UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID - TLEMCEN
FACULTE DE SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

pour l'obtention du grade de

MAGISTÈRE

Option :PROBABILITES ET STATISTIQUES

présentée par

MALTI Dounyazed Fatiha

Sur

LES PROCESSUS CROISSANTS DANS L'ORDRE CONVEXE

Devant le jury composé de :

Mr. H. DIB, PR Université de Tlemcen. **Président**.

Mr. A. LABBAS, MC Université de Tlemcen. **Examinateur**.

Mr. B. ABDELLAOUI, MC. Université de Tlemcen. **Examinateur**.

Mr. F. BOUKHARI, MC. Université de Tlemcen. **Invité**.

Mr. T. MOURID, Professeur. Université de Tlemcen. **Rapporteur**.

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le professeur T. MOURID, rapporteur du projet pour ses conseils.

Je voudrais remercier Monsieur F. BOUKHARI maître de conférence à l'université de Tlemcen pour son suivi et son soutien durant l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Monsieur le professeur H. DIB pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir présider le jury de ce projet.

Je remercie également Mr A. LABBAS et Mr B. ABDELLAOUI maîtres de conférence à l'université de Tlemcen, d'avoir accepté de se joindre à ce jury comme examinateur

Je ne me lasserai jamais de louer les efforts de tout les professeurs durant le cursus universitaire.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui ont contribué de prés ou de loin, par leurs conseils, leurs suggestions et par leurs encouragements, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse à la classe des processus croissants dans l'ordre convexe (PCOC). Nous donnons en particulier plusieurs exemples construits à l'aide du mouvement Brownien ou plus généralement des processus définis à l'aide d'une intégrale stochastique. Nous montrons aussi que ces processus sont des $1-$martingales et nous exhibons pour des processus croissants dans l'ordre convexe particuliers une martingales associée.
Nous développons les résultats établis dans l'article suivant :

Profeta, C.,Roynette, B., Yor, M., Some examples of processes wich are increasing in the convexe ordrer. preprint

ce mémoire est composé de trois chapitres

Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions très importantes en théorie de probabilité concernant les processus gaussiens. Nous donnons les principales propriétés du mouvement Brownien, du drap Brownien et des martingales.Nous abordons ensuite la notion d'intégrale stochastique qui est à la base des principaux exemples cités dans ce mémoire, nous terminons ce chapitre par quelques rappels sur les équations différentielles stochastiques.

Le deuxième chapitre est consacré aux processus croissants dans l'ordre convexe. Nous commençons par définir ces processus et nous montrons qu'on peut remplacer les fonctions convexes citées dans la définition par une fonction convexe possédant de bonnes propriétés. Nous donnons ensuite quelques exemples simples de tels processus. Aprés nous passons à des exemples plus compliqués construits à partir du mouvement Brownien ou des processus possédant la propriété du scalling. Nous montrons aussi que la solution de certaines équations différentielles stochastiques est un processus croissant dans l'ordre convexe.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons la notion de $1-$martingale et nous montrons l'équivalence entre les processus croissants dans l'ordre convexe et les $1-$martingale. Nous nous appuyons ensuite sur trois techniques différentes pour exhiber les $1-$martingales associées à des PCOC particuliers. La premiere technique fait appel au drap Brownien, la seconde est basée sur l'inversion du temps, elle est illustrée par deux exemples, le premier utilise le mouvement Brownien, le deuxiéme les processus de Lévy. La dernière technique est élaborée à l'aide des EDS .

Mots clés :PCOC, processus stochastique, martingale à temps continu, mouvement Brownien, EDS.

Chapitre 1

Outils probabilistes

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des notions essentielles en théorie des processus stochastiques, nous commençons par définir la classe des processus gaussiens et nous donnons deux exemples importants dans cette classe : le mouvement Brownien et drap Brownien, nous rappelons ensuite les notions de martingale ainsi que l'intégrale stochastique dans ces deux principale version : l'intégrale stochastique au sens d'It$\hat{o}$ et l'intégrale stochastique au sens Stratonovich et nous terminons ce chapitre par les principales propriétés des fonctions convexes.

1.1 Variables aléatoires gaussiennes

La loi normale est l'une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham de Moivre en 1733 qui l'utilisa afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Cette loi a été mise en évidence par Laplace et Gauss au $XIXe$ siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques. Sa densité de probabilité dessine une courbe dite courbe en cloche ou courbe de Gauss.

Définition 1.1.1 *Soit $m \in I\!R$, $\sigma \in I\!R_+$, on dit qu'une v.a.rX suit une loi normale d'espérance m, et de variance σ^2 si sa fonction de densité f_X est donnée par*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)$$

et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Remarque 1.1.2 *Nous avons*

- *Si X suit la loi normale elle admet pour fonction caractéristique, la fonction $\varphi_X(t)$ donnée par*

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{itm-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \qquad , \; t \in I\!R$$

- *Les v.a.r constantes sont des v.a.r gaussiennes de variance nulle (i.e $\sigma = 0$)*

Les variables aléatoires gaussiennes sont très importantes en théorie de probabilité car elles possèdent de nombreuses propriétés. La proposition suivante établit quelques unes.

Proposition 1.1.3 *Soit $\sigma \in I\!R_+$*

1. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors X est symétrique ($X \overset{loi}{=} -X$).*
2. *Si X est une variable aléatoire gaussienne, alors $\forall a, b \in I\!R$ $aX + b$ est encore une variable aléatoire gaussienne.*

La famille des variables aléatoires gaussiennes est fermée pour la convergence en loi. Le théorème suivant l'illustre

Théorème 1.1.4 *Soit $(m_n)_{n\geq 1}$; $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ deux suites de $I\!R$ et $I\!R_+$ resp, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r avec $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$.Si*

$$X_n \overset{loi}{\to} X \qquad \textit{alors} \qquad X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Où $\quad m = \lim_{n\to+\infty} m_n \qquad$ *et* $\qquad \sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$

1.2 Vecteurs gaussiens

Définition 1.2.1 *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, X est un vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes*
i.e

$$\forall a_1, ..., a_n \in I\!R \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

est une v.a.r gaussienne.

Proposition 1.2.2 *Si X est un vecteur gaussien alors*

1. *Sa fonction caractéristique φ_X est donnée par*

$$\varphi_X(u) = exp\{i < u, E(X) > -\frac{1}{2}(u^t cov(X)u)\}$$

Où $< u, E(X) >= \sum_{i=1}^{n} u_i E(X_i)$ *et* $cov(X) = (cov(X_i, X_j))_{1\leq\ i,j\leq\ n}$

2. *Si* $\forall\ i \neq j \quad cov(X_i, X_j) = 0$ *alors les v.a.r* $X_1, X_2, ...X_n$ *sont indépendantes*
3. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, K)$, où K est la matrice de covariance avec $k_{ij} = cov(X_i, X_j)$, si K est inversible alors sa fonction de densité est donnée par*

$$f_X(x_1, ..., x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(K)}} e^{-\frac{1}{2}<K^{-1}(x-m),(x-m)>}$$

Proposition 1.2.3 *Soit X un vecteur gaussien*

1. *Si Y est un vecteur gaussien alors*

$$X \stackrel{loi}{=} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ cov(X) = cov(Y) \end{cases}$$

2. *Si $E(X) = 0$, alors X est symétrique ($X \stackrel{loi}{=} -X$)*
3. *Invariance par transformation linéaire i.e si $Y = AX + b$, où A est une appliquation linéaire et $b \in I\!R^n$, alors Y est un vecteur gaussien.*

1.3 Processus stochastiques

Un processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. La vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples de ce genre de phénomène, où en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon. La météo ; la population d'une ville ; le nombre de personnes dans une file d'attente et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques. Ce dernier fut étudié pour la première fois par l'écossais Robert Brown en 1827 et reçoit le nom de mouvement brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution gaussienne dans la théorie des probabilités.

En 1923, N. Wiener donne une définition mathématique du mouvement brownien. Il étudie en particulier ses trajectoires qui sont continues mais nulle part différentiables. Par la suite, K. Itô développe un calcul différentiel spécifique au mouvement brownien : le calcul stochastique.

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ supposé complet de plus nous adaptons les définitions et les notations suivantes :

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in I\!R_+)$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et à valeur dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.*

Dans la plupart des cas étudiés dans ce mémoire, l'espace $(E, \mathcal{E})$ sera $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$ ou $(I\!R^n, \mathcal{B}_{I\!R^n})$.

Définition 1.3.2
Soit $(X_t; t \in I\!R)$ un processus stochastique ;

1. *Pour $0 \leq s < t$, les variables aléatoires $X_t - X_s$, sont appelées des accroissements du processus $(X_t)_{t\geq 0}$.*
2. *Un processus $(X_t; t \in I\!R_+)$ est à accroissements indépendants si pour toute suite $0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*
3. *Un processus $(X_t; t \in I\!R_+)$ est à accroissements stastionnaires si, la distribution de la variable $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t. En d'autre termes pour tout $t \geq 0, h > 0$, la loi de $X_{t+h} - X_t$ est égale à la loi de $X_h - X_0$.*
4. *Un processus $(X_t; t \in I\!R_+)$ est un processus de Lévy, continu si*
   - *$X_0 = 0$ P.p.s*
   - *$(X_t; t \in I\!R_+)$ est à accroissements stationnaires et indépendants*
   - *L'application $t \mapsto X_t$ est continue P.p.s*
5. *Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastique*
   - *On dit que Y est une modification de X si on a*

$$\forall\ t \geq 0\ , \quad P(X_t = Y_t) = 1$$

   - *On dit que X et Y sont indistingable si on a*

$$P(\forall\ t \geq 0, \quad X_t = Y_t) = 1$$

   et on note $X \equiv Y$

Définition 1.3.3 *Un processus $(X_t; t \in I\!R_+$ est à trajectoires continues si*

$$P(\{\omega \in \Omega : l'application\ t \rightarrow X_t(\omega)\ est\ continue\}) = 1.$$

A présent, on introduit le premier exemple de processus stochastique : le processus gaussien.

1.4 Processus Gaussien

Définition 1.4.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e*

$$\forall n \geq 1; \forall t_1, ..., t_n \in I\!R_+ \quad (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \quad \textit{est un vecteur gaussien}$$

D'une manière équivalente

$$X = (X_t)_{t\geq 0} \quad \text{est un processus gaussien} \Leftrightarrow \forall n \geq 1; \forall t_1, ..., t_n \in I\!R_+ \forall a_1, ..., a_n \in I\!R$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k X_{t_k} \quad \text{est une } V.a.r \text{ gaussienne}$$

Remarque 1.4.2 *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien alors la fonction $a(t) = E(X_t)$ est appelée fonction moyenne et la fonction $K(s,t) = cov(X_t, X_s)$ est appelée fonction de covariance*

Proposition 1.4.3 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus gaussien*

1. *Si $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien, alors*

$$\forall t \geq 0 \ , \quad X \overset{loi}{=} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(X_t) = E(Y_t) \\ cov(X_t) = cov(Y_t) \end{cases}$$

2. *Si $E(X_t) = 0$, alors X_t est symétrique ($X_t \overset{loi}{=} -X_t$)*
3. *Si $Y_t = AX_t$, où A est une application linéaire, alors (Y_t) est un processus gaussien*

1.5 Le mouvement Brownien

Comme exemple d'un prcessus gaussien, considérons le mouvement Brownien

Définition 1.5.1 *On appelle mouvement Brownien (standard) un processus stochastique $(B_t; t \in I\!R_+)$ vérifiant* *i)* $B_0 = 0$ *P.p.s ;*

ii)$(B_t; t \in I\!R_+)$ *est à accroissements indépendants,*

iii) $\forall 0 \leq s < t$, *la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$.

iv) L'application $t \mapsto B_t$ *est continue P.p.s.*

Proposition 1.5.2 *Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes*

1.
$$\begin{cases} ii)(B_t; t \in I\!R_+) \text{ est à accroissements indépendants,} \\ iii)\forall 0 \leq s < t,\ B_t - B_s \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, t-s) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} ii^{'})\forall t \geq 0, B_t \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, t), \\ iii^{'})\forall 0 < s \leq t, B_t - B_s \text{ et } B_s \text{ sont indépendants} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} ii^{''})(B_t)_{t\geq 0} \text{ est un processus gaussien, centré ,} \\ iii^{''})\forall s, t \in I\!R_+, cov(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = s \wedge t. \end{cases}$$

Le mouvement Brownien possède trois propriétés essentielles, et sont données par la proposition suivante

Proposition 1.5.3 *Soit* $B = (B_t; t \in I\!R_+)$ *un mouvement Brownien, alors*

a) Le processus $(-B) = (-B_t; t \in I\!R_+)$, *est un mouvement Brownien.*

b) Pour tout $s > 0$, *le processus*

$$(B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s; t \in I\!R_+)$$

est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq s)$ *;*
(c'est la propriété de Markov simple)

c) Si $\lambda > 0$, *et si* $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}, t \geq 0$ *alors le processus* $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien.(changement d'échelle)*

Preuve de la proposition .

a) <u>*Symétrie.*</u>

$i)$ $-B_0 = 0$ P p.s.

$ii'')$ on a $(-B_t)$ est de même loi que B_t. En effet : $B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t)$, donc $-B_t$ est symétrique, ainsi $-B_t \stackrel{(d)}{=} B_t$, alors $-B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t)$.

$iii'')$ $\forall\ s, t \in I\!R;\ cov((-B_t)(-B_s)) = E[(-B_t)(-B_s)] = E[B_t B_s] = t \wedge s$.

$iv)$ L'application $t \mapsto -B_t$ est continue P p.s.
et d'après la définition(1.5.1) et la proposition(1.5.2), $(-B)$ est un mouvement Brownien.

b) *Propriété de Markov simple.*

Soit $s > 0$, alors

i) $B_0^{(s)} = B_s - B_s = 0$ P p.s,

ii) $\forall t > 0$, $B_t^{(s)}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t)$,

iii) Si $u < v$, alors $B_u^{(s)} - B_v^{(s)}$ et $B_u^{(s)}$ sont indépendants, en effet : $\forall s > 0$, et pour $u < v$, $B_u^{(s)} - B_v^{(s)} = B_{v+s} - B_s - B_{u+s} + B_s = B_{v+s} - B_{u+s}$. Puisque $s < u + s < v + s$, alors $B_{v+s} - B_{u+s}$ et $B_{u+s} + B_s$ sont indépendants.

iv) Les deux applications $s \mapsto B_{t+s}$ et $s \mapsto -B_s$ P p.s. sont continues donc l'application $t \mapsto B_{t+s} - B_s$ l'est aussi.

c) *Changement d'échelle.* Soit $\lambda > 0$, on a

i) $B_0^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_0 = 0$ P p.s.

ii'') Il est clair que $(B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien, continu et centré.

iii'') $\forall t, s \in I\!R_+$, on a :

$$\begin{aligned} cov(B_s^\lambda, B_t^\lambda) &= cov(\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 s}, \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} cov(B_{\lambda^2 s}, B_{\lambda^2 t}) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 s \wedge \lambda^2 t) \\ &= s \wedge t. \end{aligned}$$

iv) L'application $t \mapsto B_t^\lambda$ est continue P p.s.

D'où $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien.

1.6 Drap Brownien

Un autre exemple du processus gaussien : Le drap Brownien

Définition 1.6.1 *Un drap Brownien $(W_{s,u},\ s, u \geq 0)$ indexé par $I\!R_+ \times I\!R_+$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance*

$$cov(W_{s,u}, W_{s',u'}) = K(s, u; s', u') = (s \wedge s')(u \wedge u')$$

Proposition 1.6.2 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien et $(W_{s,u},\ s, u \geq 0)$ un drap Brownien.*
Alors

1. *Pour tout $t \geq 0$ fixé :* $\quad (B_{ut}, u \geq 0) \stackrel{loi}{=} (W_{u,t}, u \geq 0)$
2. *Pour tout $u \geq 0$ fixé, $\forall s \leq t \quad , \quad W_{u,t} - W_{u,s}$ est indépendant de $W_{u,s}$*

Preuve La démonstartion de cette proposition découle de la définition

1. Montrons que pour $t \geq 0$ fixé $(B_{ut}, u \geq 0) \stackrel{loi}{=} (W_{u,t}, u \geq 0)$.
   Puisque le drap Brownien est un processus gaussien, il suffit donc de montrer que pour tout $t \geq 0$ fixé, on a :
   $$\begin{cases} E(W_{u,t}) = E(B_{ut}) \\ cov(W_{u,t}, W_{u',t}) = cov(B_{ut}, B_{u't}) \end{cases}$$
   Puisque le mouvement Brownien et le drap Brownien sont des processus gaussiens centrés, alors
   $$E(W_{u,t}) = 0 = E(B_{ut})$$
   De plus
   $$\begin{aligned} cov(W_{u,t}, W_{u',t}) &= (u \wedge u')(t \wedge t) \\ &= (u \wedge u')t \\ &= (ut \wedge u't) \end{aligned}$$
   pour $t \geq 0$, on a :
   $$cov(W_{u,t}, W_{u',t}) = cov(B_{ut}, B_{u't})$$
2. Montrons que pour tout $u \geq 0$ fixé, $\forall s \leq t$ on a :
   $$W_{u,t} - W_{u,s} \text{est indépendant de } W_{u,s}$$

   Comme $(W_{u,t}, u, t \geq 0)$ est un processus gaussien, la combinaison linéaire suivante
   $$a(W_{u,t} - W_{u,s}) + b(W_{u,s}) = a(W_{u,t}) + (b - a)W_{u,s}$$
   est une variable aléatoire gaussienne. Ainsi $(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s})^t$ est un vecteur aléatoire gaussien.
   Donc il suffit de montrer que $cov(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s}) = 0$
   $$\begin{aligned} cov(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s}) &= cov(W_{u,t}, W_{u,s}) - cov(W_{u,s}, W_{u,s}) \\ &= u(t \wedge s) - us \\ &= us - us \end{aligned}$$

Puisque $s \leq t$, on obtient

$$cov(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s}) = 0$$

Remarque 1.6.3 *1. On peut montrer aussi que pour tout $u \geq 0$ fixé,*

$$\forall s' \leq s \leq t \quad W_{u,t} - W_{u,s} \quad \text{et} \quad W_{u,s'} \quad \text{sont indépendants}$$

Comme

$$a(W_{u,t} - W_{u,s}) + b(W_{u,s'}) = a(W_{u,t}) - aW_{u,s} + bW_{u,s'}$$

est une variable aléatoire gaussienne, nous avons

$$\begin{aligned} cov(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s'}) &= cov(W_{u,t}, W_{u,s'}) - cov(W_{u,s}, W_{u,s'}) \\ &= u(t \wedge s') - u(s \wedge s') \\ &= us' - us' \end{aligned}$$

pour $s' \leq s \leq t$, ainsi

$$cov(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s'}) = 0$$

2. Pour $s \leq t$ $W_{u,t} - W_{u,s}$ est une variable aléatoire gaussienne puisque c'est une combinaison linéaire des variables d'un processus gaussien.
Avec

$$\begin{aligned} var(W_{u,t} - W_{u,s}) &= cov(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,t} - W_{u,s}) \\ &= cov(W_{u,t}, W_{u,t}) - cov(W_{u,t}, W_{u,s}) - cov(W_{u,s}, W_{u,t}) + cov(W_{u,s}, W_{u,s}) \\ &= ut - us - us + us \\ &= u(t - s) \end{aligned}$$

Donc

$$W_{u,t} - W_{u,s} \sim \mathcal{N}(0, u(t - s))$$

1.7 Martingales à temps discret

Définitions 1.7.1 – *Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de sous tribue de $\mathcal{F}$*

- *Soit* $(\mathcal{F}_n)$ *une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *alors* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$*est appelé espace de probabilité filtré*
- *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires réelles,* $(\mathcal{F}_n)$ *une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
  On dit que la suite (X_n) *est à adaptée à la filtration* $(\mathcal{F}_n)$ *si*
  $\forall n \geq 0 \quad X_n$ *est* $\mathcal{F}_n-$*mesurable*
- *Soit* $(\mathcal{F}_n)$ *une filtration, soit* $\quad T : \Omega \to I\!N \cup \{\infty\} \quad$ *une application , on dit que* T *est un temps d'arrêt par rapport à* $(\mathcal{F}_n)$ *si*

$$\forall n \in I\!N \quad , \qquad \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Définition 1.7.2 *On dit que la suite de variable aléatoire* (X_n) *est une martingale si* $\forall n \in I\!N$

1. $E|X_n| < \infty$
2. X_n *est* $\mathcal{F}_n-$*mesurable*
3. $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$

Exemple 1.7.3 *Soit* X_n *une suite de variables aléatoires réelles centrées intégrables et indépendantes avec* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Alors S_n *est une martingale*
- S_n *est* $\mathcal{F}_n-$ *mesurable*
- $E(|S_n|) \leq \sum_{k=1}^{n} E|X_k| < \infty$
- $E(S_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(S_n + X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = S_n + E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = S_n$

Définition 1.7.4 *Une famille de variable aléatoire* $(X_n)_{n \in I\!N}$ *est une surmartingale (resp. sous martingale) par rapport à* $(\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N}$ *si pour tout* $n \geq 0$

1. $E|X_n| < \infty$
2. X_n *est* $(\mathcal{F}_n)-$*mesurable*
3. $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n \quad$ *(resp* $\quad E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq X_n$*)*

Exemple 1.7.5 *Si* X_n *est une martingale alors* X_n^2 *est une sous martingale*

1.8 Martingales à temps continu

Définition 1.8.1 – *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une suite croissante de sous tribu de* $\mathcal{F}$

– *Soit* $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *alors* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$*est appelé espace de probabilité filtré*

– *Soit* (X_t) *un processus,* $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
On dit que (X_t) *est à adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si*
$\forall t \geq 0 \quad X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable*

– *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration, on défini la filtration suivante*

$$\mathcal{F}_{t^+} = (\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s)$$

– *Soit* $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration,* $\quad T : \Omega \to I\!R_+ \cup \{\infty\}$ *une application , on dit que* T *est un temps d'arrêt par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *si*

$$\forall t \in I\!R_+ \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Passons maintenant à la définition de martingale.

Définition 1.8.2 *un processus* (X_t) *tel que* $\forall t \in I\!R_+$, $\quad X_t$ *est* $(\mathcal{F}_t)-$*mesurable et* $E|X_t| < \infty$ *est appelé*

1. *Une martingale si*
$$\forall \;\; 0 \leq s \leq t \quad E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$$
2. *Une surmartingale si*
$$\forall \;\; 0 \leq s \leq t \quad E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$$
3. *Une sousmartingale si*
$$\forall \;\; 0 \leq s \leq t \quad E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Exemple 1.8.3 *Le premier exemple de martingale à temps continu est donné par le mouvement Brownien*

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^B, t \in I\!R_+)$.

   i) Rappellons d'abord que pour tout $t > 0$, $B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0,t)$, *ainsi*

$$\begin{aligned}
E[|B_t|] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= 2\int_0^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{t} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} \Big]_0^{+\infty} \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.
\end{aligned}$$

   ii) $\forall t > s \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}
E[B_t/\mathcal{F}_t^B] &= E[B_t - B_s/\mathcal{F}_t^B] + E[B_s/\mathcal{F}_t^B] \\
&= E[B_t - B_s] + B_s \\
&= B_t.
\end{aligned}$$

2. *Pour tout* $\theta \in I\!R$, $(exp\{\theta B_t - \frac{t}{2}\theta^2\}; t \geq 0)$ *est une martingale, en effet : Soit* $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned}
E[exp\{\theta B_t - \frac{t}{2}\theta^2\}/\mathcal{F}_s] &= e^{-\frac{t}{2}\theta^2} E[e^{\theta B_t - \theta B_s} e^{\theta B_s}/\mathcal{F}_s] \\
&= e^{-\frac{t}{2}\theta^2 + \theta B_s} E[e^{\theta(B_t - B_s)}/\mathcal{F}_s] \\
&= e^{-\frac{t}{2}\theta^2 + \theta B_s} E[e^{\theta(B_t - B_s)}] \\
&= e^{-\frac{t}{2}\theta^2 + \theta B_s} \{ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx \}
\end{aligned}$$

   car B_s *est* $\mathcal{F}_s$*-mesurable,* $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et* $(B_t - B_s) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

   De plus, en appliquant le changement de variable $[x = \sqrt{t-s}y]$, *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
E[exp\{\theta B_t - \frac{t}{2}\theta^2\}/\mathcal{F}_s] &= e^{-\frac{t}{2}\theta^2 + \theta B_s + \frac{(t-s)}{2}\theta^2} \{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\sqrt{t-s}\theta)^2}{2}} dy \} \\
&= exp\{-\frac{s}{2}\theta^2 + \theta B_s\}.
\end{aligned}$$

Définitions 1.8.4 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1) On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformémént intégrable si :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t| dP = 0.$$

2) Si $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p si :

$$\sup_{t\geq 0} E[|X_t|^p] < \infty.$$

Théorème 1.8.5 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si et seulement si*

a. $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^1.

b. $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_\varepsilon > 0$ tel que : si $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) < \alpha_\varepsilon$ alors

$$\sup_{t\geq 0} \int_A |X_t| dP < \varepsilon.$$

Proposition 1.8.6 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique :*

1) S'il existe v.a.r $Z \geq 0$ avec $Z \in L^1$ et $|X_t| \leq Z$, $\forall t \geq 0$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

2) Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que :

i) $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty$.

ii) $\sup_t E[g(|X_t|)] < \infty$.

Alors, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

3)Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est bornée dans L^p, $(p > 1)$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable

Proposition 1.8.7 *Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, Y un vecteur aléatoire à n composantes $\mathcal{B}-$mesurable et X une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{B}$. Alors, pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,*

$$E[h(Y, X)/\mathcal{B}] = \phi(Y), \ \text{P.p. s}, \tag{1.1}$$

où $\phi(t) = E(h(t, X))$.

Preuve de la proposition . *Soit h une fonction mesurable bornée, $Z \in \mathcal{B}$ et $Z \geq 0$. On a*

$$\phi(y) = \int h(y,x) f_X(x) dx,$$

et

$$\begin{aligned}
E[Zh(Y,X)) &= \int_{\mathbb{R}^{n+2}} zh(y,x) f_{Y,Z}(y,z) f_X(x) dx dz dy \\
&= \int z[\int_{\mathbb{R}^n} (\int h(y,x) f_X(x) dx) f_{Y,Z}(y,z) dy] dz \\
&= \int z\phi(y) f_{Y,Z}(y,z) dy dz \\
&= E[Z\phi(Y)];
\end{aligned}$$

d'où $\phi(t) = E[h(t,X)]$.

1.9 L'intégration stochastique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse essentiellement aux variables

$$\int_0^t H_s dX_s$$

H_s et X_s sont des processus stochastiques.
Pour cela, nous étudions deux notions essentielles pour le calcul stochastique : "la martingale locale" et "la semimartingale" . On suppose un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. donné.

1.9.1 Intégrale de Riemann Stieljes

Pour définir l'intégrale de Riemann−Stieljes, commençons d'abors par définir les fonctions à variation bornée

Définition 1.9.1.1
1. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, Δ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ i.e $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ et on note par $|\Delta| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}|$. Alors la variation de la fonction f sur $[a,b]$ est la quantité*

$$S_\Delta(f,[a,b]) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

2. *La variation totale de f sur $[a,b]$ est*

$$V_a^b(f) = \sup_\Delta S_\Delta(f,[a,b])$$

3. *Finalement, on dit que f est à variation bornée sur* $[a, b]$ *si*

$$V_a^b(f) < \infty$$

Exemples 1.9.1.2 *Les fonctions monotones, lipshitziennes ou de classe* C^1 *sont à variation bornée*

En effet

1. *supposons que* f *est une fonction croissante (resp décroissante), alors*

$$\begin{aligned} S_\Delta(f,[a,b]) &= \sum_{k=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{k=0}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= f(x_n) - f(x_0) \\ &= f(b) - f(a)(resp f(a) - f(b)) \end{aligned}$$

2. *Si* f *est une fonction lipschitzienne,* $\exists\ c > 0, \forall x, y \in [a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

Alors

$$\begin{aligned} S_\Delta(f,[a,b]) &= \sum_{k=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq c\sum_{k=0}^{n} [x_i - x_{i-1}] \\ &\leq c(b-a) \end{aligned}$$

Ainsi $\quad V_a^b(f) \leq c(b - a) < \infty$

3. *Si* f *est dérivable, par le théorème des accroissements finis, on obtient pour* $u \in [x, y]$,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(u)||x - y|$$

Alors f *est à variation bornée par le même raisonnement que le point* 2)

Définition 1.9.1.3 *Soit* f *et* ϕ *deux fonctions definies sur* $[a, b]$,
$\Delta_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_{p_n}^{(n)} = b\}$ *une suite subdivision de* $[a, b]$, *avec* $|\Delta_n| \overset{\lim_{n\to+\infty}}{\to} 0$ *et* $(\xi_i^{(n)})_{1\leq i\leq n}$ *une suite de* $[a, b]$ *vérifiant*

$$\forall \ \ 1 \leq i \leq n \quad x_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq x_i^{(n)}$$

On dit que f est intégrable par rapport à ϕ au sens de Riemann Stieljes si

$$I := \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^{(n)})(\phi(x_i^{(n)}) - \phi(x_{i-1}^{(n)}))$$

existe et fini
Dans ce cas on note

$$I = \int_a^b f(x)d\phi(x)$$

Théorème 1.9.1.4 *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et si ϕ est à variation bornée sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) < \infty$$

1.9.2 Processus à variations bornées

Définition 1.9.2.1 *Soit A_t un processus continu, adapté*

1. *On dit que A_t est croissant, si pour tout $\omega \in \Omega$*

$$t \to A_t(\omega) \quad \text{est croissante}$$

2. *On dit que A_t est à variation bornée, si pour tout $\omega \in \Omega$*

$$t \to A_t(\omega) \quad \text{est à variation borné}$$

Remarque 1.9.1
1. *Soit A_t un processus continu, adapté, A_t est un processus à variation bornée si et seulement s'il existe A_t^1, A_t^2 deux processus croissants tel que $A_t = A_t^1 - A_t^2$*
2. *Le mouvement Brownien est un exemple d'un processus qui est à variation non bornée sur n'importe quel intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+$, car*

$$P(V_a^b(B_t) < \infty) = 0$$

1.9.3 Variations quadratiques

Définition 1.9.3.1 *Soit $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ une suite de subdivision de [0,t], vérifiant $|\Delta_n| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu*
Posons

$$T_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n \wedge t} - X_{t_i^n \wedge t})^2$$

On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est à variation quadratique fini sur* $[0,t]$*, si*

$$\lim_{n\to+\infty} T_t^{\Delta_n}(X) \quad \text{existe en probabilité}$$

Dans ce cas, on note par

$$< X, X >_t = \lim_{n\to+\infty} T_t^{\Delta_n}(X)$$

Exemple 1.9.3.2 *Soit* $(B_t, t \geq 0)$ *un mouvement Brownien, alors*

$$\forall t \geq 0 \quad < B, B >_t = t$$

En effet *Soit* $\Delta^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{p_n}^{(n)} = t\}$ *une suite de subdivision de* $[0,t]$*, avec* $|\Delta_n| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$*, on a d'une autre part*

$$\sum_{i=1}^{p_n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) = t_{p_n}^{(n)} - t_0^{(n)} = t$$

D'autre part

$$\begin{aligned} T_t^{\Delta_n}(B) - t &= \sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 - t \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} [(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 - (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})] \end{aligned}$$

Posons

$$X_i^n = [(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 - (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})]$$

Alors les variables aléatoires $(X_i^n)_{1\leq i\leq p_n}$ *vérifient*

1. $E(X_i^n) = 0$
2. *les variables aléatoires* $(X_i^n)_{1\leq i\leq p_n}$ *sont indépendantes*
3. $E(X_i^n X_j^n) = 0$ *, pour* $i \neq j$

Donc

$$\begin{aligned} E[(T_t^{\Delta_n}(B) - t)^2] &= E[(\sum_{i=1}^{p_n} X_i^{(n)})^2] \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} E[X_i^{(n)2}] + 2\sum_{i=1}^{p_n} E[X_i^{(n)} X_j^{(n)}] \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} E[X_i^{(n)2}] \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})^2 \\ &\leq 2\max|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| \sum_{i=1}^{p_n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| \\ &\leq 2t|\Delta_n| \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} E[(T_t^{\Delta_n}(B)-t)^2]=0$$

Parsuite

$$T_t^{\Delta_n}(B)\xrightarrow{L^2} t \Rightarrow T_t^{\Delta_n}(B)\xrightarrow{proba} t =< B,B>_t$$

Définition 1.9.2 *Un processus adapté, continu $M=(M_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t,P)-$martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêts $\{T_n, n\geq 1\}$, telle que*

1) la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim_{t\to\infty} T_n=+\infty$ p.s.,

2) pour tout n, le processus $M^{T_n}1_{[T_n>0]}=(M_t^{T_n}1_{[T_n>0]})_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t,P)$ martingale uniformément intégrable.

Exemple 1.9.3

Le mouvement brownien, ou généralement, toute martingale continue est une martingale locale, en effet : il suffit de prendre $T_n=n$, on a

1) $T_n\nearrow+\infty$.

2) pour tout n, on a $\forall t\geq 0$, $M_t^{T_n}1_{[T_n>0]}=M_t^n 1_{[n>0]}=M_t^n=M_{t\wedge n}$ est uniformément intégrable par rapport à t, pour tout n, en effet

si $t<n$ *d'après la proposition(1.8.6), si on prend $g(t)=t^2$, alors i) et ii) sont évidemment vérifiés, donc M_t est uniformément intégrable.*

si $t\geq n$ *M_n est uniformément intégrable par rapport à t, pour tout n.*

Définition 1.9.4 *Soit $X=(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu, on dit que X est une semimartingale s'il s'écrit*

$$X_t=X_0+M_t+A_t$$

Où M_t est une martingale locale continue issue de 0 et A_t est un processus continu à variation bornée issu de 0

Théorème 1.9.5 *1. Si $M=(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue et $A=(A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à variation bornée , alors*

$$< A,A>\equiv 0\equiv< M,A>$$

2. Si $X_t=X_0+M_t+A_t$ et $Y_t=Y_0+N_t+B_t$ sont deux semimartingales, alors

$$< X,Y>\equiv< M,N>$$

Remarque 1.9.6 *Soit $(H_t; t \in \mathbb{R}_+)$ un processus continu et $(V_t; t \in \mathbb{R}_+)$ un processus à variation bornée. On définit*

$$(\int_0^t H_s dV_s)(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dV_s(\omega),$$

cette intégrale est définie trajectoire par trajectoire, puisque c'est l'intégrale au sens de Riemann-Stieltjes.

Définition 1.9.7 *Si M est une martingale locale continue, on note par $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus continus et adaptés $H = (H_t)_{t\geq 0}$ vérifiants*

$$\forall t \geq 0 \qquad E(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s) < \infty$$

Notation
On note par

$$\int_0^t H_s dX_s = (H.X)_t$$

Théorème 1.9.8 *1. Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue issu de 0, alors il existe une martingale locale continue issue de 0 notée $H.M$ tel que pour toute martingale locale $N = (N_t)_{t\geq 0}$*

$$\forall t \geq 0 \quad < H.M, N >_t = (H. < M, N >)_t$$

Où

$$< M, N >= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} (M_{t^n_{i+1}\wedge t} - M_{t^n_{i+1}\wedge t})(N_{t^n_{i+1}\wedge t} - N_{t^n_{i+1}\wedge t})$$

en probabilité

2. Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue telle que $X_t = X_0 + M_t + V_t$ où $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue et $V = (V_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à variation bornée alors

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dV_s$$

Le théorème suivant présente quelques propriétés de l'intégrale stochastique

Théorème 1.9.9 *1. Si X est une martingale locale continue alors $H.X$ est une martingale locale continue*

2. Si X est une martingale continue, bornée dans L^2 alors $H.X$ l'est aussi

3. *Si X est un processus continue à variation bornée alors $H.X$ est un processus à variation bornée*
4. *Si X est une semimartingale continue alors $H.X$ l'est aussi*
5. *Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale, si*
$$E(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s) < \infty \qquad \forall t \geq 0$$
Alors $H.X$ est une martingale De plus
$$E[(\int_0^t H_s dM_s)^2] = E(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s)$$
En particulier, si $H = (H_t)_{t\geq 0}$ un processus de $L^2_{loc}(B)$, alors
$$(M_t = \int_0^t H_s dB_s, t \geq 0)$$
est une martingale

Théorème 1.9.10 *Soit X une semimartingale continue, $H = (H_t)_{t\geq 0}$ un processus continu adapté et $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ une suite de subdivision de [0,t], vérifiant $|\Delta_n| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ Alors*
$$\sum_{i=1}^{p_n - 1} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \to \int_0^t H_s dX_s \quad , \quad \text{en probabilité}$$

Théorème 1.9.11 *(Formule d'Itô)*

1. *Soit X et Y deux semimartingales continues, alors*
$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t$$
Cette formule est celle d'intégration par partie
2. *Soit X une semimartingale continue et $f \in C^2(I\!R, I\!R)$; alors $f(X)$ est une semimartingale continue et*
$$f(X_t) = f(X_0) + \textstyle\int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s. \qquad (1.2)$$
3. *Soit X et Y deux semimartingales continues, $F : I\!R^2 \to I\!R^2$ de classe C^2, alors $F(X_t, Y_t)$ est une semimartingale et on a*
$$F(X_t, Y_t) = F(X_0, Y_0) + \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^i} F(X_s, Y_s)\ dX_s^i$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^i x^j} F(X_s, Y_s)\ d < X^i, X^j >_s$$

1.10 L'intégrale de Stratonovich

L'intégrale de Stratonovich développée par Ruslan L. Stratonovich et D. L. Fisk est une intégrale stochastique. Généralement l'intégrale d'Itô est la plus utilisée, malgré que parfois l'intégrale de Stratonovich est plus simple à utiliser.

Il est possible de passer d'une à l'autre en effectuant des changements de variables simple ce qui les rend équivalentes. Le choix entre les deux intégrales est une question de convenance.

Définition 1.10.1 *Soit $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ une suite de subdivision de [0,t], vérifiant $|\Delta_n| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ et X, Y deux semimartingales continues*
Posons

$$S^{\Delta_n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_n}(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})(Y_{t^n_{i+1}} - Y_{t^n_i})$$

si

$$\lim_{n\to+\infty} S^{\Delta_n} \quad \text{existe en proba}$$

Alors, on pose

$$\int_0^t X_s \circ dY_s = \lim_{n\to+\infty} S^{\Delta_n}$$

On remarque qu'il y a une différence entre cette intégrale et l'intégrale d'Itô, mais il y a une relation entre eux, la proposition suivante nous donne cette relation.

Proposition 1.10.2 *Soient X et Y deux semimartingales continues et f de classe C^1, alors*

1.
$$\int_0^t X_s \circ dY_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} < X, Y >_t$$

2.
$$\int_0^t f(X_s) \circ dY_s = \int_0^t f(X_s) dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'(X_s)\ d < X, Y >_s$$

3. *De cette proposition, on en déduit la relation suivante*
   - *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien, σ est de classe C^2 telle que les fonctions σ et $\sigma\sigma'$ sont lipshitziennes, tel que*

     $$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) \circ dB_s$$

     Alors nous avons

     $$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'(X_s)\sigma(X_s) ds$$

   - *Soit f une fonction deux fois dérivable on a le résultat suivant*

     $$f(X_t) = \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s) \circ dB_s$$

En effet

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\ d<X,X>_s \\
&= \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'(X_s)\sigma'(X_s)\sigma(X_s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma^2(X_s)ds \\
&= \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t (f'(X_s)\sigma(X_s))'\sigma(X_s)ds \\
&= \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s)\circ dB_s
\end{aligned}$$

Contrairement à l'intégrale d'Itô, on a en générale

$$E(\int_0^t X_s \circ dB_s) \neq 0$$

Où $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu.

1.11 Equations différentielles stochastiques

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été géné par la non différentiabilité du MB. Pour cela on a commencé par donner un sens à $\int_0^t H_s dB_s$, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique.

Dans toute cette partie, on s'intéressera à l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad \forall t \in [0, T]$$

Avec

$$b : [0, T] \times I\!R \to I\!R$$

et

$$\sigma : [0, T] \times I\!R \to I\!R$$

sont deux fonctions mesurables

Définition 1.11.1 *On dit que (X_t) est une solution de l'EDS, si elle verifie l'équation intégrale*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

Théorème 1.11.2 *(Existance et unicité)*
On suppose qu'il existent deux constantes K, C tel que pour tout $t \in [0,T], x, y \in \mathbb{R}$

1. *Condition de lipschitz en espace, uniforme en temps*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$$

2. *Croissance linéaire*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|)$$

Equation de Fokker−Planck
L'équation de Fokker−Planck est une équation aux dérivées partielles.
A une dimension, l'équation de Fokker−Planck avec un coefficient de diffusion $D_2(X,t)$ et de dérive (drift) $D_1(X,t)$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}(D_1(x,t)P(x,t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_2(x,t)P(x,t))$$

Où $P(x,t)$ est la probabilité que la particule soit au point x et à l'instant t
Relation avec les EDS
L'équation de Fokker−Planck peut être utilisée pour le calcul de la densité de probabilité pour un processus stochastique décrit par une EDS. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dB_t$$

La densité de probabilité $f(x,t)$ de X_t satisfait l'équation de Fokker−Planck de dérive $D_1(X,t) = \mu(X_t,t)$ et de diffusion $D_2(X,t) = \sigma(X_t,t)$

Introduisons maintenant la définition et une proposition importante pour le chapitre suivant concernant les fonctions convexes

1.12 Fonctions convexes

Définition 1.12.1 *Soit f une fonction réelle définie sur E, on note domaine de f par*

$$dom f = \{x \in E; f(x) < +\infty\}$$

f est une fonction convexe si pour tout $x, y \in dom f$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Proposition 1.12.2 *Si f est une fonction convexe, alors f est lipschitzienne sur tout convexe compact inclu dans $dom f$*

Proposition 1.12.3 *Si f est une fonction de classe C^2, alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$*

Chapitre 2

Les processus croissants dans l'ordre convexe

Dans ce chapitre, nous étudions les processus croissants dans l'ordre convexe (PCOC). Nous présentons quelques exemples construits à partir du mouvement Brownien, martingales, EDS en développant l'article :

***Profeta, C.,Roynette, B., Yor, M.**, Some examples of processes wich are increasing in the convexe ordrer. preprint*

2.1 Définitions

***Définition 2.1.1** Soit X, Y deux variables aléatoires réelles intégrables. On dit que X domine Y pour l'ordre convexe si pour toute fonction convexe $\psi : R \to R$ tel que $E(|\psi(X)|) < \infty$ et $E(|\psi(y)|) < \infty$ on a*

$$E(\psi(X)) \geq E(\psi(Y))$$

On note cette relation par

$$X \overset{(c)}{\geq} Y \tag{2.1}$$

Généralement ,il n'est pas évident de montrer qu'un processus $(X_t\ , t \geq 0\ )$soit un PCOC en utilisant cette définition ,pour cela nous introduisons une nouvelle classe de fonction convexe notée $\mathcal{C}$.

***Définition 2.1.2** On note par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions ψ convexes, positives, de classe C^2 et tel qu'il existent a, a', b, b' tels que :*

$$\psi(x) = ax + b \quad \text{pour } x \text{ assez grand}$$
$$\psi(x) = -a'x + b' \quad \text{pour } x \text{ assez petit}$$

Exemple 2.1.3 *Soit la fonction ψ définie par*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in]-\infty, -2] \\ \frac{x^3}{6} + x^2 + 2x + 8/6 & si\ x \in [-2, -1] \\ \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 7/6 & si\ x \in [-1, 1] \\ -\frac{x^3}{6} + x^2 + x + 8/6 & si\ x \in [1, 2] \\ 3x & si\ x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

une telle fonction ψ appartient bien à $\mathcal{C}$:elle est convexe de classe C^2,2 fois dérivable en points de jonctions, positive et c'est des droites sur $]-\infty, -2]$ et $[2, +\infty[$

Proposition 2.1.4 *Si $\psi \in \mathcal{C}$ alors*

1) $|\psi'|$ *est bornée.*

2)ψ'' *est à support compact*

3)$\exists k_1, k_2$*positives telle que* $\psi(x) = |\psi(x)| \leq k_1 + k_2|x|$.

Preuve *Soit $\psi \in \mathcal{C}$. Donc ils existent M et M' tels que*

$$\psi(x) = \begin{cases} -a'x + b' & si \quad x \in]-\infty, M'] \\ \varphi(x) & si \quad x \in [M', M] \\ ax + b & si \quad x \in [M, +\infty[\end{cases}$$

où φ est une fonction de classe C^2, convexe, positive

1) $|\psi'|$ *est bornée*

En effet

$$\psi'(x) = \begin{cases} -a' & si \quad x \in]-\infty, M'] \\ \varphi'(x) & si \quad x \in [M', M] \\ a & si \quad x \in [M, +\infty[\end{cases}$$

ψ' est continue sur $[M', M]$ donc $|\psi'(x)| \leq (sup_{x\in[M',M]}|\psi'(x)|)$
Ainsi $|p^{*\prime}(x)| \leq \max(sup_{x\in[M',M]}|\psi'|(x), \grave{a}, a)$.

2) ψ'' *est a support compact*

Puisque ψ est convexe de classe C^2,

$$\psi''(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in]-\infty, M'] \\ \varphi''(x) & si \quad x \in [M', M] \\ 0 & si \quad x \in [M, +\infty[\end{cases}$$

Alors

$$\psi''(x) = \begin{cases} \varphi''(x) & si \quad x \in [M', M] \\ 0 & si \quad ailleurs \end{cases}$$

3) *Si on pose* $k_2 = max(\grave{a}, a)$;$k_1 \geq \psi(0)$ *d'où la majoration*

$$\psi(x)(= |\psi(x)|) \leq k_1 + k_2|x|$$

On remarque qu'il est plus facile de travailler avec la classe $\mathcal{C}$ *qui possède plusieurs propriétés que d'utiliser une fonction* ψ *convexe quelconque. La proposition suivante nous permet de passer à la classe* $\mathcal{C}$

Proposition 2.1.5 *soit* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles intégrables alors on a l'équivalence entre :*

$i)X \overset{(c)}{\geq} Y$

$ii)E(X) = E(Y)$ *et pour tout* $\psi \in \mathcal{C}$, $E[\psi(X)] \geq E[\psi(Y)]$

Preuve

1)*Montrons que* $i) \Rightarrow\ ii)$

Si $X \overset{(c)}{\geq} Y \ \Rightarrow\ \forall\ \psi$ *convexe* $E[(\psi(X))] \geq E[(\psi(Y))]$

Appliquons l'inégalité une fois pour $\psi(x) = x$ *et une fois pour* $\psi(x) = -x$,*on obtient alors :*

$E(X) \geq E(Y) \ \Rightarrow\ E(X) - E(Y) \geq 0$

Et

$E(-X) \geq E(-Y) \ \Rightarrow\ E(X) - E(Y) \leq 0$

Ainsi $\quad E(X) - E(Y) = 0 \ \Rightarrow\ E(X) = E(Y)$

De plus pour toute fonction ψ *convexe* $E[\psi(X)] \geq E[\psi(Y)]$. *Donc, en particulier pour* $\psi \in \mathcal{C}$.

D'une autre part, pour un $\psi \in \mathcal{C}$, $\quad E[|\psi(X)|] = E[\psi(X)] \leq k_1 + k_2 E[|X|] \leq \infty$

et $\quad E[|\psi(Y)|] = E[\psi(Y)] \leq k_1 + k_2 E[|Y|] \leq \infty$

2)*Montrons que* $ii) \Rightarrow\ i)$

Soit ψ *une fonction convexe quelconque, montrons que* $E[\psi(X)] \geq E[\psi(Y)]$

Nous voulons construire une suite $\psi_n \in \mathcal{C}$ *qui croît vers* ψ

Soit ψ *une fonction convexe, positive et*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x + \beta_n & si \quad x \in]-\infty, -n] \\ \psi(x) & si \quad x \in [-n, n] \\ a_n x + b_n & si \quad x \in [n, +\infty[\end{cases}$$

Pour x fixé et n assez grand $|x| < n$ alors $|\varphi_n(x) - \psi(x)| \to 0$
De plus φ_n ainsi définie est une suite de fonctions croissantes convexes continues par construction mais elle n'est pas de classe C^2
Pour régulariser nous procédons comme suit Soit ρ_n une suite régularisante à support compact
On pose $\psi_n(x) = \varphi * \rho(x)$, alors

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{1}(\alpha_n(x - \frac{y}{n}) + \beta_n)\rho(y)dy & si \quad x \in]-\infty, -n - \frac{1}{n}] \\ f_n(x,y) + \int^{x+\frac{1}{n}} \psi(y)\rho(n(x-y))dy & si \quad x \in]-n - \frac{1}{n}, -n + \frac{1}{n}] \\ \int_{-1}^{1} \psi(x - \frac{y}{n})\rho(y)dy & si \quad x \in [-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}] \\ g_n(x,y) + \int^{x+\frac{1}{n}} \psi(y)\rho(n(x-y))dy & si \quad x \in]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}] \\ \int_{-1}^{1}(a_n(x - \frac{y}{n}) + b_n)\rho(y)dy & si \quad x \in [n + \frac{1}{n}, +\infty[\end{cases} \tag{2.3}$$

Où

$$f_n(x,y) = \int_{x+n}^{\frac{1}{n}} (\alpha_n(x-y) + \beta_n)\rho(ny)dy$$

et

$$g_n(x,y) = \int_{x-n}^{\frac{1}{n}} (a_n(x-y) + \beta_n)\rho(ny)dy$$

- *Vérifions que ψ_n est convexe*

$$\begin{aligned} \psi_n(\theta x + (1-\theta)y) &= \varphi * \rho(\theta x + (1-\theta)y) \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(\theta x + (1-\theta)y - z)\rho(nz)dz \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(\theta(x-z) + (1-\theta)(y-z))\rho(nz)dz \end{aligned}$$

Mais, puisque φ_n est convexe

$$\begin{aligned} \psi_n(\theta x + (1-\theta)y) &= \theta \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x-z)\rho(nz)dz + (1-\theta)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(y-z)\rho(nz)dz \\ &= \theta\psi_n(x) + (1-\theta)\psi_n(y) \end{aligned}$$

Or ψ_n est croissante car $\varphi_n(x)$ et $\rho_n(x)$ sont croissantes par construction
De plus, pour x fixé et n assez grand $|x| < n - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} |\psi_n(x) - \psi(x)| &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} |(\psi(x - \frac{y}{n}) - \psi(x))|\rho(y)dy \\
&\leq \int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} |\psi(x - \frac{y}{n}) - \psi(x)|\rho(y)dy \\
&\to 0 \\
&\quad \textit{(car } \psi \textit{ est continue)}
\end{aligned}$$

Si ψ est convexe quelconque, il existe a, b tels que la fonction $\psi(x) + ax + b$ soit positive. Autrement dit, on peut toujours se ramener à une fonction positive convexe. Donc si nous montrons que

$$E(\psi(X) + aX + b) \geq E(\psi(Y) + aY + b)$$

nous aurons alors

$$E(\psi(x)) \geq E(\psi(y))$$

Car par hypothèse $E(X) = E(Y)$.
Soit $\psi_n \in \mathcal{C}$. Par hypothèse

$$E[\psi_n(X)] \geq E[\psi_n(Y)]$$

Par passage à la limite (en utilisant théorème de convergence monotone) nous aboutissons au résultat voulu.

Définition 2.1.6 *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est croissant dans l'ordre convexe (PCOC) si, pour tout $s \leq t$*

$$X_s \overset{(c)}{\leq} X_t$$

2.2 Exemples

Nous donnons quelques exemples des processus croissants dans l'ordre convexe.

Lemme 2.2.1 *Soient X, Y deux v.a.r intégrables*

1)

a) *Si $E(Y/X) = 0$ alors le processus $(X_t = X + tY,\ t \geq 0)$ est un PCOC*

b) *Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante*
Si $E(Y/X) = 0$ alors le processus $(X_t = X + \alpha(t)Y,\ t \geq 0)$ est un PCOC

2) *Soit* $\varphi : I\!R \to I\!R$ *de classe* C^1, *impaire, strictement croissante*
Si Y *est symétrique i.e* $Y \stackrel{loi}{=} -Y$ *alors*

a) *le processus* $(X_t = \varphi(tY),\ t \geq 0)$ *est un PCOC*

b) *Soit* $\alpha : I\!R_+ \to I\!R_+$ *une fonction strictement croissante*
le processus $(X_t = \varphi(\alpha(t)Y),\ t \geq 0)$ *est un PCOC*

3)

a) *Soient* $\varphi : I\!R \to I\!R$ *de classe* C^2, *impaire,strictement croissante et telle que* $sgn[\varphi''(x)] = sgn[x]$ $\quad \alpha, \beta : I\!R_+ \to I\!R_+$ *deux fonctions croissantes .*
Si X *et* Y *sont 2 V.a.r symétriques et indépendantes*
alors le processus $(X_t = \varphi(\alpha(t)X + \beta(t)Y),\ t \geq 0)$ *est un PCOC*

b) *Soit* $\varphi : I\!R \to I\!R$ *de classe* C^2 *, impaire ,strictement croissante et telle que* $sgn[\varphi''(x)] = sgn[x]$ $\quad \alpha_1, ...\alpha_n : I\!R_+ \to I\!R_+$ n *fonctions croissantes .*
Si $X_1, X_2.....X_n$ *sont n V.a.r symétriques et indépendantes*
alors le processus $(X_t = \varphi(\alpha_1(t)X_1 + ... + \alpha_n(t)X_n),\ t \geq 0)$ *est un PCOC*

Nous allons utiliser la proposition (2.1.5)
Preuve

1)

a) • *Montrons d'abord que* $E(X_t) = E(X_s)$
$E(X_t) = E(X + tY) = E(E(X + tY/X)) = E(X) + E(t\underbrace{E(Y/X)}_{=0} = E(X)$

• *Montrons que* $\forall\ t \geq 0\ \ E[|\psi(X_t)|] \leq \infty$
Soit $\psi \in \mathcal{C}$ $\quad E[|\psi(X_t)|] \leq k_1 + k_2E[|X + tY|] \leq k_1 + k_2E[|X|] + E[|tY|] < \infty$

• *Montrons que* $\forall \psi \in \mathcal{C}$ $\quad E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$
Soit $\psi \in \mathcal{C}$ *:*
$\psi'(x) \leq\ \alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)dP(w) < \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dP(w) = \alpha$
Ainsi on peut permuter l'esperance et la dérivée (par Lebesgue)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(\psi(X + tY))}{\partial t} &= E[Y\psi'(X + tY)] \\
&= E[Y\{\psi'(X) + \int_X^{X+tY} \psi''(u)du\}] \\
&= E[Y\psi'(X)] + E(Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)du) \\
&= E[E(Y\psi'(X)/X)] + E(Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)du) \\
&= E[\psi'(X)E(Y/X)] + E(Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)du)
\end{aligned}$$

$$= \quad E(Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)du)$$

Comme $\psi''(u) \geq 0$
Si $Y \geq 0 \Rightarrow tY \geq 0 \Rightarrow X + tY \geq X \Rightarrow Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)du \geq 0$
Si $Y \leq 0 \Rightarrow tY \leq 0 \Rightarrow X + tY \leq X \Rightarrow \int_X^{X+tY} \psi''(u)du \leq 0$
$\Rightarrow Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)du \geq 0$
Ainsi

$$\frac{\partial E(\psi(X+tY))}{\partial t} \geq 0$$

Donc $\quad \forall s \leq t \quad E[\psi(X_t)] \geq E[\psi(X_s)]$

b) • *Montrons que* $\forall \psi \in \mathcal{C} \quad E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$
soit $\psi \in \mathcal{C}$, $E[(\psi(X_t) - \psi(X_s))] = E[(\psi(X_t) - \psi(X_s))1_{\{Y\geq 0\}}] + E[(\psi(X_t) - \psi(X_s))1_{\{Y\leq 0\}}]$
– *Si* $y \geq 0$, *Appliquons le théorème des accroissements finis pour* $u \in [X + \alpha(s)Y, X + \alpha(t)Y]$

$$\begin{aligned}
E[(\psi(X_t) - \psi(X_s))1_{\{Y\geq 0\}}] &= E[\psi'(u)(\alpha(t) - \alpha(s))Y\ 1_{\{Y\geq 0\}}] \\
&\overset{\psi\ convexe}{\geq} E[1_{\{Y\geq 0\}}Y(\alpha(t) - \alpha(s)) \\
&\qquad \{\psi'(X) + \int_X^{X+\alpha(s)Y} \psi''(u)du\}] \\
&\geq (\alpha(t) - \alpha(s))[E\ 1_{\{Y\geq 0\}}[Y\psi'(X)] \\
&\qquad +E(1_{\{Y\geq 0\}}Y \int_X^{X+\alpha(s)Y} \psi''(u)du)] \\
&\geq (\alpha(t) - \alpha(s))[E1_{\{Y\geq 0\}}[E(Y\psi'(X)/X)] \\
&\qquad +E(1_{\{Y\geq 0\}}Y \int_X^{X+\alpha(s)Y} \psi''(u)du)] \\
&\geq (\alpha(t) - \alpha(s))[E1_{\{Y\geq 0\}}[\psi'(X)\underbrace{E(Y/X)}_{=0} \\
&\qquad +E(1_{\{Y\geq 0\}}Y \int_X^{X+\alpha(s)Y} \psi''(u)du)] \\
&\geq (\alpha(t) - \alpha(s))[E1_{\{Y\geq 0\}}(Y \int_X^{X+\alpha(s)Y} \psi''(u)du)] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

(*car* $Y \geq 0$,α *croissante* , $X + \alpha(s)Y \geq X$ *et* $\psi'' \geq 0$)

– *Si* $Y \leq 0$ *Appliquons le théorème des accroissements finis pour* $u \in [X+\alpha(t)Y, X+\alpha(s)Y]$

$$\begin{aligned} E[(\psi(X_s)-\psi(X_t)1_{\{Y\leq 0\}}] &= E[\psi'(u)(\alpha(s)-\alpha(t))Y1_{\{Y\leq 0\}}] \\ &\overset{\psi\ convexe}{\leq} E[\psi'(X_s)(\alpha(s)-\alpha(t))Y\ 1_{\{Y\leq 0\}}] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))\ 1_{\{Y\leq 0\}}] &\geq E[\psi'(X_s)(\alpha(t)-\alpha(s))Y)\ 1_{\{Y\leq 0\}}] \\ &\geq (\alpha(t)-\alpha(s))E[1_{\{Y\leq 0\}}Y \\ &\quad \{\psi'(X)+\int_X^{X+\alpha(s)Y}\psi''(u)du\}] \\ &\geq (\alpha(t)-\alpha(s))E[\ 1_{\{Y\leq 0\}}Y\int_X^{X+\alpha(s)Y}\psi''(u)du] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(car\ Y\leq 0,\ X+\alpha(t)Y\leq X\ \ et\ \psi''\geq 0)$$

2)

a) • *Montrons d'abord que* $E(X_t)=E(X_s)$
nous avons $Y \overset{loi}{=} -Y$. *Puisque* φ *est impaire alors* $\varphi(Y)\overset{loi}{=}-\varphi(Y)$.
Donc $\forall\ t\geq 0\ E(X_t)=E(X_s)=0$

• *Montrons que* $\forall\ t\geq 0\ E[|\psi(X_t)|]\leq\infty$
Soit $\psi\in\mathcal{C}$ $\quad E[|\psi(X_t)|]\leq k_1+k_2E[|\ \varphi(tY)\ |]$
Appliquons le théorème des accroissements finis $|\ \varphi(tY)\ |= t\varphi'(\theta)$, *pour* $(\theta\in[0,Y])$ *mais* φ' *est continue sur le compact* $[0,Y]$ *donc la fonction* φ' *est bornée sur* $[0,Y]$
Ainsi $E[|\ \psi(X_t)\ |]\leq k_1+t\alpha k_2E[|\ Y]\ |]\leq\infty$

• *Montrons que* $\forall\psi\in\mathcal{C}$ $\quad E(\psi(X_t))\geq E(\psi(X_s))$
Soit $\psi\in\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\psi\circ\varphi(tY))}{\partial t} &= E[Y\varphi'(tY)\psi'\circ\varphi(tY)] \\ &= E[Y\varphi'(tY)\{\psi'(0)+\int_0^{\varphi(tY)}\psi''(u)du\}] \\ &= E[Y\varphi'(tY)\psi'(0)]+E(Y\varphi'(tY)\int_0^{\varphi(tY)}\psi''(u)du) \end{aligned}$$

Puisque Y *est symétrique et l'application* $y\rightarrow y\varphi'(ty)$ *est impaire alors* $E[Y\varphi'(tY)\psi'(0)]=0$.

Donc
$$\frac{\partial E(\psi\circ\varphi(tY))}{\partial t} = E(Y\varphi'(tY)\int_0^{\varphi(tY)}\psi''(u)du)$$

Comme $\psi''(u)\geq 0$ *et* $\varphi'(x)\geq 0$ *(car* φ *est croissante)*
Si $Y\geq 0 \overset{\varphi\ impaire}{\Rightarrow} \varphi(tY)\geq 0 \Rightarrow Y\varphi'(tY)\int_0^{\varphi(tY)}\psi''(u)du\geq 0$

Si $Y\leq 0 \overset{\varphi\ impaire}{\Rightarrow} \varphi(tY)\leq 0 \Rightarrow \int_0^{\varphi(tY)}\psi''(u)du\leq 0$, *alors*
$Y\varphi'(tY)\int_0^{\varphi(tY)}\psi''(u)du\geq 0$
Ainsi
$$\frac{\partial E(\psi\circ\varphi(tY))}{\partial t}\geq 0$$
<u>*Donc*</u> $\quad \forall s\leq t \quad E[\psi(X_t)]\geq E[\psi(X_s)]$

b) $E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))] = E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))\ 1_{\{Y\geq 0\}}] + E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))\ 1_{\{Y\geq 0\}}]$

Si $Y\geq 0$ *pour* $u\in[\varphi(\alpha(s)Y),\varphi(\alpha(t)Y)]$

$$\begin{aligned}
E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))\ 1_{\{Y\geq 0\}}] &= E[\ 1_{\{Y\geq 0\}}\psi'(u)(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y))]\\
&\overset{\psi\ convexe}{\geq} E[1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y)\\
&\qquad \{\psi'(0)+\int_0^{\varphi(\alpha(s)Y)}\psi''(u)du\}]\\
&\geq [E\ 1_{\{Y\geq 0\}}[(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y))\psi'(0)]\\
&\qquad +E[1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y))\int_0^{\varphi(\alpha(s)Y)}\psi''(u)d\\
&\geq E[1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y))\int_0^{\varphi(\alpha(s)Y)}\psi''(u)du]\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Car φ *croissante,* $\varphi(\alpha(s)Y)\geq 0$ *et* $\psi''\geq 0)$

Si $Y\leq 0$ *pour* $u\in[\varphi(\alpha(t)Y),\varphi(\alpha(s)Y)]$

$$\begin{aligned}
E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))\ 1_{\{Y\leq 0\}}] &= E[\ 1_{\{Y\leq 0\}}\psi'(u)(\varphi(\alpha(s)Y)-\varphi(\alpha(t)Y))]\\
&\overset{\psi\ convexe}{\leq} E[\ 1_{\{Y\leq 0\}}\psi'(X_s)(\varphi(\alpha(s)Y)-\varphi(\alpha(t)Y))]
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E[(\psi(X_t)-\psi(X_s))\ 1_{\{Y\leq 0\}}] &\geq E[\ 1_{\{Y\geq 0\}}\psi'(X_s)(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y)]\\
&\geq E[\ 1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y)\\
&\qquad \{\psi'(0)+\int_0^{\varphi(\alpha(s)Y)}\psi''(u)du\}]\\
&\geq E[\ 1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(\alpha(t)Y)-\varphi(\alpha(s)Y))\int_0^{\varphi(\alpha(s)Y)}\psi''(u)du]\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$Car\ \varphi(\alpha(s)Y) \leq 0,\ \varphi(\alpha(t)Y) \leq \varphi(\alpha(s)Y)\ \ et\ \psi'' \geq 0$$

3)

a) • *Montrons d'abord que* $E(X_t) = E(X_s)$

$$\begin{cases} Y \overset{loi}{=} -Y \\ X \overset{loi}{=} -X \end{cases} \overset{\varphi\ impaire}{\Rightarrow} \varphi(\alpha(t)X + \beta(t)Y) \overset{loi}{=} -\varphi(\alpha(t)X + \beta(t)Y)$$

donc $E(X_t) = E(X_s) = 0$

• *Montrons que* $\forall \psi \in \mathcal{C} \quad E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$
Soit $\psi \in \mathcal{C}$, *on définit* $\theta(x)$ *par :*

$$\theta(x) = \int_0^x (x-u)\psi''(u)du$$

Alors θ *ainsi définie est une fonction convexe de classe* C^2 $, sgn\theta'(x) = sgn(x)$ *et* $\theta(0) = \theta'(0) = 0$, *de plus pour tour* x, y

$$\psi(x) - \psi(y) = \psi'(0)(x-y) + \theta(x) - \theta(y)$$

<u>En effet</u> : $\quad \psi''$ *est continue* $\Rightarrow \int_0^x (x-u)\psi''(u)du$ *est continue dérivable*

$$\theta'(x) = x\psi''(x) + \int_0^x \psi''(u)du - x\psi''(x) = \int_0^x \psi''(u)du = \psi'(x) - \psi'(0)$$

θ' *est continue dérivable car* ψ' *l'est aussi*

$$\theta'' = \psi'' \geq 0 \Rightarrow \theta\ est\ convexe\ et\ de\ classe\ \ C^2$$

$\theta(0) = 0 = \theta'(0)$

$$\begin{aligned} sgn\theta'(x) &= \begin{cases} 1 & si\quad \theta'(x) \geq 0 \\ -1 & si\quad \theta'(x) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & si\quad \psi'(x) \geq \psi'(0) \\ -1 & si\quad \psi'(x) \leq \psi'(0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & si\quad x \geq 0 \\ -1 & si\quad x \leq 0 \end{cases} \\ &= sgn(x) \end{aligned}$$

car $\psi''(x) \geq 0$ *donc* ψ'*est croissante i.e* $\psi'(x) \geq \psi'(0)$ *si* $x \geq 0$ *et* $\psi'(x) \leq \psi'(0)$ *si* $x \leq 0$.
De plus

$$\theta(x) = x\int_0^x \psi''(u)du - \int_0^x (u)\psi''(u)du = x[\psi'(x) - \psi'(0)] - \int_0^x u\ \psi''(u)du$$

En intégrant par parties

$$\begin{aligned}\theta(x) &= x\psi'(x) - x\psi'(0) - x\psi'(x) + \psi(x) - \psi(0)\\ &= \psi(x) - \psi(0) - x\psi'(0)\end{aligned}$$

$$\theta(y) = \psi(y) - \psi(0) - y\psi'(0)$$

Ainsi

$$\theta(x) - \theta(y) = \psi(x) - \psi(y) - \psi'(0)(x-y)$$

Par suite

$$\psi(x) - \psi(y) = \psi'(0)(x-y) + \theta(x) - \theta(y)$$

Remplaçons dans la relation précédente x par $A_t = \varphi(\alpha(t)X + \beta(t)Y)$ et y par $A_s = \varphi(\alpha(s)X + \beta(s)Y)$, on obtient alors :

$$E(\psi\circ\varphi(A_t)) - E(\psi\circ\varphi(A_s)) = \psi'(0)\underbrace{E[\varphi(A_t) - \varphi(A_s)]}_{=0} + E(\theta\circ\varphi(A_t)) - E(\theta\circ\varphi(A_s))$$

Avec $\theta\circ\varphi$ une fonction convexe, puisque sa dérivée second est positive par le fait que $sgn[\varphi''] = sgn[\theta'](x) = sgn(x)$ et θ est convexe

$$(\theta\circ\varphi)'' = (\varphi')^2(\theta''\circ\varphi) + \varphi''(\theta'\circ\varphi)$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis

– *Si $Y \geq 0$*

$$\theta\circ\varphi(\alpha(t)X + \beta(t)Y) - \theta\circ\varphi(\alpha(t)X + \beta(s)Y) = (\theta\circ\varphi)'(u)(\beta(t) - \beta(s))Y$$

avec $u \in [\alpha(t)X + \beta(s)Y, \alpha(t)X + \beta(t)Y]$
Posons $\widetilde{A}_{t,s} = \alpha(t)X + \beta(s)Y$, puisque $\theta\circ\varphi$ est convexe alors $(\theta\circ\varphi)'$ est croissante.
Ainsi

$$\begin{aligned}(\theta\circ\varphi)(A_t) - (\theta\circ\varphi)(\widetilde{A}_{t,s}) &\geq (\theta\circ\varphi)'(\alpha(t)X + \beta(s)Y)(\beta(t) - \beta(s))Y\\ &\geq [\int_{\alpha(t)X}^{\alpha(t)X+\beta(s)Y}(\theta\circ\varphi)''(u)du + (\theta\circ\varphi)'(\alpha(t)X)]\\ &\quad(\beta(t) - \beta(s))Y\end{aligned}$$

Comme X et Y sont symétriques et indépendantes alors

$$E[1_{\{Y\leq 0\}}(\theta\circ\varphi)'(\alpha(t)X)(\beta(t)-\beta(s))Y]=0$$

et

$$E[1_{\{Y\geq 0\}}(\theta\circ\varphi)'(\alpha(t)X)(\beta(t)-\beta(s))Y]=0$$

Et par suite

$$\begin{aligned}E[1_{\{Y\geq 0\}}(\theta\circ\varphi)(A_t)-(\theta\circ\varphi)(\widetilde{A}_{t,s})] &\geq E[1_{\{Y\geq 0\}}Y(\beta(t)-\beta(s))\\ &\quad \int_{\alpha(t)X}^{\alpha(t)X+\beta(s)Y}(\theta\circ\varphi)''(u)du]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$(Puisque\ Y\geq 0, \alpha(t)X+\beta(s)Y\geq\alpha(t)X)$$

– *Si* $Y\leq 0$ *pour* $u\in[\alpha(t)X+\beta(t)Y,\alpha(t)X+\beta(s)Y]$

$$\begin{aligned}\theta\circ\varphi(\widetilde{A}_{t,s})-\theta\circ\varphi(A_t) &= (\theta\circ\varphi)'(u)(\beta(s)-\beta(t))Y\\ &\overset{\theta\circ\varphi\ convexe}{\leq} (\theta\circ\varphi)'(\widetilde{A}_{t,s})(\beta(s)-\beta(t))Y\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(\theta\circ\varphi)(A_t)-(\theta\circ\varphi)(\widetilde{A}_{t,s}) &\geq (\theta\circ\varphi)'(\widetilde{A}_{t,s})(\beta(t)-\beta(s))Y\\ &\geq [\int_{\alpha(t)X}^{\alpha(t)X+\beta(s)Y}(\theta\circ\varphi)''(u)du+(\theta\circ\varphi)'(\alpha(t)X)]\\ &\quad (\beta(t)-\beta(s))Y\end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned}E[(\theta\circ\varphi)(A_t)-(\theta\circ\varphi)(\widetilde{A}_{t,s})1_{\{Y\leq 0\}}] &\geq E[1_{\{Y\leq 0\}}Y(\beta(t)-\beta(s))\\ &\quad \int_{\alpha(t)X}^{\alpha(t)X+\beta(s)Y}(\theta\circ\varphi)''(u)du]\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

$$(Puisque\ Y\leq 0, \alpha(t)X+\beta(s)Y\geq\alpha(t)X).$$

Donc

$$E[(\theta\circ\varphi)(\alpha(t)X+\beta(t)Y)]\geq E[(\theta\circ\varphi)(\alpha(t)X+\beta(s)Y).]$$

Ainsi $\forall\ s\leq t$

$$E[\psi\circ\varphi(A_t)]-E[\psi\circ\varphi(A_s)]\geq E(\theta\circ\varphi)(\alpha(t)X+\beta(s)Y)-E(\theta\circ\varphi)(\alpha(s)X+\beta(s)Y)$$

on refait le même raisonnement ,en appliquant cette fois−ci le théorème des accroissements finis

– *Si* $X \geq 0$ *pour* $u \in [\alpha(s)X + \beta(s)Y, \alpha(t)X + \beta(s)Y]$

$$\theta \circ \varphi(\widetilde{A}_{t,s}) - \theta \circ \varphi(A_s) = (\theta \circ \varphi)'(u)(\alpha(t) - \alpha(s))X$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(\theta \circ \varphi)(\widetilde{A}_{t,s}) - (\theta \circ \varphi)(A_s) &\overset{\theta\circ\varphi\ convexe}{\geq} (\theta \circ \varphi)'(A_s)(\alpha(t) - \alpha(s))X \\ &\geq [\int_{\beta(s)Y}^{\alpha(s)X+\beta(s)Y} (\theta \circ \varphi)''(u)du + (\theta \circ \varphi)'(\beta(s)Y)] \\ &\quad (\alpha(t) - \alpha(s))X\end{aligned}$$

Comme X *et* Y *sont deux v.a.r symétriques et indépendantes alors*

$$E[(\theta \circ \varphi)'(\beta(s)Y)(\alpha(t) - \alpha(s))X1_{\{X\geq 0\}}] = 0$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}E[1_{\{X\geq 0\}}[(\theta \circ \varphi)(\widetilde{A}_{t,s}) - (\theta \circ \varphi)(A_t)]] &\geq E[1_{\{X\geq 0\}}X(\alpha(t) - \alpha(s)) \\ &\quad \int_{\beta(s)Y}^{\alpha(s)X+\beta(s)Y} (\theta \circ \varphi)''(u)du] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$(car\ \alpha(s)X + \beta(s)Y \geq \beta(s)Y\ \ et\ X \geq 0)$$

– *Si* $X \leq 0$ *pour* $u \in [\alpha(t)X + \beta(s)Y, \alpha(s)X + \beta(s)Y]$

$$\theta \circ \varphi(A_s) - \theta \circ \varphi(\widetilde{A}_{t,s}) = (\theta \circ \varphi)'(u)(\alpha(s) - \alpha(t))X$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(\theta \circ \varphi)(\widetilde{A}_{t,s}) - (\theta \circ \varphi)(A_s) &\overset{\theta\circ\varphi\ convexe}{\geq} (\theta \circ \varphi)'(A_s)(\alpha(t) - \alpha(s))X \\ &\geq [\int_{\beta(s)Y}^{\alpha(s)X+\beta(s)Y} (\theta \circ \varphi)''(u)du + (\theta \circ \varphi)'(\beta(s)Y)] \\ &\quad (\alpha(t) - \alpha(s))X\end{aligned}$$

Comme X *et* Y *sont symétriques et indépendantes alors*

$$E[(\theta \circ \varphi)'(\beta(s)Y)(\alpha(t) - \alpha(s))X1_{\{X\leq 0\}}] = 0$$

D'où

$$\begin{aligned}E[1_{\{X\geq 0\}}[(\theta \circ \varphi)(\widetilde{A}_{t,s}) - (\theta \circ \varphi)(A_t)]] &\geq E[1_{\{X\geq 0\}}X(\alpha(t) - \alpha(s)) \\ &\quad \int_{\beta(s)Y}^{\alpha(s)X+\beta(s)Y} (\theta \circ \varphi)''(u)du] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$(car\ \alpha(s)X + \beta(s)Y \leq \beta(s)Y\ \ et\ X \leq 0)$$

Donc

$$E[(\theta\circ\varphi)(\alpha(t)X+\beta(s)Y)] \geq E[(\theta\circ\varphi)(\alpha(s)X+\beta(s)Y)]$$

Ainsi $\forall s \leq t$

$$E[\psi\circ\varphi(A_t)]-E[\psi\circ\varphi(A_s)] \geq E(\theta\circ\varphi)(\alpha(s)X+\beta(s)Y)-E(\theta\circ\varphi)(\alpha(s)X+\beta(s)Y)$$

En conclusion

$$E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$$

b) • *Montrons que* $\forall\psi\in\mathcal{C} \quad E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$

$$\begin{aligned}
\varphi(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)X_i) &= \varphi(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(t)X_i+\alpha_n(t)X_n)\\
&\overset{(c)}{\geq} \varphi(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(t)X_i+\alpha_n(s)X_n)\\
&\quad \textit{(par le point 3)a) du lemme (2.2.1))}\\
&= \varphi(\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i(t)X_i+\alpha_{n-1}(t)X_{n-1}+\alpha_n(s)X_n)\\
&\overset{(c)}{\geq} \varphi(\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i(t)X_i+\alpha_{n-1}(s)X_{n-1}+\alpha_n(s)X_n)\\
&\overset{(c)}{\geq} \varphi(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)X_i)
\end{aligned}$$

Ce qui clos la démonstration du lemme.

Définition 2.2.2 *On note par*

1. $I = \{\varphi : I\!R \to I\!R$ *de classe* C^1*,impaire, strictement croissante et* $\varphi(+\infty) = +\infty\ \}$

2. $J = \{\varphi : I\!R \to I\!R$ *de classe* C^2*,impaire, strictement croissante* $\varphi(+\infty) = +\infty$ *et* $sgn\varphi''(x) = sgn(x)\}$

Il est facile de voir que la fonction $x \longrightarrow x$ (resp $x \longrightarrow x^3$) appartient à I (resp à J)

Proposition 2.2.3 *a)Soit* $\varphi \in I$*, alors* $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ *est un PCOC* *b)Soient Y une V.a symétrique ,$\varphi \in I$ et $\alpha : I\!R_+ \to I\!R_+$ une fonction croissante Alors $(\alpha(t)\varphi(tY), t \geq 0)$ est un PCOC*

c)

1. *Soit $(Y_u, u \geq 0)$ un processus tel que :*
   $\bullet \forall u \geq 0, E(Y_u) = 0$
   $\bullet \exists \beta \geq 0$ *tel que* $\forall c \geq 0 \quad (Y_{ct}, t \geq 0) \overset{loi}{=} (c^\beta Y_t, t \geq 0)$
   Alors $(X_t = \frac{1}{t}\int_0^t Y_u du, t \geq 0)$ *est un PCOC*

2. *Si de plus $(Y_u, u \geq 0)$ est symétrique i.e$(Y_u, u \geq 0) \overset{loi}{=} (-Y_u, u \geq 0)$ et si $\varphi \in I$ alors $(\varphi(X_t), t \geq 0)$ est un P.C.O.C*

d) Soit σ une fonction strictement positive paire de classe C^2 telle que les fonctions σ et $\sigma\sigma'$ sont lipshitziennes, soit $(X_t, t \geq 0)$ l'unique solution de

$$(X_t = \int_0^t \sigma(X_u) \circ dB_u, t \geq 0)$$

(Où $\circ dB_s$ est l'intégrale de Stratonovich définie dans le chapitre précédent proposition (1.10.2))
Alors $(X_t, t \geq 0)$ est un PCOC

preuve

a) Soit $\varphi \in I$,$E[\varphi(B_t)] = 0$

$$\varphi(B_t) \overset{loi}{=} \varphi(t^{1/2}B_1)$$

B_1 est une $V.a$ intégrable, symétrique, et $t^{1/2}$ est une fonction de $I\!R_+ \to I\!R+$ croissante, alors par le point 2)b) du Lemme (2.2.1), le processus $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ est un PCOC

b) Soit $\psi \in \mathcal{C}$

– Si $Y \geq 0$ pour $u \in [\alpha(t)\varphi(sY), \alpha(t)\varphi(tY)]$

$$\begin{aligned}
E[(\psi(\alpha(t)\varphi(tY)) - (\psi(\alpha(t)\varphi(sY)))1_{\{Y\geq 0\}}] &= \alpha(t)E[1_{\{Y\geq 0\}}\psi'(u)(\varphi(tY) - \varphi(sY))] \\
&\overset{\psi\ convexe}{\geq} \alpha(t)E[1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(tY) - \varphi(sY)) \\
&\quad \{\psi'(0) + \int_0^{\alpha(t)\varphi(sY)} \psi''(u)du\}] \\
&\geq \alpha(t)E[1_{\{Y\geq 0\}}(\varphi(tY) - \varphi(sY)) \\
&\quad \int_0^{\alpha(t)\varphi(sY)} \psi''(u)du\}] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$(\text{car } \varphi \text{ croissante, } \alpha(t)\varphi(sY) \geq 0 \text{ et } \psi'' \geq 0)$$

– Si $Y \leq 0$ pour $u \in [\alpha(t)\varphi(tY), \alpha(t)\varphi(sY)]$

$$\begin{aligned} E[1_{\{Y\leq 0\}}(\psi(\alpha(t)\varphi(sY)) - (\psi(\alpha(t)\varphi(tY)))] &= E[1_{\{Y\leq 0\}} \\ &\quad \psi'(u)(\varphi(sY) - \varphi(tY))] \\ &\overset{\psi\ convexe}{\leq} E[1_{\{Y\leq 0\}}\psi'(\alpha(t)\varphi(sY)) \\ &\quad (\varphi(tY) - \varphi(sY))] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E[1_{\{Y\leq 0\}}(\psi(\alpha(t)\varphi(tY)) - (\psi(\alpha(t)\varphi(sY)))] &\geq \alpha(t)E[1_{\{Y\leq 0\}}\psi'(\alpha(t)\varphi(sY)) \\ &\quad (\varphi(tY) - \varphi(sY))] \\ &\geq \alpha(t)E[1_{\{Y\leq 0\}}(\varphi(tY) - \varphi(sY)) \\ &\quad \{\psi'(0) + \int_0^{\alpha(t)\varphi(sY)} \psi''(u)du\}] \\ &\geq \alpha(t)E[1_{\{Y\leq 0\}}(\varphi(tY) - \varphi(sY)) \\ &\quad \int_0^{\alpha(t)\varphi(sY)} \psi''(u)du] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(\text{car } \varphi(sY) \leq 0,\ \varphi(tY) \leq \varphi(sY) \text{ et } \psi'' \geq 0)$$

Alors

$$E(\psi(\alpha(t)\varphi(tY)) \geq E(\psi(\alpha(t)\varphi(sY))$$

Appliquons le point 2)b) du lemme (2.2.1) pour $Y = \varphi(sY) \overset{loi}{=} -\varphi(sY)$ et $\varphi(x) = x$, ainsi $(X_t = \alpha(t)\varphi(tY), t \geq 0)$ est un PCOC

c) 1. le point c)1) est une conséquence du point 1)b) du lemme (2.2.1)
En effet

$$X_t = \frac{1}{t}\int_0^t Y_u du$$

En utilisant le changement de variable $[u = tv]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^1 Y_{tv} dv \\ &\overset{loi}{=} t^\beta \int_0^1 Y_v dv \\ &\quad \text{(par hypothèse)} \end{aligned}$$

Pour $X = 0$, $Y = \int_0^1 Y_v dv$ et $\alpha(t) = t^\beta, \beta \geq 0$ (une fonction croissnate positive), alors
$(X_t = \frac{1}{t}\int_0^t Y_u du, t \geq 0)$ est un PCOC

2. Par hypothèse
$$\int_0^1 Y_u du \stackrel{loi}{=} -\int_0^1 Y_u du$$
Pour $\varphi \in I$, $\alpha(t) = t^\beta, \beta \geq 0$
le point 2)b)du lemme (2.2.1), $(\varphi(X_t), t \geq 0)$ est un PCOC

d) Pour la démonstration nous introduisons la fonction h telle que

$$\begin{array}{l} h : I\!R \to I\!R \\ \quad x \to h(x) = \int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} \end{array}$$

une telle fonction est continue, dérivable et de dérivée $h'(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$
En appliquant Itô-Stratonovich, on obtient

$$\begin{aligned} h(X_t) &= \int_0^t h'(X_s) \circ \sigma(X_s) \circ dB_s \\ &= \int_0^t h'(X_s)\sigma(X_s) \circ dB_s \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)} \sigma(X_s) \circ dB_s \\ &= B_t \end{aligned}$$

Alors $h(X_t) = B_t$; notre but est d'écrire $X_t = \varphi(B_t)$, pour ce cas $\varphi = h^{-1}$
Donc, assurons nous que

1. h^{-1} existe
2. $h^{-1} \in I$

h^{-1} existe puisque h est continue, croissante (car sa dériveé $\frac{1}{\sigma(x)}$ est postive par hypothèse sur σ), donc h^{-1} est continue croissante, dérivable
$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \sigma(h^{-1})$ de dérivée continue, de plus vérifions que h^{-1} est impaire
$$h(-x) = \int_0^{-x} \frac{dy}{\sigma(y)}$$
En appliquant le changement de variable $[y = -z]$ on obtient

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_0^x \frac{-dz}{\sigma(-z)} \\ &= -\int_0^x \frac{dz}{\sigma(z)} \end{aligned}$$

car σ est paire, ainsi h est impaire donc h^{-1} l'est aussi
Par suite $(X_t, t \geq 0)$ est un PCOC

Définition 2.2.4 *Soit* $(M_t, t \geq 0)$ *une* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *martingale.*
On dit que $(M_t, t \geq 0) \in H_1^{loc}$ *si, pour tout* $t \geq 0$

$$E(\sup_{s\leq t} |M_s|) < \infty$$

Théorème 2.2.5 *Soient* $(M_t, t \geq 0)$ *une* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *martingale continue appartenant à* H_1^{loc}*, et* $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue croissante telle que* $\alpha(0) = 0$.

1. *Posons* $(X_t = \frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t M_s d\alpha(s), t > 0)$ *et* $X_0 = M_0$*, alors* $(X_t, t \geq 0)$ *est un PCOC*
2. *Si* $M_0 = 0$*,* $(\widetilde{X_t} = \int_0^t M_s d\alpha(s), t \geq 0)$ *est un PCOC*

<u>**Preuve**</u>

1. $$X_t = \frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t M_s d\alpha(s)$$

   Appliquons la formule d'intégration par parties

$$\alpha(t)M_t = \int_0^t \alpha(s)dM_s + \int_0^t M_s d\alpha(s) \quad \Rightarrow \quad M_t = X_t + \frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t M_s d\alpha(s)$$
$$\Rightarrow \quad X_t = M_t - \frac{1}{\alpha(t)} I_t$$

   où $I_t = \int_0^t \alpha(s)dM_s$ est une martingale car

$$\int_0^t \alpha(s)^2 E < M, M >_s \leq \sup_{s\leq t} \alpha(s)^2 E < M, M >_t < \infty$$

   alors

$$\begin{aligned} dX_t &= dM_t + I_t \tfrac{d\alpha(t)}{\alpha^2(t)} - \tfrac{1}{\alpha(t)} dI_t \\ &= dM_t + I_t \tfrac{d\alpha(t)}{\alpha^2(t)} - \tfrac{1}{\alpha(t)} \alpha(t) dM_t \\ &= I_t \tfrac{d\alpha(t)}{\alpha^2(t)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

   D'une autre part pour $s \leq t$

$$\begin{aligned} E(X_t/\mathcal{F}_s) &= E(M_t - \frac{1}{\alpha(t)} I_t/\mathcal{F}_s) \\ &= E(M_t/\mathcal{F}_s) + \frac{1}{\alpha(t)} E(I_t/\mathcal{F}_s) \\ &= M_s - \frac{1}{\alpha(t)} I_s \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} E(X_t/\mathcal{F}_s) &= M_s - \frac{1}{\alpha(t)} I_s + \frac{1}{\alpha(s)} I_s - \frac{1}{\alpha(s)} I_s \\ &= M_s - \frac{1}{\alpha(s)} I_s + (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s \\ &= X_s + (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s \end{aligned}$$

soit $\psi \in \mathcal{C}$ pour $s \leq t$

$$\begin{aligned} E(\psi(X_t)) &= E(E(\psi(X_t)/\mathcal{F}_s)) \\ &\geq E(\psi(E(X_t)/\mathcal{F}_s))(\text{inégalité de Jensen}) \\ &\geq E(\psi(X_s + (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s)) \end{aligned}$$

en appliquant le théorème des accroissements finis pour $u \in]X_s, X_s + (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s[$

$$\begin{aligned} \psi(X_s + (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s - \psi(Xs) &= (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s \psi'(u) \\ &\geq (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) I_s \psi'(X_s) + \psi(Xs) \end{aligned}$$

Car ψ est convexe, donc

$$E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s)) + (\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\alpha(t)}) E(\psi'(X_s) I_s)$$

Il suffit alors de montrer que $E(\psi'(X_s)I_s) \geq 0$, en appliquant la formule d'It$\hat{o}$ à $F(X_s, I_s) = \psi'(X_s)I_s$ pour $0 < \varepsilon < s$, car $(X_s, s > \varepsilon)$ est un processus à variation borné. On obtient

$$E[\psi'(X_s)I_s] = E[\psi'(X_\varepsilon)I_\varepsilon] + E[\int_\varepsilon^s \psi''(X_u) I_u dX_u] + E[\int_\varepsilon^s \psi'(X_u) dI_u]$$

$$+1/2\ E[\int_\varepsilon^s \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\psi'(X_u)I_u) d < I, I >_u]$$

Mais

(a) $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\psi'(X_u)I_u) = 0$

(b) $(X_s, s > \varepsilon)$ est à variation bornée donc $< X, X >\equiv 0 \equiv< X, I >$

(c) puisque $\psi \in \mathcal{C}$ donc ψ' est bornée,de plus I_t est une martingale alors $\int_0^t \psi'(X_u)dI_u$ est une martingale continue avec $I_0 = 0$, ainsi

$$E[\psi'(X_\varepsilon)I_\varepsilon] \stackrel{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

Alors il suffit de montrer que $E[\psi''(X_u)I_u dX_u] \geq 0$, or $dX_u = I_u \frac{d\alpha(u)}{\alpha^2(u)}$, cependant

$$\begin{aligned}\psi''(X_u)I_u dX_u &= \psi''(X_u)\frac{I_u^2}{\alpha^2(u)}d\alpha(u)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

puisque α est croissante ,ψ'', α^2, I^2 sont positives
Nous avons prouvé que X_t est un PCOC sur $]0, +\infty[$, mais le résultat s'obtient sur $[0, +\infty[$ par continuité du processus $(X_t, t \geq 0)$
<u>En effet</u>

$$\begin{aligned}|X_t - M_0| &\leq \frac{1}{\alpha(t)}\int_0^t |M_s - M_0| d\alpha(s)\\ &\leq \frac{1}{\alpha(t)} \sup_{s\in[0,t]} |M_t - M_0| \int_0^t d\alpha(s)\\ &\stackrel{t \to 0}{\to} 0\end{aligned}$$

Car $(M_t, t \geq 0)$ est continue

2. Par définition

$$\widetilde{X}_t = \int_0^t M_s d\alpha(s)$$

pour $s \leq t$

$$\begin{aligned}E(\widetilde{X}_t/\mathcal{F}_s) &= E(\int_0^t M_u d\alpha(u)/\mathcal{F}_s)\\ &= \int_0^s E(M_u/\mathcal{F}_s)d\alpha(u) + \int_s^t E(M_u/\mathcal{F}_s)d\alpha(u)\\ &= \int_0^s M_u d\alpha(u) + (\alpha(t) - \alpha(s))M_s\\ &= \widetilde{X}_s + (\alpha(t) - \alpha(s))M_s\end{aligned}$$

Pour $\psi \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}E(\psi(\widetilde{X}_t) &= E(E[\psi(\widetilde{X}_t)/\mathcal{F}_s]\\ &\geq E[\psi(E(\widetilde{X}_t/\mathcal{F}_s))](\text{l'inégalité de Jensen})\\ &= E(\psi(\widetilde{X}_t + (\alpha(t) - \alpha(s))M_s))\\ &\geq E(\psi(\widetilde{X}_t)) + (\alpha(t) - \alpha(s))E(\psi'(\widetilde{X}_t)M_s)\\ &\quad (\psi \text{ est convexe})\end{aligned}$$

Alors le point 2) du théorème (2.2.5) sera établi une fois que nous aurons démontrer que $E[\psi'(\widetilde{X}_s)M_s] \geq 0$. Par Itô

$$\begin{aligned}
E[\psi'(\widetilde{X}_s)M_s] &= E[\psi'(0)M_0] + E(\int_0^s M_u\psi''(\widetilde{X}_u)d\widetilde{X}_u) \\
&\quad +E(\int_0^s \psi'(\widetilde{X}_u)dM_u) \\
&= E(\int_0^s M_u^2\psi''(\widetilde{X}_u)d\alpha(u) \\
&\geq 0 \\
&\quad (M_0 = 0,\ \alpha \text{ croissante et } (d\widetilde{X}_u) = M_s d\alpha(u))
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.6 *1. En fait le point 1)du théorème (2.2.5) est une conséquence du point 2)du même théorème,puisque* $dX_t = I_t\frac{d\alpha(t)}{\alpha^2(t)} \Rightarrow X_t = \int_0^t I_s\frac{d\alpha(s)}{\alpha^2(s)}$
Donc

$$\begin{aligned}
X_t &= \int_0^t I_s d(-\frac{1}{\alpha(s)}) \\
&= \int_0^t I_s d\beta(s)
\end{aligned}$$

où $\beta(t) = -\frac{1}{\alpha(t)}$ *est une fonction croissante*

2. *Le théorème est plus fort que la croissance de* $(X_t, t \geq 0)$*, il nous fournit les deux relations suivantes*

$$E[\psi(X_t)] - E[\psi(X_t)] \geq E(\int_0^s I_u^2\psi''(X_u)\frac{d\alpha(u)}{\alpha^2(s)})$$

et

$$E[\psi(\widetilde{X}_t)] - E[\psi(\widetilde{X}_t)] \geq E(\int_0^s M_u^2\psi''(\widetilde{X}_u)d\alpha(u))$$

3. *Soit* $(B_t, t \geq 0)$ *un mouvement Brownien,* $\nu \in I\!R$*, on sait que*

$$(\varepsilon_t^\nu = exp\{\nu B_t - \frac{\nu^2 t}{2}\}, t \geq 0)$$

est une martingale. Un résultat dû à Carr,Ewald et Xiao établit que

$$(X_t^{(\nu)} = \frac{1}{t}\int_0^t \varepsilon_s^\nu ds, t \geq 0)$$

est croissant pour l'ordre convexe. Ainsi le point 1) théorème (2.2.5) est donc une extension du résultat de Carr,Ewald et Xiao

Du théorème précédent on peut déduire la version discrète suivante :

Théorème 2.2.7 *Soit $(M_n, n \geq 1)$ une martingale indexée par $(I\!N^*)$ et $(a_k, k \geq 1)$une suite de nombres réels positifs, on définit la suite $\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ alors*

1.
$$(X_n = \frac{1}{\alpha(n)} \sum_{k=1}^{n} a_k M_k, n \geq 1)$$
est une suite aléatoire croissante dans l'ordre convexe

2. Si $E(M_1) = 0$, alors
$$(\widetilde{X}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k M_k, n \geq 1)$$
est aussi une suite aléatoire croissante dans l'ordre convexe

Preuve Ce théorème est une conséquence directe du théorème précédent en remarqunat que

1. $a_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$, alors
$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) M_k \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=1}^{n} M_k \int_{k-1}^{k} d\alpha(s) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_0^n \sum_{k=1}^{n} M_k 1_{[k-1,k[}(s) d\alpha(s) \end{aligned}$$

• Montrons que $M_t = \sum_{k=1}^{n} M_k 1_{[k-1,k[}(t)$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_k$ pour $k - 1 \leq t < k$
On distinque deux cas
(a) Pour $k - 1 \leq s \leq t < k$
$$E(M_t - M_s / \mathcal{F}_s) = E(M_k - M_k / \mathcal{F}_s) = 0$$
(b) Pour $j - 1 \leq s < j \leq k - 1 \leq s \leq t < k$
$$\begin{aligned} E(M_t / \mathcal{F}_s) &= E(M_k / \mathcal{F}_s) \\ &= E(M_k / \mathcal{F}_j) \\ &= M_j \\ &= M_s \end{aligned}$$

En appliquant le point 1) du théorème (2.2.5) pour la martingale M_t définie plus haut et $\beta(t)$ une fonction croissante tel que $\beta(0) = 0$ et avec la contrainte $\beta(k) = \alpha(k), k \geq 1$. Le théorème précédent nous fournit que $\forall s \leq t$
$$E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$$

En particulier pour tout $l = s \leq t = n$

$$E(\psi(X_n)) \geq E(\psi(X_l))$$

2. En utilisant le point 2) du théorème (2.2.5) pour la même martingale, on en déduit que pour tout $1 \leq l \leq n$

$$E[\psi(\widetilde{X_n})] \geq E[\psi(\widetilde{X_l})]$$

Proposition 2.2.8 *Soit* $(L_s, s \geq 0)$*un processus à accroissements indépendants (pas necessairement stationaires) tel que*

a) *pour tout* $s \geq 0$, $E(L_s^2) < \infty$ *et* $E(L_s) = 0$
Soit $a : I\!R_+ \times I\!R_+ \to I\!R_+$*une fonction borélienne telle que pour tout* $T \geq 0$

$$\int_0^T a(t,s)dE(L_s^2) < \infty \tag{2.5}$$

b) $\forall s \geq 0, t \to a(t,s)$ *est croissante*

Le processus

$$(X_t^T = \int_0^T a(t,s)dL_s, t \geq 0)$$

est un PCOC

<u>**Preuve**</u> Pour simplifier, on suppose que $T = 1$ et on note par $X_t = X_t^1$

1. Pour $u \leq v$ nous avons

$$\begin{aligned} E(L_v - L_u)^2 &= E(L_v)^2 + E(L_u)^2 - 2E(L_u L_v) \\ &= E(L_v)^2 + E(L_u)^2 - 2E[E(L_u L_v)/\mathcal{F}_u] \\ &= E(L_v)^2 + E(L_u)^2 - 2E[L_u E(L_v - L_u + L_u)/\mathcal{F}_u] \\ &= E(L_v)^2 + E(L_u)^2 - 2E(L_u)^2 E(L_v - L_u) \end{aligned}$$

car $L_v - L_u$ est indépendant de $\mathcal{F}_u$, par conséquent

$$E(L_v - L_u)^2 = E(L_v)^2 - E(L_u)^2$$

Ainsi Pour $u \leq v$ $E(L_v)^2 - E(L_u)^2 \geq 0 \Rightarrow E(L_s)^2$ est croissante en s
Par suite $E(L_s)^2$ est à variation bornée et comme $a(t,s)$ est une fonction borélienne

$$\int_0^T a^2(t,s)dE(L_s^2)$$

existe au sens de Lebesgue−Stieljes

2.
$$X_t = \int_0^1 a(t,s)dL_s \overset{L^2}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a(t,\frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}})$$

vérifions que

$$X_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a(u,\frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}})$$

est convergente dans L^2

$$\begin{aligned} \|X_n\|_{L^2}^2 &= E(X_n)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^2(t,\frac{k}{n})E(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}})^2 \end{aligned}$$

Puisque les accroissements sont indépendants centrés, les termes mixtes valent 0, ainsi d'aprés le point 1 ci dessus

$$\begin{aligned} \|X_n\|_{L^2}^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} a^2(t,\frac{k}{n})E(L_{\frac{k+1}{n}})^2 - E(L_{\frac{k}{n}})^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^2(t,\frac{k}{n})(f_{k+1} - f_k) \end{aligned}$$

Avec $f_{k+1} = E(L_{\frac{k+1}{n}})^2$, alors

$$\|X_n\|_{L^2}^2 \to \int_0^1 a^2(t,s)dE(L_s^2) \leq \infty$$

Donc $X_n(u) \overset{n\to+\infty}{\to} X_u$ dans L^2

3. Par définition $(X_n(t))_{n\geq 0}$ est une suite de sommes partielles de variables aléatoires indépendantes convergentes vers X_t. Donc $X_n(u) \overset{P.S}{\to} X_u$ aussi. Et pour $\psi \in \mathcal{C}$, $\psi(X_n(u)) \overset{P.S}{\to} \psi(X_u)$ (puisque ψ est continue)
4. Soit $\psi \in \mathcal{C}$, puisque ψ est de classe C^2, elle admet un developpement limité d'ordre 1, pour y au voisinage de x

$$\psi(y) = \psi(x) + (y-x)\psi'(x) + O(y-x)$$

Avec $O(y-x) \overset{y\to x}{\to} 0$
Ainsi pour $y = X_n(t)$ et $x = X_t$, on obtient

$$\psi(X_n(t)) = \psi(X_t) + (X_n(t) - X_t)\psi'(X_t) + O(X_n(t) - X_t)$$

Où

$$\begin{aligned}|\psi(X_n(t)) - \psi(X_t)| &= |(X_n(t) - X_t)\psi'(X_t) + O(X_n(t) - X_t)| \\ &\leq |X_n(t) - X_t||\psi'(X_t)| + |O(X_n(t) - X_t)| \\ &\leq c_1|X_n(t) - X_t|\end{aligned}$$

D'aprés la proposition ψ' est bornée et ψ'' est positive continue à support compact, donc bornée. Par conséquent

$$E|\psi(X_n(t)) - \psi(X_t)| \leq c_1 \underbrace{E|X_n(t) - X_t|}_{\downarrow 0}$$

Ceci montre que $\psi(X_n(t)) \xrightarrow{L^1} \psi(X_t)$, ainsi on a

$$E[\psi(X_n(u))] \to E[\psi(X_u)]$$

Donc pour démontrer la proposition il suffit de montrer que $\forall s \leq t$

$$E[\psi(X_n(s))] \leq E[\psi(X_n(t))]$$

Nous avons

$$E[\psi(X_n(s))] = E[\psi(\sum_{k=0}^{n-2} a(s, \frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}) + a(s, \frac{n-1}{n})(L_{\frac{n}{n}} - L_{\frac{n-1}{n}}))]$$

Mais par le point 1)a)du lemme (2.2.1)pour $Y = (L_{\frac{n}{n}} - L_{\frac{n-1}{n}})$ et

$$X = \sum_{k=0}^{n-2} a(s, \frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}})$$

$$\begin{aligned}E[\psi(X_n(s))] &\leq E[\psi(\sum_{k=0}^{n-2} a(s, \frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}) + a(t, \frac{n-1}{n})(L_{\frac{n}{n}} - L_{\frac{n-1}{n}}))] \\ &\leq E[\psi(\sum_{k=0}^{n-3} a(s, \frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}) + a(t, \frac{n-1}{n})(L_{\frac{n}{n}} - L_{\frac{n-1}{n}}) \\ &\quad + a(s, \frac{n-2}{n})(L_{\frac{n-1}{n}} - L_{\frac{n-2}{n}}))]\end{aligned}$$

On applique le lemme encore une fois pour $Y = (L_{\frac{n-1}{n}} - L_{\frac{n-2}{n}})$ et

$$X = \sum_{k=0}^{n-3} a(s, \frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}) + a(t, \frac{n-1}{n})(L_{\frac{n}{n}} - L_{\frac{n-1}{n}})$$

On obtient

$$E[\psi(X_n(s))] \leq E[\psi(\sum_{k=0}^{n-3} a(s,\frac{k}{n})(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}) + a(t,\frac{n-1}{n})(L_{\frac{n}{n}} - L_{\frac{n-1}{n}})$$

$$+a(s,\frac{n-2}{n})(L_{\frac{n-1}{n}} - L_{\frac{n-2}{n}}))]$$

On refait la même démarche jusqu'à l'obtention du résultat $E[\psi(X_s)] \leq E[\psi(X_t)]$ par passage à la limite

Remarque 2.2.9 *Suite à ce raisonnement avec $(L_s, s \geq 0)$un processus à accroissements indépendants quelconques, plusieurs applications découlent*

1. *Si L_s est un processus à accroissements symétriques et indépendants alors pour $\varphi \in J$*

$$\varphi(\int_0^T a(t,s)dL_s, t \geq 0)$$

est un PCOC
En effet *Par le point 3)b) du lemme (2.2.1) pour $\alpha_i(t) = a(t,\frac{i}{n})$ et $X_i = L_{\frac{i+1}{n}} - L_{\frac{i}{n}}$*

$$E[\psi \circ \varphi(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)X_i)] \geq E[\psi \circ \varphi(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(s)X_i)]$$

Comme φ est continue, par passage à la limite, on obtient

$$E[\psi(\varphi(\int_0^T a(t,u)dL_u))] \geq E[\psi(\varphi(\int_0^T a(t,s)dL_s))]$$

2. *En supposant que $(L_s, s \geq 0)$ est un processus de Lévy, $\forall\ s \leq t$*

$$\begin{aligned} E[\psi(\frac{L_s}{s})] &= E[E\psi(\frac{L_s}{s})/\mathcal{F}_t^+] \\ &\geq E[\psi E(\frac{L_s}{s})/\mathcal{F}_t^+] \text{(par l'inégalité de Jensen)} \\ &\geq E[\psi(\frac{L_t}{t})] \end{aligned}$$

Ainsi $(\frac{L_t}{t}, t \geq 0)$ est un processus décroissant dans l'ordre convexe, il peut s'écrire

$$\frac{L_t}{t} = \int_0^T a(t,s)dL_s \quad \text{avec } T = \infty \text{ et } a(t,s) = \frac{1}{t}1_{s \leq t}$$

Mais $a(t,s)$ ainsi défini n'est pas croissant en t

3. *Si dans la proposition (2.2.8)* $(L_s, s \geq 0)$ *est le mouvement brownien, pour* $\varphi \in I, (\varphi(\int_0^T a(t,s)dB_s), t \geq 0)$ *est un PCOC,ce point est une conséquence du* 2)b) *du lemme (2.2.1) puisque* $\int_0^T a(t,s)dB_s$ *est un processus aléatoire gaussien centré de variance* $\int_0^T a^2(t,s)ds$

   En effet

$$\int_0^t a(t,s)dB_s \stackrel{L^2}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a(t, \frac{k}{n})(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}})$$

   Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k'}^{m} \alpha_{k'}(X^T_{t_{k'}}) &\stackrel{L^2}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k'}^{m} \alpha_{k'} \sum_{k=0}^{n-1} a(t_{k'}, \frac{k}{n}(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}})\\ &\stackrel{L^2}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\sum_{k'}^{m} \alpha_{k'} a(t_{k'}, \frac{k}{n})(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}})\end{aligned}$$

   Où le second membre est une limite dans L^2 *d'une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées car c'est une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes. D'autre part* X^T_t *est une martingale,*

$$\begin{aligned}E(X^T_t)^2 &= E[\int_0^T a^2(t,s)d < B, B >_s]\\ &= \int_0^T a^2(t,s)ds\end{aligned}$$

   De plus

$$\varphi(\int_0^T a(t,s)dB_s) \stackrel{loi}{=} \varphi(\sqrt{\int_0^T a^2(t,s)ds}.G)$$

   Où $G \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *et* $\sqrt{\int_0^T a^2(t,s)ds}$ *est croissante en* t

Proposition 2.2.10 *Soient* $\sigma, b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tels que l'equation differentielle stochastique suivante*

$$X_t = \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

admet une solution unique en loi
En outre nous supposons

- *pour tout* $s \geq 0 \quad \sigma_s = \sigma(s,.)$ *est une fonction paire*

- *pour tout* $s \geq 0 \quad b_s = b(s,.)$ *est une fonction impaire tel que* $sgn\ b(x) = sgn(x)$

Alors

1. $(X_t, t \geq 0)$ *est un PCOC*
2. *Plus généralement ,pour* $\varphi \in J$, $(\varphi(X_t), t \geq 0)$ *est un PCOC*

Preuve Montrons d'abord que le processus $(X_t, t \geq 0)$ est symétrique
Nous avons

$$\begin{aligned}
-X_t &= -\int_0^t \sigma_s(X_s)dB_s - \int_0^t b_s(X_s)ds \\
&\overset{loi}{=} \int_0^t \sigma_s(-X_s)d\widetilde{B}_s + \int_0^t b_s(-X_s)ds \\
&(\widetilde{B}_s = -B_s \overset{loi}{=} B_s)
\end{aligned}$$

Si on pose $Y_t = -X_t$ on obtient Y_t est solution de

$$Y_t = \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s + \int_0^t b(s, Y_s)ds$$

Par unicité de solution en loi, $Y_t \overset{loi}{=} X_t$ d'où la symétrie de $(X_t, t \geq 0)$

1. Soit $\psi \in \mathcal{C}$, par Itô

$$E[\psi(X_t)] = E[\int_0^t \psi'(X_s)b_s(X_s) + \frac{1}{2}\psi''(X_s)\sigma_s^2(X_s)ds]$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}E[\psi(X_t)] &= E[\psi'(X_t)b_t(X_t) + \frac{1}{2}\psi''(X_t)\sigma_t^2(X_t)] \\
&\geq E[\psi'(X_t)b_t(X_t)] \\
&\geq E[b_t(X_t)\{\psi'(0) + \int_0^{X_t} \psi''(u)du\}] \\
&\geq E[b_t(X_t)\int_0^{X_t} \psi''(u)du]
\end{aligned}$$

Si $X_t \geq 0 \Rightarrow b_t(X_t)\int_0^{X_t} \psi''(u)du \geq 0$ puisque $sgn[b_t(X_t)] = sgn(X_t)$

Si $X_t \leq 0 \Rightarrow b_t(X_t)\int_0^{X_t} \psi''(u)du \geq 0$
Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t}E[\psi(X_t)] \geq 0$$

2. Soit $\varphi \in J$ et $\psi \in \mathcal{C}$ pour θ définie dans 3)a) du lemme (2.2.1) on obtient

$$E[\psi \circ \varphi(X_t)] - E[\psi \circ \varphi(X_s)] = E[\theta \circ \varphi(X_t)] - E[\theta \circ \varphi(X_s)]$$

On sait que $(X_t, t \geq 0)$ est un PCOC, donc en particulier pour $\theta \circ \varphi$ convexe

$$E[\theta \circ \varphi(X_t)] - E[\theta \circ \varphi(X_s)] \geq 0$$

Ce qui clos cette démonstration.

Remarque 2.2.11 *L'hypothèse imposée dans la proposition $sgn(b_s(x)) = sgn(x)$ n'est pas nécessaire, voilà deux exemples de processus $(X_t, t \geq 0)$ croissants dans l'ordre convexe solution de l'équation, où cette hypothèse n'est pas satisfaite*

Exemple 1)*Soit $(X_t, t \geq 0)$ le processus de Ornstein−Uhlenbeck défini par*

$$X_t = B_t - c\int_0^t X_s ds$$

Evidemment si $c \leq 0$, alors $b_s(x) = -cx$ satisfait l'hypothèse
Or si $c \geq 0$, $sgn(b_s(x)) = -sgn(x)$ mais on peut montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est un PCOC en résolvant l'EDS

$$dX_t + cX_t dt = dB_t$$

par la méthode de la variation de la constante

1. *La résolution de l'EDS sans second membre*

$$\begin{aligned} dX_t + cX_t dt = 0 &\Rightarrow dX_t = -cX_t dt \\ &\Rightarrow \frac{dX_t}{X_t} = -cdt \\ &\Rightarrow ln|X_t| = -ct \\ &\Rightarrow ln|X_t| = -ct + c\prime \\ &\Rightarrow X_t = Ke^{-ct} \end{aligned}$$

2. *Pour résoudre l'EDS avec second membre on procède comme suit*

$$X_t = K(t)e^{-ct} \Rightarrow dX_t = dK(t)e^{-ct} - cK(t)e^{-ct}$$

. En remplaçant X_t et dX_t dans l'EDS, on obtient

$$\begin{aligned} dK(t)e^{-ct} - cK(t)e^{-ct} + cK(t)e^{-ct} = dB_t &\Rightarrow dK(t)e^{-ct} = dB_t \\ &\Rightarrow K(t) = \int_0^t e^{cs} dB_s. \end{aligned}$$

Par suite la solution se l'EDS est donnée par

$$X(t) = \int_0^t e^{c(s-t)} dB_s$$

Ainsi X_t est un processus gaussien centré de variance

$$\begin{aligned} E[X_t^2] &= \int_0^t e^{2c(s-t)}ds \\ &= \frac{1}{2c}[e^{2c(s-t)}]_0^t \\ &= \frac{1}{2c} - \frac{1}{2c}e^{-2ct} \\ &= \frac{1-e^{-2ct}}{2c} \end{aligned}$$

Donc

$$X_t \overset{loi}{=} \sqrt{\frac{1-e^{-2ct}}{2c}}.G$$

Où $\quad G \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$

Exemple 2) *Soit $\varphi \in I$, et de classe C^2 on sait que $(X_t = \varphi(B_t), t \geq 0)$ est un PCOC, en appliquant la formule d'Itô à la fonction φ, on obtient*

$$\varphi(B_t) = \int_0^t \varphi'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)ds$$

Puisque φ est une fonction continue croissante, elle admet donc une fonction réciproque φ^{-1} continue croissante de plus impaire

$$Ainsi \qquad X_t = \int_0^t \varphi' \circ \varphi^{-1}(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi'' \circ \varphi^{-1}(X_s)ds$$

La fonction $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est paire car φ' l'est aussi, et la fonction $\varphi'' \circ \varphi^{-1}$ est impaire car φ'' l'est aussi, mais nous n'avons pas forcément $sgn[\varphi'' \circ \varphi^{-1}] = sgn(x)$

Chapitre 3

Les processus 1−martingale

Dans cette partie, nous allons exhiber des martingales $(M_t, t \geq 0)$ pour plusieurs processus $(X_t, t \geq 0)$croissants dans l'ordre convexe telles que pour tout t fixé

$$X_t \stackrel{loi}{=} M_t$$

en développant les résultats de l'article Pour des processus particuliers ,on sait expliciter les martingales associées cas par cas, mais une méthode générale reste inconnue à notre connaissance à l'exception de la construction abstraite faite par Strassen (voir[10]), Doob (voir[3]) et Kellerer (voir[6]).

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est un $1-$martingale s'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ tel que pour tout t fixé*

$$X_t \stackrel{loi}{=} M_t$$

Théorème 3.1.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $(X_t, t \geq 0)$ *est croissant dans l'ordre convexe*
2. $(X_t, t \geq 0)$ *est un $1-$martingale*

<u>Preuve</u>

i) 2) $\Rightarrow$ 1) est trivial, pour $\psi \in \mathcal{C}$ et $s \leq t$, par hypothèse $X_t \stackrel{loi}{=} M_t$

$$\begin{aligned} E[\psi(X_t)] &= E[\psi(M_t)] \\ &= E[E[\psi(M_t)]/\mathcal{F}_s] \\ &\geq E[\psi E[(M_t)/\mathcal{F}_s]]\text{(par l'inégalité de Jensen)} \end{aligned}$$

Puisque M_t est une martingale

$$\begin{aligned} E[\psi(X_t)] &\geq E[\psi(M_s)] \\ &\geq E[\psi(X_s)] \end{aligned}$$

$i)$ 1) $\Rightarrow$ 2) est difficille à établir elle est d$\hat{u}$ aux travaux de V.Strassen, J.L.Doob et H.G.Kellerer (voir[8]).

Nous allons maintenant décrire plusieurs méthodes (plut$\hat{o}$t limitées) et les illustrer avec des exemples.

3.2 Méthode du Drap Brownien

Cette méthode a été découverte par D.Baker et M.Yor, (voir[1]), Voici l'illustration de cette méthode par son exemple fondateur.
Soit $(B_s, s \geq 0)$ un mouvement Brownien et $(W_{s,u}, s, u \geq 0)$ un Drap Brownien

Théorème 3.2.1 *Soit* $\nu \in I\!R$ *et* $(X_t^{(\nu)} = \frac{1}{t} \int_0^t exp(\nu B_u - \frac{\nu^2 u}{2})du, t \geq 0)$
Alors

1. $(M_t^{(\nu)} = \int_0^1 exp(\nu W_{u,t} - \frac{\nu^2 ut}{2})du, t \geq 0)$ *est une martingale pour la filtration* $(g_t = \sigma(W_{u,s}, u \geq 0, s \leq t), t \geq 0)$
2. *Pour tout t fixé* $\quad X_t^{(\nu)} \overset{loi}{=} M_t^{(\nu)}$

<u>Preuve</u>

1. Montrons que $(M_t^{(\nu)}), t \geq 0)$ est une $(g_t, t \geq 0)$ martingale

$$\begin{aligned} E[M_t^{(\nu)}/g_s] &= E[\int_0^1 exp(\nu W_{u,t} - \frac{\nu^2 ut}{2})du/g_s] \\ &= \int_0^1 E[exp(\nu(W_{u,t} - W_{u,s} + W_{u,s}) - \frac{\nu^2 ut}{2})/g_s]du \end{aligned}$$

$W_{u,s}$ est g_s mesurable, de plus d'aprés la remarque (1.6.3) $W_{u,t} - W_{u,s}$ est indépendant de g_s, ainsi

$$E[M_t^{(\nu)}/g_s] = \int_0^1 exp(\nu W_{u,s} - \frac{\nu^2 ut}{2})E[exp(\nu(W_{u,t} - W_{u,s})]du$$

Avec

$$E[exp(\nu(W_{u,t} - W_{u,s})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi u(t-s)}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(\nu y)exp(-\frac{y^2}{2u(t-s)})dy$$

En appliquant le changement de variable
$z = \frac{y}{\sqrt{u(t-s)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u(t-s)}}dy = dz$, on obtient

$$\begin{aligned}
E[exp(\nu(W_{u,t} - W_{u,s})] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(\nu z\sqrt{u(t-s)})exp(-\frac{z^2}{2})dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(\frac{\nu^2 u(t-s)}{2})exp(-\frac{(z-\nu\sqrt{u(t-s)})^2}{2})dz \\
&= exp(\frac{\nu^2 u(t-s)}{2})
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E[M_t^{(\nu)}/g_s] &= \int_0^1 exp(\nu W_{u,s} - \frac{\nu^2 ut}{2} + \frac{\nu^2 u(t-s)}{2})du \\
&= \int_0^1 exp(\nu W_{u,s} - \frac{\nu^2 us}{2}du \\
&= M_s^{(\nu)}
\end{aligned}$$

2. Montrons que $X_t^{(\nu)} \overset{loi}{=} M_t^{(\nu)}$
   Nous avons
$$X_t^{(\nu)} = \frac{1}{t}\int_0^t exp(\nu B_u - \frac{\nu^2 u}{2})du$$
   En utilisant le changement de variable $[u = vt]$, on obtient
$$X_t^{(\nu)} = \int_0^1 exp(\nu B_{vt} - \frac{\nu^2 vt}{2})dv$$
   Or d'aprés la proposition (1.6.2), pour tout $t \geq 0$ fixé
$$(B_{ut}, u \geq 0) \overset{loi}{=} (W_{u,t}, u \geq 0).$$
   Par suite
$$\begin{aligned}
X_t^{(\nu)} &\overset{loi}{=} \int_0^1 exp(\nu W_{v,t} - \frac{\nu^2 vt}{2})dv \\
&= M_t^{(\nu)}
\end{aligned}$$

3.3 Méthode d'inversion du temps

Nous allons montrer par des exemples comment on peut construire des processus croissants dans l'ordre convexe et leurs martingales associées liés aux fonctions suivantes

$h : I\!R_+ \times I\!R \to I\!R$ de classe C^1 par rapport à la 1^{re} variable et C^2 par rapport à la 2^{me}

avec $h(0,0) = 0$ et satisfait

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

qui se concrétisent par l'exemple suivant

$$h(s,x) = exp[(\lambda x - \frac{\lambda x^2}{2} s)] - 1, \quad \lambda \in I\!R.$$

Théorème 3.3.1 *Soit $(B_s, s \geq 0)$ un mouvement brownien, h une fonction définie précédemment et telle que $(h(s,B_s), s \geq 0)$ soit une martingale.*
Soient

$$(X_t^{(h)} = \int_0^t h(s, B_s)ds, t \geq 0)$$

et

$$(M_t^{(h)} = \int_0^t h(t-s, B_t - B_s)ds, t \geq 0).$$

Alors

1. *$(M_t^{(h)}, t \geq 0)$ est une martingale.*
2. *Pour tout $t \geq 0$ fixé ,* $\quad X_t^{(h)} \overset{loi}{=} M_t^{(h)}$.

Contrairement au théorème (3.2.1) ,ici la martingale $(M_t^{(h)}, t \geq 0)$ est définie dans le même espace que $(B_t, t \geq 0)$ et c'est une martingale pour la même filtration.

Preuve

1. Montrons que $(M_t^{(h)}), t \geq 0)$ est une martingale, en utilisant la formule d'Itô entre s et t, on peut écrire :

$$\begin{aligned} h(t-s, B_t - B_s) &= h(s-s, B_s - B_s) + \int_s^t [\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}](u-s, B_u - B_s)du \\ &\quad + \int_s^t \frac{\partial h}{\partial u}(u-s, B_u - B_s)dB_u \\ &= \int_s^t \frac{\partial h}{\partial u}(u-s, B_u - B_s)dB_u \\ &\quad \text{(car } h(0,0) = 0) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M_t^{(h)} &= \int_0^t h(t-s, B_t - B_s)ds \\ &= \int_0^t ds \int_s^t \frac{\partial h}{\partial u}(u-s, B_u - B_s)dB_u \\ &= \int_0^t dB_u \int_0^u \frac{\partial h}{\partial u}(u-s, B_u - B_s)ds \\ &\quad \text{(par Fubini)} \end{aligned}$$

Mais h est de classe C^2 par rapport à x, continue sur le compact $[0, u]$ elle est de derivée partielle bornée ,par suite

$$E\int_0^t du(\int_0^u \frac{\partial h}{\partial u}(u-s, B_u - B_s)ds)^2 < \infty$$

Donc $(M_t^{(h)}), t \geq 0)$ est une martingale

2. Montrons que $X_t^{(h)} \overset{loi}{=} M_t^{(h)}$
Nous avons

$$X_t^{(h)} = \int_0^t h(s, B_s)ds$$

En appliquant le changement de variable $(s = t - u)$

$$\begin{aligned} X_t^{(h)} &= -\int_t^0 h(t-u, B_{t-u})du \\ &= \int_0^t h(t-u, B_{t-u})du \\ &\overset{loi}{=} \int_0^t h(t-u, B_t - B_u)du \end{aligned}$$

Par définition de h et $(B_u, u \leq t) \overset{loi}{=} (B_t - B_{t-u}, u \leq t)$
alors $(B_{t-u}, u \leq t) \overset{loi}{=} (B_t - B_u, u \leq t)$.
Ainsi

$$X_t^{(h)} = M_t^{(h)}.$$

La version discrète du théorème

Soit $(Z_1, Z_2, ..., Z_n, ..)$ des variables aléatoires iid et $(Y_n, n \geq 1)$ une $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ une martingale centrée, où $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$. Il existe une suite de fonctions borelienne $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$Y_n = f_n(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$$

Théorème 3.3.2 *En plus des hypothèses précédentes nous supposons que* $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions symétriques par rapport à leurs arguments i.e* $f_2(Z_2, Z_1) = f_2(Z_1, Z_2) ..., f_n(Z_n, Z_{n-1} ..., Z_1) = f_n(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$
Soit

$$(X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j, n \geq 1).$$

Et

$$\begin{aligned} M_n &= f_1(Z_n) + f_2(Z_n, Z_{n-1}) + ... + f_n = (Z_n, Z_{n-1}, ...Z_1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j(Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_{n-j+1}). \end{aligned}$$

Alors

1. $(M_n, n \geq 1)$ *est une* $\mathcal{F}_n$ *martingale*
2. *pour tout* $n \geq 1$ *fixé* $\quad X_n \overset{loi}{=} M_n$

<u>Preuve</u>

1. Montrons que $(M_n, n \geq 1)$ est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale
   Pour la démonstartion il faut d'abord remarquer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x_1, x_2 ... x_{n-1}$ réelles,

   $$E[f_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, Z)] = f_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

   et $E[f_1(Z)] = 0$, où Z est une variable aléatoire de même loi que les $Z_i, i \geq 1$.
   <u>En effet</u> puisque $(Y_n, n \geq 1)$ est une martingale centrée, $E[f_1(Z)] = E(Y_1) = 0$. De plus, par le fait que Y_n est une martingale

   $$\begin{aligned} E[f_n(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}, Z_n)/\mathcal{F}_{n-1}] &= f_{n-1}(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}) \\ &= \phi((Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}) \end{aligned}$$

   Car $(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}) \in \mathcal{F}_{n-1}$ et Z_n est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$
   Où

   $$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) &= E[f_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, Z)] \\ &= f_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \end{aligned}$$

   Avec Z, Z_n de même loi.
   Retournons maintenant à la preuve de notre théorème, nous avons

$$E[M_n/\mathcal{F}_{n-1}] = E[f_1(Z_n)/\mathcal{F}_{n-1}] + E[f_2(Z_n, Z_{n-1})/\mathcal{F}_{n-1}]$$
$$+ ... + E[f_n(Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_2, Z_1)/\mathcal{F}_{n-1}]$$

et puisque f_n est symétrique par rapport à ses arguments

$$\begin{aligned}
E[M_n/\mathcal{F}_{n-1}] &= E[f_1(Z_n)/\mathcal{F}_{n-1}] + E[f_2(Z_{n-1}, Z_n)/\mathcal{F}_{n-1}] \\
&\quad + ... + E[f_n(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}, Z_n)/\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= 0 + \phi(Z_{n-1}) + ... + \phi(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}) \\
&= E[f_2(Z_{n-1}, Z_n)] + ... + E[f_n(Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_2, Z_1)] \\
&= f_1(Z_{n-1}) + ... + f_{n-1}(Z_{n-1}, ..., Z_2, Z_1) \\
&= M_{n-1}
\end{aligned}$$

2. Montrons que $X_n \overset{loi}{=} M_n$

$$\begin{aligned}
X_n &= \sum_{j=1}^{n} Y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j(Z_1, ..., Z_j) \\
&= f_1(Z_1) + f_2(Z_1, Z_2) + ... + f_n(Z_1, ..., Z_n) \\
&\overset{loi}{=} f_1(Z_n) + f_2(Z_n, Z_{n-1}) + ... + f_n(Z_n, ..., Z_1) \\
&\quad \text{car les } Z_i \text{ sont indépendantes de même loi } \diamond
\end{aligned}$$

Le théorème suivant est une généralisation du théoreme (3.3.1) au processus de Lévy

Théorème 3.3.3 *Soit $(L_s, s \geq 0)$un processus de Lévy continu et $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borelienne, tel que $(h(s, L_s), s \geq 0)$ soit une $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)-$martingale centrée, on définit par*

$$(X_t = \int_0^t h(s, L_s)ds, t \geq 0)$$

Et

$$(M_t = \int_0^t h(t - s, L_t - L_s)ds, t \geq 0)$$

Alors

1. *$(M_t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ martingale*
2. *Pour tout $t \geq 0$ fixé $\quad X_t \overset{loi}{=} M_t$*

preuve

1. Montrons que $(M_t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale
   Pour $s \leq t$

$$\begin{aligned} E[M_t/\mathcal{F}_s] &= E[\int_0^t h(t-u, L_t - L_u)du/\mathcal{F}_s] \\ &= \int_0^s E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s]du + \int_s^t E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s]du \end{aligned}$$

Comme pour $s \leq u \leq t$, $L_t - L_u$ est indépendent de L_s

$$E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s] = E[h(t-u, L_t - L_u)]$$

Mais $L_t - L_u \overset{loi}{=} L_{t-u}$, ainsi

$$E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s] = E[h(t-u, L_{t-u})]$$

D'autre part $(h(t, L_t), t \geq 0)$ est une martingale et $E[h(v, L_v)] = 0$, d'où

$$E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s] = 0$$

Pour $u \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s] &= E[h(t-u, L_t - L_s + L_s - L_u)/\mathcal{F}_s] \\ &= \phi(t-u, L_s - L_u) \end{aligned}$$

Car $L_s - L_u \in \mathcal{F}_s$ et $L_t - L_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ Avec

$$\begin{aligned} \phi(t-u, L_s - L_u) &= \widetilde{E}[h(t-u, L_s - L_u + \widetilde{L_t - L_s})] \\ &= \widetilde{E}[h(t-u, L_s - L_u + \widetilde{L_{t-s}})] \end{aligned}$$

Parsuite

$$\int_0^s E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s]du = \int_0^s \widetilde{E}[h(t-u, L_s - L_u + \widetilde{L_{t-s}})]du$$

Posons $[v = s - u]$, on peut écrire

$$\int_0^s E[h(t-u, L_t - L_u)/\mathcal{F}_s]du = \int_0^s \widetilde{E}[h(t+v-s, L_v + \widetilde{L_{t-s}})]dv$$

Or $0 \leq v \leq s$, donc L_{t-s} est indépendant de $\mathcal{F}_v$, par conséquent

$$\widetilde{E}[h(t+v-s, L_v + \widetilde{L_{t-s}})] = E[h(t+v-s, L_v + L_{t-s})/\mathcal{F}_v]$$

et comme $s-v \leq t$ et $t-s+v \geq v$, on a

$$\begin{aligned} E[h(t+v-s, L_v + L_{t-s})/\mathcal{F}_v] &= E[h(t+v-s, L_{t-s+v})/\mathcal{F}_v] \\ &= h(v, L_v) \end{aligned}$$

car $h(u, L_u)$ est une martingale.

En appliquant encore une fois le changement de variable $[v = s-u]$

$$\int_0^s \widetilde{E}[h(t-u, L_s - L_u + \widetilde{L_{t-s}})]du = \int_0^s h(s-u, L_s - L_u)$$

Par suite

$$E[M_t/\mathcal{F}_s] = \int_0^s h(s-u, L_s - L_u) = M_s$$

2. Montrons que $X_t \overset{loi}{=} M_t$

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t h(t-s, L_t - L_s)ds \\ &\overset{loi}{=} \int_0^t h(t-s, L_{t-s})ds \end{aligned}$$

Car $(L_s, 0 \leq s \leq t) \overset{loi}{=} (L_t - L_{(t-s)}, 0 \leq s \leq t)$ et en appliquant le changement de variable $[t-s = u]$

$$\begin{aligned} M_t &\overset{loi}{=} \int_0^t h(u, L_u)du \\ &\overset{loi}{=} X_t \end{aligned}$$

3.4 Méthode des EDS

Soit $\varphi \in I$, nous avons déja montré que $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ est un PCOC, nous allons maintenant voir au prix de quelques hypothèses supplémentaires sur φ qu'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ solution de

$$M_t = \int_0^t \sigma(u, M_u)dB_u$$

(pour une fonction σ bien choisie) tel que, pour tout $t \geq 0$ fixé on aurait

$$M_t \overset{loi}{=} \varphi(B_t)$$

Hypothèses et notations

1. Soit $\varphi \in J$ tel que, pour tout $t \geq 0$

$$E(|\varphi(B_t)|) < \infty \qquad \text{et} \qquad E(|\varphi''(B_t)|) < \infty$$

2. Soit $H : I\!R_+ \times I\!R \to I\!R_-$ une fonction définie par

$$H(u,x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy$$

Nous avons que $H(u,x)$ ainsi défini vérifie 2 propriétés qui sont les suivantes

–

$$\begin{aligned}
|H(u,x)| &= |\int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy| \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} |\varphi''(y)| exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi''(y)| exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \\
&\leq E(|\varphi''(B_t)|) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

– Pour tout $u \geq 0$ et $x \in I\!R$ nous avons $H(u,x) \leq 0$
Si $x \in I\!R_-$,

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \leq 0$$

Car $\varphi''(y) \leq 0$
Si $x \in I\!R_+$, $sgn\ varphi''(x) = sgn(x) \geq 0$, ainsi

$$\begin{aligned}
& \int_{0}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \leq \int_{0}^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \\
\Rightarrow \quad & -\int_{0}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \geq -\int_{0}^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy
\end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $[z = -y]$

$$-\int_{0}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \geq \int_{-\infty}^{0} \varphi''(z) exp\{-\frac{z^2}{2u}\} dz$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy \leq 0$$

3. Soit $\sigma : I\!R_+ \times I\!R \to I\!R_+$ une fonction définie par

$$\sigma^2(u,y) = (\varphi' \circ \varphi^{-1})^2(y) - (\varphi' \circ \varphi^{-1})(y) H(u, \varphi^{-1}(y)) exp\{\frac{(\varphi^{-1})^2(y)}{2u}\}$$

Puisque $H(u,x) \leq 0$ et $\varphi'(x) \geq 0$, alors $\sigma^2(u,x) \geq 0$

On note par $H1)$ les Hypothèse que doit vérifier φ

$i)$ $\varphi \in J$

$ii)$ $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est lipschitzienne et $\varphi'(0) > 0$

$iii)$ Pour tout $c > 1$ il existe une constante K_c telle que pour tout $x \in I\!R$

$$|x\varphi'(x)| \geq c|\varphi''| - K_c$$

On peut trouver des exemples de fonctions qui vérifient les hypothèses $H1)$, parmi elles considérons $\varphi(x) = sh(x)$ qui vérifie bien les hypothèses $H1)$

En effet

La fonction $\varphi(x) = sh(x)$ est croissante impaire de classe C^2, et $sgn[\varphi''(x)] = sgn[sh(x)] = sgn(x)$

De plus

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}(x) = ch[argsh(x)] = \sqrt{x^2+1}$$

Ainsi

$$[\varphi' \circ \varphi^{-1}]'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Mais $\sqrt{x^2+1}$ est une fonction paire convexe, donc $\exists k \geq 0$ une constante tel que $\sqrt{x^2+1} \geq k'|x|$, par suite

$$|[\varphi' \circ \varphi^{-1}]'(x)| = |\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}| \leq \frac{1}{k'}$$

D'où $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est lipschitzienne

Enfin, soit x_0 tel que $|x_0\varphi'(x_0)| = c|\varphi''(x_0)|$

Avec $c > x_0 > 0$, Alors

$$K_c = c|\varphi''(x_0)|$$

Le lemme suivant nous fournit l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS

$$dM_t = \sigma(t, M_t)dB_t$$

Lemme 3.4.1 *Sous $H1)$, avec la fonction σ définie plus haut*

- *σ est localement lipshitzienne en x uniformément dans les compacts contenant u*
- *La croissance linéaire de σ en x uniformément dans les compacts contenant u*

Alors l'EDS admet une solution unique

Admettons un instant ce lemme que nous montrons à la fin de cette section

Théorème 3.4.2 *Sous $H1$), soit $(M_t, t \geq 0)$ solution de*

$$M_t = \int_0^t \sigma(s, M_s) dB_s$$

Alors la martingale $(M_t, t \geq 0)$ est telle que pour $t \geq 0$

$$M_t \overset{loi}{=} \varphi(B_t)$$

Avant de démontrer ce théorème, nous allons justifier le choix de l'expression de σ
Soit $\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(M_t, t \geq 0)$ solution de

$$M_t = \int_0^t \tau(s, M_s) dB_s$$

En utilisant la formule d'It$\hat{o}$, pour toute fonction f régulière à support compact appliquée à M_t, nous avons

$$\begin{aligned} f(M_t) &= \int_0^t f'(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(M_s) d < M, M >_s \\ &= \int_0^t \tau(s, M_s) f'(M_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \tau^2(s, M_s) f''(M_s) ds \end{aligned}$$

Ainsi

$$E[f(M_t)] = \underbrace{E[\int_0^t \tau(s, M_s) f'(M_s) dB_s]}_{0} + \frac{1}{2} E[\int_0^t \tau^2(s, M_s) f''(M_s) ds]$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t} E[f(M_t)] = \frac{1}{2} E[\tau^2(t, M_t) f''(M_t)]$$

et d'un autre côté en utilisant la formule d'It$\hat{o}$, pour toute fonction f régulière à support compact appliquée à $\varphi(B_t)$, nous avons

$$f \circ \varphi(B_t) = \int_0^t \varphi'(B_s) f' \circ \varphi(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t [f'' \circ \varphi(B_s)(\varphi')^2(B_s) + \varphi''(B_s) f' \circ \varphi(B_s)] ds$$

Ainsi

$$E[f \circ \varphi(B_t)] = \underbrace{E[\int_0^t \varphi'(B_s) f' \circ \varphi(B_s) dB_s]}_{0} + \frac{1}{2} E[\int_0^t [f'' \circ \varphi(B_s)(\varphi')^2(B_s) + \varphi''(B_s) f' \circ \varphi(B_s)] ds]$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}E[f \circ \varphi(B_t)] = \frac{1}{2}E[f' \circ \varphi(B_t)\varphi''(B_t) + f'' \circ \varphi(B_t)(\varphi')^2(B_t)]$$

Comme nous souhaitons obtenir

$$M_t \overset{loi}{=} \varphi(B_t)$$

On doit avoir,

$$\int_{I\!R} \tau^2(t,\varphi(x))f'' \circ \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{I\!R} f' \circ \varphi(x)\underbrace{\varphi''(x)exp\{-\frac{x^2}{2t}\}}_{dH}dx$$

$$+\int_{I\!R} f'' \circ \varphi(x)(\varphi')^2(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx$$

Puisque f est régulière à support compact, en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R} \tau^2(t,\varphi(x))f'' \circ \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\underbrace{[f' \circ \varphi(x)H(t,x)]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{I\!R} f'' \circ \varphi(x)\varphi'(x)H(t,x)dx \\
&\quad +\int_{I\!R} f'' \circ \varphi(x)(\varphi')^2(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx \\
&= \int_{I\!R}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp\{-\frac{x^2}{2t}\}[f'' \circ \varphi(x)] \\
&\quad [(\varphi')^2(x) - \varphi'(x)H(t,x)exp\{\frac{x^2}{2t}\}]dx
\end{aligned}$$

D'où le choix de σ

$$\sigma^2(t,\varphi(x)) = (\varphi')^2(x) - \varphi'(x)H(t,x)exp\{\frac{x^2}{2t}\}$$

et en remplaçant y par $\varphi(x)$, on aura

$$\sigma^2(t,y) = (\varphi' \circ \varphi^{-1})^2(y) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)H(t,\varphi^{-1}(y))exp\{\frac{(\varphi^{-1})^2(y)}{2t}\}$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème

<u>**Preuve du théorème**</u> Soit la fonction σ définie plus haut et M_t solution de l'EDS, on note par $p(t,dy)$ la loi de M_t et $q(t,dy)$ la loi de $\varphi(B_t)$
M_t satisfait aux équations de Fokker-Planck et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,dy) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(t,y)p(t,dy))$$

au sens des distributions
De même, soit $X_t = \varphi(B_t)$ solution de

$$X_t = \int_0^t \varphi' \circ \varphi^{-1}(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi'' \circ \varphi^{-1}(X_s)ds$$

X_t satisfait aux équations de Fokker-Planck et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}q(t,dy) = \frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial y^2}((\varphi' \circ \varphi^{-1}(y))^2 q(t,dy)) - \frac{\partial}{\partial y}\varphi'' \circ \varphi^{-1}(y)q(t,dy)]$$

Mais ces équations sont les mêmes, puisque nous avons choisi σ pour qu'il en soit ainsi. D'un autre côté $\varphi(B_0) = M_0 = 0$, alors

$$p(0,dy) = q(0,dy) = \delta_0(dy)$$

Ainsi $p(t,dy)$ et $q(t,dy)$ satisfaient aux mêmes équations parabolliques avec les mêmes conditions initiales. Par conséquent

$$M_t \overset{loi}{=} \varphi(B_t) \qquad \diamond$$

Retournons à la preuve du lemme qui précède le théorème
Preuve du lemme L'expression de $sigma$ donne

$$\sigma(u,\varphi(x)) = \varphi'(x)\sqrt{1 - \frac{1}{\varphi'(x)}H(u,x)exp\{\frac{x^2}{2u}\}}$$

Puisque $H(u,x) \leq 0$ et $|H(u,x)| = \int_{|x|}^{+\infty} \varphi''(y)exp\{-\frac{y^2}{2u}\}dy$
L'expression de σ devient

$$\sigma(u,\varphi(x)) = \varphi'(x)\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi'(x)}(\int_{|x|}^{+\infty} \varphi''(y)exp\{-\frac{y^2}{2u}\}dy)exp\{\frac{x^2}{2u}\}}$$

- Montrons que $\sigma(u,y)$ est localement lipschitzienne en x unifomément dans les compacts contenant u
  Pour cela nous avons besoin de démontrer les deux majorations suivantes
  1. pour $x \geq 0$
  $$exp\{\frac{x^2}{2u}\}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u}}dy \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{u}$$

<u>**En effet**</u>
En appliquant le changement de variable $[y = z + x]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} exp\{\frac{x^2}{2u}\} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u}} dy &= exp\{\frac{x^2}{2u}\} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(z+x)^2}{2u}} dz \\ &= exp\{\frac{x^2}{2u}\} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(z^2+2zx+x^2)}{2u}} dz \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2u}} dz \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u} \end{aligned}$$

2.

$$\exists K_0, \forall x \in I\!R \qquad \sup_{u\in[0,a]} \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)} (\int_{|x|}^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy) \leq K_0$$

il suffit de la démontrer pour $x \geq 0$, car φ', $|x|$ et $exp\{\frac{x^2}{2u}\}$ sont paires
En intégrant par partie, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)} (\int_x^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy) &= \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)} \{[\varphi'(y) e^{-\frac{y^2}{2u}}]_x^{+\infty} \\ &\quad + \int_x^{+\infty} \frac{y\varphi'(y)}{u} e^{-\frac{y^2}{2u}} dy\} \\ &= -1 + \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)u} \int_x^{+\infty} y\varphi'(y) e^{-\frac{y^2}{2u}} dy \end{aligned}$$

Par la 3^{eme} condition de $H1)$, en choisissant $c \geq a$

$$\begin{aligned} \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)} (\int_x^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy) &\geq -1 + \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)u} \int_x^{+\infty} (c\varphi''(y) - K_c) e^{-\frac{y^2}{2u}} dy \\ &\geq -1 + \frac{c}{u} \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)} (\int_x^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy) \\ &\quad - \frac{K_c}{u\varphi'(x)} exp\{\frac{x^2}{2u}\} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u}} dy \\ &\geq -1 + \frac{c}{u} \frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)} (\int_x^{+\infty} \varphi''(y) exp\{-\frac{y^2}{2u}\} dy) \\ &\quad - \frac{K'}{u\varphi'(x)} \sqrt{u} \end{aligned}$$

Puisque φ' est paire, positive et $\varphi'(x) \geq \varphi'(0)$, alors

$$\frac{exp\{\frac{x^2}{2u}\}}{\varphi'(x)}\left(\int_x^{+\infty} \varphi''(y)exp\{-\frac{y^2}{2u}\}dy\right) \leq \frac{\varphi'(0)\sqrt{u}+K'}{\varphi'(0)}\frac{\sqrt{u}}{c-u}$$

Ainsi, si on pose

$$\sigma(u,y) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)\alpha(u,y) \ ,$$

où

$$\alpha(u,y) = \sqrt{1+\frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(y)}\left(\int_{|\varphi^{-1}(y)|}^{+\infty} \varphi''(z)exp\{-\frac{y^2}{2u}\}dz\right)exp\{\frac{(\varphi^{-1})^2(y)}{2u}\}} \ .$$

Par conséquent

$$\sup_{u\in[0,a]} \alpha(u,y) \leq 1+\frac{\varphi'(0)\sqrt{a}+K'}{\varphi'(0)}\frac{\sqrt{a}}{c-a} = D \ .$$

Donc $\forall x, y \in [\beta,\gamma]$

$$\begin{aligned}
|\sigma(u,x)-\sigma(u,y)| &= |\varphi' \circ \varphi^{-1}(x)\alpha(u,x) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)\alpha(u,y)| \\
&= |\varphi' \circ \varphi^{-1}(x)\alpha(u,x) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)\alpha(u,x) \\
&\quad +\varphi' \circ \varphi^{-1}(y)\alpha(u,x) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)\alpha(u,y)| \\
&\leq \alpha(u,x)|\varphi' \circ \varphi^{-1}(x) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)| \\
&\quad +\varphi' \circ \varphi^{-1}(y)|\alpha(u,x)-\alpha(u,y)| \\
&\leq k\alpha(u,x)|x-y| + \varphi' \circ \varphi^{-1}(y)|\alpha'(u,\theta)||x-y|
\end{aligned}$$

Car $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est lipshitzienne

De plus α est de classe C^1 par rapport à y, alors en appliquant le théorème des accroissements finis à $\alpha(u,x)$
On obtient

$$\sup_{u\in[0,a]} |\sigma(u,x)-\sigma(u,y)| \leq K_D|x-y| \ .$$

– Montrons maintenant que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sigma(u,x)| \leq \mu(1+|x|) \ .$$

Par le fait que

$$|\sigma(u,x)| \leq |\varphi' \circ \varphi^{-1}(x) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(0)|\alpha(u,x) + \varphi' \circ \varphi^{-1}(0)\alpha(u,x)$$

Ainsi

$$\sup_{u\in[0,a]} |\sigma(u,x)| \leq D(k|x|+\varphi'(0)) \leq \mu(1+|x|) \ ,$$

où $\mu = D\max(\varphi'(0),k)$ $\diamond$

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la classe des processus croissants dans l'ordre convexe, nous avons proposé plusieurs exemples de tels processus issus principalement du calcul stochastique et de solution de certaines équations différentielles stochastiques. Nous avons ensuite montré que tout processus $1-$martingale est un processus croissant dans l'ordre convexe, mais la réciproque est difficile à établir elle est d$\hat{u}$e aux travaux de Kellerer. En abscence d'une méthode générale permettant de donner une expression explicite des martingales associées aux PCOC, nous nous sommes appuyés sur trois différentes méthodes en exhibant des martingales pour des processus croissants dans l'ordre convexe particuliers.

Bibliographie

[1] Baker, D. et Yor, M., *A Brownian sheet martingale with the same marginals as the arithmetic average of geometric Brownian motion.* Elect. J.Prob 14(52), $1532 - 1540$ 2009

[2] Belabbaci, O., *La penalisation des trajectoires du mouvement Brownien*,Mémoire de magistère. Université de Tlemcen. 2010

[3] Doob, J.L *Generalizedsweeping−out and probability. J. Functional Analysis* 2, $207 - 225$ 1968

[4] Hirsch, F., PROFETA, C., Roynette, B., Yor, M., *Peacocks and associated martingales, with explicit construction.*Springer, 2010.

[5] Jeanblanc, M., *Calcul stochastique*, cours de Master 2. Université Evry. 2006

[6] Kellerer, H.G *Markov Komposition und eine Anwendung auf martingale* , Math.Ann.198, $99 - 122$ 1972

[7] Profeta, C., Roynette, B., Yor, M., *Some examples of processes wich are increasing in the convexe order*, preprint.

[8] REVUZ, D., YOR, M., *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR $2000h : 60050$.

[9] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton university press 1970.

[10] Strassen, V. *The existence of probability measures with given marginals* ,Ann.Math.statist.36, $423 - 439$ 1965