Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Spécialité

Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Présentée par

MATALLAH ATIKA

Thème

Sur une classe de problèmes elliptiques avec poids sphériques

Devant le jury :

Président Mr. M Benalili Prof. Univ. Tlemcen

Examinateurs :

Mr. B. Abdellaoui M. C. A. Univ. Tlemcen

Mr. M. Bouguima Prof. Univ. Tlemcen

Mr. M. Benchohra Prof. Univ. Sidi Bellabes

Mr. B. Messirdi Prof. Univ. Oran

Rapporteur : Mr. M. Bouchekif Prof. Univ. Tlemcen

Année Universitaire

2011-2012

Table des Matières

Introduction

Cette thèse est consacrée aux problèmes elliptiques à coefficients sphériques. Plus précisément, on s'intéresse à l'existence et la multiplicité des solutions de la classe de problèmes elliptiques suivante :

$$(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right)-\mu\dfrac{u}{|x|^{2(a+1)}}=k\left(x\right)\dfrac{|u|^{2_*-2}u}{|x|^{2_*b}}+f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine, $N\geq 3$, $-\infty<a<(N-2)/2$, $a\leq b<a+1$, $-\infty<\mu<\overline{\mu}_a:=((N-2(a+1))/2)^2$, $2_*:=2N/(N-2+2(b-a))$ est l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, $k(x)$ et $f(x,u)$ seront définies ultérieurement selon les cas considérés dans ce manuscrit.

Cette classe a été introduite comme modèle de plusieurs phénomènes physiques liés à l'équilibre d'un milieu anisotropique continu, ils sont parfois des insulateurs parfaits ou conducteurs parfaits (voir par exemple [12]).

Comme $(\mathcal{P}_{a,b,\mu})$ a une structure variationnelle, la recherche des solutions consiste à trouver les points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée à ce problème. Il est clair que la dégénerescence et la singularité se produisent dans $(\mathcal{P}_{a,b,\mu})$. Dans de telles situations, les méthodes variationnelles classiques ne s'appliquent pas.

Le problème $(\mathcal{P}_{a,b,\mu})$ est lié à l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg [8] qui affirme l'existence d'une constante positive $C_{a,b}$ telle que:

$$\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}\,dx\right)^{\frac{1}{2_*}}\leq C_{a,b}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\quad \forall u\in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1}$$

Pour plus de détails concernant les constantes ainsi que les fonctions extrémales associées à (1), nous nous référons aux travaux [9, 11]).

En particulier, pour $b = a + 1$ on obtient l'inégalité de Hardy [11]:

$$\int_{\Omega} |x|^{-2(a+1)} |u|^2 \, dx \leq \frac{1}{\overline{\mu}_a} \int_{\Omega} |x|^{-2a} |\nabla u|^2 \, dx \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega) . \tag{2}$$

Et dans le cas où $a = b = 0$, on obtient l'inégalité classique de Sobolev:

$$\int_{\Omega} |u|^{2^*} \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega) , \tag{3}$$

où $2^* = 2N/(N-2)$.

On introduit l'espace de Sobolev $D_a^{1,2}(\Omega)$ qui est muni d'un poids et qui est la fermeture de l'espace $C_0^{\infty}(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{0,a} = \left(\int_{\Omega} |x|^{-2a} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega) .$$

On définit l'espace H_{μ} comme la fermeture de l'espace $C_0^{\infty}(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{\mu,a} := \left(\int_{\Omega} \left(|x|^{-2a} |\nabla u|^2 - \mu |x|^{-2(a+1)} u^2 \right) dx \right)^{1/2} \text{ pour } -\infty < \mu < \overline{\mu}_a.$$

Par l'inégalité de Hardy, les normes $\|.\|_{\mu,a}$ et $\|.\|_{0,a}$ sont équivalentes.

Notons que dans le cas où $f \equiv 0$, d'aprés l'identité de Pohozaev, le problème $(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})$ n'admet aucune solution non triviale dans un domaine étoilé. Il est naturel qu'on se pose la question suivante: que ce passe t-il si ces problèmes elliptiques sont perturbés par un terme sous ou sur critique. Durant les dernières decennies, ceci a attiré l'attention de plusieurs chercheurs mathématiciens.

La présence de l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg et le fait que le domaine ne soit pas borné sont parmi les raisons de la perte de compacité. Par ailleurs, plusieurs difficultés apparaissent dans le cas dégénéré ($a < 0$) ainsi que dans le cas singulier ($a > 0$). Par conséquent, on ne peut avoir recours directement à l'argument variationnel standard.

Pour les problèmes réguliers ($a = b = \mu = 0$), plusieurs auteurs se sont penchés sur l'étude de l'existence des solutions. En effet, pour $k \equiv 1$ et $f = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{P}_{0,0,0})$ a été étudié par Brézis et Nirenberg [4]. Ils ont introduit une méthode intéréssante pour la résolution de tels problèmes. Ceci est devenu un important point de départ pour les résultats d'existence concernant les équations elliptiques à coefficients réguliers ou singuliers. Ils ont démontré que l'existence de la solution positive dépend non seulement de λ mais aussi du couple $(N,\ \lambda)$, et ils ont montré que $(\mathcal{P}_{0,0,0})$ admet une solution positive si $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ pour un certain $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$ et $N = 3$. Et pour $N \geq 4$, $(\mathcal{P}_{0,0,0})$ ne possède aucune solution positive pour $\lambda \geq \lambda_1$, où λ_1 est la valeur propre principale de $-\Delta$ avec les conditions de Dirichlet.

Ce travail est composé de quatre chapitres.

Le chapitre 1 concerne les préliminaires: rappels des inégalités de Sobolev, Hardy-Sobolev et Caffarelli-Kohn-Nirenberg et des résultats sur les méthodes variationnelles à savoir le principe d'Ekeland et le théorème du col (Pass-Mountain) qui sont nécessaires pour la suite.

Dans le chapitre 2, on généralise les résultats d'Ambrosetti et al. [1] au problème singulier suivant

$$(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})_1 \begin{cases} -\text{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right) - \mu\,|x|^{-2(a+1)}\,u = \lambda\,|x|^{-c}\,|u|^{q-2}\,u + |x|^{-2_*b}\,|u|^{2_*-2}\,u & \text{dans } \Omega\backslash\{0\}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ est un domaine borné, $1 < q < 2$, $0 < c \leq q\,(a+1) + N(2-q)/2$, et λ est un paramètre positif.

Dans ce cas, on a perturbé le problème $(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})$ par un terme concave.

Il est connu que le nombre des solutions non triviales du problème $(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})_1$ est affecté par les termes concave et convexe. On appliquant le principe variationnel d'Ekeland [14], on obtient la première solution positive avec énergie négative et en faisant usage de théorème de Pass Mountain [2] on obtient la deuxième solution positive avec énergie positive. Dans cette situation, notons que la méthode de sous sur solution est inopérante contrairement au cas régulier.

Au chapitre 3, on étend les résultats précedents à un problème plus général

$$(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})_2 \begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu \dfrac{u}{|x|^{2(a+1)}} = \lambda h(x) \dfrac{|u|^{q-2} u}{|x|^{c}} + k(x) \dfrac{|u|^{2_*-2} u}{|x|^{2_* b}} & \text{dans } \Omega \backslash \{0\}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\, \Omega, \end{cases}$$

où k, h sont des fonctions continues qui changent de signe sur $\bar{\Omega}$,

Dans plusieurs problèmes comme ceux cités précédemment, la fonctionnelle d'énergie associée n'est pas bornée inferieurement dans H_μ, mais le devient dans un sous ensemble approprié de H_μ. Un minimiseur sur cette ensemble (s'il existe) peut donner naissance à la solution de l'équation différentielle correspondante. Alors, on prouve l'existence d'au moins deux points critiques non négatifs de la fonctionnelle d'énergie associée au problème $(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})_2$ dans un bon sous ensemble approprié de H_μ, qu'est la variété de Nehari.

Le dernier chapitre est concentré à l'étude du problème elliptique singulier non homogène suivant

$$(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})_3 \begin{cases} -\mathrm{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \mu |x|^{-2(a+1)} u = h(x) |x|^{-2_* b} |u|^{2^*-2} u + \lambda g(x) \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \\ u \in D_a^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right), \end{cases}$$

où $\Omega = \mathbb{R}^N$, $g \in \left(D_a^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)' \backslash \{0\}$ (dual de $D_a^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$) est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$ et k est une fonction positive bornée sur $\mathbb{R}^N$.
Dans cette partie on généralise les résultats de Tarantello [25] où $a = b = \mu = 0, k \equiv 1$ dans un domaine borné, au problème singulier $(\mathcal{P}_{a,b,,\mu})_3$. On adopte les mêmes méthodes que celles utilisées dans le chapitre 2 pour établir la multiplicité des solutions.

Liste des publications

[1] M. Bouchekif, A. Matallah, On singular nonhomogeneous elliptic equations involving critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent. Ric. mat. 58, 207-218 (2009).

[2] M. Bouchekif, A. Matallah, Singular elliptic equations involving a concave term and critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent with sign-changing weight functions. Electron. J. Differential Equations. 32, 1-12 (2010).

[3] M. Bouchekif, A. Matallah, On singular elliptic equations involving a concave term and critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent. Math. Nachr. 284, 177-185 (2011).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle brièvement les définitions de base dont on fera usage fréquemment dans les parties suivantes.

1.1 Point critique

Soit V un espace de Banach, $E \in C^1(V, \mathbb{R})$, $E'(u) : V \to V'$ (V' dual de V), les dérivées sont au sens de Fréchet.

On dit que $u \in V$ est un point critique de E si $E'(u) = 0$, sinon u est dit point régulier. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de E s'il existe un point critique u de E tel que $E(u) = c$. Sinon, c est dite régulière.

La notion de point critique peut être définie comme minimum local, mais en genéral ceci n'a lieu qu'en présence d'une certaine propriété de compacité, par exemple pour la fonction $E(u) = \exp -u$, la valeur $c = 0$ n'est jamais atteinte. Pour cela on exige que E satisfasse ce qu'on appelle la condition de Palais-Smale.

On dit que $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ satisfait la condition de Palais-Smale de niveau c ($(P\text{-}S)_c$ en abrégé), si de toute suite $(u_n) \subset V$ qui satisfait

$$E(u_n) \to c, \quad \text{et} \quad E'(u_n) \to 0 \ \text{ dans } \ V' \text{ quand } n \to \infty,$$

on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans V vers un point critique de E. Si la condition de $(P\text{-}S)_c$ est vérifiée pour tout $c \in \mathbb{R}$, on dit alors que E vérifie la condition de $(P\text{-}S)$.

1.2 Le principe variationnel d'Ekeland

Le théorème et le corollaire suivants montrent qu'il est possible de trouver des suite minimisantes.

Théorème 1.1 *[14]. Soit Γ un espace métrique de métrique d, et soit $E : \Gamma \to (-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle bornée inferieurement et faiblement semi-continue inferieurement sur Γ, ce qui veut dire:*

(1) .

$$c = \inf_{\Gamma} E > -\infty;$$

(2) . *Pour tout $u \in \Gamma$, et (u_n) dans Γ tels que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans Γ, alors:*

$$E(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf E(u_n).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$ tel que

$$c \leq E(\gamma_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$$

et

$$E(\gamma) - E(\gamma_\varepsilon) + \varepsilon d(\gamma, \gamma_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Corollaire 1.1 *[14]. Si Γ est un espace de Banach et $E \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ est borné inferieurement, alors il existe une suite minimisante (u_n) de E dans Γ telle que*

$$E(u_n) \to \inf_{\Gamma} E, \quad E'(u_n) \to 0 \text{ dans } \Gamma' \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

1.3 Théorème de Pass Mountain

Le théorème suivant constitue un outil puissant pour montrer l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle.

Théorème 1.2 *[2]. Soit V un espace de Banach, $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de $(P\text{-}S)$. On suppose que*

(1) $E(0) = 0$;

(2) *il existe $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que si $\|u\|_V = \rho$ alors $E(u) \geq \alpha$;*

(3) *il existe $u_1 \in V$ tel que $\|u_1\|_V \geq \rho$ et $E(u_1) < \alpha$.*

Alors E possède une valeur critique $c \geq \alpha$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]\,,\ V);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1\}\,,$$

et

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} E(u),$$

alors c est une valeur critique de E et $c \geq \alpha$.

1.4 Les inégalités et injections de Sobolev utiles

On commence par l'injection classique de Sobolev.

Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine ouvert borné , $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, et $1 \leq p \leq 2^*$. Alors il existe une constante positive C telle que

$$\left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.1}$$

L'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, est compacte si $p < 2_*$.

Les lemmes suivants sont essentiellement dus à Caffarelli et al. [8].

Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine ouvert borné de frontière régulière, $0 \in \Omega$, $-\infty < a < (N-2)/2, a \leq b \leq a+1$, $2_* = 2N/(N-2+2(b-a))$, $N \geq 3$ et $1 \leq p \leq 2_*$. Alors on a l'inégalité suivante:

il existe une constante positive C telle que

$$\left(\int_{\Omega} |x|^{-pb} |u|^{p} \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\Omega} |x|^{-2a} |\nabla u|^{2} \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in C_{0}^{\infty}(\Omega). \tag{1.2}$$

L'injection $D_{a}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_{p}\left(\Omega, |x|^{-pb}\right)$ est compacte si $p < 2_{*}$.

Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^{N}$ est domaine borné ouvert de frontière régulière, $0 \in \Omega$, $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b \leq a+1$, $1 \leq p \leq 2N/(N-2)$, $c \leq p(a+1) + N(2-p)/2$ et $N \geq 3$. Alors on a l'inégalité suivante:
il existe une constante positive C telle que

$$\left(\int_{\Omega} |x|^{-c} |u|^{p} \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\Omega} |x|^{-2a} |\nabla u|^{2} \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in C_{0}^{\infty}(\Omega). \tag{1.3}$$

L'injection $D_{a}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_{p}\left(\Omega, |x|^{-c}\right)$ est compacte si $p < 2N/(N-2)$.

Chapitre 2

Sur les équations elliptiques singulières contenant un terme concave et un exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème suivant

$$(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)-\mu\,|x|^{-2(a+1)}\,u=\lambda\,|x|^{-c}\,|u|^{q-2}\,u+|x|^{-2_*b}\,|u|^{2_*-2}\,u & \text{dans } \Omega\backslash\{0\}\,, \\ u=0 & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ est un domaine borné, $0\in\Omega$, $-\infty<a<(N-2)/2$, $a\leq b<a+1$, $1<q<2$, $0<c\leq q\,(a+1)+N(2-q)/2$, $2_*:=2N/\left(N-2+2\,(b-a)\right)$ est l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg , $-\infty<\mu<\overline{\mu}_a:=\left(\left(N-2\,(a+1)\right)/2\right)^2$ et λ est un paramètre positif.

Il est claire de constater que dans $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ on se heurte à un problème de dégénérescence et de singularité ce qui rend les méthodes variationnelles classiques inopérantes.

Rappelons brièvement, quelques résultats connus à propos du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$.

Pour $a = b = c = 0$, Ambrosetti et al. [1] ont étudié $(\mathcal{P}_{\lambda,0})$. Ils ont prouvé l'existence d'une constante positive $\Lambda > 0$ telle que le problème $(\mathcal{P}_{\lambda,0})$ admette au moins deux solutions positives pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$. Pour la première solution, ils ont fait appel à la méthode de sous sur solution, pour la seconde ils ont utilisé le théorème de Pass Mountain. Par ailleurs, Chen [10] a étudié le comportement asymptotique des solutions de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ en faisant intervenir les itérations de Moser. Le principe variationnel d'Ekeland lui a permis d'établir la première solution positive, et la seconde grâce au théorème de Pass Mountain.

Pour $a = c = 0$, $0 \leq b < 1$, Bouchekif et Matallah [3] ont prouvé l'existence de deux solutions positives sous certaines conditions suffisantes sur λ et μ.

Xuan et al. [27] ont obtenu grâce au lemme de Bliss, une forme explicite des fonctions extrémales associées à la constante optimale de l'injection $H_\mu \hookrightarrow L_{2_*}\left(\Omega, |x|^{-2_* b}\right)$. Ils ont démontré que si

$$0 < \sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu} + a < (N-2)/2, \text{ et } \mu < \overline{\mu}_a - b^2,$$

alors pour $\varepsilon > 0$, les fonctions définies par

$$u_\varepsilon(x) = C_0 \varepsilon^{2/(2_*-2)} \left(\varepsilon^{2\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}/\left(\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu} - b\right)} |x|^{(2_*-2)\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)/2} + |x|^{(2_*-2)\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} + \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)/2} \right)^{-2/(2_*-2)} \tag{2.1}$$

avec une constante appropriée C_0, sont des solutions de l'équation suivante

$$-\text{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \mu |x|^{-2(a+1)} u = |x|^{-2_* b} |u|^{2_*-2} u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

De plus, ils ont prouvé que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)} u_\varepsilon^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |u_\varepsilon|^{2_*} dx = S_\mu, \tag{2.2}$$

où

$$S_\mu := \inf_{u \in H_\mu \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|x|^{-2a} |\nabla u|^2 - \mu |x|^{-2(a+1)} u^2\right) dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-2_* b} |u|^{2_*} dx\right)^{2/2_*}}, \tag{2.3}$$

est une constante indépendante de Ω.

La question intéressante qu'on se pose est si les resultats obtenus concernant le problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ pour $a = 0$ restent valides pour $a \neq 0$.

Les principaux résultats de ce chapitre sont les théorèmes suivants:

Théorème 2.1 *On suppose que* $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $1 < q < 2$, $0 < c \leq q(a+1) + N(2-q)/2$, *et* $-\infty < \mu < \overline{\mu}_a$. *Alors il existe* $\Lambda > 0$ *tel que le problème* $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ *admet une solution positive* u_λ *dans* H_μ *pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Théorème 2.2 *On suppose que* $N > 2(a+1-b)$, $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $1 < q < 2$, $0 < c \leq q(a+1) + N(2-q)/2$, *et* $\mu \geq 0$ *satisfait*

$$\overline{\mu}_a - ((N-2)/2)^2 \leq \mu < \overline{\mu}_a - (a+1)^2 \quad \textit{si } b \geq 0,$$

et

$$\overline{\mu}_a - \min\left\{\left((a+1)^2 (N/2(a+1-b)-1\right)^2, ((N-2)/2)^2\right\} \leq \mu < \overline{\mu}_a - \max((a+1)^2, b^2)$$

si $-1 < a \leq b < 0$, *respectivement.*
Alors le problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ *admet une seconde solution* $w_\lambda > u_\lambda$ *dans* H_μ, *pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Les preuves des résultats précédents reposent, essentiellement, sur l'analyse de Chen [10].

Dans ce qui suit, nous présentons les notions et résultats préliminaires qui nous seront utiles pour démontrer nos résultats principaux dont les preuves seront données ultérieurement .

2.2 Préliminaires

Puisque notre approche est variationnelle, on définit la fonctionnelle $I_{\lambda,\mu}$ sur H_μ par

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |x|^{-c}|u|^q\,dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}\,dx, \text{ pour } u \in H_\mu.$$

Par l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, on constate que $I_{\lambda,\mu}$ est bien définie dans H_μ et appartient à $C^1(H_\mu, \mathbb{R})$.

Une fonction $u \in H_\mu$ est dite solution faible de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ si elle satisfait

$$\int_\Omega \left(|x|^{-2a} \nabla u \nabla v - \mu |x|^{-2(a+1)} uv - \lambda |x|^{-c} |u|^{q-2} uv - |x|^{-2_* b} |u|^{2_*-2} uv \right) dx = 0,$$

pour tout $v \in H_\mu$.

Le lemme suivant a été prouvé par Caffarelli et al. [8].

supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine ouvert borné, $0 \in \Omega, -\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b \leq a+1,\ 1 \leq p \leq 2_*,\ 1 \leq r \leq 2N/(N-2),\ c \leq r(a+1) + N(2-r)/2$. Alors il existe deux constantes positives $C_1,\ C_2$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées pour tout $u \in D_a^{1,2}(\Omega)$:

$$(i) \quad \left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)} |u|^2 dx \right)^{1/2} \leq (1/\overline{\mu}_a) \left(\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$(ii) \quad \left(\int_\Omega |x|^{-bp} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq C_1 \left(\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$(iii) \quad \left(\int_\Omega |x|^{-c} |u|^r dx \right)^{1/r} \leq C_2 \left(\int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

2.3 Preuve des Théorèmes 2.1 et 2.2

Tout au long de la preuve, l'existence de la première solution positive avec énergie négative est obtenue par le principe d'Ekeland. La seconde solution positive avec énergie positive s'obtient par le théorème de Pass Mountain.

2.3.1 Existence de la première solution positive

Dans cette partie, on prouve l'existence d'une constante positive Λ telle que $I_{\lambda,\mu}$ possède un minimum local pour tout $\lambda \in (0,\ \Lambda)$. Pour cela, on démontre grâce à la technique de concentration de compacité [21], que $I_{\lambda,\mu}$ satisfait une condition de Palais Smale locale.

Soit $\tilde{C} := \tilde{C}(a,b,C,N,q)$ une constante positive telle que

$$((a+1-b)/N) s^2 - \lambda C ((2_* - q)/2_* q) \ s^q \geq -\tilde{C} \lambda^{2/(2-q)} \text{ pour } s > 0,$$

où C est une constante positive fixée. Alors toute suite $(u_n) \subset H_\mu$ qui satisfait

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to \beta < \beta_1 := ((a+1-b)/N)\, S_\mu^{N/(2(a+1-b))} - \tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} \tag{2.4}$$

et

$$I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \qquad \text{dans} \quad (H_\mu)' \quad (\text{dual de } H_\mu), \tag{2.5}$$

contient une sous suite qui converge fortement dans H_μ.

Preuve: De (2.4) et (2.5), on déduit que (u_n) est bornée, donc il existe une sous suite notée encore (u_n) telle que:

$$\begin{array}{lcll} u_n & \rightharpoonup & u_\lambda & \text{dans } H_\mu, \\ u_n & \rightharpoonup & u_\lambda & \text{dans } L_{2_*}\left(\Omega, |x|^{-2_* b}\right), \\ u_n & \to & u_\lambda & \text{dans } L_q\left(\Omega, |x|^{-c}\right), \\ u_n & \to & u_\lambda & \text{p.p dans } \Omega. \end{array}$$

Alors $u_\lambda \in H_\mu$ est une solution faible de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$. Par le lemme de concentration de compacité de Lions [21], il existe une sous suite notée encore (u_n), un ensemble J au plus dénombrable, un ensemble de points distincts $\{x_j\}_{j\in J} \subset \Omega$ et des ensembles de nombres non négatifs $\{\tilde{\mu}_j\}_{j\in J}$, $\{\tilde{\nu}_j\}_{j\in J}$ tels que

$$|x|^{-2a}|\nabla u_n|^2 - \mu |x|^{-2(a+1)} u_n^2 \rightharpoonup \tilde{\mu} \geq |x|^{-2a}|\nabla u_\lambda|^2 - \mu |x|^{-2(a+1)} u_\lambda^2 + \sum_{j\in J} \tilde{\mu}_j \delta_{x_j}, \tag{2.6}$$

et

$$|x|^{-2_* b}|u_n|^{2_*} \rightharpoonup \tilde{\nu} = |x|^{-2_* b}|u_\lambda|^{2_*} + \sum_{j\in J} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j}. \tag{2.7}$$

Ici δ_x est la masse de Dirac centrée en x.

La définition de S_μ, nous permet de déduire que

$$S_\mu \tilde{\nu}_j^{2/2_*} \leq \tilde{\mu}_j \;\; \text{pour tout} \;\; j \in J. \tag{2.8}$$

Nous affirmons que pour tout $j \in J$, on a soit $\tilde{\mu}_j = \tilde{\nu}_j = 0$ *ou* $\tilde{\mu}_j \geq S_\mu^{N/(2(a+1-b))}$.

En effet, soient $\varepsilon > 0$ et Φ une fonction de class $C^\infty(\Omega)$ centrée en x_j définie par

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad |x - x_j| \leq \varepsilon/2, \\ 0 \quad \text{si} \quad |x - x_j| \geq \varepsilon, \end{cases} \qquad \text{et} \quad |\nabla \Phi| \leq (1/\varepsilon)^{(a+1-b)/3}.$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \Phi u_n \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_\Omega \left(|x|^{-2a} |\nabla u_n|^2 - \mu |x|^{-2(a+1)} u_n^2 \right) \Phi dx - \int_\Omega |x|^{-2_* b} |u_n|^{2_*} \Phi dx \right. \\
&\quad \left. - \lambda \int_\Omega |x|^{-c} |u_n|^q \Phi dx \right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \Phi |x|^{-2a} dx \\
&\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\Omega \left(|x|^{-2a} |\nabla u_\lambda|^2 - \mu |x|^{-2(a+1)} u_\lambda^2 \right) \Phi dx + \sum_{j \in J} \tilde{\mu}_j \left\langle \delta_{x_j}, \Phi \right\rangle dx - \int_\Omega |x|^{-2_* b} |u_\lambda|^{2_*} \Phi dx \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j \left\langle \delta_{x_j}, \Phi \right\rangle dx - \lambda \int_\Omega |x|^{-c} |u_\lambda|^q \Phi dx \right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \Phi |x|^{-2a} dx \\
&\geq \tilde{\mu}_j - \tilde{\nu}_j.
\end{aligned}$$

Par (2.8) on déduit que soit $\tilde{\mu}_j = 0$ ou $\tilde{\mu}_j \geq S_\mu^{N/(2(a+1-b))}$.

D'autre part, de (2.4) et (2.5) on a

$$\begin{aligned}
\beta &= \lim_{n \to \infty} (I_{\lambda,\mu}(u_n) - 1/2_* \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle), \\
&= \lim_{n \to \infty} ((a+1-b)/N) \|u_n\|_\mu^2 - \lambda ((2_* - q)/2_* q) \int_\Omega |x|^{-c} |u_\lambda|^q dx, \\
&\geq ((a+1-b)/N) \left(\|u_\lambda\|_\mu^2 + \sum_{j \in J} \tilde{\mu}_j \right) - \lambda ((2_* - q)/2_* q) \int_\Omega |x|^{-c} |u_\lambda|^q dx.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.1, on déduit que

$$\beta \geq ((a+1-b)/N) \left(\|u_\lambda\|_\mu^2 + \sum_{j \in J} \tilde{\mu}_j \right) - \lambda C ((2_* - q)/2_* q) \|u_\lambda\|_\mu^q.$$

Si on suppose que $\tilde{\mu}_j \neq 0$ pour un certain $j \in J$, alors

$$\begin{aligned} \beta &\geq ((a+1-b)/N) S_\mu^{N/2(a+1-b)} + ((a+1-b)/N) \|u_\lambda\|_\mu^2 - \lambda C ((2_* - q)/2_* q) \|u_\lambda\|_\mu^q \\ &\geq \beta_1, \end{aligned}$$

ce qui contredit notre hypothèse $\beta < \beta_1$. Donc $u_n \to u_\lambda$ dans H_μ quand n tend vers $+\infty$. ■

Preuve du Théorème 2.1. Le lemme 2.1, nous assure l'existence de deux constantes postives C_1, C_2 telles que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq (1/2) \|u\|_\mu^2 - (1/q) \lambda C_2 \|u\|_\mu^q - (1/2_*) C_1 \|u\|_\mu^{2_*}.$$

Soit $\rho = \|u\|_\mu$. Des inégalités précédentes, on peut trouver deux constantes positive ρ_0 et Λ telles que, pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, $I_{\lambda,\mu}(u)$ est bornée inférieurement dans B_{ρ_0} et $I_{\lambda,\mu}(u) \geq r > 0$ pour $\|u\|_\mu = \rho_0$. Ici B_{ρ_0} est la boule centrée en 0 et de rayon ρ_0.
Soit $\Phi \in H_\mu$ telle que $\|\Phi\|_\mu = 1$. Alors pour tout $t > 0$, on a

$$I_{\lambda,\mu}(t\Phi) = (1/2) t^2 - (1/q) \lambda t^q \int_\Omega |x|^{-c} |\Phi|^q \, dx - (1/2_*) t^{2_*} \int_\Omega |x|^{-2_* b} |\Phi|^{2_*} \, dx.$$

Donc, il existe $t_0 \leq \rho_0$ suffisament petit tel que $I_{\lambda,\mu}(t\Phi) < 0$ pour $0 < t < t_0$. Par conséquent, on obtient

$$I := \inf_{u \in B_{\rho_0}} I_{\lambda,\mu}(u) < 0.$$

Le lemme 2.2 implique que $I_{\lambda,\mu}$ atteint son minimum I en u_λ. Alors u_λ est une solution non triviale non négative pour $\lambda \in (0, \Lambda)$. Par suite, on prouve que $u_\lambda > 0$. En effet, on sait que pour tout sous ensemble compacte $K \subset \Omega \backslash \{0\}$, il existe deux constantes $k_1(K)$ et $k_2(K)$ telles que

$$0 < k_1(K) \leq |x|^{-2a} \leq k_2(K), \text{ pour tout } x \in K.$$

L'inégalité de Harnack nous permet de conclure que u_λ est positive dans K. Les inégalités précédentes ainsi que les résultats standards de régularité impliquent que $u_\lambda \in C^\infty(\overset{\circ}{K})$, comme K est arbitraire et $2_* \leq 2^* := 2N/(N-2)$, il s'en suit que $u_\lambda \in C^\infty(\Omega \backslash \{0\}, (0, +\infty))$, (voir par exemple [13]).

2.3.2 Existence de la seconde solution positive

Posons $u(x) = |x|^{-r} w(x)$ avec $r = \sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}$ où $0 \leq \mu < \overline{\mu}_a$. Pour toute solution positive $u \in H_\mu$ du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$, on déduit que $u \in C^\infty(\Omega \backslash \{0\})$ et satisfait $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ dans le sens classique.

Aprés transformation, on obtient:

$$(\mathcal{Q}) \begin{cases} -\mathrm{div}\left(|x|^{-2(r+a)} \nabla w\right) = \lambda |x|^{-(c+rq)} |w|^{q-2} w + |x|^{-2_*(b+r)} |w|^{2_*-2} w & \text{dans } \Omega \backslash \{0\}, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega \backslash \{0\}, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\, \Omega. \end{cases}$$

Soit $w \in C^2(\Omega \backslash \{0\})$ une solution du problème $(\mathcal{Q})$. Alors, il existe une constante positive r_0 suffisament petite, telle que

$$w(x) \geq \min_{|y|=r_0} w(y) \text{ pour tout } x \in B_{r_0} \backslash \{0\}.$$

Preuve: Elle est similaire à celle développée dans la proposition 3.1 dans [10]. ∎

Du lemme précédent, on déduit que $u(x) \geq M |x|^{-r}$, pour tout $x \in B_{r_0} \backslash \{0\}$ et r_0 suffisament petit. Pour $\lambda \in (0, \Lambda)$ fixé, on cherchera une seconde solution positive de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ de la forme $w_\lambda = u_\lambda + v$ où u_λ est la première solution positive obtenue dans la partie précédente et $v > 0$ dans $\Omega \backslash \{0\}$. L'équation qui correspond à v est la suivante

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{-2a} \nabla v\right) - \mu |x|^{-2(a+1)} v = \lambda |x|^{-c} \left((u_\lambda + v)^{q-1} - u_\lambda^{q-1}\right) + |x|^{-2_* b} \left((u_\lambda + v)^{2_*-1} - u_\lambda^{2_*-1}\right). \tag{2.9}$$

Définissons

$$\begin{aligned} g_\lambda(x,t) \ &:= \begin{cases} \lambda |x|^{-c} \left((u_\lambda + t)^{q-1} - u_\lambda^{q-1}\right) + |x|^{-2_* b} \left((u_\lambda + t)^{2_*-1} - u_\lambda^{2_*-1}\right) & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases} \\ G_\lambda(x,v) \ &:= \int_0^v g_\lambda(x,t) dt, \end{aligned}$$

et

$$J_{\lambda,\mu}(v) := (1/2) \|v\|_\mu^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, v(x))dx.$$

$v = 0$ est un minimum local de $J_{\lambda,\mu}$ dans H_μ.

Preuve: Elle est similaire à celle du lemme 5.1 dans [10]. ■

Si $v = 0$ est le seul point critique de $J_{\lambda,\mu}$, alors $J_{\lambda,\mu}$ satisfait la condition de $(PS)_\beta$ pour tout $\beta < \beta^* := ((a+1-b)/N) S_\mu^{N/(2(a+1-b))}$.

Preuve: Soit $(v_n) \subset H_\mu$ telle que

$$J_{\lambda,\mu}(v_n) \longrightarrow \beta < \beta^* \text{ et } J'_{\lambda,\mu}(v_n) \to 0 \text{ dans } (H_\mu)' \text{ quand } n \to \infty,$$

alors (v_n) est bornée dans H_μ.

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que

$$\begin{aligned}
&v_n \rightharpoonup v && \text{dans } H_\mu, \\
&v_n \rightharpoonup v && \text{dans } L_{2_*}\left(\Omega, |x|^{-2_* b}\right), \\
&v_n \to v && \text{dans } L_p\left(\Omega, |x|^{-bp}\right) \quad \text{pour tout } 1 \le p < 2_*, \\
&v_n \to v && \text{dans } L_q\left(\Omega, |x|^{-c}\right), \\
&v_n \to v && \text{p.p. dans } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Alors v est un point critique de $J_{\lambda,\mu}$ dans H_μ. Nos hypothèses font que $v = 0$. On prouvera par suite que $v_n \longrightarrow 0$ fortement dans H_μ. D'aprés le lemme de Brézis-Lieb [5] on a:

$$\int_\Omega |x|^{-2_* b} |u_\lambda + v_n|^{2_*} dx - \int_\Omega |x|^{-2_* b} |u_\lambda|^{2_*} dx = \int_\Omega |x|^{-2_* b} |v_n|^{2_*} dx + \circ(1).$$

Soit $v^+ = \max(v, 0)$. Alors

$$\begin{aligned}
\left\langle J'_{\lambda,\mu}(v_n), u_\lambda + v_n \right\rangle &= \int_\Omega (|x|^{-2a} \nabla v_n \nabla (u_\lambda + v_n) - \mu |x|^{-2(a+1)} v_n (u_\lambda + v_n))dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega |x|^{-c} \left[(u_\lambda + v_n^+)^{q-1}(u_\lambda + v_n) - u_\lambda^{q-1}(u_\lambda + v_n) \right] dx \\
&\quad - \int_\Omega \left[|x|^{-2_* b} (u_\lambda + v_n^+)^{2_*-1}(u_\lambda + v_n) - |x|^{-2_* b} u_\lambda^{2_*-1}(u_\lambda + v_n^+)(u_\lambda + v_n) \right] dx.
\end{aligned}$$

Un calcul directe nous donne:

$$\left\langle J'_{\lambda,\mu}(v_n), u_\lambda + v_n \right\rangle = \|v_n\|_\mu^2 - \int_\Omega |x|^{-2_* b} \left|v_n^+\right|^{2_*} dx + \circ(1).$$

Quite à extraire une sous suite, on peut supposer que

$$\|v_n\|_\mu^2 \to l \;\text{ et }\; \int_\Omega |x|^{-2_* b} \left|v_n^+\right|^{2_*} dx \to l \geq 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Si $l = 0$, la preuve est achevée. Si $l \neq 0$, on obtient à partir de la définition de S_μ que

$$\|v_n\|_\mu^2 \geq \left\|v_n^+\right\|_\mu^2 \geq S_\mu \left(\int_\Omega |x|^{-2_* b} \left|v_n^+\right|^{2_*} dx \right)^{2/2_*} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, $l \geq S_\mu^{N/(2(a+1-b))}$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{n\to\infty} J_{\lambda,\mu}(v_n) = \lim_{n\to\infty} \left((1/2) \|v_n\|_\mu^2 - (1/2_*) \int_\Omega |x|^{-2_* b} \left|v_n^+\right|^{2_*} dx \right) \\ &= ((1/2) - (1/2_*)) l \geq ((a+1-b)/N) \, S_\mu^{N/(2(a+1-b))} = \beta^*. \end{aligned}$$

Ceci contredit l'hypothèse $\beta < \beta^*$. ■

Dans ce qui suit, on donnera les estimations concernant les fonctions extrémales définies dans (2.1). Dans l'esprit du travail effectué dans [16], on analyse la concentration de ces fonctions en $x = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $B_{1/m} \subset \Omega$, définissons

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(1/m) & \text{si } x \in B_{1/m} \backslash \{0\}, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \backslash B_{1/m}. \end{cases}$$

Comme dans [27], on a

Pour m suffisament grand est ε suffisament petit, on a

$$\|v_\varepsilon\|_\mu^2 \leq S_\mu^{N/(2(a+1-b))} + C\varepsilon^{4/(2_*-2)} m^{2\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}}, \tag{2.11}$$

$$\int_\Omega |x|^{-2_* b} |v_\varepsilon|^{2_*} dx \geq S_\mu^{N/(2(a+1-b))} - C\varepsilon^{2.2_*/(2_*-2)} m^{2_* \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}}. \tag{2.12}$$

Ici et dans tout ce qui suit, C est une constante universelle indépendante de m et ε. Soit $\varepsilon = (1/m)^h$ avec $h \geq ((2_* - 2)/2)(1+l)\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}$ et $l \geq 0$. Alors, on obtient l'estimation suivante.

$$\int_\Omega |v_\varepsilon|^2 \, dx \geq C\varepsilon^{4/(2_*-2)} m^{(1+l)\left(2\sqrt{\overline{\mu}_a}+2\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}-N\right)} \quad \text{quand } m \to \infty. \tag{2.13}$$

Soit β^*définie comme dans le lemme 2.4. Alors

$$\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\mu}(tv_\varepsilon) < \beta^*.$$

Preuve: De l'inégalité élémentaire [1]

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p + p\; a^{p-1}b,\; p > 1,\; a,\; b \geq 0,$$

on a

$$g_\lambda(x, v_\varepsilon) \geq |x|^{-2_*b} \left(v_\varepsilon^+\right)^{2_*-1} + (2_* - 1)\, |x|^{-2_*b}\, u_\lambda^{2_*-2} v_\varepsilon^+,$$

et

$$G_\lambda(x, tv_\varepsilon) \geq (1/2_*)\, t^{2_*} \, |x|^{-2_*b} \left(v_\varepsilon^+\right)^{2_*} + (1/2)\,(2_* - 1)t^2 \, |x|^{-2_*b}\, u_\lambda^{2_*-2} (v_\varepsilon^+)^2 \quad \text{pour } t > 0.$$

On sait d'aprés la proposition 2.1 que $u_\lambda(x) \geq M\,|x|^{-\left(\sqrt{\overline{\mu}_a}-\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}\right)} > 0$ pour tout $x \in B_{\rho_0} \setminus \{0\}$. Alors

$$\begin{aligned}
|x|^{-2_*b}\, u_\lambda^{2_*-2} &\geq M^{(2_*-2)}\, |x|^{-2_*b-(2_*-2)\left(\sqrt{\overline{\mu}_a}-\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}\right)} \\
&\geq \begin{cases} M_0 > 0 \text{ si } b \geq 0 \text{ et } \mu \in [0,\; \overline{\mu}_a[\,, \\ \text{où} \\ M_1 > 0 \text{ si } \; -1 < a \leq b < 0 \text{ et } \mu \in \left](a+1)^2 \left(N/\left(2(a+1-b)\right) - 1\right)^2, \overline{\mu}_a\right[. \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit $M_2 := \max\{M_0,\ M_1\}$. Alors

$$J_{\lambda,\mu}(tv_\varepsilon) \leq h_\varepsilon(t) = (1/2)\,t^2\left\|v_\varepsilon\right\|_\mu^2 - (1/2_*)\,t^{2_*}\int_\Omega |x|^{-2_*b}\left|v_\varepsilon^+\right|^{2_*}dx - ((2_*-1)/2)\,t^2 M_2\int_\Omega \left|v_\varepsilon^+\right|^2 dx.$$

L'identité

$$h_\varepsilon^{'}(t) = t\left(\|v_\varepsilon\|_\mu^2 - t^{2_*-2}\int_\Omega |x|^{-2_*b}\left|v_\varepsilon^+\right|^{2_*}dx - (2_*-1)M_2\int_\Omega \left|v_\varepsilon^+\right|^2 dx\right),$$

combinée avec (2.11) et (2.12) nous donne

$$\max_{t\geq 0} h(t) = h(t_\varepsilon), \text{avec } t_\varepsilon = \left(\|v_\varepsilon\|_\mu^2 - (2_*-1)M_2\int_\Omega \left|v_\varepsilon^+\right|^2 dx\right)^{1/(2_*-2)}\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}\left|v_\varepsilon^+\right|^{2_*}dx\right)^{-1/(2_*-2)} > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\mu}(tv_\varepsilon) &\leq h(t_\varepsilon)\\
&= \left((2_*-2)/2.2_*\right)\left(\|v_\varepsilon\|_\mu^2 - (2_*-1)M_2\int_\Omega \left|v_\varepsilon^+\right|^2 dx\right)^{2_*/(2_*-2)}\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}\left|v_\varepsilon^+\right|^{2_*}dx\right)^{-2/(2_*-2)}\\
&\leq \left((a+1-b)/N\right)S_\mu^{N/(2(a+1-b))} + C\varepsilon^{4/(2_*-2)}m^{2\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}} - C\varepsilon^{4/(2_*-2)}m^{(1+l)\left(2\sqrt{\overline{\mu}_a}+2\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}-N\right)}.
\end{aligned}$$

Puisque $\mu < \overline{\mu}_a - (a+1)^2$, on obtient $2\sqrt{\overline{\mu}_a} + 2\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu} - N > 0$ et $(1+l)\left(2\sqrt{\overline{\mu}_a} + 2\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu} - N\right) > 2\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}$ pour l suffisament grand. Par conséquent,

$$\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\mu}(tv_\varepsilon) < \beta^*.$$

■

Preuve du Théorème 2.2 D'aprés le lemme 2.3, $v=0$ est un minimum local de $J_{\lambda,\mu}$. Plus explicitement, il existe un nombre positif ρ_1 suffisament petit tel que $J_{\lambda,\mu}(v) > 0$ pour $\|v\|_\mu = \rho_1$. Puisque $J_{\lambda,\mu}(tv_\varepsilon) \to -\infty$ quand $t\to\infty$, alors il existe une constante positive T telle que $\|Tv_\varepsilon\|_\mu > \rho_1 > 0$ et $J_{\lambda,\mu}(Tv_\varepsilon) < 0$.

Soit

$$\beta_\lambda := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) \text{ avec } \Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1]\,, H_\mu), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = Tv_\varepsilon\right\}.$$

D'aprés de le lemme 2.4, la condition de $(PS)_\beta$ est satisfaite pour $\beta < \beta^*$, et par le lemme 2.5, on obtient

$$\beta_\lambda \leq \sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\mu}(tv_\varepsilon) < \beta^*.$$

En utilisant le théorème de Pass-Mountain pour $\beta_\lambda > 0$ et la version de Ghoussoub-Preiss [18] pour $\beta_\lambda = 0$ respectivement, on obtient un point critique non trivial v de $J_{\lambda,\mu}$, et on conclut par le principe du maximum que w_λ est une solution positive de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$.

Chapitre 3

Equations elliptiques singulières avec terme concave, exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg et fonctions qui changent de signe

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'existence d'au moins deux solutions du problème

$$(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right)-\mu\dfrac{u}{|x|^{2(a+1)}}=\lambda h\left(x\right)\dfrac{|u|^{q-2}u}{|x|^{c}}+k\left(x\right)\dfrac{|u|^{2_*-2}u}{|x|^{2_*b}} & \text{dans } \Omega\backslash\left\{0\right\} \\ u=0 & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ est un domaine borné, $0\in\Omega$, $-\infty<a<(N-2)/2$, $a\leq b<a+1$, $1<q<2$, $0<c\leq q\left(a+1\right)+N(2-q)/2$, $2_*:=2N/\left(N-2+2\left(b-a\right)\right)$ est l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg , $-\infty<\mu<\overline{\mu}_a:=\left(\left(N-2\left(a+1\right)\right)/2\right)^2$ et λ est un paramètre positif et h, k sont des functions continues qui changent de signe dans $\bar{\Omega}$.

Il est claire que le problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ contienne dégénérescence et singularité. Dans ce type de situations les méthodes variationnelles classiques ne sont pas applicables. Il devient, donc délicat d'aborder les résultats d'existence, ceci est lié au caractère dégénérescent ou singulier de l'équation différentielle.

Commençons par un bref historique.

Il est connu que les termes concave et convexe influent sur le nombre des solutions du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$. Ceci a fait l'objet de plusieurs recherches ces derniers temps.

Le cas $h \equiv 1$ et $k \equiv 1$ a été intensivement étudié par plusieurs auteurs, nous recommandons aux lecteurs de se réferer au travaux [10, 20]. Pour $\mu > 0$, $a = b = c = 0$, Chen [10] a étudié le comportement assympotique des solutions du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ en utilisant les itérations de Moser. En appliquant le principe variationnel d'Ekeland, il a obtenu la première solution positive et par le théorème de Pass-Mountain, il a démontré l'existence de la deuxième solution positive.

Lin a considéré dans [20] un problème plus général, $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ avec $0 \leq a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $c = 0$, $1 < q < 2$ et $\mu > 0$.

Dans le cas où $h \not\equiv 1$ ou $k \not\equiv 1$, nous suggérons aux lecteurs de se référer aux travaux [19, 25, 29] ainsi que leurs références. Tarantello [25] a étudié le problème $(\mathcal{P}_{\lambda,0})$ pour $a = b = c = 0$, $q = \lambda = 1$, $k \equiv 1$ et h non nécessairement égale à 1, et satisfaisant quelques conditions.

Wu [29] a montré l'existence de multiples solutions positives du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ avec $a = b = c = 0$, $1 < q < 2$, $k \equiv 1$ et h une fonction continue qui change de signe dans $\bar{\Omega}$. Dans [19], Hsu et Lin ont établi l'existence de multiples solutions non triviales du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ avec $a = b = c = 0$, $1 < q < 2$, h et k des fonctions régulières qui changent de signe dans $\bar{\Omega}$.

L'opérateur $L_{\mu,a}(u) := -\mathrm{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \mu |x|^{-2(a+1)} u$ a fait l'objet de plusieurs publications dont nons citons [16] pour $a = 0$ et $\mu < \bar{\mu}_0$, et [22] ou [27] dans des cas plus généraux c-à-d $-\infty < a < (N-2)/2$ et $\mu < \overline{\mu}_a$.

Xuan et al. dans [27] ont prouvé que sous les conditions

$$N \geq 3,\ a < (N-2)/2,\ 0 < \sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu} + a < (N-2)/2,\ a \leq b < a+1,\ \mu < \overline{\mu}_a - b^2,$$

pour $\varepsilon > 0$, la fonction

$$u_\varepsilon(x) = C_0 \varepsilon^{\frac{2}{2_*-2}} \left(\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}}{\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu} - b}} |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} + \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \tag{3.1}$$

avec une constante positive C_0, est une solution de

$$-\text{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)-\mu|x|^{-2(a+1)}u=|x|^{-2_*b}|u|^{2_*-2}u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}u_\varepsilon^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|u_\varepsilon|^{2_*}dx=\left(A_{a,b,\mu}\right)^{N/(2(a+1-b))}, \tag{3.2}$$

où $A_{a,b,\mu}$ est la constante optimale donnée par l'expression

$$A_{a,b,\mu}=\inf_{u\in H_\mu\backslash\{0\}}E_{a,b,\mu}(u)=E_{a,b,\mu}(u_\varepsilon), \tag{3.3}$$

avec

$$E_{a,b,\mu}(u):=\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}u^2dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}}.$$

Aussi, dans [20] et [22] , les auteurs ont prouvé que pour $0\le a<(N-2)/2$, $a\le b<a+1$, $0\le\mu<\overline{\mu}_a$, la fonction définie pour $\varepsilon>0$, par:

$$v_\varepsilon(x)=\left(2.2_*\varepsilon^2\left(\overline{\mu}_a-\mu\right)\right)^{\frac{1}{2_*-2}}\left(\varepsilon^2|x|^{\frac{(2_*-2)\left(\sqrt{\overline{\mu}_a}-\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}\right)}{2}}+|x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\overline{\mu}_a}+\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu}\right)}\right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \tag{3.4}$$

est une solution faible de

$$-\text{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)-\mu|x|^{-2(a+1)}u=|x|^{-2_*b}|u|^{2_*-2}u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\},$$

et satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|v_\varepsilon|^{2_*}dx=\left(B_{a,b,\mu}\right)^{N/(2(a+1-b))}, \tag{3.5}$$

où $B_{a,b,\mu}$ est la constante optimale dont l'expression est

$$B_{a,b,\mu}:=\inf_{u\in H_\mu\backslash\{0\}}E_{a,b,\mu}(u)=E_{a,b,\mu}(v_\varepsilon). \tag{3.6}$$

La question naturelle qu'on se pose est de savoir ce qui en serait si ces problèmes elliptiques (dégénérés ou non) sont influencés par certaines perturbations. Dans ce chapitre, on prouve l'existence d'au moins deux points critiques non négatifs et distincts de la fonctionnelle d'énergie associée au problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ dans la variété de Nehari (voir par example Tarantello [25] ou bien Brown et Zhang [6]).

Dans ce chapitre, nous supposons les hypothèses suivantes verifiées:

(H) h est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ et il existe h_0 et ρ_0 positives telles que $h(x) \geq h_0$ pour tout $x \in B(0, 2\rho_0)$,

(K) k est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ qui satisfait $k(0) = \max_{x\in\bar{\Omega}} k(x) > 0$, $k(x) = k(0) + \circ\left(x^{\beta}\right)$ pour $x \in B(0, 2\rho_0)$ avec $\beta > 2_* \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}$;

ainsi que l'une des deux hypothèses suivantes:

(A_1) $N > 2(|b|+1)$ et $(a,\mu) \in \left]-1, 0\right[\times \left]0, \overline{\mu}_a - b^2\right[\cup \left[0, \frac{N-2}{2}\right[\times \left]a(a-N+2), \overline{\mu}_a - b^2\right[$,

(A_2) $N \geq 3$, $(a,\mu) \in \left[0, \frac{N-2}{2}\right[\times \left[0, \overline{\mu}_a\right[$.

Faisant usage de la méthode introduite dans [19, 25], on obtient le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.1 *On suppose que* $a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $1 < q < 2$, $c \leq q(a+1) + N(1-q/2)$, (H), (K) *et* (A_1) *ou* (A_2) *sont satisfaites. Alors, il existe* $\Lambda^* > 0$ *tel que pour* $\lambda \in (0, \ \Lambda^*)$ *le problème* $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ *admet au moins deux solutions non négatives dans* H_μ.

Ce chapitre est organisé comme suit: la partie 3.2 est consacrée aux préliminaires, et celle qui suit pour la preuve du théorème 3.1.

3.2 Préliminaires

Définissons

$$w_\varepsilon := \begin{cases} u_\varepsilon \text{ si } (a,\mu) \in \left]-1, 0\right[\times \left]0, \overline{\mu}_a - b^2\right[\cup \left[0, \frac{N-2}{2}\right[\times \left]a(a-N+2), \overline{\mu}_a - b^2\right[, \\ v_\epsilon \text{ si } (a,\mu) \in \left[0, \frac{N-2}{2}\right[\times \left[0, \overline{\mu}_a\right[, \end{cases} \tag{3.7}$$

et

$$S_{a,b,\mu} := \begin{cases} A_{a,b,\mu} \text{ si } (a,\mu) \in \left]-1,0\right[\times \left]0, \overline{\mu}_a - b^2\right[\cup \left[0, \frac{N-2}{2}\right[\times \left]a\left(a-N+2\right), \overline{\mu}_a - b^2\right[, \\ B_{a,b,\mu} \text{ si } (a,\mu) \in \left[0, \frac{N-2}{2}\right[\times \left[0, \overline{\mu}_a\right[. \end{cases} \tag{3.8}$$

Puisque notre approche est variationnelle, on définit $I_{\lambda,\mu}$ par

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\left\|u\right\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)\left|x\right|^{-c}\left|u\right|^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\left|x\right|^{-2_*b}\left|u\right|^{2_*} dx, \quad \forall u \in H_\mu.$$

Par l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, on peut affirmer que $I_{\lambda,\mu}$ est bien définie dans H_μ et $I_{\lambda,\mu} \in C^1\left(H_\mu, \mathbb{R}\right)$.

$u \in H_\mu$ est dite solution faible de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ si elle satisfait

$$\int_\Omega \left(\left|x\right|^{-2a}\nabla u \nabla v - \mu\left|x\right|^{-2(a+1)}uv - \lambda h(x)\left|x\right|^{-c}\left|u\right|^{q-2}uv + k(x)\left|x\right|^{-2_*b}\left|u\right|^{2_*-2}uv\right)dx = 0, \quad \forall v \in H_\mu.$$

Dans plusieurs problèmes comme $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$, $I_{\lambda,\mu}$ n'est pas bornée inférieurement dans H_μ mais l'est sur un sous ensemble adéquat de H_μ, et un minimum dans ce sous ensemble peut donner naissance à la solution de l'équation différentielle correspondante.

Ce sous ensemble de H_μ est la variété de Nehari définie par

$$\mathcal{N}_\lambda := \left\{u \in H_\mu \backslash \{0\}, \ \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0\right\}.$$

Il est utile de considérer $\mathcal{N}_\lambda$ en terme de points stationnaires des applications de la forme

$$\Psi_u(t) = I_{\lambda,\mu}(tu), \quad t > 0,$$

et donc

$$\Psi'_u(t) = \langle I'_{\lambda,\mu}(tu), u\rangle = \frac{1}{t}\langle I'_{\lambda,\mu}(tu), tu\rangle.$$

Une conséquence immediate est la proposition suivante:

Soit $u \in H_\mu \backslash \{0\}$ et $t > 0$. Alors $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si $\Psi'_u(t) = 0$.

Soit u un minimum local de $I_{\lambda,\mu}$, donc Ψ_u possède un minimum local en $t = 1$. Alors, il est naturel de partager $\mathcal{N}_\lambda$ en les trois sous ensembles suivants $\mathcal{N}_\lambda^+$, $\mathcal{N}_\lambda^-$ et $\mathcal{N}_\lambda^0$ correspondant respectivement aux minimums locaux, maximums locaux et points d'inflexion.

Définissons

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\lambda}^{+} &= \left\{u \in \mathcal{N}_{\lambda} : \ (2-q)\|u\|_{\mu,a}^{2} - (2_{*}-q)\int_{\Omega} k(x)\frac{|u|^{2_{*}}}{|x|^{2_{*}b}}dx > 0\right\} \\ &= \left\{u \in \mathcal{N}_{\lambda} : \ (2-2_{*})\|u\|_{\mu,a}^{2} + (2_{*}-q)\lambda\int_{\Omega} h(x)\frac{|u|^{q}}{|x|^{c}}dx > 0\right\}.\end{aligned}$$

Notons que $\mathcal{N}_{\lambda}^{-}$ et $\mathcal{N}_{\lambda}^{0}$ s'obtiennent similairement en remplaçant $>$ par $<$ et $=$ respectivement.

Définissons aussi

$$c_{\lambda} = \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda}} I_{\lambda,\mu}(u)\,;\ c_{\lambda}^{+} = \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda}^{+}} I_{\lambda,\mu}(u)\,;\ c_{\lambda}^{-} = \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda}^{-}} I_{\lambda,\mu}(u)\,. \tag{3.9}$$

Le lemme suivant va démontrer que les minimums dans $\mathcal{N}_{\lambda}$ sont des points critiques de $I_{\lambda,\mu}$.

On suppose que u est un minimum local de $I_{\lambda,\mu}$ sur $\mathcal{N}_{\lambda}$ et $u \notin \mathcal{N}_{\lambda}^{0}$. Alors $I_{\lambda,\mu}'(u) = 0$.

La preuve de ce lemme est essentiellement la même que celle du théorème 2.3 dans [6].

Soit

$$\Lambda_{1} := \left(\frac{2-q}{(2_{*}-q)|k^{+}|_{\infty}}\right)^{\frac{2-q}{2_{*}-q}}\left(\frac{2_{*}-2}{(2_{*}-q)C_{1}}\right)|h^{+}|_{\infty}^{-1}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_{*}-q}{2_{*}-2}},$$

où $\eta^{+}(x) = \max(\eta(x),0)$, $|\eta^{+}|_{\infty} = \sup_{x\in\Omega} ess\,|\eta^{+}(x)|$. Alors $\mathcal{N}_{\lambda}^{0} = \emptyset$ pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_{1})$.

Preuve: Supposons que $\mathcal{N}_{\lambda}^{0} \neq \emptyset$. Alors si $u \in \mathcal{N}_{\lambda}^{0}$, on obtient

$$\|u\|_{\mu,a}^{2} = \frac{2_{*}-q}{2-q}\int_{\Omega} k(x)\frac{|u|^{2_{*}}}{|x|^{2_{*}b}}dx,$$

$$\|u\|_{\mu,a}^{2} = \lambda\frac{2_{*}-q}{2_{*}-2}\int_{\Omega} h(x)\frac{|u|^{q}}{|x|^{c}}dx.$$

De plus, par (H), (K) et l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg on trouve

$$\|u\|_{\mu,a}^{2} \geq \left(\frac{2-q}{(2_{*}-q)|k^{+}|_{\infty}}(S_{a,b,\mu})^{2_{*}/2}\right)^{2/(2_{*}-2)},$$

$$\|u\|_{\mu,a}^{2} \leq \left(\lambda\frac{2_{*}-q}{2_{*}-2}(S_{a,b,\mu})^{-q/2}C_{1}|h^{+}|_{\infty}\right)^{2/(2-q)}.$$

Donc $\lambda \geq \Lambda_{1}$, et on conclut que $\mathcal{N}_{\lambda}^{0} = \emptyset$ si $\lambda \in (0,\Lambda_{1})$. ■

Par le lemme précédent, on conclut que $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_1)$.

Soient c_λ^+, c_λ^- définies comme dans (3.9). Alors, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$c_\lambda^+ < 0, \quad \forall \lambda \in (0, \Lambda_1) \text{ et } c_\lambda^- > \delta_0, \ \forall \ \lambda \in \left(0, \frac{q}{2}\Lambda_1\right).$$

Preuve: Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Alors

$$\int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx < \frac{2-q}{2_* - q} \|u\|_{\mu,a}^2,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} c_\lambda^+ &\leq I_{\lambda,\mu}(u) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|u\|_{\mu,a}^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right) \int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx \\ &< -\frac{(2-q)(2_* - 2)}{2.2_* q} \|u\|_{\mu,a}^2 < 0. \end{aligned}$$

Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. Alors

$$\frac{2-q}{2_* - q} \|u\|_{\mu,a}^2 < \int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx.$$

De plus, par (H), (K) et l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, on obtient

$$\int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx \leq (S_{a,b,\mu})^{-2_*/2} \|u\|_{\mu,a}^{2_*} \left|k^+\right|_\infty.$$

Ceci implique

$$\|u\|_{\mu,a} > \left(\frac{2-q}{(2_* - 2)\left|k^+\right|_\infty}\right)^{1/(2_* - 2)} (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2(2_* - 2))}.$$

D'autre part,

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \|u\|_{\mu,a}^q \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \|u\|_{\mu,a}^{2-q} - \lambda \frac{2_* - q}{2_* q} (S_{a,b,\mu})^{-q/2} C_1 \left|h^+\right|_\infty\right)$$

Donc, si $\lambda \in \left(0, \frac{q}{2}\Lambda_1\right)$ alors $I_{\lambda,\mu}(u) \geq \delta_0$, où

$$\begin{aligned}\delta_0 \quad : \quad &= \left(\tfrac{2-q}{(2_*-2)|k^+|_\infty}\right)^{\frac{q}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_* q}{2(2_*-2)}} \left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*(2-q)}{2(2_*-2)}} \left(\tfrac{2-q}{(2_*-q)|k^+|_\infty}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}}\right. \\ &\left. -\lambda \tfrac{2_*-q}{2_* q} (S_{a,b,\mu})^{-q/2} C_1 \left|h^+\right|_\infty\right).\end{aligned}$$

■

Comme dans [29, proposition 9], on a le lemme suivant.

(i) Si $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, alors il existe une suite de $(PS)_{c_\lambda}$ $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ de $I_{\lambda,\mu}$.

(ii) Si $\lambda \in \left(0, \frac{q}{2}\Lambda_1\right)$, alors il existe une suite de $(PS)_{c_\lambda^-}$ $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ de $I_{\lambda,\mu}$.

Définissons

$$K^+ := \left\{u \in \mathcal{N}_\lambda : \int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx > 0\right\}, \quad K_0^- := \left\{u \in \mathcal{N}_\lambda : \int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx \leq 0\right\},$$

$$H^+ := \left\{u \in \mathcal{N}_\lambda : \int_\Omega h(x) \frac{|u|^q}{|x|^c} dx > 0\right\}, \quad H_0^- := \left\{u \in \mathcal{N}_\lambda : \int_\Omega h(x) \frac{|u|^q}{|x|^c} dx \leq 0\right\},$$

et

$$t_{\max} = t_{\max}(u) := \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{1/(2_*-2)} \|u\|_\mu^{2/(2_*-2)} \left(\int_\Omega k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx\right)^{-1/(2_*-2)},$$

pour $u \in K^+$. Alors on a le résultat suivant.

Pour $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ on a

(1) Si $u \in K^+ \cap H_0^-$, alors il existe un unique $t^+ > t_{\max}$ tel que $t^+ u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et

$$I_{\lambda,\mu}\left(t^+ u\right) \geq I_{\lambda,\mu}(tu) \qquad \text{pour } t \geq t_{\max}.$$

(2) Si $u \in K^+ \cap H^+$, alors il existe t^-, t^+ uniques tels que $0 < t^- < t_{\max} < t^+$, $t^- u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $t^+ u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et

$$I_{\lambda,\mu}\left(t^+ u\right) \geq I_{\lambda,\mu}(tu) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } I_{\lambda,\mu}\left(t^- u\right) \leq I_{\lambda,\mu}(tu) \text{ pour } t \in \left[0, t^+\right].$$

(3) Si $u \in K^- \cap H^-$, alors il n'existe pas de $t > 0$ tel que $tu \in \mathcal{N}_\lambda$.

(4) Si $u \in K_0^- \cap H^+$, alors il existe un unique t^-, $0 < t^- < +\infty$ tel que $t^- u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et

$$I_{\lambda,\mu}\left(t^- u\right) = \inf_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}\left(tu\right).$$

Preuve: Pour $u \in H_\mu$, on a

$$\Psi_u\left(t\right) = I_{\lambda,\mu}\left(tu\right) = \frac{t^2}{2}\left\|u\right\|_{\mu,a}^2 - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega h\left(x\right)\frac{\left|u\right|^q}{\left|x\right|^c}dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k\left(x\right)\frac{\left|u\right|^{2_*}}{\left|x\right|^{2_*b}}dx$$

et

$$\Psi_u'\left(t\right) = t^{q-1}\left(\varphi_u\left(t\right) - \lambda\int_\Omega h\left(x\right)\frac{\left|u\right|^q}{\left|x\right|^c}\right),$$

où

$$\varphi_u\left(t\right) = t^{2-q}\left\|u\right\|_{\mu,a}^2 - t^{2_*-q}\int_\Omega k\left(x\right)\frac{\left|u\right|^{2_*}}{\left|x\right|^{2_*b}}.$$

Par un calcul simple, on peut montrer que φ_u est concave et atteint son maximum en

$$t_{\max} := \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{1/(2_*-2)}\left\|u\right\|_{\mu,a}^{2/(2_*-2)}\left(\int_\Omega k\left(x\right)\frac{\left|u\right|^{2_*}}{\left|x\right|^{2_*b}}dx\right)^{-1/(2_*-2)},$$

pour $u \in K^+$, alors

$$\varphi_u\left(t_{\max}\right) = C_{a,b,q,N}\left\|u\right\|_{\mu,a}^{2_*(2_*-q)/(2_*-2)}\left(\int_\Omega k\left(x\right)\frac{\left|u\right|^{2_*}}{\left|x\right|^{2_*b}}dx\right)^{(q-2)/(2_*-2)},$$

où

$$C_{a,b,q,N} = \frac{2_*+q-4}{2_*-2}\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{(2-q)/(2_*-2)}.$$

Par conséquent on peut conclure facilement que notre proposition est vérifiée. ■

3.3 Preuve du Théorème 3.1

3.3.1 Existence d'un minimum local de $I_{\lambda,\mu}$ dans $\mathcal{N}_\lambda^+$.

On va prouver que $I_{\lambda,\mu}$ atteint un minimum local sur $\mathcal{N}_\lambda^+$.

Soit $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, alors $I_{\lambda,\mu}$ admet un minimum u_λ dans $\mathcal{N}_\lambda^+$ tel que

$$I_{\lambda,\mu}\left(u_\lambda\right) = c_\lambda^+ < 0.$$

Preuve: D'aprés le lemme 3.4, il existe une suite minimisante $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ telle que

$$I_{\lambda,\mu}\left(u_n\right) \to c_\lambda \text{ et } I'_{\lambda,\mu}\left(u_n\right) \to 0 \text{ dans } H_\mu^{-1} \text{ (dual de } H_\mu\text{)},$$

alors

$$I_{\lambda,\mu}\left(u_n\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right) \int_\Omega h\left(x\right) \frac{|u_n|^q}{|x|^c}.$$

Par l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, on a

$$c_\lambda + \circ_n\left(1\right) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda \frac{2_* - q}{2_* q} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} C_1 \left|h^+\right|_\infty \|u_n\|_{\mu,a}^q,$$

où $\circ_n\left(1\right) \to 0$ quand $n \to \infty$, donc (u_n) est bornée dans H_μ. Passons à une sous suite (u_n), on obtient les convergences suivantes:

$$\begin{array}{lcll} u_n & \rightharpoonup & u_\lambda & \text{dans } H_\mu, \\ u_n & \rightharpoonup & u_\lambda & \text{dans } L_{2_*}\left(\Omega, |x|^{-2_* b}\right), \\ u_n & \to & u_\lambda & \text{dans } L_q\left(\Omega, |x|^{-c}\right), \\ u_n & \to & u_\lambda & \text{p.p. dans } \Omega. \end{array}$$

Alors $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ est une solution faible de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$. Comme $c_\lambda < 0$ et $I_{\lambda,\mu}\left(0\right) = 0$, alors $u_\lambda \not\equiv 0$. Maintenant on montre que $u_n \to u_\lambda$ dans H_μ. Supposons le contraire, alors $\|u_\lambda\|_\mu <$

$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mu,a}$, et on obtient

$$\begin{aligned} c_\lambda &\leq I_{\lambda,\mu}(u_\lambda) \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\|u_\lambda\|^2_{\mu,a} - \lambda\frac{2_*-q}{2_*q}\int_\Omega h(x)\frac{|u_\lambda|^q}{|x|^c} \\ &< \liminf_{n\to\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} - \lambda\frac{2_*-q}{2_*q}\int_\Omega h(x)\frac{|u_n|^q}{|x|^c}\right) \\ &= c_\lambda. \end{aligned}$$

Ce qui aboutit à une contradiction. Par conséquent $u_n \to u_\lambda$ fortement dans H_μ. En plus on a $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Sinon, si $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$, alors $\int_\Omega k(x)\frac{|u_\lambda|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} > 0$ et $\int_\Omega h(x)\frac{|u_\lambda|^q}{|x|^c} > 0$. Par la proposition 3.2 il existe t^- unique, $t^+ = 1$, tels que $0 < t^- < t_{\max} < 1$, $t^-u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et

$$I_{\lambda,\mu}(u_\lambda) \geq I_{\lambda,\mu}(tu_\lambda) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } I_{\lambda,\mu}\left(t^-u_\lambda\right) \leq I_{\lambda,\mu}(tu_\lambda) \text{ pour } t \in [0,1].$$

Donc

$$c_\lambda = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda} I_{\lambda,\mu}(u) = I_{\lambda,\mu}(u_\lambda) \geq \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(tu_\lambda) \geq \inf_{0<t\leq 1} I_{\lambda,\mu}(tu_\lambda) = I_{\lambda,\mu}\left(t^-u_\lambda\right),$$

d'où la contradiction. ■

3.3.2 Existence d'un minimum local de $I_{\lambda,\mu}$ dans $\mathcal{N}_\lambda^-$.

Pour prouver l'existence d'une seconde solution non négative, on a besoin des résultats suivants.

Soit (u_n) une suite de $(\mathrm{PS})_l$ avec $u_n \rightharpoonup u$ dans H_μ. Alors il existe une constante positive $\tilde{C} := C(a,b,N,q,|h^+|_\infty, S_{a,b,\mu})$ telle que

$$I'_{\lambda,\mu}(u) = 0 \text{ et } I_{\lambda,\mu}(u) \geq -\tilde{C}\lambda^{2/(2-q)}.$$

Preuve: Il est facile de prouver que $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$, ce qui implique que $\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0$, et par suite

$$I_{\lambda,\mu}(u) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*})\int_\Omega h(x)\frac{|u|^q}{|x|^c}dx.$$

D'aprés les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, Hölder et Young, on a

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\frac{2_* - q}{2_* q}(S_{a,b,\mu})^{-q/2} C_1 \left|h^+\right|_\infty \|u\|^q_{\mu,a}.$$

On peut montrer facilement que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)t^2 - \lambda\frac{2_* - q}{2_* q}(S_{a,b,\mu})^{-q/2} C_1 \left|h^+\right|_\infty t^q \geq -\tilde{C}\ \lambda^{2/(2-q)}$$

avec

$$\tilde{C} := (2_* - 2)\left(\frac{1 - 2.2_*}{2.2_*}\right)\left(\frac{(2_* - 2)(S_{a,b,\mu})^{q/2}}{C_1 \left|h^+\right|_\infty (2_* - q)}\right)^{2/(q-2)}.$$

On conclut alors, que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq -\tilde{C}\ \lambda^{2/(2-q)}.$$

■

Soit (u_n) une suite dans H_μ telle que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to l < l^* := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} - \tilde{C}\lambda^{2/(2-q)}, \tag{3.10}$$

$$I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \text{ dans } H_\mu^{-1}. \tag{3.11}$$

Alors, il est existe une sous suite de (u_n) qui converge fortement dans H_μ.

Preuve: De (3.10) et (3.11), on déduit que (u_n) est bornée, alors quitte à extraire une sous suite, on a les convergences suivantes:

$$\begin{array}{lllll} u_n & \rightharpoonup & u & & \text{dans } H_\mu, \\ u_n & \rightharpoonup & u & & \text{dans } L_{2_*}\left(\Omega, |x|^{-2_*b}\right), \\ u_n & \to & u & & \text{dans } L_q\left(\Omega, |x|^{-c}\right), \\ u_n & \to & u & & \text{p.p. dans } \Omega. \end{array}$$

Donc u est une solution faible du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$.

Posons $v_n = u_n - u$. Comme k est continue sur $\bar{\Omega}$, le lemme de Brézis-Lieb [5] nous donne

$$\int_\Omega k(x) \frac{|u_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} dx = \int_\Omega k(x) \frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} k(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} dx, \tag{3.12}$$

et

$$\|u_n\|_{\mu,a}^2 = \|v_n\|_{\mu,a}^2 + \|u\|_{\mu,a}^2 + \circ_n(1). \tag{3.13}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue, il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x) \frac{|u_n|^q}{|x|^c} dx = \int_\Omega h(x) \frac{|u|^q}{|x|^c} dx. \tag{3.14}$$

De (3.12), (3.13) et (3.14), on déduit que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) = I_{\lambda,\mu}(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|_{\mu,a}^2 - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x) \frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} dx + \circ_n(1),$$

et

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle = \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u \right\rangle + \|v_n\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x) \frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} dx + \circ_n(1),$$

Utilisant le fait que $v_n \rightharpoonup 0$ dans H_μ, on peut supposer que

$$\|v_n\|_{\mu,a}^2 \to \theta \text{ et } \int_\Omega k(x) \frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}} dx \to \theta \geq 0.$$

De la définition de $S_{a,b,\mu}$, on obtient

$$\|v_n\|_{\mu,a}^2 \geq S_{a,b,\mu} \left(\int_\Omega \frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx \right)^{2/2_*},$$

et donc $\theta \geq |k^+|_\infty S_{a,b,\mu} \theta^{2/2_*}$.

Supposons que $\theta \neq 0$, alors $\theta \geq |k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}$, et par le lemme 3.6 on obtient

$$\begin{aligned} l &= I_{\lambda,\mu}(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) \theta \\ &\geq -\tilde{C} \lambda^{2/(2-q)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) |k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} = l^*. \end{aligned}$$

Ce qui aboutit à une contradiction, par conséquent $l = 0$; i.e., $u_n \to u$ dans H_μ. ■

Dans ce qui suit, on va donner quelques estimations des fonctions extrémales définies dans (3.7). Soit $\Psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \Psi(x) \leq 1$, $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq \rho_0$, $\Psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2\rho_0$, où ρ_0 est un nombre positif petit. Soit

$$\tilde{u}(x) = \left(|x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\mu_a} - \sqrt{\mu_a - \mu}\right)} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\mu_a} + \sqrt{\mu_a - \mu}\right)} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}}$$

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \Psi(x) \left(\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\mu_a - \mu}}{\sqrt{\mu_a - \mu} - b}} |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\mu_a} - \sqrt{\mu_a - \mu}\right)} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\mu_a} + \sqrt{\mu_a - \mu}\right)} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \\ \qquad \text{si } (A_1) \text{ est satisfaite,} \\ \Psi(x) \left(\varepsilon^2 |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\mu_a} - \sqrt{\mu_a - \mu}\right)} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\mu_a} + \sqrt{\mu_a - \mu}\right)} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \\ \qquad \text{si } (A_2) \text{ est satisfaite.} \end{cases}$$

Par un calcul directe, on trouve

$$\int_\Omega k(x) \frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx = \varepsilon^{-\frac{N-2(a+1-b)}{2(a+1-b)}} |k^+|_\infty \int_\Omega \frac{|\tilde{u}|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx + O(\varepsilon),$$

où, $|O(\varepsilon^\alpha)| / \varepsilon^\alpha \leq C$, $\forall \alpha \geq 0$,

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 = \varepsilon^{-\frac{N-2(a+1-b)}{2(a+1-b)}} \|\tilde{u}\|_{\mu,a}^2 + O(1),$$

$$\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)\frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx} = O(\varepsilon^{\frac{N-2(a+1-b)}{2(a+1-b)}}).$$

Soit l^*définie comme dans le lemme 3.6. Alors il existe $\Lambda_4 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_4)$ on a $l^* > 0$ et $\sup\limits_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) < l^*$.

Preuve: On considère les deux fonctions suivantes

$$f(t) = I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_{\mathbb{R}^N} k(x)\frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx - \lambda\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^q}{|x|^c}dx,$$

et

$$\tilde{f}(t) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\left|k^+\right|_\infty \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx.$$

Soit $\Lambda_2 > 0$ tel que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} - \tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} > 0 \text{ pour tout } \lambda \in (0, \Lambda_2).$$

Alors

$$f(0) = 0 < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} - \tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} \text{ pour tout } \lambda \in (0, \Lambda_2).$$

Puisque $f(t)$ est continue, alors il existe $t_1 > 0$ suffisament petit tel que

$$f(t) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} - \tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} \quad \text{pour tout } t \in (0, t_1).$$

D'autre part,

$$\max_{t\geq 0}\tilde{f}(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} + O(\varepsilon^{\frac{N-2(a+1-b)}{2(a+1-b)}}).$$

Alors

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &< \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} + O(\varepsilon^{\frac{N-2(a+1-b)}{2(a+1-b)}}) \\ &\quad -\lambda\frac{t_1^q}{q}h_0\int_{B(0,\rho_0)}\frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^q}{|x|^c}dx.\end{aligned}$$

Soit $0<\varepsilon<\rho_0^{(2_*-2)\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}$, alors

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,\rho_0)}\frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^q}{|x|^c}dx \\ =\ &\int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}\left(\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}-b}}|x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}-\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}+|x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}\right)^{-\frac{2q}{2_*-2}}dx \\ \geq\ & C_2.\end{aligned}$$

Si on prend $\varepsilon=\lambda^{\frac{2(2_*-2)}{2_*-q}}$, on obtient $\lambda<\rho_0^{(2-q)\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}$ et

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\left|k^+\right|_\infty (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} + O(\lambda^{2/(2-q)}) - \lambda\frac{t_1^q}{q}h_0C_2.$$

Choisissons $\Lambda_3>0$ tel que

$$O(\lambda^{2/(2-q)}) - \lambda\frac{t_1^q}{q}h_0C_2 < -\tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} \text{ pour tout } \lambda\in(0,\Lambda_3).$$

Alors, si on pose $\Lambda_4=\min\left\{\Lambda_2,\Lambda_3,\rho_0^{(2-q)\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}\right\}$, on déduit que

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda(t\tilde{v}_\varepsilon) < l^* \text{ pour tout } \lambda\in(0,\Lambda_4).$$

■

Maintenant, on va montrer que $I_{\lambda,\mu}$ atteint un minimum local dans $\mathcal{N}_\lambda^-$.

Soit $\Lambda^*=\min\{q\Lambda_1/2,\Lambda_4\}$. Alors pour tout $\lambda\in(0,\Lambda^*)$, $I_{\lambda,\mu}$ admet un minimum v_λ dans $\mathcal{N}_\lambda^-$ tel que $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda)=c_\lambda^-$.

Preuve: D'après le lemma 3.4, il existe une suite minimisante $(u_n)\subset\mathcal{N}_\lambda^-$ pour tout $\lambda\in(0,q\Lambda_1/2)$ telle que $I_{\lambda,\mu}(u_n)\to c_\lambda^-$ et $I'_{\lambda,\mu}(u_n)\to 0$ dans H_μ^{-1}. Puisque $I_{\lambda,\mu}$ est coercive sur

$\mathcal{N}_\lambda^-$ donc (u_n) est bornée. Passons à une sous suite (u_n), on obtient les convergences suivantes:

$$\begin{array}{llll} u_n & \rightharpoonup & v_\lambda & \text{dans } H_\mu, \\ u_n & \rightharpoonup & v_\lambda & \text{dans } L_{2_*}\left(\Omega, |x|^{-2_* b}\right), \\ u_n & \rightarrow & v_\lambda & \text{dans } L_q\left(\Omega, |x|^{-c}\right), \\ u_n & \rightarrow & v_\lambda & \text{p.p. dans } \Omega. \end{array}$$

Par (H) et (K) on a $\int_\Omega k(x) \frac{|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx > 0$ et $\int_\Omega h(x) \dfrac{|\tilde{v}_\varepsilon|^q}{|x|^c} dx > 0$, alors par la proposision 3.2 il existe $t^+ > 0$ tel que $t^+ \tilde{v}_\varepsilon \in \mathcal{N}_\lambda^-$. D'après le lemma 3.7 on a

$$c_\lambda^- \leq I_{\lambda,\mu}\left(t^+ \tilde{v}_\varepsilon\right) \leq \sup_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) < l^*,$$

et par le lemma 3.6 on déduit que $u_n \longrightarrow v_\lambda$ dans H_μ. Alors on conclut que $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c_\lambda^- > 0$. Similairement comme dans la preuve de la proposition 3.3, on déduit que $I_{\lambda,\mu}$ admet un minimum v_λ dans $\mathcal{N}_\lambda^-$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ tel que $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c_\lambda^- > 0$. ■

Preuve du Théorème 3.1

Par la propositions 3.2 et 3.4, il existe $\Lambda^* > 0$ tel que $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ admet deux solutions non négatives $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ puisque $\mathcal{N}_\lambda^+ \cap \mathcal{N}_\lambda^- = \emptyset$.

Chapitre 4

Sur les équations elliptiques singulières non homogènes contenant l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

4.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'existence et la multiplicité des solutions non triviales du problème suivant

$$(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)-\mu|x|^{-2(a+1)}u=h(x)|x|^{-2_*b}|u|^{2^*-2}u+\lambda g(x), \text{ dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \\ u\in D_a^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right), \end{cases}$$

$N\geq 3$, $-\infty<a<(N-2)/2$, $a\leq b<a+1$, $2_*:=2N/(N-2+2(b-a))$ est l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg , $-\infty<\mu<\overline{\mu}_a:=((N-2(a+1))/2)^2$ et λ est un paramètre positif, $g\in\left(D_a^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)'\backslash\{0\}$ (dual de $D_a^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$) est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$ et h est une fonction positive bornée sur $\mathbb{R}^N$.

Le problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ est de la forme

$$-\mathrm{div}\left(b_1(x)\nabla u\right)=\mu b_2(x)u+b_3(x)|u|^{2_*-2}u+\lambda g(x)$$

où les poids b_i, $i = 1, ..., 3$ sont des fonctions non négatives et mesurables qui peuvent s'annuler en quelques points ou bien ne pas être bornées. La théorie classique des points critiques n'est pas applicable car en général, l'opérateur différentiel n'est pas uniformément elliptique.

Puisque notre approche est variationnelle, on définit la fonctionnelle $I_{\lambda,\mu}$ sur H_μ par

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|x|^{-2_*b}|u|^{2^*}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,udx.$$

Du fait que $g \in H_\mu^{'}$ et l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, on déduit que $I_{\lambda,\mu}$ est bien définie et appartient à $C^1(H_\mu, \mathbb{R})$.

$u \in H_\mu$ est dite solution faible du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ si elle satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-2a}\nabla u\nabla v - \mu|x|^{-2(a+1)}uv - h(x)|x|^{-2_*b}|u|^{2_*-1}uv - \lambda g(x)\,v\right)dx = 0,\ v \in H_\mu.$$

On commence par un bref historique.

Pour $a = b = 0$, $h \equiv 1$, Tarantello [25] a étudié le problème $(\mathcal{P}_{1,0})$ sur un domaine borné, et sous certaines conditions sur g. Elle a prouvé l'existence d'au moins, deux solutions distinctes dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour $a = 0$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}_0 := (N-2)^2/4$ et $h \equiv 1$, $(\mathcal{P}_{1,\mu})$ a été étudié par Wang et Zhou [28]. Il ont prouvé l'existence d'au moins, deux solutions distinctes sous certaines conditions sur g. Ils ont utilisé le principe variationnel d'Ekeland, la méthode des sous sur solutions ainsi que le théorème de Pass-Mountain.

Le cas où $-\infty < a < (N-2)/2$ et h satisfait les conditions suivantes

(H_1) $\quad h(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$,

(H_2) $\quad \lim_{|x|\to 0} h(x) = \lim_{|x|\to +\infty} h(x) = h_0 > 0,\ h(x) \geq h_0$ a.e. in $\mathbb{R}^N$,

(H_3) $\quad$ mesure $\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : h(x) > h_0\right\}\right) > 0$,

Ghergu et Rădulescu dans [17], ont montré l'existence de deux solutions non triviales du problème $(\mathcal{P}_{\lambda,0})$ sous certaines conditions sur λ.

Le cas homogène (i.e $\lambda = 0$), a été en particulier, abordé par Kang et al. [22] et Xuan et al. [27].

Xuan et al. [27] ont prouvé sous les conditions suivantes

$$\begin{aligned} N &\geq 3,\ a < (N-2)/2,\ a \leq b < a+1,\ \mu < \overline{\mu}_a - b^2, \\ 0 &< \sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu} + a < (N-2)/2, \end{aligned}$$

que pour $\varepsilon > 0$, la fonction définie par

$$u_\varepsilon(x) = C_0 \varepsilon^{\frac{2}{2_*-2}} \left(\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}}{\sqrt{\overline{\mu}_a - \mu} - b}} |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} + \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \tag{4.1}$$

où C_0 est une constante positives, est une solution de

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \mu |x|^{-2(a+1)} u = |x|^{-2_* b} |u|^{2_*-2} u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)} u_\varepsilon^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |u_\varepsilon|^{2_*} dx = (A_{a,b,\mu})^{N/(2(a+1-b))} \tag{4.2}$$

$$, \tag{4.3}$$

où $A_{a,b,\mu}$ est la constante optimale donnée par

$$A_{a,b,\mu} = \inf_{u \in H_\mu \backslash \{0\}} E_{a,b,\mu}(u) = E_{a,b,\mu}(u_\varepsilon), \tag{4.4}$$

avec

$$E_{a,b,\mu}(u) := \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)} u^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |u|^{2_*} dx \right)^{2/2_*}}.$$

Aussi, dans [22] , Kang et al. ont prouvé que pour $0 \leq a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $0 \leq \mu < \overline{\mu}_a$, la fonction définie pour $\varepsilon > 0$ par:

$$v_\varepsilon(x) = \left(2.2_* \varepsilon^2 (\overline{\mu}_a - \mu)\right)^{\frac{1}{2_*-2}} \left(\varepsilon^2 |x|^{\frac{(2_*-2)\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} - \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)}{2}} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}\left(\sqrt{\overline{\mu}_a} + \sqrt{\overline{\mu}_a - \mu}\right)} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \tag{4.5}$$

est une solution faible de

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)-\mu|x|^{-2(a+1)}u=|x|^{-2_*b}|u|^{2_*-2}u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N\setminus\{0\},$$

et satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|v_\varepsilon|^{2_*}dx=(B_{a,b,\mu})^{N/(2(a+1-b))}, \tag{4.6}$$

où $B_{a,b,\mu}$ est la constante optimale dont l'expression

$$B_{a,b,\mu}:=\inf_{u\in H_\mu\setminus\{0\}}E_{a,b,\mu}(u)=E_{a,b,\mu}(v_\varepsilon). \tag{4.7}$$

Dans ce chapitre, on établit l'existence d'au moins deux points critiques distincts de $I_{\lambda,\mu}$. Le premier, par le principe variationnel d'Ekeland avec énergie négative et le second par le théorème de Pass Mountain avec énergie positive.

Tout au long de ce travail, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

(A_1) $\lim_{|x|\to 0}h(x)=\lim_{|x|\to+\infty}h(x)=h_0>0,\ h(x)\geq h_0$ dans $\mathbb{R}^N$,

(A_2) $N>2(|b|+1)$ et $(a,\ \mu)\in\left]-1,\ 0\right[\times\left]0,\ \overline{\mu}_a-b^2\right[\cup\left[0,\ (N-2)/2\right[\times\left]a(a-N+2),\overline{\mu}_a-b^2\right[$,

(A_3) $N\geq 3,\ (a,\ \mu)\left[0,\ (N-2)/2\right[\times\left[0,\overline{\mu}_a\right[$.

Définissons

$$w_\varepsilon:=\begin{cases} u_\varepsilon \text{ si } (a,\ \mu)\in\left]-1,\ 0\right[\times\left]0,\ \overline{\mu}_a-b^2\right[\cup\left[0,\ (N-2)/2\right[\times\left]a(a-N+2),\overline{\mu}_a-b^2\right[, \\ v_\epsilon \text{ si } (a,\ \mu)\in\left[0,\ (N-2)/2\right[\times\left[0,\overline{\mu}_a\right[, \end{cases} \tag{4.8}$$

et

$$S_{a,b,\mu}:=\begin{cases} A_{a,b,\mu} \text{ si } (a,\ \mu)\in\left]-1,\ 0\right[\times\left]0,\ \overline{\mu}_a-b^2\right[\cup\left[0,\ (N-2)/2\right[\times\left]a(a-N+2),\overline{\mu}_a-b^2\right[, \\ B_{a,b,\mu} \text{ si } (a,\ \mu)\in\left[0,\ (N-2)/2\right[\times\left[0,\overline{\mu}_a\right[. \end{cases} \tag{4.9}$$

Notre résultat principal est le théorème suivant

Théorème 4.1 *Supposons que* $a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, (A_1) *est vérifiée et* (A_2) *ou* (A_3) *est satisfaite. Alors il existe* $\Lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda^*)$, *le problème* $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ *possède au moins deux solutions non triviales.*

Ce chapitre est organisé comme suit: dans la partie suivante on donnera quelques résultats préliminaires, et la partie ultérieure sera consacrée à la preuve du théorème 4.1.

4.2 Préliminaires

Dans cette partie, on établira les résultats principaux dont on fera appel par la suite.

Soit $(u_n) \subset H_\mu$ une suite de $(\mathrm{PS})_c$ de $I_{\lambda,\mu}$. Alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H_μ et $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$.

Preuve: On a

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_\mu^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|x|^{-2_*b}|u_n|^{2_*}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u_n dx = c + \circ_n(1),$$

et

$$\|u_n\|_\mu^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|x|^{-2_*b}|u_n|^{2_*}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u_n dx = \circ_n(1) \text{ pour } n \text{ grand},$$

où $\circ_n(1) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Alors

$$\begin{aligned} c + \circ_n(1) &= I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2_*}\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n\|_\mu^2 - \lambda\left(1 - \frac{1}{2_*}\right)\|g\|_{H'_\mu}\|u_n\|_\mu, \end{aligned}$$

où $\|g\|_{H'_\mu}$ est la norme de g dans H'_μ.

L'inégalité précédente implique que (u_n) est bornée dans H_μ. Passons à une sous suite (u_n), on obtient les convergences suivantes:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } H_\mu, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } L_{2^*}\left(\mathbb{R}^N, |x|^{-2_* b}\right), \\ u_n &\rightarrow u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que pour tout $v \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-2a} \nabla u \nabla v - \mu |x|^{-2(a+1)} uv - h(x) |x|^{-2_* b} |u|^{2_*-2} uv - \lambda g(x) v\right) dx = 0,$$

ce qui veut dire que

$$I'_{\lambda,\mu}(u) = 0.$$

■

Soit $(u_n) \subset H_\mu$ une suite de $(\mathrm{PS})_c$ de $I_{\lambda,\mu}$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\text{soit } u_n \rightarrow u \text{ ou } c \geq I_{\lambda,\mu}(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) (h_0)^{-2/(2_*-2)} (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}.$$

Preuve: Il est claire que (u_n) soit bornée dans H_μ. Quite à extraire une sous suite, on aura les convergences suivantes:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } H_\mu, \\ u_n &\rightarrow u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Posons $v_n = u_n - u$, alors $v_n \rightharpoonup 0$. Ainsi, comme dans Brezis-Lieb [5], on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\frac{|u_n|^{2_*}}{|x|^{2_* b}} - \frac{|u_n - u|^{2_*}}{|x|^{2^* b}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \frac{|u|^{2_*}}{|x|^{2^* b}} dx.$$

Dautre part, par (A_1) il est facile de prouver que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx = h_0 \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2^*b}}dx.$$

On déduit que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) = I_{\lambda,\mu}(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|_\mu^2 - \frac{h_0}{2_*}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2^*b}}dx + \circ_n(1),$$

et

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle = \|v_n\|_\mu^2 - h_0\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx + \circ_n(1).$$

Alors, on peut supposer que

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_\mu^2 = h_0 \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx = l \geq 0.$$

Si $l > 0$, on a par la définition de $S_{a,b,\mu}$

$$l \geq S_{a,b,\mu}(l/h_0)^{2/2_*},$$

ce qui donne $l \geq (h_0)^{-2/(2_*-2)}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} c &= I_{\lambda,\mu}(u) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)l \\ &\geq I_{\lambda,\mu}(u) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(h_0)^{-2/(2_*-2)}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}. \end{aligned}$$

■

4.3 Preuve du Théorème 4.1

La preuve est donnée en deux parties.

4.3.1 Existence d'un minimum local

Dans cette partie, on va prouver qu'il existe $\Lambda_1 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, $I_{\lambda,\mu}$ peut atteindre un minimum local. On commence par montrer le résultat suivant.

Supposons que $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$ et l'une des hypothèses (A_2) ou (A_3) est vérifiée. Alors il existe Λ_1, ρ_0, $\delta > 0$ tels que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ on a

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \delta > 0 \text{ pour } \|u\|_\mu = \rho_0.$$

Preuve: Par l'inégalité de Hölder et la définition de $S_{a,b,\mu}$, on a pour tout $u \in H_\mu \backslash \{0\}$ et pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 - \frac{1}{2_*}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,udx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 - \frac{\|h\|_\infty}{2_*}S_{a,b,\mu}^{-2_*/2}\|u\|_\mu^{2_*} - \lambda\|g\|_{H'_\mu}\|u\|_\mu \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|u\|_\mu^2 - \frac{\|h\|_\infty}{2_*}S_{a,b,\mu}^{-2_*/2}\|u\|_\mu^{2_*} - C_\varepsilon\|\lambda g\|_{H'_\mu}. \end{aligned}$$

Prenons $\varepsilon < 1/2$ et $\rho = \|u\|_\mu$. Alors il existe $\rho_0 > 0$ suffisament petit et

$$\Lambda_1 = \left(\frac{2_*-2}{2(2_*-1)}\right)\left(\frac{2_*}{2(2_*-1)\|h\|_\infty}\right)^{1/(2_*-2)}(S_{a,b,\mu})^{2_*/2(2_*-2)} / \|g\|_{H'_\mu}$$

tel que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \delta > 0 \text{ pour } \|u\|_\mu = \rho_0 \text{ et } \lambda \in (0, \Lambda_1).$$

■

Puisque $g \not\equiv 0$ et elle est continue sur $\mathbb{R}^N$, on peut choisir $\Phi \in C_0\left(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}\right)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,\Phi > 0$. Ce qui donne pour $t > 0$ petit,

$$I_{\lambda,\mu}(t\Phi) = \frac{t^2}{2}\|\Phi\|_\mu^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|x|^{-2_*b}|\Phi|^{2_*}dx - \lambda t\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,\Phi dx < 0.$$

Supposons aussi que t est suffisament petit tel que $\|t\Phi\|_\mu < \rho_0$.

Alors, on obtient

$$c_1 = \inf \left\{ I_{\lambda,\mu}(u) : u \in \bar{B}_{\rho_0} \right\} < 0, \quad \text{où } \bar{B}_{\rho_0} = \left\{ u \in H_\mu, \ \|u\|_\mu \leq \rho_0 \right\}.$$

En utilisant le principe variationnelle d'Ekeland, pour l'espace métrique complet $\bar{B}_{\rho_0}$ muni de la norme de H_μ, on peut montrer l'existence d'une suite de $(\mathrm{PS})_{c_1}$ $(u_n) \subset \bar{B}_{\rho_0}$ telle que $u_n \rightharpoonup u_1$ avec $\|u_1\|_\mu \leq \rho_0$.

On prouvera par suite que $u_n \to u_1$ fortement dans H_μ. Supposons le contraire, alors par le lemme 4.2 on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &\geq I_{\lambda,\mu}(u_1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)(h_0)^{-2/(2_*-2)} (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} \\ &\geq c_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)(h_0)^{-2/(2_*-2)} (S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} \\ &> c_1, \end{aligned}$$

ce qui aboutit à une contradiction. Par conséquent $u_n \to u_1$.

Alors on obtient un point critique u_1 de $I_{\lambda,\mu}$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ qui satisfait

$$c_1 = I_{\lambda,\mu}(u_1) < 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_1\|_\mu^2 - \left(1 - \frac{1}{2_*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \lambda g(x)\, u_1 dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_1\|_\mu^2 - \left(1 - \frac{1}{2_*}\right)\|\lambda g\|_{H'_\mu}\|u_1\|_\mu \\ &\geq \frac{-1}{2.2_*}\frac{(2_*-1)^2}{(2_*-2)}\lambda^2 \|g\|_{H'_\mu}^2. \end{aligned}$$

Alors u_1 est une solution non triviale de $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})$ avec énergie négative.

4.3.2 Existence d'une solution de type Pass Mountain

Dans cette partie, on va utiliser le théorème de Pass Mountain sans les conditions de Palais-Smale pour montrer l'existence d'une solution non triviale avec énergie positive.

Soit $\Lambda_2 > 0$ tel que

$$\frac{-1}{2.2_*}\frac{(2_*-1)^2}{(2_*-2)}\lambda^2 \|g\|^2_{H'_\mu} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(h_0)^{-2/(2_*-2)}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} > 0,\ \forall\lambda\in(0,\Lambda_2).$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ il exise $z_\varepsilon \in H_\mu$ et $0 < \Lambda_3 \leq \Lambda_2$ tel que

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz_\varepsilon) < \frac{-1}{2.2_*}\frac{(2_*-1)^2}{(2_*-2)}\lambda^2 \|g\|^2_{H'_\mu} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}(h_0)^{-2/(2_*-2)},$$

pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_3)$.

Preuve: Soit

$$z_\varepsilon(x) = \begin{cases} w_\varepsilon(x), & \text{si } g(x) \geq 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^N, \\ w_\varepsilon(x-x_0) & \text{s'il existe un } x_0\in\mathbb{R}^N \text{ tel que } g(x_0)>0, \\ -w_\varepsilon(x) & \text{si } g(x)\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On affirme qu'il existe un ε_0 tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\, z_\varepsilon(x)\, dx > 0, \text{ pour tout } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0). \tag{4.10}$$

En effet, pour $g(x) \geq 0$ ou bien $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, ceci est évident. S'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $g(x_0) > 0$, en utilisant la continuité de $g(x)$ il existe $\eta > 0$ tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in B_\eta(x_0)$. Alors par la définition de $w_\varepsilon(x-x_0)$, il est facile de constater qu'il existe un ε_0 suffisament petit tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\, w_\varepsilon(x-x_0)\, dx > 0,\ \text{pour } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Maintenant, on considère les fonctions suivantes

$$f(t)=I_{\lambda,\mu}(tz_{\varepsilon})=\frac{t^{2}}{2}\left\Vert z_{\varepsilon}\right\Vert _{\mu}^{2}-\frac{t^{2_{*}}}{2_{*}}\int_{\mathbb{R}^{N}}h\left(x\right)\left\vert x\right\vert ^{-2_{*}b}\left\vert z_{\varepsilon}\right\vert ^{2_{*}}dx-\lambda t\int_{\mathbb{R}^{N}}g\left(x\right)z_{\varepsilon}dx,$$

et

$$\tilde{f}(t)=\frac{t^{2}}{2}\left\Vert z_{\varepsilon}\right\Vert _{\mu}^{2}-\frac{t^{2_{*}}h_{0}}{2_{*}}\int_{\mathbb{R}^{N}}\left\vert x\right\vert ^{-2_{*}b}\left\vert z_{\varepsilon}\right\vert ^{2_{*}}dx.$$

Alors, on obtient pour tout $\lambda\in(0,\Lambda_{2})$

$$f(0)=0<\frac{-1}{2.2_{*}}\frac{(2_{*}-1)^{2}}{(2_{*}-2)}\lambda^{2}\left\Vert g\right\Vert _{H_{\mu}^{\prime}}^{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_{*}}\right)(h_{0})^{-2/(2_{*}-2)}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{2_{*}/(2_{*}-2)}.$$

Par la continuité de $f(t)$, il existe $t_{1}>0$ suffisament petit tel que

$$f(t)<\frac{-1}{2.2_{*}}\frac{(2_{*}-1)^{2}}{(2_{*}-2)}\lambda^{2}\left\Vert g\right\Vert _{H_{\mu}^{\prime}}^{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_{*}}\right)(h_{0})^{-2/(2_{*}-2)}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{2_{*}/(2_{*}-2)}\quad\text{pour tout }t\in\left(0,t_{1}\right).$$

D'autre part, on a

$$\max_{t\geq0}\tilde{f}(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_{*}}\right)(h_{0})^{-2/(2_{*}-2)}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{2_{*}/(2_{*}-2)}.$$

Donc on obtient

$$\sup_{t\geq0}I_{\lambda,\mu}(tz_{\varepsilon})<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_{*}}\right)(h_{0})^{-2/(2_{*}-2)}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{2_{*}/(2_{*}-2)}-\lambda t_{1}\int_{\mathbb{R}^{N}}g\left(x\right)z_{\varepsilon}dx.$$

Prenons $\lambda>0$ tel que

$$-\lambda t_{1}\int_{\mathbb{R}^{N}}g\left(x\right)z_{\varepsilon}dx<\frac{-1}{2.2_{*}}\frac{(2_{*}-1)^{2}}{(2_{*}-2)}\lambda^{2}\left\Vert g\right\Vert _{H_{\mu}^{\prime}}^{2}.$$

Alors par (4.9), on obtient

$$0<\lambda<2.2_{*}\frac{(2_{*}-2)}{(2_{*}-1)^{2}}t_{1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N}}g\left(x\right)z_{\varepsilon}dx\right)/\left\Vert g\right\Vert _{H_{\mu}^{\prime}}^{2}.$$

Soit

$$\Lambda_{3}=\min\left\{\Lambda_{2},\ 2.2_{*}\frac{(2_{*}-2)}{(2_{*}-1)^{2}}t_{1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N}}g\left(x\right)z_{\varepsilon}dx\right)/\left\Vert g\right\Vert _{H_{\mu}^{\prime}}^{2}\right\}.$$

On déduit que

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz_\varepsilon) < \frac{-1}{2.2_*}\frac{(2_*-1)^2}{(2_*-2)}\lambda^2 \|g\|^2_{H'_\mu} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}(h_0)^{-2/(2_*-2)}$$

pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_3)$. ■

Puisque $\lim_{t\to\infty} I_{\lambda,\mu}(tz_\varepsilon) = -\infty$, on peut choisir $T > 0$ suffisament grand tel que

$$I_{\lambda,\mu}(Tz_\varepsilon) < 0.$$

Par la proposition 4.1, on a $I_{\lambda,\mu}|_{\partial B_{\rho_0}} \geq \delta > 0$ pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_1)$. Donc, par le théorème de Pass Mountain sans la condition de Palais Smale, il existe une suite $(\mathrm{PS})_{c_2}$ $(u_n) \subset H_\mu$ telle que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c_2 \text{ et } I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0, \quad \text{quand } n \to +\infty$$

où c_2 est caractérisée par

$$c_2 = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

avec

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_\mu), \gamma(0)=0, \gamma(1)=Tz_\varepsilon\}.$$

Alors quitte à extraire une sous suite (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u_2$ dans H_μ. Par le lemme 4.2 si $u_n \nrightarrow u_2$ on obtient

$$\begin{aligned} c_2 &\geq I_{\lambda,\mu}(u_2) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(h_0)^{-2/(2_*-2)}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} \\ &\geq \frac{-1}{2.2_*}\frac{(2_*-1)^2}{(2_*-2)}\lambda^2 \|g\|^2_{H'_\mu} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}(h_0)^{-2/(2_*-2)}. \end{aligned}$$

On sait d'aprés le lemma 4.3, que

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(tz_\varepsilon) < \frac{-1}{2.2_*}\frac{(2_*-1)^2}{(2_*-2)}\lambda^2 \|g\|^2_{H'_\mu} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)}(h_0)^{-2/(2_*-2)}$$

pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_3)$. Alors $u_n \to u_2$ dans H_μ.

Donc, on obtient un point critique u_2 de $I_{\lambda,\mu}$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ où $\Lambda^* := \min\{\Lambda_1, \Lambda_3\}$ et

$$I_{\lambda,\mu}(u_2) > 0.$$

Perspectives

Tarantello [25] a étudié le problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\triangle u = |u|^{2^*-2}u + g(x) & \text{dans } \Omega\backslash\{0\} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ est un domaine borné. Sous certaines conditions sur g, elle a prouvé l'existence d'au moins, deux solutions distinctes dans $H_0^1(\Omega)$. Elle a utilisé la variété de Nehari et le théorème de Pass Mountain.

Notre principale perspective ici, est si on peut utiliser les même méthodes de Tarantello pour montrer l'existence des solutions du problème suivant

$$(\mathcal{P}_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right) - \mu|x|^{-2(a+1)}u = h(x)|x|^{-2_*b}|u|^{2^*-2}u + \lambda g(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où $N \geq 3$, $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $2_* := 2N/(N-2+2(b-a))$ est l'exposant critique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg , $-\infty < \mu < \overline{\mu}_a := ((N-2(a+1))/2)^2$, λ est un paramètre positif, $g \in \left(D_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)\right)' \setminus \{0\}$ (dual de $D_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$) est une fonction continue positive sur Ω et h est une fonction positive bornée sur Ω.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis and G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, J. Funct. Anal. 122, 519-543 (1994).

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14, 349-381 (1973).

[3] M. Bouchekif, A. Matallah, Multiple positive solutions for elliptic equations involving a concave term and critical Sobolev-Hardy exponent, Appl. Math. Lett. 22, 268-275 (2009).

[4] H. Brézis and L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents, Comm. Pure Appl. Math. 36, 437-477 (1983).

[5] H. Brézis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Am. Math. Soc. 88, 486-490 (1983).

[6] K. J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-Changing weight function, J. Differential Equations 193, 481-499 (2003).

[7] J.Byeon Z.-Q. Wang, Standing waves with a critical frequency for nonlinear Schödinger equations Clac. Var. Partial Differ. Equations 18, 207-219 (2003).

[8] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, First order interpolation inequality with weights, Compos. Math. 53, 259-275 (1984).

[9] F. Catrina, Z. Wang, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions, Comm. Pure Appl. Math. 54, 229-257 (2001).

[10] J. Chen, Multiple positive solutions for a class of nonlinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl. 295, 341-354 (2004).

[11] K. Chou, C. Chu, On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy Inequality, J. London Math. Soc. 2, 137-151 (1993).

[12] R. Dautray, J. L. Lions, Physical origins and classical methods, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Springer, Berlin (1985).

[13] P. Drabek, A. Kufner, and F. Nicolosi, Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities, Walter de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications Vol. 5 (W. de Gruyter, Berlin, New York, 1997).

[14] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47, 324-353 (1974).

[15] L. C. Evans, Partial differential equations, in: graduate studies in mathematics 19, Amer. Math. Soc. Providence, Plode Island, (1998).

[16] A. Ferrero, F. Gazzola, Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations. J. Differential Equations 177, 494-522 (2001).

[17] M. Ghergu, V. Rădulescu, Singular elliptic problems with lack of compactness, Ann. di Mat. 185, 63-79 (2006).

[18] N. Ghoussoub and D. Preiss, A general mountain pass principle for locating and classifying critical points, Ann. Inst. Herni Poincaré, Anal. Non Linéaire 6, 321-330 (1989).

[19] T. S. Hsu, H. L. Lin, Multiple positive solutions for singular elliptic equations with concave-Convex nonlinearities and sign-changing weights, Boundary Value Problems, doi: 10 1155/2009/584203.

[20] M. Lin, Some further results for a class of weighed nonlinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl. 337, 537-546 (2008).

[21] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, (I), Rev. Mat. Iberoam. 1, 45-121 (1985).

[22] D. Kang, G. Li, S. Peng, Positive solutions and critical dimensions for the elliptic problem involving the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, (2009, in press).

[23] B, Sirakov Standing wave solutions of the nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$ Ann. Mat. Pura Appl., 181, 73-83 (2002).

[24] W, Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Commun Math. Phys. 55, 149-162 (1977).

[25] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent. Ann. Inst. Henri Poincaré 9, 281-304 (1992).

[26] B. J. Xuan, The solvability of quasilinear Brézis-Nirenberg-type problems with singular weights, Nonlinear Anal. 62, 703-725 (2005).

[27] B. Xuan, S. Su, Y. Yan, Existence results for Brézis-Nirenberg problems with Hardy potential and singular coefficients. Nonlinear Anal. 67, 2091-2106 (2007).

[28] Z. Wang, H. Zhou, Solutions for a nonhomogeneous elliptic problem involving critical Sobolev-Hardy exponent in $\mathbb{R}$N, Acta Math. Sci. 26, 525-536 (2006).

[29] T. F. Wu, On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function, J. Math. Anal. Appl. 318, 253-270 (2006).

.