

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Mémoire présentée à

L'UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAÏD  
FACULTÉ des SCIENCES de L'INGENIEUR  
Département d'Électronique

Pour l'obtention du diplôme de Magister Systèmes et Signaux

Option : CONTRÔLE

Par  
ABDUL RAHUMAN Ahmed

Thème

**Analyse des Systèmes Non-linéaires  
à Dynamiques Complexes**

Soutenu en 2009  
Devant la commission d'examen

Président :

Mr. GHOUALI N.

Professeur

UABB-Tlemcen

Examineurs :

Mr. BEREKSI REGUIG F.

Professeur

UABB-Tlemcen

Mr. BENMOUNA M.

Professeur

UABB-Tlemcen

Mr. BOUGUIMA S.M.

Professeur

UABB-Tlemcen

Mr. BENSALAH H.

Chargé de Cours

UABB-Tlemcen

Rapporteur :

Mr. CHERKI B.

Maître de Conf.

UABB-Tlemcen



*À ma petite famille.*

# Table De Matières

Remerciements.....	p.3
Introduction.....	p.4
I. Chaos ?.....	p.6
I.1. Introduction et historique.....	p.6
I.2. Définitions.....	p.7
I.3. Théorèmes et outils mathématiques utiles.....	p.12
I.4. La bifurcation (Route vers le chaos).....	p.14
II. Où trouver du chaos ?.....	p.17
II.1. Fonctions mathématiques comme source de chaos.....	p.17
II.2. Systèmes dynamiques chaotiques à modèle connu.....	p.18
II.3. Systèmes dynamiques chaotiques sans modèle.....	p.19
II.4. Le chaos dans la communication sécurisée.....	p.20
II.4.1. La synchronisation.....	p.22
II.4.2. Le cryptage.....	p.23
II.4.3. La cryptanalyse.....	p.26
II.5. Le chaos dans le cœur.....	p.27
II.5.1. Le cœur.....	p.28
II.5.2. Résultats de quelques études.....	p.31
II.6. Le chaos dans le cerveau.....	p.35
II.6.1. Le cerveau.....	p.36
II.6.2. Le signal EEG.....	p.42
II.6.3. L'épilepsie.....	p.48
II.6.4. Résultats de quelques recherches récentes.....	p.53
III. Comment reconnaître le chaos ?.....	p.59
III.1. Quelques méthodes classiques.....	p.61
III.1.1. La reconstruction de l'espace de phase.....	p.61
III.1.2. Exposant de Lyapunov.....	p.64
III.1.3. Dimensions topologiques.....	p.68
III.1.4. Surface de Poincaré.....	p.70
III.1.5. Analyse de la prédictibilité.....	p.72
III.1.6. Estimation des faux voisins.....	p.73
III.1.7. Test des séries de substitution (surrogates).....	p.74

III.2. Innovations dans la reconnaissance du chaos.....	p.76
III.2.1. La méthode DVV.....	p.77
III.2.2. Test 0-1 du chaos.....	p.82
III.3. Proposition pour la classification des méthodes suivant le phénomène testé.....	p.87
III.3.1. Test d'un modèle.....	p.87
III.3.2. Test d'une série temporelle.....	p.88
<b>IV. Outils informatiques et Applications potentielles.....</b>	<b>p.91</b>
IV.1. Les outils .....	p.92
IV.1.1. CDA et CDA pro.....	p.92
IV.1.2. TISEAN.....	p.94
IV.1.3. Outils MATLAB®.....	p.95
IV.1.4. Outils SciLab®.....	p.96
IV.1.5. La boîte à outils « IsItChaos ».....	p.97
IV.2. Les applications potentielles proposées.....	p.100
IV.2.1. Application aux modèles mathématiques.....	p.100
IV.2.2. Application à un signal physiologique.....	p.122
IV.2.3. Application à un système de transmission avec cryptage chaotique.....	p.125
<b>Conclusion et Perspectives.....</b>	<b>p.130</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>p.132</b>
<b>Annexe : Fonctions Scilab développés dans « IsItChaos ».....</b>	<b>p.140</b>

# Remerciements

En premier lieu, je remercie Dieu le Tout-Puissant pour nous avoir donné le potentiel d'apprendre les lois de notre univers et de les exploiter pour notre bien-être.

Je remercie mon cher professeur *Cherki B.* de m'avoir guidé et soutenu le long de ce travail avec patience et indulgence, et j'espère pouvoir un jour devenir un aussi formidable et intègre maître à mes futures élèves.

Je remercie énormément *Pr. Ghouali N.* de m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance et également les examinateurs *Pr. Bereksi Reguig F.*, *Pr. Bouguima S.M.*, *Pr. Benmouna M.* et *Mr. Bensalah H.* de m'avoir fait l'honneur en acceptant d'embellir ce travail avec leurs remarques et conseils.

J'adresse des remerciements spéciaux à ma première dame *Amina* et mes parents *Mr. et Mme. Abdul Rahman* auxquels j'ai dédié ce travail, pour n'avoir jamais cessé de croire en moi et de m'encourager durant les périodes dures et pleines de doute. Je remercie également le reste de ma petite famille qui ont toujours été mes supporteurs et qui ont participé d'une façon ou d'une autre à l'achèvement de ce travail.

Je remercie sincèrement toute l'équipe de correction, ma chère femme, mon très cher ami et beau frère *Mr. Moussaoui A.*, mes honorables beaux parents *Mr. et Mme. Sedjelmaci* et mon beau frère *Dr. Sedjelmaci F.* Je remercie aussi *Pr. Djemai M.* de l'ENSEA à Paris pour m'avoir accueilli en stage et pour ses valeureux conseils.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de prêt ou de loin dans l'élaboration de ce travail avec un conseil ou même un mot d'encouragement parmi mes camarades de magistère, mes amis, mes étudiants et collègues à *HEXALOGY*, la *Cartonnerie El-Amine...* et la liste continue.

# INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques non linéaires à dynamique complexe ont tardivement fait l'objet d'intenses recherches et explorations donnant naissance à la fameuse théorie du chaos. Au départ de ce travail, nous avons voulu laisser un horizon ouvert sur la matière, d'où le choix du titre. En abordant le sujet nous avons réalisé que nous étions face à un océan caché de contributions, généré par l'explosion d'intérêt scientifique amorcée par *E. N. Lorenz* et nourri par une armée des plus grands cerveaux de tous les domaines de recherche confondus. Émerveillés par ce phénomène nous avons commencé à poser des questions fondamentales, quoi? Comment? et où? et nous avons présenté notre travail dans l'esprit de répondre à ces questions. Cela dit, nous avons toutefois centralisé nos efforts autour de l'analyse des systèmes chaotiques, et en particulier la première étape d'une telle analyse, à savoir « la reconnaissance du chaos ».

Cette reconnaissance a été employée directement et indirectement depuis des décennies, mais n'a pas encore été reconnue comme une discipline à part entière. Ainsi, l'absence observée d'une théorie centrale ou de principes unifiés rend difficile l'établissement de critères de comparaison ou de validation des méthodes employées et des résultats obtenus. Dans notre travail, nous essayons d'examiner les origines, l'évolution et les aspects réels de ce précieux outil.

Notre contribution se résume à donner des suggestions pour un schéma de classification des sources et méthodes de reconnaissance du chaos dans l'espoir d'aboutir à un vocabulaire unifié, nous proposons également des outils logiciels et des domaines d'application potentiels. Le manuscrit est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous essayons de chercher une réponse à la question « Qu'est-ce que le chaos ? », où quelques définitions et théorèmes utiles seront donnés.

Le deuxième chapitre va concerner les sources du chaos ou les réponses à la question « où trouver du chaos !? ». Dans les trois premiers sous chapitres, des classes générales des systèmes chaotiques sont traitées. Le reste du chapitre traite des exemples spécifiques avec un état de l'art concernant « la reconnaissance du chaos » dans chaque cas, à savoir « le chaos dans la communication sécurisée », « le chaos dans le cœur » et « le chaos dans le cerveau ».

Le troisième chapitre est consacré à l'aspect technique de la reconnaissance du chaos, où certains points présentés dans le premier chapitre seront abordés plus en détail. Dans ce chapitre nous essayons de clarifier la question « comment reconnaître le chaos? », en présentant un résumé de plusieurs méthodes classiques suivi par l'introduction de deux exemples des méthodes innovatrices.

La première partie du quatrième chapitre survol les principaux outils informatiques utilisés dans la reconnaissance et l'analyse du chaos, introduisant ensuite la boîte à outils informatique « *IsItChaos* » que nous avons développée dans le cadre de ce travail. La deuxième partie du chapitre est une proposition des applications potentielles pouvant bénéficier de la reconnaissance du chaos et ainsi des outils informatiques jadis présentés.

Finalement, une conclusion et des perspectives sont données, suivies par une annexe où les fonctions de la boîte à outils « *IsItChaos* » sont listées.



# Chapitre I

## CHAOS ?

### *1.1 Introduction et historique*

On doit admettre que ce terme n'est pas facile à définir. On ne peut qu'essayer de faire au mieux, en se basant sur les références les plus récentes. Le mot lui-même prend origine du terme « *χάος* », utilisé par les Grecs pour décrire l'espace vide infini dont ils ont supposé l'existence avant l'émergence de toutes choses. Les Romains ont repris le terme et interprété l'idée sous-jacente pour concevoir quelque chose d'informe, dans lequel – croient-ils – l'architecte du monde a introduit l'ordre et l'harmonie. De nos jours, dans le langage commun « *Chaos* » décrit un état de désordre et d'irrégularité [SCH03].

Dans le milieu scientifique, le concept a émergé dans la seconde partie des années 1970 en tant que science des phénomènes non linéaires complexes montrant certaines caractéristiques communes (qu'on décrira en détail par la suite). Le terme a été imposé par les physiciens chez lesquels :

*« L'idée dominante a été que le chaos constituait une grande révolution scientifique (la troisième du siècle, disait-on, après la relativité et la mécanique quantique) ou du moins l'avènement d'un paradigme gouvernant un ensemble de disciplines en train de former une nouvelle science ».*[AUB02]

Alors que chez les mathématiciens le terme imposé est « *systèmes dynamiques* » pour souligner l'ancienneté des théories et la continuité des méthodes. Un juste milieu serait de considérer le chaos :

*« Un vaste processus de convergence socio-disciplinaire qui s'inscrit sur la longue durée et se cristallise à un moment précis, la décennie 1975-85 »*[AUB01]

Pour mieux comprendre, voyons les choses dans un contexte historique. Ce n'est pas injuste de dire que tout a commencé avec le mathématicien *Henri Poincaré* (1892) qui a démontré que certains systèmes mécaniques, dont l'évolution temporelle est gouvernée par des équations hamiltoniennes, peuvent exhiber un mouvement chaotique.

Malheureusement, ceci fut considéré par beaucoup de physiciens comme simple curiosité.

Il a fallu 70 ans pour que le météorologiste *E.N. Lorenz* (1963) découvre que même un simple ensemble de trois équations (non linéaires couplées de premier ordre) peut donner lieu à des trajectoires complètement chaotiques. Ainsi, Lorenz a mis en évidence un des premiers exemples de chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs<sup>1</sup>.

Dans les années qui ont suivi, à cause des résultats théoriques, de la puissance incrémentale des ordinateurs, et des techniques expérimentales de plus en plus raffinées, il est devenu vraisemblable que ce phénomène est abondant dans la nature et a beaucoup de conséquences et de ramifications dans de nombreux domaines scientifiques. Pour un historique plus développé, voir [AUB01].

Il faut noter que la non-linéarité est une condition nécessaire, mais pas suffisante pour générer le chaos. Il faut aussi noter que le comportement chaotique observé dans le temps n'est dû, ni à une source extérieure de bruit, ni à un degré infini de liberté, ni à un caractère stochastique, c.-à-d. c'est intrinsèque [SCH03].

Le concept moderne du chaos déterministe est de plus en plus utilisé dans des contextes scientifiques variant des mathématiques et physiques des systèmes dynamiques et jusqu'aux variations temporelles complexes de tous types (ex. dans la chimie, biologie, physiologie, économie, sociologie et même la psychologie) [LEI01].

## 1.2 Définitions

Certains termes et concepts vont se répéter le long du manuscrit et nécessitent une définition scientifique assez persistante pour enlever les ambiguïtés<sup>2</sup>.

On peut considérer les systèmes chaotiques comme un sous ensemble des systèmes complexes, définis comme suit.

**Définition I-1.** [BAT01] Un système complexe est une entité qui est cohérente dans une façon reconnaissable, mais dont les éléments, interactions et dynamiques génèrent des structures admettant surprises et innovations ne pouvant pas être définis à priori .

---

1 Qui dissipe de l'énergie.

2 On peut trouver plus de détail ainsi que d'autres définitions dans les références [GUC01,HIR01,HAK01,IVA01] et spécialement dans [BIS01,WAN01].

Un mot clé dans la définition du chaos est le « *déterminisme* » d'où l'importance de la définition suivante :

**Définition I-2.** [WIL02] Un système déterministe est un système dont l'état présent est complètement déterminé par les conditions initiales, en contradiction avec un système stochastique pour lequel l'état présent reflète les conditions initiales avec en plus d'une réalisation particulière d'un paramètre aléatoire (bruit ou variable interne).

Un terme souvent associé avec le chaos dans la littérature scientifique est « *turbulence* ».

**Définition I-3.** [CVI01] Le terme « *turbulence* » décrit un comportement irrégulier d'un système dynamique à dimension infinie (ex. un récipient d'eau bouillante). En pratique, le terme est utilisé jusqu'au moment où une meilleure compréhension du phénomène est établie ou d'autres termes sont utilisés (ex. « *route vers le chaos* », « *chaos spatiotemporel* »... etc.).

L'évolution d'un système dynamique unidimensionnel peut être décrite par une fonction itérative appelée en anglais « *Map* ». Elle est définie par  $f: S \rightarrow S, S \subset \mathbb{R}$  sous la forme  $x_n = f(x_{n-1})$ .

Dans la suite, nous allons essayer d'arriver à une définition satisfaisante du « *chaos déterministe* » qui peut émerger d'un système non linéaire. Mais avant de donner la définition, nous devons emprunter une phrase qu'on retrouve encore et encore dans les références spécialisées :

« Il y a beaucoup de définitions possibles du chaos, en fait il n'y a pas d'accord général dans la communauté scientifique sur ce qui constitue un système dynamique chaotique » [DEV01]

En effet, différentes définitions du chaos circulent dans la littérature scientifique ces dernières années. C'est seulement quand il s'agit de fonction itérative (ex. la fonction logistique  $x_n = a \cdot x_{n-1} \cdot (1 - x_{n-1}), x \in [0, 1], a = 4$ ) que les mathématiciens ont eu un accord sur les propriétés caractéristiques du chaos déterministe (chaos de *Li-York*) [LEI01].

**Définition I-4.** [DEV01] Une fonction récursive  $f: S \rightarrow S$ , où  $S \subset \mathbb{R}^n$  est chaotique sur  $S$  si :

i)  $f$  montre une sensibilité aux conditions initiales, c.-à-d.  $\exists \delta > 0$  tel que pour n'importe quel  $x \in S$  et n'importe quel voisinage  $U$  de  $x$ ;  $\exists y \in S$  et  $n \geq 0$  tel que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

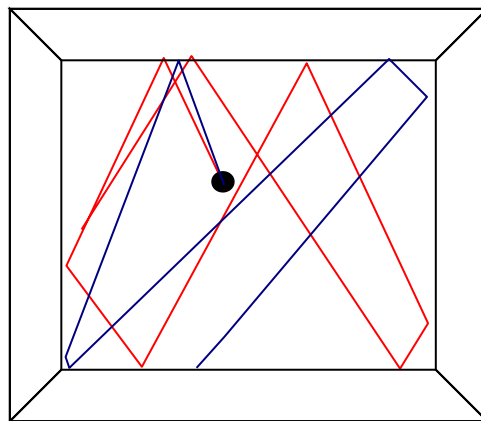
*Rem.* :  $f^2(x) = f(f(x))$

ii)  $f$  est topologiquement transitive, c.-à-d. pour n'importe quelle paire d'intervalles ouverts  $V, W \subset S$ ,  $\exists k > 0$  tel que  $f^k(V) \cap W \neq \emptyset$

iii) Des points périodiques sont denses dans  $S$ .

*Rem.* :  $x_1$  est un point périodique de  $f \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ , tel que  $f^n(x_1) = x_1$

Pour mieux comprendre la sensibilité aux conditions initiales, prenons l'exemple des trajectoires de deux boules de billard qui commencent très proche l'une de l'autre. Les deux boules se séparent exponentiellement avec le temps et après un nombre de rebondissements fini (et souvent très petit), leur séparation  $\delta x(t)$  atteint l'amplitude maximale  $L$  qui caractérise le système global (table de billard).



**Figure I-1** La sensibilité aux conditions initiales illustrée par les trajectoires des boules de billard.

Cette sensibilité aux conditions initiales peut être quantifiée par

$$|\delta x(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta x(0)| \quad (\text{eq.1})$$

Où  $\lambda$ , le taux moyen de séparation des trajectoires du système est appelé « *exposant de Lyapunov* ».

Dans ce cas  $\lambda$  est positive et par conséquent, pour n'importe quelle précision finie  $\delta x$  des données initiales, la dynamique du système n'est prédictible qu'à un temps fini appelé « temps de Lyapunov »  $T_{Lyap}$  [CVI01].

$$T_{Lyap} \approx -\frac{1}{\lambda} \ln(\delta x/L) \quad (\text{eq.2})$$

Un exposant de Lyapunov positif n'est pas suffisant pour engendrer le chaos. Dans d'autres termes, en plus d'une instabilité locale, un système chaotique doit être borné globalement, d'où la nécessité d'avoir un système non linéaire.

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{d}{dt} x \quad (\text{sys.I.1})$$

**Définition I-5.** [FRA01] Un ensemble  $B_0$  est appelé ensemble attracteur pour le système (I.1) s'il existe un ensemble ouvert  $B$  tel que  $B_0 \subset B$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Dist}(x(t), B_0) = 0$  (où  $\text{Dist}(x, y)$  est la distance entre  $x$  et  $y$ ) pour n'importe quelle solution  $x(t)$  du sys.I.1 avec  $x(0) \in B$ .

**Définition I-6.** [FRA01] Un ensemble attracteur fermé est appelé « l'attracteur » s'il est minimal, c.-à-d. il n'existe pas un sous-ensemble de  $B_0$  attracteur plus petit que  $B_0$  lui-même. L'ensemble des conditions initiales  $B$  pour lequel la définition I-6 est vérifiée est appelé bassin d'attraction.

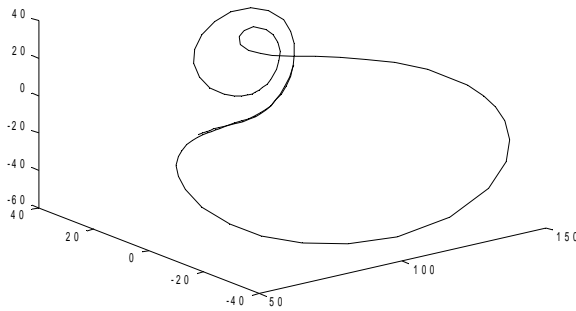
**Définition I-7.** [FRA01] Un attracteur  $B_0$  est appelé chaotique s'il est borné et que toutes les trajectoires du système qui en commencent sont instables selon le critère de Lyapunov (c.-à-d. possède au moins un exposant de Lyapunov positif).

**Définition I-8.** [FRA01] Le sys.I.1 est dit chaotique s'il possède au moins un attracteur chaotique.

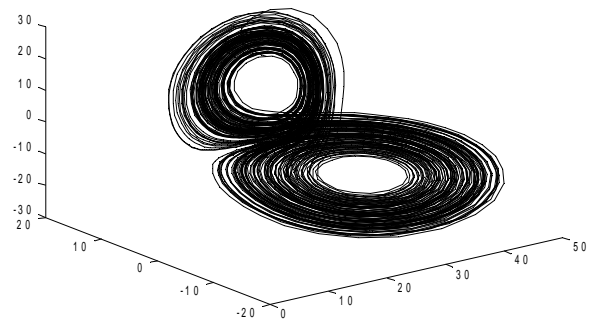
Comme exemple on prend le système de *Lorenz* (l'an 1963, climatologie)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x - \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (\text{sys.I.2})$$

Où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les variables d'état du système, et  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres. Pour certaines valeurs de ses derniers, le système exhibe un comportement chaotique.



$$\beta = \frac{8}{3}, \quad \sigma = 10, \quad \rho = 100.5$$



$$\beta = \frac{8}{3}, \quad \sigma = 10, \quad \rho = 28$$

**Figure I-2** La représentation en espace de phase de deux solutions du système de Lorenz, périodique (à gauche) et chaotique (à droite).

### I.3 Théorèmes et outils mathématiques utiles

Comme la démonstration du caractère chaotique d'un système est généralement difficile, des variantes numériques indirectes des critères sont utilisées. Toutefois, dans un système discret le critère *Sharkovsky–Li–Yorke* peut être utilisé pour démontrer directement le caractère chaotique suivant la définition I.5.

**Théorème I-1.** [FRA01] (*Li-Yorke*) Si  $f$  est une fonction de récurrence continue sur un segment de l'axe des réels  $S$  avec le même segment comme image et si  $f$  admet un point  $x_0$  périodique de période 3, c.-à-d.  $f\{f[f(x_0)]\} = f^3(x_0) = x_0$  avec  $f(x_0) \neq x_0$ , alors  $f$  est chaotique.

Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du théorème de *Sharkovsky*, qui a introduit l'ordre suivant pour les nombres naturels :

$$\begin{array}{cccc}
 3 & ; & 5 & ; & 7 & ; & 9 \dots \\
 3 \times 2 & ; & 5 \times 2 & ; & 7 \times 2 & ; & 9 \times 2 \dots \\
 3 \times 2^2 & ; & 5 \times 2^2 & ; & 7 \times 2^2 & ; & 9 \times 2^2 \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \dots & ; & 2^n & ; & 2^{n-1} \dots & ; & 2^2 & ; & 2 & ; & 1
 \end{array}$$

**Théorème I-2.** [FRA01] (*Sharkovsky*) Considérons une fonction de récurrence continue  $f:S \rightarrow S$ ; si  $f$  admet un point périodique de période  $k$  alors  $f$  admet un point périodique de toutes périodes  $n$ , où  $k$  précède  $n$  dans l'ordre de Sharkovsky.

Il n'existe pas d'analogie directe de ces deux théorèmes pour les systèmes multidimensionnels, dans ce cas le critère standard le plus utilisé est basé sur le calcul du plus grand exposant de Lyapunov. Pour un système linéaire :

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x \quad (\text{sys.I.3})$$

Le plus grand exposant de Lyapunov  $\rho_L$  est défini comme suit :

$$\rho_L = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|\Phi(t, t_0)|}{t - t_0} \quad (\text{eq.I.3})$$

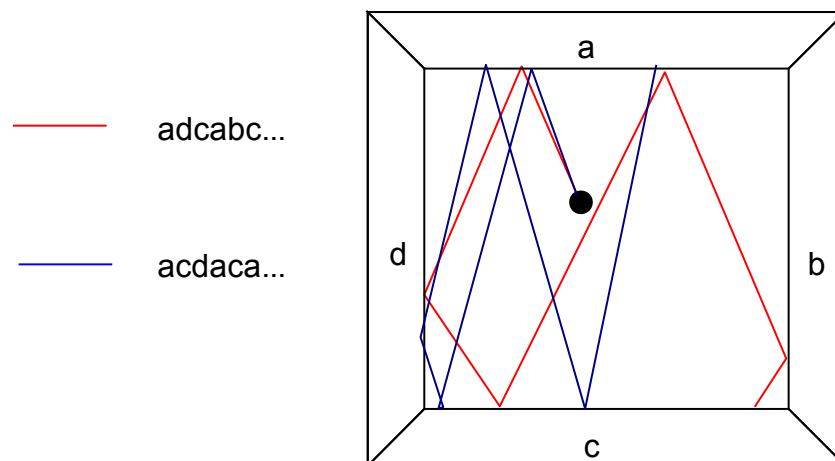
Où  $\Phi(t, t_0)$  est la matrice de transition du sys.I.3 (une matrice carrée qui génère les solutions du système, tel que  $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$  pour tous  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ).

Pour un système non linéaire, le plus grand exposant de Lyapunov le long d'une solution  $x_{sol}(t)$  est défini en utilisant la linéarisation du sys.I.1 le long de la solution  $x_{sol}(t)$  (c.-à-d.  $A(t) = \partial f(x_{sol}(t))/\partial x$ ). Si la trajectoire  $x_{sol}(t)$  est bornée et  $\rho_L > 0$  alors  $x_{sol}(t)$  est chaotique. Vous trouverez plus de détail sur cette méthode et d'autres aussi dans chapitre III.

Un autre outil important pour l'étude des systèmes chaotiques est la section de Poincaré qui permet de transformer un système continu en un système discret en réduisant en même temps la dimension du système par 1 degré. L'intersection de la section de Poincaré et la trajectoire du système à  $N$  dimensions constitue une série de valeurs  $X_n$  à  $N-1$  dimensions, la répétition de l'intersection de la trajectoire avec la section de Poincaré est assurée par le caractère transitif du chaos.

L'application  $P : X_{n-1} \rightarrow X_n$  est appelé fonction itérative de Poincaré. Le comportement du système discrétisé et le système original sont qualitativement équivalents, ce qui motive l'étude des systèmes dynamiques par le biais de la section de Poincaré (voir sec. III.1.3) [FRA01].

Pour clore, il faut mentionner une méthode révolutionnaire introduite par *S. Smale* qui a créé une nouvelle dimension dans l'étude des systèmes chaotiques ; c'est la dynamique symbolique. Pour comprendre les bases de cet outil fortement développé aujourd'hui, revoyons l'exemple du billard.



**Figure I-3** Les trajectoires de la boule de billard décrit par la dynamique symbolique.



Au lieu de décrire la trajectoire de la boule de billard par des quantités métriques (numérique), nous décrivons la trajectoire comme étant une succession de symboles correspondants aux différents côtés avec lesquels la boule entre en collision.

Une trajectoire périodique peut être désignée par un ensemble de symboles surligné, ex. la trajectoire d'une boule qui se balance verticalement entre le coté a et le coté c est désigné par «  $\bar{a}c$  ».

En transformant les symboles en format binaire et en définissant une norme sur l'ensemble créé, on peut constituer un isomorphisme (application et application inverse lisse) entre le système original et le système symbolique établi. De cette façon, démontrer le caractère chaotique du système original se réduit à le démontrer pour le système symbolique. Pour plus de détail, voir [DEV01].

#### ***1.4 La bifurcation (Route vers le chaos)***

A ce jour, on a distingué au moins trois routes ou transitions dans lesquelles un système non linéaire peut devenir chaotique si un paramètre de contrôle externe est varié. Toutes ces routes peuvent être vérifiées expérimentalement et montrent un comportement universel fascinant.

La route vers le chaos la plus récente a été trouvée par *Grosmann et Thomae* (1977), *Feigenbaum* (1978) et *Coulet et Tresser* (1978). Ils ont considéré une simple équation de différence utilisée par les biologistes pour décrire la dynamique d'une population dont le nombre varie avec le temps. Ils ont trouvé que, en variant un paramètre externe, l'état du système oscille entre des valeurs stables (points fixes) dont le nombre augmente pour certaines valeurs distinctes du paramètre externe. Ceci continue jusqu'au moment où le nombre de points fixes devient infini à une valeur finie et précise du paramètre externe, c'est à ce moment-là que le système devient chaotique.

*Feigenbaum* a montré dans un travail remarquable que ces résultats ne sont pas restreints à ce modèle spécial, mais sont universels, et peuvent être vérifiés pour une grande variété de systèmes biologiques, chimiques ou physiques.

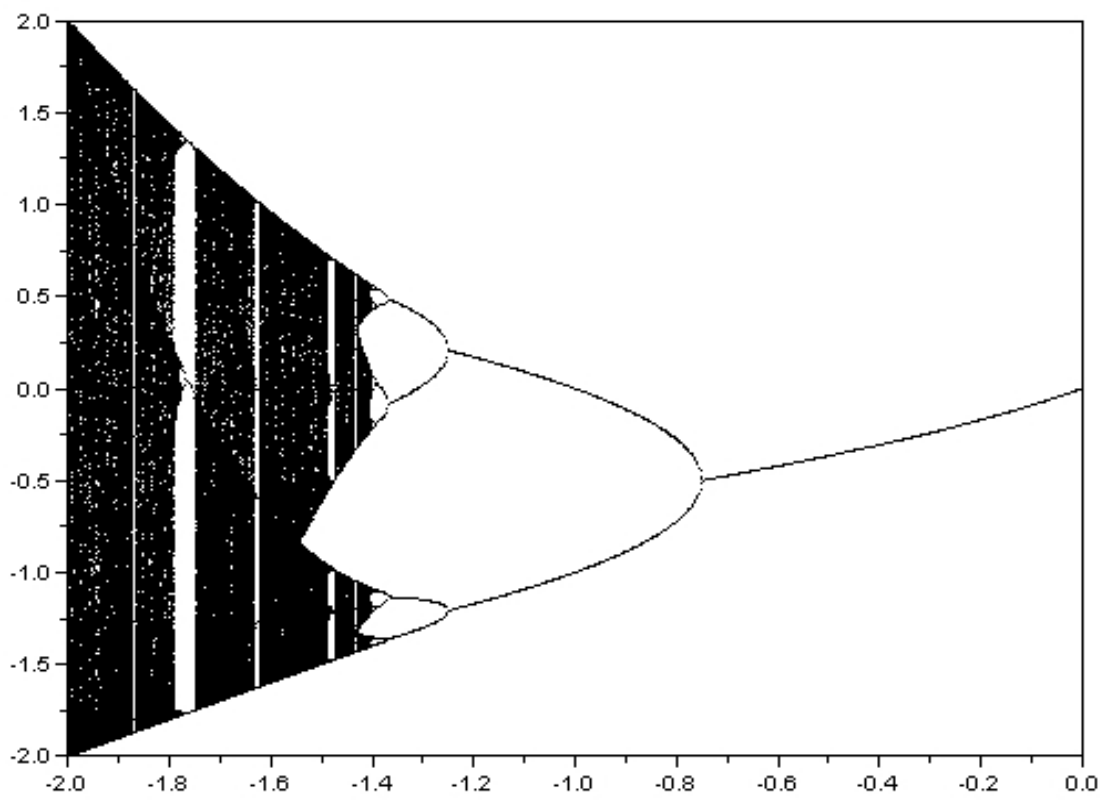
Une deuxième transition vers le chaos, appelé la route d'intermittence, a été trouvée par *Manneville* et *Pomeau* (1979). Intermittence veut dire qu'un signal qui a un comportement régulier (laminaire) est interrompu par des périodes de comportement irrégulier statistiquement distribué (des éclats intermittents). Le nombre moyen de ces éclats augmentent en variant un paramètre de contrôle externe jusqu'à ce que le système devienne complètement chaotique.

La troisième possibilité a été trouvée par *Ruelle* et *Takens* (1971) et *Newhouse* (1978). Ils ont trouvé une transition vers la turbulence qui est différente de celle proposée par *Landau* (1944, 1959), qui a considéré les turbulences dans le temps comme la limite d'une séquence infinie d'instabilité (Bifurcation de Hopf), chacune créant une nouvelle fréquence de base. Cependant, *Ruelle*, *Takens*, et *Newhouse* ont montré qu'après deux instabilités seulement, la trajectoire rejoint au niveau de la troisième étape un attracteur chaotique et ainsi le système devient turbulent [SCH03].

Comme exemple de la bifurcation, on prend l'équation de récurrence du premier ordre :

$$x_n = f_a(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 + a \quad (\text{eq.I.4})$$

Cette famille de fonctions est appelée les fonctions quadratiques. Le paramètre externe à varier est le constant  $a$ . L'équation admet un simple point d'équilibre à  $x=0$  quand  $a=0$ . Pour  $a>0$  cette équation n'admet aucun point d'équilibre, car  $f_a(x)>0$  quelque soit  $x$ , cependant pour  $a<0$  cette équation admet deux états d'équilibres. Ainsi, une bifurcation a lieu quand le paramètre  $a$  a varié en passant par la valeur 0. La figure I-3 montre clairement ce phénomène, cette figure a été réalisée sous Scilab où les 5000 itérations sur la trajectoire de la fonction  $f_a$  ont été calculées en partant du point initial  $x_0=0$ . Le même calcul est répété pour plusieurs valeurs de  $a$  dans l'intervalle  $[0,-2]$ , on remarque les différents points de bifurcation et finalement la transition vers le chaos [HIR01].



**Figure I-4** Bifurcation de la fonction quadratique (de droite à gauche)

## Chapitre II

### Où trouver du chaos ?

Après *Lorenz*, beaucoup d'études ont démontré l'existence de diverses sources de chaos. Un très grand nombre de recherches actuelles sur le chaos, essaient soit d'exploiter les sources déjà trouvées, soit explorent d'autres sources pas encore maîtrisées. Dans la suite, une classification des sources du chaos est proposée. Des exemples de chaque classe sont donnés, avec une brève explication.

#### ***II.1 Fonctions mathématiques comme source du chaos***

Cette classe qui était associée depuis pas très longtemps avec le mot « *curiosité* » est la classe la plus explorée à cause de la facilité relative d'étude, et la clarté des notions utilisées. En fait, la plupart des méthodes de manipulation du chaos sont appliquées et testées sur ces classes avant de passer aux autres. De ce fait, ils sont présentés comme source de chaos de référence dans beaucoup d'études. Nous avons déjà vu l'exemple de la famille de fonctions quadratiques. Il existe beaucoup d'autres exemples similaires (fonction de Henon, fonction logistique... etc.) qui sont principalement des familles de fonctions itératives dont l'état chaotique dépend d'un ou plusieurs paramètres.[MAY01]

La classe trouve son importance dans la pratique scientifique à cause du fait que les fonctions itératives sont à la base d'une grande part des algorithmes numériques pour l'exploration des équations différentielles (ex. méthode de Newton). Il faut signaler l'importance de l'étude formelle de cette classe, par opposition à l'étude numérique. En effet, quelle que soit la puissance de l'ordinateur qu'on utilise, les calculs sont approximatifs et admettent une erreur. C'est le résultat d'une représentation binaire finie, et du remplacement de fonctions mathématiques par leurs développements limités.

Cette réalité, connue par tous, reste dans la plupart des cas négligée, ce qui n'est pas grave sauf pour les systèmes chaotiques, à cause de leur sensibilité exponentielle aux erreurs. Pour le chaos l'augmentation de la puissance de calcul ne fait que retarder l'inévitable. Ce problème est l'objet de plusieurs études intéressantes en cours de réalisation, et qui sont principalement basées sur le modèle du « *calculateur réel* » ou « *machine de Blum - Shub - Smale* » [BLU01].

Par exemple pour la fonction logistique  $x_{t+1} = k x_t (1 - x_t)$  pour  $k=3.8$  et une condition initiale  $x_0=0.4$ , sur papier l'itération suivante donne  $x_1=0.912$ . L'ordinateur (sous Scilab avec un Pentium DualCore) par contre donne le résultat suivant :  $x=0.9119999999999992$ .

Finalement, pour une liste exhaustive de fonctions non linéaires connues pouvant générer du chaos voir [WIL02].

## ***II.2 Systèmes dynamiques chaotiques à modèle connu***

Dans la référence [WIL02] on trouve une répartition de cette classe en deux familles de systèmes :

- Les systèmes dissipatifs : où on trouve les phénomènes de bifurcation, d'intermittence et d'attracteur étrange.
- Les systèmes conservatifs : où on trouve les systèmes classiques (ex. : système mécanique à trois corps, système de Poincaré) et les systèmes quantiques (chaos quantique).

Cette classe de systèmes est largement connue ; car on y trouve le fameux système climatologique de Lorenz et d'autres qui sont à l'origine de la théorie moderne du chaos.

Exemples :

- Système de Lorenz (voir sys.I.2) qui va être l'objet d'exploration dans la section IV.2.1
- Système de Rössler (1979):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay + w \\ \dot{z} = b + xz \\ \dot{w} = c_2 z + c_1 w \end{cases} \quad (\text{sys.II.1})$$

- Système chaotique de Chua.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha [y - x - h(x)] \\ \dot{y} = z - y - x \\ \dot{z} = -\beta y \\ \dot{w} = m_1 x + 0.5 [m_0 - m_1] [|x + E| - |x - E|] \end{cases} \quad (\text{sys.II.2})$$

Où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m_0$ ,  $m_1$  et  $E$  sont des paramètres et  $h(x)$  une fonction non linéaire de  $x$ .

### II.3 Systèmes dynamiques chaotiques sans modèle

C'est la classe la plus intéressante, car c'est pour ce type de système que la détection du chaos offre un grand potentiel. Dans ce cas, le système est une boîte noire, qui génère des grandeurs mesurables sous forme de séries temporelles à sa sortie. Alors logiquement pour qu'on ait recours à la détection du chaos, c'est que ces variables de sortie ont un aspect aléatoire. Ainsi, pouvoir prouver que ces variables sont des signaux chaotiques est un gain considérable en soi à cause des perspectives qui en résultent (prédictibilité, ordre caché... etc.).

Cette classe couvre un énorme spectre d'applications, dont principalement la finance [CHA01], l'économie [BAR01,SCH02,LIU01], le biomédical [HU001,HAI01,GON01], l'hydraulique [KHA01], les réseaux [FAN01,NUN01], l'écologie [RAI01] et la liste ne cesse de s'agrandir. Par la suite, nous allons explorer trois cas où on peut rencontrer le chaos sans avoir le modèle proprement dit du système qui a généré celui-ci. Le premier cas est relatif à la cryptanalyse d'un système de communication chaotique, le deuxième est le cœur et le troisième est le cerveau.

## II.4 Le chaos dans la communication sécurisée

Ces deux dernières décennies ont été marquées par une tendance partagée à l'exploration des possibilités du cryptage des transmissions par le chaos. Ces possibilités ont été la suite logique de la découverte de la synchronisation des systèmes chaotiques en 1989 [DIT01]. En effet, Pecora a trouvé qu'un système chaotique peut être construit d'une certaine façon pour que ces parties évoluent harmonieusement dans le temps. Cependant, on sait que deux systèmes chaotiques complètement isolés ne peuvent pas se synchroniser, à cause de leurs sensibilités aux erreurs, même insignifiantes. Alors, un genre de couplage doit être introduit entre les systèmes à synchroniser.

Pecora a proposé un exemple illustré par la figure II-1, où un système chaotique et un duplicata d'une partie du système sont synchronisés.

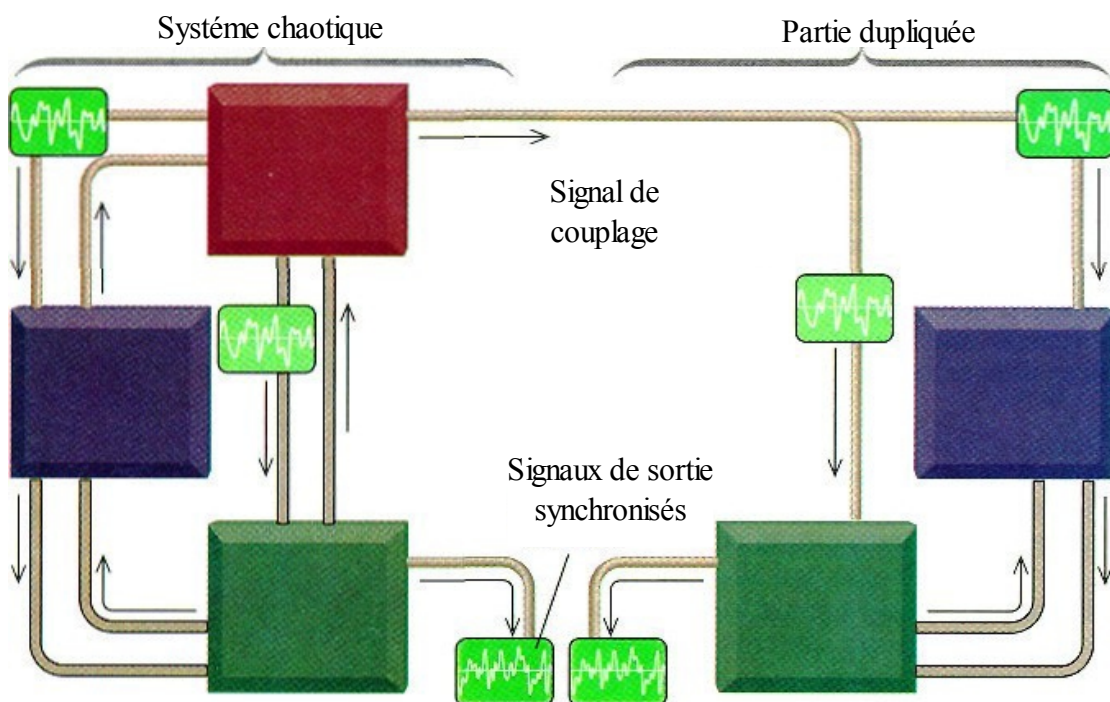
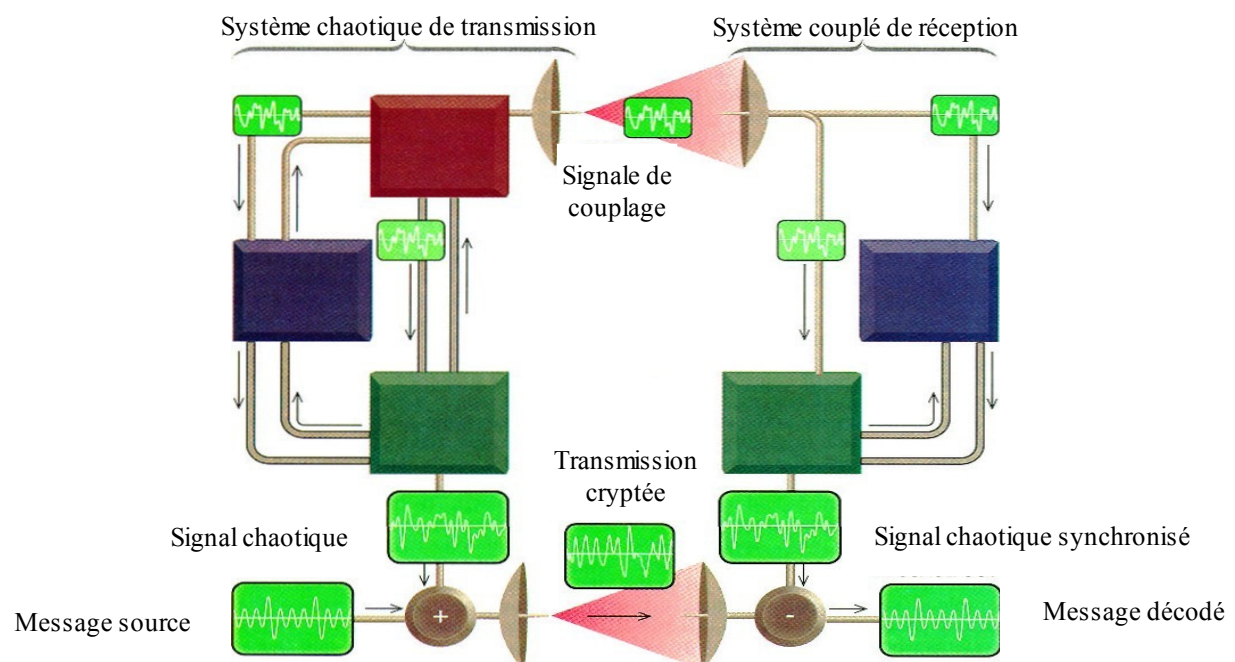


Figure II-1 Synchronisation dans le système de Pecora [DIT01]

Le concept important dans cet exemple est le fait que la partie dupliquée (carrés vert et bleu) est stable lorsqu'elle est pilotée par la partie non dupliquée (carré rouge). Ainsi, des variations dans les conditions initiales de la partie dupliquée n'auront pas de conséquences vis-à-vis du signal de sortie. Alors, le système global est chaotique et les deux sorties sont synchrones. Dans ce cas, le couplage est effectué par la liaison entre le carré rouge et la partie dupliquée à droite.

Pour simuler cette idée, *Pecora* a choisi le système de Lorenz (sys.I.2), où l'une des trois variables d'états a été utilisée comme signal de couplage, et la dynamique des deux restantes comme la partie dupliquée.

Ainsi, malgré que les deux parties aient été initialisées différemment, elles ont fini par se rattraper en harmonie totale. Ce type de synchronisation est dite unidirectionnelle, car le système est considéré comme la source et la partie dupliquée est considérée comme la destination. Par la suite *Carroll* a proposé un système de communication crypté basé sur l'exemple de Pecora et illustré par la figure II-2.



**Figure II-2** Communication chaotique par le système de Pecora et Carroll [DIT01]



Le transmetteur ajoute un signal chaotique au message à transmettre et envoie le résultat en plus du signal de couplage au récepteur. Ce dernier est composé d'une partie dupliquée du système de transmission, alors le signal chaotique est régénéré et retranché du signal reçu pour avoir le message original.

Depuis, *Pecora et Carroll* ont introduit d'autres exemples basés sur des principes différents. Les axes de ces recherches sont principalement la synchronisation, le cryptage et la cryptanalyse.

#### **II.4.1 La synchronisation.**

À ce jour, différentes formes de synchronisation ont été explorées. Parmi ces formes on trouve les méthodes à synchronisation complète (SC), les méthodes à synchronisation généralisée (SG) et les méthodes à synchronisation de phase (SP).

Dans la synchronisation complète, nous avons une coïncidence complète entre les variables d'états des deux systèmes synchronisés. Les méthodes à synchronisation complète sont typiquement associées avec la synchronisation des systèmes identiques, dont nous avons déjà illustré un exemple (système de Pecora et Carroll). D'autres exemples de synchronisation complète utilisent un schéma à rétroaction et sont décrits comme étant bidirectionnels, car les deux systèmes sont à la fois source et destination.

Les méthodes à synchronisation généralisée se manifestent par une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés. Ces méthodes sont considérées comme une généralisation des méthodes à synchronisation complète pour synchroniser des systèmes chaotiques typiquement différents [GUA02].

Dans la synchronisation de phase, la phase entre deux oscillateurs chaotiques est verrouillée, ou, plus généralement, une définition particulière adéquate d'une représentation de la phase de deux systèmes chaotiques est verrouillée. Ces méthodes peuvent être utilisées avec des systèmes identiques ou pas [GUA01].

Dans tous les cas de figure, une attention particulière doit être donnée au choix de couplage (voir [GUA02]).

Une classification moins récente, mais plus détaillée peut être trouvée dans [PEC01], où parmi les méthodes énumérées, on trouve la synchronisation hyper - chaotique, qui décrit les méthodes utilisées pour synchroniser deux systèmes caractérisés par plus d'un exposant de Lyapunov positif (ex. la concaténation de plusieurs systèmes chaotiques).

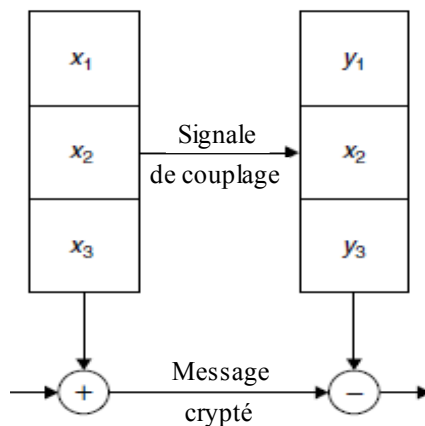
On y retrouve [PEC01] également les méthodes de synchronisation élaborées comme solution à un problème de synthèse d'observateur. Ce type de problème est classique dans le domaine de l'automatique, et utilise beaucoup des résultats relatifs au contrôle du chaos. Récemment, des méthodes novatrices de cette classe ont exploré les systèmes discrets et hybrides, soit comme systèmes à synchroniser [BEL01] soit comme partie de la méthode de synchronisation [GUO01]. Finalement, on trouve dans [KRI01] une proposition d'une méthode efficace pour la quantification de la synchronisation, en d'autres termes c'est une méthode d'évaluation de la qualité et la sensibilité des méthodes de synchronisation.

#### **II.4.2 Le cryptage:**

Le cryptage proprement dit, ou comment mélanger et séparer les données et le signal chaotique, est l'étape finale pour construire le système de communication chaotique. Un signal chaotique porteur d'information représente une généralisation des systèmes conventionnels de modulation. Ainsi, un message source à faible amplitude est masqué par un signal chaotique plus large.

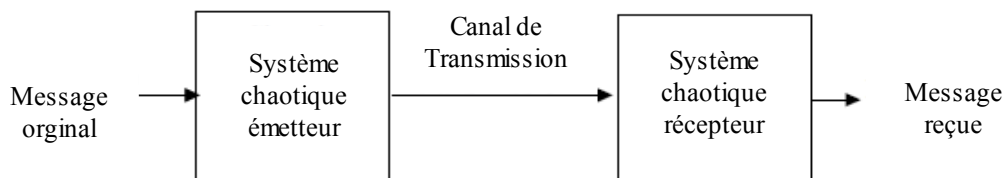
Cependant, contrairement aux porteuses sinusoïdales conventionnelles, et à cause de l'absence de notions précises d'amplitude, de phase et de fréquence; le signal chaotique est mélangé avec le message source de différentes façons. Principalement deux classes de méthodes existent: le cryptage additif et le cryptage par inclusion.

Dans le cryptage additif, le message est tout simplement additionné au signal chaotique, le système de Pecora et Carroll en est un exemple. Dans cette classe deux canaux de transmission sont nécessaires, l'un pour le mélange et l'autre pour le signal de couplage.



**Figure II-3** cryptage par la méthode additive [STA01]

Dans le cryptage par inclusion, le message source est inclus dans la structure du système chaotique du côté de l'émission. Dans ce cas, un observateur doit être utilisé à la réception pour récupérer le message original. Cette classe de méthodes nécessite un seul canal de transmission.



**Figure II-4** cryptage par la méthode d'inclusion

Un exemple intéressant sur la méthode d'inclusion serait le CSK (Chaos Shift Keying) représenté par la figure II-5 où les symboles du message binaire à transmettre sont utilisés pour la commutation entre deux systèmes chaotiques différents. À la réception le démodulateur qui est en fait un observateur d'états discrets (observateur hybride) est utilisé pour reconstruire le message original. Un tel observateur peut être représenté par la figure II-6 [STA01].

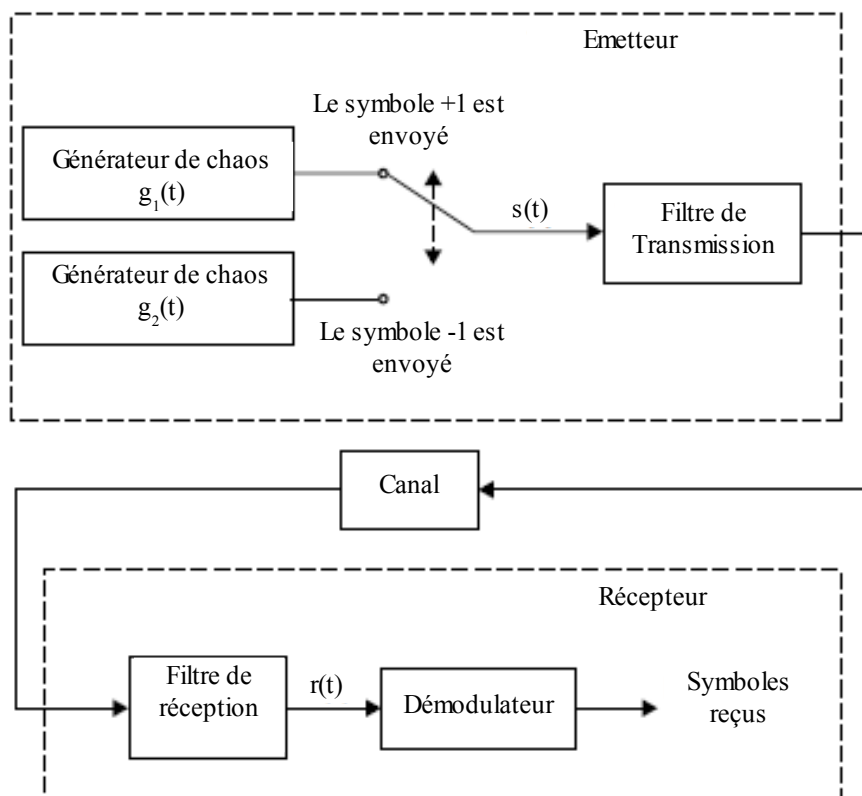


Figure II-5 cryptage par la méthode CSK

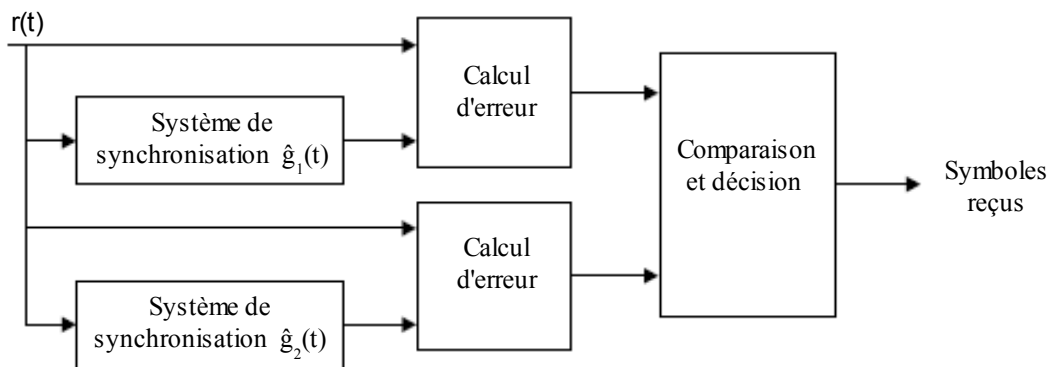


Figure II-6 Bloc de démodulation dans la méthode CSK [STA01]

Dans toutes les méthodes, des limites doivent être imposées au message à transmettre. En effet, l'amplitude et la fréquence de ce dernier ne doivent en aucun cas altérer la synchronisation et la nature chaotique des systèmes utilisés.

Dans tous les cas de figure, un potentiel intéressant existe pour les méthodes de reconnaissance du chaos. En effet une de ces méthodes peut être exploitée pour la détection d'un silence radio ou pour la démodulation d'un signal CSK...etc. Ces possibilités restent à explorer et sont proposées pour de futurs travaux.

#### **II.4.3 La cryptanalyse :**

La cryptanalyse ou l'attaque du système de cryptage est une étape importante, mais parfois délaissée, elle permet d'évaluer le niveau de sécurité apporté par la méthode proposée. Par conséquent, après l'élaboration d'une méthode de synchronisation et de cryptage chaotique, toutes les méthodes d'attaque applicables doivent être explorées suivant différents scénarios. Car généralement, on ne s'aperçoit d'une brèche de sécurité qu'après la catastrophe. Ainsi, ironiquement le constructeur (ou l'utilisateur) d'un système de cryptage doit être le premier à le casser.

Pratiquement, casser un cryptage revient à l'extraction du message source sans avoir une connaissance préalable sur le schéma du récepteur, ou au moins avec une connaissance partielle de ce dernier. Généralement, l'intrus doit disposer d'au moins deux versions (crypté et en clair) d'un message pour pouvoir commencer l'attaque. Également, des statistiques linguistiques sont généralement utilisées pour associer les symboles en clair avec leurs versions cryptées. C'est ce point qui a sollicité l'intérêt des systèmes chaotiques dans le cryptage. En effet, le signal chaotique crypté associé à un symbole en clair à un instant donné coïncidera rarement avec le même symbole en d'autres instants.

Là aussi, un potentiel majeur existe pour les méthodes de reconnaissance de chaos. Car le fait même de pouvoir détecter (ou distinguer) qu'une transmission cryptée par le chaos est établie constitue une base importante de critique et de comparaison, entre les différentes méthodes de cryptages. Ce potentiel sera exploré dans les futurs travaux.

## ***II.5 Le chaos dans le cœur***

La pratique médicale clinique est de plus en plus consciente du potentiel grandissant du chaos ainsi que d'autres branches des systèmes non linéaires. L'étendue de la relation entre le chaos et la dynamique de la physiologie animale est encore le sujet d'une recherche active générant quelques controverses.

Au début, l'idée générale était que les fluctuations chaotiques des signaux physiologiques se produisent en conséquence à des systèmes pathologiques, telle que l'activité cardioélectrique durant une fibrillation atriale ou ventriculaire.

Mais cette idée initiale a été rejetée et les résultats qui ont suivi ne sont pas en faveur de cette hypothèse. Même encore, il n'y a pas de preuves convaincantes que d'autres arythmies surnommées « chaotiques » (comme la tachycardie atriale multifocale) satisfont les critères techniques de reconnaissance du chaos.

Une hypothèse alternative serait que les fluctuations subtiles et complexes observées durant un rythme sinusal normal chez des sujets sains seraient causées en partie par du chaos déterministe, et que les syndromes d'une variété de pathologies, telle que l'insuffisance cardiaque congestive, peuvent inclure une diminution de ce type de variabilité non linéaire. À cause de la faible fiabilité des méthodes mathématiques pour la détection du chaos dans de tels signaux non stationnaires, courts et souvent bruités, la question du rôle du chaos ici reste posée [LIC01].

Dans la suite, nous allons présenter dans un ordre chronologique les résultats de quelques recherches dans le domaine, après un bref aperçu du cœur.

### II.5.1 Le cœur

Il est considéré par beaucoup de spécialistes comme l'organe le plus vital, envoyant le sang à l'ensemble des cellules du corps à travers les artères. Les deux phases mécaniques de fonctionnement du cœur sont la systole et la diastole.

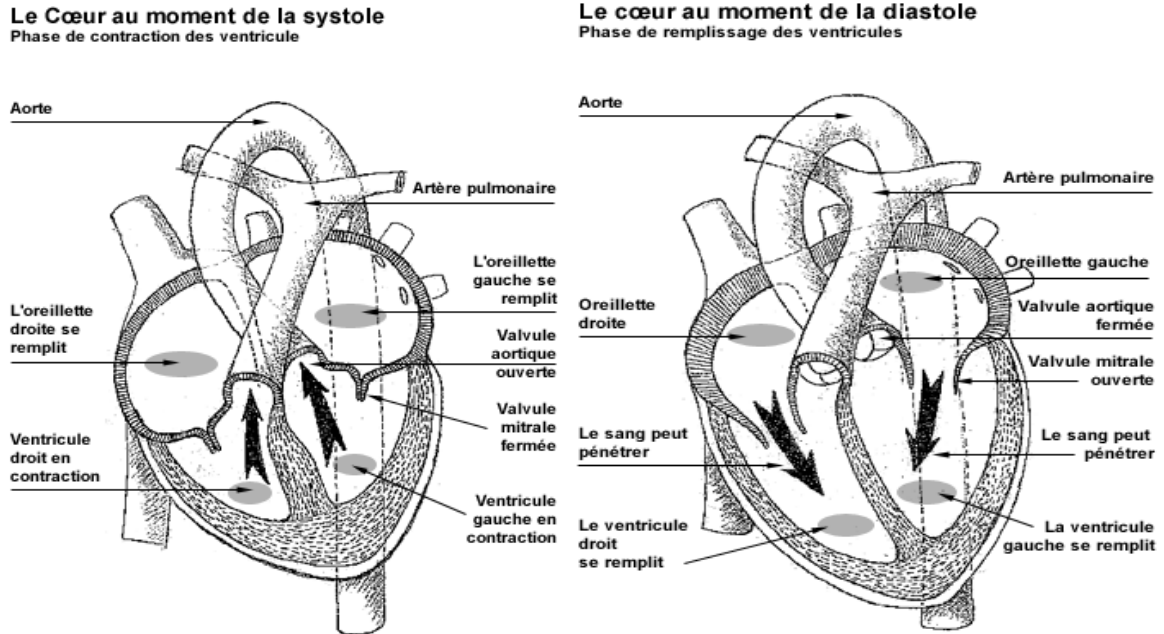


Fig II-7 : Fonctionnement mécanique du cœur

La force nécessaire au pompage du sang est le résultat des contractions coordonnées des muscles cardiaques qui sont contrôlés par un système électrique remarquable. Un oscillateur physio - électrique appelé le nœud sinusal génère des impulsions électriques qui sont conduites par le système de distribution neurocardiaque aux différents muscles.

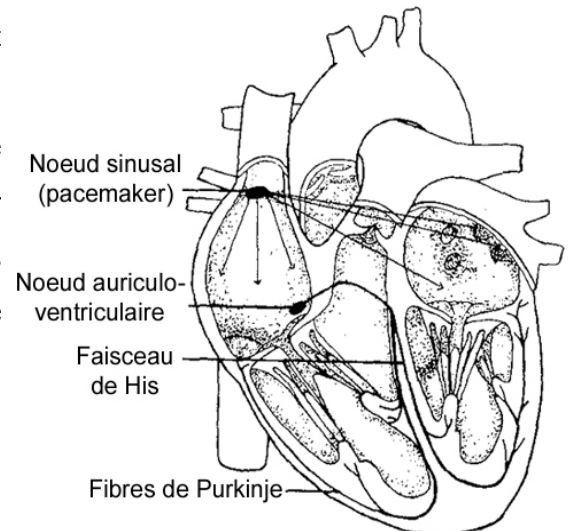
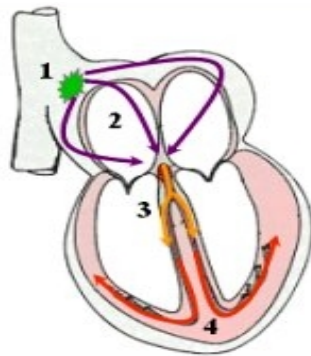


Fig II-8 Système électromoteur du cœur

Grâce à Dieu, au cas où le nœud sinusal lâche, des cellules du système de distribution prendraient la relève, et même s'ils viennent à lâcher également, n'importe quel muscle peut reprendre la charge.

Le système de conduction du cœur est composé du nœud auriculo-ventriculaire, le faisceau de His et les fibres de Purkinje.



1. Excitation du nœud sinusal
2. Dé-polarisation auriculaire
3. Conduction au niveau A-V et faisceau de His
4. Conduction au niveau des ventricules

**Fig II-7** : Système de conduction normal du cœur

Le rôle principal de la génération et de la transmission du signal électrique est joué par la membrane cellulaire. Cette membrane à double couche lipidique intègre des pores à travers lesquels des phénomènes de transport ionique actifs et passifs prennent lieu. Ces derniers sont contrôlés par la cellule pour générer et varier une différence de potentiel entre les deux côtés de la membrane, créant ainsi une impulsion qui va se propager d'une cellule à l'autre.

La forme de ces impulsions change durant le cycle de conduction générant ainsi une forme particulière appelée le signal ECG (Electro Cardio Gramme). Il existe plusieurs variantes du signal ECG suivant la méthode et l'instrumentation utilisée pour le capter.

Le signal ECG ainsi que d'autres mesures (pression artérielle, bruit cardiaque... etc.) sont utilisés pour diagnostiquer l'état du cœur. En effet, la morphologie de ces signaux ainsi que leurs caractéristiques fréquentielles et temporelles varient d'un individu à un autre, et chez l'individu lui-même avec le temps.



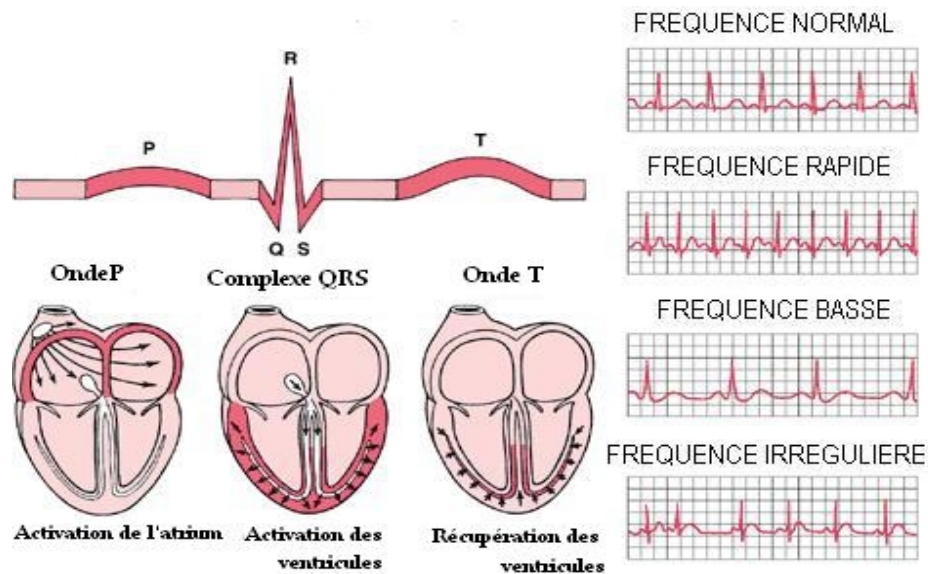


Fig II-7 : Le signal ECG.

Ces variations peuvent être lentes et graduelles (ex. vieillissement) ou rapides et abruptes (ex. : efforts, maladies, excitation externe). La médecine clinique moderne donne beaucoup d'importance à l'observation et l'interprétation de ces signaux, et les recherches ne cessent d'explorer de nouveaux angles d'analyse tous les jours.

Dans cet esprit, on comprend l'intérêt majeur qui a été apporté aux systèmes chaotiques par les cliniciens. En effet, le fait de démontrer l'existence du chaos dans ces signaux mènerait vers de nouveaux horizons selon deux axes différents :

- La prédiction et le contrôle du système cardiaque.
- Le diagnostic clinique.

### II.5.2 Résultats de quelques études.

Comme ce fut illustré précédemment, l'étude du chaos dans le cœur relève en partie de l'étude du système de conduction qui est un système neurophysiologique. Les résultats les plus convaincants de l'existence du chaos dans des données neurophysiologiques ont été trouvés dans la réponse d'un neurone (et également son modèle mathématique) aux stimulations par courant périodique (*Holden* 1986). Ces études ont montré que dans un neurone, des signaux d'entrées périodiques donnent parfois résultat à des réponses aperiodiques dans les intervalles interpics.

Peu après, l'hypothèse que les variations des intervalles entre les battements du cœur HRV (Heart Rate Variability) sont chaotiques a été proposée par *Babloyantz et Destexhe* (1988). Une hypothèse additionnelle [YAM01] stipule que ceci est le reflet d'un comportement chaotique au niveau des centres autonomes dans le cerveau (centres sympathique et parasympathique de régulation de l'activité physiologique).

Les résultats des études menées (*Yamamoto et Hughson* 1994) stipulent que le signal HRV des sujets au repos contient des traces chaotiques de dimensions élevées. Cependant, ces mêmes études ont souligné la difficulté de la détection de l'aspect chaotique à cause de la similarité qu'il a avec l'aspect fractal et le fait que ce dernier est dominant dans le signal HRV.

Ainsi, un courant sceptique par rapport à l'hypothèse du chaos dans le cœur est né. Mais beaucoup d'études ont continué l'exploration. Parmi ces dernières [GON01] une étude a exploré les sources de non-linéarité dans les intervalles entre pics (R-R) et la pression sanguine systolique chez les rats. L'étude a trouvé des variations dans l'aspect chaotique de ces signaux entre les rats normaux et ceux auxquels différents types de médicaments ont été administrés.

D'autres études [FLE01] ont été menées par CHi-Sang Poon au sein de la division MIT de Harvard. L'objectif était l'étude des différences subtiles entre le rythme de cœurs sains et ceux de cœurs malades, dans le but d'identifier les individus présentant un risque de maladie cardiaque. *Poon et Merrill (1997)* ont découvert que les maladies cardiaques poussent le cœur à se battre de façon moins chaotique que d'habitude, c.à.d que paradoxalement, un cœur qui bat d'une façon plus ordonnée et régulière est plus exposé aux risques de maladies. Ces études ont également souligné la difficulté de la détection du chaos dans les signaux physiologiques, et ont montré le rôle du bruit dans cela. Par la suite, Poon et al. ont proposé une méthode qui tire avantage de l'effet du bruit sur la détection du chaos [POO01].

La difficulté de la détection du chaos a rendu ce domaine d'application le choix privilégié pour les études visant à tester l'efficacité de nouvelles méthodes de reconnaissance de chaos. Dans l'une de ces études [LUO01] un nouvel algorithme a été proposé et appliqué au signal ECG humain. L'algorithme proposé utilise la méthode de substitution (surrogates) qui est supposée résistante au bruit coloré (voir section III.2.7). Les résultats de cette étude ont confirmé ceux de (*Yamamoto 1994*) et ont souligné l'absence de preuves de l'existence du chaos dans les signaux traités.

En parallèle, D'autres études ont choisi d'explorer les modèles mathématiques du cœur jadis proposés par les biomathématiciens. L'un de ces travaux [HAI01] a étudié comment un comportement chaotique peut être généré dans le modèle du système autonome cardiaque. Le modèle choisi se base sur le fonctionnement des canaux ioniques responsables de l'excitation cellulaire et s'inspire du modèle de *Richard Fitzhugh*. Le modèle comporte deux variables d'état  $e$  et  $g$  où  $e$  représente le potentiel électrique (excitation rapide) et  $g$  représente la récupération (déchargement lent).

Les équations qui régissent le modèle sont :

$$\begin{cases} \partial e / \partial t = (\partial / \partial x_i) \cdot d_{ij} (\partial e / \partial x_j) - f(e) - g \\ \partial g / \partial t = \varepsilon(e, g)(ke - g) \end{cases} \quad (\text{sys.II.3})$$

Où  $d_{ij}$  est le tenseur de conductivité quantifiant la non-isotropie du tissu cardiaque.

$f(e)$  est définie comme suit:

$$f(e) = \begin{cases} C_1 \cdot e & \text{pour } e < e_1; \\ -C_2 \cdot e + a & \text{pour } e_1 = e = e_2; \\ C_3 \cdot (e-1) & \text{pour } e > e_2; \end{cases} \quad (\text{eq.II.1})$$

et  $\varepsilon(e, g)$  définie comme suit:

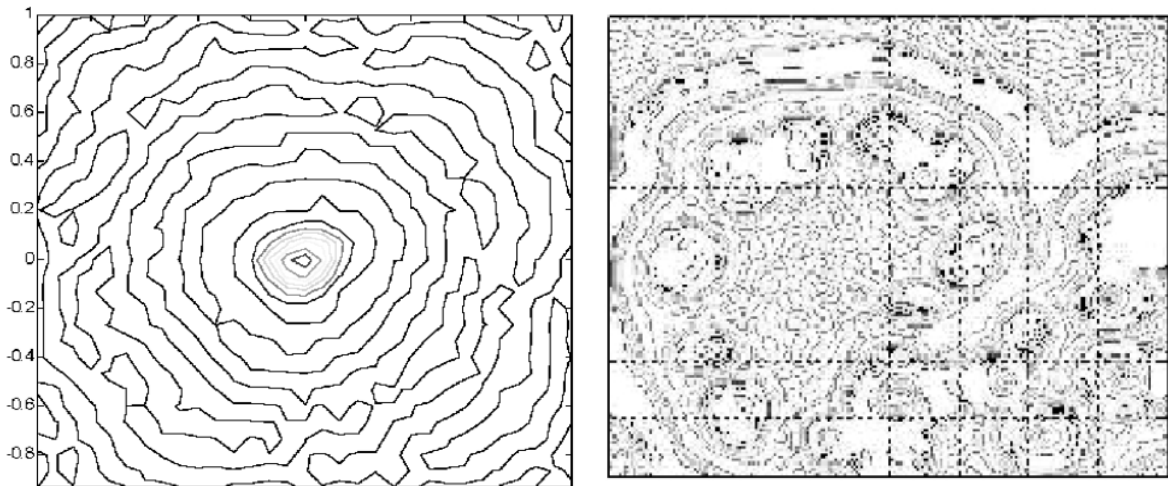
$$\varepsilon(e, g) = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{pour } e < e_2; \\ \varepsilon_2 & \text{pour } e > e_2; \\ \varepsilon_3 & \text{pour } e < e_1 \text{ et } g < g_1; \end{cases} \quad (\text{eq.II.2})$$

Avec:

$$e_1 = 0.0026, e_2 = 0.837, C_1 = 20, C_2 = 3, C_3 = 15, a = 0.06, k = 3.$$

$$\varepsilon_1^{-1} = 75, \varepsilon_2^{-1} = 1, g_1 = 1.8 \text{ et } 0.5 < \varepsilon_3^{-1} < 10$$

Les résultats de la simulation pour un cas normal et un cas de défibrillation cardiaque sont montrés dans la figure II-8.



**Fig II-8** : L'espace de phase pour le modèle du cœur (sys.II.3) dans un cas régulier (à gauche) et dans cas chaotique (à droite)

Dans une étude récente [POR01], la variabilité des intervalles entre battements a été étudiée chez des jeunes individus sains, sous diverses conditions expérimentales incluant:

- Une activation sympathique (infusion de nitroprussides ou poignée serrée).
- Une activation parasympathique (administration de petites doses d'atropine ou infusion de phényléphrine).
- Un blocus parasympathique complet (administration de dose élevée d'atropine).
- Respiration contrôlée à différents taux de respiration.

L'étude a trouvé que les changements, dans la complexité de la variabilité du rythme des battements, à court terme induits par les conditions expérimentales sont robustes. Ainsi, ces changements ont pu être détectés de manière fiable par plusieurs méthodes et ont été associés aux modifications de l'état du système nerveux autonome, principalement à l'augmentation de la modulation sympathique. Par contre, la non linéarité de la variabilité du taux de battement n'a été influencée que dans le cas d'un régime périodique externe forcé, comme la respiration contrôlée aux rythmes lents, invalidant ainsi l'idée que la respiration assistée n'a pas d'influence sur le rythme cardiaque [POR01].

Dans une autre étude très récente [JOV01], la classification d'enregistrements ECG dans quatre classes (normale, arythmie atriale, arythmie supra ventriculaire et Insuffisance cardiaque congestive) a été explorée en utilisant les marqueurs chaotiques. Les résultats indiquent que la classification en deux classes (normale et anormale) est faisable en utilisant les enregistrements des annotations (intervalles R-R) mais non faisable avec les enregistrements bruts (EEG complet) [JOV01].

## II.6 Le chaos dans le cerveau

L'utilisation du chaos dans l'exploration clinique du cerveau remonte au tout début, très vite après l'apparition des premiers théorèmes traitant les caractéristiques du chaos. La plupart des études concernées traitaient le signal EEG (*électro-encéphalogramme*), soit chez les animaux ou chez les humains, dans les situations d'épilepsie, de sommeil et de réaction aux divers stimuli.

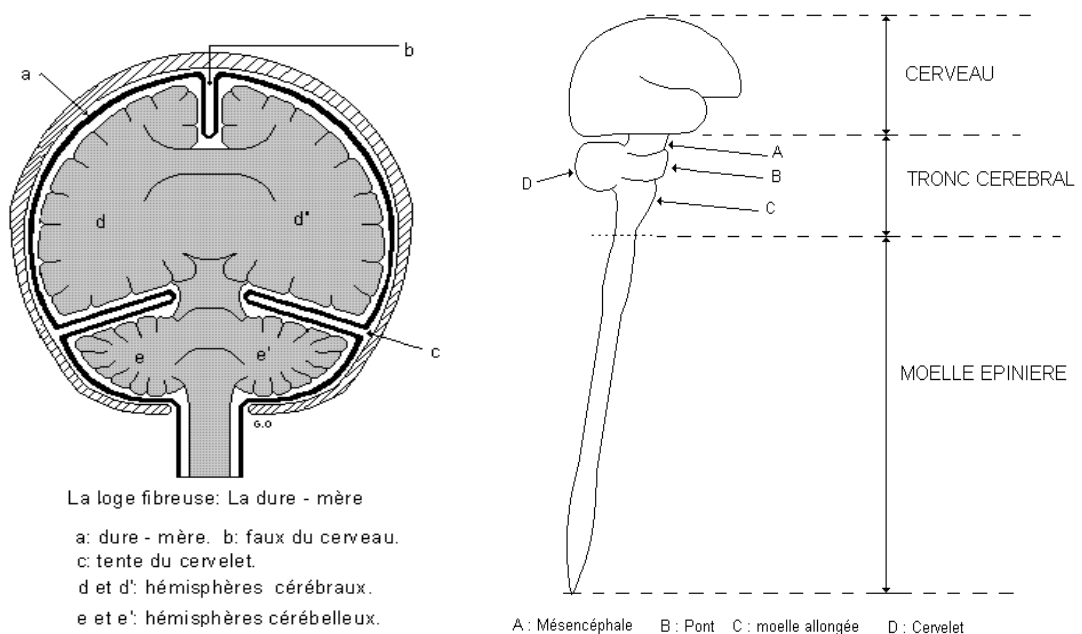
Le signal EEG montre des irrégularités considérables dont l'origine peut être simplement un bruit aléatoire ou un caractère déterministe comme le chaos.

Une question intéressante dans le cas d'épilepsie est de savoir si les méthodes de détection du chaos peuvent effectivement prévoir le changement dans les dynamiques du cerveau aboutissant à l'épilepsie ou pas. Ces dernières années des méthodes d'exploration non linéaires ont été appliquées avec succès, mais seulement pour des signaux EEG épileptiques sélectionnés [KUG01], alors qu'en général, dans le cas de l'EEG spontané normal les résultats sont beaucoup moins évidents.

Ainsi, la pensée générale va dans le sens où le cerveau est supposé fonctionner sous différentes dynamiques suivant l'activité accomplie et les conditions subies. Par conséquent, la différence entre un fonctionnement normal du cerveau et un autre épileptique serait que le régime opératoire des réseaux de neurones dans le mode épileptique est beaucoup plus proche à un point de bifurcation que dans le mode normal. Ce qui va générer un mode opératoire chaotique à dimension réduite. Ainsi, une question très intéressante est : quel est le paramètre (ou groupe de paramètres) qui contrôle cette bifurcation ? [SAR01] . D'autres questions et pensées à propos de l'EEG et l'épilepsie seront explorées par la suite, en présentant d'abord un aperçu sur l'anatomie fonctionnelle du cerveau, le signal EEG et l'épilepsie.

### II.6.1 Le cerveau

C'est l'organe moteur du système nerveux central chez l'humain, et se loge à l'intérieur de la boîte crânienne avec le cervelet et le tronc cérébral. L'ensemble de ces derniers forme l'encéphale dont l'allongement constitue la moelle épinière. Le cerveau repose sur la base du crâne et il est recouvert par la voûte dont il est séparé par une toile fibreuse très épaisse appelée « *dure-mère* ». Cette dernière forme un repli sous le cerveau appelé « *tente du cervelet* ». Elle forme aussi un repli entre les deux hémisphères du cerveau appelé « *faux du cerveau* ». Ainsi, le cerveau se trouve délimité dans la loge fibreuse supérieure.



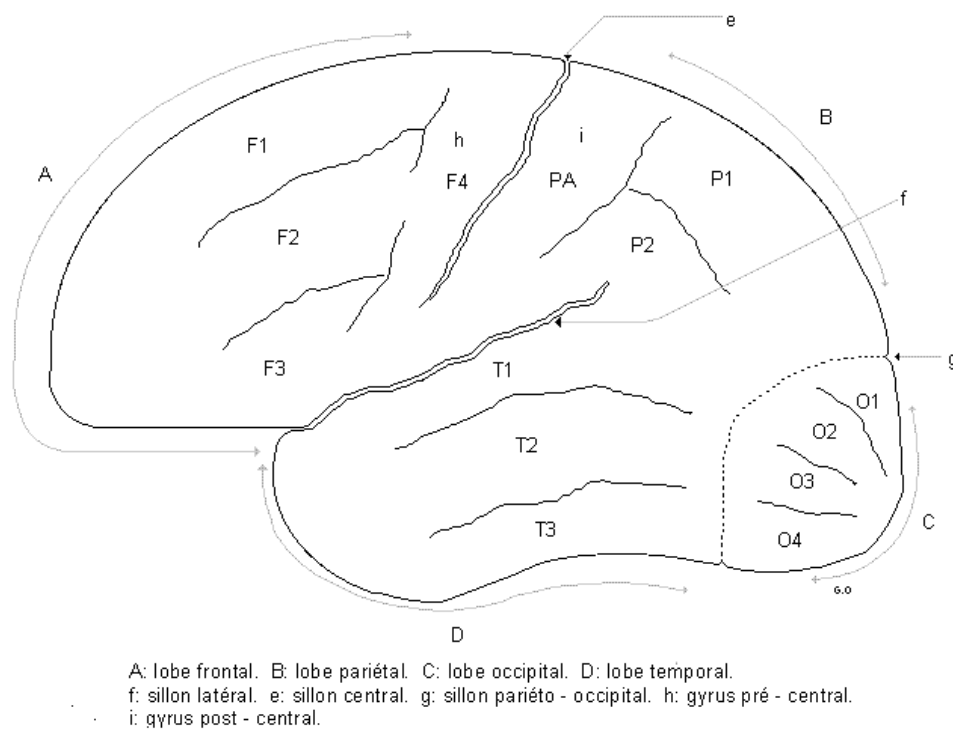
**Figure II-9:** La loge fibreuse (à gauche), la subdivision du système nerveux central (à droite)

Le système nerveux central baigne totalement dans le liquide cérébro-spinal, qui est situé à l'extérieur du cerveau dans des « *caves* » ou « *lacs* » et à l'intérieur dans des « *ventricules* ».

La morphologie externe du cerveau ressemble à un ovoïde à grand axe antéro-postérieur qui est composé de deux hémisphères séparés par un profond sillon médian (fissure longitudinale du cerveau). Ces derniers sont reliés entre eux par des ponts de tissu nerveux (les commissures inter hémisphérique). La surface des hémisphères est constituée d'un « *manteau* » (pallium) de substance grise très plissée qui constitue l'écorce cérébrale ou cortex et présente de nombreux plis dont les plus profonds et les plus constants s'appellent sillons. Sur la face latérale de chaque hémisphère on distingue trois sillons:

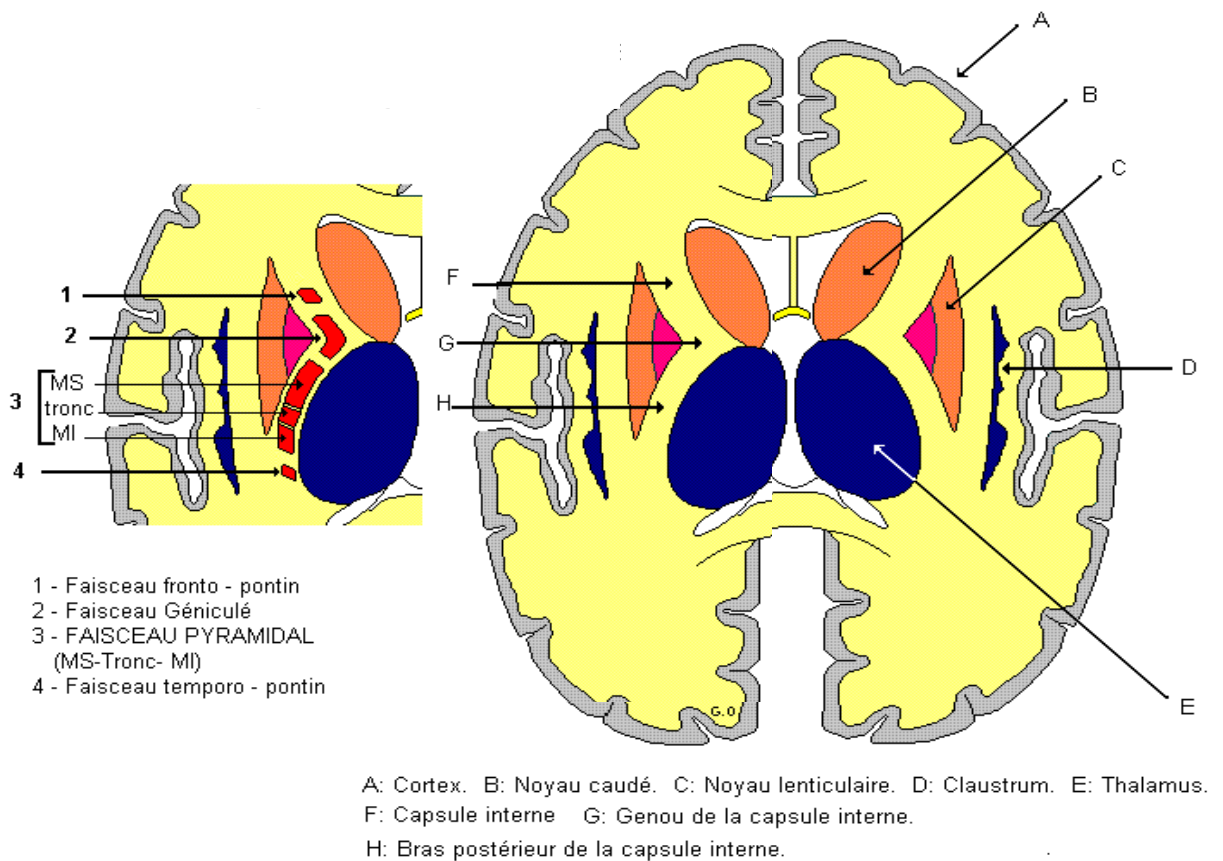
- le *sillon central* (*Sulcus centralis*)
- le *sillon latéral* (*Sulcus lateralis*)
- le *sillon occipital* transverse qui est plus rudimentaire sur la face externe.

Les scissures délimitent des lobes : le lobe frontal, le lobe pariétal, le lobe temporal et le lobe occipital. La surface des lobes est parcourue par des sillons moins profonds qui délimitent de gros plis de substance grise appelés circonvolutions cérébrales (circonvolution cérébrale = Gyrus)



**Figure II-10:** Morphologie externe de l'hémisphère cérébrale gauche, face latérale

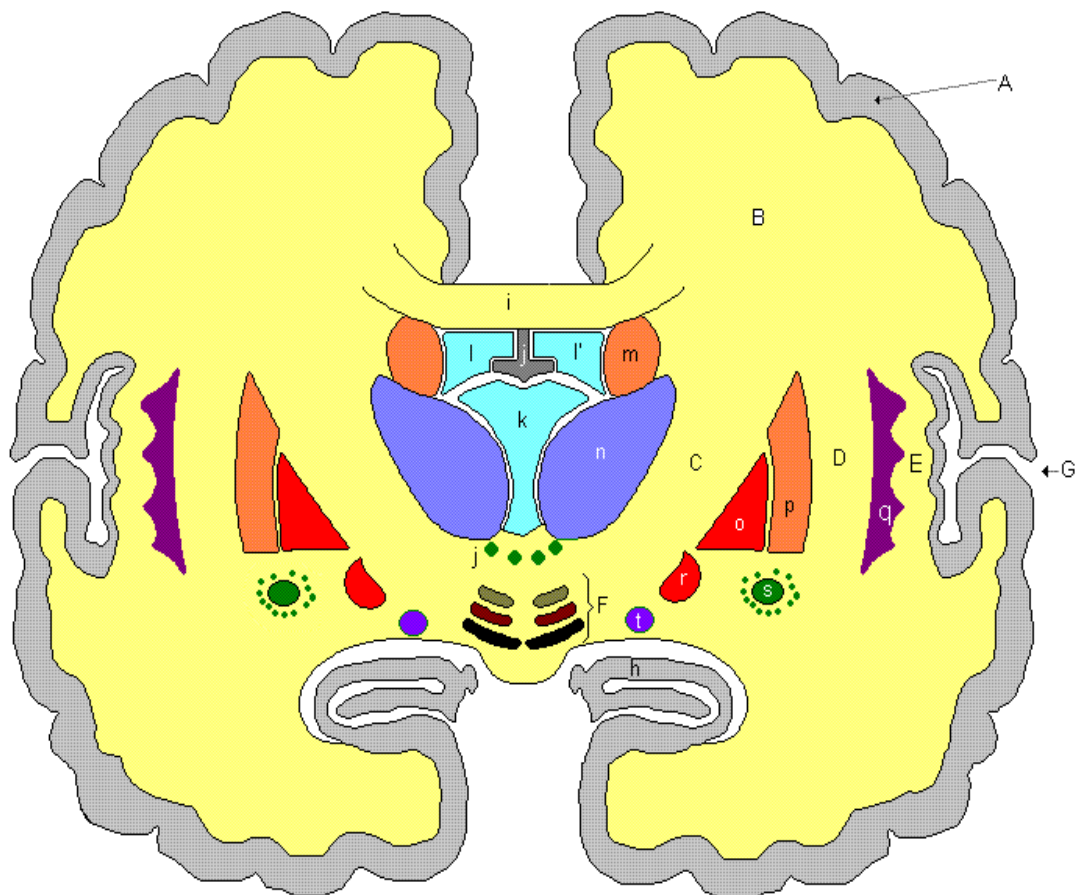




**Figure II-10:** Morphologie interne du cerveau, coupe horizontale

La figure au-dessus décrit la morphologie interne du cerveau, où se trouve la substance blanche centrale au sein de laquelle sont situés de volumineux noyaux gris. Ce sont des centres sous-corticaux appelés noyaux gris centraux. Ils sont composés des corps striés et de la couche optique ou « *thalamus* ».

Au centre du cerveau se trouve un système de cavités appelées ventricules qui sont des dilatations régionales du canal de l'épendyme primitif.



CERVEAU : COUPE VERTICALE : Noyaux gris centraux et Noyaux de la base du cerveau

A: Cortex. B: Centre ovale C: Capsule interne D: Capsule externe. E: Capsule extrême.

F: Noyaux sous - opto - striés G: Sillon latéral. h: hippocampe. i: corps calleux.

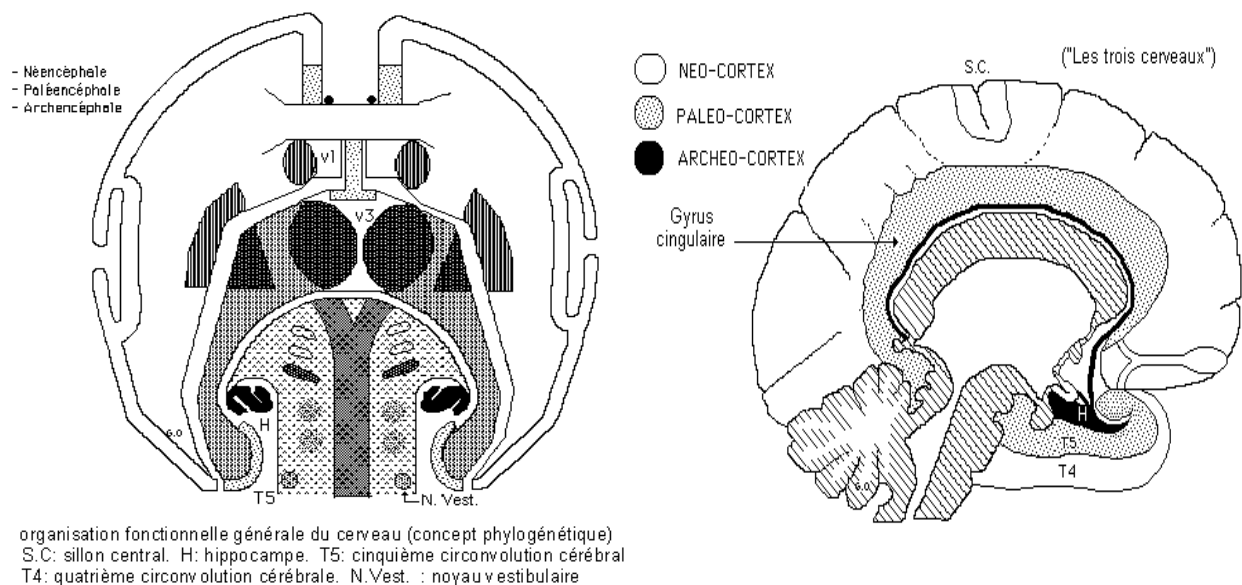
j: hypothalamus. k: troisième ventricule. l et l': ventricules latéraux. m: noyau caudé

n: thalamus. o: pallidum. p: putamen. q: claustrum. r: noyau acubens

s: noyau basal de Meynert et substance innominée t: noyau amygdalien

**Figure II-10:** Morphologie interne du cerveau, coupe verticale

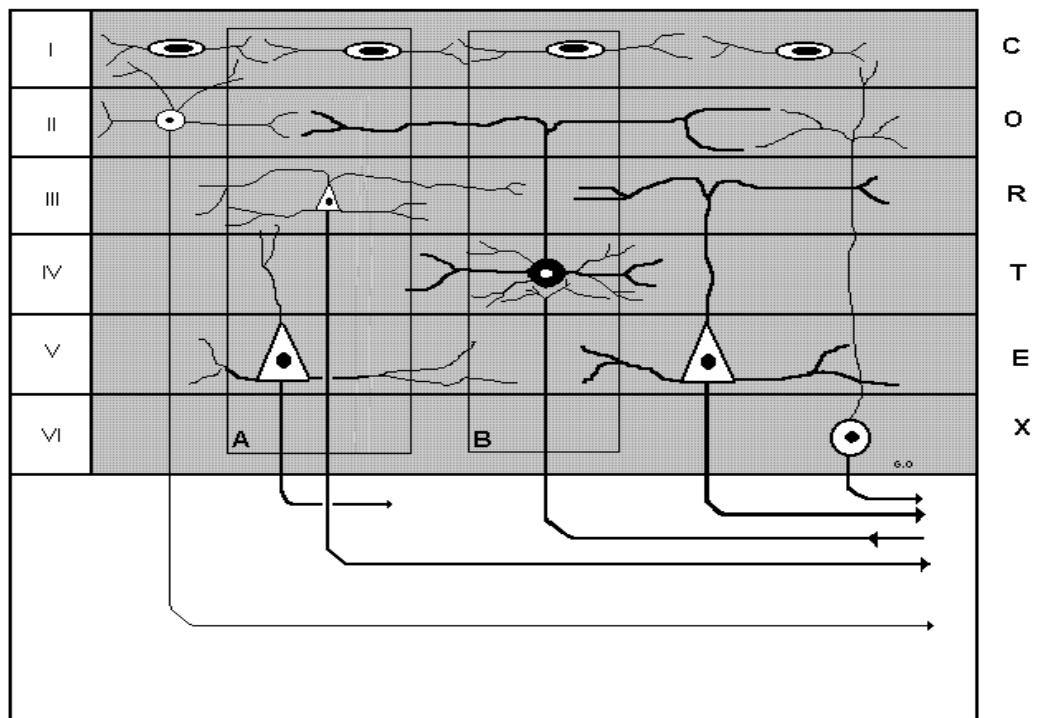
Les centres nerveux cérébraux sont hiérarchisés. Ainsi, les centres sous-corticaux sont sous la dépendance du cortex. Cependant, les centres sous-corticaux sont capables d'autonomie relative lorsqu'ils assurent des fonctions automatiques. Ainsi, sur le plan fonctionnel, on retrouve les trois niveaux du système nerveux central (archencéphale : cerveau instinctif et réflexe, palé encéphale : cerveau impulsif et automatique, né encéphale : cerveau conscient puis rationnel, chez l'homme).



**Figure II-11:** Organisation fonctionnelle générale du cerveau. Coupe latérale (à droite) et coupe verticale (à gauche).

Le néo-cortex est représenté par l'écorce grise, épaisse d'environ 4mm, elle recouvre toute la surface extérieure des hémisphères et s'enfonce entre les circonvolutions en suivant les lèvres des sillons. Elle est formée de cellules nerveuses disposées en 6 couches. Certaines sont des cellules d'association, d'autres des cellules réceptrices des sensibilités et des activités sensorielles, d'autres enfin, les plus grandes, sont des cellules motrices. Ces dernières sont appelées cellules pyramidales en raison de leur forme. En plus de cette disposition laminaire, les connexions neuronales dans le cortex sont disposées en colonnes verticales, contenant des neurones différents, mais qui concernent les mêmes territoires périphériques. Cette disposition apporte des capacités fonctionnelles complémentaires au niveau des aires motrices, sensibles et sensorielles.

La disposition en colonnes a surtout été étudiée dans les aires visuelles, mais il est vraisemblable qu'elle existe dans tous les territoires corticaux. Les colonnes sont des modules de traitement interposés entre l'entrée et la sortie du signal d'information [OUT01].



I : cellules d'association superficielles. II : cellules d'association intra-hémisphériques.  
 III : petites cellules pyramidales. IV : Cellules de projection sensibles et sensorielles.  
 V : grandes cellules pyramidales de Betz (origine du faisceau pyramidal).  
 VI : cellules d'association inter- hémisphériques (fibres calleuses).  
 A et B: Structure fonctionnelle en colonnes

**Figure II-11:** Architecture schématique du cortex.

Les études précurseuses ont associé les différentes zones du cerveau (aires) avec les fonctions spécialisées comme la vision l'audition et la motricité. Toutes les figures de cette section ont été rapportées de [OUT01].

Il existe plusieurs méthodes pour l'exploration physiologique du cerveau, la plus ancienne et la plus importante est l'EEG qui va être le sujet de la section suivante.

## II.6.2 Le signal EEG

L'électro-encéphalogramme (EEG) a été introduit en 1924 par le physiologiste allemand *Hans Berger* et amélioré ensuite par le Britannique *Edgar Douglas Adrian*. C'est un signal généré par des électrodes placées sur le cuir chevelu et qui représente une mesure de l'activité électrique du cerveau, et en particulier du cortex cérébral.

C'est la résultante de la somme de potentiel d'action postsynaptique synchrone issu d'un grand nombre de neurones (de l'ordre de  $10^{11}$  avec 1000 - 100000 synapses pour chaque neurone ). On parle aussi d'électroencéphalogramme sous-dural, intracrânien (iEEG) ou stéréotaxique (sEEG) pour désigner des mesures effectuées à partir d'électrodes implantées sous la surface du crâne, directement au niveau du cortex cérébral [ARB01].

L'amplitude du signal EEG extra-crânien est de l'environ de 100  $\mu$ V, celui de l'EEG intracrânien est de l'environ de 1-2mV. Le spectre des deux varie de 1Hz à environ 50Hz.

Des alternatives au signal EEG normal (ou spontané) ont été introduites par les neuroscientifiques. Il s'agit de l'EP (Evoked potentials) ou « potentiels évoqués » qui sont les composants de l'EEG qui surgit suite à un stimulus (visuel, auditif... etc.). Il s'agit également du SNB (Single-neuron behavior) ou « Comportement de neurone simple » qui peut être étudié en utilisant des microélectrodes dans le but d'améliorer les modèles neuromathématiques existants [MAL01].

L'étendue des applications du signal EEG couvre une grande partie de l'exploration fonctionnelle du cerveau (médecine clinique, psychophysiologie, neurophysiologie, électrophysiologie générale... etc.). Les méthodes de génération et exploitation de l'EEG ont connu une large évolution dans le 21e siècle par rapport à l'époque de *Hans Berger* et on distingue actuellement « l'EEG classique » de « l'EEG moderne ».

Avec cette révolution, l'EEG confirme sa place dans la recherche malgré l'existence d'autres méthodes d'exploration beaucoup plus sophistiquées telles que l'fMRI (functional magnetic resonance imaging) et le PET (positron emission tomography) [SAR01].

Il existe deux conjectures sur la génération du signal EEG. La première estime que l'EEG est généré par un système très complexe et doit être étudiée par l'extraction de caractéristiques statistiques. Alors que la deuxième et la plus récente conjecture estime que l'EEG est généré par un système non linéaire relativement simple.

Cette dernière idée est née sous l'influence de l'émergence du chaos et aussi par conséquent au progrès atteints par la neuroscience dans la modélisation et la compréhension des neurones et réseaux de neurones.

Ainsi, on peut considérer le cerveau comme un générateur bioélectrique de densité de courant  $\bar{J}^i$  volumique qui parcourt un conducteur fini non homogène. C'est un courant non conservateur assimilé à un moment de dipôle électrique qui est considéré nul en dehors de la région de cellules actives.

Alors que pour la plupart des tissus excitables, la base de la densité de courant  $\bar{J}^i$  est la propagation du potentiel d'action, la base de l'EEG à elle, semble être l'action d'un transmetteur chimique sur les neurones corticaux post- synaptiques.

Cette action cause, soit une dé-polarisation locale (Potentiel Post-synaptique Excitateur), soit une hyperpolarisation (Potentiel Post-synaptique Inhibiteur). Dans les deux cas, le résultat est une discontinuité spatialement distribuée dans la fonction  $(\sigma\Phi)$  qui représente une source à double couche dans les membranes de toutes les cellules.

Pour des points du champ distants, les potentiels doubles couches peuvent être additionnés de façon vectorielle conduisant vers la présentation de chaque cellule active comme un net dipôle électrique.

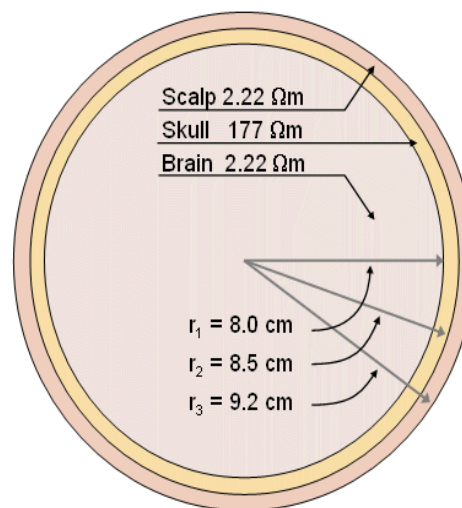
Comme le tissu neural est composé d'un très grand nombre de petites cellules compactées, l'hypothèse de densité de courant volumique continue est justifiable

L'association de la densité de courant et l'activation neuronale produit un champ électrique et conséquemment un potentiel  $\Phi$  décrit par l'équation II.4 (Geselowitz, 1967).

$$4 \pi \sigma \Phi(r) = \int_v \bar{J}^i \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dv + \sum_j \int_{S_j} (\sigma'_j - \sigma_j) \Phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\bar{S}_j \quad (\text{eq.II.4})$$

Dans cette équation le volume conducteur non homogène est divisé en un nombre fini de régions homogènes, chacune étant délimitée par une surface  $S_j$ . Où  $r$  est la distance entre un point arbitraire du champ et l'élément de volume ou de surface dans l'intégration,  $\sigma'_j$  et  $\sigma_j$  sont les conductivités électriques de part et d'autre de la surface  $S_j$ .

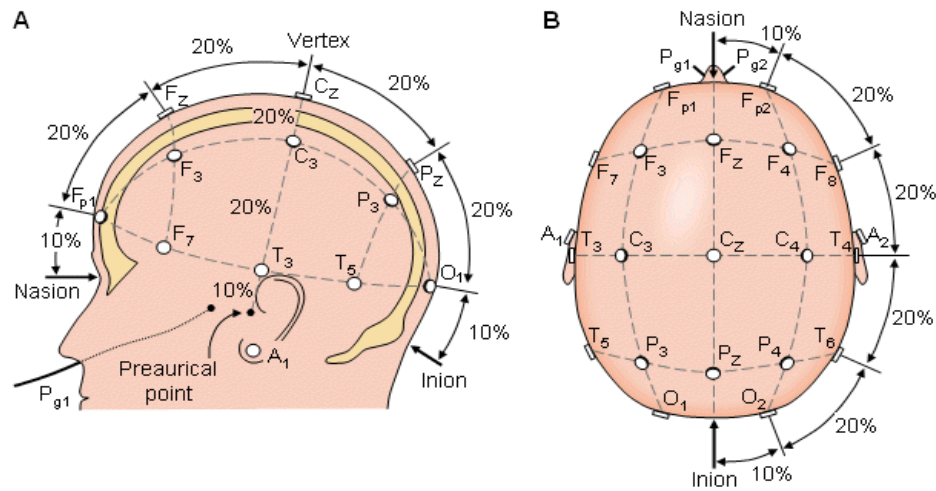
*Rush et Driscoll* (1969) ont proposé un modèle concentrique sphérique pour représenter la conductivité de la tête.



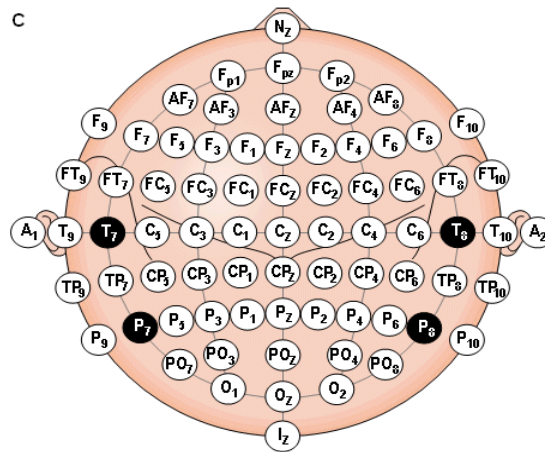
**Figure II-11:** Modèle de Rush et Driscoll de la conductivité de la tête.

L'équation II.4 est utilisée généralement dans l'évaluation quantitative de l'EEG avec les méthodes statistiques, alors que l'évaluation clinique est principalement empirique.

Dans l'acquisition du signal EEG, le standard international 10-20 est généralement utilisé pour définir l'emplacement des électrodes. D'autres emplacements additionnels sont standardisés par l'American Electroencephalographic Society. La figure suivante montre les différents emplacements.



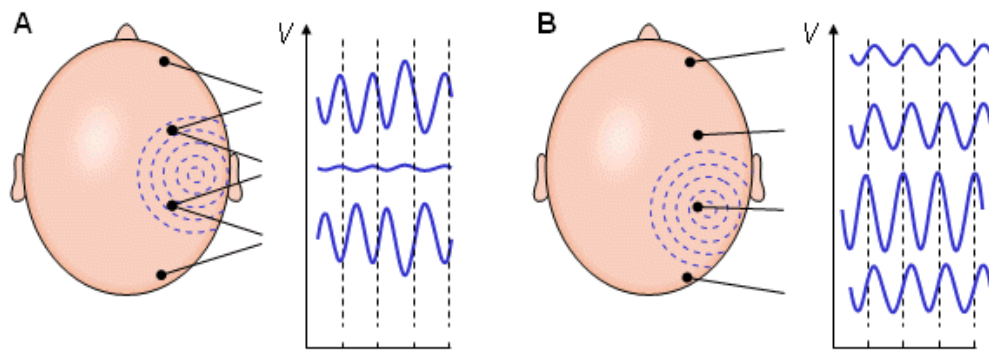
**Figure II-12:** Le système international 10-20 vu à gauche (A) et de haut (B) A=ear lobe, C=central, Pg=nasopharyngeal, P=parietal, F=frontal, Fp=frontal polar, O=occipital.



**Figure II-13:** Emplacement et nomenclature des électrodes additionnelles (en noire) standardisées par l' American Electroencephalographic Society

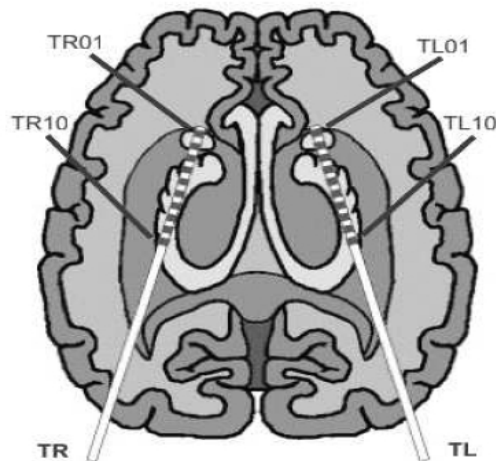
Le signal EEG peut être mesuré par des électrodes bipolaires ou unipolaires. Dans l'EEG bipolaire, la différence de potentiel entre deux électrodes est mesurée. Dans l'EEG unipolaire, la différence du potentiel mesurée est celle entre chaque électrode et une électrode neutre ou la moyenne de toutes les électrodes.





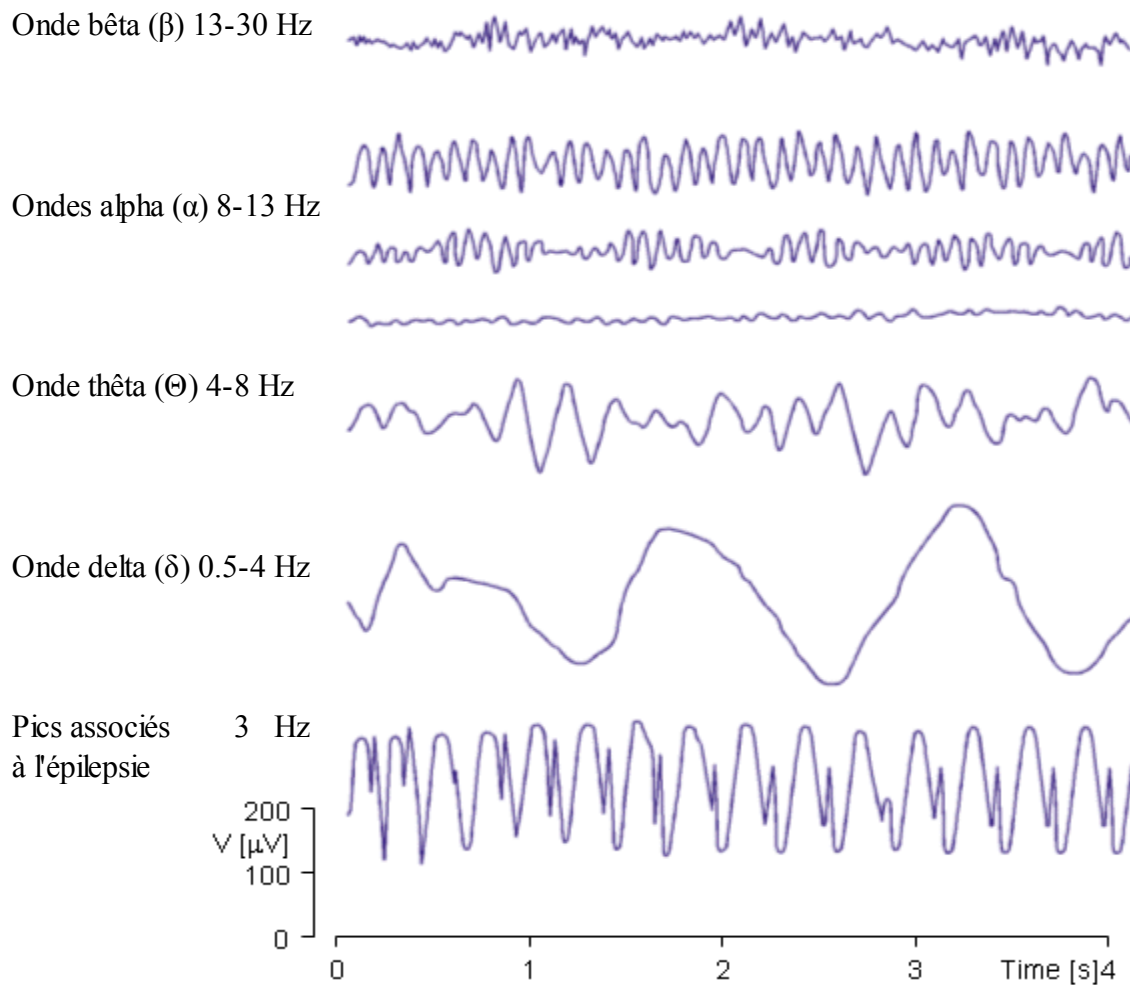
**Figure II-14:** (A) EEG bipolaire, (B) EEG unipolaire.

Dans le cas d'un EEG intracrânien, on trouve d'autres systèmes d'acquisition utilisés dans la littérature. La figure suivante montre un exemple de configuration d'électrodes intracortical.



**Figure II-15:** Une vue schématique d'électrodes implantées en profondeur dans la partie gauche du thalamus (TL) et la partie droite (TR). Chaque électrode est équipée de 10 contacts à nickel chrome séparés par un isolant, réalisant ainsi une configuration à 20 électrodes.

Les premières études du signal EEG ont distingué plusieurs formes récurrentes appelées ondes alpha ( $\alpha$ ), bêta ( $\beta$ ), delta ( $\delta$ ) et thêta ( $\Theta$ ). Ces études ont aussi observé des pics associés à l'épilepsie. La figure suivante montre quelques relevés EEG démonstratifs, où les principales formes d'onde EEG sont présentées.



**Figure II-16:** Quelques exemples d'ondes EEG

Par la suite, nous allons nous concentrer sur l'épilepsie avec ses différents aspects et les méthodes utilisées dans son exploration.

### II.6.3 L'épilepsie

L'épilepsie est définie comme étant

*« un ensemble de symptômes caractérisés par des crises répétitives qui sont l'expression clinique d'une décharge électrique anormale, soudaine, excessive et transitoire dans le système nerveux central. L'épilepsie peut être symptomatique d'une lésion acquise, aiguë ou chronique, ou d'une perturbation idiopathique avec ou sans prédisposition familiale. Il existe autant d'expressions cliniques que de fonctions cérébrales, mais les plus fréquentes sont la perte de connaissance (absence) et la convulsion (grand mal). »* [BER01]

Elle peut se manifester sous plusieurs formes:

- La crise partielle ( focale) est liée à une activité anormale d'une zone localisée du cerveau. Elle peut être secondaire à une lésion cérébrale localisée, on parle alors d'épilepsie lésionnelle.
- La crise généralisée correspond à une extension à l'ensemble du cortex cérébral de l'activité anormale; elle peut survenir d'emblée ou être secondaire à une crise partielle.
- Les encéphalopathies épileptiques qui touchent le nourrisson atteint de lésions cérébrales et qui sont souvent plus diffuses. Elles se manifestent par des crises généralisées symptomatiques.

Une estimation récente du nombre d'individus atteints d'épilepsie dépasse les 40 millions de cas sur l'échelle mondiale, dont 800,000 cas sur l'échelle maghrébine et 300,000 cas sur l'échelle nationale<sup>1</sup>.

Dans la moitié des cas une cause n'a pu être trouvée, dans l'autre moitié la cause varie entre blessures à la tête, tumeurs cérébrales, empoisonnement par le plomb, les problèmes dans le développement du cerveau avant la naissance et certaines maladies génétiques et infectieuses. 70 à 80 % des cas sont traités par des produits pharmaceutiques antiépileptiques, mais avec beaucoup d'effets secondaires et une dépendance chronique financièrement lourde.

Dans le reste des cas, l'approche chirurgicale peut être envisagée pour seulement 8% du nombre global, où la région du cerveau à l'origine de l'épilepsie est sectionnée avec un taux de succès de 60%. Ainsi, le coût associé au traitement est considérable et la recherche de nouvelles solutions et une meilleure compréhension sont très encouragées.

---

1 Selon la Société algérienne de neurologie et neurophysiologie clinique (SANNC)

Les crises épileptiques peuvent avoir lieu spontanément, comme ils peuvent être induits par divers moyens (stimulation visuelle une substance pharmaceutique). Il a été démontré que le développement de l'état épileptique peut être considéré comme des changements dans les réseaux de neurones du cerveau qui provoquent un changement dans le potentiel électrique. Ce changement peut ainsi être capturé par l'EEG sous forme de lignes agitées. Pour cette raison l'EEG a été l'instrument principal utilisé par les neurologistes pour étudier le processus épileptique ainsi que d'autres désordres neurologiques.

Les deux décennies passées ont été marquées par une explosion de l'intérêt accordé à l'application des méthodes quantitatives dans la recherche sur la prédiction de crises épileptiques. Plusieurs études ont suggéré que ces attaques sont déterministes et non pas aléatoires, et qu'il est possible de prévoir l'occurrence d'une crise en analysant l'activité électrique du cerveau traduite par l'EEG.

Ces études poussent aussi à croire que les changements dans la dynamique cachée du cerveau, qui durent de quelques minutes à quelques heures et qui précèdent la crise sont détectables dans l'EEG par la convergence des résultats de l'application des méthodes de mesure de chaos aux électrodes placées sur le néocortex et l'hippocampe.

En effet l'étude des propriétés dynamiques spatiotemporelles de l'EEG montre des patrons qui correspondent à un état clinique spécifique et qui peuvent être considérés comme des précurseurs de la crise épileptique [CHA02].

*Babloyanz et Destexhe* (1986) ont été les premiers à appliquer les méthodes de la théorie de chaos à l'exploration de l'épilepsie généralisée. Ils ont analysé l'EEG d'une crise d'absence enregistrée à deux emplacements différents du cerveau en utilisant la dimension de corrélation  $D_2$  (voir section III.23). Ils ont trouvé du chaos dans les signaux avec une valeur basse de  $D_2$ , ce qu'implique une faible complexité.

Une autre étude faite par *Frank et al.* (1990) a trouvé un comportement chaotique avec une valeur  $D_2$  élevée, mais dans ce cas les crises étaient généralisées avec des événements d'absence et de « *grand mal* ».

D'autres enregistrements EEG intracrâniens bien contrôlés ont été effectués chez des rats souffrant d'épilepsie focale (*Pijn et al.* 1991), où les méthodes du chaos ont été utilisés dans l'analyse afin de tester leurs habilité à détecter le focal (centre) épileptogénique et la propagation de l'activité épileptique. Dans cette étude une diminution de la dimension de corrélation D2 a été observée à l'établissement de la crise.

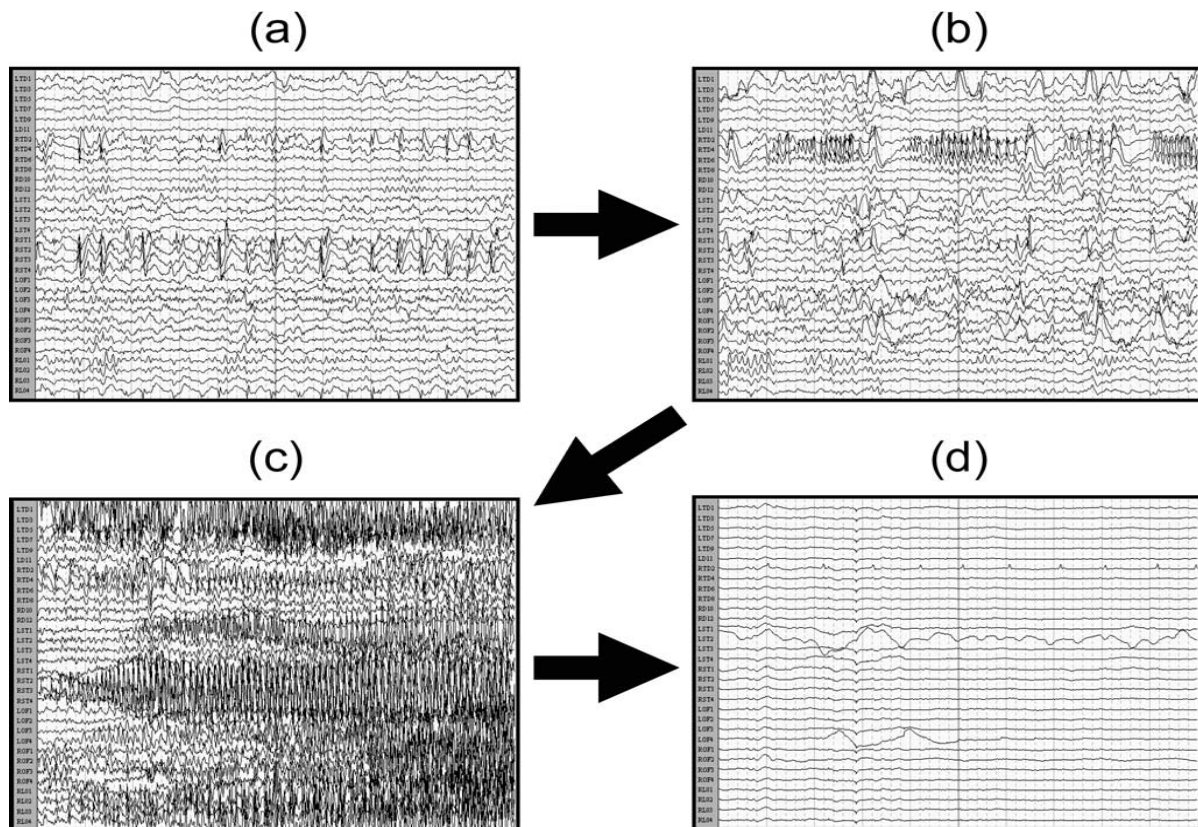
Par la suite, une basse valeur de D2 a été également trouvée durant l'épilepsie (*Lehnerty et Elger* 1995), où l'analyse chaotique a été appliquée aux enregistrements de l'EEG intracrânien chez un groupe de patients souffrant d'épilepsie unilatérale du lobe temporal.

Un certain temps après, *Pijn et al.* (1997) ont accompli une analyse approfondie de l'EEG chez les cas d'épilepsie du lobe temporal durant et entre les crises. Malgré le fait qu'ils n'ont pas pu fixer une valeur de D2 pour les signaux de l'activité épileptique, ils ont trouvé des preuves significatives de l'existence d'un degré considérable de déterminisme dans le système à l'origine de ces signaux. Par contre, ils ont trouvé que les signaux provenant des régions en dehors de l'activité épileptique étaient presque non distinguables de leurs versions randomisées (surrogates). Ils ont ensuite conclu que dans le cas étudié, les méthodes d'analyse chaotique donnent de bons résultats dans la localisation de la région épileptique et le suivi de la propagation de la crise à travers le cerveau.

Dans une autre étude (*Carla Silva et al.* 1999), l'analyse de l'EEG à 19 canaux prélevés chez des patients souffrant de crise d'absence a été effectuée, dans le but de trouver des variations spatiales dans la dynamique du cerveau relatif aux crises épileptiques. Les résultats obtenus ont montré que l'analyse chaotique a rapporté de nouveaux éléments sur les dynamiques associées aux crises d'absences.

En effet chez deux des patients on a pu distinguer des régions de comportements différents; une partie du cortex cérébral semblait exhiber du chaos alors que l'autre partie semblait exhiber du bruit. La dynamique des régions chaotiques est caractérisée par une dimension D2 variant de 1.7 à 1.9 et une dimension de reconstitution de l'espace de phase (voir section III.2.1) estimée entre 4 et 5, ce qui implique une faible complexité et un nombre réduit de variables gouvernant le système [SIL01].

Dans les études récentes, on a constaté que le processus épileptique se déroule en quatre étapes passant de l'état normal à la précrise puis à l'établissement de la crise et finalement à l'état postcrise. La figure II-17 montre des relevés de l'EEG intracrânien durant ces quatre étapes.



**Figure II-17:** Enregistrements de l'EEG sur 20 canaux durant: (a)activité normale (b) activités précrise ,(c) crise épileptique, (d) activité postcrise.

Malgré l'avancement considérable atteint dans ce domaine, la recherche dans la prédiction de la crise épileptique est loin d'être achevée. Car la démonstration de la détectabilité des signes de transition vers la crise reste incomplète, et nécessite la vérification de la spécificité et la persistance de ces transitions dans l'épilepsie.

Aussi, les mécanismes cachés derrière l'épilepsie restent incertains, beaucoup de zones d'ombre restent à éclaircir. Ainsi, la question cruciale devient, est ce que'on peut démontrer la différence entre l'EEG du cerveau dans l'état normal et l'EEG dans la précrise ou pas.

Pour cela, les résultats empiriques ne suffisent pas et doivent être supportés et validés par un modèle plus complet du cerveau. Si cette dernière question est satisfaite, la question suivante serait si les différents états du cerveau sont classables ou pas [CHA02].

Ainsi, on peut classer les axes de recherches dans le domaine en plusieurs voies:

- L'exploration des caractéristiques de l'EEG épileptique.
- L'exploration de la prédictibilité des crises épileptiques par l'EEG.
- L'exploration des méthodes de classification de l'EEG.
- L'exploration des méthodes de localisation du focal épileptique par l'analyse spatiotemporelle de l'EEG.
- L'exploration de méthodes de contrôle de l'épilepsie, avec l'emploi de l'EEG dans la chaîne de contre réaction.

Le dernier axe n'a pas encore été traité dans le manuscrit et va être présenté dans la section suivante. Dans cette section, quelques résultats d'un échantillon des études récentes dans le domaine (2001-2009) sont présentés.

#### II.6.4 Résultats de quelques recherches récentes.

Dans l'étude faite par *M. W. SLUTZKY et al.* (2001 [SLU01]), une analyse de la décharge spontanée in vitro dans les réseaux de neurones de l'hippocampe a été effectuée chez des rats. Ceci dans le but d'explorer la possibilité de manipuler les décharges épileptiformes par les méthodes de contrôle du chaos. À cette fin, des décharges épileptiformes ont été induites dans des coupes transversales de l'hippocampe de rat et qui étaient noyées dans un fluide cérébrospinal artificiel. Plusieurs méthodes de détection du chaos et du déterminisme ont été employées (analyse de périodes instables, exposant de Lyapunov, méthodes de données de substitution, voir section III.2).

Les résultats obtenus apportent des preuves, en même temps de l'aspect déterministe et de l'aspect aléatoire. En effet les résultats de la méthode d'analyse de périodes instables suggèrent l'existence d'un déterminisme local, alors que celles de la méthode de l'exposant de Lyapunov montrent un aspect global aléatoire.

Malgré la contradiction potentielle entre ces résultats, les auteurs ont conclu que les décharges épileptiformes in vitro contiennent des îlots de déterminisme dans une mer globalement stochastique. Ceci peut être expliqué par un niveau élevé de bruit qui va noyer l'aspect chaotique. Les auteurs ont suggéré que le processus de section a pu introduire un tel niveau de bruit, alors que dans un cerveau intact, les couches externes contribueraient à l'élimination du caractère aléatoire.

Les crises partielles complexes proviennent souvent de l'hippocampe, alors le fait d'avoir trouvé des traces de déterminisme dans cette région renforce l'idée d'appliquer le contrôle chaotique pour contrôler et même pour prévenir les décharges épileptiques.

Les auteurs ont rappelé dans leurs conclusions que leurs résultats apportent une preuve nécessaire, mais pas suffisante de l'existence du chaos et qu'il faut approfondir les recherches [SLU01].



Dans un travail remarquable qui est une des inspirations majeures de ce manuscrit, *H. Korn* et *P. Faure* [KOR01] ont publié une synthèse sur les recherches dans le domaine qu'ils l'ont intitulé « *Is there chaos in the brain?* ».

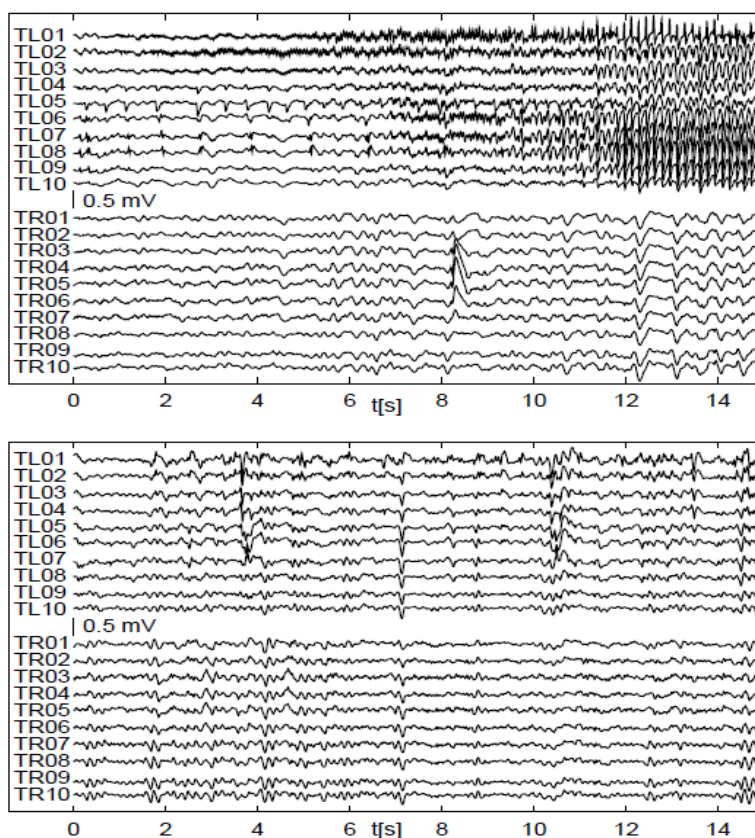
La publication comportait une description des principales méthodes employées et une discussion sur les résultats obtenus jusqu'à 2002. Les méthodes combinant résultats empiriques et modèles formels y étaient favorisées, et elles ont été présentées dans un ordre hiérarchique en commençant par le neurone jusqu'aux fonctions complexes du cerveau (mémoire, comportement) en passant par les différentes formations intermédiaires (réseau de neurones, cortex... etc.).

Dans leurs conclusions et dans une section appelée « *Reality of neurochaos* », les auteurs présentent le cerveau comme un système complexe, construit de plusieurs hiérarchies spatiales entrelacées. Ils ajoutent, que le cerveau fonctionne dans une large étendue d'échelles temporelles allant de quelques millisecondes (décharges et potentiel synaptique), quelques secondes (dynamique des réseaux de neurones) jusqu'à des heures ou plus (potentialisation tétanique à long terme).

Alors, le chaos qui est probablement lié à cette multiplicité d'échelles, a été rapporté à tous les niveaux du système nerveux central, d'où la proposition du terme « *neurochaos* ». Mais ensuite, les auteurs accentuent le fait que plus on monte dans la hiérarchie, plus les résultats des recherches dans la démonstration du chaos seront discutables.

Les auteurs suggèrent alors un point de vue plus élargi que l'identification mathématique stricte du chaos, et ils soulignent que l'utilisation des outils non linéaires a bien rapporté ses fruits sur toutes les échelles de la hiérarchie du cerveau [KOR01].

Dans l'étude [KAR01] faite par *Alexander Kraskov* (2004), la question de pouvoir identifier l'emplacement d'un focal épileptique à partir de l'EEG intracrânien enregistré entre les crises a été explorée. À cette fin, l'étude a utilisé des outils de mesure de la synchronisation chaotique pour tester l'hypothèse que, durant la période entre les crises, la synchronisation quantifiée moyenne dans l'hémisphère du focal est plus élevée que dans l'autre hémisphère du cerveau. L'EEG a été enregistré en utilisant la configuration intracrânienne déjà mentionnée (voir fig.II-5). Le degré élevé de pénétration dans le cerveau est justifiable par l'excellent niveau du rapport signal/bruit et résolution temporelle et spatiale obtenus. La figure suivante montre un exemple des tracés de deux groupes d'EEG, le premier (en haut) enregistré durant la crise et l'autre (en bas) durant la période entre crises.



**Figure II-18:** EEG d'un patient atteint d'épilepsie durant (en haut) la crise et (en bas) la période entre crises

Dans cet exemple particulier, la différence entre l'hémisphère du focal (gauche) et l'autre hémisphère est clair, mais en général la forme de l'EEG toute seule n'est pas pour autant fiable. L'idée que les groupes de neurones manifestent une hypersynchronisation durant la crise épileptique a été bien acceptée depuis un certain temps. Également, d'autres recherches référencées dans l'étude montrent que l'utilisation des méthodes bivariantes (analyse de deux canaux EEG simultanément) est meilleure que l'utilisation des méthodes monovariantes dans la localisation du focal.

Ainsi pour tester l'hypothèse principale, l'étude de l'EEG enregistré chez 29 patients a été faite. Ces patients ont enduré par la suite des opérations de sectionnement du focal épileptique, et ont démontré un contrôle de crise postopératoire réussi. Ainsi, l'hémisphère qui contenait le focal est supposé correctement identifié et des références comparatives fiables existent.

Par la suite, plusieurs méthodes de mesure de synchronisation bivariantes ont été appliquées aux EEG enregistrés et les résultats ont été confirmés par des méthodes de validation statistiques. Les résultats ont confirmé l'hypothèse principale. Malgré que la méthode de détection de l'hémisphère du focal développée dans l'étude ne peut pas concurrencer l'œil de l'expert de l'EEG qui examine l'EEG durant la crise, mais la méthode offre une possibilité d'accomplir la tâche qu'en utilisant les enregistrements de l'EEG en dehors de la crise. À la fin, l'auteur a quand même noté que de meilleurs résultats ont été obtenus en utilisant des méthodes monovariantes, mais en ajoutant le test des données de substitution (surrogates) [KAR01]

Dans l'étude rapportée dans [GOL01] (*Wanpracha A. C. et al. 2007*), une nouvelle méthode de classification de l'activité cérébrale en activité normale ou anormale (épileptique) par l'analyse quantitative de l'EEG a été explorée. L'analyse effectuée a intégré les méthodes d'exploration de données « *Data mining* » en plus des méthodes habituelles d'analyses chaotiques. Parmi ces dernières, l'étude a utilisé la méthode de K-voisins les plus proches (voir section III.2.6) qui a démontré des résultats expérimentaux encourageants (81.29% de sensibilité et 72.86% de spécificité).

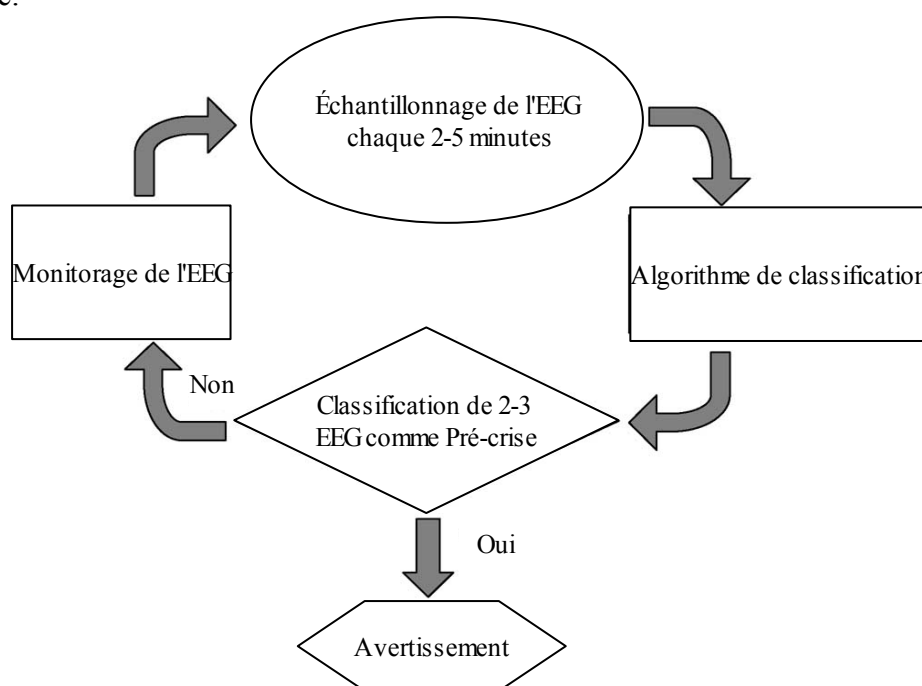
Le système d'évaluation des résultats était défini comme suite:

		<b>Prédiction</b>	
		Anormal	Normal
<b>Actuel</b>	Anormal	True Positive (TP)	False Negative (FN)
	Normal	False Positive (FP)	True Negative (TN)

$$\text{Sensibilité} = \frac{TP}{TP+FN}$$

$$\text{Spécificité} = \frac{TN}{TN+FP}$$

Les auteurs ont introduit cette méthode comme la base d'un futur « *Classificateur d'activité anormal du cerveau* » et un « *Système automatisé de prédiction de crise* » illustré par la figure suivante:



**Figure II-19:** Organigramme d'un Système automatisé de prédiction de crise

L'algorithme de détection principal est divisé en deux étages, le premier correspond à la mesure du chaos et le deuxième au calcul de mesure de similarités entre séries temporelles (distance euclidienne, DTW « *Dynamic time warping* » et t-statistique). Dans leurs conclusions, les auteurs espéraient pouvoir appliquer la méthode à l'EEG extra-crânien et ont survolé la prévision d'un appareil de contrôle de crise ou « *Brain Pacemaker* » [CHA02].

Dans une autre étude par *Frank Gollas* et *Ronald Tetzlaff* (2008) [GOL01], des modèles basés sur les réseaux cellulaires non linéaires (CNN) à réaction-diffusion ont été utilisés dans l'analyse de l'EEG intracrânien. La dépendance mutuelle entre électrodes voisines a été prise en compte dans l'analyse et les résultats ont été comparés à ceux des systèmes spatio-temporels linéaires.

L'étude a réussi l'identification du système générant l'EEG normal par un réseau de neurones CNN-RD. Les auteurs ajoutent que des travaux futurs vont explorer ce modèle et intégrer les signaux épileptiques, ce qui présente un potentiel de meilleure compréhension et prédictibilité [GOL01].

Finalement, nous présentons une étude très récente (*Kitzbichler MG et al. 2009*) qui affirme que le cerveau humain vit sur le bord du chaos, apportant ainsi des preuves expérimentales de l'hypothèse précédemment proposée. L'étude va plus loin en affirmant que les réseaux de neurones du cerveau s'auto organisent afin de garder la dynamique du cerveau dans un état critique et intermédiaire entre l'ordre et l'aléatoire. Les modèles numériques ayant ces caractéristiques ont démontré une capacité optimale de mémorisation et de traitement de l'information. Ainsi, de tels systèmes critiques sont capables de réagir très vite et efficacement aux changements mineurs de leurs entrées. Malgré l'intérêt de cette étude pour notre travail, les méthodes utilisées dedan sont principalement basées sur l'imagerie médicale et sortent du cadre de l'EEG d'où la description résumée, pour plus de détail voir [KIT01].

## Chapitre III

### Comment reconnaître le chaos ?

Ce chapitre traite les différentes techniques utilisées dans la pratique soit pour démontrer la nature chaotique d'un signal, soit pour éliminer cette possibilité. Par la suite, un mode d'emploi de ces méthodes est proposé sous forme d'une classification suivant le phénomène testé .

Pour détecter le chaos, les techniques étudiées exploitent une ou plusieurs des caractéristiques du chaos qui le distinguent des autres phénomènes. Un résumé intéressant de ces caractéristiques a été proposé dans [WIL02] parmi lesquelles on trouve:

- Le chaos est le résultat d'un processus déterministe.
- Il apparaît dans les systèmes non linéaires.
- La trajectoire ou la forme observée apparaît principalement désordonnée et aléatoire.
- Le chaos apparaît dans les systèmes bouclés; où les événements passés influencent sensiblement les événements présents.
- Pour certaines conditions ou paramètres fixes, le chaos est auto- générateur, dans le sens où des variations de variables externes (ex. un bruit) ne sont pas nécessaires.
- Le chaos n'est pas le résultat d'incertitude, telles les erreurs de mesure ou d'échantillonnage.
- Les variables du système sont bornées. Ces bornes sont illustrées dans l'espace de phase par l'attracteur borné.
- Le comportement d'un système chaotique est hypersensible aux changements des conditions initiales.
- Les prédictions de long terme sont inutiles; par contre, les prédictions de court terme peuvent être relativement précises.
- Le spectre de Fourier des signaux chaotiques est dispersé (principalement un bruit non corrélé) mais avec des pics (périodicités) qui se manifestent de temps à autre.
- La trajectoire dans l'espace de phase peut avoir des propriétés fractales.

Dans la suite du chapitre, nous allons présenter plusieurs techniques ou méthodes séparées en deux groupes. Le premier groupe est celui des méthodes que nous avons considéré comme classiques et le deuxième celui des méthodes innovatrices.

La séparation est principalement chronologique pour la plupart des méthodes, avec une exception pour les méthodes des « Surrogates » ou données de substitution, qui sont relativement récentes, mais devenues rapidement très populaires et sont ainsi présentées avec les méthodes classiques.

### III.1 Les méthodes classiques.

Les méthodes présentées dans cette section ne constituent pas une liste exhaustive, mais plutôt des exemples représentatifs des différentes régions du spectre total. La référence principale utilisée est référencée par [KAN02]. Une présentation alternative peut être trouvée dans [SMA01].

#### III.1.1 La reconstruction de l'espace de phase

Un système dynamique purement déterministe est généralement défini par un ensemble d'équations différentielles traduisant l'interaction des variables dynamiques du système. La définition I-2 impose que l'état futur du système soit défini complètement en choisissant un point de départ, et vis versa. Ce serait donc intéressant de représenter le comportement du système dans un espace construit par les variables dynamiques, dans cet espace on définit la trajectoire suivie par le système à partir d'un point de départ. Les théorèmes mathématiques des équations différentielles ordinaires nous assurent l'unicité de la trajectoire sous certaines conditions [HAK01]. L'espace ainsi construit est appelé espace d'état ou espace de phase.

Pour illustrer le principe, nous allons présenter quelques notations utilisées dans les systèmes dynamiques déterministes à dimension finie  $n$ .

A chaque instant, l'état d'un tel système peut être représenté par un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ . La dynamique du système peut ainsi être représentée soit dans un temps discret sous forme d'application (*Map*):

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{eq.III.1})$$

Soit dans un temps continu sous forme d'équations différentielles (*Flow*):

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{eq.III.2})$$



La définition de l'application  $F$  ou le champ de vecteur  $f$  est supposé être indépendant du temps (système autonome), le cas contraire n'est pas pris en compte dans ce travail (chaos spatiotemporel).

Alors dans le cas continu, une solution existe et est unique si  $f$  est Lipshitz continue. Une séquence de valeurs  $x_0, \dots, x_n$  qui résout l'équation III.2 est appelée « *trajectoire* » du système associée à la condition initiale  $x_0$ . Cette trajectoire est dite chaotique si elle satisfait les conditions établies dans la section I.2.

Alors en pratique la construction de l'espace de phase du système I.1 est accomplie par l'intégration numérique avec un pas temporelle finie  $\Delta t$ , ce qui va nous ramener à l'équation III.1. Par exemple, la méthode d'intégration d'Euler transforme l'équation III.2 en:

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta f(x(t)) \quad (\text{eq.III.3})$$

Ainsi, la trajectoire est représentée par une suite de vecteurs  $x(t + k \Delta t)$  ou simplement  $x_k$ . et l'espace de phase est construit en marquant les points dont les coordonnées dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  correspondent aux valeurs des vecteurs. (Voir Figure I.2). Une simple inspection visuelle peut nous renseigner sur la nature de la trajectoire. La série de vecteurs  $x_k$  peut être également utilisée pour calculer des propriétés topologiques de la trajectoire (exposant de Lyapunov, Dimension...) et en tirer des conclusions sur la nature du système.

Dans les conditions réelles, où un système est étudié empiriquement, les vecteurs  $x_k$  ne sont généralement pas disponibles.

À la place, nous disposons de mesures  $m_k$  sous forme d'une série temporelle en relation fonctionnelle avec l'un ou plus des variables d'état du système.

On arrive donc au cœur de la méthode traitée dans cette section. En effet la « *reconstruction de l'espace de phase* » se résume à la transformation de cette série temporelle en vecteurs  $s_k$  supposés fournir les mêmes connaissances à propos de la trajectoire que ceux fournis par  $x_k$ .

Il existe plusieurs méthodes pour générer les vecteurs  $s_k$  qui se basent principalement sur la création des variables à retard. Les  $s_k$  s'écrivent alors comme suit

$$s_k = (m_{k-(M-1).L}, m_{k-(M-2).L}, \dots, m_{k-L}, m_n) \quad (\text{eq.III.4})$$

Ce qui représente une reconstruction de l'espace de phase dans une dimension  $M$  avec un délai  $L$ .

La trajectoire reconstruite ainsi est équivalente à la trajectoire réelle sous certaines conditions. *Ding et al.* (1993) ont fournies la démonstration mathématique que l'utilisation d'une dimension  $M > 2.D_F$  (dimension de Minkowski de l'attracteur originale) garantit l'équivalence.

Mais il faut noter que cette démonstration suppose la disponibilité d'un très grand nombre de valeurs dans la série, aussi grand que nécessaire, ce qui n'est pas vrai dans la pratique. On se retrouve alors confronté au problème du choix de la dimension  $M$  et le délai  $L$ .

En plus, quand on veut reconstruire l'espace de phase, on ne dispose généralement pas de la dimension de Minkowski, on est donc obligé soit de faire des tests préliminaires, soit de répéter la reconstruction pour plusieurs valeurs et utiliser un critère de sélection.

La théorie nous garantie qu'à partir d'une dimension minimale  $M_{min}$  donnée, l'attracteur reconstruit est équivalent à l'original, et par conséquent les mesures topologiques seront identiques, d'où l'appellation « *mesures invariantes* ».

Ce fait est exploité pour rechercher la dimension optimale, en effet, on estime l'une de ces mesures (exposant de Lyapunov maximal, Dimension de l'attracteur, entropie) pour plusieurs dimensions, et la dimension à partir de laquelle les valeurs estimées commencent à se stabiliser est considérée comme la dimension optimale.

D'autres méthodes existent pour optimiser la dimension  $M$  et le délai  $L$  également. Ces méthodes se basent sur l'exploration des caractéristiques statistiques de la série temporelle (auto-corrélation, corrélation spatiotemporelle, courbes de récurrences...), avec une interprétation personnalisée dans chaque cas. D'où la nécessité, la plupart du temps, d'un expert du système étudié.

Dans la pratique, le choix le plus important est la valeur optimale du produit  $M \times L$ , qui représente l'intervalle temporel couvert par une variable à retard. Car une grande valeur de ce produit augmenterait l'intersection temporelle entre les vecteurs  $s_n$  éloignés, et risque de fausser les mesures invariantes.

On se trouve ainsi avec une limite supérieure de la dimension  $M$  à utiliser. Les mêmes méthodes d'optimisation de  $M$  et  $L$  peuvent être utilisées pour optimiser  $M \times L$ .

Malgré les méthodes d'exploration qui sont automatiquement appliquées à la suite de la reconstruction, l'opération en soi peut nous fournir d'importants renseignements. En effet une simple inspection visuelle de la trajectoire obtenue peut directement induire une conviction à propos de la nature de l'attracteur.

### III.1.2 Exposant de Lyapunov

Nous avons déjà introduit la notion de sensibilité à l'état initial dans la section I.2. Cette notion traduit une instabilité locale dans l'espace de phase qui peut être traduite par deux concepts.

Le premier concept est l'entropie de Kolmogorov-Sinai qui est lié à la non-prédictibilité du système et qui schématise une création continue de l'information. Le deuxième concept qui est traité dans cette section est la mesure géométrique de la séparation exponentielle dans le temps des trajectoires voisines.

Cette dernière mesure a été introduite dans la section I.2 sous le nom d'exposant de Lyapunov. On peut calculer pour le système I.1 autant d'exposants de Lyapunov que le nombre de dimensions de l'espace de phase, l'exposant le plus large parmi eux est appelé « *l'exposant maximal de Lyapunov* » EML.

Dans l'évolution dynamique locale du système, l'EML domine les autres exposants très rapidement, et caractérise à lui seule cette dynamique locale.

Si on prend deux points dans l'espace de phase  $x_{k1}$  et  $x_{k2}$  avec la distance entre les deux  $\|x_{k1} - x_{k2}\| = \delta_0 \ll 1$ . On note la distance entre les deux trajectoires, originaires de chacun des points après un temps  $\Delta k$  par  $\delta_{\Delta k} = \|s_{k1+\Delta k} - s_{k2+\Delta k}\|$ . Alors, l'exposant de Lyapunov maximal noté  $\lambda$  est défini comme suit:

$$\delta_{\Delta k} \simeq \delta_0 e^{\lambda \Delta k}, \quad \delta_{\Delta k} \ll 1, \quad \Delta k \gg 1. \quad (\text{eq.III.5})$$

Si  $\lambda$  est positive, alors on aura une divergence exponentielle des trajectoires voisines et par conséquent du chaos.

Cette divergence est stoppée par une stabilité globale de l'attracteur chaotique, ainsi la différence entre deux trajectoires ne peut pas dépasser la taille de l'attracteur dans l'espace de phase.

Ce qui veut dire que la divergence n'est valable que durant un certain temps  $\Delta k$  pour lequel  $\delta_{\Delta k}$  reste petit. Ainsi, pour une définition mathématique exacte qui garantisse l'existence de  $\lambda$  pour les systèmes chaotiques, il faut combiner la limite  $\delta_0 \rightarrow 0$  avec la limite  $\Delta k \rightarrow \infty$  dans la définition.

Le tableau suivant illustre les différentes possibilités pour les valeurs de  $\lambda$  :

Type de l'attracteur	Exposant de Lyapunov
Point fixe stable	$\lambda < 0$
Cycle limite stable	$\lambda = 0$
Chaos	$0 < \lambda < \infty$
Bruit	$\lambda \approx \infty$

**Table III-1** Les différents cas de l'exposant de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov admet une unité de dimension  $[T^{-1}]$ . Par conséquent, après le calcul de l'exposant dans un système discret il faut multiplier le résultat par le pas d'intégration  $\Delta t$  pour avoir la valeur exacte. Une caractéristique importante de l'exposant de Lyapunov est l'invariabilité. En effet la façon dont a été faite l'observation du système n'influe pas sur la valeur de l'exposant, et on obtient ainsi une grandeur de référence ou marque du système. Ce qui a poussé les chercheurs du domaine à utiliser l'exposant maximal de Lyapunov comme mesure du degré du chaos présent dans un système (signal).

La mesure de l'exposant maximal de Lyapunov E.M.L a été la méthode de détection du chaos par excellence durant les deux premières décennies suivant l'émergence de la théorie.

Le premier algorithme pour l'estimation de l'E.M.L a été proposé par *Wolf et al.* en 1985 et est basée principalement sur une reconstruction de l'espace de phase par les variables à retard. Mais la méthode a démontré une sensibilité et un grand potentiel de fausse interprétation. Ceci étant dû au fait que l'algorithme suppose a priori l'existence d'une valeur finie de l'E.M.L et ne prend pas en compte la divergence de la valeur dans les processus stochastiques. D'autres types d'algorithmes ont été proposés par la suite, pour une idée plus détaillée voir [KAN02].

L'algorithme que nous avons utilisé dans notre travail est celui de *Kantz* (1994). Cet algorithme explore directement la divergence des trajectoires voisines offrant la possibilité de décider de la faisabilité de l'estimation de l'exposant avant de le calculer. En effet la divergence exponentielle peut être entachée de fortes fluctuations de diverses origines. Par exemple, la mesure de l'exposant intègre une projection de la trajectoire dans l'espace de phase, et suivant l'angle adopté, cette projection peut donner l'illusion d'une convergence alors que la trajectoire subit réellement une divergence. Ainsi, l'E.M.L. estimé est une moyenne des différentes divergences et convergences locales.

Après la reconstruction de l'espace de phase, les étapes de l'algorithme se résument à choisir un point  $s_{k_0}$  dans les vecteurs résultants, de chercher le voisinage  $U(s_{k_0})$ , c.-à-d. tous les voisins  $s_k$  dans une distance  $\epsilon$  de  $s_0$  puis de calculer :

$$S(\Delta k) = \frac{1}{N} \sum_{k_0=1}^N \ln \left( \frac{1}{|U(s_{k_0})|} \sum_{s_k \in U(s_{k_0})} |s_{k_0+\Delta k} - s_{k+\Delta k}| \right) \quad (\text{eq.III.6})$$

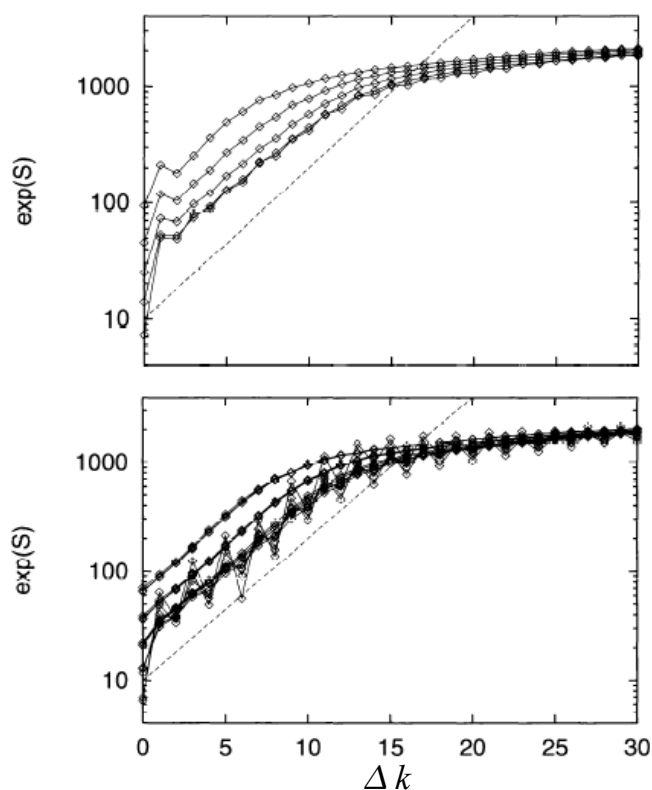
$S(\Delta k)$  est une mesure du taux effectif de l'expansion durant un temps  $\Delta k$  répété pour plusieurs  $k_0$ .

La distance  $\epsilon$  doit être choisie aussi petite que possible, mais assez grande pour que chaque point sur la trajectoire puisse avoir un voisinage non vide, sinon des parties de la trajectoire ne seront pas représentées dans la somme, donnant ainsi de faux résultats.

Dans l'implémentation numérique, la courbe  $S(\Delta k)$  est calculée pour plusieurs valeurs de  $M$  et  $\epsilon$ , et si les courbes démontrent un intervalle persistant avec une pente linéaire, alors cette pente peut être considéré comme une estimation de l'E.M.L. La figure III-1 illustre cette idée.

Le dessin en haut de la figure III-1 illustre les résultats obtenus pour une dimension  $M=2$ , où on peut voir que la reconstruction n'est pas adaptée. Le dessin en bas illustre les résultats pour  $M=3,4$  et 5 où la partie linéaire des courbes est persistante et peut être décrit par un exponentiel  $\propto e^{0.3\Delta k}$ , l'E.M.L est estimé ainsi à  $0.3\pm 0.01$ .

D'autres exemples d'implémentation sont donnés dans la section IV.2.1.



**Figure III-1:** Estimation de l'exposant maximal de Lyapunov pour des mesures effectuées dans un Laser RMN (Résonance Magnétique Nucléaire).

### III.1.3 Dimensions topologiques

Alors que l'exposant de Lyapunov traduit le comportement dynamique du chaos en relation avec le temps, les dimensions topologiques de l'attracteur reflètent la spécificité géométrique stationnaire de l'ensemble des trajectoires chaotiques dans l'espace de phase.

Les attracteurs des systèmes chaotiques dissipatifs, où les trajectoires éloignées rétrécissent vers l'intérieur d'un métacube, ont généralement une géométrie très complexe, d'où l'appellation d'attracteurs « étranges ».

Cette étrangeté est traduite par une autoressemblance de l'attracteur. En effet, la forme générale de l'attracteur est identique à la forme d'un sous-ensemble de l'attracteur, et identique aussi à la forme d'un sous-ensemble du sous-ensemble, et ainsi de suite. De telles formes géométriques sont appelées fractals.

Cette autosimilarité peut être quantifiée, sous forme d'une dimension, par diverses méthodes. Ces derniers sont des extensions des méthodes de calcul de dimension d'objet non fractal. Ainsi, la dimension calculée d'un point serait égale à zéro, d'une ligne serait égale à 1, d'une surface égale à 2, d'un volume égal à 3... etc.

Le calcul de la dimension de corrélation est l'une de ces méthodes, qui a été introduite par *Grassberger* et *Procaccia* en 1983. À fin de calculer cette dimension, il faut passer par un calcul préliminaire qui est la « somme de corrélation ».

Pour un ensemble de points  $x_k$  dans un espace vectoriel donné, la somme de corrélation est définie par la fraction de tous les paires de points qui se trouvent à une distance  $r$ , l'un de l'autre, plus petite qu'une distance donnée  $\epsilon$  pour une certaine norme  $\|\cdot\|$ . La formule originale est comme suit:

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (\text{eq.III.7})$$

où  $\Theta$  est la fonction échelon de Heaviside.

Pour de petites valeurs de  $\epsilon$  la fonction  $C$  suit généralement une loi de puissance  $C(\epsilon) \propto \epsilon^D$ , on peut ainsi définir la dimension de corrélation  $D$  par :

$$d(N, \epsilon) = \frac{\partial \ln C(N, \epsilon)}{\partial \ln \epsilon} \quad \text{et} \quad D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} d(N, \epsilon) \quad (\text{eq.III.8})$$

Pour une série de données finie, le calcul doit être modifié, pour s'adapter à un nombre  $N$  et un choix des distances  $\epsilon$  limité. Cette modification doit conserver l'invariabilité de la dimension  $D$ , c.-à-d.; limiter au maximum l'influence du choix de la méthode de mesure ou la taille de la série sur les résultats.

Alors, le calcul de la dimension de corrélation pour une série temporelle finie commence par la reconstruction de l'espace de phase. Ensuite la somme de corrélation  $C(\epsilon)$  de l'équation III.7 est calculée pour plusieurs valeurs de  $\epsilon$  et  $M$  (la dimension). Finalement, une inspection visuelle des résultats nous permettra de décider si l'estimation de  $D$  est faisable ou non.

Une attention particulière doit être faite durant les deux dernières étapes pour éviter des résultats faux ou inutilisables. En effet, la forme de calcul de  $D$  via l'équation III.7 est très sensible à la corrélation temporelle, et au lieu de compter des paires proches dans l'espace par l'auto-similarité géométrique, on compte également ceux proches dans le temps.

Une solution simple à ce problème a été proposée par *Theiler* en 1986, où il faut tout simplement exclure les points qui sont proches à cause de la corrélation temporelle. Ainsi, la deuxième somme de la formule ne commence qu'après le déroulement d'un certain délai minimum  $t_{min} = k_{min} \cdot \Delta t$  et la somme de corrélation devient:

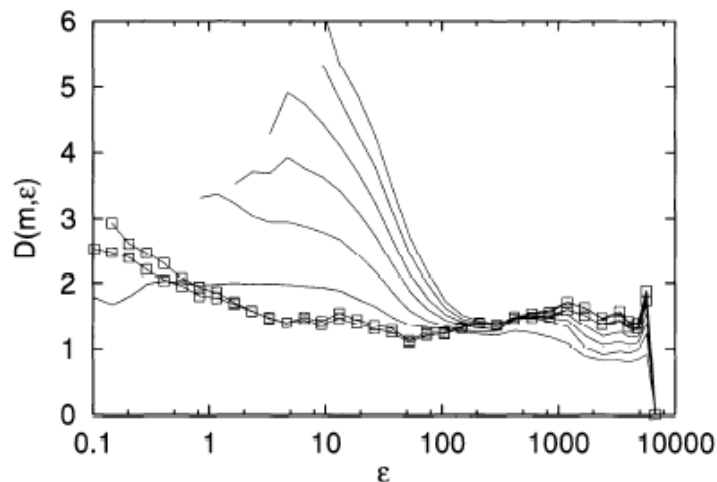
$$C(M, \epsilon) = \frac{2}{(N - k_{min})(N - k_{min} - 1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1+k_{min}}^N \Theta(\epsilon - \|s_i - s_j\|) \quad (\text{eq.III.9})$$

$C$  est maintenant fonction de la dimension  $M$  en plus de la distance  $\epsilon$ . Le délai minimum est généralement choisi égal au temps nécessaire pour que la fonction d'autocorrélation décroisse à  $1/e$  du maximum.

Un comportement de  $C(M, \epsilon)$ , similaire à une loi de puissance, peut être trouvé en inspectant la pente  $D(M, \epsilon)$  d'une courbe logarithmique de  $C(M, \epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ . Un exemple est donné dans la figure III-2, où les pentes locales de  $C(M, \epsilon)$  sont calculées pour les variations logarithmiques de  $\epsilon$ .



On distingue la région plate qui correspond à  $d(N, \epsilon) = \partial \ln C(N, \epsilon) / \partial \ln \epsilon$ . On remarque que la valeur de  $D$  dans la région plate ne change pas pour  $M > 2$ . Si la courbe ne présente pas une telle région consistante, alors l'estimation de  $D$  n'est pas possible.

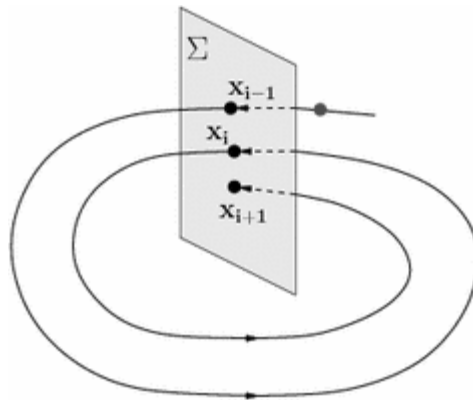


**Figure III-2:** Les pentes locales de l'intégrale de corrélation en fonction de  $\epsilon$  pour les données du Laser RMN. Les courbes sont calculées pour  $M=2$  à 7 de bas en haut. La valeur estimée de  $D=1.5 \pm 0.1$ .

#### III.1.4 Section de Poincaré

Dans l'espace de phase, la direction tangentielle à la trajectoire d'un système autonome peut changer si on change les paramètres du temps, et par conséquent ne traduit pas la géométrie de l'attracteur. Ainsi, la composante tangentielle des points  $x_k$  peut être négligée, réduisant ainsi la dimension de l'espace de phase par 1, et transformant la trajectoire continue en une trajectoire discrète.

Cette méthode s'appelle la section de Poincaré, et se résume à choisir une surface  $\Sigma$  dans l'espace de phase et de construire une application inversible  $P$  sur cette surface traduisant la relation entre les points d'intersections successives entre la trajectoire et la surface. La figure III - 3 illustre le principe.



**Figure III-3** Construction de la section de Poincaré.

Le temps discret résultant de l'intersection est variable et pas nécessairement proportionnel au temps d'intégration  $\Delta t$ . Le nombre de points d'intersection trouvé dépend sensiblement de la surface choisie. Dans l'implémentation de la méthode, trouver une surface adéquate passe forcément par la répétition et l'inspection des résultats.

Un choix populaire de la surface est la section à phase constante où la durée écoulée entre deux intersections est constante, et l'application  $P$  de Poincaré résultante est dite stroboscopique.

Une fois la section établie, la série de points résultants peut être explorée par toutes les méthodes déjà mentionnées. La plupart du temps une simple inspection visuelle de l'application  $P$  peut nous renseigner sur la nature déterministe ou chaotique du système original. Un exemple d'implémentation est donné dans la section IV.2.1

### III.1.5 Analyse de la prédictibilité

La prédictibilité d'un système reflète une grande partie de son comportement dynamique. Un système périodique peut être prédictible sans effort après l'observation d'une période, un système linéaire est prédictible par une simple opération d'extrapolation d'un nombre fini de points et un système aléatoire a une prédictibilité aléatoire caractérisée par des moments statistiques calculables.

Les systèmes chaotiques ont une prédictibilité spécifique qui dépend de l'intervalle temporel entre les points utilisés pour la prédiction et les points projetés dans le futur.

On peut quantifier la prédictibilité par l'inverse de l'erreur commise entre le point prédit et le point actuel:

$$e = \sqrt{\langle (\hat{s}_k - s_k)^2 \rangle} \quad (\text{eq.III.10})$$

où  $\langle .. \rangle$  est la moyenne de tous les essais de prédiction effectués. Pour un processus aléatoire non corrélé, cette erreur est minimisée en prenant  $\hat{s}_k = \langle s_k \rangle$ .

La prédictibilité est améliorée par le degré de corrélation existant dans les données et la taille de ces données. Les modèles autorégressifs AR et leurs variantes exploitent la corrélation linéaire des données pour formuler un système de prédiction. Ce dernier va générer, pour des données d'un système non linéaire stable, des erreurs de prédiction limitées, et qui diminuent avec l'augmentation de l'ordre du modèle AR. Par contre pour un système instable l'erreur diverge exponentiellement quel que soit le degré du modèle AR.

Pour un système chaotique les performances d'un estimateur AR sont spéciales. À cause de la sensibilité aux conditions initiales, l'erreur obtenue diverge, mais la divergence passe par deux phases successives. La première phase est une phase de divergence lente dans laquelle une augmentation de l'ordre du modèle AR améliore les performances. Dans la deuxième phase la divergence est exponentielle quel que soit l'ordre du modèle AR. La durée de la première phase s'appelle « *l'horizon de prédiction* » et beaucoup d'études actuelles concentrent sur les méthodes qui améliorent cet horizon.

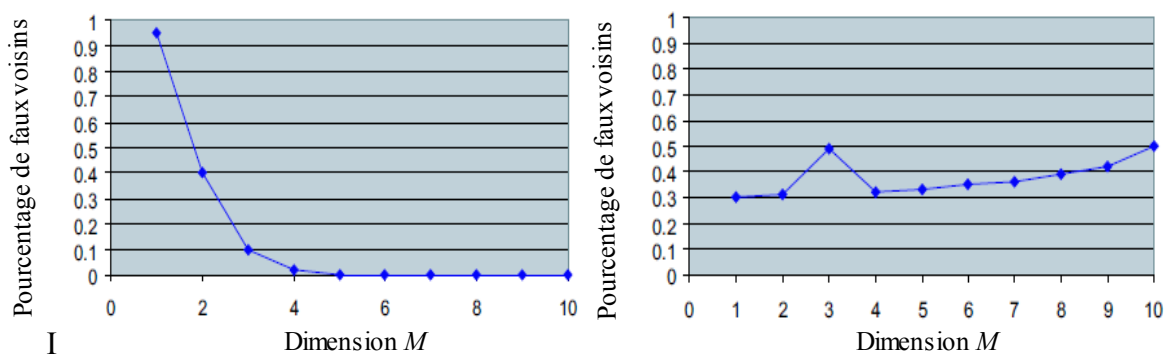
Dans beaucoup de systèmes chaotiques, les modèles de prédiction linéaires donnent un horizon de prédiction trop court, et la détection du chaos par l'exploitation de la variabilité de cet horizon donne des résultats faibles et discutables.

Ainsi, on préfère généralement utiliser des méthodes non linéaires, un exemple de ces méthodes sera illustré dans la section III.3.1 comme partie d'une autre méthode « DVV ». Pour une vision plus approfondie des applications de mesure de la prédictibilité voir [KOS01].

### III.1.6 Estimation des faux voisins

Ce concept a été introduit par *Kennel et al.* en 1992 et amélioré par *Hegger et Kantz* en 1999. L'idée principale est de rechercher les points voisins dans l'espace de phase reconstruit avec une dimension  $M_i$  et qui seront éliminés du voisinage dans l'espace reconstruit avec une dimension  $M > M_i$ . Cette élimination indique que leurs sélections comme voisins dans la dimension  $M_i$  étaient fausses, d'où le nom du concept.

Dans les systèmes chaotiques et à partir d'une dimension  $M_{min}$  le pourcentage de faux voisins décroît considérablement. La forme de cette décroissance a été utilisée dans certaines études [GID01] pour distinguer les séries stochastiques des séries chaotiques.



**Figure III-4:** La variation du pourcentage de faux voisins pour une série chaotique (à gauche) et une série stochastique (à droite).

### III.1.7 Test des données de substitution (*surrogates*).

Seuls les signaux irréguliers à origine déterministe non linéaire sont caractérisés par un attracteur à dimension finie, un exposant de Lyapunov positif et un horizon visible de prédictibilité non linéaire.

Ainsi, par le passé, beaucoup d'études ont utilisé les méthodes d'estimation de ces caractéristiques pour tester le déterminisme non linéaire, et à chaque fois que le calcul donne une réponse positive, elle est considérée comme une signature du chaos.

Ceci a conduit à de multiples fausses interprétations et controverses dans le domaine de détection du chaos. Le problème prenait naissance pas seulement des méthodes utilisées, mais, dans beaucoup de cas, de la nature mixte insuffisante des données testées.

Alors, l'idée de renforcer les méthodes par une base solide a été née. Cette base se résume à appliquer des tests de validité statistique aux résultats des méthodes utilisées, justifiant ainsi l'interprétation ou les conclusions tirées de ces résultats.

Généralement l'hypothèse fondamentale à tester est si les données proviennent réellement d'une source non linéaire ou pas. Alors procédant par absurdité, on pose l'hypothèse nulle que les résultats des mesures invariantes effectuées sont similaires à celles obtenues pour des signaux linéaires(ou stochastiques) équivalents au signal testé. Si l'hypothèse nulle est trouvée statistiquement fautive alors l'interprétation des résultats sera plus persistante et justifiable.

Pour tester l'hypothèse nulle, on doit créer les signaux équivalents pour lesquels on applique les différentes méthodes d'estimation de mesures invariantes. Ces données créées sont appelés « *surrogates* » ou données de substitution.

Ainsi, la méthode des données de substitution se résume à:

1. Choisir l'hypothèse nulle, par exemple, que les données proviennent d'un système linéaire stochastique gaussien.
2. Choisir la tolérance d'erreur acceptable  $\alpha$  pour le test statistique
3. Générer des séries de substitution à partir d'un modèle (estimé en utilisant la série originale), en concevant certaines caractéristiques de cette série (distribution spectrale, amplitude de la transformée de Fourier...)
4. Appliquer les méthodes de détection du chaos aux séries ainsi générées en plus de la série originale.
5. Effectuer un test statistique (ex  $X^2$ ) accompagné de la tolérance  $\alpha$  pour vérifier si le résultat obtenu pour la série originale appartient à la même distribution que les résultats obtenus pour les séries de substitution.

Un exemple de l'utilisation de cette méthode sera illustré dans la section III.3.1 comme une partie du test DVV.

### **III.2 Innovations dans la reconnaissance du chaos**

Dans cette section nous allons présenter deux méthodes relativement récentes qui ont apporté de nouveaux résultats dans la reconnaissance de chaos. Généralement, l'innovation introduite dans le domaine appartient à l'une des classes suivantes:

1. Innovation par mélange de plusieurs méthodes classiques.
2. Innovation par l'introduction d'une variation de l'une des méthodes classiques.
3. Innovation intégrale en introduisant une nouvelle méthode indépendante des méthodes classiques.

La plupart des innovations dans le domaine appartiennent à la deuxième classe. La première classe constitue aussi un axe favorisé par les chercheurs, mais pas sans une modification de l'une des méthodes mélangées, ce qui nous renvoie à la deuxième classe. La méthode DVV « Delay Vector Variance » est un exemple de la première classe et va être expliquée dans la suite.

La troisième classe est la plus rare et la plus intéressante en même temps, car elle peut impliquer la découverte d'un nouvel aspect du chaos, ou au moins une nouvelle interprétation d'un aspect déjà connu. Un tel exemple est la méthode du test 0-1 du chaos qui va être également présenté par la suite.

### III.2.1 La méthode DVV

La méthode « Delay Vector Variance » ou DVV a été introduite dans [GAU01] par *Temujin Gautama et al.* La standardisation intégrée dans la méthode permet d'avoir une idée sur la nature linéaire ou non linéaire de la série en même temps que la prédominance stochastique ou chaotique, unifiant ainsi des approches classiques qui explorent soit l'un soit l'autre. La méthode a été appliquée aux signaux physiologiques (HRV, fMRI).

La méthode mélange l'exploration de l'espace de phase (reconstruit par les variables à retard) et les données de substitution « surrogates ». En premier lieu, les données de la série temporelle examinée sont transformées en variables  $x_k$  à retard unitaire et dimension  $M$ . Ensuite les données de substitution sont générées pour tester l'hypothèse que la série est linéaire. La génération des substitues par l'approche iAATF (iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform) ou la transformée de Fourier à amplitude ajustée itérative.

Cette approche conserve la distribution et l'amplitude spectrales de la série originale et régénère des séries de substitution en supposant que la mesure des données a été faite par une fonction d'observation possiblement non linéaire statique.

Pour discriminer la nature déterministe de celle stochastique, le théorème de décomposition de Wold est utilisé. Ce théorème dit que n'importe quel signal discret stationnaire peut être décomposé en deux composantes non corrélées, l'une déterministe et l'autre stochastique. La prédictibilité de la composante déterministe est utilisée pour la discrimination.

L'analyse DVV proposée est basée sur l'estimation de la « variance de la cible »  $\sigma^{*2}$  qui est une mesure inverse de la prédictibilité d'une série temporelle pour une dimension  $M$  donnée de la reconstruction de l'espace de phase. Dans ce cas, la cible, pour un vecteur  $x_k$ , désigne le vecteur suivant  $x_{k+1}$ .



Après la création de la variable à retard  $x_k$ , les étapes de calcul sont comme suit:

1. La moyenne  $\mu_d$  et l'écart type  $\sigma_d$  pour la distance entre paires successifs de la série  $x_k$  sont calculés.
2. La distance de contrôle  $r_d$  est itérée dans l'intervalle  $[\mu_d - n_d \cdot \sigma_d, \mu_d + n_d \cdot \sigma_d]$  où  $n_d$  est un paramètre d'ajustement (généralement égal à 3).
3. Pour chaque distance et chaque  $k$ , des ensembles  $\Omega_k(m, r_d)$  sont générés en groupant les vecteurs qui sont séparés de  $x_k$  par une distance euclidienne inférieure à  $r_d$ .
4. La variance de chaque  $\Omega_k(m, r_d)$  est calculée à condition d'avoir plus que  $N_0$  vecteurs dans l'ensemble.  $N_0$  est généralement prise égal à 30.
5. L'indice DVV pour chaque  $r_d$  est obtenu en divisant la moyenne de toutes les variances des  $\Omega_k(m, r_d)$  par la variance de la série temporelle.

Ensuite, les mêmes étapes sont répétées, mais pour les séries régénérées, et à la fin on peut tracer la variation de l'indice DVV en fonction de la distance  $r_d$ . Dans l'article original, les auteurs ont effectué le test sur quatre séries différentes.

La première étant une réalisation du système de Hénon:

$$\begin{cases} x_k = 1 - a x_{k-1}^2 + b y_{k-1} \\ y_k = x_{k-1} \end{cases} \quad (\text{sys.III.4})$$

avec  $a=1.4$  et  $b=0.3$ .

La deuxième série étant une réalisation de l'équation Mackey-Glass :

$$\frac{dx}{dk} = \frac{0.2 x_{k-\tau}}{1 + x_{k-\tau}^{10}} - 0.1 x_k \quad (\text{sys.III.5})$$

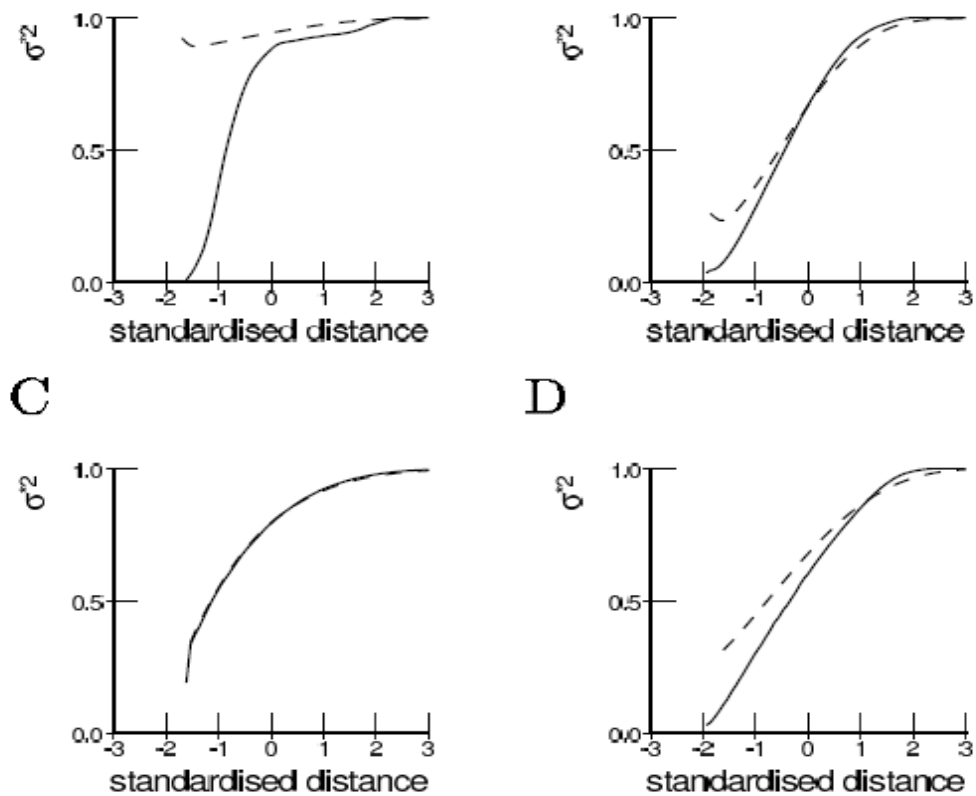
Avec  $\tau=17$ , et l'application de la méthode d'intégration de Runge-Kutta de quatrième ordre.

La troisième série est un bruit coloré généré par un modèle autorégressif (stochastique)

$$x_k = 1.79x_{k-1} - 1.85x_{k-2} - 1.27x_{k-3} - 1.41x_{k-4} + v_k \quad (\text{sys.III.6})$$

avec  $v_k$  un bruit blanc muni d'une distribution standard normale.

La dernière série est une série empirique mesurée à partir d'un Laser infrarouge dans un état chaotique. Les résultats du test DVV sont montrés sur la figure suivante:



**Figure III-5:** Ligne continue : Test DVV pour (A) système de Hénon, (B) système Mackey-Glass, (C) bruit coloré et (D) un système de Laser. Ligne discontinue : la moyenne des tests DVV pour 99 séries de substitution régénérées.

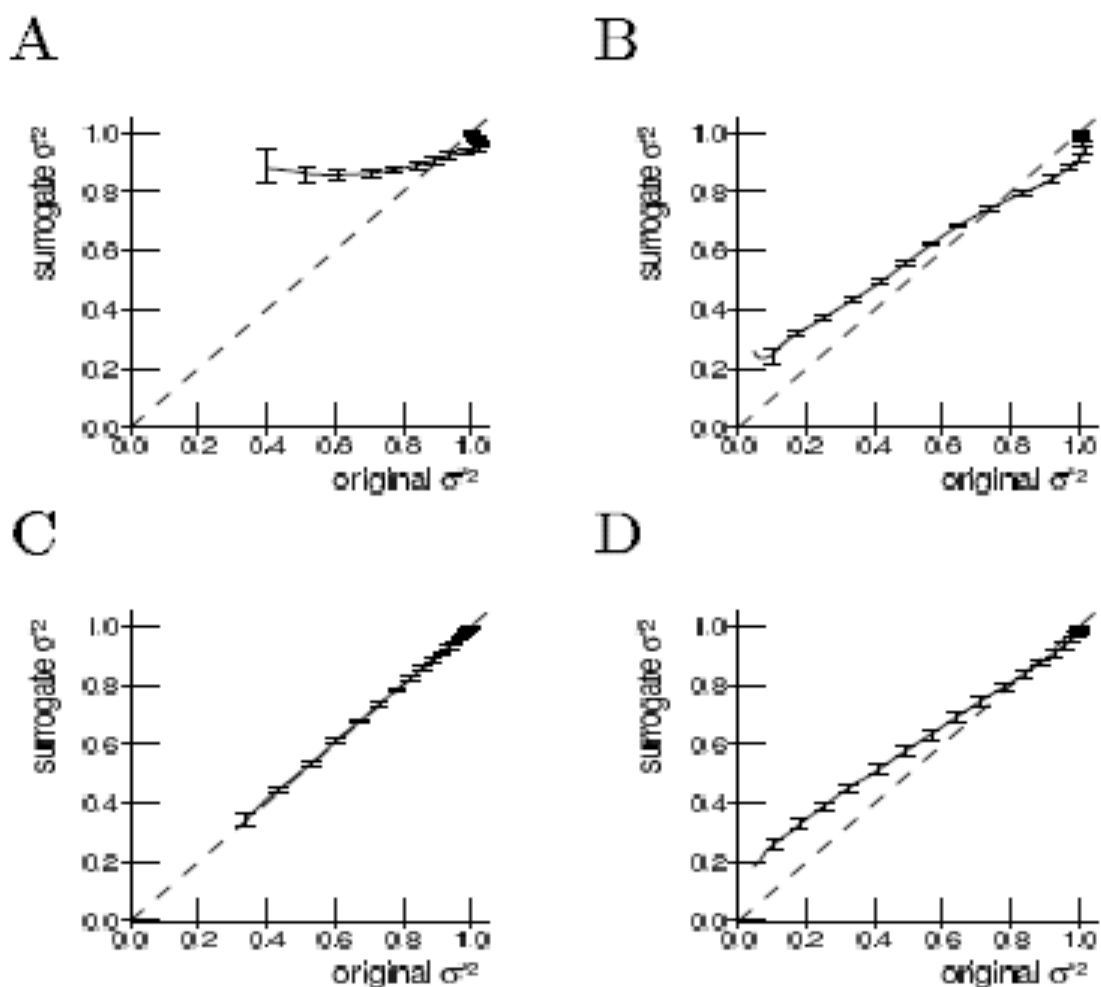
Pour pouvoir comparer les courbes  $DVV(r_d)$  des différents systèmes entre elles, la distance  $r_d$  est normalisée sur l'axe horizontal. La présence de composantes déterministes dans la série temporelle va donner des valeurs DVV diminuées pour les petites distances.

Ceci est dû au fait que, dans les systèmes chaotiques et pour les petites distances, on reste dans l'horizon de prédiction, et la cible est plus ou moins prédictible, ce qui donne de petites variances.

On peut voir ceci dans les parties A, B et D, qui correspondent aux systèmes chaotiques, où les courbes des séries originales (continues) commencent très bas et restent pour certaines distances avant de basculer directement vers des variances élevées. On remarque aussi que pour ces systèmes la version linéarisée (surrogates) donne des indices de prédiction plus médiocres, ce qui élimine l'hypothèse de linéarité.

Par contre pour la partie C de la figure, et malgré une variance primaire diminuée, la courbe monte rapidement et ne marque pas une distance d'horizon. En plus, les variations linéaires par les séries de substitution donnent pratiquement les mêmes résultats. Ce qui est justifiable par la nature de la série (série stochastique linéaire).

Ainsi, la ressemblance entre la courbe DVV de la série originale et les courbes des séries de substitution régénérées suivant l'hypothèse nulle, va nous renseigner sur la discrimination entre nature linéaire et non linéaire. Pour accentuer la ressemblance ou la différence, on dessine les résultats de l'indice DVV dans un plan mixte (figure III.6). Si la courbe résultante est presque identique à la ligne diagonale ( $x=y$ ) alors la série est potentiellement linéaire sinon elle est non-linéaire.



**Figure III-6:** courbes DVV dans un plan mixte entre la série originale et les substituées, pour (A) système de Hénon, (B) système Mackey-Glass, (C) bruit coloré et (D) un système de Laser

Il faut noter que la méthode est sensible au choix de la dimension  $M$  qui doit être effectué en optimisant l'indice DVV minimal. Le nombre  $N_0$  a aussi une grande influence sur les résultats et ne doit pas être petit, par peur d'avoir des résultats complètement faux. L'implémentation de la méthode est testée dans la section IV.2.1

### III.2.2 Test 0-1 du chaos

Cette méthode a été publiée la première fois par *G.A. Gottwald* et *I. Melbourne* dans [GOT01] où elle a été présentée comme « *un nouveau test pour déterminer si un système dynamique donné est chaotique ou non chaotique* ». Les auteurs ont souligné que contrairement à l'exposant de Lyapunov la méthode peut être appliquée directement à une série de données et ne nécessite pas une reconstruction de l'espace de phase. Aussi, la méthode est indifférente à la forme du système testé et les équations différentiels à l'origine de la série. Ainsi, le test prend une série de données à l'entrée et délivre une sortie 0 ou 1 suivant l'existence d'une nature chaotique ou pas.

La méthode a été appliquée aux différents systèmes dynamiques et fonctions itératives avec succès.

La méthode ainsi introduite calcul  $p(t)$  par:

$$p(t) = \int_0^t \Phi(x(s)) \cos(\theta(s)) ds \quad (\text{eq.III.11})$$

où  $\Phi$  est une variable d'observation du système testé (série temporelle  $x(t)$ ), et:

$$\theta(t) = ct + \int_0^t \Phi(x(s)) ds \quad (\text{eq.III.12})$$

Alors, une fonction  $M(t)$  du déplacement moyen carré de  $p(t)$  est définie par:

$$M(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^0 (p(t+\tau) - p(\tau))^2 d\tau \quad (\text{eq.III.13})$$

Finalement l'indice  $K$  qui traduit la nature chaotique est définie par:

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(M(t))}{\log(t)} \quad (\text{eq.III.14})$$

Ainsi, en relation avec les résultats du théorème de l'ergodicité, les auteurs ont stipulé l'hypothèse qu'une valeur presque nulle de  $K$  traduit un comportement non chaotique et une valeur proche de 1 montre la nature chaotique de la série  $x(t)$ .

Dans la justification de leur hypothèse, les auteurs expliquent que la fonction  $p(t)$  peut être considérée comme un des composants de la solution du système à produit oblique suivant:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c + \Phi(x(t)) \\ \dot{p} = \Phi(x(t)) \cos \theta \\ \dot{q} = \Phi(x(t)) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{sys.III.6})$$

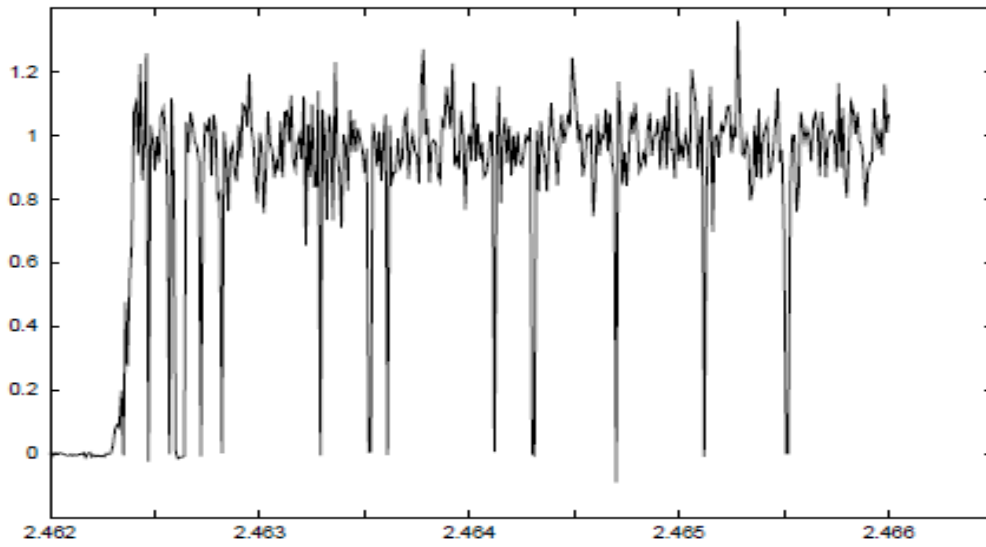
Le système étant conduit par la dynamique de l'observable  $\Phi(x(t))$ .

$(\theta, p, q)$  représente les coordonnées du groupe Euclidien  $E(2)$  pour la rotation  $\theta$  et les translations  $(p, q)$  dans le plan. Alors, l'inspection de la dynamique des trajectoires  $(p, q)$  résultantes nous renseigne très rapidement sur la nature chaotique de la série originale.

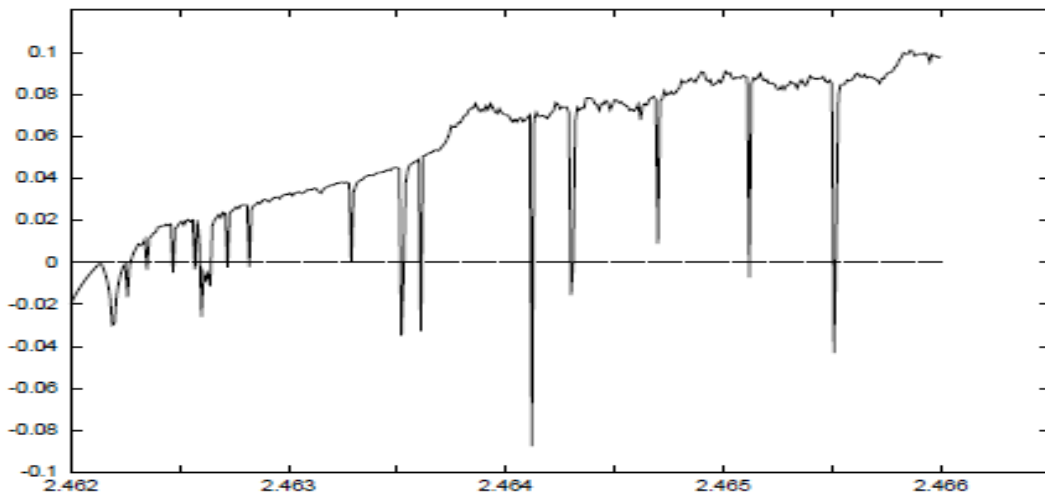
Le système de Van Der Pol a été utilisé pour illustrer cette idée, le système est défini comme suite:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -d(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 + a \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{sys.III.7})$$

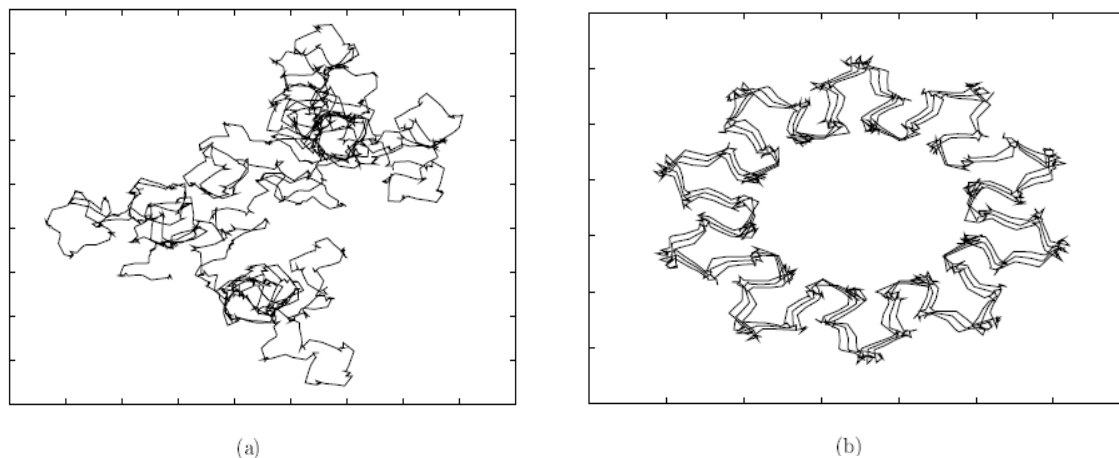
Les figure III-7 et III-8 montrent respectivement les résultats de l'application du test 0-1 et l'exposant de Lyapunov au système de Van Der Pol pour pour  $a=b=5$ ,  $c=1.7$ ,  $\Phi(x)=x_1+x_2$ , et des valeurs de  $\omega$  variant entre 2.462 à 2.466 . La figure III-9 illustre le principe justifiant la méthode.



**Figure III-7:** Les valeurs de  $K$  en fonction de  $\omega$  résultante de l'application du test 0-1 au système III.7



**Figure III-8:** Les valeurs de l'exposant de Lyapunov en fonction de  $\omega$  pour le système III.7



**Figure III-9:** La dynamique des composants de translation  $(p, q)$  pour le système III.6 conduit par un observable du système de Van Der Pol III.7 dans  
 (a)  $w=2.46550$  induisant un comportement chaotique et dans  
 (b)  $w=2.46551$  induisant une trajectoire régulière.

Ces résultats montrent clairement que la méthode est valable pour l'exemple choisi. D'autres tests ont été faits et démontrent également l'efficacité de la méthode.

Dans une autre étude publiée par *Jing Hu et al.* dans [HU001] la méthode 0-1 est critiquée suite aux mauvais résultats des tests appliqués à un bruit  $1/f$ , aux systèmes déterministe et stochastique au bord du chaos et au système à faible chaos, concluant ainsi à la non-efficacité du test dans les conditions expérimentales.

Les auteurs originaux de la méthode ont répondu ensuite par plusieurs articles [GOT03]. Dans leurs réponses, ils affirment que les critiques ne sont pas fondées, et qu'une interprétation plus approfondie ou une inspection visuelle des résultats aurait donné des réponses justes. En plus, les auteurs de la méthode spécifient qu'elle n'est pas destinée à être appliquée aux processus stochastiques. Ensuite, ils ont renforcé la fiabilité de la méthode en l'appliquant à un système chaotique à dimension élevée, où ils ont obtenu des résultats meilleurs que celles des méthodes spatiales.

Par la suite, les auteurs ont modifié le test original pour l'adapter aux séries expérimentales et bruitées.



La forme finale du calcul numérique de la méthode pour une série finie de  $N$  éléments, est comme suit:

$$p(n) = \sum_{i=1}^n \Phi(j) \cos(jc), \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{eq.III.15})$$

$$M(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{j=1}^{N-n} [p(j+n) - p(j)]^2, \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{eq.III.16})$$

$K$  est estimé par l'interpolation du graphe de  $\log(M(n)+1)$  en fonction de  $\log(n)$  pour les valeurs de  $n$  allant de 1 à  $N_0$ , avec  $1 \ll N_0 \ll N$ .

Pour éviter le problème causé par la résonance de  $c$  avec certaines séries périodiques, les auteurs proposent de calculer  $K$  pour plusieurs valeurs de  $c$  générés aléatoirement, puis de prendre la médiane des valeurs trouvées. Un exemple de l'implémentation de la méthode est donné dans la section IV.2.1

### ***III.3 Proposition pour la classification des méthodes suivant le phénomène testé.***

Dans cette section nous présentons un genre de mode d'emploi des méthodes déjà traitées. Mais, l'idée principale de la quelle est née ce mode d'emploi était la classification des méthodes suivant la nature du système ou série testée, d'où le choix du titre. La classification pouvait être plus sélective, mais avec beaucoup de nuance, ainsi nous avons choisi de garder deux classes: les méthodes appliquées aux modèles dynamiques et celles appliquées aux séries temporelles.

#### **III.3.1 Test d'un modèle**

Dans ce cas un modèle mathématique d'un système dynamique est suspecté d'avoir un comportement chaotique. La majorité des méthodes de détection du chaos sont applicables, mais on se retrouve face à un paradoxe. En effet, l'on est tenté de simuler le système testé, et ensuite d'examiner le résultat. Mais, sachant l'intolérance du chaos face aux erreurs d'approximation, avoir un doute sur la relativité des résultats numériques au système formel est justifiable. Dans ce cas on peut rester optimiste en se référant aux théorèmes qui stipulent que sous certaines conditions, les deux systèmes (formel et numérique) ont les mêmes caractéristiques géométriques (exposant de Lyapunov, dimensions...).

Reste-t-il que d'un point de vue mathématique précis, on manquera toujours de l'argument irréfutable. Un exemple intéressant serait le modèle climatique de Lorentz et son fameux attracteur étrange (l'année 1963), car contrairement aux idées répandues, la démonstration mathématique de son existence n'a été formulée qu'en 1998 par *Warwick Tucker* [TUC01].

Examiner le chaos dans un modèle donne l'avantage de pouvoir au préalable suggérer deux hypothèses sans besoin de démonstration, à savoir le déterminisme et la stationnarité. Pour le déterminisme cela va de soi, et pour la stationnarité il suffit de dépasser la période transitoire.

Ainsi, les méthodes qui peuvent appartenir à cette classe sont:

- La Construction de l'espace de phase par simulation puis
  - Inspection visuelle
  - calcul des dimensions topologiques
  - Section de Poincaré
  - Calcul des exposants de Lyapunov (ou ses variations)
  - Calcul de l'entropie
  - Détection des périodes instables
- Analyse fréquentielle
- Vérification de l'existence de période 3 pour les systèmes discrets unidimensionnels
- Détermination d'un Homéomorphisme entre le système testé et un autre système déjà prouvé chaotique.

### III.3.2 Test d'une Série temporelle

Dans cette classe l'intérêt de la détection du chaos est majeur, et cet intérêt se renforce avec les avancées réalisées dans la prédiction, la synchronisation et le contrôle des systèmes chaotiques.

Avec cet intérêt viennent de grandes difficultés et un potentiel élevé de mal-interprétation. En effet, dans la plupart des cas et avant d'appliquer la détection du chaos il faut poser une hypothèse généralement délicate à vérifier, à savoir la stationnarité de la série testée. Dans ce cas malgré le manque de modèle exact de l'origine de la série, un modèle approximatif ou une idée sur le système original peuvent apporter une grande aide.

Dans le cas contraire, où le système original est complètement inconnu, on est obligé de se fier aux résultats de l'une des méthodes de test de la stationnarité. Ces dernières sont basées essentiellement sur le calcul de l'auto corrélation temporelle et spatiotemporelle. Une de ces méthodes est utilisée dans l'exemple 4-8 du chapitre IV.

Une fois cette étape passée, la détection du chaos peut commencer avec une simple visualisation de la série temporelle.

Cette visualisation, avec la connaissance disponible du système originale va pousser le test vers l'une des deux directions:

- Discrimination entre nature déterministe et stochastique.
- Discrimination entre linéaire et non linéaire.

En effet, soit la série donne l'aspect d'être aléatoire sans preuve du contraire et la première direction est ainsi choisie. Soit, on sait (ou croit) que la série est déterministe et la deuxième direction est choisie.

Généralement les recherches commencent suivant la première direction et si jamais la série se montre déterministe en plus d'un avancement dans la compréhension du système originale, la problématique décale vers la deuxième direction.

Dans la première direction, les méthodes généralement employées sont:

- Reconstruction de l'espace de phase par les variables à retard puis
  - Inspection visuelle.
  - Estimation des dimensions topologiques
  - Section de Poincaré
  - Horizon de prédictibilité (linéaire et non linéaire)
  - Les faux voisins plus proches
- Séries temporelles de substitution régénérées par des méthodes stochastiques.
- La première partie de la méthode DVV

Dans la deuxième direction la discrimination entre linéaire et non linéaire est généralement accompagnée ou suivie par la discrimination entre comportement périodique (cycle limite, tore) et comportement chaotique.

Les méthodes susceptibles d'être utilisées sont :

- Reconstruction de l'espace de phase par les variables à retard puis
  - Inspection visuelle
  - Estimation des dimensions topologiques
  - Section de Poincaré
  - Estimation des exposants de Lyapunov (ou ses variations)
  - Estimation de l'entropie
  - Horizon de prédictibilité (linéaire et non linéaire)
- Séries temporelles de substitution régénérées par des méthodes linéaires ou non linéaires ( ex. La deuxième partie de la méthode DVV)
- Test 0-1 du chaos.

Le lecteur peut constater que plusieurs méthodes figurent simultanément dans les deux classes, ce qui s'explique par une différence soit dans l'étape préliminaire (Calcul direct de l'attracteur ou reconstruction) soit dans l'interprétation des résultats.

## **Chapitre IV**

# **Outils informatiques et Applications potentielles.**

Dans ce chapitre nous allons présenter plusieurs outils qui peuvent être utilisés pour simuler ou analyser les sources susceptibles d'être chaotiques. Ces outils représentent l'implémentation de l'une ou plus des méthodes déjà étudiées. Les deux premiers outils (CDA et TISEAN) sont des logiciels spécifiques et spécialisés, qui ont déjà fait l'objet d'utilisation dans beaucoup de références. Les deux derniers (MATLAB<sup>®</sup> et Scilab<sup>®</sup>) sont des outils généraux, où des implémentations personnalisées des méthodes de reconnaissance de chaos existent ou peuvent facilement être développées.

Nous mettrons l'accent sur Scilab, cousin « Open Source » de MATLAB, sous lequel nous avons développé une boîte à outils appelée « IsItChaos ». La boîte à outils est constituée de deux types de fonctions, le premier regroupe des fonctions Scialb qui exploitent la bibliothèque TISEAN, le deuxième type est constitué de méthodes directement implémentées sous Scilab.

Par la suite, trois classes d'applications qui peuvent bénéficier de notre boîte à outils seront proposées. Des exemples de l'utilisation des fonctions de la bibliothèque sont donnés pour la première classe. Les deux classes d'application suivantes sont proposées comme une introduction pour de futurs travaux.

## IV.1 Les outils :

### IV.1.1 CDA et CDA pro [SPR01]

CDA « *Chaos Data Analyzer* »: C'est un logiciel sous MS-DOS commercialisé comme étant « *14 tests pour détecter du déterministe dans des données qui apparaissent aléatoires* ». C'est un outil hautement spécialisé destiné à la détection du chaos et il existe sous deux versions, l'une standard « *CDA* » et l'autre professionnelle « *CDA Pro* ». C'est pratiquement le premier outil spécialisé dans le domaine qui a été utilisé dans de nombreuses études dès le début (1991).

```

08-12-99 MENU OF CHAOS DATA ANALYZER PROGRAMS 14:59:08
The Professional Version 2.1 (c) 1998 by J.C. Sprott
University of Wisconsin, Madison, WI 53706

A: Data Manipulation           K: Correlation Function
B: Graph of Data              L: Correlation Matrix
C: Probability Distribution     M: Phase-Space Plots
D: Polynomial Fit             N: Return Maps
E: Power Spectrum            O: Poincare Movies
F: Dominant Frequencies      P: Wavelet Transform
G: Hurst Exponent            Q: Neural Network
H: Lyapunov Exponent         R: Nonlinear Prediction
I: Capacity Dimension         S: Surrogate Data
J: Correlation Dimension

T: Change file being analyzed - CHAOS.DAT

Which program do you want to run?_

Press key or point and click mouse

Esc: Exit  F1: Help  F2: Dir  F3: Logo  F4: Sum  F5: Auto

```

Figure IV-1: Une copie de l'écran du logiciel CDA

Dans la forme standard, la taille de la série temporelle à explorer peut aller jusqu'à 16,382 points fournis dans un fichier texte « ASCII ». Le programme commence avec un menu dans lequel on trouve les options suivantes

- Manipulation de données: pour visualiser les données, faire un lissage une différenciation ou une intégration numérique.
- Graphe des données : pour visualise une reconstitution de l'espace de phase de la série temporelle (par variables à retard) à 2 ou 3 dimensions.
- Distribution de probabilité : pour visualiser l'histogramme des valeurs de la série temporelle.
- Interpolation polynomiale : pour visualiser le résultat d'une interpolation polynomiale avec différents paramètres possibles.
- Spectre de puissance : pour visualiser le FFT (Fast Fourier Transform) de la série temporelle.
- Fréquences dominantes: pour visualiser les fréquences dominantes dans le spectre de la série temporelle.
- Exposant de Hurst
- Exposant de Lyapunov
- Dimension de capacité
- Dimension de corrélation
- Fonction de corrélation
- Matrice de corrélation
- Tracé de l'espace de phase
- Application de retour : construction de la section de Poincaré
- Animation de la construction de Poincaré
- Transformé d'ondelette
- Identification par réseaux de neurones
- Prédiction non linéaire
- Génération de donnée de substitution.

Avec CDA Pro, en plus on peut estimer les faux voisins plus proches, l'entropie, les statistiques BDS, la complexité algorithmique et davantage de méthodes de prédiction. Cet utilitaire est construit par le langage BASIC et publié par « *Physics Academic Software* ». Il est principalement basé sur les travaux du pionnier professeur honoraire *Julien C. Sprott* (voire [SPR01]).



### IV.1.2 TISEAN

Le nom vient de Time Series ANalysis ou « *Analyse des séries temporelles* » qui est un projet de logiciel spécialisé dans l'analyse des séries temporelles par les méthodes basées sur la théorie de chaos. C'est un logiciel à libre usage (licence GPL) et référencé par [KAN01,SCH01].

Le langage utilisé est principalement le C et partiellement le Fortran. Ainsi, les routines fournies avec le paquet sont assez efficaces, et contrairement au CDA, peuvent bénéficier de la puissance maximale de la machine utilisée. En effet le paquet est distribué avec le code source et peut facilement être recompilé.

TISEAN est un ensemble d'algorithmes d'exploration non linéaires collectionnés par des groupes de travail durant plusieurs années, et mis à disposition du monde scientifique, mais avec un avertissement sur l'interprétation des résultats. En effet les routines disponibles n'étaient pas développées pour l'utilisateur commun, mais pour l'individu qui possède d'un minimum de connaissance dans le domaine et peuvent ainsi interpréter les résultats intelligemment. Dans la philosophie des auteurs, il est mentionné la phrase « *chaque question compliquée a une réponse simple, mais en même temps fausse* », soulignant ainsi le fait que les algorithmes fournis ne doivent pas être utilisés comme des boites noires et doivent être soumis à la critique du scientifique suivant les circonstances.

Tous les programmes du paquet s'exécutent en mode ligne de commande, avec certains options et paramètres propres à chaque commande. L'option -h associée à n'importe quelle commande génère un résumé d'aide.

La communication avec les routines se fait via des fichiers ou l'entrée/sortie standard. Par conséquent si l'utilisateur a besoin de visualiser les résultats il doit utiliser un logiciel tierce (ex. gplot). D'où est née l'idée chez nous d'interfacer TISEAN avec Scilab, à fin d'unifier la plateforme "utilisateur" et faciliter l'intégration des commandes TISEAN dans les simulations et scripts . Cette intégration sera plus détaillée par la suite.

Le paquet intègre un grand nombre d'utilitaires, un nombre qui est sujet à l'augmentation, car le paquet est toujours en état de développement et de croissance. Ces utilitaires peuvent être groupés comme suite:

- Représentation de l'espace de phase
- Test de non-stationnarité
- Prédications non linéaires
- Réduction de bruit non linéaire
- Exposants de Lyapunov
- Entropie et dimensions
- Divers test de non-linéarité (Données de substitution, Transformé de Fourier itératif... etc.)

#### **IV.1.3 Sous MATLAB**

C'est l'environnement de calcul scientifique par excellence. N'ayant probablement pas besoin de présentation, MATLAB constitue une plateforme complète de bibliothèque (*toolbox*) publiée par MATHWORKS et destinée à toutes les disciplines scientifiques ayant besoin de calculs numériques. Néanmoins, on constate l'absence ( jusqu'à la version 7) de toolbox dédié à l'analyse chaotique. C'est probablement dû au fait que les systèmes chaotiques sont considérés comme une classe de systèmes non linéaires dont l'analyse se rapporte aux toolbox des équations différentielles ou celui de l'identification non linéaire. Toutefois, les algorithmes de détection de chaos peuvent être très rapidement implémentés sous MATLAB selon le besoin.

Plusieurs études récentes ont utilisé MATLAB parmi lesquelles on cite [GAL01] où un nouveau toolbox à interface graphique a été introduit pour l'analyse des systèmes chaotiques discrets unidimensionnels (Map). Le même auteur a publié plusieurs études dans le sujet avec d'intéressants utilitaires d'exploration du chaos dans les modèles mathématiques.

Dans l'esprit d'encourager les outils libres et « open source », nous avons choisi de suivre les solutions basées sur Scilab<sup>®</sup> ou lieu de MATLAB<sup>®</sup>, sachant que les deux sont fortement compatibles et dans beaucoup de cas, le passage de l'un à l'autre est faisable.

#### IV.1.4 Sous SciLAB<sup>®</sup>

Scilab<sup>®</sup> est un logiciel de calcul numérique scientifique qui fournit un puissant environnement de développement pour les applications scientifiques et de l'ingénierie. Scilab<sup>®</sup> est un logiciel distribué librement (licence GPL 2.0) avec le code source sur Internet depuis 1994. Initialement développé par l'institut INRIA, Scilab est actuellement sous le contrôle du « *Consortium Scilab* » au sein de *DIGITEO*.

Beaucoup d'études ont choisi d'utiliser Scilab comme plateforme de développement d'outils d'analyse chaotique. L'étude publiée dans [BUR01] a combiné Scialb avec d'autres utilitaires pour étudier le chaos dans les dynamiques des fluides.

Mais, c'est surtout dans le cadre du projet « *ACI- SI TRANSCHAOS* »<sup>1</sup> que des outils intéressants ont été développés entièrement sous Scilab. Le projet a été clôturé par plusieurs publications parmi lesquelles la thèse d'*Alan LAYEC* (2006) [LAY01] ou une méthode de communication chaotique a été simulée sous Scilab avant d'être réalisée. Les outils développés et les simulations réalisées ont été regroupés dans une grande bibliothèque dénommée « *Modnum* ». Cette dernière est publiée en étant '*une boite à outils comportant des blocs et schémas Scicos*<sup>®</sup> (équivalent de Simulink<sup>®</sup> sous MATLAB) et des fonctions et scripts Scialb pour la construction de chaines de communication ''.

---

1 Mise en point en France par (LESIA) de l'INSA de Toulouse, (LOPMD) de Besançon et (IRCOM) de Limoges

Parmi ces blocs et fonctions, on trouve <sup>1</sup>:

- Des composants utilisés dans les systèmes de communication à étalement de spectre (générateurs de séquences de Gold, PN et quasi-chaotiques)
- De divers "oscilloscopes" Scicos, pour l'observation de diagrammes de l'œil, de constellations et un analyseur de spectre.
- Des schémas et blocs constitutifs de synthétiseurs de fréquence à rapport de division entier et fractionnaire (Déecteur phase/fréquence, OCT, modulateurs Sigma-Delta et autres).
- Des simulations de systèmes chaotiques (système de Chua, de Rössler, de Van Der Pol, et bien d'autres).

Dans la suite nous avons utilisé plusieurs blocs appartenant à la dernière catégorie pour simuler des signaux chaotiques générés par différents systèmes dynamiques et un système de transmission chaotique.

#### IV.1.5 La boîte à outils « IsItChaos »

Au début de notre travail, l'idée de construire une nouvelle bibliothèque de fonctions de reconnaissance de chaos a été née dans l'esprit d'innovation. Cette idée a été nourrie par trois points essentiels:

- Mettre les méthodes de reconnaissance de chaos à la portée de tout le monde, ce qui implique l'utilisation de logiciels libres.
- Créer un repère centralisé et hautement spécialisé dans le domaine, d'où le choix d'une plateforme de développement nécessairement populaire et facilement utilisable.
- Mieux comprendre les méthodes étudiées durant le processus de programmation et de test.

Ainsi, la plateforme libre « Scilab » a été choisie, et un lourd et long processus de développement et test a commencé. Mais après le croisement de routes avec TISEAN, l'idée originale a subi un changement dicté par l'esprit pratique.

---

<sup>1</sup> Comme cité dans [http://www.scicos.org/ScicosModNum/modnum\\_web/web/fr/fr.htm](http://www.scicos.org/ScicosModNum/modnum_web/web/fr/fr.htm)

Outre l'efficacité des outils TISEAN, la logique du changement s'est basée sur deux autres points:

- Le fait que TISEAN profite d'un continuel développement et amélioration par une équipe d'experts de renommée internationale dans le domaine. Au contraire à certains autres outils « ex. CDA » puissant, mais stagné à un point donné, et non sujet aux améliorations.
- Le grand nombre d'innovations et de changements dans le domaine et qui ne cessent d'apparaître impose des axes d'explorations parallèles. Alors, nous pouvant bénéficier de la commodité des outils TISEAN prête à porter, tout en gardant l'esprit d'innovation par l'exploration et l'implémentation des méthodes non traitées dans TISEAN.

Ainsi, le choix d'interfacer TISEAN avec Scilab a été pris. En plus de ce qui a été cité, cette interface permet de joindre l'efficacité des exécutables TISEAN à la maniabilité de l'interface Scilab. Beaucoup d'articles traitant le sujet de reconnaissance du chaos dans une série temporelle font référence à TISEAN, ce serait alors intéressant si l'on pouvait facilement comparer ses résultats avec celles d'une référence comme TISEAN. La méthode suivie dans la programmation de l'interface est comme suit:

1. S'assurer que le paquet TISEAN est bien installé dans le PC, et que le répertoire d'installation est ajouté à la variable environnement « PATH »;
2. Choisir la commande TISEAN à interfacier avec Scilab et construire une fonction sous Scilab portant un nom similaire.
3. Dans la définition de la fonction Scilab des paramètres d'appel similaire à ceux de la commande TISEAN sont utilisés, plus un paramètre qui renvoie aux données à traiter.
4. Un fichier temporel est créé et utilisé pour passer les données à la commande TISEAN.
5. La commande est appelée en utilisant la fonction Scilab « *host* » qui fait l'interface entre Scilab et l'interpréteur de commande du système d'exploitation.
6. Les résultats sont ensuite récupérés sous Scilab en lisant le fichier de sortie qui a été utilisé dans la commande.
7. Suivant la nature de la commande interfacée, des traitements optionnels sont ajoutés (conversion de type, interpolation, filtrage... etc.).

La dernière étape constitue une contribution personnelle que nous avons décidé d'ajouter, soit pour améliorer les résultats soit pour faciliter leurs interprétations. Par exemple, la fonction Scilab développée « *Lyap\_K* », en plus d'interfacer la commande « *lyap\_k* » de TISEAN, elle accomplit une estimation de l'exposant de Lyapunov par une interpolation linéaire particulière des résultats. Autrement l'utilisateur devrait faire une inspection manuelle des résultats pour en déduire la valeur de l'exposant de Lyapunov.

La deuxième partie de la boîte à outils « *IsItChaos* » regroupe l'implémentation de quelques méthodes innovatrices introduites dans (chap III) (méthode 0-1 et la méthode DVV) ainsi que plusieurs outils d'aide pratiques pour la manipulation et la génération de série numérique.

On cite la fonction « *orb* » qui calcul la trajectoire de la fonction itérative, fournie comme paramètre d'entrée, sous certaines conditions initiales et pour des paramètres donnés.

On cite aussi la fonction « *bifur* » qui a été utilisée pour générer la Figure I-4, cette fonction utilise la fonction « *orb* » pour calculer les trajectoires d'une fonction itérative qui correspond à différentes valeurs des paramètres de la fonction pris dans un intervalle donné.

Un récapitulatif des fonctions implémentées dans les deux parties de « *IsItChaos* » est présenté dans l'annexe A. Par ailleurs, la méthode de l'installation et le code source de toutes les fonctions seront mis à la disponibilité du public dans le site « <http://sites.google.com/site/isitchaos> ». Ce dernier va être un point de recueil des remarques et appréciation des futurs utilisateurs.

Après un délai de quelques mois de la publication des outils et si favorablement des tests intensifs seront accomplis avec satisfaction, la boîte à outils sera publiée dans la liste officielle des contributions Scilab dans le site « <http://www.scilab.org/contrib/> ».

## IV.2 Les applications potentielles proposées :

### IV.2.1 Applications aux modèles mathématiques.

Plusieurs fonctions de la boîte à outils « *IsItChaos* » peuvent être utilisées pour simuler des systèmes chaotiques. La boîte à outils « *modnum* » présente également de telles fonctions Scilab en plus de plusieurs blocs Scicos. Nous allons présenter des exemples exploitant les deux boîtes.

**Exemple IV.1:** Le script suivant utilise la fonction « *orb* » pour simuler l'équation logistique:  $X_n = c \cdot X_{n-1} \cdot (1 - X_{n-1})$

```

deff('[Xn]=f(Xn_1,c)','Xn=c*Xn_1*(1-Xn_1)');
x0=0.0001;
c=[3.5:.001:4];
orbits=[];
for i=c,
    orbit=orb(20000,i,x0,f);
    orbits=[orbits;orbit(1,$-999:$)];
end
Lest=[];
err=[];
save('Test_Logidt_K_orbits_c.dat',orbits,c);
for i=500:size(orbits,1),
    [Nbr,L,Lesti,erri]=Lyap_K(orbits(i,:),,1000,30, %T, 4);
    Lesti=mean(Lesti);
    erri=mean(erri);
    if modulo(i,100)==0 then save('Test_Logidt_K_Lest_err.dat',Lest,err), end;
    Lest=[Lest, Lesti];
    err=[err, erri];
end;
plot2d(c,Lest);

```

20000 points de la trajectoire sont calculés pour chacune des valeurs de  $c$  allant de 3.5 à 4 avec une étape d'incrément de 0.001 et une condition initiale  $x_0$  égal à 0.0001. Seulement les 1000 derniers points de chaque trajectoire sont utilisés par la fonction « *Lyap\_K* » pour estimer l'exposant de Lyapunov maximal par la méthode de Kantz.

À la fin un diagramme de la variation de l'exposant de Lyapunov en fonction  $c$  est généré. Le diagramme est présenté dans la figure IV-2 le long d'un diagramme des valeurs exactes de l'exposant de Lyapunov pris selon la référence [GOT02].

**Exemple IV-2** : Le script suivant est identique au script de l'exemple 4-1 sauf qu'au lieu de calculer l'exposant de Lyapunov, la fonction « *Chaos01* » est utilisée pour tester la nature chaotique de la série suivant la méthode 0-1 détaillée dans la section III.2.2.

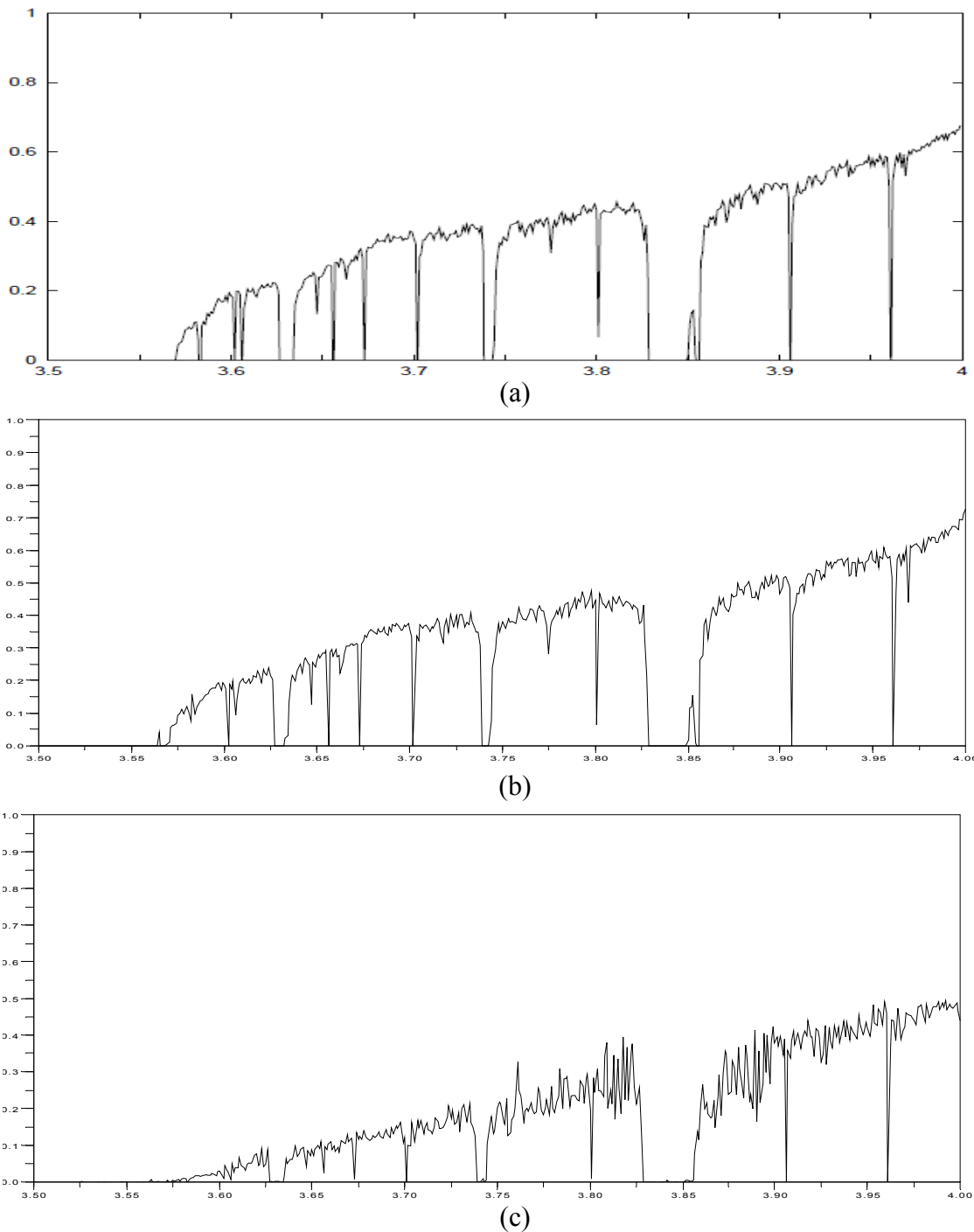
```

deff('[Xn]=f(Xn_1,c)', 'Xn=c*Xn_1*(1-Xn_1)');
x0=0.0001;
c=[3.5:.001:4];
orbits=[];
    for i=c,
        orbit=orb(20000,i,x0,f);
        orbits=[orbits;orbit(1,$-999:$)];
    end
Kest=[];
C=[];
save('Test_Logidt_Chaos01_orbits_c.dat',orbits,c);
for i=1:size(orbits,1),
    [Kesti,Ci]=Chaos01(orbits(i,:));
    C=[C,Ci];
    disp(i)
    disp(string(round(i/size(orbits,1)*100))+'%')
    Kest=[Kest, median(Kesti)];
    save('Test_Logidt_Chaos01_Kest_C.dat',Kest,c,C)
end;
plot2d(c,Kest);

```

À la fin un diagramme de la variation du paramètre  $K$  en fonction de  $c$  est généré. Le diagramme est également présenté dans la figure IV-2 le long des valeurs exactes de l'exposant de Lyapunov prises selon la référence [GOT02] et le résultat de l'exemple 4-1.





**Figure IV-2** Comparaison entre (b) l'estimation de l'exposant de Lyapunov par la méthode de KANTZ, (c) L'évaluation du paramètre K par la méthode 0-1 et (a) les valeurs exactes de l'exposant de Lyapunov

On constate que la fonction « *Lyap\_K* » donne des résultats meilleurs que celles de « *Chaos01* », mais « *Chaos01* » garde l'avantage de ne pas avoir besoin d'une reconstitution de l'espace de phase par les variables à retard. Par contre, nous n'avons pas senti l'impact de cet avantage sur le temps de calcul.

En effet la première implémentation de la fonction « *Chaos01* » demandait un temps de calcul excessivement long (de l'ordre de dizaines de jours) par rapport au temps demandé par la méthode « *Lyap\_K* » (plusieurs heures).

En premier lieu, nous avons attribué ceci au fait que « *Lyap\_K* » interface une commande TISEAN et bénéficie ainsi d'une exécution machine directe, alors que « *Chaos01* » passe par l'interpréteur intégré de Scilab. Ainsi, une deuxième implémentation de la fonction « *Chaos01* » a été réalisée en s'assurant l'utilisation d'exécution machine directe dans la partie essentielle de la fonction. Malheureusement, l'écart de la durée d'exécution est resté considérable.

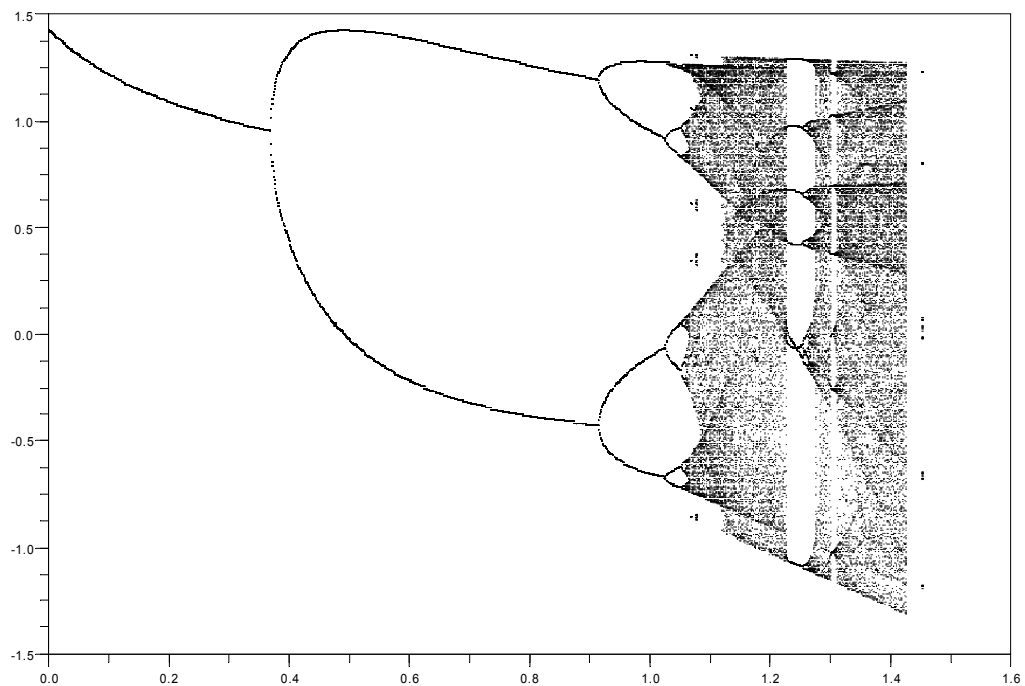
Par la suite, nous avons réalisé une inspection de l'algorithme de la méthode 0-1 et nous sommes venu à la conclusion que l'algorithme a une complexité exponentielle. Ce qui veut dire qu'il faut faire très attention au choix des paramètres de calcul de la méthode, et qu'une petite augmentation dans les paramètres peut induire un temps de calcul supplémentaire démesuré.

Ainsi, nous avons choisi des valeurs pour les paramètres de calcul différents des valeurs suggérées par les auteurs de la méthode, mais assez proches pour avoir des résultats qualitativement similaires.

**Exemple IV-3:** L'instruction suivante démontre l'efficacité gagnée par le mélange de Scilab et TISEAN. Dans cette instruction la fonction « *Bifur* » est utilisée pour évaluer la bifurcation du système de Henon simulé par la fonction « *Henon\_orbit* » (voir Annexe A).

```
orbits=Bifur(Henon_orbit,,0,2,.001);
```

La bifurcation est étudiée pour les valeurs du paramètre  $A$  allant de 0 à 2 et incrémentées par une étape de 0.001. Ce que nous ne pouvons pas montrer dans le manuscrit, c'est qu'en plus de la génération de la Figure IV-3 représentant la bifurcation, la fonction affiche à la fin de chaque itération la trajectoire finale correspondante à la valeur itérée de  $A$ , réalisant ainsi une animation du processus de bifurcation.



**9Figure IV-3** La bifurcation du système de Henon calculée dans l'exemple 4-3

**Exemple IV-4:** Le diagramme de simulation « *Lorentz* » de « *modnum* » v3.0 peut être utilisé pour simuler numériquement le fameux système (sys.I.2):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= b x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}$$

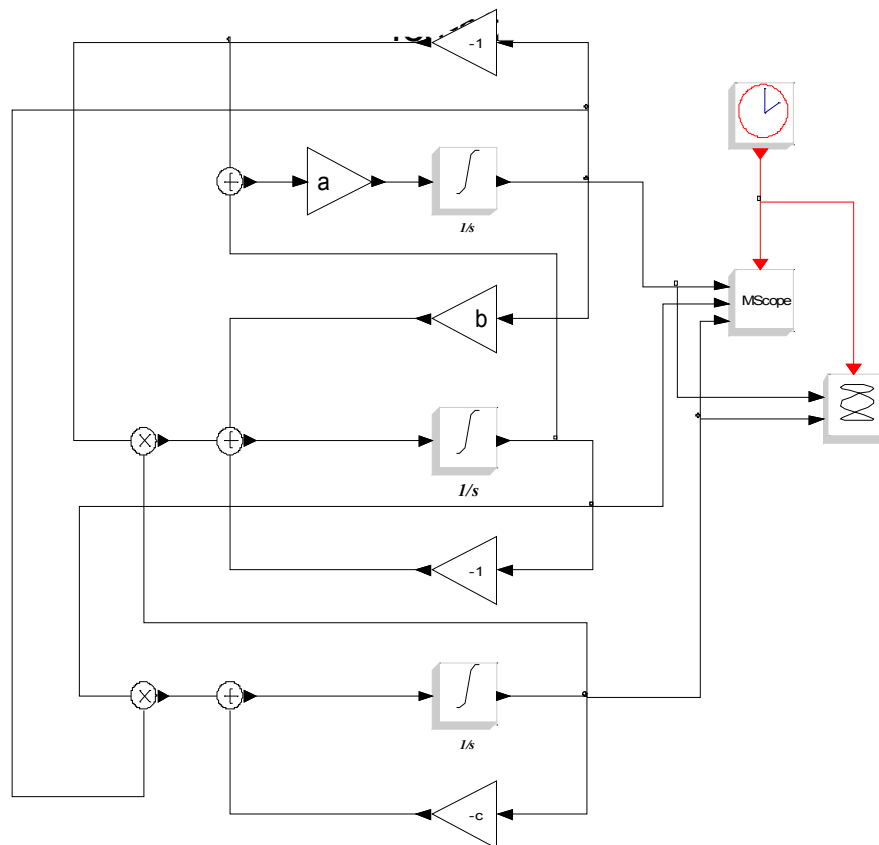
Dans cet exemple les paramètres sont choisis comme suite:

$$a=10 \quad b=28 \quad c=8/3 \quad c_i=[x_0;y_0;z_0]=[5.5;5;20]$$

Période échantillonnage  $T_{\text{samp}}=3e-3$  s

Temps de la fin de simulation  $T_{\text{fin}}=20$  s

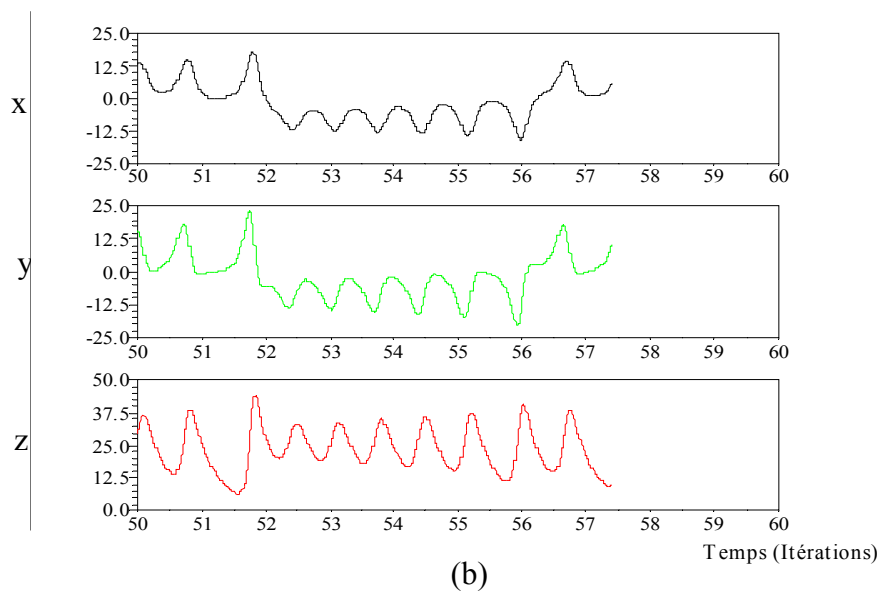
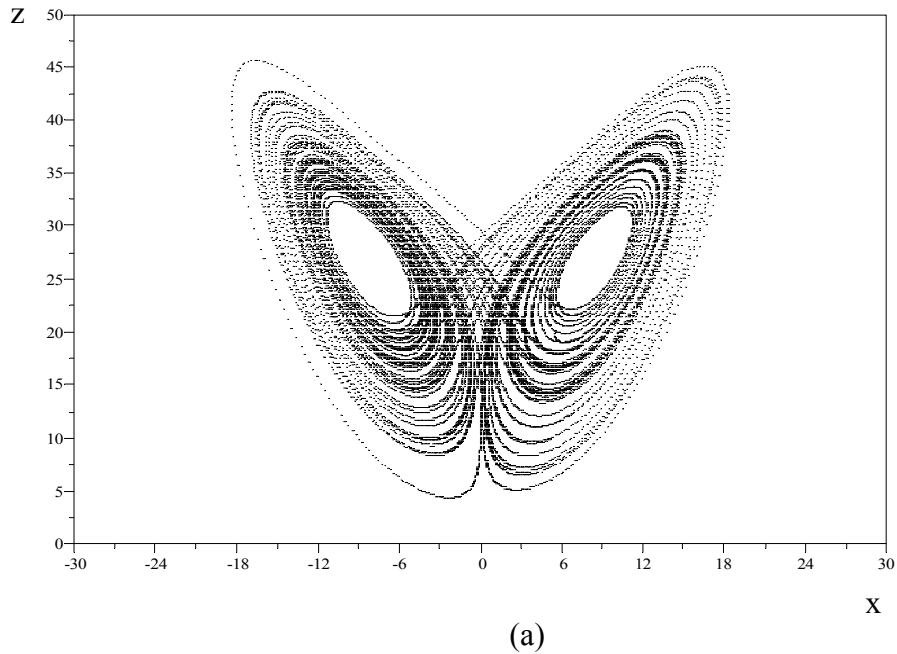
Le diagramme Scicos est montré dans la figure suivante:



**Figure IV-4:** Bloc de simulation « *Lorentz* » de la boîte « *modnum* » v3.0

On ouvre le bloc sous Scicos et on choisit la commande « *run* » du menu « *simulate* ».

À la fin de la simulation, deux figures sont créées, la première (Figure IV-5 (a)) représente le plan de phase x contre z, et la deuxième (Figure IV-5 (b)) représente les variations temporelles de x,y et z.



**Figure IV-5** Résultats de la simulation du bloc « *Lorentz* »,  
 (a) plan de phase de x contre z, (b) évolution temporelle de x,y et z

En ajoutant un bloc « *Mux* » et un bloc « *write ouput to file* » on peut récupérer les valeurs de x,y et z dans un fichier pour pouvoir les exploiter par la suite. Nous allons supposer que le fichier s'appelle « *Sim\_Lorentz.dat* » et nous allons l'utiliser dans les exemples suivants.

**Exemple IV-5:** Le script suivant lit le fichier « *Sim\_Lorentz.dat* », récupère les valeurs de x et y, et dessine le plan de phase de x contre y. ensuite, le script dessine la reconstitution de l'espace de phase par les variables à retard. La reconstitution utilise la fonction « *Delay\_var* » de « *IsItChaos* ». L'opération est répétée pour plusieurs valeurs de la dimension M et le délai L.

```
tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);
y=tmp_x_y_z(:,3);

plot(x(20000:22500),y(20000:22500));
scf();

M=[2 3 4]
L=[5 25 60];
i=0;
for Mi=M;
  for Li=L;
    x1_x2_x3=Delay_var(x(20000:22500),2500,Mi,Li);
    x1=x1_x2_x3(:,1);
    x2=x1_x2_x3(:,2);
    i=i+1;
    subplot(3,3,i);
    plot(x1,x2);
    xtitle('M='+string(Mi)+' L='+string(Li),' x1','x2');
  end;
end;
```

Les diagrammes résultants sont présentés dans les figures IV-6 et IV-7. On remarque qu'une valeur basse de L dans l'espace de phase, produit une représentation presque linéaire entre x et y. C'est à cause de la forte corrélation entre les points proches dans la série x. sur l'autre coté, une grande valeur de L produit une grande distorsion qui est due à la corrélation entre les points éloignés qui se croisent dans l'attracteur original.

La dimension  $M$  par contre n'a pas trop d'influence sur les résultats qui suggèrent qu'une dimension  $M=2$  est suffisante.

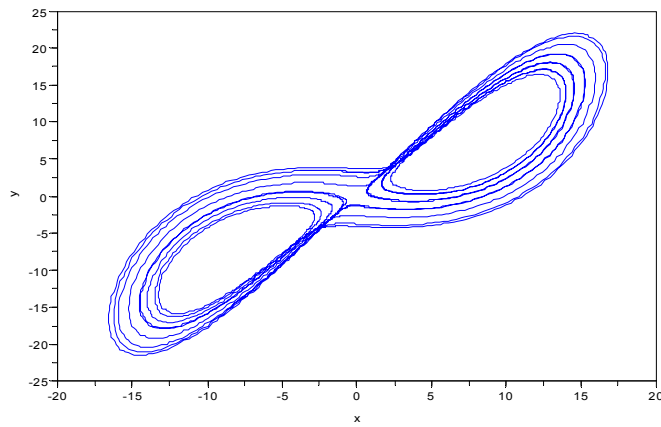


Figure IV-6: Plan de phase de  $x$  contre  $y$  de la simulation « Lorentz »

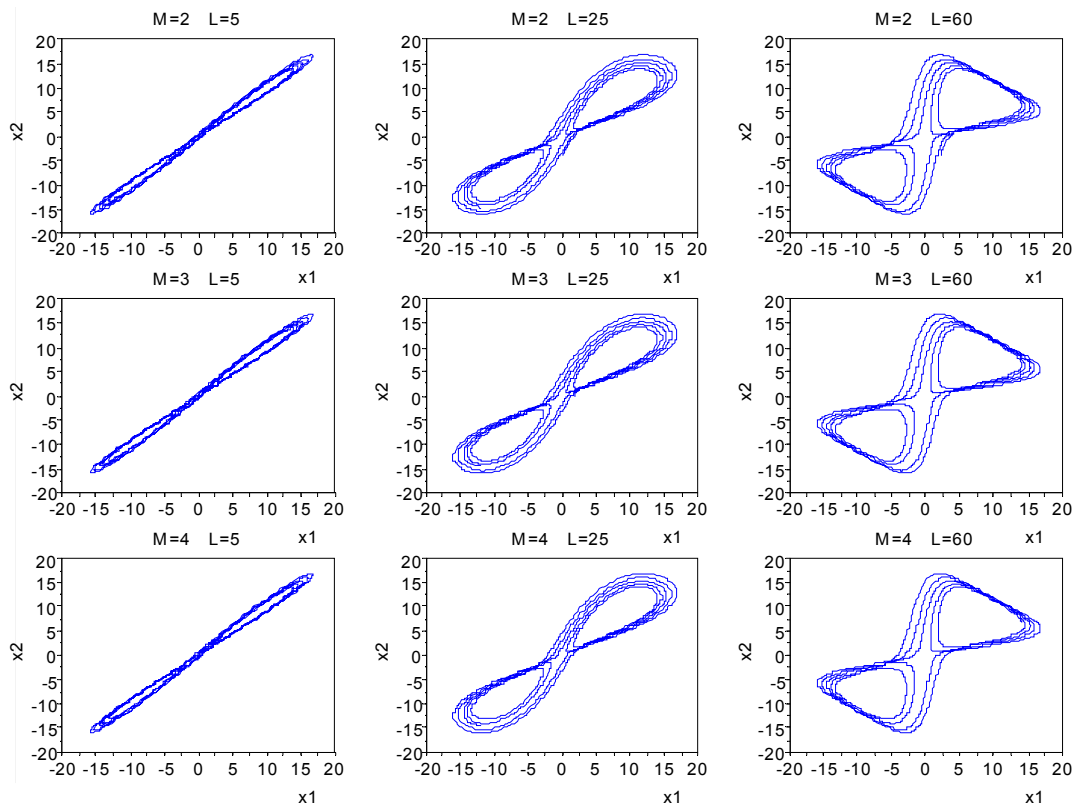


Figure IV-7: Différentes représentations dans l'espace de phase reconstruit en utilisant plusieurs dimensions  $M$  et plusieurs retards  $L$ .

L'exemple suivant est similaire au précédent, mais au lieu d'étudier l'espace de phase en deux dimensions nous allons utiliser 3 dimensions.

**Exemple IV-5:** Le script suivant idem au précédent, récupère les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et dessine le plan de phase de  $x$  contre  $y$  et  $z$ . Ensuite, le script dessine une reconstitution de l'espace de phase par les variables à retard pour plusieurs valeurs de la dimension  $M$  et le délai  $L$ .

```
tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);
y=tmp_x_y_z(:,3);
z=tmp_x_y_z(:,4);
plot(x(20000:22500),y(20000:22500));
scf();

M=[3 4 5 6]
L=[25];
i=0;
for Mi=M;
  for Li=L;
    x1_x2_x3=Delay_var(x(20000:30000),10000,Mi,Li);
    x1=x1_x2_x3(:,1);
    x2=x1_x2_x3(:,2);
    x3=x1_x2_x3(:,3);
    i=i+1;
    subplot(2,2,i);
    plot3d(x1,x2,x3);
    xtitle('M='+string(Mi)+' L='+string(Li),'x1','x2','x3');
  end;
end;
```

Les diagrammes résultants sont présentés dans les figures IV-8 et IV-9. On remarque que peu de différence existe dans les reconstructions de l'espace de phase à partir de la dimension 4. Ce qui est en accord avec les théorèmes présentés dans la section III-1.1.

Il faut noter que l'attracteur reconstruit n'a pas toujours la même forme visible que l'attracteur original, mais il a les mêmes caractéristiques topologiques estimées par les mesures invariantes.



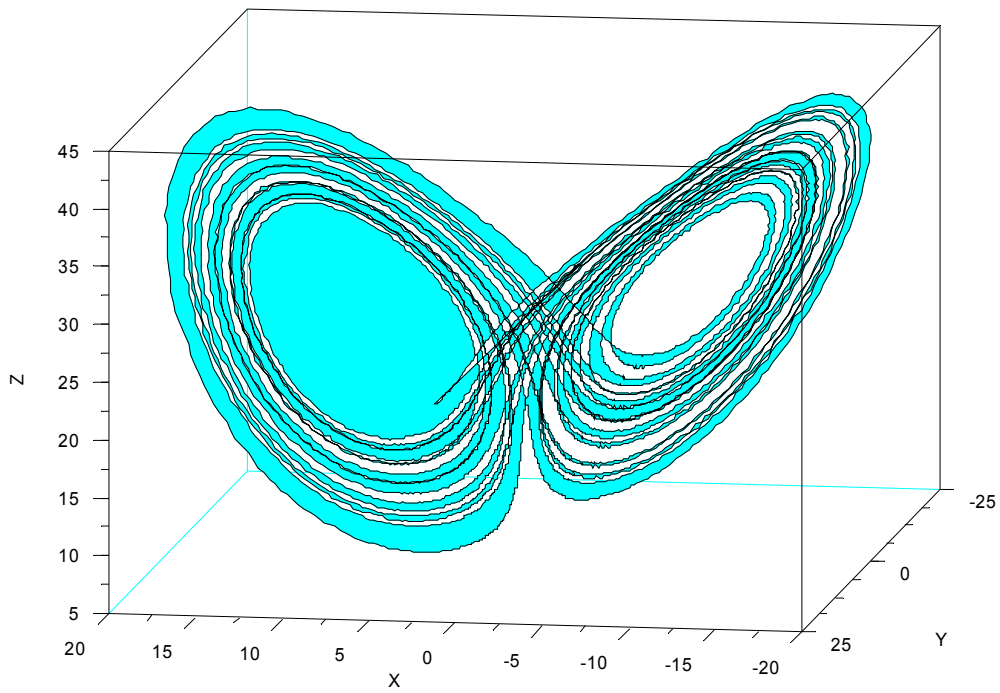


Figure IV-8: Plan de phase du système de Lorenz simulé.

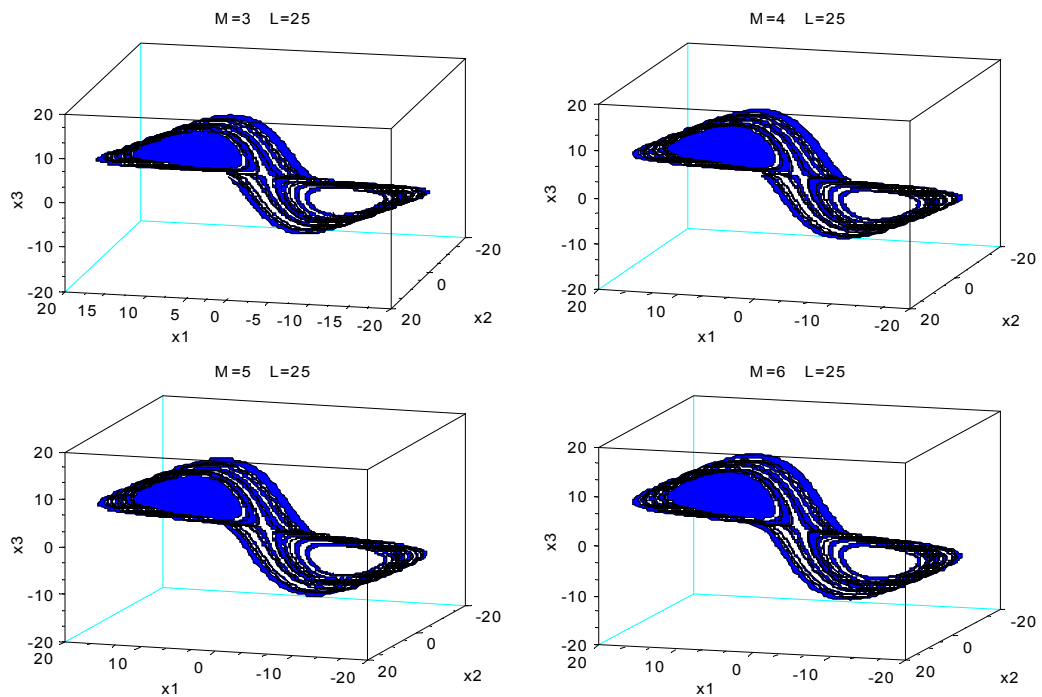
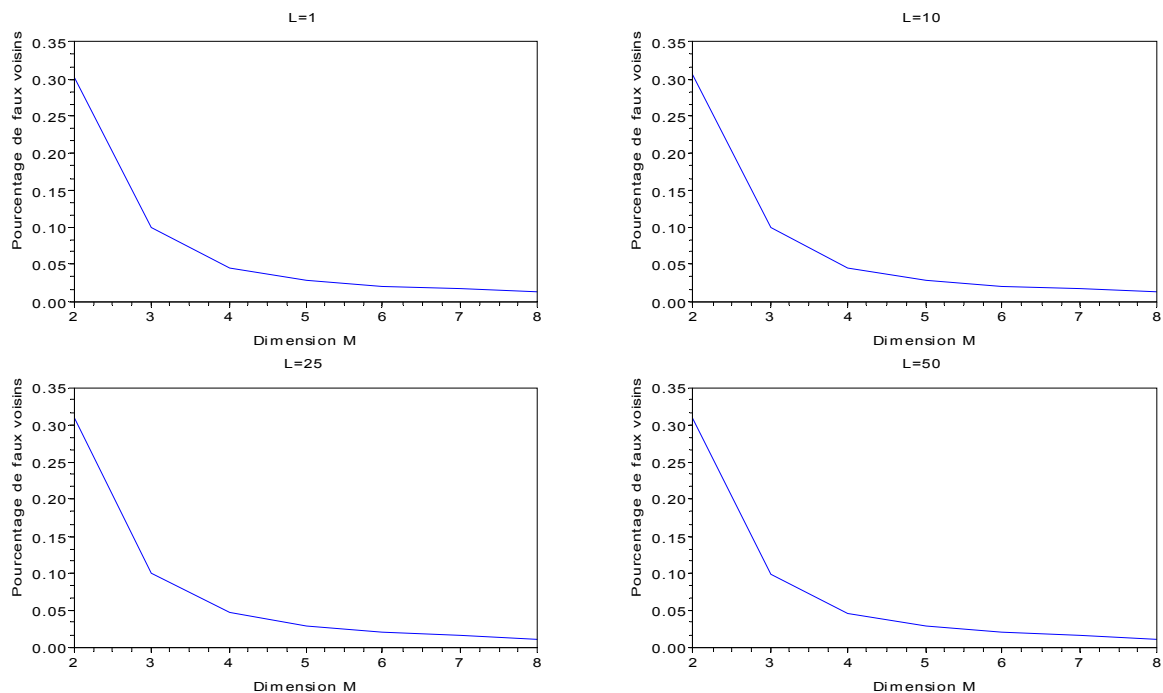


Figure IV-9: Reconstruction de l'espace de phase pour différentes valeurs de  $M$ .

Il serait intéressant de pouvoir estimer rapidement, et sans inspection visuelle, la dimension  $M$  suffisante et le délai  $L$  optimal. L'exemple suivant utilise la fonction « *false\_nearest* » de la boîte « *IsItChas* » pour résoudre le problème du choix de  $M$ .

**Exemple VI-6:** Le script suivant lit les valeurs de la variable  $x$  de la simulation « *Lorentz* » et les utilise dans la fonction « *false\_nearest* » pour calculer le pourcentage des faux voisins en fonction de la dimension  $M$  (voir Section III.1.6). Le calcul se fait pour différentes valeurs de  $L$ . A la fin les diagrammes représentant les résultats sont dessinés.

```
tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);
i=0;
for Li=[1 10 25 50];
[dim,FalseNberFrac,NberSize,NberSize2]=false_nearest(x(30000:35000),5000,2,Li,,8);
i=i+1;
subplot(2,2,i);
plot(dim,FalseNberFrac);
xtitle('L='+string(Li),'Dimension M', 'Pourcentage de faux voisins');
end;
```



**Figure IV-10:** Pourcentage de faux voisins en fonction de la dimension  $M$ .

On remarque que la pente de décroissance commence à se stabiliser à partir de  $M=4$ , ce qui est en accord avec les résultats de l'exemple 4-5. L'inspection visuelle ici n'est pas nécessaire et peut facilement être remplacée par un algorithme d'estimation assez simple.

Une méthode complémentaire pour trouver le délai  $L$  à utiliser sans inspection visuelle est suggérée dans [KAN02]. La méthode est originalement proposée par *Fraser* et *Swinney* et basée sur le calcul de l'information mutuelle retardée et prend en compte les corrélations non linéaires. Elle est implémentée dans la fonction « *mutual* » utilisée dans l'exemple suivant.

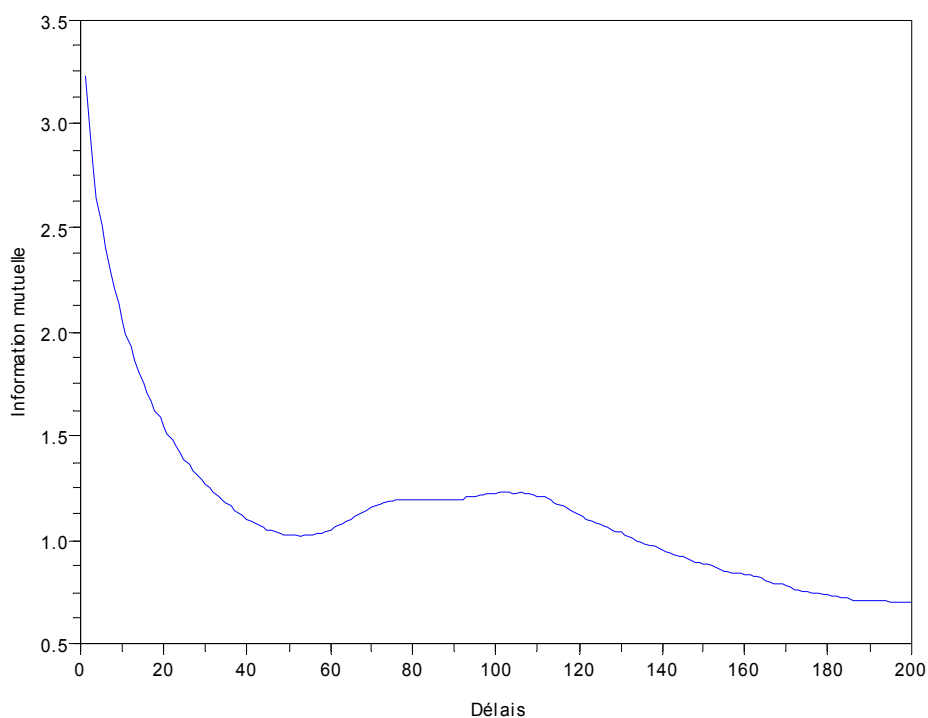
**Exemple IV-7:** Le script suivant utilise les valeurs de  $x$  résultantes de la simulation « *Lorentz* » pour estimer un délai  $L$  approprié pour la reconstruction de l'espace de phase.

```
tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);

[Del,MutulaInf,OccupBox,ShanEnt]=mutual(x,10000,200,50);
plot(Del,MutulaInf);
xtitle('Délais L', 'Information mutuelle');
```

La figure IV-11 montre le changement de l'information mutuelle en fonction du délai. Les auteurs de la méthode proposent d'utiliser la valeur du délai qui correspond au premier minimum local comme valeur de  $L$ .

On peut voir que le premier minimum local se situe autour de 50, ce qui est relativement pas loin de la valeur que nous avons choisi (25), mais qui est quand même une valeur non optimale. Toutefois, cette valeur donne des résultats acceptables dans l'estimation des mesures invariantes.



**Figure IV-11:** Changement de l'information mutuelle en fonction du délai pour la variable x de la simulation « Lorentz ».

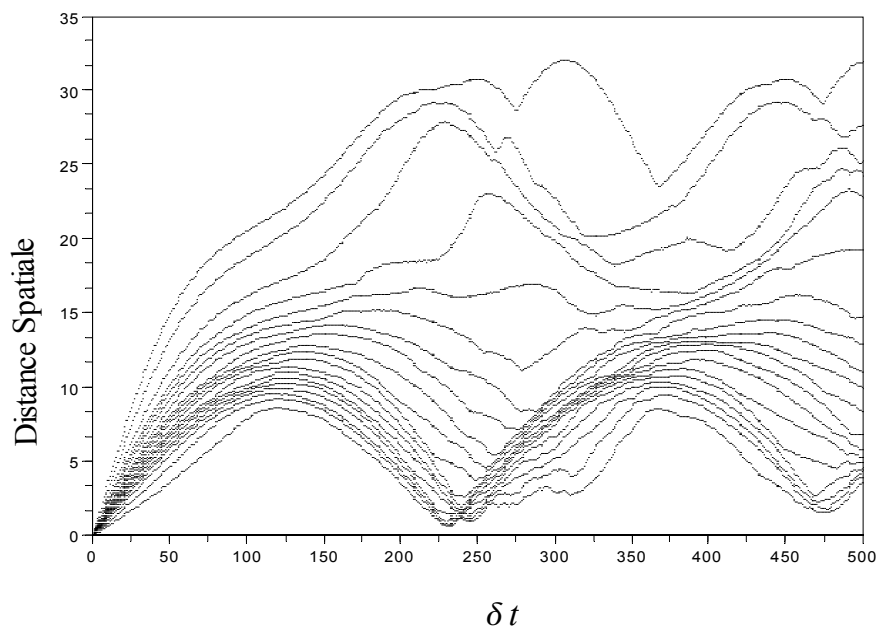
Dans tous les exemples précédents, le nombre d'échantillons de x utilisés pour le calcul a été donné directement. Mais comment choisir ce nombre? Et est-ce qu'il existe une limite optimale à ne pas dépasser? La méthode de calcul de la séparation spatio-temporelle proposée par *Provenzale et al.* peut être utilisée pour estimer une limite optimale de la taille de série. Cette méthode est utilisée avec les « graphes de récurrence » pour tester la non-stationnarité d'une série temporelle.

La méthode de « séparation spatio-temporelle » et celle des « récurrences » sont implémentées respectivement par les fonctions « *stp* » et « *nstat\_z* » explorées dans l'exemple suivant.

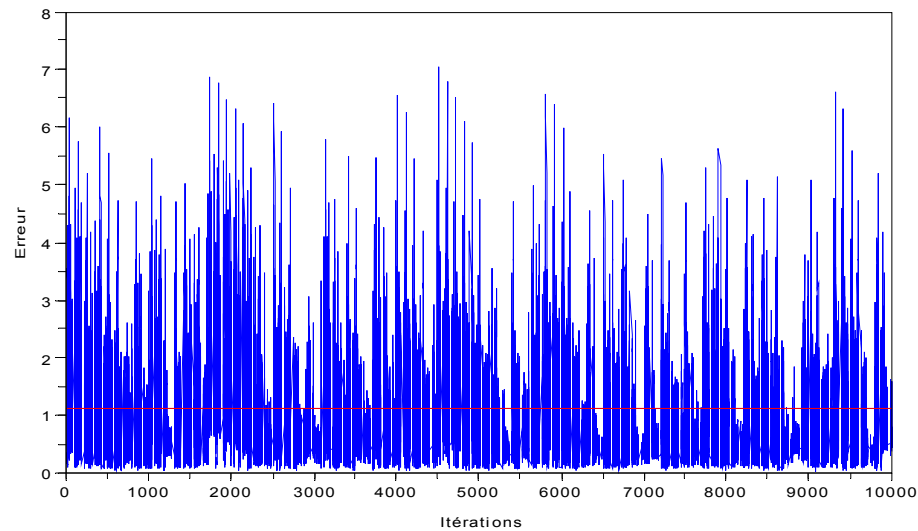
**Exemple IV-8:** Le script suivant applique les fonctions « *stp* » et « *nstat\_z* » aux valeurs de *x* extraites de la simulation « *Lorentz* », et dessine le résultat. Le dessin de la fonction « *stp* » est présenté dans la figure IV-12 et montre les variations des lignes de probabilité constante pour trouver un certain nombre de voisins dans l'espace de phase à une distance donnée (l'axe *y*) en fonction du délai  $\delta t$  qui sépare les échantillons. La figure IV-13 montre les graphes de récurrence traduits par l'erreur normalisée (axe *y*) résultante de l'utilisation d'un segment de la série de donnée pour estimer un autre segment.

```
mp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);

strR=stp(x(30000:35000),5000,4,25,,500);
plot2d(stpR(:,1),strR(:,2),0*ones(strR(:,2))));
[forecast,forcasted,err]=nstat_z(x,40000,4,25,100);
scf();
plot2d(forecast,err,0*ones(err));
plot(ones(err)*mean(err),'r');
```



**Figure IV-12:** La variation des lignes de probabilité constante du nombre de voisins à une distance donnée en fonction du délai entre les points.



**Figure IV-13:** L'erreur normalisée de l'estimation croisée des segments dans la série x.

On peut interpréter la figure IV-12 comme une mesure de la corrélation spatio-temporelle, et cela montre la distance temporelle minimale entre les points pour qu'on puisse les considérer indépendants du point de vue des mesures invariantes. Ainsi il suffit de prendre une fenêtre de Theiler égale à 100 dans la recherche des voisinages. Le genre de minima observé pour  $\delta t$  autour de 240 est dû aux croisements résultants de repliement de l'attracteur chaotique sur lui même. Ce minima nous renseigne qu'il faut au moins 250 points pour une représentation minimale de l'attracteur, mais de préférence il faut prendre plusieurs multiples de ce nombre pour améliorer les estimations.

La figure IV-13 montre que la taille choisie des segments ( $40000/100=400$ ) donne des erreurs normalisées de l'estimation-croisée d'une moyenne proche de 1, c.-à-d. une erreur proche de la variance des données elles-mêmes. Nous concluons qu'un nombre d'échantillons égal à 400 est représentatif de la série et que la série complète peut être considéré stationnaire.

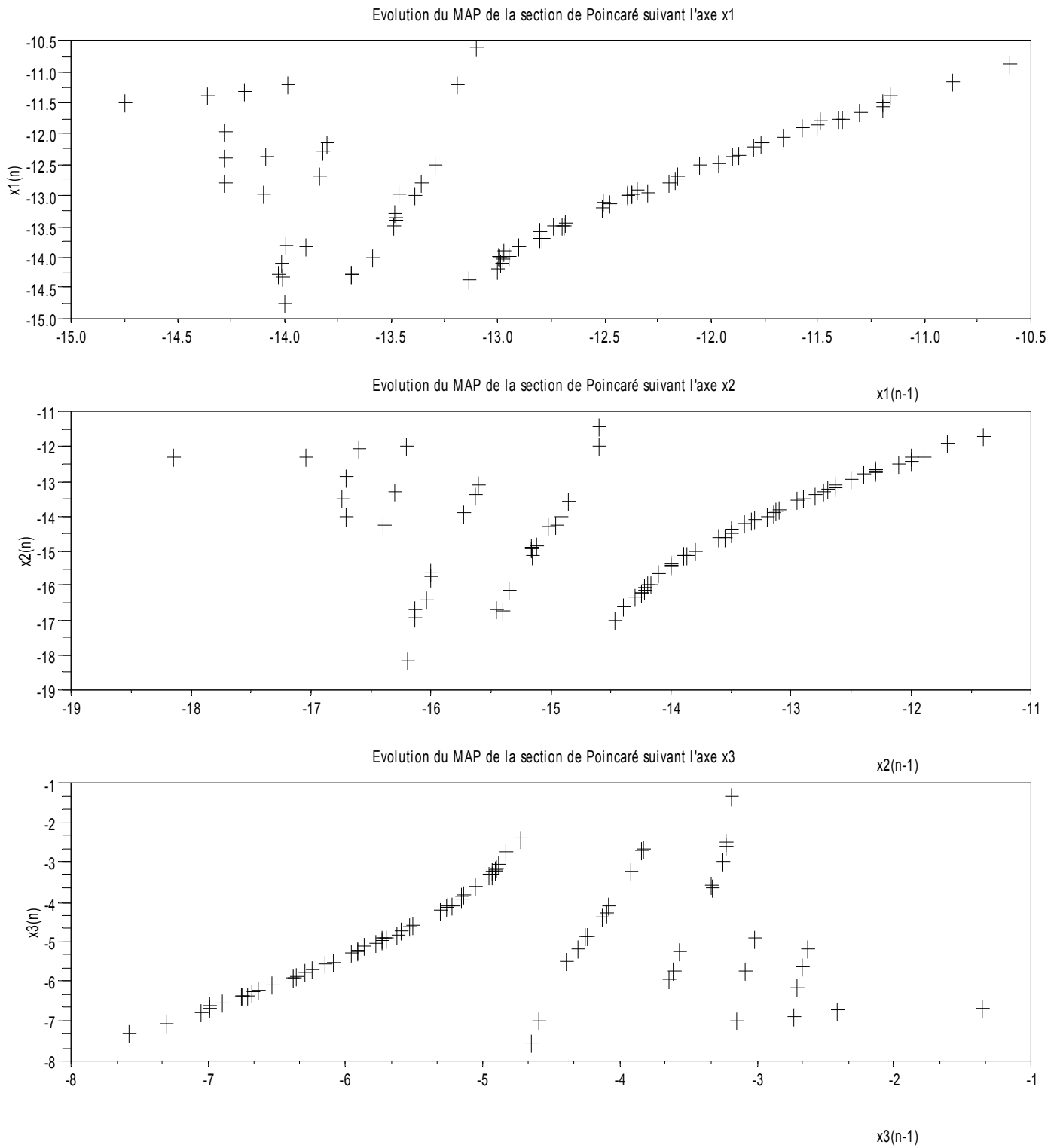
L'exemple suivant explore l'utilisation de la fonction « *poincare* » pour réaliser des sections de Poincaré dans l'espace de phase reconstruit.

**Exemple IV-9:** Le script suivant réalise des sections de Poincaré dans l'espace de phase reconstruit par la série  $x$  avec une dimension  $M$  égale à 4 et un délai  $L$  égale à 25. Les sections sont réalisées suivant l'hyperplan perpendiculaire au troisième axe de l'espace de phase et pour différentes valeurs de l'intersection du plan avec l'axe. La section qui donne le plus d'intersections est sélectionnée pour le dessin. La figure IV-14 montre les lois de variations des points d'intersection avec la section de Poincaré selon les trois axes de l'hyperplan.

```
mp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);

Maxsize=0;
Maxz0=-10;
for z0=[-10:0.5:10];
    poinc=poincare(x,40000,4,25,0,3,z0);
    if size(poinc)>Maxsize then Maxzo=z0; end;
end;
poinc=poincare(x,40000,4,25,0,3,Maxz0);
subplot(3,1,1);
plot2d(poinc(1:$-1,1),poinc(2:$,1),-1*ones(poinc(2:$,1)));
xlabel('Evolution du MAP de la section de Poincaré suivant l"axe x1',
x1(n-1)',x1(n)');
subplot(3,1,2);
plot2d(poinc(1:$-1,2),poinc(2:$,2),-1*ones(poinc(2:$,2)));
xlabel('Evolution du MAP de la section de Poincaré suivant l"axe x2',
x2(n-1)',x2(n)');
subplot(3,1,3);
plot2d(poinc(1:$-1,3),poinc(2:$,3),-1*ones(poinc(2:$,3)));
xlabel('Evolution du MAP de la section de Poincaré suivant l"axe x3',
x3(n-1)',x3(n)');
```

On peut constater sur les dessins des traces du caractère déterministe de la série en inspectant chaque figure et également en comparant les figures entre elles.



**Figure IV-14** Projection de la section de Poincaré de la série x suivant trois axes



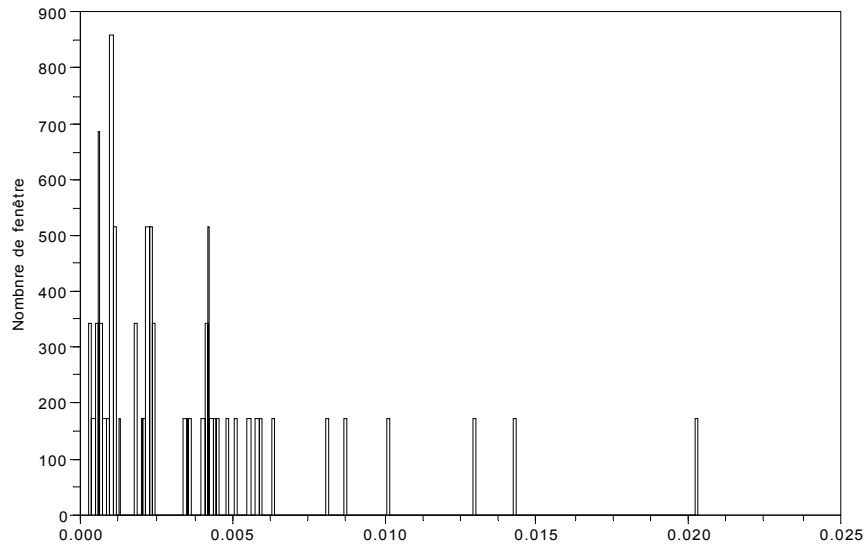
**Exemple IV-10** Le script suivant calcule l'exposant de Lyapunov maximal pour la série  $x$  par la méthode de *Kantz*. La fonction *Lyap\_K* est utilisée pour différentes dimensions  $M$  et en utilisant une fenêtre glissante de la taille de 1000 échantillons. L'histogramme des valeurs estimées de l'exposant maximal de Lyapunov pour chaque fenêtre est dessiné et la valeur moyenne estimée.

```

tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);
retard=1000;
fenetre=1000;
DimMin=4;
DimMax=6;
Delai=25;
Lest=[];
err=[];
NbrWin=floor(size(x,1)/retard);
for ii=0:NbrWin-1,
    if ii*retard+fenetre<=size(x,1)...
        then
            orbit=x(ii*retard+1:ii*retard+fenetre);
        else
            break;
        end;
    [Nbr,L,Lesti,erri]=Lyap_K(orbit,,DimMin,Delai,,30,%T,DimMax,500);
    Lesti=mean(Lesti);
    erri=mean(erri);
    if modulo(ii,100)==0 then save('Test_Lyap_K__chaosimage_Lest_err.dat',Lest,err), end;
    Lest=[Lest, Lesti];
    err=[err, erri];
end;

```

Sur la figure IV-15, si on néglige les valeurs isolées, on peut voir que les valeurs de l'exposant tournent autour de l'intervalle  $[0.001,0.4]$  avec une moyenne de 0.0034433 ce qui correspond après ajustement par la division sur la période échantillonnage (0.003) du système « *Lorentz* » à 1.14.



**Figure IV-15:** Histogramme des valeurs de l'exposant de Lyapunov pour la série x.

L'exemple suivant montre l'utilisation de la fonction « *dvv* » pour l'application de la méthode DVV introduite dans la section III.3.2.

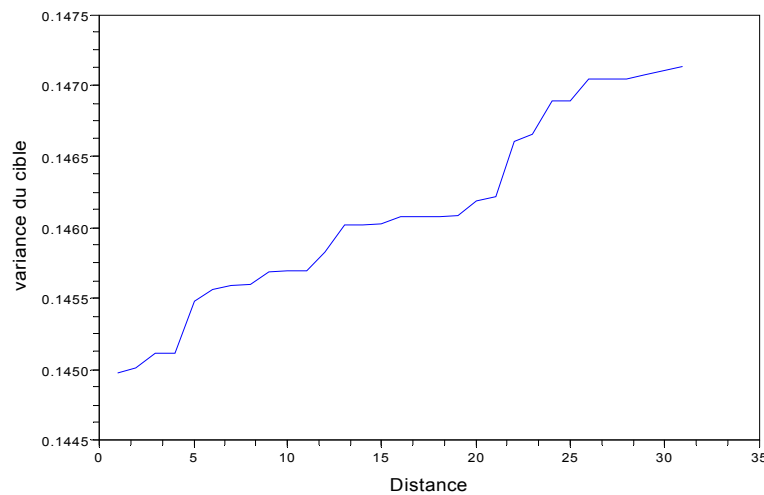
**Exemple VI-11:** Le script suivant explore la série x en utilisant la méthode DVV. En premier lieu, la fonction « *dvv* » est appliquée à la série elle-même, ensuite elle est appliquée à une série de substitution « *xsur* » qu'est générée en appelant la fonction « *surrogates* ».

```
tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);
                                Valeurs de l'exposant de Lyapunov

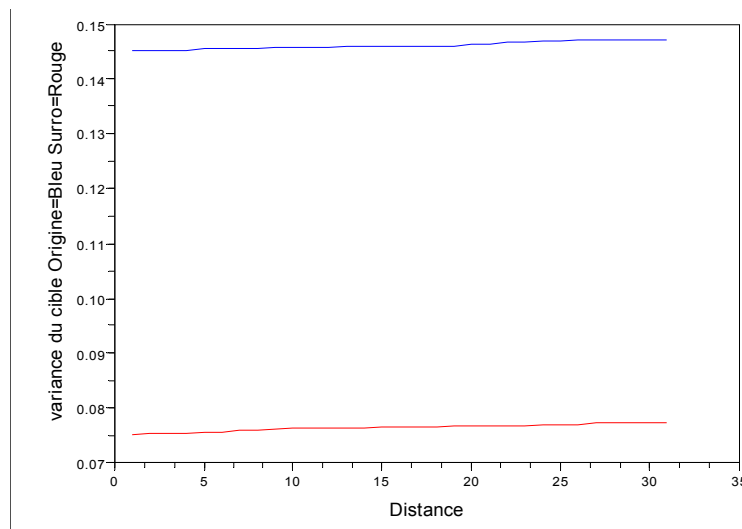
[DVV,rd]=dvv(x,1000,3,25,3,3);
xsur=surrogates(x(20000:30000),2,1);
[DVVs,rds]=dvv(xsur,1000,3,25,3,3);

plot(1:size(rd,2),DVV);
xtitle('M='+string(M)+' L='+string(L),'Distance','variance du cible');
scf();
plot(1:size(rd,2),DVV);
plot(1:size(rds,2),DVVs,'r-');
xtitle('M='+string(M)+' L='+string(L),'Distance','variance du cible Origine=Bleu Surro=Rouge');
```

Les figures suivantes traduisent les résultats obtenus.



**Figure IV-15:** La variation de l'indice DVV de la série x en fonction de la distance (standardisée en commençant à  $\mu_d - n_d \cdot \sigma_d$ ).



**Figure IV-16** Résultats du test DVV pour la série x (en bleu) comparés à ceux de la série régénérée (en rouge)

On peut constater de la figure IV-15 que la variance DVV suit un parcours similaire au parcours associé aux systèmes chaotiques traités dans la section III.3.2. On peut aussi déduire de la figure IV-16 que la série x est loin d'être linéaire.

Le dernier exemple illustre l'utilisation de la fonction «  $d2$  » pour estimer la dimension de corrélation D2

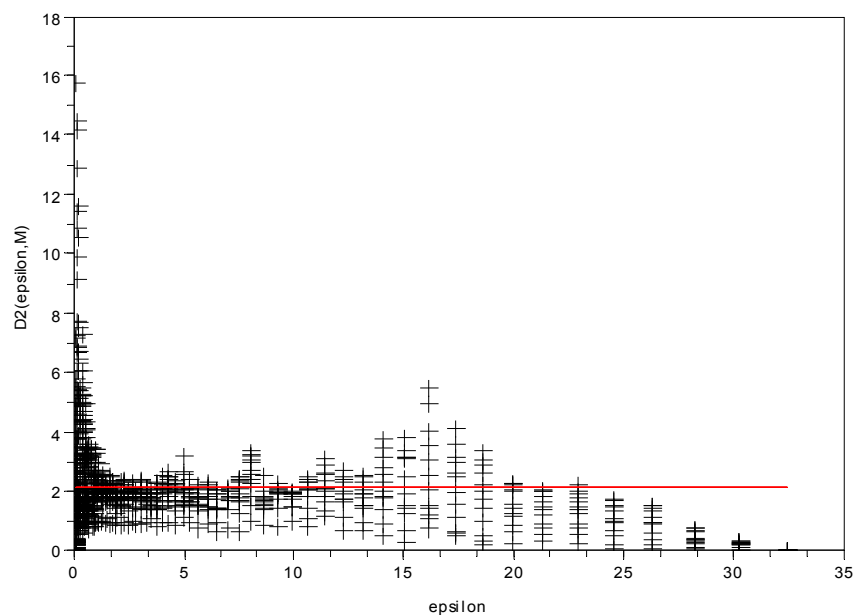
**Exemple IV-12:** Le script suivant applique la fonction «  $d2$  » à la série  $x$  et dessine les courbes résultantes.

```
tmp_x_y_z=read('Sim_Lorentz.dat',-1,4);
tmp=tmp_x_y_z(:,1);
x=tmp_x_y_z(:,2);

D2=d2(x(20000:30000),10000,12,50,,500);
plot2d(D2(:,1),D2(:,2),-1*ones(D2(:,2)))
xtitle('Epsilon','Dimension');
```

La figure VI-18 montre le résultat de l'estimation. Malgré une déformation non attendue pour les petites distances (epsilon) la moyenne des résultats (2.176476) est proche de la dimension D2 actuelle de l'attracteur de Lorentz (2.06). Ces résultats restent discutables et nous classons la fonction «  $d2$  » avec les fonctions sensibles exigeant l'interprétation d'un expert.

**Figure VI-18** Résultats de l'application de la fonction «  $d2$  » à la série  $x$ .



### IV.2.2 Application à un signal physiologique

La construction des sections II-5 et II-6 nous a permis d'apprécier l'importance-majore des outils de détection de chaos dans le domaine électrophysiologique. Beaucoup des méthodes utilisées par les études mentionnées dans ces sections sont incluses dans la boîte « IsItChaos ».

Ainsi, notre boîte à outils présente un grand potentiel pour les études traitant des signaux physiologiques. Les chercheurs dans ce domaine ont l'habitude de tester leurs hypothèses sur des données standards de référence publiées dans des bibliothèques publiques. Un exemple très populaire serait l'archive publique gratuite « PysioBank » qui fournit plus de 40 bases de données disponibles au téléchargement sur le site : <http://www.physionet.org/physiobank/>

Les données disponibles sont bien caractérisées et incluent des relevés cardiaques, cardiopulmonaires, neuraux et autres divers signaux biomédicaux enregistrés chez des sujets sains et des sujets souffrant d'une grande variété de pathologies d'intérêt public.

Pour faciliter encore plus l'exploitation de cet archive, une bibliothèque d'utilitaires appelé « *Waveform Database interface library* » ou WFDB a été mis à la disposition des utilisateurs de l'archive. Les fonctions de cette bibliothèque ont été originellement développées pour explorer les bases de données de signaux ECG comme celle de le MIT-BIH (Massachusetts Institute of Technology-B. I. Hospital ). Par la suite la bibliothèque a été enrichie pour inclure plusieurs autres types de données.

La bibliothèque WFDB a été conçue sous forme de routine écrite en langage C et facilement intégrable dans des programmes C ou Fortran. Ce serait très intéressant de pouvoir bénéficier de cette bibliothèque sous Scilab, sachant qu'une bibliothèque d'interface entre MATLAB et WFDB existe déjà sous le nom de « *WFDB\_tools* ».

Dans ce sens, nous avons développé une fonction sous Scilab nommée « *ReadMITdata* » qui permet de lire les données de type « *record* » à partir d'une base de données ECG. Il peut s'agir d'une base de données stockée dans un disque local ou même une base de données internet. Cette fonction fait appel aux deux utilitaires « *rdsamp* » et « *rdann* » de la bibliothèque WFDB. L'exemple suivant illustre l'utilisation de cette fonction.

**Exemple IV-13:** Le script suivant lit l'enregistrement numéro 100 de la base de données « *mitdb* » directement à partir de l'archive internet de PhysioBank. L'information sur la variabilité des intervalles entre battements HRV est calculée ensuite, et les diagrammes du signal ECG avec l'annotation des battements et du signal HRV sont dessinés (Voir figure IV-19 et IV-20).

```
[ECG,Anotation]=ReadMITdata('mitdb/100');
HRV=diff(anot.BeatsSec); //Extraire les intervalles entre battements en secondes
// dessiner le signal ECG du premier canal d'acquisition
// et afficher les annotations pour chaque battement
plot(dat(1:2000,1),dat(1:2000,2))
i=1;
while anot.BeatsSec(i)<dat(2000,1);
xstring(anot.BeatsSec(i),0,anot.BeatsType(i));
i=i+1;
end;
xtitle('','Temps (s)','Amplitude normalisée');
// Dessiner les intervalles entre battements pour les 100 premiers battements
scf();
plot(HRV(1:100));
xtitle('','Batements','Intervalle entre battements (s)');
```

Le nombre d'échantillons utilisés pour dessiner le signal ECG est égal à 2000. Le nombre de battements utilisés pour afficher les annotations correspondantes est automatiquement calculé.

Le signal ECG et HRV peuvent ainsi être traités par les méthodes de « *IsItChaos* » avec la même méthodologie démontrée dans la section précédente, et nous encourageons le lecteur intéressé par ce domaine d'application d'explorer cette possibilité et poster ses commentaires et suggestions sur le site web de « *IsItChaos* ».

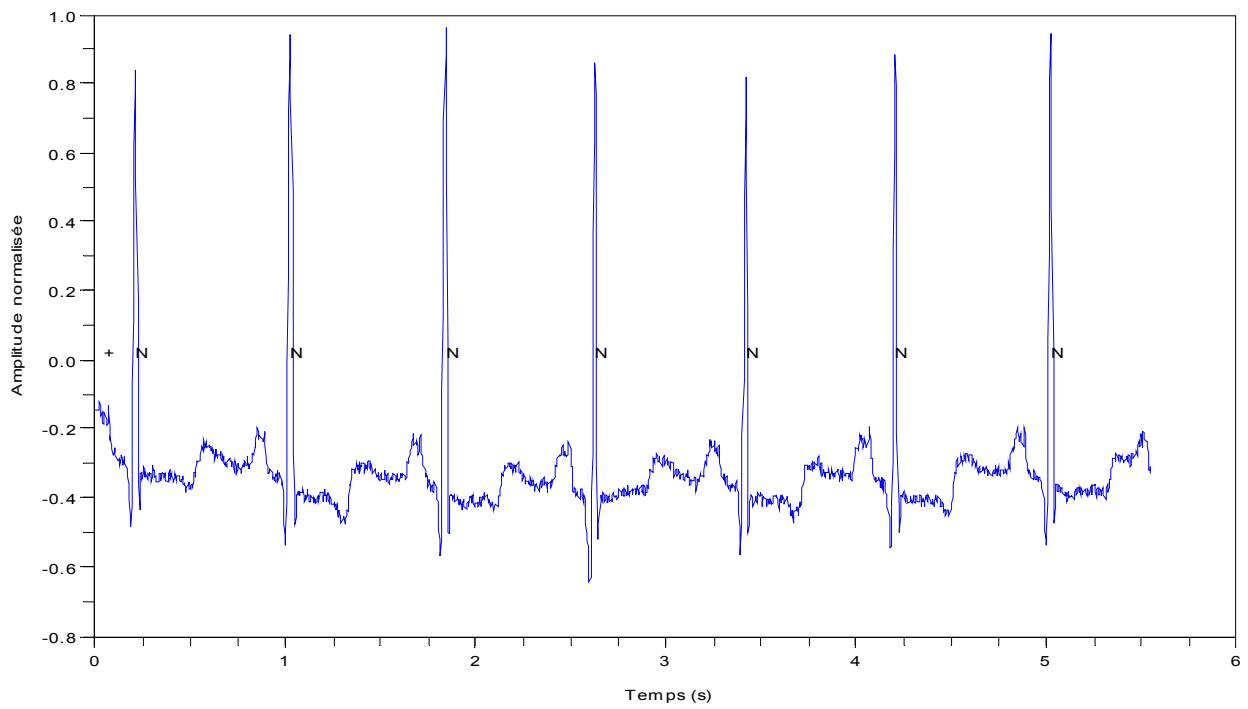


Figure IV-19 : Signal ECG dessiné dans l'exemple IV-13

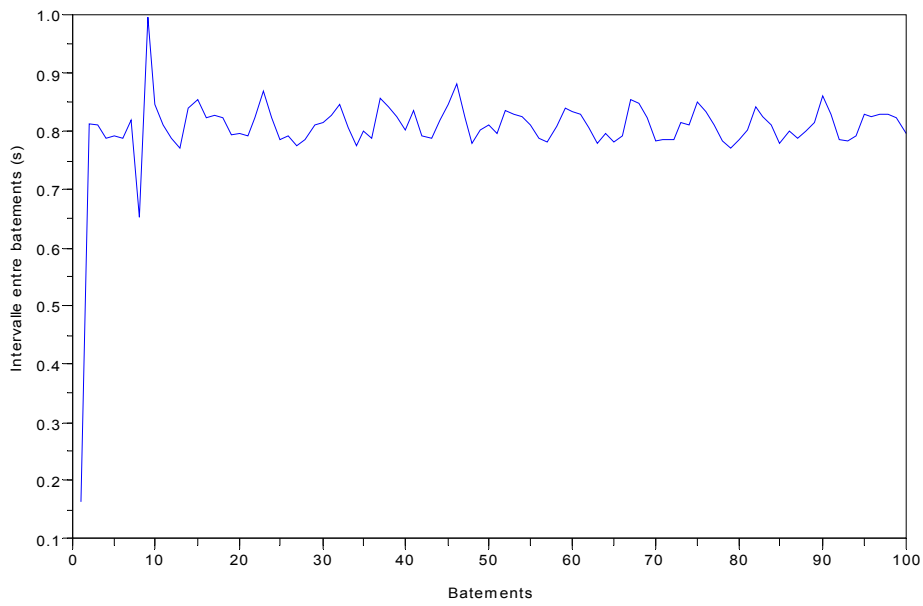


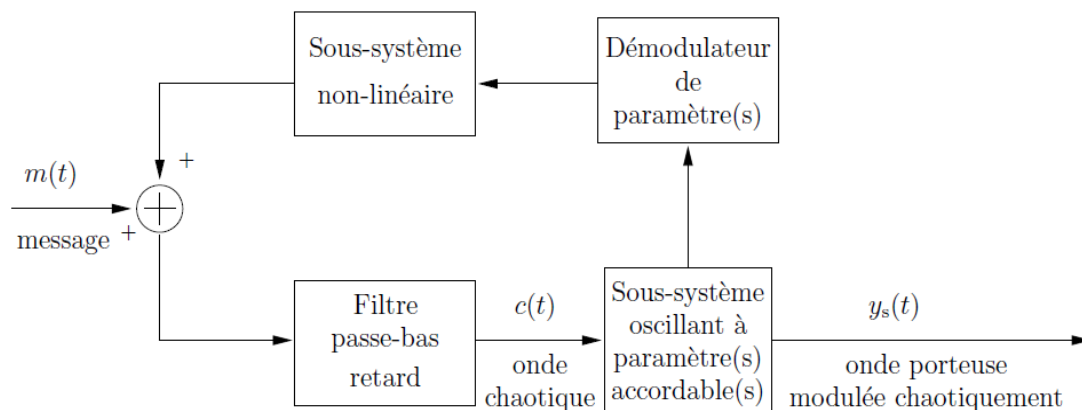
Figure IV-20 : Signal HRV dessiné dans l'exemple 4-?

### IV.2.3 Application à un système de transmission chaotique

Dans la section II.4 nous avons présenté plusieurs idées relatives à l'utilisation des méthodes de détection du chaos dans ce genre de système. Dans la section IV.1.4 nous avons présenté la boîte à outils « *modnum* » utilisée pour simuler et explorer les systèmes de communications numériques. Dans cet esprit, nous allons décrire une simulation d'un système de transmission chaotique incluse dans « *modnum* » et à laquelle nous avons ajouté notre petite contribution.

Le but ainsi recherché dans cette section est de préparer la base pour un futur travail qui va explorer les idées proposées dans la section II.4, et exploiter la boîte à outils « *IsItChaos* ».

Les systèmes de transmission chaotique simulés utilisent une synchronisation complète et un cryptage par inclusion. Le schéma global est basé sur des développements récents utilisant une oscillation chaotique pour moduler un paramètre d'une onde porteuse. L'architecture générale est présentée par la figure suivante.



**Figure IV-21:** Le schéma général du système de transmission chaotique simulé dans « *modnum* ».



Selon la référence [LAY01] « *La rétroaction réalise un oscillateur non linéaire, et le réglage des différents paramètres des sous-systèmes (non-linéarités, retard, fréquence de coupure, ...), permet d'ajuster la dynamique du signal chaotique basse fréquence* ».

Le système non linéaire dans la figure IV-21 est utilisé comme source de chaos. Dans la simulation, il a été basé sur un système numérique récursif décrit par une équation récurrente non linéaire de la forme :

$$y_k = F \left( \sum_{(i=0)}^{(n)} \alpha_{(i)} y_{(k-i)} + x_{(k)} \right) \quad (\text{eq.IV.1})$$

L'implémentation choisie est de deuxième ordre et représentée par la figure suivante:

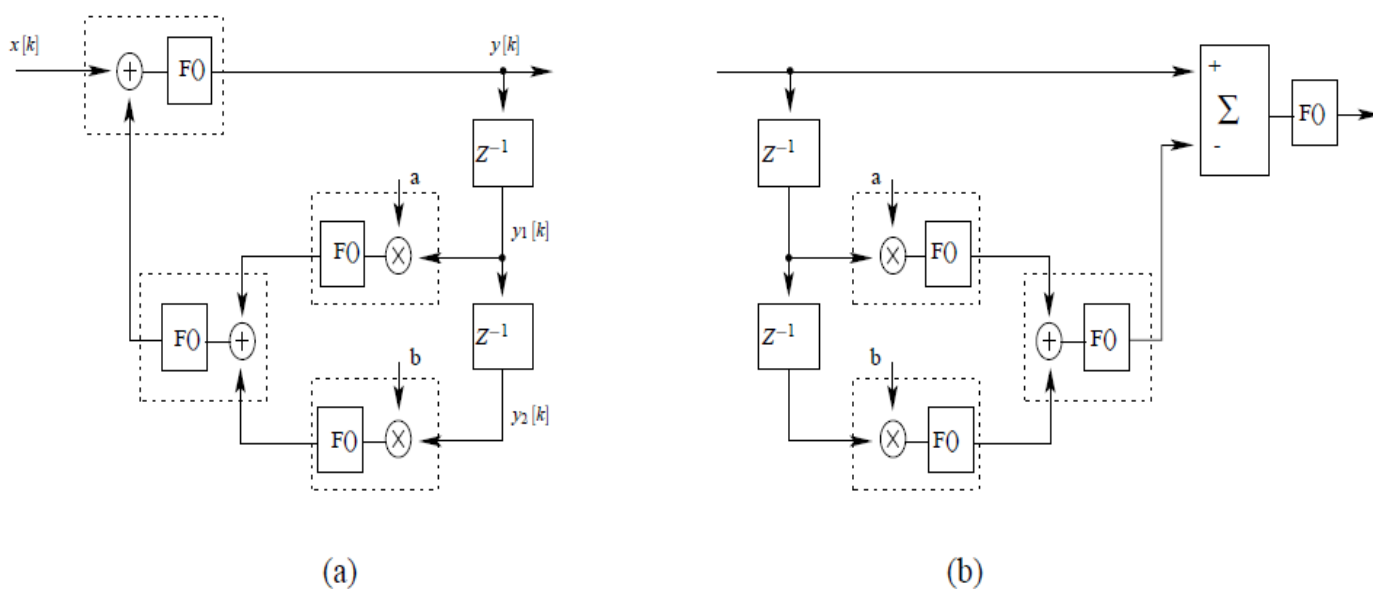


Figure IV-22 Codeur (a)-Décodeur(b) chaotique implémentés dans la simulation.

où  $F(.)$  représente la non-linéarité « modulo  $N$  »,  $x_k$  le message à coder,  $a$  et  $b$  des paramètres et  $y_k$  est la sortie du codeur chaotique en bande de base.

La simulation effectuée sous Scicos est représentée par le diagramme suivant

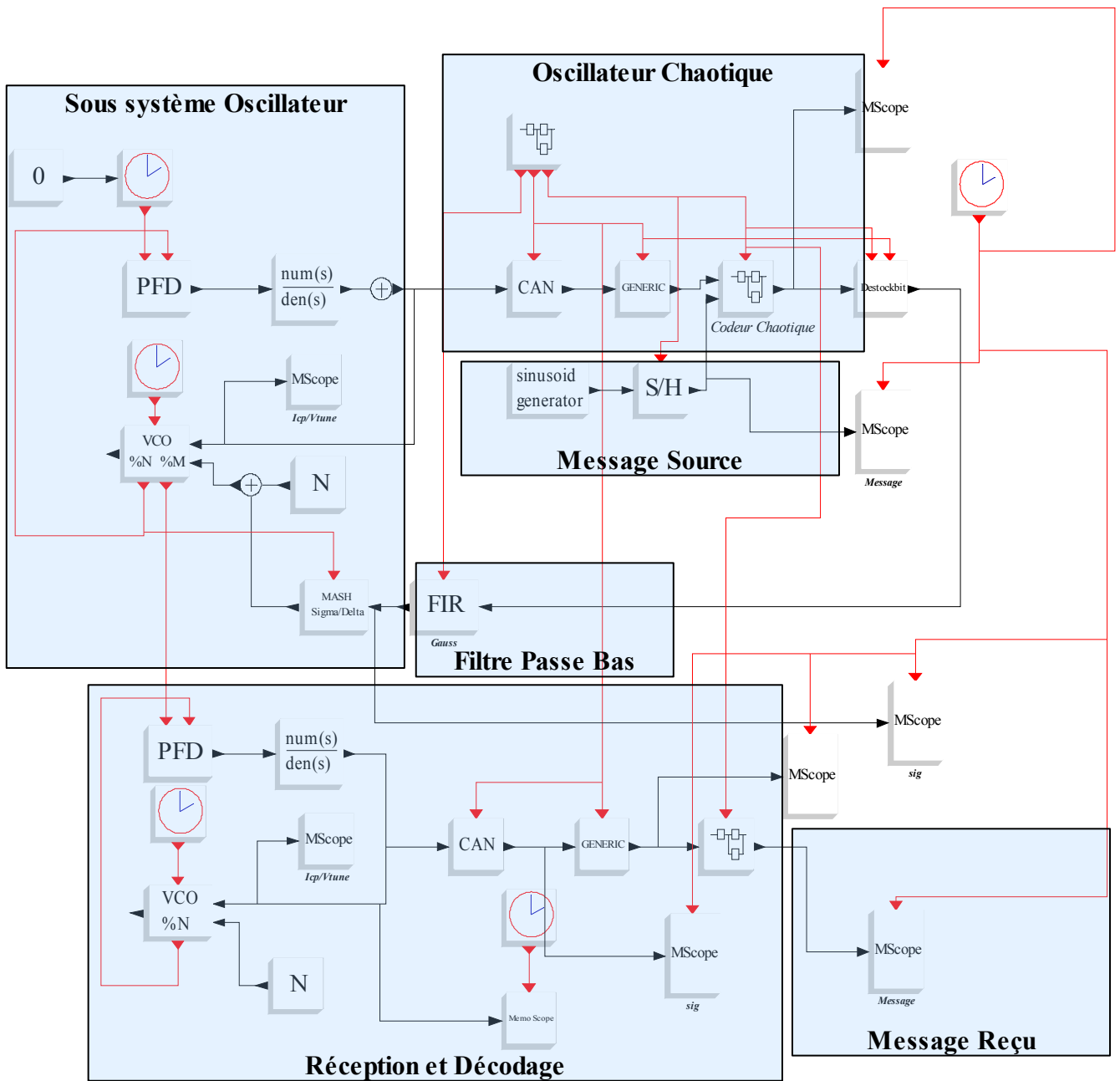
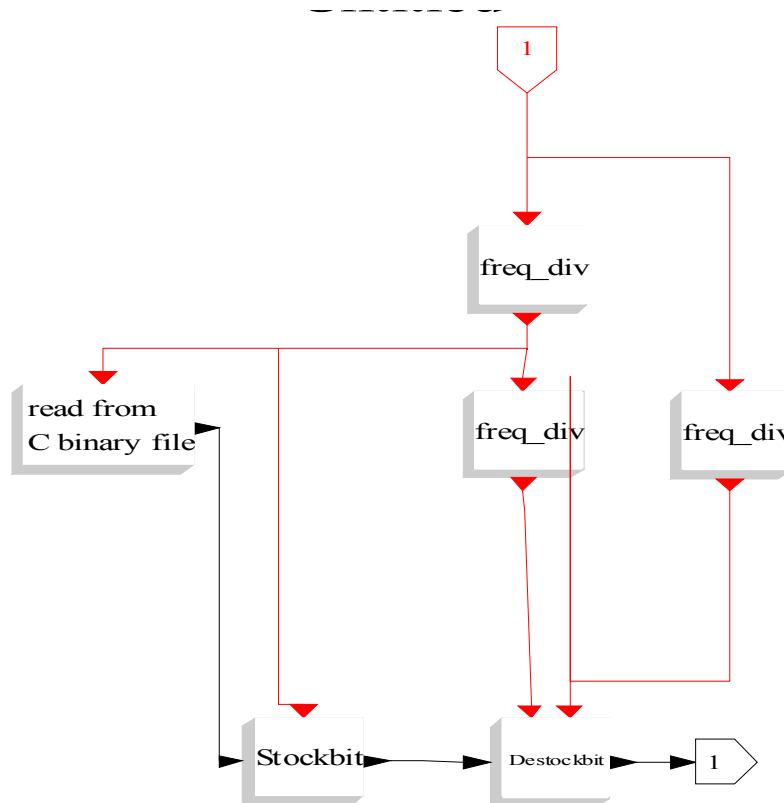


Figure IV-23: Simulation d'un système de transmission chaotique.

Nous avons altéré la partie « *Message Source* » pour créer la possibilité d'utiliser n'importe quel fichier comme Message source. Ainsi, le bloc générateur de fonctions sinusoïdales est remplacé par un super bloc (composite) montré dans la figure suivante:



**Figure IV-24:** Super Bloc Scicos utilisé pour lire un fichier et le conditionner à l'envoi dans le système de transmission chaotique.

Le super bloc lit le fichier sous forme binaire, un octet à la fois et adapte ensuite les données au format 12 bits de l'entrée du codeur chaotique.

L'image représentée dans la figure IV-25 a été utilisée comme données sources. Les résultats de simulations sont montrés par la suite.



**Figure IV-25:** L'image émise (à gauche) et l'image reçue (à droite) par la simulation du système de transmission chaotique.

Les deux images sont visiblement identiques. Ainsi, le bon fonctionnement du système altéré est vérifié. À présent nous avons un système à notre disposition sur lequel on peut appliquer les idées présentées dans la section II.4. Une de ces idées est d'explorer les caractéristiques d'un signal crypté par le chaos et de le comparer avec sa version original.

## *Conclusion et Perspectives*

Dans ce travail, nous avons présenté un état de l'art de la reconnaissance du chaos et certaines de ses applications. Nous avons constaté que ce domaine est en plein développement et métamorphose, avec une continuité de propositions et innovations de diverses origines. Nous avons également constaté l'existence de certains désaccords, comme pour le cas du chaos dans le coeur, un désaccord qui attend des progressions techniques pour être résolu. Toutefois, ceci n'entache en rien le très grand potentiel que présente ce domaine, surtout dans le cas de la cryptanalyse et le diagnostic de l'épilepsie.

Nous avons également mis au point une boîte à outils informatique "*IsItChas*" développée sous Scilab. Cette boîte à outils est la composition de plusieurs outils déjà existants et quelques fonctions nouvellement développées. Nous avons présenté un mode d'emploi de cette boîte sous forme d'exemples expliqués et illustrés.

Finalement, nous avons proposé des applications potentielles pouvant tirer un très grand avantage des outils présentés, en espérant que d'autres étudiants vont prendre la relève et amener à point notre modeste travail.

Les perspectives sont diverses et enrichies, ne serai-ce que pour la détection de l'épilepsie, où beaucoup de patients pourront bénéficier d'une meilleure vie, ce qui constitue un gain énorme en soi. La cryptanalyse est une application très intéressante sans nécessiter d'énormes moyens matériels.

# Bibliographie

- [ANI01] Vadim S. Anishchenko, Vladimir Astakhov , Alexander Neiman , Tatjana Vadivasova, Lutz Schimansky-Geier . "*Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*" 2<sup>e</sup> Ed., Verlag Berlin Heidelberg: Springer (March 10, 2003) 385 pp.
- [ARB01] Michael A. Arbib. "*The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*". 2<sup>e</sup> edition, Cambridge, Mass : MIT Press (Novembre 2002), 1308 pp.
- [AUB01] D. Aubin et A. Dahan Dalmedico. "*Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures*". *Historia Mathematica* (2002), vol. 29, pp. 273-339.
- [AUB02] David Aubin, Amy Dahan. "*Systèmes dynamiques et Chaos : Convergences et recompositions, un aperçu historique*". Apparu dans *Chaos & Systèmes dynamiques: éléments pour un épistémologie*, dir. Sara Franceschelli, Tatiana Roque & Michel Paty. Paris: Hermann, (11 décembre 2007), pp. 327-356.
- [BAR01] Barnett W.A. "*Comment on 'chaotic monetary dynamics with confidence'*". *Journal of Macroeconomics* (2006), Vol. 28 pp. 253- 255.
- [BAT01] Michael Batty et Paul M. Torrens. "*Modeling Complexity : The Limits to Prediction*". Cybergeog, 12th European Colloquium on Quantitative and Theoretical Geography.St-Valery-en-Caux, France, Septembre 7-11, 2001. article 201, mis en ligne le 04 Décembre 2001, modifié le 11 mai 2007. URL : <<http://www.cybergeog.eu/index1035.html>>. Consulté le 14 juin 2009.
- [BEL01] I.Belmouhoub et M. Djemaï. "*Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems for Secured Data Transmission*". *Chaos in Automatic Control : From Theory Towards Engineering Application* (2005), Edited by W. Perruquetti and J.P. Barbot, CRC Press Book, pp. 527-551.
- [BER01] BÉRUBÉ, Louise. "*Terminologie de neuropsychologie et de neurologie du comportement*". Montréal, Les Éditions de la Chenelière Inc.,1991, 176 pp., p. 140.
- [BIS01] Steven Bishop, Tomasz Kapitaniak. "*The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos*" : John Wiley & Sons (Mars 1999), 267 pp.

- [BLU01] L. Blum, M. Shub, and S. Smale. "*On a theory of Computation and Complexity Over the Real Numbers: NP-Completeness, Recursive Functions and Universal Machines*", Bulletin (new series) of the American Mathematical Society, Vol.21, N.1 (1989), pp. 1-46.
- [BUR01] Teodor Burghelea, Enrico Segre, Israel Bar-Joseph, Alex Groisman, and Victor Steinberg. "*Chaotic flow and efficient mixing in a micro-channel with a polymer solution*". Phys. Rev. E., Vol.69, N.6, (2004), pp. 066305-066312.
- [CHA01] Chappell, D., Panagiotidis, T. "*Using the Correlation Dimension to detect Non-Linear Dynamics: Evidence from the Athens Stock Exchange*". Econometrics EconWPA (2005), 0504005. URL : <<http://econpapers.repec.org/RePEc:wpa:wuwpem:0504005>> Consulté le 16 juin 2009.
- [CHA02] Chaovalitwongse, W.A. Ya-Ju Fan Sachdeo, R.C. Rutgers. "*On the Time Series K-Nearest Neighbor Classification of Abnormal Brain Activity*". Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions (Nov. 2007) Vol. 37, Issue 6, pp. 1005-1016.
- [CVI01] P. Cvitanov, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, "*Chaos: Classical and Quantum*". version 9.2.3, Copenhagen : Niels Bohr Institute, (Feb 26 2002) Disponible sur <ChaosBook.org>.
- [DEV01] Robert L. DEVANEY, "*A First Course in Chaotic Dynamical Systems*". Westview Press, (1992). 320 pp.
- [DIT01] W. L. Ditto, L. M. Pecora, "*Mastering Chaos*" Scientific American, (Aout 1993) pp. 77-84.
- [FAL01] I. Falconer, G. Gottwald, I. Melbourne and K. Wormnes. "*Application of the 0-1 Test for Chaos to Experimental Data*". SIAM J. Appl. Dyn. Sys. Vol. 6 (2007) pp. 395-402.
- [FAN01] Xiao Fan Wang. "*Controlling bifurcation and chaos in Internet congestion control system*". Intelligent Control and Automation, Proceedings of the 4th World Congress on Volume 1, Issue , (2002) pp. 573 - 576.
- [FLE01] Dorothy Fleischer, HST, "*Research aims to separate noise from chaos in subtle heart rhythms*", MIT Tech Talk on (August 29, 2001). Disponible sur: <<http://web.mit.edu/newsoffice/2001/chaos-0829.html>> consulté le 16 juin 2009.



- [FRA01] Aleksandr L. Fradkov. "*Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control*" Springer, (2007) 241 pp.
- [GAL01] Akemi Galvez Tomida. "*Matlab Toolbox and GUI for Analyzing One-Dimensional Chaotic Maps*". International Conference on Computational Sciences and Its Applications ICCSA (2008), pp. 321-330.
- [GAU01] Gautama, T.; Mandic, D.P.; Van Hulle, M.M. "*A novel method for determining the nature of time series*". IEEE Transactions on Biomedical Engineering Volume 51, Issue 5, (May 2004) pp. 728 - 736.
- [GID01] M.Gidea and D.Quaid, "*On Wesner's method of searching for chaos on low frequency*". Economics Bulletin, Vol.3, N°42, (2005) pp. 1-8
- [GOL01] Frank Gollas, Ronald Tetzlaff. "*Analysis of EEG-signals in epilepsy: spatio-temporal models*". 11th International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications Santiago de Compostela, Spain, (14-16 July 2008), pp 96-101.
- [GON01] Julián J. González, Juan J. Cordero, Manuel Feria, et Ernesto Pereda. "*Detection and sources of nonlinearity in the variability of cardiac R-R intervals and blood pressure in rats*" Am. J. Physiol: Heart. Circ. Physiol. Vol.279 Issue 6 (Dec 2000), pp.3040 – 3046.
- [GOT01] G. A. Gottwald and I. Melbourne. "*A New Test for Chaos in Deterministic Systems*". Proc. R. Soc. London, Ser. A 460 ( 2004), pp. 603–611.
- [GOT02] G. Gottwald and I. Melbourne. "*Testing for chaos in deterministic systems with noise*". Physica D. 212 (2005), pp. 100-110.
- [GOT03] Gottwald, Georg A.; Melbourne, Ian, "*Comment on 'Reliability of the 0-1 test for chaos'*". Physical Review E, vol. 77, Iss. 2, Pt. 2 (2006), pp. 028201- 028202.
- [GUA01] S. Guan, C.-H. Lai, and G. W. Wei. "*Phase synchronization between two essentially different chaotic systems*" Wei, Phys. Rev. Vol. 72, Iss. 1, (2005) pp. 016205 – 016212.
- [GUA02] Guan, Shuguang; Li, Kun; Lai, C.-H., "*Chaotic synchronization through coupling strategies*". Chaos, Volume 16, Issue 2, (2006) pp. 023107-023109

- [GUO01] Jun Guo Lu; Hill, D.J. "*Impulsive Synchronization of Chaotic Lurapos;e Systems by Linear Static Measurement Feedback: An LMI Approach*". IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, Volume 54, Issue 8, (Aug. 2007) pp. 710-714.
- [HAI01] S. M. Haider Aejaz. "*Modeling chaos in the heart*". PIMCS, Lahore, Pakistan, NCET, (December 18, 2004) pp 88-92.
- [HAN01] Kai T. Hansen. "*Symbolic Dynamics in Chaotic Systems*" Thesis presented for the degree Dr. Philos. at the Physic Departement, University of Oslo, Norway, .September, 1993. 318 pp.
- [HIR01] Hirsch M., Smale S., Devaney R. "*Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*". 2<sup>e</sup> Edition, USA, Elsevier Academic Press (2004), 432 pp.
- [HOG01] S. John Hogan. "*Nonlinear dynamics and chaos: where do we go from here*".CRC Press, (2002) 358 pp.
- [HU001] Jing Hu, Wen-wen Tung, Jianbo Gao et al. "*Reliability of the 0-1 test for chaos*". Phys. Rev. Vol. 72, Iss. 5, Pt. 2 (Nov. 2005) pp. 0562071- 0562075.
- [HU001] Hu, J, Gao, J, Principe, J. "*Analysis of Biomedical Signals by Lemepl-Ziv complexity: the effect of finite data size*". IEEE Trans. Biomed. Engg. Vol. 53, N.12, (2006), pp. 2606-2609.
- [IVA01] Vladimir G. Ivancevic. "*High-Dimensional Chaotic and Attractor Systems*". 1<sup>e</sup> edition, Netherlands: Springer; (Fév. 2007), 720 pp.
- [JOV01] Jovic, A.; Bogunovic, N. "*Analysis of ECG records using ECG Chaos Extractor platform and Weka system*". Information Technology Interfaces, 30th International Conference, (23-26 Juin 2008), pp. 347-352.
- [JUD01] Kevin Judd, Michael Small. "*Towards Long-Term Prediction*". Physica D vol. 136, (2000), pp. 31-44.
- [JUD02] Kevin Judd. "*Failure of maximum likelihood methods for chaotic dynamical systems*". Physical Review E, vol. 75, Issue 3, (2007), pp 1-7.
- [KAN01] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber. "*Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*". CHAOS vol. 9 (1999), pp. 413-435.

- [KAN02] Holger Kantz, Thomas Schreiber. "*Nonlinear Time Series Analysis*". 2<sup>e</sup> edition, Cambridge University Press, (Jan. 2004) 388 pp.
- [KAR01] Alexander Kraskov. "*Synchronization and Interdependence Measures and their Applications to the Electroencephalogram of Epilepsy Patients and Clustering of Data*". John von Neumann-Institut für Computing (NIC). (May 2004), 106 pp.
- [KHA01] Khan, S., Ganguly, A. R., et Saigal, S. "*Detection and predictive modeling of chaos in finite hydrological time series*". *Nonlinear Processes in Geophysics* vol. 12, (2005) pp. 41-53.
- [KIT01] Kitzbichler MG, Smith ML, Christensen SR, Bullmore E "*Broadband Criticality of Human Brain Network Synchronization*". *PLoS Comput Biol*, Vol. 5, No. 3. e1000314 (2009), Disponible sur: <<http://dx.plos.org/10.1371/journal.pcbi.1000314>>
- [KOR01] Henri Korn , Philippe Faure. "*Is there chaos in the brain? II. Experimental evidence and related models*". *Comptes Rendus Biologies* Vol. 326, N. 9, (septembre 2003) pp. 787-840.
- [KOS01] Eric J. Kostelich, Daniel P. Lathrop. "*The Prediction of Chaotic Time Series: a Variation on the Method of Analogues*". WAS & G.N.A (Eds.), *Time series prediction: Forecasting the futur and understanding the past*, Addison-Wesley (1992), pp. 283-295.
- [KRI01] Bindu M. Krishna, P. Indic , Usha Nair , R. Pratap. "*Quantifying chaotic synchronization using error evolution*". *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* Vol. 14 (2009) pp. 3682–3692.
- [KUG01] D. Kugiumtzis, and P. G. Larsson. "*Linear and Nonlinear Analysis of EEG for the Prediction of Epileptic Seizures*". *Proceedings of the 1999 Workshop "Chaos in Brain?"*. World Scientific, Singapore,(2000) pp 329 – 333.
- [LAY01] Alan LAYEC. "*Développement de modèles de CAO pour la simulation système des systèmes de communication. Application aux communications chaotiques*". Thèse N°5-2006, L'UNIVERSIT'É DE LIMOGES, FRANCE, Soutenue le 14 Fév. 2006, 198 pp.

- [LEI01] THEODOR LEIBER. "*On the Impact of Deterministic Chaos on Modern Science and Philosophy of Science: Implications for the Philosophy of Technology?*". ADVANCES IN THE PHILOSOPHY OF TECHNOLOGY: PROCEEDINGS OF A MEETING OF THE INTERNATIONAL ACADEMY OF THE PHILOSOPHY OF SCIENCE, KARLSRUHE, GERMANY, (MAY 1997), N2 , pp. 23-50.
- [LIC01] Licinio J. "*The autonomic nervous system and its impact on neuroendocrine regulation*". Bolis CL, Licinio J, eds. *The Autonomic Nervous System*. World Health Organization, Geneva, (1999), pp 53-65.
- [LIU01] Tung Liu, Clive W. J. Granger et W P Heller. "*Using the Correlation Exponent to Decide whether an Economic Series is Chaotic*". *Journal of Applied Econometrics*, 1992, vol. 7, issue S, pp. 25-39.
- [LUO01] Luo X, Nakamura T, Small M. "*Surrogate Test to Distinguish between Chaotic and Pseudoperiodic Time Series*". *Phys. Rev. E*. Vol. 71, Iss. 2, pt. 2; (2005), pp. 0262301-0262308
- [MAL01] Jaakko Malmivuo et Robert Plonsey. "*Bioelectromagnetism - Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*". 1<sup>e</sup> Edition, New York: Oxford University Press, (1995), 512 pp.
- [MAY01] Robert M May. "*Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*", *Nature*, Vol. 261, No. 5560. (10 June 1976), pp. 459-467.
- [NUN01] Nunez, M.; Morales, R.; Triguero, F. "*Automatic Discovery of Rules for Predicting Network Management Events*". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Volume 20, Issue 4, (May 2002), pp. 736 – 745.
- [OUT01] Bertrand Boutillier, Pr. Gérard Outrequin. "*Neuro-Anatomie Fonctionnelle*".(version 2007) Disponible sur <[www.anatomie-humaine.com](http://www.anatomie-humaine.com)>.
- [PAL01] Milan Palus. "*Testing For Nonlinearity Using Redundancies: Quantitative and Qualitative Aspects*". *Physica D*, Vol. 80, (1995) pp. 86—205.
- [PEC01] Louis M. Pecora, Thomas L. Carroll, Gregg A. Johnson, et Douglas J. Mar. "*Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications*" *Chaos* 74, (1997); pp. 520-543.
- [POO01] Chi-Sang Poon et Mauricio Barahona. "*Titration of chaos with added noise*". *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* June 19, 2001 vol. 98, N. 13, pp 7107–7112.

- [POR01] Porta, A. Guzzetti, S. Furlan, R. Gneccchi-Ruscione, T. Montano, N. Malliani "Complexity and Nonlinearity in Short-Term Heart Period Variability: Comparison of Methods Based on Local Nonlinear Prediction". IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Jan. 2007 Vol. 54, Iss. 1 pp. 94- 106.
- [RAI01] Vikas Rai et W.M Schaffer. "*Chaos in ecology*". Chaos, Solitons & Fractals Vol. 12, Iss. 2, (2 January 2001), pp.197-203.
- [RUB01] RUBIN, D.M. "*Use of forecasting signatures to help distinguish periodicity, randomness, and chaos in ripples and other spatial patterns*". Chaos, vol. 2, (1992) pp. 525-535.
- [SAR01] Sarbadhikari SN, Chakrabarty K. "*Chaos in the brain: a short review alluding to epilepsy, depression, exercise and lateralization*". Med Eng Phys. Vol. 23, N. 7, (Sep 2001),pp.445-455.
- [SCH01] T. Schreiber et A. Schmitz. "*Surrogate time series*". Physica D vol. 142, Iss. 3-4 (Aout. 2000), pp. 346 – 382.
- [SCH02] Frank Schweitzer. "*Modeling Complexity in Economic and Social Systems*" World Scientific Publishing Company (Fév. 2003), 404 pp.
- [SCH03] H. Schuster Georg. "*Deterministic Chaos - an Introduction*". 4<sup>e</sup> edition , Wiley, (2005), 288 pp.
- [SIL01] Silva C., Pimentel I.R.; Andrade A.; Foreid J.P.; Ducla-Soares E. "*Correlation Dimension Maps of EEG from Epileptic*". Springer, Brain Topography, Vol. 11, N. 3, (1999), pp. 201-209.
- [SLU01] Slutzky M.W., Cvitanovic P., Mogul D.J. "*Deterministic Chaos and Noise in Three In Vitro Hippocampal Models of Epilepsy*". Springer, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 29, N. 7, (Juil. 2001), pp. 607-618.
- [SMA01] Michael Small. "*Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance*". World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A - Vol. 52, (Mars. 2005), 260 pp.
- [SPR01] Julien C. Sprott. "*Chaos and Time-series Analysis*". Oxford University Press, (2003); 507 pp.
- [STA01] Peter Stavroulakis. "*Chaos applications in telecommunications*". CRC Press, (2006), 427 pp.

- [THE01] Theiler, J., Linsay, P. S. et Rubin, D. M. "*Detecting Nonlinearity in Data with Long Coherence Times*". ISanta Fe Institute Studies in the Science of Complexity, Proc. Vol. XV, Addison-Wesley, (1993), pp. 429-455.
- [TSO01] A. A. Tsonis et J. B. Elsner. "*Nonlinear prediction as a way of distinguishing chaos from random fractal sequences*". Nature vol. 358, (16 July 1992) pp. 217 – 220.
- [TUC01] Warwick Tucker. "*The Lorenz attractor exists*" C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, (1999) pp. 1197-1202.
- [WAN01] Lidong Wang Xiuying Xing Zhenyan Chu. "*On Definitions of Chaos in Discrete Dynamical System*" Young Computer Scientists ICYCS, The 9th International Conference (18-21 Nov. 2008), pp. 2874-2878.
- [WIL01] Samuel R. Wilkin, Michael J. Vinson, "*Nonlinear Forecasting and Detection of Chaos*". Journal of Undergraduate Research in High-Performance Computing , Vol. 3, (1993), pp101-111.
- [WIL02] G P Williams. "*Chaos Theory Tamed*". Washington D.C.:Joseph Henry Press (National Academy of Science), (1997), 532 pp.
- [YAM01] Yoshiharu Yamamoto. "*Detection of Chaos and Fractals from Experimental Time Series*". Modern techniques in neuroscience, Springer, (1999), 1325 pp., pp. 669-687.

# Annexe A : Détail des fonctions Scilab développées dans « IsItChaos »

## Les fonctions implémentées directement

Identificateur	Description	Paramètres d'entrée	Variables de sortie
orb	Simulation d'une fonction itérative $f$ contrôlée par un vecteur de paramètres $c$ . Si la fonction $f$ est omise alors la fonction quadratique est utilisée si RatCalc n'est pas donnée, et s'il est donné la fonction modulo2 est utilisée.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•NbrItir: Nombre de pas de la simulation</li> <li>•c: vecteur des paramètres</li> <li>•x0: vecteur des conditions initiales</li> <li>•f: une fonction itérative définie au préalable par l'utilisateur avec la forme <math>X(n+1)=f(Xn,c)</math>;</li> <li>•RatCalc: Un commutateur qui active le mode de calcul fractionnel.</li> <li>•DoPlot: Un commutateur qui active le dessin du parcours final de la trajectoire.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•orbit: la trajectoire résultante de la simulation.</li> </ul>
Bifur	Construit le graphe de bifurcation pour la fonction itératif « Map ».	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Map: Fonction itérative de la même forme que <math>f</math> dans « orb »</li> <li>•NbrItiCalc: Nombre d'itérations à calculer pour chaque valeur du paramètre <math>c</math>.</li> <li>•XO: Valeurs initiales</li> <li>•Aini: La valeur de départ pour le paramètre <math>c</math></li> <li>•Afin: Valeur finale de <math>c</math></li> <li>•Etap: Pas d'incrémentation pour <math>c</math></li> <li>•NbrItiGraph: Nombre d'itérations à dessiner à la fin de la série calculée (pour ne dessiner que la partie stationnaire)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•orbits: Les trajectoires calculées pour chaque valeur du paramètre <math>c</math>.</li> </ul>
Chaos01	Test la nature chaotique d'une série temporelle par la méthode 0-1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•orbit: La série de données à tester.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•K: L'indicateur du chaos</li> <li>•C: Le paramètre de calcul interne de la méthode 0-1</li> </ul>
ReadMITdata	Charge les données d'une base de données ECD compatible avec la base MITDB	<ul style="list-style-type: none"> <li>•FileName: Nom du fichier de l'enregistrement</li> <li>•Antr: Extension du fichier d'annotation</li> <li>•StopTime: temps de l'arrêt de lecture.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Dat: Données ECG</li> <li>•,Anot: Annotations des battements (temps en seconde, en minute, en heurs et le type de battement)</li> </ul>

Identificateur	Description	Paramètres d'entrée	Variables de sortie
dvv	Calcul l'a variation cible de la méthode DVV pour plusieurs distances rd.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit: série de données</li> <li>•NbrIter: nombre d'échantillons à traiter</li> <li>•Dim: La dimension M</li> <li>•Delai:Le délai L</li> <li>•nd:Le paramètre nd de la méthode DVV</li> <li>•N0:Le paramètre N0 de la méthode DVV</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•DVV: vecteur des valeurs de l'indice DVV</li> <li>•rd: vecteur des valeurs des distances rd.</li> </ul>

## Les fonctions de l'interface avec TISEAN

Identificateur	Description	Paramètres d'entrée	Variables de sortie
Henon_orbit	Simulation du système de Henon à deux variable x et y  $x(n+1) = 1 - a*x(n)^2 + b*y(n)$ $y(n+1) = x(n)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>•NbrIti: Nombre d'itérations[1000] <sup>1</sup></li> <li>•A: La valeur du paramètre a[1.4]</li> <li>•X0: la valeur initiale de x</li> <li>•B: La valeur du paramètre b[0.3]</li> <li>•Y0: la valeur initiale de y</li> <li>•NbrItTrans :Nombre d'itérations à ignorer (transitoires) [10000]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•X: Les valeurs de x</li> <li>•Y: Les valeurs de y</li> </ul>
Lyap_K	Calcul l'exposant de Lyapunov maximal par la méthode de Kantz	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit : Série temporelle à explorer</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à utiliser</li> <li>•Dim: Dimension minimale (Mmin)</li> <li>•Delai: Délais L</li> <li>•MinEps: Distance minimale pour la détection de voisins plus proches</li> <li>•NbrRef: Nombre de points de références à utiliser</li> <li>•NbrTimeIti: Nombre d'itérations dans le temps.</li> <li>•DoEstim: Un drapeau pour activer ou désactiver l'interpolation à la fin.</li> <li>•MaxDim: Dimension maximale (Mmax)</li> <li>•TheWin: Fenêtre de Theiler.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•NmrIti : vecteur des numéros d'itération.</li> <li>•L: l'exposant de divergence estimé à chaque itération</li> <li>•Lest: Estimation de l'exposant de Lyapunov</li> <li>•err: Erreur absolue de l'estimation, si négative, implique une estimation ratée.</li> <li>•Nbrelem: (réservé)</li> <li>•Indexelem: (réservé)</li> </ul>

<sup>1</sup> La valeur entre crochée est la valeur par défaut prise si l'utilisateur ne donne pas de valeur.



Identificateur	Description	Paramètres d'entrée	Variables de sortie
Lyap_R	Calcul l'exposant de Lyapunov maximal par la méthode de Rosenstein et al.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit : Série temporelle à explorer</li> <li>•NbrIti: Nombres d'échantillons à utiliser</li> <li>•Dim: Dimension M</li> <li>•Delai: Délais L</li> <li>•MinEps: Distance minimale pour la détection de voisins plus proches</li> <li>•NbrTimeIti: Nombre d'itérations dans le temps.</li> <li>•DoEstim: Un drapeau pour activer ou désactiver l'interpolation à la fin.</li> <li>•WinOmi: Fenêtre à omettre autour du point de référence.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•NmrIti : vecteur des numéros d'itération.</li> <li>•L : l'exposant de divergence estimé à chaque itération</li> <li>•Lest : Estimation de l'exposant de Lyapunov</li> <li>•err: Erreur absolue de l'estimation, si négative, implique une estimation ratée.</li> </ul>
stp	Calcul le schéma de séparation espace-temps par la méthode de Provenzale et al	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit : Série temporelle à explorer</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à utiliser</li> <li>•Dim: Dimension M</li> <li>•Delai: Délais L</li> <li>•ResTemps: Résolution temporelle.</li> <li>•EtapTemp: Pas temporel</li> <li>•EtapFarc: Pas fractionnel pour les tracés isoprobables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•x: Vecteur à deux colonnes, le premier est le numéro de pas temporel, et le deuxième est la distance spatiale nécessaire pour avoir la probabilité recherchée.</li> </ul>
nstat_z	Teste la non-stationnarité dans une série temporelle en la divisant en N segments et en calculant l'erreur de prédiction croisée entre les différents segments. (Méthode de Schreiber.)	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit : Série temporelle à explorer</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à utiliser</li> <li>•Dim: Dimension M</li> <li>•Delai: Délais L</li> <li>•NbrSeg: Nombre de segments utilisés pour diviser la série,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•forecast: Indice du segment utilisé pour l'estimation</li> <li>•forecasted: Indice du segment estimé.</li> <li>•err: Erreur d'estimation.</li> </ul>
Delay_var	Produit des vecteurs représentant les variables à retard de la reconstitution de l'espace de phase d'une série de données.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit: série de données à traiter</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à considérer</li> <li>•Dim: La dimension M</li> <li>•Delai: Le délai L</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•DV: vecteur des variables à retard.</li> </ul>
mutual	Estime l'information mutuelle à retard d'une série temporelle	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit: série de données à traiter</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à considérer</li> <li>•Delai: Le délai maximal</li> <li>•NbrBox: Nombre de box à utiliser dans l'algorithme</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Del: Délais</li> <li>•MutualInf: Information mutuelle correspondante aux délais.</li> <li>•OccupBox: Nombre de Box Occupés.</li> <li>•ShanEnt: Entropie de Shannon moyenne.</li> </ul>

Identificateur	Description	Paramètres d'entrée	Variables de sortie
poincare	Réalise une section de Poincaré suivant un des axes de l'espace de phase reconstruit par les variables à retard.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit: série de données à traiter</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à considérer</li> <li>•Dim: Dimension M</li> <li>•Delai: le délais L</li> <li>•CrossDirect: Direction de l'intersection avec la section (0 ou 1)</li> <li>•CrossAxe: La direction perpendiculaire à la section.</li> <li>•Crosspos: cordonnée de la section dans CrossAxe.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•X: Un vecteur à M colonnes, les premiers M-1 colonnes correspondent aux coordonnées des points d'intersection, et la dernière colonne au temps de l'intersection.</li> </ul>
false_nearest	Estime le pourcentage de faux voisins pour chaque dimension de reconstruction de l'espace de phase. Méthode de (Kennel et al.)	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit : Série temporelle à explorer</li> <li>•NbrIti: Nombres d'échantillons à utiliser</li> <li>•Dim: Dimension minimale (Mmin)</li> <li>•Delai: Délais L</li> <li>•NbrTimeIti: Nombre d'itérations dans le temps.</li> <li>•RatRef: Rapport de distance de référence au-delà duquel un point est considéré un faux voisin.</li> <li>•MaxDim: Dimension maximale (Mmax)</li> <li>•TheWin: Fenêtre de Theiler.</li> <li>•</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Dim: Un vecteur des dimensions M utilisées.</li> <li>•FalseNberFrac: Pourcentage de faux voisins plus proches</li> <li>•NberSize: Taille moyenne du voisinage</li> <li>•NberSize2: Taille au carré moyen du voisinage</li> </ul>
makenoise	Ajout du bruit uniforme à une série temporelle, ou crée du bruit.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit: série de données originale</li> <li>•NoisePerc: Pourcentage de bruit à ajouter</li> <li>•NoiseAbs: Valeur absolue du bruit à ajouter (variance dans le cas d'un bruit gaussien)</li> <li>•Gaussian: Commutateur pour créer un bruit gaussien au lieu d'uniforme</li> <li>•Creat: Commutateur pour créer du bruit au lieu de l'ajouter à la série de données.</li> <li>•Grain: Grain de la fonction aléatoire, il faut changer le grain pour avoir plusieurs séries différentes, sinon la même série est générée à chaque fois.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•X: La série mélangée avec du bruit ( ou le bruit tout court avec Creat).</li> </ul>

Identificateur	Description	Paramètres d'entrée	Variables de sortie
d2	Estime la somme de corrélation pour une série temporelle donnée.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit : Série temporelle à explorer</li> <li>•NbrIti: Nombre d'échantillons à utiliser</li> <li>•Dim: Dimension maximale Mmax</li> <li>•Delai: Délais L</li> <li>•NbrEps: Nombre de valeurs epsilon</li> <li>•TheWin: Fenêtre de Theiler.</li> <li>•MaxLenSca: L'échelle maximale à explorer</li> <li>•MinLenSca L'échelle minimale.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•X: les paires des valeurs (epsilon,D2(epsilon,M)) calculées.</li> </ul>
surrogates	Génère des données de substitution à partir d'une série temporelle originale, en conservant l'amplitude du transformé de Fourier et la distribution des valeurs.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Orbit: série de données originale</li> <li>•NbrIti : Nombre d'itérations , si égale à 1 alors la méthode AAFT est utilisée, si omise, les itérations sont répétées, jusqu'à avoir des résultats fixes.</li> <li>•ExactSpect: C'est un commutateur pour générer des données de substitution avec un spectre identique au lieu de seulement une distribution identique.</li> <li>•Grain: Grain de la fonction aléatoire, il faut changer le grain pour avoir plusieurs séries différentes, sinon la même série est générée à chaque fois.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•X: La série de substitution générée.</li> </ul>

## Résumé:

Les systèmes dynamiques non linéaires à dynamique complexe ont tardivement fait l'objet d'intense recherche et exploration donnant naissance à la fameuse théorie du chaos. Émerveillés par ce phénomène nous avons commencé à poser des questions fondamentales, quoi? Comment? et où? et nous avons présenté notre travail dans l'esprit de répondre à ces questions. Nous avons centralisé nos efforts autour de l'analyse des systèmes chaotiques, et en particulier la première étape qui est « la reconnaissance du chaos». Cette reconnaissance a été employée directement et indirectement depuis des décennies, mais n'a pas encore été reconnue comme une discipline à part entière. Dans notre travail, nous essayons d'examiner les origines, l'évolution et les aspects réels de ce précieux outil.

## Abstract:

Non-linear systems with complex dynamics have lately been the subject of intense research and exploration, giving birth to “*chaos theory*”. Once taken by this phenomenon, we started a quest for the roots of such intriguing subject, asking what? How? and where? Thus we present this work in the hope of answering some of these questions. We focused our research on the analysis of chaotic systems, the first step in particular, which is “recognising chaos”. This procedure has been used directly and indirectly for decades now, yet without being established as standalone discipline. In this work we try to examine the origins, the evolution and the real- life aspects of this precious tool.

## ملخص

في الوقت القريب , بدأت الأنظم الديناميكية اللاخطية تكون ومازالت محط دراسات و بحوث مكثفة, مما أدى إلى بروز نظرية “الأنظم الفوضوية” المشهورة. نتيجة لانبهارنا بهذه الظاهرة الجذابة بدأنا بطرح الأسئلة الأساسية: ماذا؟ كيف؟ وأين؟ وها نحن نقدم عملنا هذا في أمل الوصول إلى إجابة لبعض من هذه التساؤلات. لقد ركزنا في بحثنا على تحليل الأنظم الفوضوية و لاسيما الخطوة الأولى التي تتمثل في: “تمييز الفوضى” بمعناها العلمي. هذه العملية التحليلية قد غدت تستخدم بشكل مباشر و غير مباشر منذ عدة عقود من الزمن, رغم عدم تمييزها كتخصص مستقل. حاولنا في بحثنا هذا دراسة جذور و تطورات و واقع هذه الأداة القيمة