un. Mat. Ital* A, **18**, no 5, (1981), 109-113.

[41] L.A. Caffarelli, The obstacle problem revisited, *J. Fourier. Anal. Appl.*, **4**, (1998), 383-402.

[42] L.A. Caffarelli, A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, part I : Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **3**, no 2, (1987), 139-162.

[43] L.A. Caffarelli, A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, part II : Flat free boundaries are Lipschitz *Comm. Pure. Appl.. Math*, **42**, (1989), 55-78.

[44] L.A. Caffarelli, A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, part III : Existence theory, Compactness, and dependence on *X Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci*, **15**, no 14, (1987), 139-162.

[45] L. Caffarelli, S. Salsa, *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*, American Mathematical Society, 2005.

[46] P. Candito, Infinitely many solutions to the Neumann problem for elliptic equations involving the p-Laplacian and with discontinuous nonlinearities, *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*,**45**, No. 2, (2002), 397-409.

[47] S. Carl, H. Dietrich, The weak upper and lower solution method for elliptic equations with generalizd subdifferentiable perturbations, *Appl. Anal.*, **56**, (1995), 263-278.

[48] S. Carl, H. Heikkila, Elliptic equations with discontinuous nonlinearities in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear. Anal.*, **31**, (1998), 217-227.

[49] K.C. Chang, On the multiple solutions of the elliptic differential equations with discontinuous nonlinear terms, *Sci. Sinica*, **21**, (1978), 139-158.

[50] K.C. Chang, The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities, *Commun. Pure. Appl. Math*, **33**, (1980), 117-146.

[51] K. C. Chang, Free boundary problems and the set-valued mappings, *J. Differential. Equations.*, **49**, (1983), 1-28.

[52] K. C. Chang, Variational methods for non-differentiable functionals and its applications to partial differential equations. *J. Math. Anal. Appli.*, **80**, (1981), 102-129.

[53] G. Cimatti, A nonlinear elliptic eigenvalue problem for the Elenbaas equations. *Boll. Un. Mat. Ital*, **16**. B, (1979), 555-565.

[54] F.H. Clark, Periodic solutions of Hamiltonian inclusions, *J. Diff. Equat.*, **40**, (1981), 1-6.

[55] M.G.Crandall, P.H. Rabinowitz,Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal*, **8**, (1971), 321-340.

[56] , E.N. Dancer, Y. Du, A uniqueness theorem for a free boundary problem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **134**, (11), (2006), 3223-3230.

[57] E.N. Dancer, Y. Du, On a free boundary problem arising from population biology, *Indiana Univ. Math. J.*, **52**, (2003), 51-68

[58] R. Dautray, J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, in : Volume 1 : Physical Origins and Classical Methods, Volume 4 : Integral Equations and Numerical Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[59] A. Dervieux, A perturbation study of the obstacle problem by mean of a generalized implicit function theorem, *Ann. Mat. Pura. Appl*,**127**, (1981), 321-364.

[60] A. Dervieux, Perturbation des equations d'equilibre d'un plasma confiné : comportement de la frontière fibre, étude de branches de solution, INRIA, Report No. 18 (1980).

[61] E. Dibenedetto, *Partial Differential Equations* . Birkhäuser, 1995.

[62] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, **19**, Amer. Math. Soc, 1998.

[63] B.A. Fleishman, T.J. Mahar, A step funtion model in chemical reactor theory : Multiplicity and stability of solutions, *Nonl. Anal,* **5**, (6), (1981), 645-654.

[64] B.A. Fleishman, T.J. Mahar, Analytic methods for approximate solution of elliptic free boundary problems, *Nonl.Anal,* **1**, (5), (1977), 561-569.

[65] B.A. Fleishman, T.J. Mahar, Boundary-value problems for a non-linear differential equation with discontinuous nonqinearities, *Math. Balkanica,* **3**, (1973), 98-108.

[66] L.E. Fraenkel, M.S. Berger, A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid, *Acta. Math,* **13**, 13-51,(1974).

[67] A. Friedman, *Variational principles and free boundary problems* .Wiley-Interscience Puplication, Wiley, New York, 1982.

[68] A. Friedman, D. Philips, The Free Boundary of a Semilinear Elliptic Equation, *Tran. Amer.Math.Soc,* **282,** No 1, 153-182, (1984).

[69] A. Friedman and B. Turkington, Vortex rings : existence and asymptotic estimates, *Trans. Amer. Math. Soc.* **268**, (1981), 1-38.

[70] B. Gidas, W. N. Ni, L. Nirenberg, Symmetry and related properties via maximum principle. *Commun. Math. Phys* **68**, (1979), 209-243.

[71] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[72] A.A. Guetter, A free boundary problem in plasma containment, *SIAM J. appl. Math.***49**, (1989), 99-115 .

[73] A.A. Guetter, On solutions of an elliptic boundary value problem with a discontinuous nonlinearity, *Nonl. Anal. T.M.A*,**23**, No 11, (1994), 1413-1425.

[74] N. Halidias, Elliptic problems with discontinuities, *J. Math. Anal. Appl.* **276**, (2002), 13-27.

[75] S. Heikkila, V. Lakshikantham, *Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations* . Dekker, 1994.

[76] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[77] B. Kawohl, *Rearrangements and Convexity of Level Sets in P.D.E.* Lecture Notes in Math, **1150**, Springer-Verlag,Berlin, 1985.

[78] A. K. Kerimov, Genralized implicit function theorem and problems with a free boundary, *Journal of Mathematical Sciences,* **74,** No 2, 1-81, 1995.

[79] S. Hu, N. Kourogenis, N.S. Papageorgiou, Nonlinear elliptic eigenvalue problems with discontinuities, *J. Math. Anal. Appl.*, **233**, (1999), 406-424.

[80] G. Keady, An elliptic boundary-value problem with a discontinuous nonlinearity, *Proc. R. Sot. Edinb.* **91** A, (1981), 161-174.

[81] G.Keady, P.E. Kloeden, An elliptic boundary value problem with a discontinuous nonlinearity, II, *Proc. R. Sot. Edinb.* **105** A, (1987), 23-36.

[82] C.E. Kenig, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math, **83**, American Mathematical Society, (1994).

[83] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications.* New York-London : Academic Press, 1980.

[84] J. Kolibal, Level set method for solving Poisson's equation with discontinuous nonlinearities *EJDE*, Vol (2005), N. 132, 1-12.

[85] H.J. Kuiper, Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **53**, (1974), 178-186.

[86] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis.* Amer. Math. Soc., Providence. 1997.

[87] J. Lopez-Gomez, The maximum principle and the existence of principal eigenvalue for some linear weighted boundary value problems, *J.Diff.Eqns.* **127** (1996), 263-294.

[88] S.A. Marano, D. Motreanu, Infinitely many critical points of non-differentiable functions and applications to a Neumann-type problem involving the p-Laplacian, *J. Differ. Equations* **182**, No.1, (2002), 108-120.

[89] R. Monneau, A brief overview on the obstacle problem, in proceeding of the third European congress of Mathematics, Barcelona, (2000) : Progress in Mathematics. **202**, Birkhäuser Verlag Basel/ Switzerland, (2001).

[90] R. Monneau, Méthodes géométriques pour les problèmes à frontières libres Séminaires et Congrès 17, (2004), 113-148

[91] R. Monneau, *Problème de frontière libre, EDP elliptique non linéaire et applications en combustion, supraconductivitét élasticité*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1999.

[92] C. Muller, *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math, **17**, Berlin-Heidelberg-New-York : Springer, 1966.

[93] F. Pantellini, «La magnétohydrodynamique». 2000, Univ.Jussieu.

[94] D. Phillips, A minimisation problem and the regularity of solutions in the presence of a free boundary, *Indiana. Uni. Math. J*, **32**, (1), 1983.

[95] D. Phillips, Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem, *Comm. Partial. Differential. Equations*, **8**, (13),1409-1454 1983.

[96] M.H. Proter, H.F. Weinberger *Maximum Principles in Diffrential Equations.* Prenticehall, Englewood Cliffs, 1967.

[97] P. Puccin, J. Serrin, *The Maximum Principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 73, 2007.

[98] H. Reinhard, *Equations Differentiells. Fondements et Applications.* Gautiller-Villars, 1982.

[99] E. V. Remizova, A problem with a free boundary, *Journal of Mathematical Sciences,* **45,** No 3, 1163-1172, (1989).

[100] D. A. Schaeffer, A stability theorem for the obstacle,*Adv. Math.*, **17**, 34-47, (1975).

[101] J. Sijbrand, Bifurcation analysis for a class of problems with a free boundary, *Nonl.Anal. T.M.A*, **3,** No 6, 723-753, (1979).

[102] J. Sijbrand, *Bifurcation analysis of a nonlinear free boundary problem from plasma physics,* Lecture notes in mathematics : Asymptotic analysis, 76-93, (1979).

[103] M. Sermange, Bifurcation of free boundary plasma equilibria, *Duke.Math.Journal*, **47,** No 4, 923-942, (1980).

[104] C. Shermann, A free boundary problem, *SIAM Rev,* **2,** (1960), 154-155.

[105] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues, *Ann. Inst. Fourier,* **15**, (1965), 189-258.

[106] C.A. Stuart, Differential equations with discontinuous non-linearities, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **63**, (1), (1976), 59-75

[107] C.A. Stuart, The number of solutions of boundary value problems with discontinuous non-linearities, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **66**, (3), (1977), 225-235.

[108] C.A. Stuart, J.F. Toland, A variational method for boundary value problems with discontinuous nonlinearities, *J. London. Math. Soc*, **21**, (2), (1980), 319-328.

[109] R. Temam, A nonlinear eigenvalue problem : The shape at equilibrium of a confined plasma. *Arch. Rational. Mech. Anal,* **60,** (1975), 51-73.

[110] B. Turkington, On steady vortex flow in two dimensions, I and II, Communications in Partial Differential Equations **8** (1983), no. 9, 999-1071.