

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Abou Bekr Belkaid -TLEMCEM-

Faculté des sciences de l'ingénieur

Département de génie mécanique



THESE

Pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT

Spécialité : énergétique

Thème

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET DÉVELOPPEMENT D'UN SIMULATEUR DES PHÉNOMÈNES DE TRANSFERT THERMIQUE DANS LES MÉTAUX EN VOIE DE SOLIDIFICATION

Présenté par :

M^r KORTI Abdel Illah Nabil

Sous la direction de :

M^r CHABANE SARI N. Professeur Université de Tlemcen

M^r KHADRAOUI Y. Professeur Université de Tlemcen

Devant le jury composé de :

Président :

M^r SEDDINI A. Maître de Conférence Université de Tlemcen

Examineurs :

M^r IMINE O. Professeur IGCMOran

M^r BENEDDRA A. Maître de Conférence Université de Mostaganem

M^r YUCEFI A. Professeur IGCMOran

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2007 - 2008

INTRODUCTION

Bien que la *coulée continue* a été conçue et brevetée en 1865 par monsieur Henry Bessemer, un des premiers fondateurs de l'aciérie moderne, beaucoup d'années ont été sacrifiées pour que cette technologie soit mise en oeuvre et le processus soit commercialisé. Au début des années 60, des quantités significatives d'acier ont commencé à être coulées en continu dans les industries d'aciérie dans une certaine région du monde. Aujourd'hui la *coulée continue* est le choix favori des usines de fonderie, bien qu'il reste encore quelques types d'alliages qui n'ont pas été convertis de la méthode plus ancienne de coulée des lingots en *coulée continue*.

La machine de *coulée continue* est principalement un échangeur thermique permettant de solidifier le métal liquide et de le mettre en forme de manière à ce qu'il puisse être facilement transformable pour les applications escomptées. La solidification dans la machine de coulée est une étape fondamentale de l'élaboration du métal. Elle s'accompagne de phénomènes de variation de volume (retrait à la solidification), de redistribution des éléments chimiques entre les différentes phases qui apparaissent à partir du liquide (la ségrégation) et d'un important dégagement de chaleur latente. Obtenir des produits de qualité nécessite la maîtrise des transferts de chaleur dans la lingotière et le refroidissement secondaire. Cette qualité des produits bruts de coulée revêt deux aspects : la qualité de surface et la qualité interne. Une surface de qualité signifie absence de fissures de surface et limitation des inclusions non-métalliques piégées sous la surface du produit. Les principaux défauts internes que présente les produits de *coulée continue* sont principalement les ségrégations majeures et les fissures internes. L'amélioration sans cesse de la productivité et de la qualité des produits bruts de coulée nécessite d'adopter de nouveaux réglages des machines sophistiqués et de mettre en place de nouveaux moyens d'actions en ligne (refroidissement intense du produit, mode de lubrification en lingotière, brassage électromagnétique, ...). Les réflexions qui sous-tendent ces choix sont basées sur des résultats de calculs obtenus à partir de modèles simples de thermique et de

thermomécanique. Une modélisation globale de la *coulée continue* devient désormais nécessaire.

Le travail a été enchaîné de la manière suivante :

- Une introduction générale montrant l'intérêt de l'étude numérique du processus de la coulée continue ;
- Le premier chapitre donne une bibliographie générale sur les travaux actuels dans le domaine de changement de phase et les différents modèles utilisés pour simuler le champ dynamique et le champ thermique ;
- Le deuxième chapitre présente les différents types des machines de coulée continue avec une vue générale sur les différentes étapes du processus ;
- Le troisième chapitre présente les différentes méthodes utilisées pour la modélisation thermique du phénomène de changement de phase ;
- Le quatrième chapitre offre un aperçu général sur la méthode des volumes finis et de l'algorithme *SIMPLE* ;
- Le cinquième chapitre présente l'étude expérimentale du moulage des lingots cylindriques en zinc pur effectuée au sein du laboratoire de métallurgie, département de mécanique, faculté des sciences de l'ingénieur de Tlemcen. L'évolution expérimentale de la température des lingots en fonction du temps a été confronté avec celle obtenue numériquement ;
- Le sixième chapitre présente l'étude numérique de la coulée continue des billettes cylindrique en alliage d'aluminium type A6063. Les résultats numérique obtenus son comparés avec ceux disponibles en littérature. L'effet de la vitesse de coulée sur le champ dynamique, le champ thermique et le flux de chaleur surfacique a été étudié.
- A la fin du travail, une conclusion générale rayonne le prescrit d'une analyse critique des résultats obtenus et quelques développements futurs envisagés.

RÉSUMÉ

Les procédés industriels tels que le moulage et la *coulée continue* en fonderie font apparaître des écoulements avec des fronts de changement de phase liquide-solide. Leur simulation numérique nécessite la mise en oeuvre de techniques de suivi d'interfaces. Nous avons à cet effet développé un module basé sur la méthode des *volumes finis*, qui permet de traiter ce type d'interfaces. Le suivi des fronts de changement de phases est assuré à l'aide de deux méthodes (*enthalpique* et de la *capacité effective moyenne*), avec prise en compte d'une zone pâteuse (changement de phase anisotherme). Avec ces deux méthodes, il n'est donc pas nécessaire de recourir à une adaptation du maillage. L'effet du changement de phase sur le régime convectif est tenu en compte en employant deux méthodes : la première attribue une valeur très importante à la viscosité dans la phase solide et la deuxième simule la région pâteuse comme un milieu poreux.

Pour valider le modèle numérique, une étude expérimentale de la coulée simple (moulage) des lingots cylindriques en zinc pur a été menée au sein du laboratoire de métallurgie, département de mécanique, faculté des sciences de l'ingénieur de Tlemcen. Cette étude consiste à relever l'évolution de la température des lingots en fonction du temps et de la confronter avec celle obtenue numériquement. Un bon accord a été obtenu.

Le modèle est appliqué ensuite à l'étude numérique bidimensionnelle d'un procédé de *coulée continue* d'un alliage d'aluminium type A6063 pour déterminer l'évolution des lignes de courant, la distribution de la température et du flux de chaleur dans les différentes phases. L'effet de la vitesse de coulée sur l'évolution de l'écoulement du fluide, sur la température et le flux de chaleur surfacique a été étudié. La distribution de la température et le flux de chaleur surfacique ont été comparés avec les mesures expérimentales et les résultats numériques disponibles en littérature. Un bon accord a été obtenu.

ABSTRACT

The industrial processes such as the molding and continuous casting in foundry reveal flows with fronts of phase change liquid-solid. Their numerical simulation requires the implementation of tracking techniques of interfaces. We have for this purpose developed a module based on the finites volumes method, which makes it possible to treat this type of interfaces. The tracking of the fronts of phase change is ensured with two methods (enthalpy and average effective capacity), with taking into account of a mushy zone. With these two methods, it is thus not necessary to resort to an adaptation of the grid. The effect of the phase change on the convective mode is held in account by employing two methods: the first allots a very important value to viscosity in the solid phase and the second simulates the mushy zone like a porous environment.

To validate the numerical model, an experimental study of the simple casting (molding) of the cylindrical pure zinc ingots was undertaken within the laboratory of metallurgy, department of mechanics, faculty of science of engineer Tlemcen. This study consists in raising the change of the temperature of the ingots according to time and to confront it with that obtained numerically. A good agreement was obtained

The model is applied then to the two-dimensional numerical study of a continuous casting process of a standard aluminum alloy A6063 to determine the evolution of the stream function, the distribution of the temperature and heat flow in the different phases. The effect of the casting speed on the evolution of the fluid flow, on the temperature and the surface heat flow was studied. The distribution of the temperature and the surface heat flow were compared with experimental measurements and the numerical results available in literature. A good agreement was obtained.

ملخص

عملية القوالب و القوالب المستمرة في مصانع السباكة تظهر سيلان المادة المصهورة مع جبهات تغيير المرحلة من صلب الى سائل. التمثيل الرقمي يقتضي استعمال تقنيات لتتبع جبهات التغيير. و لهذا الغرض وضعنا نظام يعتمد على طريقة الحجوم المتناهية يجعل من الممكن التعامل مع هذا النوع من الجبهات. تعقب جبهات تغيير المرحلة يعتمد على طريقتين (الانتالية و السعة الفعالة المتوسطة) مع مراعاة وجود المرحلة اللزجة. بهذه الطريقتين ليس من الضروري اللجوء إلى لتعديل الشبكة. تأثير تغيير المرحلة على نظام الانتقال الحراري بالحمل يأخذ بعين الاعتبار باستخدام طريقتين : الأولى تعتمد على تخصيص قيمة هامة جدا للزوجة في المرحلة الصلبة والثانية تمثل المرحلة اللزجة مثل البيئة المليء بالثغرات.

لإثبات صحة النموذج العددي، دراسة تجريبية لقوالب سبائك اسطوانية من الزنك النقي تم القيام بها داخل مختبر علم المعادن، قسم الميكانيك، كلية العلوم الهندسية تلمسان. تعتمد هذه الدراسة على رفع تغير درجة حرارة السبائك مع الزمن ومواجهتها مع التي تم الحصول عليها رقميا. اتفاق جيد تم الحصول عليه.

ثم تم تطبيق هذا النموذج لدراسة رقمية ثنائية الأبعاد لعملية القوالب المستمرة لسبائك الالومنيوم صنف A6063 ولتحديد تغير خطوط التيار و توزيع درجات الحرارة والدفق الحراري في المراحل المختلفة. تمت أيضا دراسة اثر سرعة القوالب على تطور تدفق السائل، درجة الحرارة و الدفق الحراري على السطح. توزيع درجات الحرارة و الدفق الحراري على السطح تمت مقارنتها مع القياسات التجريبية والنتائج الرقمية المتاحة في الادب. اتفاق جيد تم الحصول عليه.

NOMENCLATURE

A_b	section de la billette	m^2
Bi	nombre de Biot	
C_0	coefficient de Darcy	
C	chaleur spécifique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
C_{eff}	chaleur effective	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
C_{eq}	chaleur effective moyenne	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
D_1	paramètre dépend de la morphologie du milieu poreux	
f_l	fraction liquide	
f_s	fraction solide	
g	force de la gravité	$m^2.s^{-1}$
H	enthalpie	$J.kg^{-1}$
h	coefficient de convection	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h_1	coefficient de convection dans la région primaire	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h'_1	coefficient de convection sur la surface libre	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h_2	coefficient de convection dans la région secondaire	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h_c	coefficient de convection sans ébullition nucléée	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h_b	coefficient de convection avec ébullition nucléée	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h_m	coefficient de convection entre répartiteur et moule	$W.m^{-2}.K^{-1}$
K	perméabilité	
K_0	Coefficient de perméabilité	
k	Energie cinétique turbulente	$m^2.s^{-2}$
L	hauteur des billettes	m
L_1	hauteur du moule	m
L_m	hauteur entre le répartiteur et le moule	m
L_s	chaleur latente de fusion	$J.kg^{-1}$
m_s	fraction massique du solide	
P	pression	Pa
P_b	périmètre de la billette	m

Pe	nombre de Peclet	
Pr	nombre de Prandtl $\mu C_p / \lambda$	
R	rayon des billettes	m
S_ϕ	Terme source spécifiques à ϕ	
Ste	nombre de Stefan	
T	température	K
T_f	température de fusion	K
T_{f1}	température de l'eau de refroidissement primaire	K
T_{f2}	température de l'eau de refroidissement secondaire	K
T_0	température de coulée	K
T_∞	température de l'agent refroidissant	K
T	temps	s
$2\Delta T$	intervalle de changement de phase	K
u	composante axiale de la vitesse	m/s
\mathbf{U}	vecteur vitesse	m/s
U_s	vitesse de retrait des billettes	m/s
\mathbf{U}_s	vecteur vitesse de retrait des billettes	m/s
v	composante radiale de la vitesse	m/s
x, y, z	coordonnées cartésiennes	m
z, r	coordonnées cylindriques	m

Symboles grecs

ρ	densité	kg.m^{-3}
λ	conductivité thermique	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
μ	viscosité dynamique	$\text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
α	diffusivité thermique	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
ω	coefficient de sous relaxation	
β	coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
ϕ	variable générale	
ϕ_t	flux thermique	W
ε	taux de dissipation turbulente	$\text{m}^2.\text{s}^{-3}$
Γ_ϕ	coefficient de diffusion de la variable ϕ	
γ	porosité	

δ	fonction de Dirac	
Δt	pas de temps	s
ΔT_x	différence entre la température à la surface des billettes et la température de l'eau de refroidissement	K
ΔT_s	différence entre la température à la surface des billettes et la température de saturation de l'eau de refroidissement	K
$\Delta z, \Delta r$	pas en coordonnées cylindriques	m

Indices

<i>anc</i>	pas de temps précédant
<i>i,j</i>	indice définissant le numéro de noeud
<i>jet</i>	jet alimentant le moule à partir de busettes
<i>ℓ</i>	liquide ou liquidus
<i>n</i>	nombre d'itération
<i>nb</i>	nœuds voisins
<i>ref</i>	référence
<i>s</i>	solide ou solidus
<i>t</i>	turbulent
W, E, N, S	nœuds ouest, est, nord et sud
1	moule
2	métal coulé

SOMMAIRE

Introduction.....	1
-------------------	---

Chapitre 1 : Etude bibliographique

1.1. Importance du transfert convectif	6
1.2. Contraction des métaux durant la solidification	9
1.3. Solution analytique des problèmes thermiques avec changement de phase	11
1.4. Refroidissement Secondaire	16
1.5. Schéma avec maillage mobile.....	18
1.6. Les paramètres qui influent sur la température des billettes coulées.....	21
1.7. Influence de l'écoulement turbulent et de la variation de la température de coulée	24

Chapitre 2 : Généralités sur les installations de coulée continue

2.1. Introduction.....	37
2.2. Avantages de la coulée continue.....	39
2.2.1. Economie d'énergie et amélioration du rendement.....	39
2.2.2. Amélioration de la productivité	40
2.2.3. Amélioration de la qualité du produit	40
2.2.4. Réduction de la pollution	40
2.2.5. Réduction du coût de revient	40
2.2.6. Une plus grande consommation des ferrailles achetées.....	41
2.3. Installation de la coulée continue.....	41
2.3.1. Principe de la coulée continue	42
2.3.2. Vue D'ensemble de la coulée continue.....	44
a. Poche de coulée	44
b. Répartiteur	44

c. Lingotière (moule).....	45
d. Refroidissement secondaire	46
e. Extraction	48
f. Cintrage et redressage	49
g. Cisaillement.....	49
2.4. Différents types de machines de coulée continue	50
2.4.1. Machines traditionnelles	51
a. Machine verticale	51
b. Machines courbe	52
2.4.2. Machines non traditionnelles	53
a. Machines horizontales	53
b. Machine de coulée entre bandes (machine Hazelett)	53
c. Machine de coulée entre cylindres	54
d. Machine de coulée sur roue.....	54

Chapitre 3 : Modélisation mathématique du phénomène de changement de phase
--

3.1. Schémas avec maillage mobile	57
3.2. Schémas avec maillage fixe	58
3.2.1. Méthode de la capacité effective.....	59
3.2.2. Algorithme de Hsiao	63
3.2.3. Méthode enthalpique.....	66

Chapitre 4 : Discrétisation numérique par la méthode des volumes finis
--

4.1. Introduction.....	70
4.2. Equations gouvernantes	70
a. Coefficient de diffusion.....	71
b. Terme source.....	72
4.3. Méthode des volumes finis	72
4.3.1. Maillage	72
4.3.2. Discrétisation générale de l'équation de transport.....	74

4.3.3. Particularité de la discrétisation des équations	
de la quantité de mouvement	79
a. Algorithme de correction Vitesse-Pression.....	80
Principe de l'algorithme SIMPLE.....	80
4.4. La sous-relaxation.....	82
4.5. Résolution des équations algébriques	83

Chapitre 5 : Validation expérimentale du modèle numérique

5.1. Position du problème	86
5.1.1 Modèle physique	86
5.1.2. Modèle d'écoulement.....	87
5.1.3. Modèles de transfert thermique.....	89
a. Méthode de la capacité effective moyenne	89
b. Méthode enthalpique	90
5.1.4. Conditions aux limites	91
5.2. Procédure numérique	93
5.2.1. Conditions aux limites	95
5.3. Résultats et interprétations.....	97

Chapitre 6 : Résultats et interprétations

6.1. Position du problème	107
6.1.1. Modèle physique	107
6.1.2. Modèle d'écoulement.....	108
6.1.3. Modèles de transfert thermique.....	109
a. Méthode de la capacité effective moyenne	109
b. Méthode enthalpique	110
6.1.2. Conditions aux limites	110
6.2. Procédure numérique	112
6.2.1. Conditions aux limites	113
6.3. Résultats et interprétations.....	115

Conclusion générale.....	132
Références bibliographiques.....	136

LISTE DES FIGURES

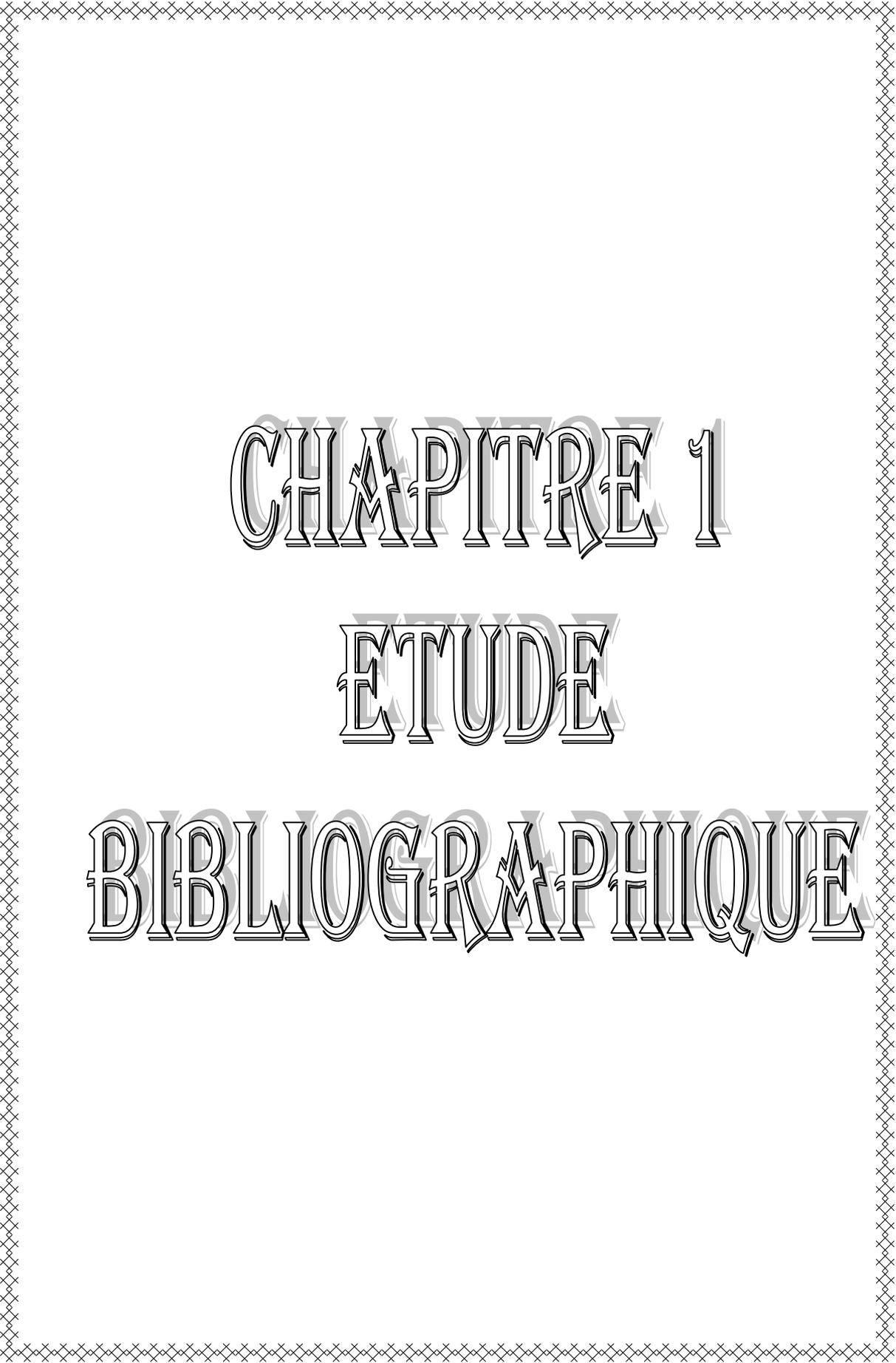
Fig. 1.1. Cavité thermique	7
Fig. 1.2. Contact métal coulé-moule durant la solidification.....	10
Fig. 1.3. Schéma unidimensionnel du modèle trois zones pour le processus de la coulée continue.....	12
Fig. 1.4. Installation de coulée continue avec refroidissement direct.....	18
Fig. 1.5. Transformation de l'espace physique (a) en espace de calcul (b).....	21
Fig. 1.6. Processus de base de la coulée continue.....	22
Fig. 1.7. Ecoulement du métal fondu à l'intérieur du moule	25
Fig. 1.8. Géométrie et domaine du calcul	28
Fig. 1.9. (a) Géométrie et domaine de calcul et (b) Conditions aux limites utilisées.....	30
Fig. 1.10. Géométrie et domaine de calcul	32
Fig. 2.1. Processus de fabrication des métaux	38
Fig. 2.2. Évolution de la production mondiale en acier et le pourcentage de la coulée continue dans l'industrie.....	39
Figure 2.3. Schéma général d'une installation de coulée continue à une seule ligne.....	42
Fig. 2.4. Installation de coulée continue	43
Fig. 2.5. Poche de coulée	44
Fig. 2.6. Lingotière	45
Fig. 2.7. Refroidissement secondaire par pulvérisation.....	46
Fig. 2.8.a - Refroidissement secondaire par pulvérisation.....	47
Fig. 2.8.b. Refroidissement secondaire par ruissellement	48
Fig. 2.9. Section de cintrage à multi lignes de coulée	49
Fig. 2.10. Unités de redressement à multi lignes de coulée.....	49
Fig. 2.11. Machine de coulée continue verticale	51
Fig. 2.12. Machine de coulée continue courbe	52
Fig. 2.13. Machine de coulée continue horizontale	53
Fig. 2.14. Machine de coulée continue entre bandes	53
Fig. 2.15. Machine de coulée continue entre cylindres	54

Fig. 2.16. Machine de coulée continue sur roue	55
Fig. 3.1. Capacité calorifique incluant l'effet de la chaleur latente dans un petit	61
Fig. 3.2. Portion typique d'un maillage orthogonal montrant la position du front de solidification.....	63
Fig. 3.3. Courbe de la solidification d'un métal pur	66
Fig. 3.4. Courbe de solidification d'un alliage binaire	67
Fig. 4.1. Maillage et volume de contrôle	73
Fig. 4.2. Maillages décalés (a) UCV et (b) VCV.....	74
Fig. 4.3. Evolution de la fonction $A(P)$ pour les différents schémas.....	77
Fig. 5.1. Coulée simple des lingots de zinc	86
Fig. 5.2. Géométrie du problème étudié	87
Fig. 5.3. Maillage du domaine de calcul.....	95
Fig. 5.4. Evolution de la température surfacique et axiale des lingots de zinc en fonction du temps.....	99
Fig. 5.5. Evolution des lignes de courant en fonction du temps calculées par la méthode <i>enthalpique</i>	100
Fig. 5.6. Evolution des lignes de courant en fonction du temps calculées par la méthode de la <i>capacité effective moyenne</i>	101
Fig. 5.7 Evolution des isothermes en fonction du temps calculées par la méthode <i>enthalpique</i>	103
Fig. 5.8 Evolution des isothermes en fonction du temps calculées par la méthode de la <i>capacité effective moyenne</i>	104
Fig. 5.9. Evolution de la position et de la forme du front de solidification en fonction du temps.....	105
Fig. 6.1 Géométrie du problème étudié	107
Fig. 6.2. Coefficient de convection à la surface des billettes.....	112
Fig. 6.3. Maillage du domaine de calcul.....	113
Fig. 6.4. Vitesse de convergence pour le deux méthodes enthalpique et de la capacité moyenne à différentes vitesses de coulée.....	116
Fig. 6.5. Comparaison entre les résultats calculés et les résultats de la référence [15]	119

Fig. 6.6. Lignes de courant calculées par la méthode enthalpique pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$	121
Fig. 6.7. Lignes de courant calculées par la méthode de la capacité effective moyenne pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$	122
Fig. 6.8. Effet de la vitesse de coulée sur la position et la forme du front de solidification (a) méthode enthalpique (b) méthode de la capacité effective moyenne	124
Fig. 6.9. Position du front de solidification et les isothermes calculées par la méthode enthalpique pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$	125
Fig. 6.10. Position du front de solidification et les isothermes calculées par la méthode de la capacité effective moyenne pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$	126
Fig. 6.11. Effet de la vitesse de coulée sur l'évolution de la température (a) à l'axe des billettes et (b) à la surface des billettes	128
Fig. 6.12. Effet de la vitesse de coulée sur le flux de chaleur surfacique	129
Fig. 5.13. Effet de la température de coulée sur la position du front de solidification.....	130

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1. Equations de transports	26
Tableau 1.2. constantes du modèle de turbulence	27
Tableau 2.1. produits semi-finis issus de la coulée continue.....	50
Tableau 4.1. Différentes désignations de ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ	71
Tableau 4.2. Expression de la fonction $A(Pe)$ pour les différents schémas	76
Tableau 5.1. Constantes empiriques	92
Tableau 5.2. Les variables physiques du zinc.....	97
Tableau 6.1. Géométrie et paramètres de fonctionnement de l'installation de coulée	116
Tableau 6.2. Les variables physiques de l'alliage type A6063.....	117



CHAPITRE 1

ETUDE

BIBLIOGRAPHIQUE

Ces dernières années, le processus de la coulée continue des métaux a connu un grand développement dans la production industrielle dû principalement à ces avantages économiques (augmentation de la production et élimination de certaines étapes intermédiaires). La qualité des pièces coulées dépend d'un certain nombre de paramètres qui contrôlent le taux de croissance de l'enveloppe solidifiée (et donc la microstructure des pièces) et la formation des différents défauts comme la macro ségrégation, l'irrégularité des surfaces et les fissures longitudinales et transversales. Le plus dangereux des problèmes qui peuvent surgir est la *condition d'évasion* où nous pouvons assister à la rupture de l'enveloppe solidifiée et le métal liquide s'écoule de manière incontrôlable.

Le transfert de chaleur lors de la solidification des métaux durant le processus de la coulée continue influe directement sur la qualité et la productivité des produits. De ce fait, La prédiction théorique du champ dynamique, du champ thermique et de la forme et la position du front de solidification dans les pièces coulées et d'une grande importance. Les mécanismes du transfert de chaleur et de l'écoulement de fluide traitant le phénomène du changement de phase sont suffisamment complexes en raison de la non linéarité des équations gouvernantes. Cette non linéarité provient du dégagement de la *chaleur latente* et donc de la discontinuité du gradient thermique (flux de chaleur) à l'interface solide-liquide. Cependant, Plusieurs méthodes analytiques ont été développées pour résoudre les problèmes de changement de phase [1-5]. Ces méthodes offrent des solutions approximatives et engendrent une formulation mathématique très complexe pour les problèmes multidimensionnels avec des hypothèses simplificatrices assez considérables.

Parmi ces méthodes analytiques, nous citons la méthode de l'intégrale thermique [6] qui exige les hypothèses simplificatrices suivantes lors de son application aux problèmes de la coulée continue :

1. La conduction thermique n'est considérée que dans la direction radiale malgré le mouvement axial du métal solidifié ;
2. La chaleur évacuée à travers le moule est exprimée à l'aide d'un coefficient de convection constant ;

3. Le gradient de la température a lieu uniquement dans la phase solide (la température du métal liquide est supposée constante et égale à la température de fusion).

Pour des solutions plus précises, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable. Pour cela, plusieurs schémas numériques ont été développés pour la résolution des problèmes de changement de phase. Nous regroupons ces schémas numériques en deux catégories :

- ❖ Les schémas numériques avec *maillage mobile* (front tracking methods) ;
- ❖ Les schémas numériques avec *maillage fixe*.

Dans les schémas avec *maillage mobile*, le maillage est régénéré à chaque itération de façon à coïncider avec l'interface solide-liquide. La condition de Stefan est utilisée pour déterminer le mouvement de l'interface. Ces schémas numériques ont l'avantage de pouvoir représenter la discontinuité du flux à l'interface et de fournir ainsi des solutions plus stables (sans oscillations) avec une plus grande précision. Cependant, ces schémas sont plus complexes à mettre en œuvre en comparaison avec ceux de *maillage fixe*. De plus, ils s'adaptent mal aux problèmes dans lesquels nous assistons à la formation de plusieurs fronts de solidification et aux problèmes où le changement de phase se produit dans un intervalle de température (alliages). Ces schémas s'appliquent donc difficilement aux problèmes très complexes.

Dans les schémas avec *maillage fixe*, le maillage demeure fixe et l'interface solide-liquide se déplace à travers le maillage (la position de l'interface ne coïncide pas nécessairement avec le maillage). Ces schémas numériques éliminent la condition de Stefan au front et appliquent les équations d'énergie simultanément dans les deux phases solide et liquide. Ces schémas présentent les inconvénients suivants :

1. La présence d'oscillations dans la solution ;
2. Ils nécessitent l'utilisation des algorithmes de correction ou un raffinement du maillage pour ne pas rater le dégagement de la chaleur latente ;
3. Ils sont moins précis que les schémas avec *maillage mobile*, particulièrement au voisinage de l'interface.

Par contre, les schémas avec *maillage fixe* sont simples et faciles à appliquer pour les problèmes industriels de grande complexité. Parmi les méthodes avec *maillage fixe* nous citons : la méthode *enthalpique* qui introduit l'effet de la chaleur latente sur l'enthalpie du système et la méthode de la *capacité effective* qui introduit l'effet de la chaleur latente sur la capacité calorifique du système.

Jusqu'aux années quatre-vingts, le seul mode de transfert de chaleur considéré lors du changement de phase été la conduction thermique [7-9]. Certainement, une telle supposition n'est pas toujours valide. Lorsque le métal liquide s'écoule sous un gradient de pression imposé ou une distribution non uniforme de température, un transfert de chaleur convectif non négligeable peut avoir lieu. Ainsi, l'influence du transfert convectif lors du changement de phase doit être prise en considération.

1.1. Importance du transfert convectif

Voller [10] a montré l'influence du transfert convectif au sein de la phase liquide sur la croissance de la solidification et la forme de l'interface solide-liquide. Cette étude porte sur la solidification d'une substance de référence au sein d'une cavité thermique. Initialement, la température du liquide est supposée uniforme et supérieure à la température de solidification T_f . Au temps $t = 0$, la température de la paroi gauche est fixée à une température $T_{froid} < T_f$ et celle de droite à une température $T_{chaud} > T_f$. Les deux parois horizontales sont supposées adiabatiques. Nous distinguons alors la formation de trois régions : une région solide, une région liquide et une région pâteuse où coexistent les deux phases.

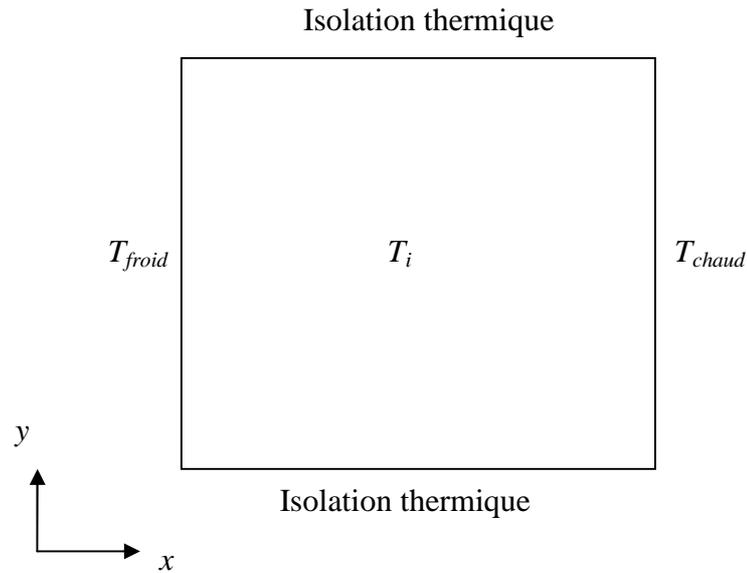


Fig. 1.1. Cavité thermique

Les équations de conservation sont formulées de façon à tenir compte du phénomène de changement de phase. Alors, en supposant que la phase liquide est un fluide newtonien, incompressible en écoulement laminaire, les équations gouvernantes sont :

- *Conservation de la masse :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1.a)$$

- *Conservation de la quantité de mouvement :*

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}u) = \text{div}(\mu \text{ grad}u) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (1.1.b)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}v) = \text{div}(\mu \text{ grad}v) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_v + S_b \quad (1.1.c)$$

- *Conservation de l'énergie :*

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}H) - \text{div}(\lambda \text{grad}T) = 0 \quad (1.1.d)$$

Pour tenir compte du phénomène de changement de phase dans le champ dynamique, *Voller* considère la cavité thermique comme un *milieu poreux* avec une porosité γ qui prend la valeur 1 dans la région liquide, la valeur 0 (zéro) dans la région solide et $0 < \gamma < 1$ dans la région pâteuse. Le vecteur vitesse est défini par :

$$\mathbf{U} = \gamma \mathbf{U}_\ell \quad (1.2)$$

Nous admettons que $\gamma = f_\ell$ la fraction liquide. Les termes sources S_u et S_v permet de modifier les équations de la quantité de mouvement dans la région pâteuse et la région solide. Ils sont exprimés selon la *loi de Darcy* comme suit :

$$\begin{cases} S_u = -Au \\ S_v = -Av \end{cases} \quad (1.3)$$

Où A prend la valeur 0 (zéro) dans la région liquide afin d'annuler le terme source. Dans la région pâteuse, la valeur de A augmente et le terme source commence à dominer les termes transitoire, convectif et diffusif. Dans la région solide, la valeur de A devient très importante et le terme source domine tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement. Ceci permet d'imposer une valeur nulle au vecteur vitesse \mathbf{U} . L'équation suggérée pour A est donnée selon Carman-Koseny [10-12] comme suit :

$$A = -C_0 \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^3 + \chi} \quad (1.4)$$

C_0 est le coefficient de Darcy et dépend de la morphologie du milieu poreux. La constante χ est introduite pour éviter la division par 0 (zéro).

Le terme source S_b est le terme d'*Archimède* (buoyancy) qui permet d'introduire le phénomène de la convection naturelle dans la cavité. D'après l'hypothèse de

Boussinesq (i. e. la densité est constante dans tous les termes sauf dans le terme source d'**Archimède**), le terme source d'**Archimède** est donné par :

$$S_b = \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (1.5)$$

β désigne le coefficient d'expansion thermique et T_{ref} une température de référence.

Un schéma avec **maillage fixe** basé sur la méthode **enthalpique** est utilisé pour résoudre l'équation d'énergie. Il consiste à exprimer l'enthalpie du système comme une somme d'enthalpie sensible h et de chaleur latente L_s . Cette méthode sera développée dans le chapitre 2.

1.2. Contraction des métaux durant la solidification

La plupart des métaux se contractent durant la solidification et créent donc un espace d'air entre le métal coulé et le moule. La résistance thermique ainsi développée réduit le transfert de chaleur et le taux de solidification. Plusieurs travaux reconnaissent l'existence de cette résistance et la supposent constante durant le processus de solidification. En utilisant la méthode des gradients conjugués, **Huang** [13] a montré que cette résistance thermique varie considérablement en fonction du temps. Son estimation est basée sur des mesures expérimentales de la température à l'intérieur du métal coulé et à la surface extérieure du moule. Le système physique étudié est présenté sur la Fig. 1.2.

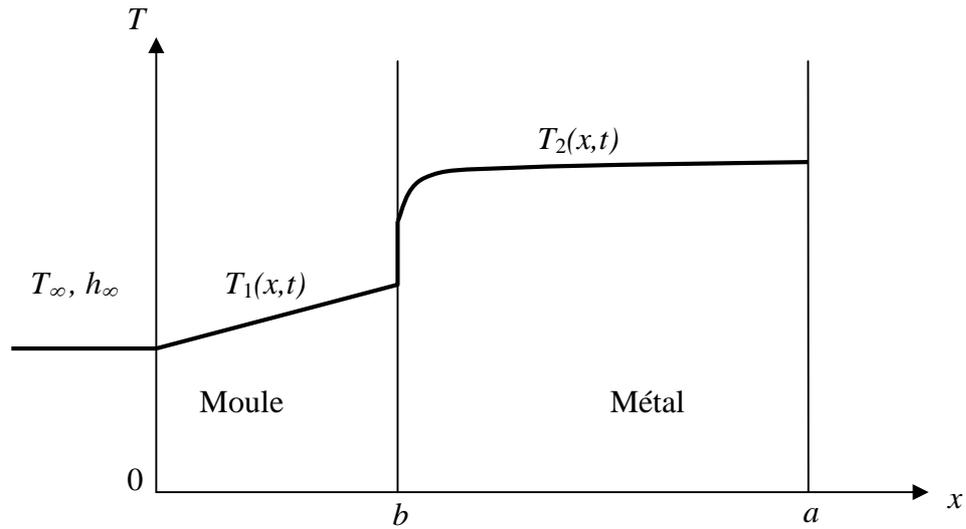


Fig. 1.2. Contact métal coulé-moule durant la solidification

Initialement, Le métal liquide est à la température de fusion. Pour le temps $t > 0$, la surface extérieure du moule est exposée à un refroidissement par convection. La solidification du métal commence et l'interface solide-liquide se déplace alors dans la direction positive des x . Le transfert de chaleur durant la solidification est supposé unidimensionnelle et formulé comme suit:

Région moule :

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} \quad \text{pour } 0 < x < b, t > 0 \quad (1.6.a)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = h_\infty (T_\infty - T_1) \quad \text{pour } x = 0, t > 0 \quad (1.6.b)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(b,t)}{\partial x} = R_c(t) (T_2 - T_1) \quad \text{pour } x = b, t > 0 \quad (1.6.c)$$

$$T_1(x,0) = T_\infty \quad \text{pour } 0 \leq x \leq b, t = 0 \quad (1.6.d)$$

Région métal fondu : pour traiter le problème de changement de phase, une formulation enthalpique est utilisée :

$$\lambda_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} = \rho_2 \frac{\partial H_2(x,t)}{\partial t} \quad \text{pour } b < x < a, t > 0 \quad (1.7a)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(b,t)}{\partial x} = R_c(t)(T_1 - T_2) \quad \text{pour } x = b, t > 0 \quad (1.7b)$$

$$\frac{\partial T_2(a,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = a, t > 0 \quad (1.7c)$$

$$T_2(x,0) = T_f \quad \text{pour } b \leq x \leq a, t = 0 \quad (1.7d)$$

Où $dH_2 = c_2 dT_2$ est l'enthalpie du métal coulé. La solution du système d'équations (1.6) et (1.7) avec une conductance de contact $R_c(t)$ inconnue, peut être formulée comme un problème de contrôle optimal, i. e. choisir la fonction de contrôle $R_c(t)$ qui minimise la fonction suivante :

$$J(R_c(t)) = \int_{t=0}^t \left[(T_1 - Y_1)^2 + (T_2 - Y_2)^2 \right] dt \quad (1.8)$$

Où T_1 et Y_1 sont respectivement les températures estimées et mesurées à la surface extérieure du moule ($x = 0$). T_2 et Y_2 sont respectivement les températures estimées et mesurées dans la région métal fondu ($b < x < a$). Pour une valeur estimée de $R_c(t)$, les températures T_1 et T_2 sont calculées directement à partir des équations définies par (1.6) et (1.7)

1.3. Solution analytique des problèmes thermiques avec changement de phase

L'obtention de la solution analytique des problèmes thermiques avec changement de phase nécessite souvent des hypothèses simplificatrices ou des approximations mathématiques considérables. **Kang** [14] a présenté deux modèles

simples unidimensionnels à trois zones pour la résolution analytique des processus de la coulée continue des billettes planes ou cylindriques (Fig. 1.3). Le métal liquide coulé possède une température uniforme T_0 supérieure à la température de fusion T_f .

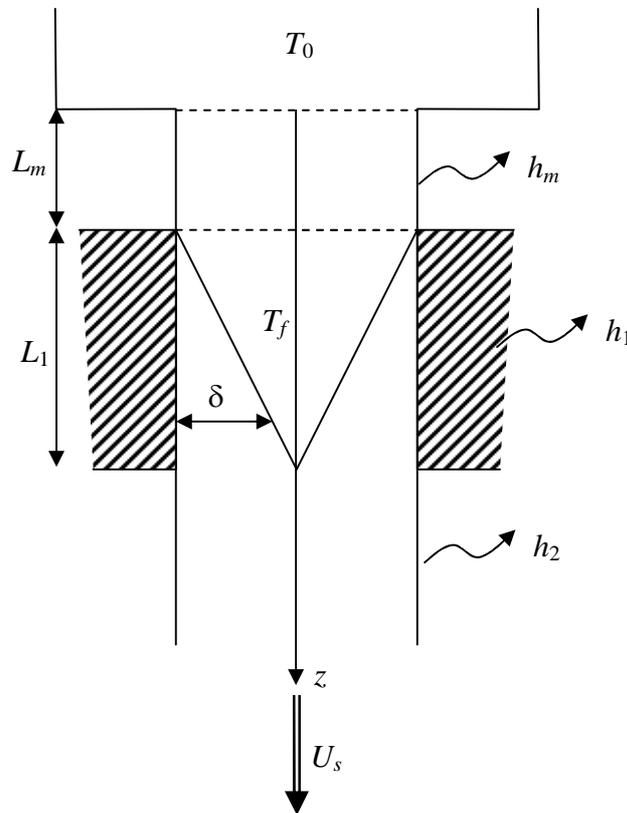


Fig. 1.3. Schéma unidimensionnel du modèle trois zones pour le processus de la coulée continue

Modèle N°1 :

Les hypothèses simplificatrices sont :

1. Le métal liquide est refroidi soudainement au dessous de T_f lorsqu'il pénètre dans le moule ;
2. La chaleur latente est dégagée dans la région du moule. La température du métal est donc maintenue à T_f dans cette région et le métal sort du moule complètement solidifié à la température T_f ;
3. Les propriétés thermophysiques du métal sont supposées constantes ;

4. Les coefficients de convection h_m , h_1 et h_2 respectivement, dans les régions liquide, moule et solide sont supposés constantes.

Dans ce premier modèle la diffusion axiale est considérée négligeable et les équations gouvernantes deviennent :

Région liquide :

$$\rho c U_s A_b \frac{dT}{dz} = -h_m P_b (T - T_\infty) \quad (1.9.a)$$

Région moule : l'équation de la fraction massique du solide est donnée par

$$\rho c U_s A_b L_s \frac{dm_s}{dz} = -h_1 P_b (T_f - T_\infty) \quad (1.9.b)$$

Région solide :

$$\rho c U_s A_b \frac{dT}{dz} = -h_2 P_b (T - T_\infty) \quad (1.9.c)$$

A_b désigne la section transversale, P_b le périmètre du métal coulé (billettes) et m_s la fraction massique du solide dans le moule.

Les conditions aux limites posées sont :

$$\begin{cases} T(0) = T_0, T(L_m) = T_f \text{ et } T(\infty) = T_\infty \\ m_s(L_m) = 0 \text{ et } m_s(L_m + L_1) = 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

En posant les références adimensionnelles suivantes :

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_f - T_\infty}, Z = \frac{z}{R}, \delta^* = \frac{\delta}{R},$$

$$L^* = \frac{L}{R}, Pe = \frac{U_s R}{\alpha_s}, Bi = \frac{hR}{\lambda_s} \text{ et } Ste = \frac{c(T_f - T_\infty)}{L_s} \quad (1.11)$$

Où r désigne le demi épaisseur ou le rayon des billettes. Pour la coulée continue des billettes cylindriques, le rapport $\frac{A_b}{P_b} = \frac{R}{2}$, et la solution analytique aura la forme suivante :

Région liquide

$$\theta = \theta_0 \exp\left[-\frac{2Bi_m}{Pe} Z\right] \quad (1.12.a)$$

Région moule

$$\theta = 1 \text{ et } \delta^*(Z) = m_s(Z) = \frac{2Bi_1 Ste}{Pe} (Z - L_m^*) \quad (1.12.b)$$

Région solide

$$\theta = \exp\left[-\frac{2Bi_2}{Pe} (Z - L_m^* - L_1^*)\right] \quad (1.12.c)$$

Modèle N°2 :

Le deuxième modèle est basé sur les mêmes hypothèses simplificatrices que le premier modèle. Seulement, le terme de diffusion axiale est maintenant pris en considération et les équations gouvernantes deviennent :

Région liquide :

$$\rho c U_s A_b \frac{dT}{dz} = \lambda A_b \frac{d^2 T}{dz^2} - h_m P_b (T - T_\infty) \quad (1.13.a)$$

Région moule : l'équation de la fraction massique du solide est donnée par

$$\rho c U_s A_b L_s \frac{dm_s}{dz} = -h_1 P_b (T_f - T_\infty) \quad (1.13.b)$$

Région solide :

$$\rho c U_s A_b \frac{dT}{dz} = \lambda A_b \frac{d^2 T}{dz^2} - h_2 P_b (T - T_\infty) \quad (1.13.c)$$

Pour des billettes cylindriques, la solution analytique a la forme suivante :

Région liquide

$$\theta = \frac{1}{e^{\beta_1 L_m^*} - e^{\beta_2 L_m^*}} \left[(1 - \theta_0 e^{\beta_2 L_m^*}) e^{\beta_1 Z} + (\theta_0 e^{\beta_1 L_m^*} - 1) e^{\beta_2 Z} \right] \quad (1.14.a)$$

Région moule

$$\theta = 1 \text{ et } \delta^*(Z) = m_s(Z) = \frac{2Bi_1 Ste}{Pe} (Z - L_m^*) \quad (1.14.b)$$

Région solide

$$\theta = \exp\left[\beta_3 (Z - L_m^* - L_1^*)\right] \quad (1.14.c)$$

avec

$$\beta_1 = \frac{Pe + \sqrt{Pe^2 + 8Bi_1}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 8Bi_1}}{2} \text{ et } \beta_3 = \frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 8Bi_3}}{2}$$

Le premier modèle est valide pour les faibles nombres de Biot où la diffusion axiale est supposée négligeable devant la convection induite par le mouvement du métal (cela est vrai pour des vitesses de coulée significatives). Pour des vitesses de coulée assez faible, la diffusion axiale ne peut pas être négligée et le deuxième modèle est plus recommandé.

1.4. Refroidissement Secondaire

Lors d'une étude expérimentale de la coulée continue des billettes en aluminium, **Weckman** [15] a remarqué que la température à la surface des billettes, dans certaines régions secondaires, dépasse le point d'ébullition de l'eau de refroidissement. Il déduit donc que le transfert thermique dans ces régions est par ébullition nucléée avec convection forcée. Pour le calcul du coefficient de convection h_2 , **Weckman** propose une méthode itérative basée sur les mesures expérimentales de la température. Pour cela, il utilise les théories existantes de l'ébullition nucléée avec convection forcée d'une goutte d'eau en chute libre.

Une analyse de régression linéaire du coefficient de convection h_c en fonction de la température moyenne $\bar{T} = \frac{T_{surf} + T_f}{2}$ donne l'équation dimensionnelle suivante [16].

$$h_c = \left[-1,67 \times 10^5 + 704\bar{T} \right] \left(\frac{Q}{\pi D} \right)^{1/3} \quad (1.15)$$

Où Q est le débit volumique de l'eau de refroidissement et D le diamètre de la billette. La chaleur évacuée de la surface des billettes par la chute turbulente d'une goutte d'eau est donnée alors par :

$$\left(\frac{\phi_t}{A_b} \right)_c = \left[-1,67 \times 10^5 + 704\bar{T} \right] \left(\frac{Q}{\pi D} \right)^{1/3} \Delta T_x \quad (1.16)$$

ΔT_x désigne la différence entre la température à la surface des billettes et la température de l'eau de refroidissement.

Une fois que le régime d'ébullition nucléée est atteint, la chaleur évacuée des billettes est contrôlée par ΔT_s au lieu de ΔT_x . ΔT_s représente la différence entre la température à la surface des billettes et la température de saturation de l'eau de refroidissement T_{sat} .

Le flux de chaleur donné par ébullition de l'eau stagnant $\left(\frac{\phi_t}{A}\right)_b$ est donné par la corrélation suivante [17-19].

$$\frac{c_{pe}\Delta T_s}{H_{fg}} = C_f \left[\frac{\left(\frac{\phi_t}{A_b}\right)_b}{\mu_e H_{fg}} \sqrt{\frac{g_0 \sigma}{g(\rho_e - \rho_v)}} \right]^{0,33} \left[\frac{c_{pe} \mu_e}{\lambda_e} \right]^{1,7} \quad (1.17)$$

où c_{pe} , λ_e et μ_e désignent respectivement la capacité, la conductivité et la viscosité de l'eau liquide. ρ_v désigne la densité de la vapeur d'eau et H_{fg} la chaleur latente d'évaporation d'eau. Le coefficient g_0 est un facteur de conversion (égal à l'unité dans le système SI). Le coefficient C_f est une constante dépendant de la nature des billettes. Dans l'Eq. (1.19), les propriétés thermophysiques de l'eau sont prises à la température de saturation (100 °C à la pression atmosphérique). Après réarrangement l'Eq. (1.19) prend la forme simplifiée suivante :

$$\left(\frac{\phi_t}{A_b}\right)_b = 20,8(\Delta T_s)^3 \quad (1.18)$$

Pour traiter les problèmes combinés de la convection forcée avec ébullition nucléée, **Rohsenow** recommande d'ajouter le flux de chaleur donné par convection forcée au flux de chaleur donné par l'ébullition de l'eau stagnante [20] :

$$\left(\frac{\phi_t}{A_b}\right)_{total} = \left(\frac{\phi_t}{A_b}\right)_c + \left(\frac{\phi_t}{A_b}\right)_b \quad (1.19)$$

Alors, le coefficient de transfert thermique dans la partie de surface où il y a présence de l'ébullition nucléée est donnée par :

$$h_2 = \left(-1,67 \times 10^5 + 704\bar{T}\right) \left(\frac{Q}{\pi D}\right)^{1/3} + \frac{20,8}{\Delta T_x} (\Delta T_s)^3 \quad (1.20)$$

1.5. Schéma avec maillage mobile

Das [21] a développé un formalisme numérique permettant de déterminer la position du front de solidification et la distribution de la température durant le processus de la coulée continue avec refroidissement direct (Fig. 1.4). Ce formalisme est basé sur un schéma avec *maillage mobile* et utilise la technique de *transformation non orthogonale*.

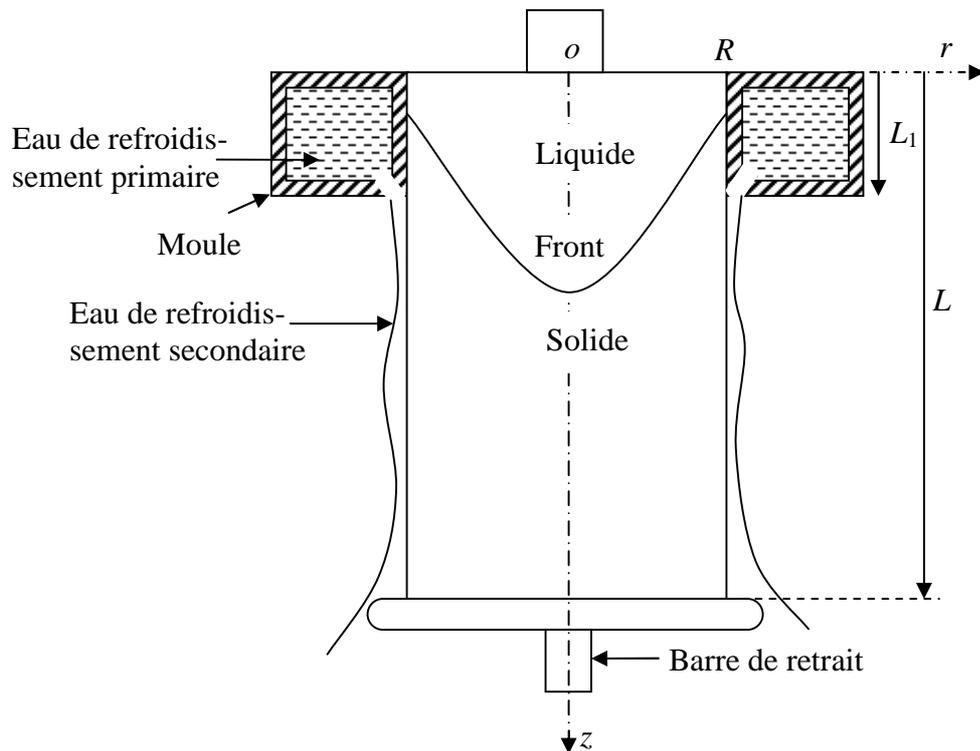


Fig. 1.4. Installation de coulée continue avec refroidissement direct

En posant les hypothèses simplificatrices suivantes

1. Le problème est supposé stationnaire ;
2. Vu la symétrie axiale, le système devient bidimensionnel ;
3. Il s'agit d'un métal pur ou d'un alliage dont l'intervalle de solidification est assez étroit ;
4. Les propriétés thermophysiques du solide et du liquide sont constantes et différentes.

En tenant compte de l'effet de la conduction axiale, les équations gouvernantes le transfert de chaleur deviennent :

Région solide

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial r} \right) = \rho_\ell c_\ell U_s \frac{\partial T_\ell}{\partial z} \quad (1.21.a)$$

Région liquide

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) = \rho_s c_s U_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \quad (1.21.b)$$

Interface solide-liquide

$$T_\ell = T_s = T_f \quad (1.21.c)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n} + \lambda_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n} = \rho_s L_s (\vec{V} \vec{n}) \quad (\text{Condition de Stefan}) \quad (1.21.d)$$

\vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à l'interface solide-liquide et \vec{V} la vitesse de l'interface ($\vec{V} = \vec{i} U_s$).

Les conditions aux limites imposées sont :

$$T = T_0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } 0 \leq r \leq R \quad (1.22.a)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} = h_1 (T - T_{f1}) \quad \text{pour } 0 \leq z \leq L_1 \text{ et } r = R \quad (1.22.b)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} = h_2 (T - T_{f2}) \quad \text{pour } L_1 \leq z \leq L \text{ et } r = R \quad (1.22.c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq L \text{ et } r = 0 \quad (1.22.d)$$

T_{f1} et T_{f2} désignent respectivement les températures de l'eau de refroidissement primaire et secondaire. h_1 et h_2 désignent respectivement les coefficients de convection entre la surface de la billette et l'eau de refroidissement primaire et secondaire.

Au fond des billettes ($z = L$ et $0 \leq r \leq R$), une première estimation de la température est exigée. Cette température est corrigée par un processus itératif de façon à assurer la continuité du gradient thermique à cette limite [22].

La forme irrégulière et la position inconnue du front de solidification rendent la résolution numérique des équations couplées (1.15) et (1.16) assez complexe. Pour surmonter cette difficulté, une transformation des coordonnées spatiales est utilisée afin de passer de l'espace physique, Fig. 1.5.a, à un espace de calcul, Fig. 1.5.b.

Les équations de passage sont :

$$\textit{Phase liquide} : 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}$$

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \eta = \frac{z}{2\delta(r)}$$

$$\textit{Phase solide} : 0 \leq \xi \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$$

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \eta = \frac{L-z}{2(L-\delta(r))}$$

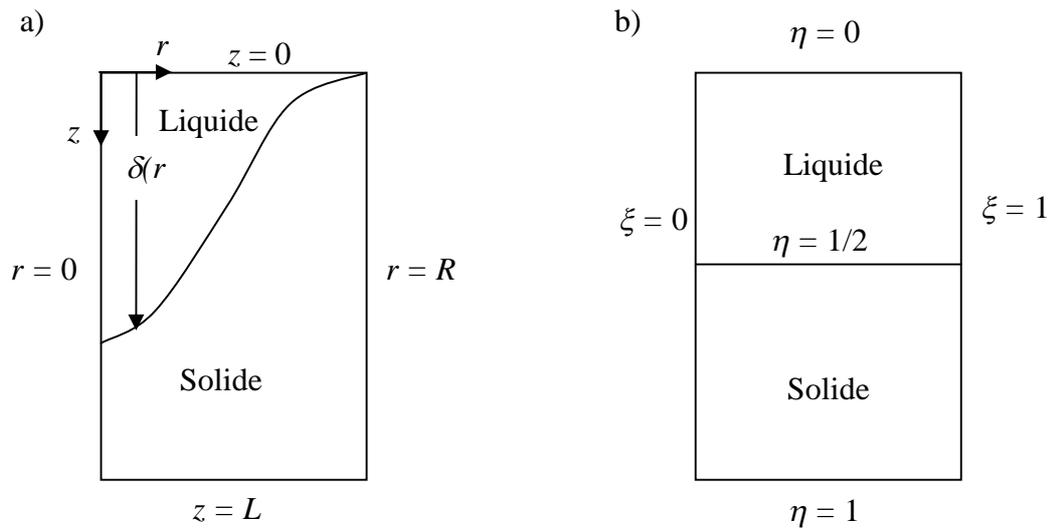


Fig. 1.5. Transformation de l'espace physique (a) en espace de calcul (b)

D'une part, l'utilisation de cette transformation permet de définir une interface solide-liquide de coordonnée $\eta = 1/2$ et qui demeure fixe durant la résolution itérative des équations gouvernantes. Et d'autre part, Ceci permet de donner une forme régulière au front de solidification et d'éviter ainsi la régénération du maillage à chaque itération.

1.6. Les paramètres qui influent sur la température des billettes coulées

Amin [23] a examiné l'influence de la vitesse de coulée, de la cinétique de refroidissement et de la température de coulée sur la distribution de la température et sur la position et la forme du front de solidification lors de la coulée continue des billettes (Fig. 1.6).

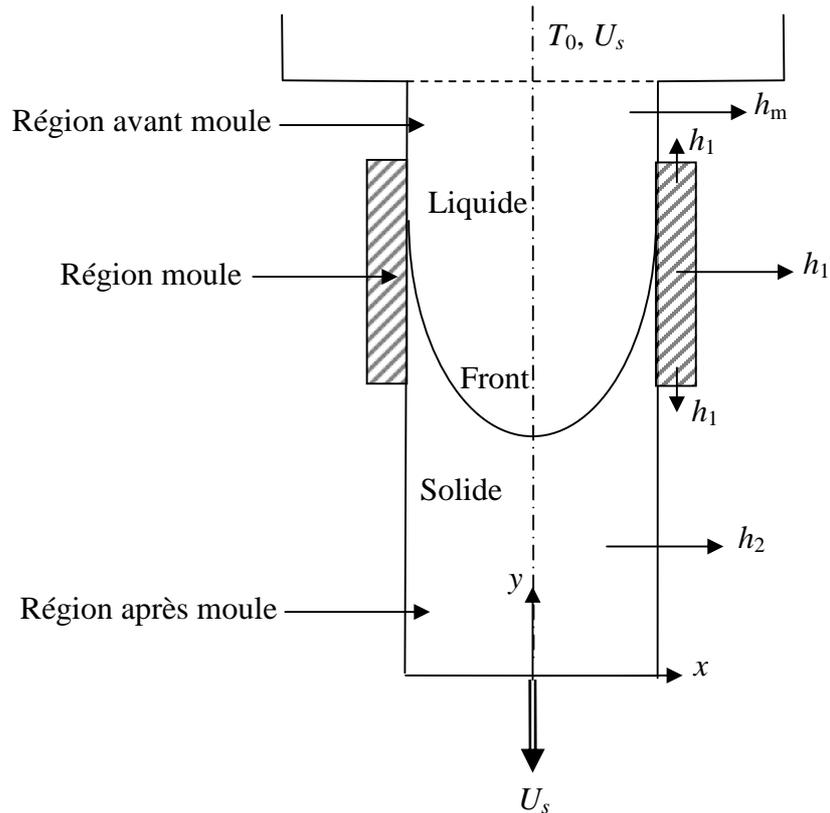


Fig. 1.6. Processus de base de la coulée continue

En posant les hypothèses simplificatrices suivantes,

1. Vu la symétrie axiale, le système devient bidimensionnel ;
2. Le fluide est Newtonien, incompressible en écoulement laminaire ;
3. La densité du métal est constante sauf dans la phase liquide où elle varie linéairement avec la température suivant l'hypothèse de Boussinesq ;
4. Les propriétés thermophysiques du solide et du liquide sont constantes et différentes.
5. L'effet de la chaleur latente est tenu en compte par une modification appropriée de la capacité calorifique (méthode de la *capacité effective*) ;
6. La dissipation visqueuse et le travail de compression sont négligeables.

Les équations gouvernantes deviennent :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.23.a)$$

Conservation de la quantité de mouvement dans les deux directions x et y

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (1.23.b)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho g \beta (T - T_\infty) \quad (1.23.c)$$

Conservation de l'énergie

$$\rho c \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (1.23.d)$$

Pour les nœuds subissant le changement de phase, la capacité calorifique est évaluée selon la méthode de la *capacité effective moyenne* pour une formulation en éléments finis comme suit [24-25] :

$$c(T_{i,j}) = \frac{1}{4} \left[c_1(T_{i,j}, T_{moy1}) + c_2(T_{i,j}, T_{moy2}) + c_3(T_{i,j}, T_{moy3}) + c_4(T_{i,j}, T_{moy4}) \right] \quad (1.24)$$

Où $T_{moy i}$ est la température moyenne du $i^{\text{ème}}$ élément voisin et $c(T_{i,j}, T_{moy i})$ est la capacité calorifique adaptée. La température moyenne dans l'Eq. (1.24) est définie comme suit :

$$T_{moy i} = \frac{1}{4} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \quad (1.25)$$

Avec T_1, T_2, T_3 et T_4 sont les températures nodales pour un élément rectangulaire à quatre nœuds. La conductivité thermique est définie par :

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_s & T < T_f - \Delta T \\ \lambda_s + \frac{\lambda_\ell + \lambda_s}{2\Delta T} [T - (T_f - \Delta T)] & T_f - \Delta T \leq T \leq T_f + \Delta T \\ \lambda_\ell & T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (1.26)$$

$2\Delta T$ désigne l'intervalle de solidification. Lorsque la température de fusion est atteinte, une valeur très importante est attribuée à la viscosité du fluide. Cette attribution élimine l'équation de la continuité et les équations de la quantité de mouvement lorsque la solidification est atteinte. L'unique équation qui gouverne le transfert thermique à ce stade est l'équation d'énergie. Les deux composantes de la vitesse (u et v) seront fixées alors, respectivement, à la vitesse de coulée et à zéro. L'algorithme NACHOS II développé par Gartling [26] en éléments finis et utilisé pour résoudre les équations différentielles couplées (1.23).

La présente étude a révélée que :

- le front de solidification se déplace en aval avec l'augmentation de la vitesse de coulée
- le front de solidification se déplace en amont avec l'augmentation de la cinétique de refroidissement
- la température de coulée influe uniquement sur la position du front de solidification (sa pente reste inchangée).

1.7. Influence de l'écoulement turbulent et de la variation de la température de coulée

L'alimentation du moule par le métal fondu à travers les busettes (*nozzle*) peut entraîner un écoulement circulaire turbulent dans la phase liquide (Fig. 1.7). Ce mouvement turbulent qui prend place à l'intérieur du moule influe directement sur la qualité du métal coulé. En outre, l'opération d'aller et retour nécessaire pour le remplissage de la poche entraîne une baisse périodique de la température du métal

résidant dans le répartiteur. Ainsi, la température de coulée prend un aspect instationnaire.

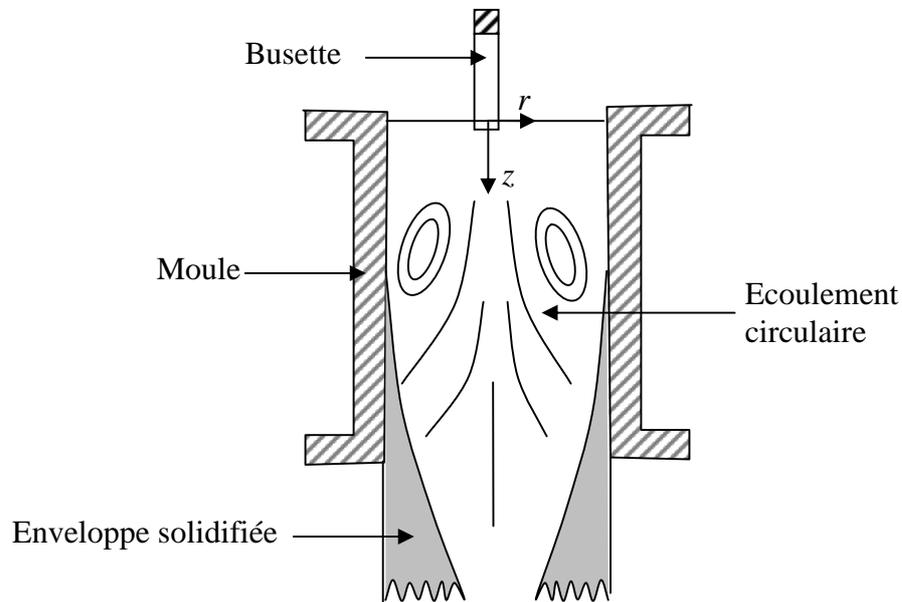


Fig. 1.7. Ecoulement du métal fondu à l'intérieur du moule

Lan [27] a montré l'influence de ces deux paramètres sur la coulée continue des billettes cylindriques alimentées directement à travers des busettes. La résolution du problème est effectuée à l'aide de l'algorithme **SIMPLE**. Le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ pour les faibles nombres de Reynolds [28-29] est utilisé dans cette étude. Les équations du transport axisymétriques instationnaires peuvent se généraliser sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{U}\phi) = \nabla(\Gamma_\phi \nabla\phi) + S_\phi \quad (1.27)$$

Γ_ϕ et S_ϕ désignent respectivement la diffusivité de la variable ϕ transportée et le terme source associé aux différentes équations de transport (tableau 1.1). La loi de Darcy pour les milieux poreux est utilisée pour tenir compte de l'effet du changement de phase dans le champ dynamique. Dans le tableau 1.1, $A(u - U_s)$ et A_v représentent les termes de Darcy. Un schéma avec **maillage fixe** basé sur la méthode **enthalpique** est utilisé pour tenir compte du phénomène de changement de phase dans l'équation de l'énergie. Une relation linéaire entre la chaleur latente et la température est supposée.

Tableau 1.1. Equations de transports			
Type d'équation	Variables		
	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Equation de la continuité	1	0	0
Equation de la quantité de mouvement axiale	u	μ_{eff}	$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \beta (T - T_{ref}) + A(u - U_s)$
Equation de la quantité de mouvement radiale	v	μ_{eff}	$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial r} - 2\mu_{eff} \frac{v}{r^2} + Av$
Equation d'énergie	T	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{\sigma_H}$	$G - \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} - \nabla(\rho \mathbf{U}H) - \nabla(\rho(\mathbf{U} - \mathbf{U}_s)(H - L_s))$
Energie cinétique turbulente	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$G - \rho \varepsilon - \rho D$
Taux de dissipation turbulente	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{k} (C_1 f_1 G - C_2 f_2 \rho \varepsilon) + \rho E$

Avec

$\mu_{eff} = \mu_\ell + \mu_t$ inclue la viscosité dynamique du liquide et la viscosité turbulente.

$$\mu_t = \rho_\ell C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.28)$$

Les constantes du modèle de turbulence sont regroupées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2. constantes du modèle de turbulence	
Constante	Valeur
C_μ	0,09
C_1	1,44
C_2	1,92
σ_k	1,0
σ_ε	1,3
D	0
E	0
f_1	$1 + \left(\frac{0,05}{f_\mu}\right)^3$
f_2	$1 - \exp\left[-\left(\frac{k^2}{\nu\varepsilon}\right)^2\right]$
f_μ	$\left(1 + \frac{20,5\nu\varepsilon}{k^2}\right) \left\{1 - \exp\left[-0,0165\left(\frac{(R-r)\sqrt{k}}{\nu}\right)^2\right]\right\}$

L'étude de **Lan** a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Au début du cycle, la température de coulée augmente par 25°C dans une période de 18 min. A la fin du cycle et après environ 50 min, la température diminue par 25°C.
- Au début du cycle, le volume du liquide s'étend dans la direction radiale vers le moule. A la fin du cycle, cette extension est suivie par un retour.
- La contraction de l'enveloppe solidifiée pendant le cycle n'est pas très appréciable. Cependant, cette contraction doit être prise en considération afin d'éviter la condition d'évasion.

L'effet de l'écoulement turbulent dans la phase liquide a été traité aussi par **Mahmoudi** [30] lors de la coulée continue des billettes planes en cuivre pur de largeur E , d'une épaisseur W et d'une hauteur L (Fig. 1.8). Le métal fondu est versé continuellement dans le moule à travers 18 Busettes. La résolution numérique du problème est basée sur un schéma avec *maillage mobile* avec les hypothèses simplificatrices suivantes :

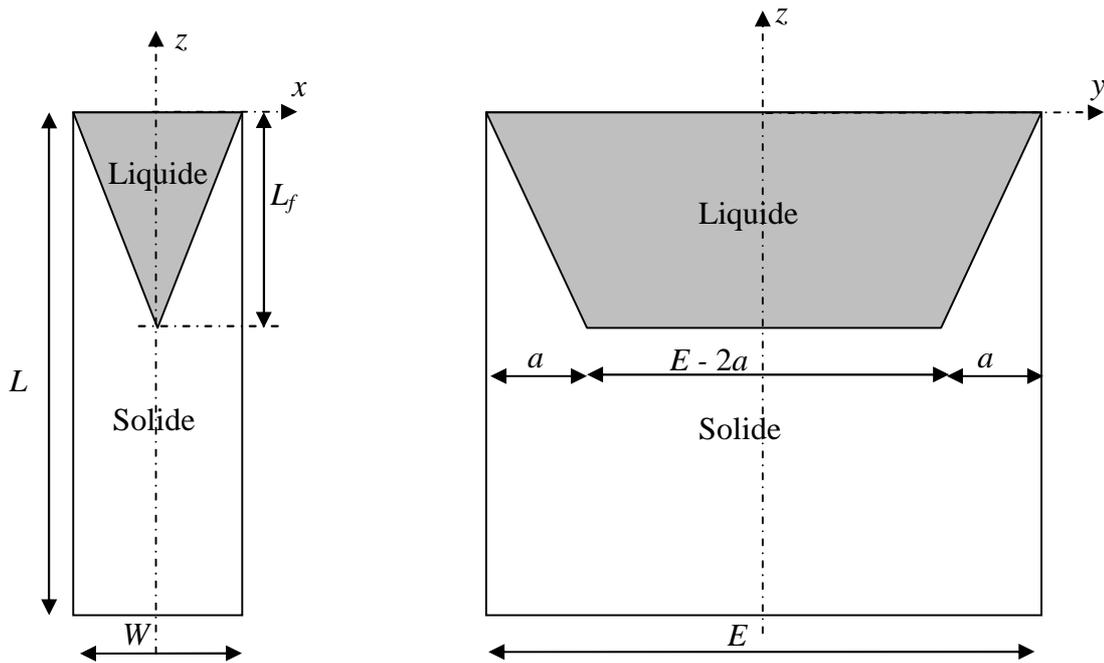


Fig. 1.8. Géométrie et domaine du calcul

1. Le problème est supposé stationnaire ;
2. La position du front de solidification est supposée connue et demeure à la surface $z = f(x, y)$ où

$$f(x, y) = \begin{cases} L_f \left(\frac{2|x|}{w} - 1 \right) & \text{si } |x| < \frac{w}{2} \quad \text{et } L_f \left(\frac{2|x|}{w} - 1 \right) > \frac{L_f}{a} \left(y \pm \frac{E}{2} \right) \\ \frac{L_f}{a} \left(y \pm \frac{E}{2} \right) & \text{si } y > \pm \frac{E}{2} - a \quad \text{et } \frac{L_f}{a} \left(y \pm \frac{E}{2} \right) > L_f \left(\frac{2|x|}{w} - 1 \right) \end{cases} \quad (1.29)$$

L_f désigne la profondeur du front de solidification et a la distance entre la surface interne du moule et le front.

3. Les propriétés thermophysiques du solide et du liquide sont constantes et différentes ;
4. La région liquide est un fluide Newtonien incompressible en régime turbulent. Le modèle $k-\varepsilon$ est utilisé pour traiter le phénomène de turbulence

Nous supposons alors que le liquide occupe la région $0 \geq z > f(x, y)$ et que le solide occupe la région $-L \leq z \leq f(x, y)$. L'équation d'énergie s'écrit alors :

Région liquide : $0 \geq z > f(x, y)$

$$\nabla(\rho_\ell \mathbf{U} H_\ell) = \nabla(\Gamma_{eff} \nabla H_\ell) \quad (1.30.a)$$

où H_ℓ est l'enthalpie du liquide donnée par $H_\ell = c_\ell (T - T_{ref})$ et $\Gamma_{eff} = \frac{\lambda_\ell}{c_\ell} + \frac{\mu_t}{\sigma_H}$.

Région solide : $-L \leq z \leq f(x, y)$, $\mathbf{U} = (0, 0, -U_s)$

$$-\rho_s U_s \frac{\partial H_s}{\partial z} = \nabla(\Gamma_s \nabla H_s) \quad (1.30.b)$$

où H_s est l'enthalpie du solide donnée par $H_s = c_s (T - T_{ref})$ et $\Gamma_s = \frac{\lambda_s}{c_s}$. Au front de solidification pour $z = f(x, y)$, les équations (1.21.c) et (1.21.d) sont imposées.

Plus récemment, la simulation numérique du transfert thermique instationnaire bidimensionnel durant la coulée continue des plaques d'acier a été présentée par **Hardin** [31]. L'équation d'énergie gouvernant le problème est résolue à l'aide du modèle **DYSCOS** (**DY**namique **S**pray **CO**oling **S**imulator). La Fig. 1.9(a) montre le domaine de calcul et la Fig. 1.9(b) indique les conditions aux limites imposées.

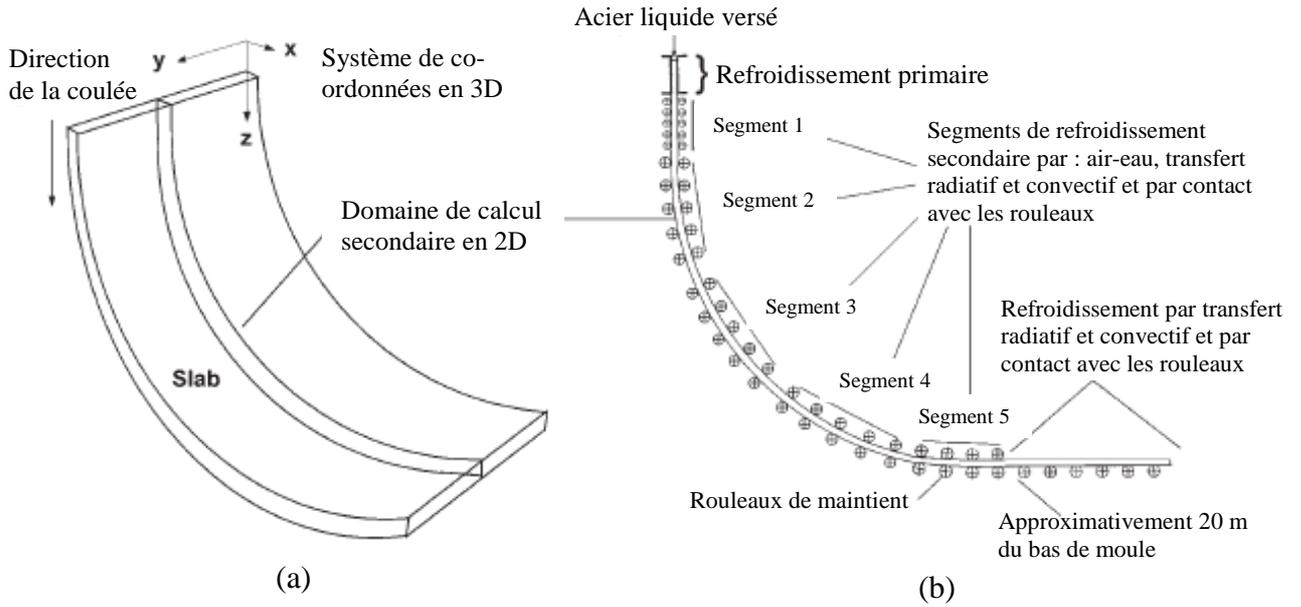


Fig. 1.9. (a) Géométrie et domaine de calcul et (b) Conditions aux limites utilisées.

En tenant compte de l'effet de la conduction axiale, l'équation d'énergie résolue par le modèle *DYSCOS* est comme suit :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_T \quad (1.31)$$

avec

$$\rho c = f_s \rho_s c_s + (1 - f_s) \rho_l c_l \quad (1.32)$$

$$\lambda = [f_s \lambda_s + (1 - f_s) \lambda_l] [1 + \theta_t (1 - f_s)^2] \quad (1.33)$$

$$S_T = L_s \left[\frac{\partial (f_s \rho_s)}{\partial t} + U_s \frac{\partial (f_s \rho_s)}{\partial z} \right] \quad (1.34)$$

θ_t désigne le facteur d'augmentation thermique.

Comme condition initiale, le modèle *DYSCOS* suppose que la plaque opère en régime stationnaire et qu'elle est présente dans toute la machine. La détermination des conditions aux limites appropriées est assez délicate puisque les différents modes de

transfert thermique interviennent simultanément. Dans la région primaire, un flux de chaleur moyen variant avec le temps et calculé à partir des mesures expérimentales est employé. Dans la région secondaire, un transfert de chaleur radiatif-convectif couplé est imposé. Le rayonnement thermique est tenu en compte sur toute la surface de la plaque sauf aux points de contact des rouleaux. Pour les plaques en acier, l'émissivité est prise en fonction de la température de surface [32].

$$\varepsilon = \frac{0,85}{1 + \exp(42,68 - 0,02682T_{surf})^{0,0115}} \quad (1.35)$$

Le coefficient de transfert radiatif entre la surface de la plaque et la température ambiante est exprimé par :

$$h_{rad} = \varepsilon\sigma(T_{surf}^2 + T_{amb}^2)(T_{surf} + T_{amb}) \quad (1.36)$$

où T_{surf} et T_{amb} représentent respectivement la température de surface et la température ambiante. Pour le transfert de chaleur convectif, le coefficient de convection employé est donné par [33] :

$$h_{conv} = \frac{1570Q^{0,55}(1 - 0,0075T_{\infty})}{\alpha} \quad (1.37)$$

Q désigne le débit d'eau de refroidissement secondaire et α une constante dépendant de la distribution du jet et de la disposition des pulvérisateurs. Cette étude a permis de examiner l'influence de la vitesse de coulée, du refroidissement secondaire, de l'épaisseur de la plaque, de la composition chimique de l'acier et de la température de coulée sur la distribution de la température et sur le contrôle de la solidification de la plaque.

Une étude expérimentale et numérique a été menée par **Mahmoudi** [34] afin d'étudier le processus de la coulée continue des plaques de cuivre (Fig. 1.10). L'écoulement du cuivre fondu à partir du répartiteur au moule passe à travers une busette. Le refroidissement primaire de la plaque est assuré par une circulation d'eau à l'intérieur des parois du moule et le refroidissement secondaire par des jets d'eau.

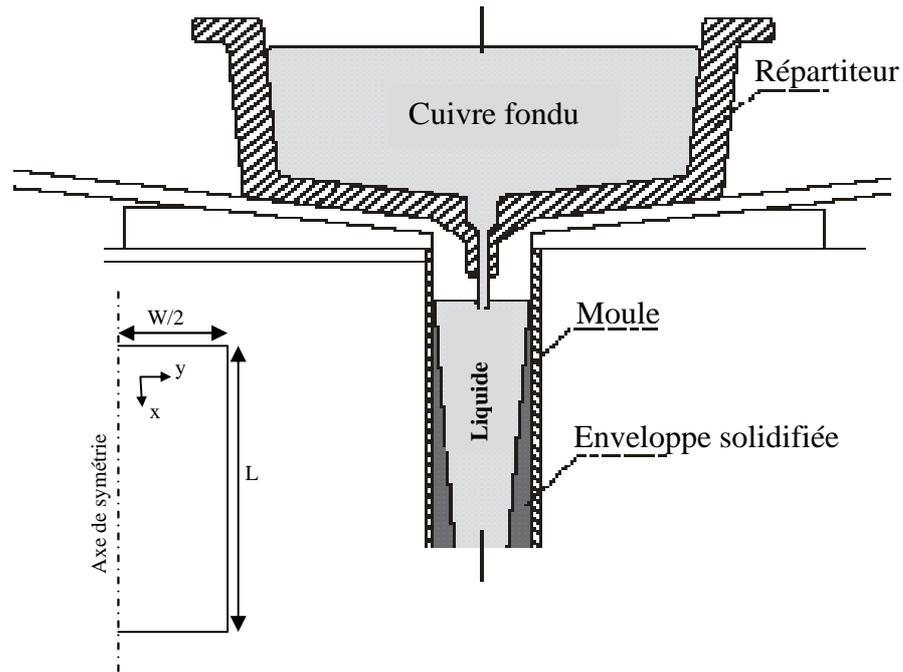


Fig. 1.10. Géométrie et domaine de calcul

Le modèle numérique est basé sur les équations générales de la conservation de masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le modèle de turbulence $k-\varepsilon$, développé par le programme commercial *CFX*, est employé pour analyser le phénomène de turbulence engendré dans la région du moule.

Conservation de la masse

$$\nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1.38.a)$$

avec

$$\rho = \frac{1}{\frac{f_s}{\rho_s} + \frac{f_l}{\rho_l}} \quad (1.39)$$

$$\vec{U} = f_s \vec{U}_s + f_l \vec{U}_l \quad (1.40)$$

Conservation de la quantité de mouvement : l'écoulement du fluide durant l'intervalle de solidification est simulé comme un milieu poreux où la loi de Darcy peut être appliquée.

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) = -\nabla \rho + \nabla (\mu_{eff} \nabla \bar{\mathbf{U}}) + \frac{\mu_\ell}{K} (\bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}}_s) + \bar{\mathbf{S}}_U \quad (1.38.b)$$

La perméabilité K est évaluée par la formule de Carman-Kozeny [35-36].

$$K = K_0 \frac{f_\ell^3}{(1-f_\ell)^2} \quad (1.41)$$

K_0 est le coefficient de perméabilité dépendant de la morphologie du milieu poreux.

Conservation de l'énergie

$$\nabla (\rho \bar{\mathbf{U}} H) = \nabla (\Gamma_{eff} \nabla H) + S_H \quad (1.38.c)$$

avec

$$\Gamma_{eff} = \frac{\lambda}{c} + \frac{\mu_t}{\sigma_H} \quad (1.42)$$

Le terme source S_H (qui introduit l'effet de la chaleur latente L_s) peut s'écrire comme suit :

$$S_H = L_s \nabla (\rho f_s \bar{\mathbf{U}}_s) \quad (1.43)$$

La fraction liquide varie linéairement avec la température sous de la forme suivante :

$$f_\ell = \begin{cases} 0 & \text{pour } T < T_s \\ \frac{T - T_s}{T_\ell - T_s} & \text{pour } T_s \leq T \leq T_\ell \\ 1 & \text{pour } T \geq T_\ell \end{cases} \quad (1.45)$$

Les conditions aux limites utilisées sont :

Pour $x = 0$, $0 \leq y \leq d_{jet}$:

$$u = u_{jet}, v = 0, T = T_0, k = c_{p1} u_{jet}^2 \text{ et } \varepsilon = \frac{(c_{p1})^{3/2} u_{jet}^3}{c_{p2} D_h}$$

Pour $x = 0$, $d_{jet} < y \leq W/2$:

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \text{ et } \lambda_\ell \frac{\partial T}{\partial x} = \phi_{surf}$$

A l'axe de symétrie :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0$$

où c_{p1} et c_{p2} sont des constantes empiriques, $u_{jet} = \frac{WU_s}{d_{jet}}$ la vitesse du métal fondu

injecté et $D_h = \frac{4A_{jet}}{P_{jet}}$ le diamètre hydraulique (A_{jet} et P_{jet} sont la section et le périmètre du jet).

A la surface de la plaque ($y = W/2$) :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_m)$$

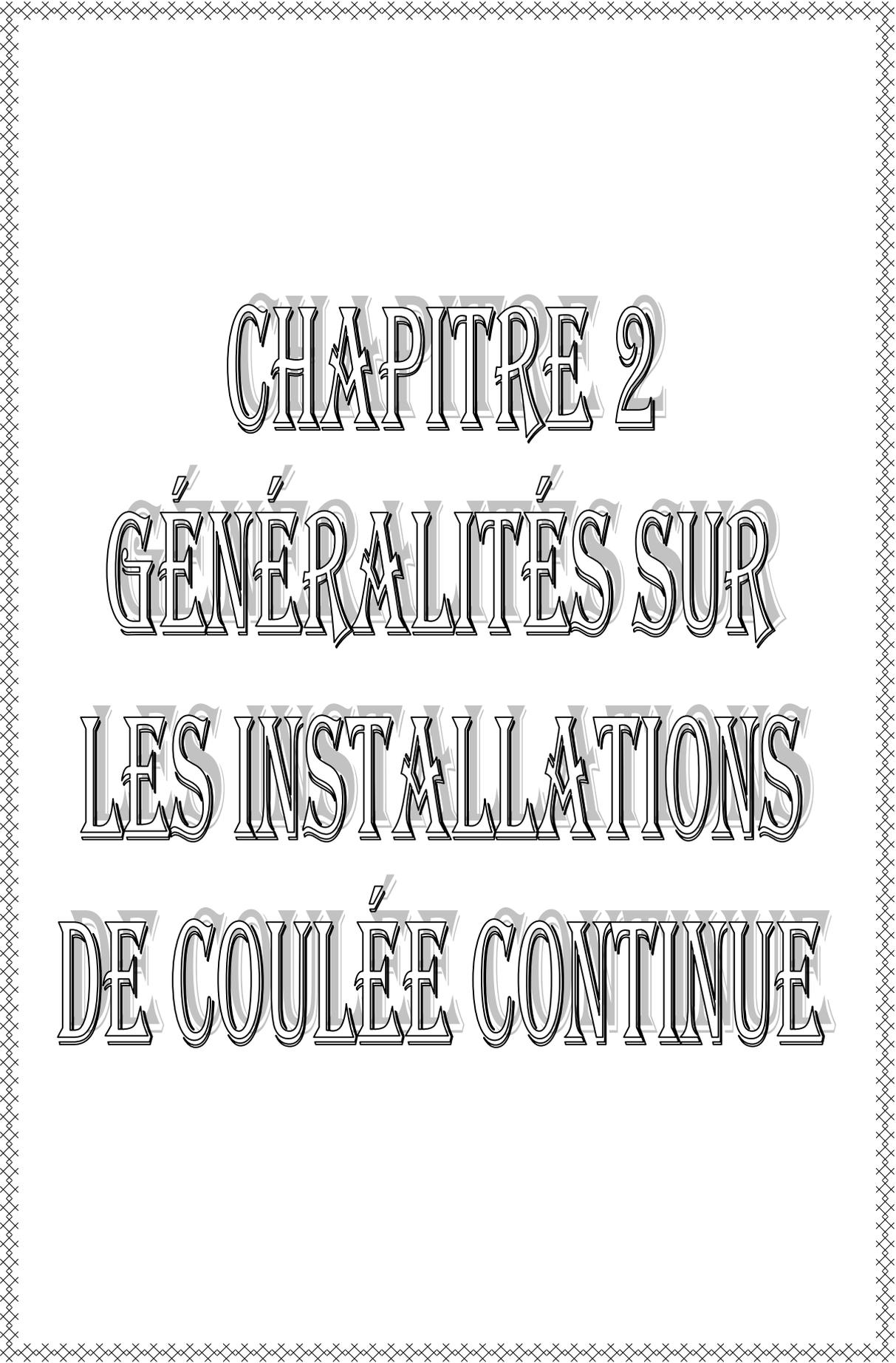
Où h est le coefficient de convection entre le moule et l'enveloppe solidifiée. T_m est la température du moule. Au bas du moule, nous suppose un flux conductible nul $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

En réalité, le coefficient de convection h et la température du moule T_m ne sont pas constantes et varient en fonction de la hauteur du moule. Pour approximer ces variations, **Mahmoudi** propose les équations polynomiales suivantes :

$$T_m = a_1 y^2 + a_2 y + a_3$$

$$h = b_1 y^2 + b_2 y + b_3$$

Où a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et b_3 sont des constantes empiriques.



CHAPITRE 2
GÉNÉRALITÉS SUR
LES INSTALLATIONS
DE COULÉE CONTINUE

2.1. Introduction

Avant l'apparition de la coulée continue dans les années 50, le processus de la *coulée en lingots* (moulage) a été largement utilisé (Fig. 2.1). Dans ce processus, le métal fondu est versé dans plusieurs lingotières stationnaires. Quand la solidification est complète, les lingots sont retirés, réchauffés et roulés dans des laminoirs pour former des plaques, des blooms ou des billettes. Actuellement, cette ancienne méthode a pratiquement été remplacée par le processus de la *coulée continue*. Dans ce dernier, le métal fondu est versé en continue dans des lingotières creuses refroidies généralement à eau. Le métal est retiré continuellement du fond de la lingotière pendant la formation d'une coquille (enveloppe) solide autour du métal fondu. L'idée de la *coulée continue* remonte au milieu du 19^{ème} siècle avec G.E. SELLERS (1840), J. Laing (1843) et H. Bessemer (1846). Les premières machines furent construites entre 1846 et 1850, c'était des machines à billettes à une ou deux lignes. Loo Moor en grande Bretagne (1846), Babcock et Wilcox aux Etats-Unis (1848), Huchinger en république fédérale d'Allemagne (1850). A partir des années 1850, la coulée continue a évolué de manière à améliorer le rendement, la qualité, la production et l'efficacité économique.

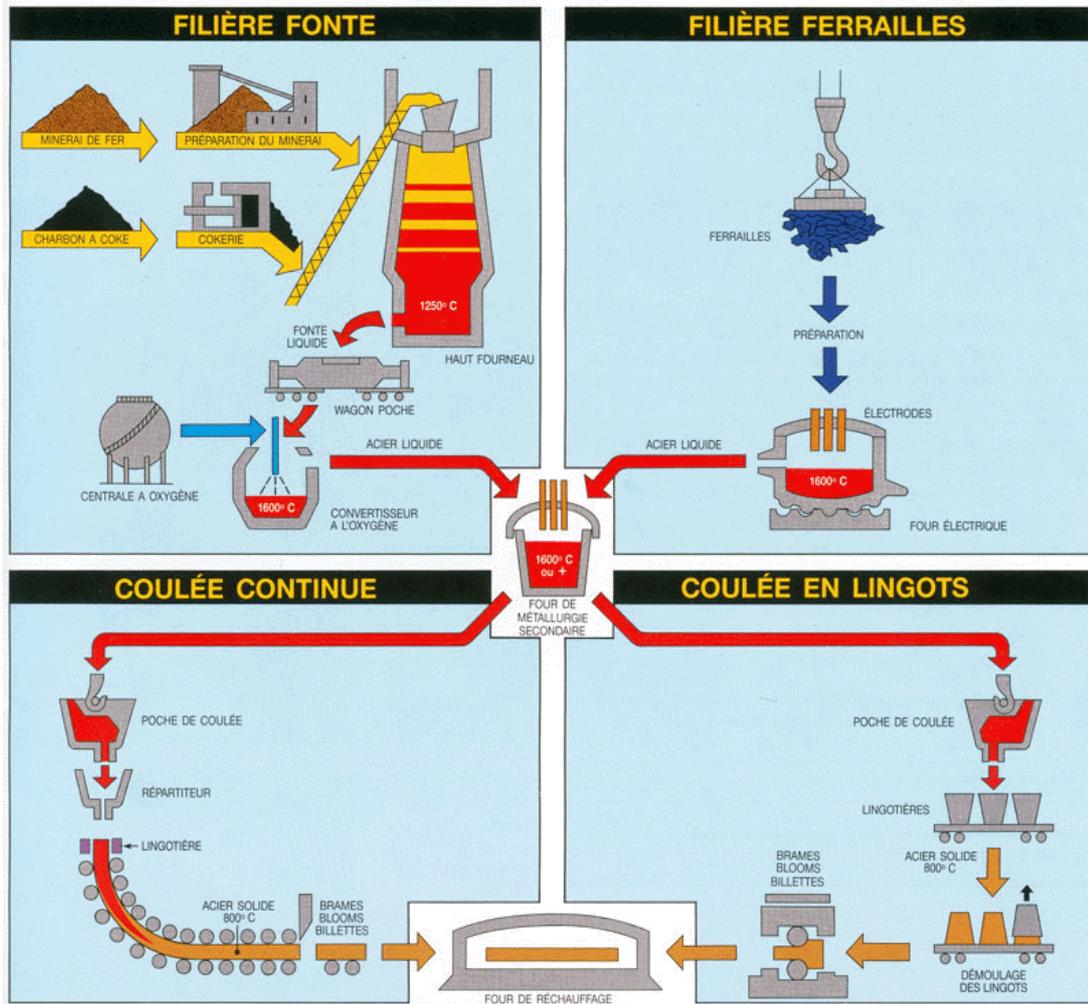


Fig. 2.1. Processus de fabrication des métaux

En 1970, le pourcentage d'acier brut produit en coulée continue dans l'industrie été seulement de 4%, maintenant on parle d'environ 90% (Fig. 2.2). La plupart des progressions précédentes ont été basées sur les connaissances empiriques obtenues directement des expériences. L'amélioration de la puissance des ordinateurs a rendue les modèles mathématiques des outils de plus en plus puissants, capables de donner un meilleur contrôle de la coulée continue

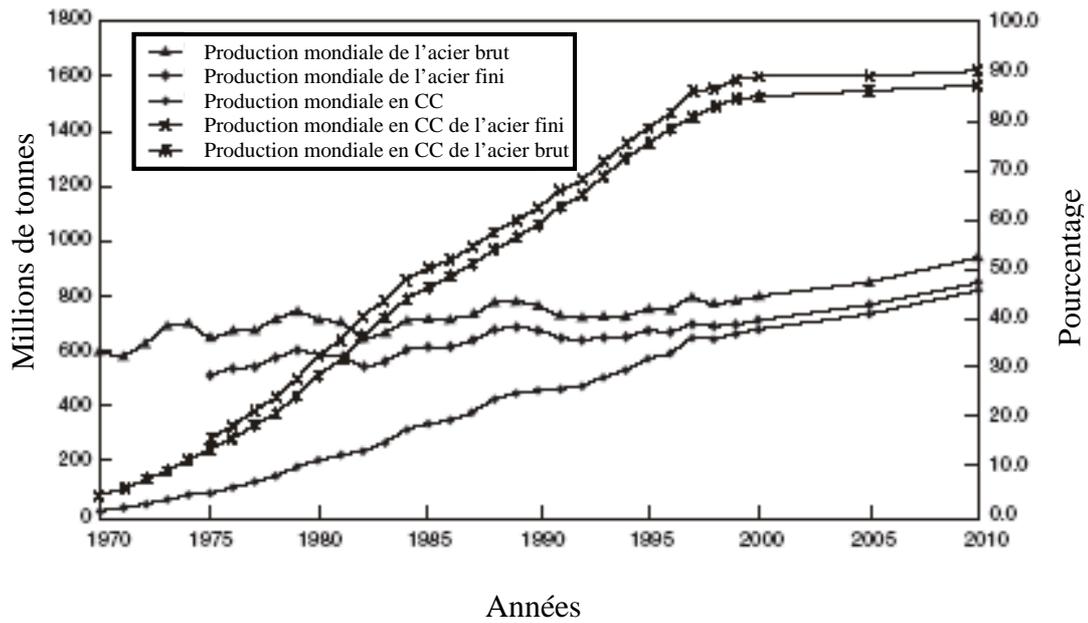


Fig. 2.2. Évolution de la production mondiale en acier et le pourcentage de la coulée continue dans l'industrie.

2.2. Avantages de la coulée continue

Les avantages offerts par la coulée continue à la fonderie industrielle peuvent être classés comme suit :

2.2.1. Economie d'énergie et amélioration du rendement

Le processus de la coulée continue permet d'économiser l'énergie en éliminant les étapes de consommation excessives et en augmentant le rendement. L'élimination de bac de trempe, de four de réchauffement et de laminoir primaire réduit la consommation en carburant et en électricité. Cette économie d'énergie vaut approximativement 1 million de BTU par tonne coulé. Au Japon, où la moitié d'acier mondiale est coulée en continue, l'économie d'énergie est d'environ 50% par rapport à celui coulé en ligots. En outre, le processus de coulée continue permet d'augmenter le rendement jusqu'à 15 à 20% dans certains cas. Cette amélioration du rendement vient de la réduction des chutes générées et la réduction des pertes par oxydation en diminuant l'exposition du métal chaud à l'air. En moyenne, l'économie d'énergie par augmentation du rendement s'élève à environ 2 millions de BTU par tonne coulé en continue. L'économie en

énergie est ainsi de 3 millions de BTU par tonne coulé correspondant à un coût d'économie significatif.

2.2.2. Amélioration de la productivité

Dans le processus de la coulée continue, l'amélioration de la productivité provient de l'élimination de nombreuses étapes qui demandent une intervention directe des travailleurs. La main d'oeuvre exigée est de 10 à 15% moins. L'augmentation de la productivité résulte aussi de l'augmentation du rendement (augmentation du tonnage de métal expédié), de l'amélioration des conditions du travail et de la réduction du temps de production (de 7 h ou plus à 1 ou 2 h).

2.2.3. Amélioration de la qualité du produit

La plupart des experts industriels signalent une amélioration dans la qualité de quelques métaux coulés en continue. Le nombre réduit des étapes et le grand contrôle automatique du processus réduisent les défauts dans le produit. L'industrie a connue une progression remarquable du processus, en particulier dans la production des plaques qui exige une qualité de surface assez élevée.

2.2.4. Réduction de la pollution

L'élimination des bacs de trempe et des fours de réchauffement et la réduction d'énergie consommée diminuent considérablement la pollution produite. L'exposition réduite du métal chaud à l'atmosphère diminue les substances particulières dans l'air. L'augmentation du rendement entraîne la diminution des aciéries primaires exigées.

2.2.5. Réduction du coût de revient

La réduction des coûts de revient est un effet direct de l'élimination des moules et des équipements de démoulage, des bacs de trempe, des fours de réchauffement et des laminoirs primaires. Les grands industriels de fonderie affirment que la coulée continue a offert des grandes possibilités pour économiser le coût et recommandent l'utilisation de la coulée continue.

2.2.6. Une plus grande consommation des ferrailles achetées

L'augmentation du rendement diminue la production des ferrailles en usine. Ces dernières sont réutilisées de nouveau dans les hauts fourneaux de fusion. Afin de maintenir le rapport du métal liquide avec les ferrailles, l'achat des ferrailles est exigé afin de compenser celles qui sont perdues.

2.3. Installation de la coulée continue

Comme indiqué sur la Fig. 2.3, la coulée continue comprend les composants suivants :

- (1) Poche de coulée (Ladle) ;
- (2) Répartiteur (Tundish) ;
- (3) Lingotière (moule), oscillateur de lingotière et refroidissement primaire ;
- (4) Première zone du refroidissement secondaire ;
- (5) Rouleaux d'extraction et deuxième zone du refroidissement secondaire ;
- (6) Redresseur ;
- (7) Roulement de débranchement de la Barre ;
- (8) Unité de cisaillement ;
- (9) Table de transfert ;
- (10) Système d'identification du produit ;
- (11) Système d'évacuation du produit ;
- (12) Stockage du produit.

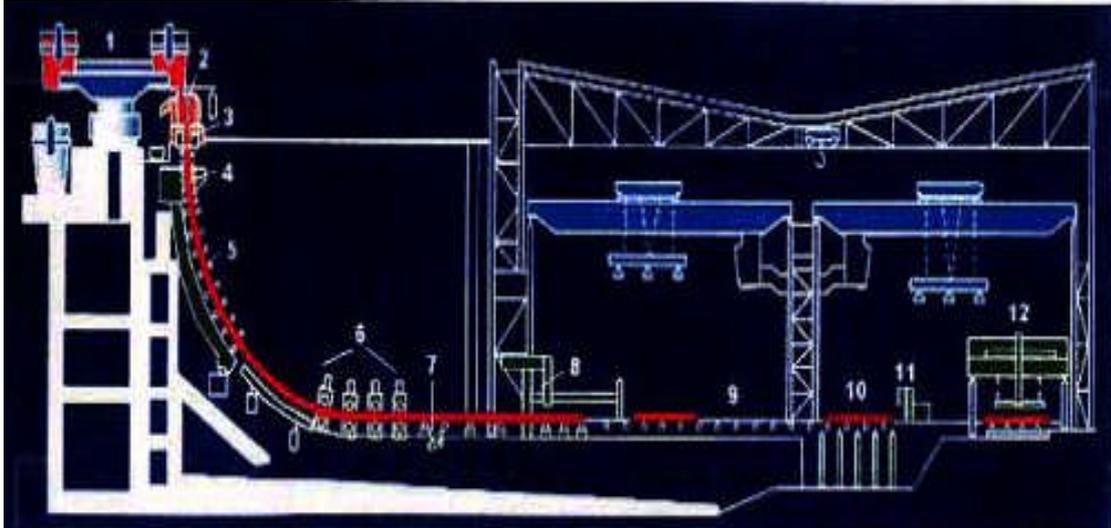


Figure 2.3. Schéma général d'une installation de coulée continue à une seule ligne.

2.3.1. Principe de la coulée continue

A partir du four de fusion, le métal fondu est transporté dans une poche vers l'installation de coulée continue (Fig. 2.4). Il est versé alors dans le répartiteur ensuite dans la lingotière à travers des busettes réfractaires pour empêcher sa ré-oxydation due au contact avec l'air. L'opération de coulée commence par insérer une barre de retrait au fond de la lingotière et former ainsi une enceinte fermée. Le retrait de la ligne de coulée commence en tirant cette barre vers le bas. Un refroidissement primaire de la lingotière (généralement par eau) assure la formation d'une coquille solide assez mince autour du métal fondu. Cette coquille est composée de cristaux granulaires fins sur la surface et de rangées dendritiques colonnaires en accroissement à l'intérieur. L'épaisseur de la coquille augmente alors progressivement à travers la lingotière. Un flux de poudre est ajouté à la surface libre du métal fondu dans la lingotière pour diminuer les pertes de chaleur et absorber les inclusions non métalliques existantes encore. Un film de cette poudre pénètre entre la lingotière et la coquille et

- assure la lubrification (réduire le problème de collage) ;
- diminue le transfert thermique à la surface pour éviter un abaissement rapide de la température. Cet abaissement peut entraîner la déformation de la ligne de coulée et la formation des fissures à la surface.

Pour éviter tout problème de collage de la ligne de coulée avec la lingotière, cette dernière est équipée aussi d'un oscillateur. A la sortie de la lingotière, la ligne de coulée (contient toujours du métal liquide non solidifié au noyau) est acheminée vers le bas à l'aide d'une série de rouleaux de maintien et à travers un arrosage à eau avec des pulvérisateurs. Pendant cette étape, les dendrites colonnaires continuent à se développer avec la formation des dendrites équiaxées pour compléter la solidification. La coquille solidifiée, dont la force et la dureté sont sensiblement faibles, est soumise à la contraction avec à une contrainte thermique très importante. Cela peut entraîner des fissures (surfaciques et internes) dans la ligne de coulée. Par conséquent, le refroidissement secondaire est soigneusement contrôlé pour empêcher la croissance de ces fissures. Le produit obtenu est ensuite coupé au moyen d'un chalumeau pour être livré au processus de laminage à chaud ou déposé sur des tables de refroidissement, étiquetée et marquée selon les exigences.

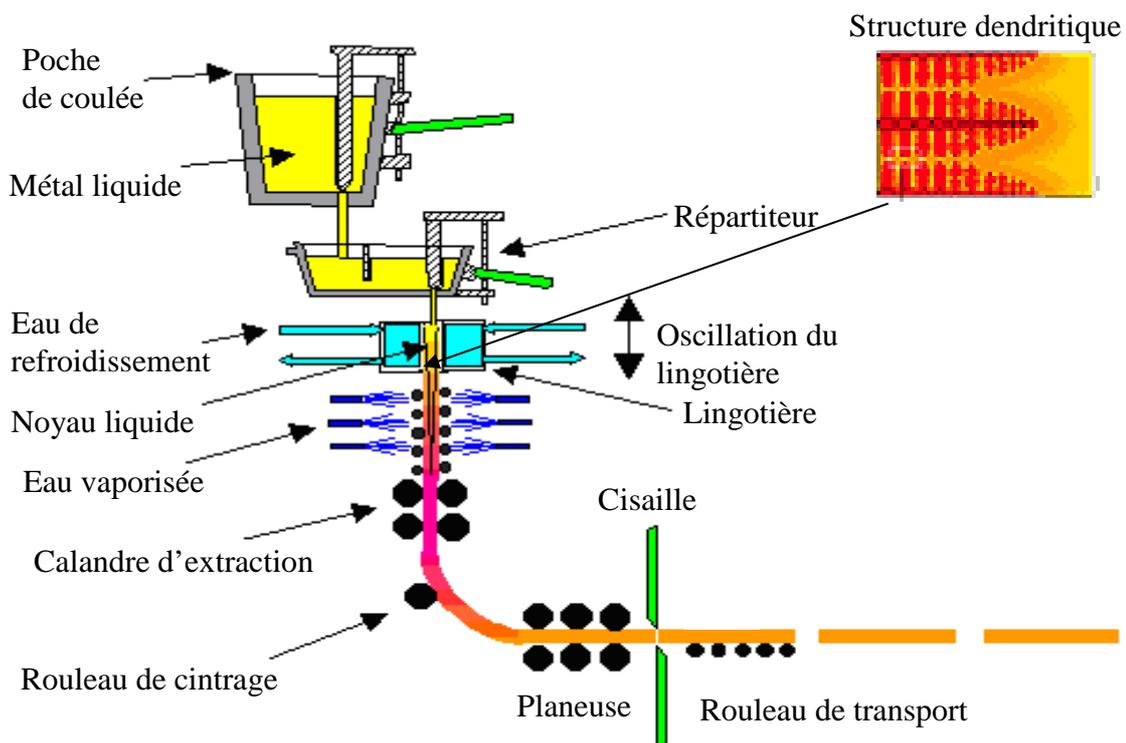


Fig. 2.4. Installation de coulée continue

2.3.2. Vue D'ensemble de la coulée continue

a. Poche de coulée

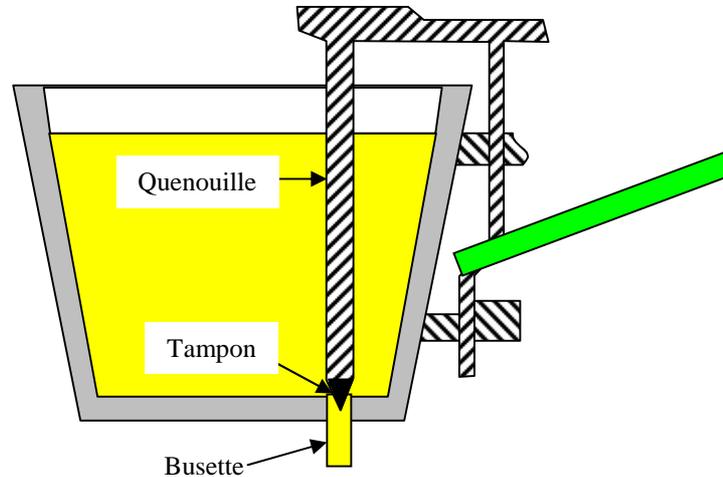


Fig. 2.5. Poche de coulée

Généralement, la poche de coulée est équipée d'un réservoir légèrement conique en tôle dont l'intérieur est revêtu d'un garnissage réfractaire. En aciérie, on utilise souvent une poche à quenouille qui présente dans son fond une ouverture obstruée en temps normal par un Tampon. Celui-ci peut être soulevé de son siège par une tige appelée quenouille et le métal fondu bien décanté s'écoule par le bas dans le répartiteur. Le temps de séjour du métal fondu dans la poche doit être suffisant pour permettre la décantation des inclusions (5 à 10 minutes). La capacité de la poche peut aller de 10 tonnes (machine à billette à une ligne) à 350 tonnes (machine à brame à deux lignes). La coulée de la poche vers le répartiteur se fait toujours par l'intermédiaire d'une busette située au fond de la poche.

b. Répartiteur

Le répartiteur est un récipient de distribution situé directement au dessus de la lingotière et permet

1. de favoriser la décantation des inclusions ;

2. d'assurer une alimentation avec un débit constant du métal liquide à la lingotière pendant les échanges de poche ;
3. de distribuer le métal fondu aux différentes lingotières dans le cas d'une machine à plusieurs lignes ;
4. de maintenir une hauteur régulière entre le métal fondu au dessus des busettes et la lingotière pour assurer un écoulement uniforme en métal.

Le répartiteur est constitué d'une cuve métallique garnie de réfractaire dont le fond comporte autant de busette. Pour éviter l'entraînement des inclusions supérieures, la hauteur du répartiteur est généralement augmentée (elle est de 800 à 1100 mm).

c. Lingotière (moule)

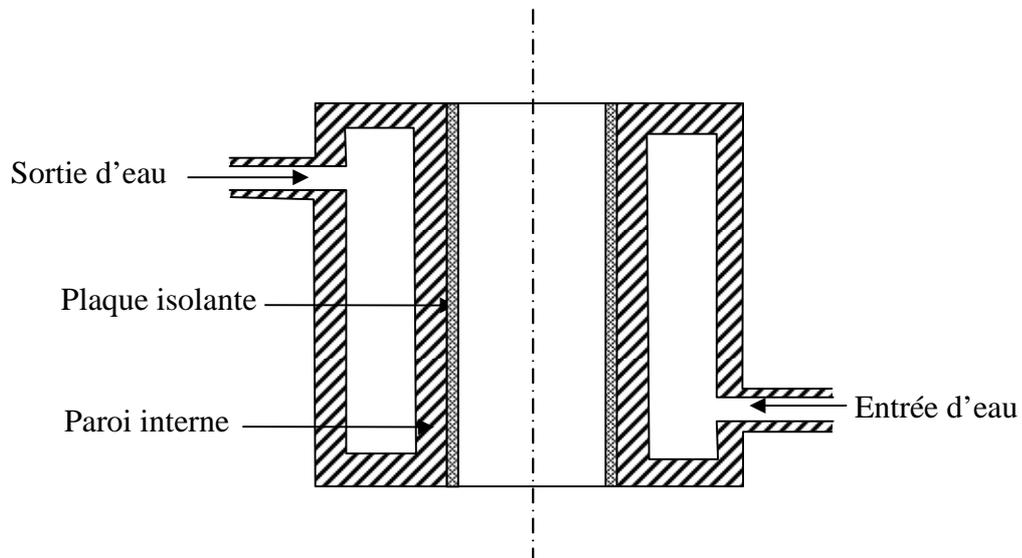


Fig. 2.6. Lingotière

La lingotière a une structure creuse ouverte possédante un passage interne pour la circulation de l'eau de refroidissement primaire. Elle est donc le siège d'un transfert thermique permettant l'évacuation de la chaleur libérée par le métal liquide en cours de solidification, et donc, la formation d'une coquille solide suffisamment forte pour contenir son noyau encore liquide à la sortie. La lingotière est souvent en fonte ou en cuivre dont la surface interne est plaquée avec du chrome ou du nickel pour fournir une surface de fonctionnement plus dure. Ceci évite la collecte du cuivre sur la surface du

métal qui peut faciliter leurs fissurations. Un système d'oscillation de la lingotière est prévu pour

- minimiser le frottement et empêcher le collage de la coquille solidifiée ;
- éviter la déchirure de la coquille et ainsi l'évasion du métal liquide qui peut entraîner de grands dégâts sur l'équipement et des temps d'arrêt de la machine pour nettoyage et réparations.

Généralement la lingotière a une hauteur de l'ordre de 1 à 7 m. L'épaisseur des parois peut varier de 17 à 60 mm. La lingotière est refroidie énergiquement par un courant d'eau dont le débit massique est d'environ 6 fois le débit du métal coulé.

d. Refroidissement secondaire



Fig. 2.7. Refroidissement secondaire par pulvérisation

Généralement, le refroidissement secondaire est assuré par une des deux méthodes suivantes :

- une série d'injecteurs de pulvérisation d'eau ou une combinaison d'air et eau (Figs. 2.7 et 2.8a) ;
- ruissellement d'eau (Fig. 2.8b).

Le refroidissement secondaire permet un refroidissement direct et un contrôle de la solidification du produit coulé à travers toute la ligne de coulée au bas de la lingotière. Des aimants sont parfois installés au-dessous de la lingotière et entre les rouleaux de maintien pour agiter le métal fondu dans la coquille solidifiée par induction électromagnétique et d'augmenter ainsi les dendrites équiaxées. Le transfert de chaleur dans cette zone remplit les fonctions suivantes :

1. Augmente et contrôle le taux de solidification (pour certains cas, la solidification est complète dans cette région) ;
2. Régulation de la température du produit en ajustant l'intensité de l'eau pulvérisée ;
3. Assure une meilleure rigidité de la ligne de coulée pour supporter les efforts des rouleaux de guidage ;
4. empêche la croissance des fissures en ajustant l'intensité de l'eau pulvérisée ;
5. Evite le réchauffement de la partie solidifiée ;
6. Assure le refroidissement des rouleaux situés dans cette zone.

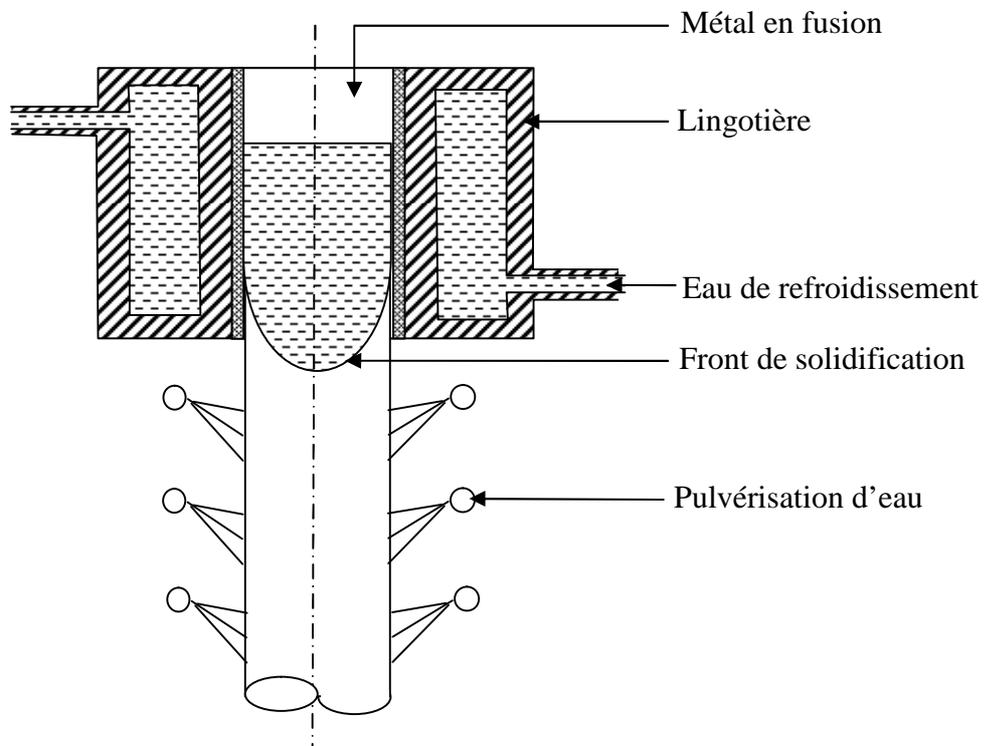


Fig. 2.8a - Refroidissement secondaire par pulvérisation

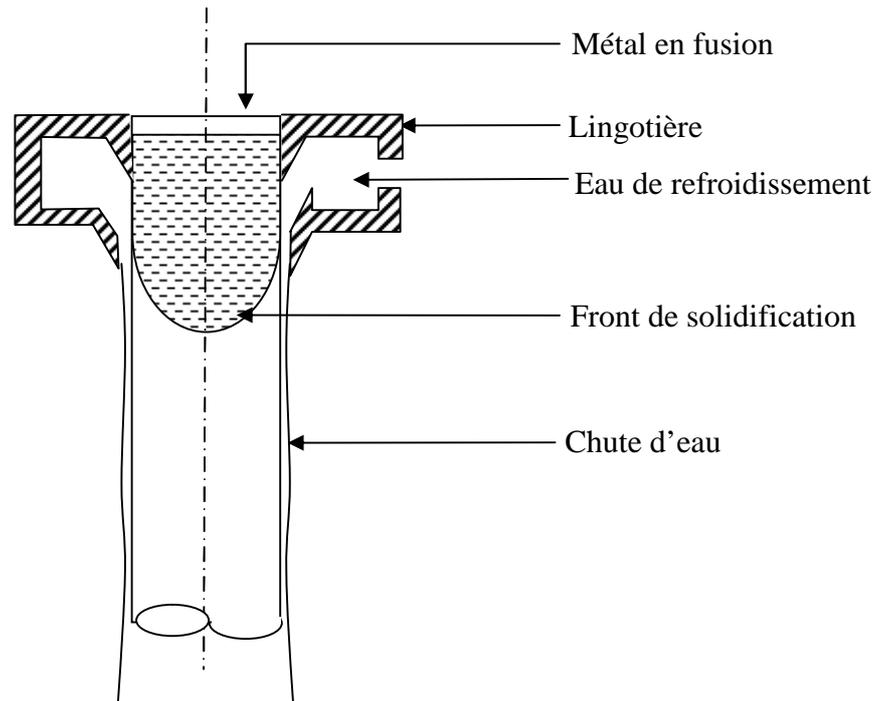


Fig. 2.8b. Refroidissement secondaire par ruissellement

e. Extraction

La région d'extraction est une partie intégrale de la zone de refroidissement secondaire. L'extraction est assurée par des cages (2 ou plus) comprenant chacune une série de rouleaux : une cage fixe qui définit la direction de la coulée et l'autre mobile appuyée par des ressorts qui assure l'entraînement du métal. Le but des rouleaux d'extraction est de guider et maintenir la ligne jusqu'à ce que la coquille solidifiée soit auto-soutenue. La disposition, l'espacement et les diamètres des rouleaux sont soigneusement choisis pour réduire au minimum les efforts des rouleaux et la courbure des lignes. La section dangereuse se trouve donc au haut de la machine où la force de courbure et l'épaisseur de la coquille sont assez faibles. Ainsi, pour éviter la rupture de la coquille et l'évasion du métal liquide dans cette région, on réduit le diamètre et l'espacement des rouleaux.

f. Cintrage et redressement



Fig. 2.9. Section de cintrage à multi lignes de coulée

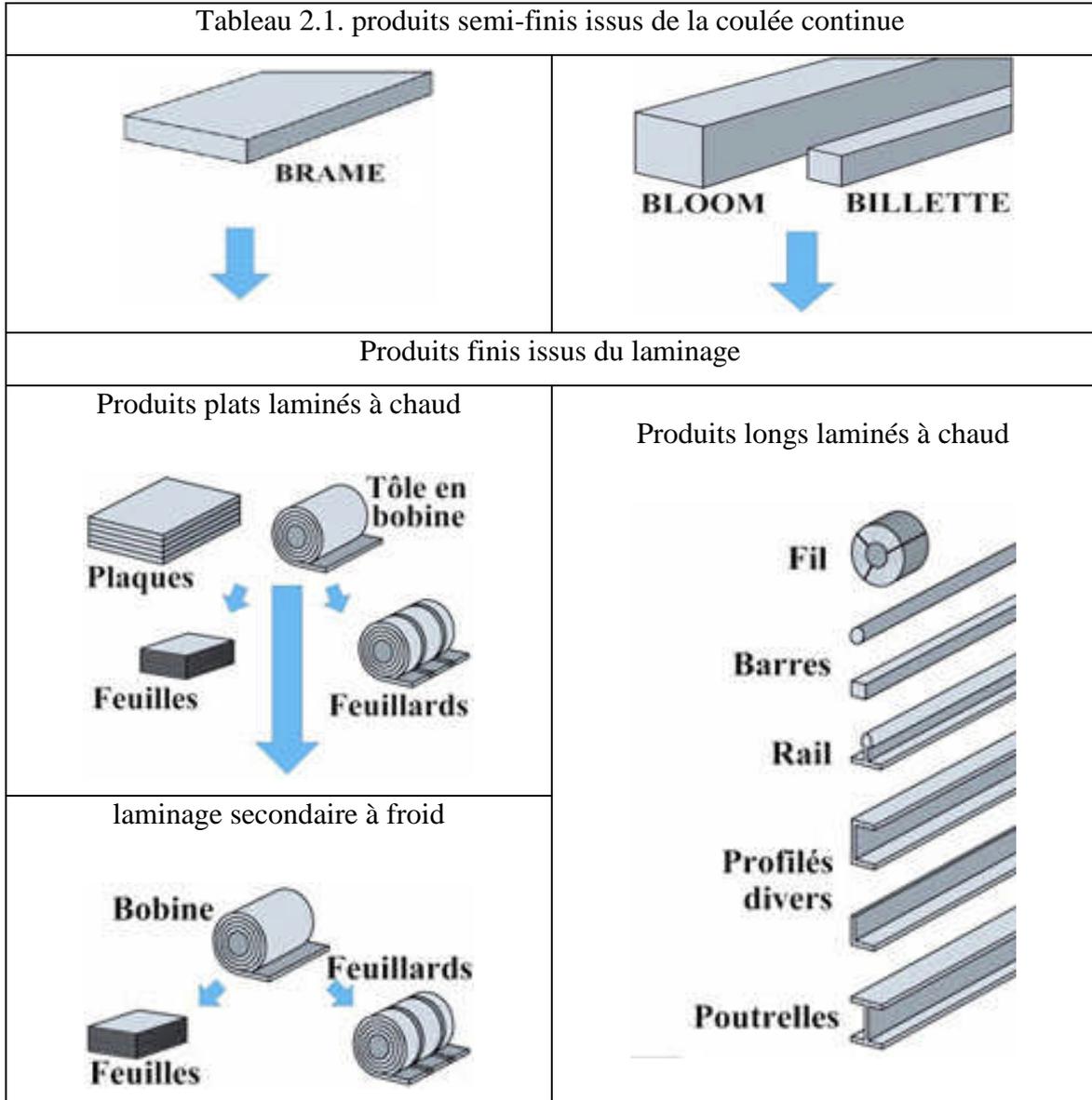


Fig. 2.10. Unités de redressement à multi lignes de coulée

Les forces de cintrage et les forces de redressement ont également un grand rôle dans le soutien et le guidage des lignes de coulée du plan vertical au plan horizontal. Au cours du cintrage, le rayon externe de la coquille solidifiée est soumis à la traction, tandis que le rayon interne est soumis à la compression. Si la contrainte au long du rayon externe est excessive, des fissures peuvent apparaître affectant sérieusement la qualité du métal. Ces contraintes sont minimisées en utilisant un cintrage à multipoint où le rayon augmente progressivement (redressement graduel du produit dans le plan horizontal).

g. Cisaillement

Après redressement, le produit est transféré sur des tables roulantes pour le cisaillement. Pour des sections inférieures à 250 cm^2 on utilise le plus souvent des cisailles hydrauliques. Pour des sections plus importantes on utilise des chalumeaux à oxyacétylénique ou oxypropane. Le produit est évacué par la suite vers le stockage (produit semi-fini) ou vers un four de réchauffement pour être laminé en produits plats ou en produits longs (tableau 2.1).



2.4. Différents types de machines de coulée continue

Le type des machines à coulée continue dépend de la nature et la forme des produits et de la forme de la machine elle même. On distingue deux grandes catégories

- Machines traditionnelles
- Machines non traditionnelles

2.4.1. Machines traditionnelles

a. Machine verticale

Dans ce type de machine le produit est coulé, solidifié, extrait et découpé à la verticale avant d'être incliné pour son évacuation. Ce type de machine est employé pour la coulée des aciers à haute teneur parce qu'il favorise la séparation (décantation) des inclusions non métalliques versées dans le moule. Par contre, ces machines nécessitent des bâtiments de coulée de hauteurs excessives (35 à 40 m). La construction devient grande et par conséquent chère.

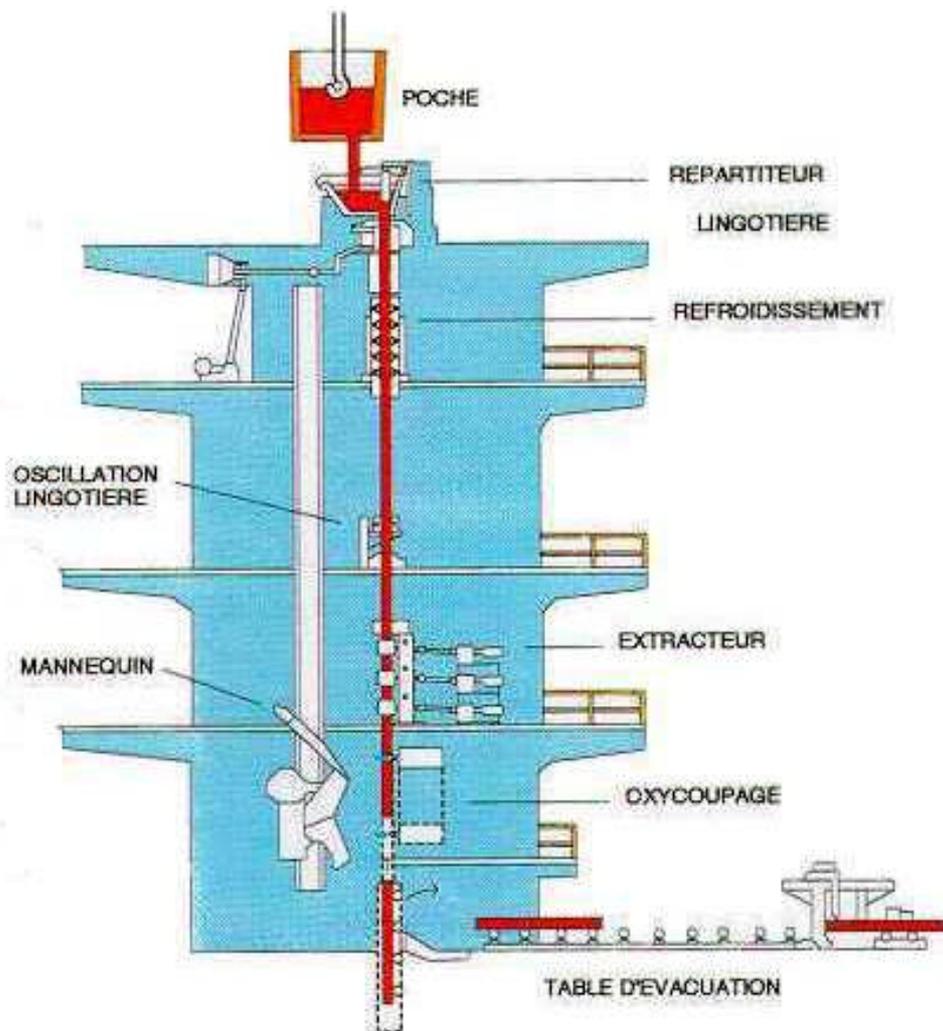


Fig. 2.11. Machine de coulée continue verticale

b. Machine courbe

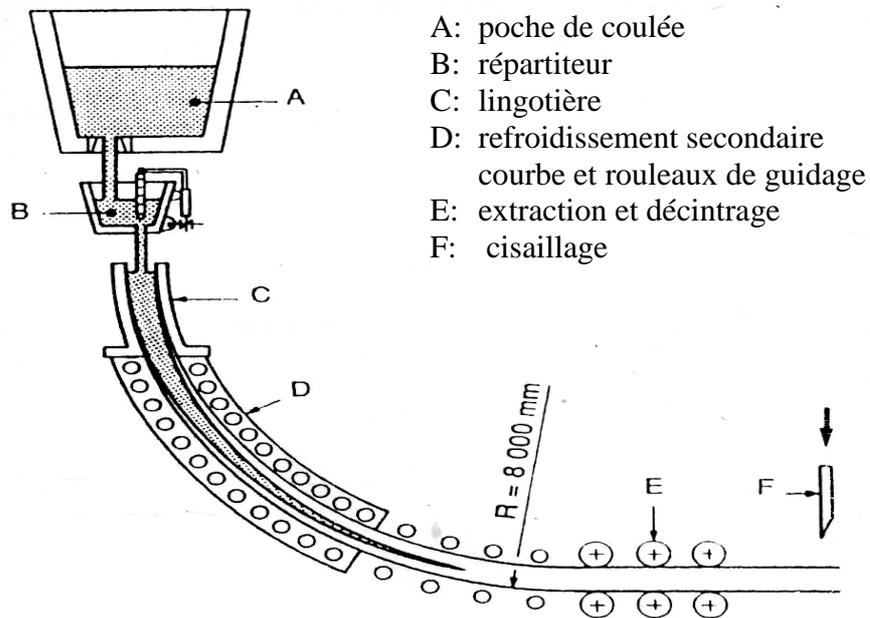


Fig. 2.12. Machine de coulée continue courbe

Actuellement, les machines courbes sont les plus utilisées dans l'industrie. Selon leur fonctionnement, on peut distinguer

- Machine verticale courbe : le produit est coulé et refroidi verticalement, puis découpé et évacué horizontalement lorsque la solidification est complète ;
- Machine courbe (Fig. 2.12) : le moule et les rouleaux de maintien sont arrangés sur un arc de même rayon et la ligne de coulée est redressé horizontalement à la fin de la solidification ;
- Machine verticale progressivement cintrée : le moule et une série de rouleaux de maintien sont arrangés verticalement et la ligne de coulée est progressivement cintrée dans la direction horizontale à la fin de la solidification

Vu le coût réduit des bâtiments de coulée courbes (taille inférieure), ces machines sont généralement utilisées pour la fabrication en série des produits conventionnels. Les machines verticales courbes et les machines verticales progressivement cintrées, qui combinent les avantages des machines verticales et des

machines courbes, sont employées surtout pour la coulée des plaques larges qui exigent une amélioration dans la qualité et la productivité.

2.4.2. Machines non traditionnelles

a. Machine horizontale

Dans ce type de machines le produit est coulé, solidifié, extrait, découpé et évacué horizontalement (Fig. 2.13). Elles sont employées dans la production des billettes à petite échelle puisque l'équipement et le coût des bâtiments sont comparativement bas.

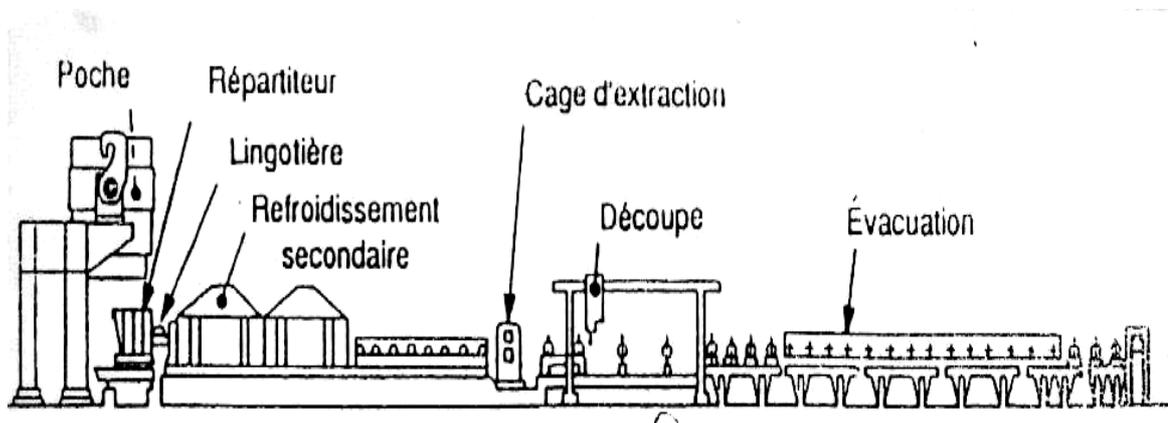


Fig. 2.13. Machine de coulée continue horizontale

b. Machine de coulée entre bandes (machine Hazelett)

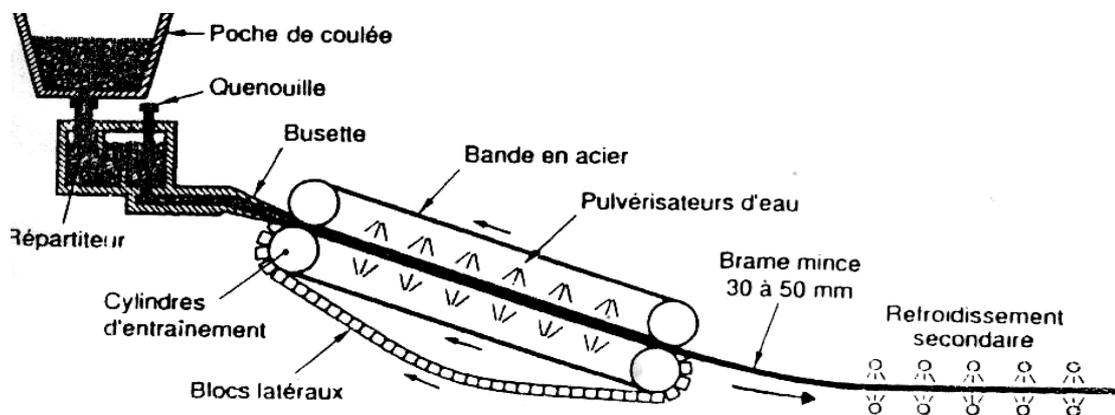


Fig. 2.14. Machine de coulée continue entre bandes

c. Machine de coulée entre cylindres

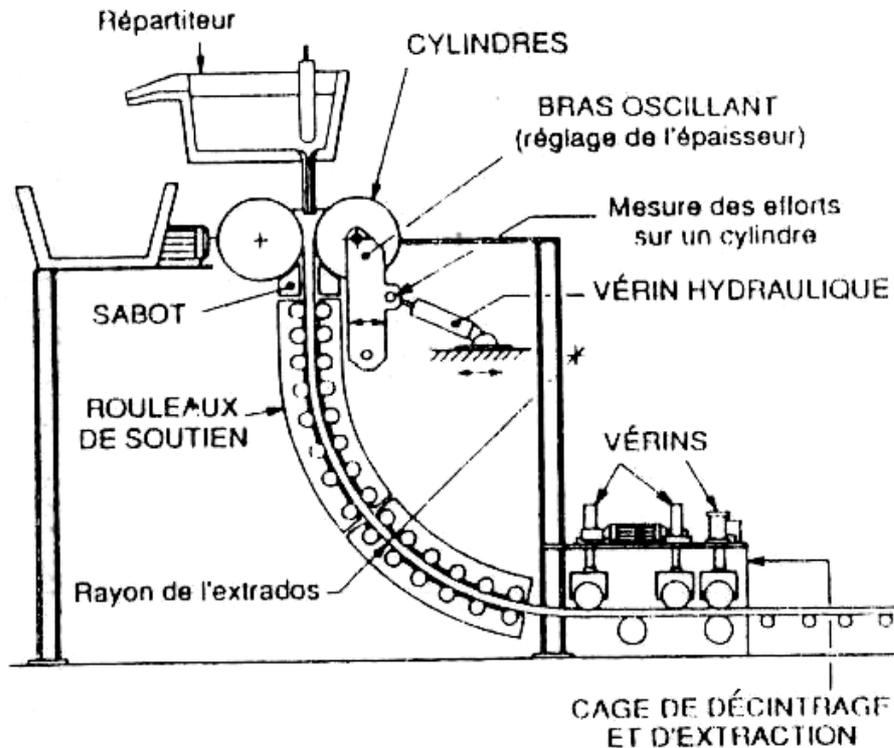


Fig. 2.15. Machine de coulée continue entre cylindres

Généralement, les machines entre bandes et entre cylindres sont utilisées pour la coulée des brames minces. Les vitesses de coulée sont de l'ordre de 4 à 5 m/min pour des épaisseurs de 75 mm, de 5 à 8 m/min pour des épaisseurs de 50 mm et de 8 à 15 m/min pour des épaisseurs de 25 mm. Pour les produits longs on préfère la coulée horizontale et la coulée sur roue.

d. Machine de coulée sur roue

Ce type de machine sert à la coulée des produits de qualité courante. Elle permet d'atteindre des vitesses élevées et d'envisager un laminage direct en ligne. Elle présente les avantages suivants :

- Economie d'énergie
- Faible encombrement
- Haute productivité.

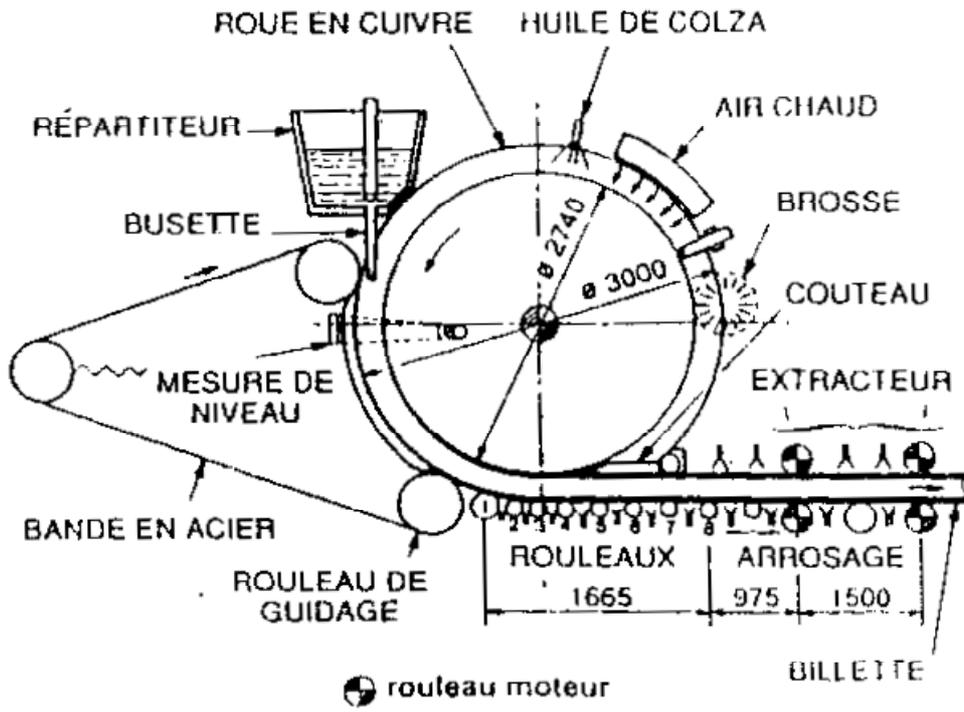
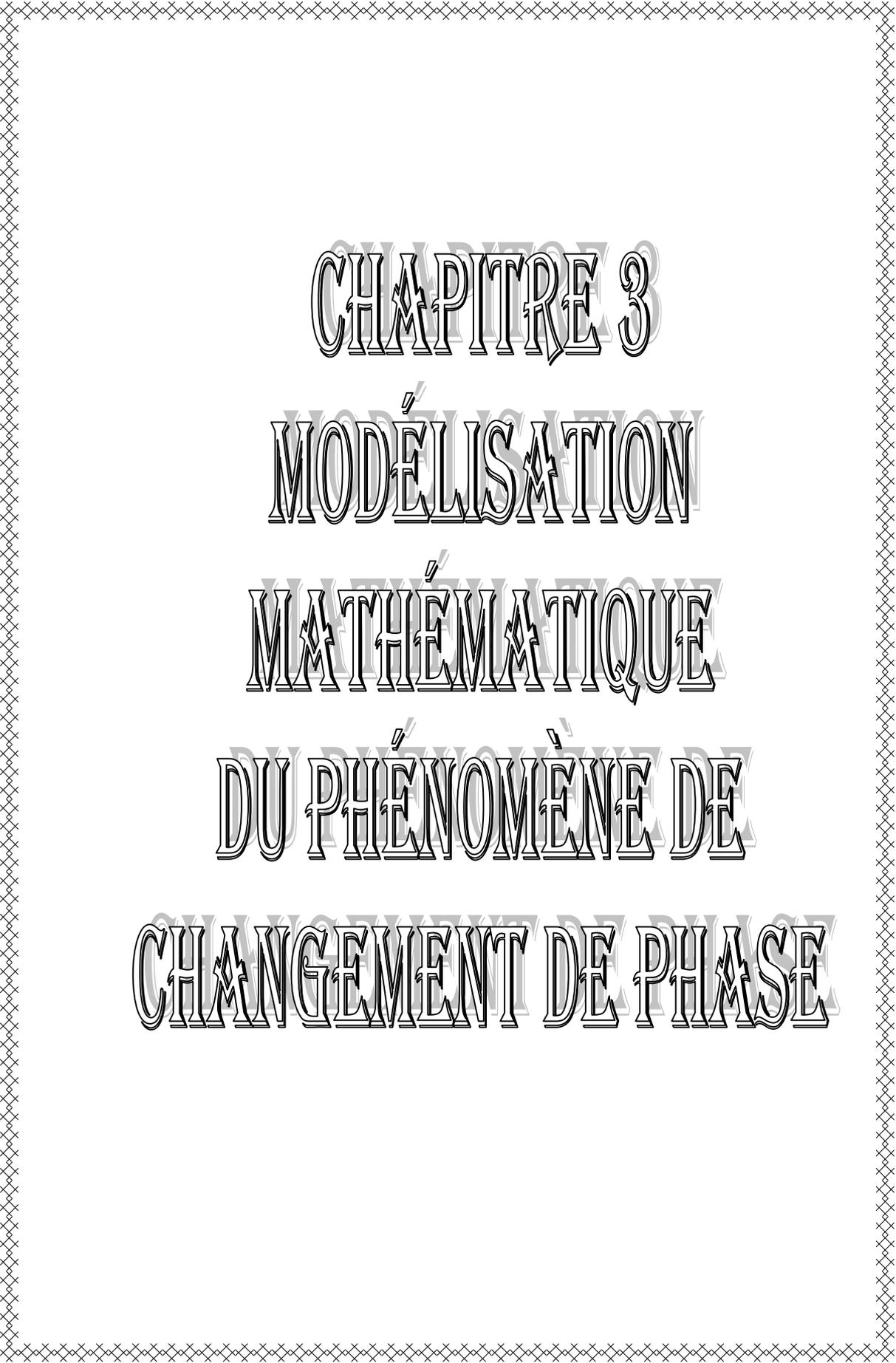


Fig. 2.16. Machine de coulée continue sur roue



CHAPITRE 3
MODÉLISATION
MATHÉMATIQUE
DU PHÉNOMÈNE DE
CHANGEMENT DE PHASE

La résolution des problèmes de transfert de chaleur avec changement de phase appartient aux problèmes dits à frontière mobile. La solution recherchée consiste à déterminer le champ de température dans les deux phases liquide et solide ainsi que la position de l'interface. La difficulté fait que la position de l'interface solide-liquide où est définie la condition de Stefan est elle-même une inconnue du problème.

Actuellement, il existe deux approches pour la modélisation mathématique des problèmes de changement de phase : Les schémas avec *maillage mobile* et les schémas avec *maillage fixe*.

3.1. Schémas avec maillage mobile

Supposons que la conduction est le seul mode de transfert de chaleur intervenant et que les propriétés physiques caractérisant le solide et le liquide sont constantes dans chaque phase et différentes.

Pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur avec changement de phase, deux équations différentielles de la conduction thermique sont posées : une dans la phase solide et l'autre dans la phase liquide. Dans le cas unidimensionnel, les deux équations s'écrivent [24, 25, 37] :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.1)$$

et

$$\rho_\ell c_\ell \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_\ell \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.2)$$

A l'interface solide-liquide, nous avons :

$$T_s [\xi(t), t] = T_\ell [\xi(t), t] = T_f \quad (3.3)$$

et la condition de Stefan

$$\lambda_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial x} - \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = \rho_s L_s \frac{d\xi}{dt} \quad (3.4)$$

où ξ désigne la position du front de solidification. La condition de Stefan (3.4) traduit la chute de l'enthalpie du système (dégagement de la chaleur latente L_s) à la température de fusion T_f .

Ces schémas numériques sont habituellement très complexes à mettre en œuvre. En effet, le front de solidification est à priori inconnu dont la position ne correspond pas forcément à un nœud ou à des arrêtes du maillage. Ce dernier est donc régénéré à chaque itération de façon à coïncider avec le front de solidification. Ces schémas sont mal adaptés aux problèmes avec présence de plusieurs fronts de solidification et pour les problèmes traitant la solidification des alliages.

3.2. Schémas avec maillage fixe

Dans ces schémas, le maillage reste fixe et les deux équations gouvernantes le transfert de chaleur dans la région liquide et la région solide sont résolues simultanément malgré la discontinuité du gradient de la température à l'interface. Le problème majeur avec ces schémas est la présence d'oscillations dans la solution autour de la région de changement de phase. De plus, ces schémas nécessitent souvent l'utilisation des algorithmes de correction de la solution pour ne pas manquer le dégagement de la chaleur latente. Par contre, ces schémas sont facilement applicables à des problèmes de changement de phase complexes de type industriel. Basant sur la modélisation du transfert de la chaleur latente, les schémas avec *maillage fixe* sont classés principalement en méthode de la *capacité effective* et en méthode *enthalpique*.

3.2.1. Méthode de la capacité effective

La méthode de la *capacité effective* introduit l'effet de la chaleur latente sur la capacité calorifique du système dans l'intervalle de changement de phase. Cette méthode est considérée la plus simple et la moins précise dans les méthodes à *maillage fixe*. En fait, l'équation de Stefan traduit l'augmentation de l'enthalpie par la chaleur latente à la température de solidification. Ainsi, l'enthalpie du système peut s'écrire [38]:

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T c(T) dT + L_s \eta(T - T_f) \quad (3.5.a)$$

avec

$$\eta(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (3.5.b)$$

où $T_{ref} < T_f$. La capacité effective $c_{eff}(T)$ peut être définie alors comme suit [38-39] :

$$c_{eff}(T) = \frac{dH(T)}{dT} = c(T) + L_s \delta(T - T_f) \quad (3.6.a)$$

avec

$$c(T) = \begin{cases} c_s(T) & \text{si } T < T_f \\ c_\ell(T) & \text{si } T > T_f \end{cases} \quad (3.6.b)$$

où $\delta(T - T_f)$ est la fonction de Dirac qui est infinie à $T = T_f$ et nulle ailleurs. Elle satisfait l'équation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(T - T_f) dT = 1 \quad (3.7)$$

En remplaçant dans les deux Eqs. (3.1) et (3.2), nous trouvons l'expression suivante [25, 38-40]:

$$\rho(T)c_{eff}(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.8.a)$$

avec

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_s(T) & \text{si } T < T_f \\ \lambda_\ell(T) & \text{si } T > T_f \end{cases} \quad (3.8.b)$$

Nous pouvons montrer que chaque solution de l'équation (3.8) dans les régions $T > T_f$ et $T < T_f$ sont séparées par une courbe unique $x = \xi(t)$ vérifiant la condition (3.4). En effet, considérons les deux intégrales I_1 et I_2 des membres gauche et droite de l'équation (3.8.a) dans un petit intervalle $(\xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon)$ symétrique et prenons la limite à $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \rho(T)c_{eff}(T)\frac{\partial T}{\partial t} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_{T(\xi - \varepsilon, t)}^{T(\xi + \varepsilon, t)} \rho(T)L_s \delta(T - T_f) \frac{\partial x}{\partial t} dT \right] \\ &= \rho(T)L_s \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} \right] dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\xi + \varepsilon} - \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\xi - \varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Puisque $I_1 = I_2$, la condition (3.4) peut être directement déduite. Cette conclusion est très importante pour la solution numérique, puisque uniquement l'équation (3.8) est considérée au lieu des équations couplées (3.1) à (3.4). Ceci implique également que la même formulation numérique dans un maillage fixe peut être utilisée dans les différentes régions (solide, liquide et pâteuse). Pour faciliter le calcul, la fonction de Dirac est remplacée par la fonction Delta $\delta(T - T_f, \Delta T)$ qui possède une valeur large mais finie dans un petit intervalle $2\Delta T$ au voisinage de T_f (Fig. 3.1) [25, 39].

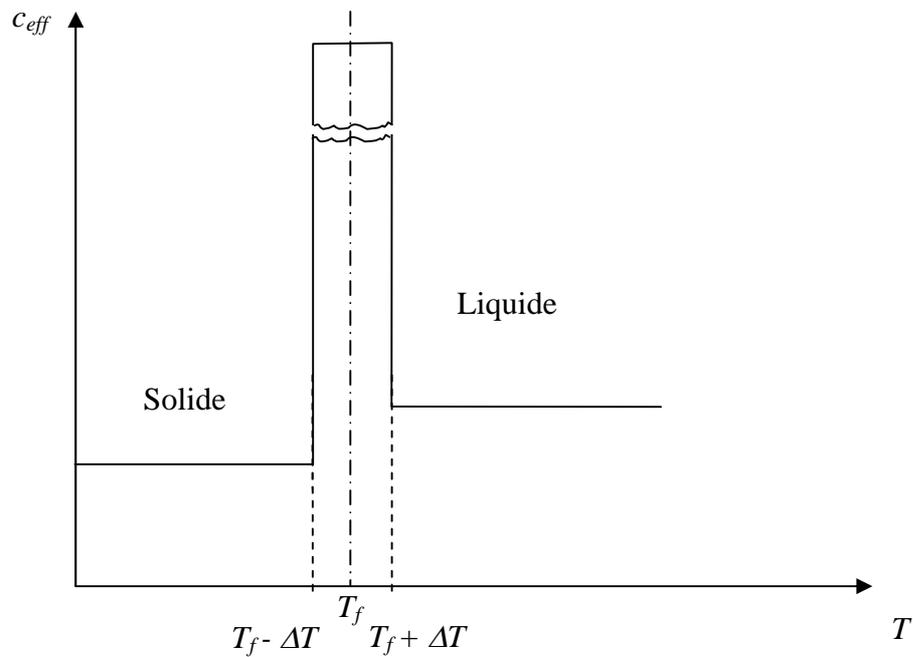


Fig. 3.1. Capacité calorifique incluant l'effet de la chaleur latente dans un petit intervalle $2\Delta T$ au voisinage de T_f

Ceci donne une approximation de la forme :

$$c_{eff}(T) = \begin{cases} c_s(T) & \text{si } T < T_f - \Delta T \\ c_\ell(T) & \text{si } T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (3.11)$$

et

$$\int_{T_f - \Delta T}^{T_f + \Delta T} c_{eff}(T) dT = L_s + \int_{T_f - \Delta T}^{T_f} c_s(T) dT + \int_{T_f}^{T_f + \Delta T} c_\ell(T) dT \quad (3.12)$$

De la même manière, la conductivité thermique peut être approximée par :

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_s(T) & T < T_f - \Delta T \\ \lambda_\ell(T) & T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (3.13)$$

Supposons que c_s , c_ℓ , λ_s et λ_ℓ ne dépendent pas de T , alors dans l'intervalle $T_f - \Delta T \leq T \leq T_f + \Delta T$, $c_{eff}(T)$ et $\lambda(T)$ peuvent être approximés par [25, 39-40] :

$$c_{eff}(T) = \frac{L_s}{2\Delta T} + \frac{c_s + c_\ell}{2} \quad (3.14)$$

et

$$\lambda(T) = \lambda_s + \frac{\lambda_\ell - \lambda_s}{2\Delta T} [T - (T_f - \Delta T)] \quad (3.15)$$

Les coefficients de l'équation (3.8) dépendent que de la température et non pas de la géométrie. L'extension au cas multidimensionnel est donc directe et conduit à la forme générale suivante :

$$\rho(T) c_{eff}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (3.16)$$

Souvent, la procédure numérique utilisant directement l'équation (3.16) semble être très sensible à la grandeur de l'intervalle de température $2\Delta T$ choisie. D'une part, la valeur de $2\Delta T$ doit être aussi petite que possible pour simuler les problèmes pratiques (surtout les métaux purs). D'autre part, une large valeur de $2\Delta T$ est désirable pour réduire la forte non linéarité introduite par l'effet de la chaleur latente $\frac{L_s}{2\Delta T}$.

3.2.2. Algorithme de Hsiao

Un algorithme de correction a été proposé par *Hsiao* [41] pour stabiliser le modèle de la *capacité calorifique effective*. Cette algorithme permet d'utiliser un maillage et un pas de temps relativement larges et de réduire l'effet de la grandeur de l'intervalle de changement de phase $2\Delta T$ sur la solution.

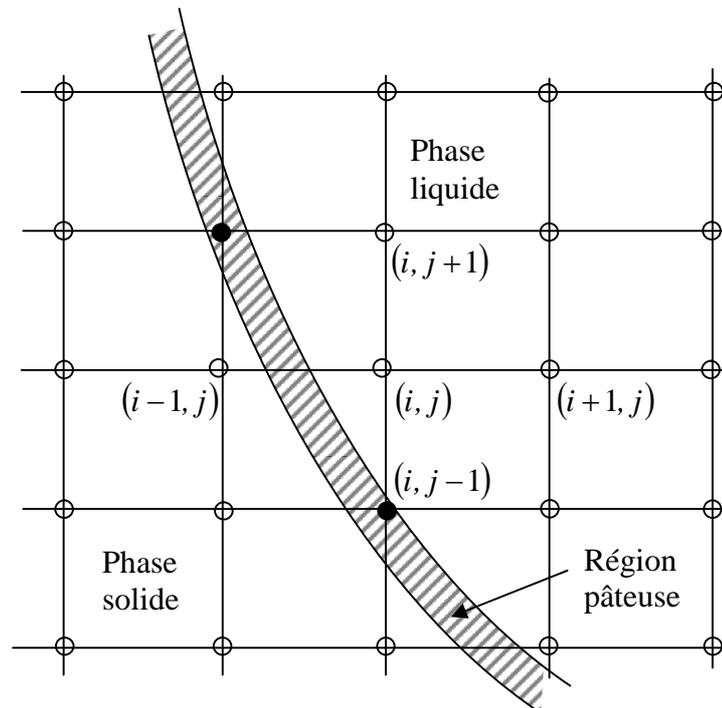


Fig. 3.2. Portion typique d'un maillage orthogonale montrant la position du front de solidification

Considérons une situation typique durant le processus bidimensionnel du changement de phase (Fig. 3.2) où uniquement deux nœuds (cercles pleins à l'intérieur de la zone hachuré) ont des températures comprises entre $T_f - \Delta T$ et $T_f + \Delta T$. En utilisant l'équation (3.16), ces deux nœuds sont capables d'introduire directement l'effet de la chaleur latente. Par contre, les nœuds voisins du front de solidification (cercles vides) utilisent la capacité calorifique appropriée : celle de la phase solide si la température nodale est inférieure à $T_f - \Delta T$ ou celle de la phase liquide si la température nodale est supérieure à $T_f + \Delta T$. Par conséquent, l'effet de la chaleur latente est assez mal introduit générant ainsi certaine instabilité dans la solution et une mauvaise précision. Pour surmonter cela, **Hsiao** propose l'algorithme correctif suivant : au lieu d'utiliser directement la température nodale dans l'équation (3.16) pour calculer la capacité calorifique correspondante au nœud, une capacité calorifique moyenne est utilisée. Cette dernière est tirée de la température au nœud (i, j) et des températures aux nœuds voisins.

$$c_{\text{éq}}(T_{i,j}) = \frac{1}{4} \left[c(T_{i,j}, T_{i-1,j}) + c(T_{i,j}, T_{i+1,j}) + c(T_{i,j}, T_{i,j-1}) + c(T_{i,j}, T_{i,j+1}) \right] \quad (3.17)$$

où $T_{i,j}$ désigne la température au nœud (i, j) et, par exemple, $c(T_{i,j}, T_{i,j-1})$ représente la capacité calorifique ajustée en fonction de l'état physique du matériau dans l'intervalle $T_{i,j}$ et $T_{i,j-1}$.

Pour montrer comment la capacité calorifique ajustée est calculée, prenons deux températures nodales T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$. La capacité calorifique ajustée $c(T_1, T_2)$ est déterminée comme suit :

- Si $T_2 < T_1 < T_f - \Delta T$ (phase solide)

$$c(T_1, T_2) = c_s \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \quad (3.18.a)$$

- Si $T_f + \Delta T < T_2 < T_1$ (phase liquide)

$$c(T_1, T_2) = c_\ell \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \quad (3.18.b)$$

- Si $T_2 < T_f - \Delta T$ et $T_f + \Delta T < T_1$

$$c(T_1, T_2) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[2\Delta T \left(\frac{L_s}{2\Delta T} + \frac{c_s + c_\ell}{2} \right) + c_s \left(\frac{T_2 + T_f - \Delta T}{2} \right) \right. \\ \left. (T_f - \Delta T - T_2) + c_\ell \left(\frac{T_1 + T_f + \Delta T}{2} \right) (T_1 - T_f - \Delta T) \right] \quad (3.18.c)$$

- Si $T_f - \Delta T < T_2 < T_1 < T_f + \Delta T$

$$c(T_1, T_2) = \frac{L_s}{2\Delta T} + \frac{c_s + c_\ell}{2} \quad (3.18.d)$$

- Si $T_2 < T_f - \Delta T < T_1 < T_f + \Delta T$

$$c(T_1, T_2) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[\left(\frac{L_s}{2\Delta T} + \frac{c_s + c_\ell}{2} \right) (T_1 - T_f - \Delta T) \right. \\ \left. + c_s \left(\frac{T_2 + T_f + \Delta T}{2} \right) (T_f - \Delta T - T_2) \right] \quad (3.18.e)$$

- Si $T_f - \Delta T < T_2 < T_f + \Delta T < T_1$

$$c(T_1, T_2) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[\left(\frac{L_s}{2\Delta T} + \frac{c_s + c_\ell}{2} \right) (T_f + \Delta T - T_2) \right. \\ \left. + c_\ell \left(\frac{T_1 + T_f + \Delta T}{2} \right) (T_1 - T_f - \Delta T) \right] \quad (3.18.f)$$

3.2.3. Méthode enthalpique

La méthode *enthalpique* traite l'enthalpie comme variable dépendante de la température et construit le flux de la chaleur latente en utilisant l'enthalpie du système. Ce modèle est considéré comme le plus efficace et le plus précis des méthodes avec *maillage fixe*. Par contre, la solution présente souvent des oscillations à l'interface solide-liquide qui réduit la précision de la méthode.

La forme enthalpique de l'équation de la conduction thermique est formulée mathématiquement dans le cas unidimensionnel comme suit :

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.19)$$

Durant la solidification d'un métal pur (Fig. 3.3), nous remarquons que sa température descend progressivement de T_ℓ à T_f suivant le palier (a), puis se stabilise pendant le changement de phase à la température T_f suivant le palier (b). Une fois la solidification est complète, le métal continue à se refroidir et la température passe de T_f à T_s suivant le palier (c).

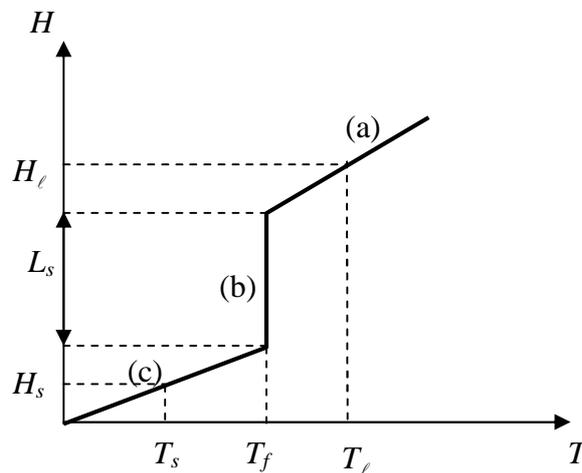


Fig. 3.3. Courbe de la solidification d'un métal pur

Alors, pour qu'un métal pur soit complètement solidifié il faut enlever la quantité d'énergie suivant [42] :

$$\Delta H = c_\ell(T_\ell - T_f) + L_s + c_s(T_\ell - T_f) \quad (3.20)$$

L'enthalpie totale d'un métal pur s'écrit donc :

$$\Delta H = \begin{cases} c_s \Delta T & \text{pour } T < T_f \\ c_\ell \Delta T + L_s & \text{pour } T > T_f \end{cases} \quad (3.21)$$

Pour un alliage binaire formé d'un métal A et d'un métal B (dont les températures de fusion sont respectivement T_A et T_B), le palier (b) prend une allure exponentielle. C'est le métal qui a la température de fusion supérieure qui se solidifie le premier, en entraînant avec lui quelques atomes de l'autre métal. La solidification d'un alliage binaire dépend de la composition des deux métaux et de la température de fusion de chaque métal.

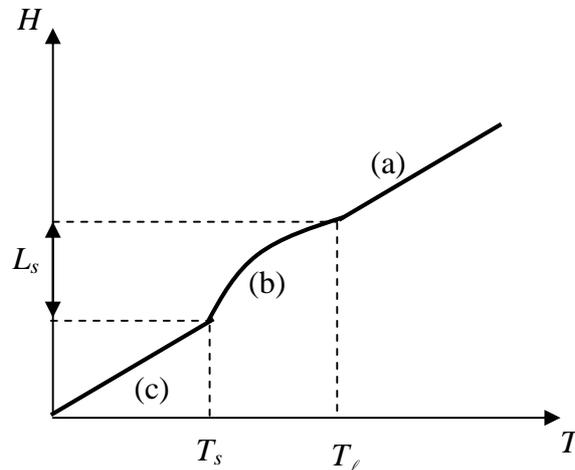


Fig. 3.4. Courbe de solidification d'un alliage binaire

Pour un alliage binaire, où la solidification prend place dans un intervalle de solidification $(T_\ell - T_s)$, l'enthalpie totale est donnée par :

$$\Delta H = \begin{cases} c_s \Delta T & \text{pour } T \leq T_s \\ c \Delta T + f_\ell \cdot L_s & \text{pour } T_s \leq T \leq T_\ell \\ c_\ell \Delta T + L_s & \text{pour } T \geq T_\ell \end{cases} \quad (3.22)$$

avec f_ℓ désigne la fraction liquide dont la valeur est comprise entre $0 \leq f_\ell \leq 1$.

L'enthalpie du système prend alors la forme générale suivante [43-46] :

$$H = cT + f_\ell L_s \quad (3.23)$$

avec $f_\ell = 1$ dans la région liquide, $f_\ell = 0$ dans la région solide et $0 \leq f_\ell \leq 1$ dans la région pâteuse où coexistent les deux phases. Dans la littérature, on suppose très souvent que la chaleur latente varie linéairement avec la température comme suit [10, 27, 40, 45-46] :

$$f_\ell = \begin{cases} 1 & T > T_\ell \\ \frac{T - T_s}{T_\ell - T_s} & T_s \leq T \leq T_\ell \\ 0 & T < T_s \end{cases} \quad (3.24)$$

Après réarrangement nous obtenons :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho L_s \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial t} \right) \quad (3.25)$$

L'extension au cas multidimensionnel est directe et conduit à la forme générale suivante :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho L_s \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial t} \right) \quad (3.26)$$

CHAPITRE 4

DISCRÉTISATION NUMÉRIQUE

PAR LA MÉTHODE DES

VOLUMES FINIS

4.1. Introduction

La méthode des volumes finis est une des techniques numériques les plus populaires en sciences de l'ingénieur. Elle permet d'approximer les équations aux dérivées partielles qui proviennent spécialement des lois de la conservation physique. A la différence des méthodes des éléments finis [47-48] ou des différences finies [9, 41] qui relèvent d'une approche plus mathématique que physique, la discrétisation en volumes finis est basée sur l'écriture des bilans. L'idée de base consiste à discrétiser sur chaque maille, appelée volume de contrôle CV , la forme intégrale de l'équation à résoudre au lieu de sa forme différentielle. La technique des volumes finis a été utilisée dans beaucoup d'applications comme une approche systématique pour une discrétisation efficace des équations modélisant les écoulements de fluides. Sa propriété de conservation, qui provient de l'approximation de la forme intégrale des lois de conservation, est très importante pour la précision des simulations de processus physiques complexes sur des maillages relativement grossiers. Actuellement, la méthode des volumes finis est très largement utilisée dans l'industrie aérospatiale pour la dynamique des gaz transsoniques, où nous pouvons calculer l'écoulement autour d'un avion complet.

4.2. Equations gouvernantes

Les équations de la conservation peuvent se généraliser sous une seule forme d'équation aux dérivées partielles. La reconnaissance d'une forme commune des équations gouvernantes représente une commodité majeure pour leur formulation numérique. Si nous notons toute variable générale mesurée par le symbole ϕ , l'équation différentielle générale en régime instationnaire s'écrit [49-51] :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{U}\phi) = \text{div}(\Gamma_{\phi} \text{grad}\phi) + S_{\phi} \quad (4.1)$$

Les trois termes de l'équation (3.1) représentent :

- $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$: Terme transitoire ;

- $\text{div}(\rho \mathbf{U}\phi)$: Terme convectif ;
- $\text{div}(\Gamma_\phi \text{grad}\phi)$: Terme diffusif ;
- S_ϕ : Terme source.

Γ_ϕ désigne le coefficient de diffusion et \mathbf{U} le vecteur vitesse. Γ_ϕ et S_ϕ sont des particularités spécifiques de ϕ . Le tableau 4.1 regroupe les différentes équations de transport appropriées.

En coordonnées cylindriques, l'équation (4.1) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r u\phi) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v\phi) = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + rS_\phi \quad (4.2)$$

Tableau 4.1. Différentes désignations de ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ

Type d'équation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Equation de continuité	1	0	0
Equation de la quantité de mouvement suivant z	u	μ	$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \beta(T - T_{ref})$
Equation de la quantité de mouvement suivant r	v		$-\frac{\partial P}{\partial r}$
Equation d'énergie	H ou T	λ	S_H ou S_T

a. Coefficient de diffusion

C'est une représentation générale des propriétés de fluide (telle que la viscosité où la conductivité) qui, conjointement avec le gradient de la variable appropriée, aboutissent au flux de diffusion (tel que les contraintes visqueuses ou le flux de chaleur).

b. Terme source

Le terme source est généralement utilisé pour représenter les mécanismes de génération (ou de destruction) de ϕ ou comme dépotoir général (duming ground). Par exemple, dans le cas de l'équation d'impulsion le terme source englobe le gradient de pression (représentant les fluctuations des forces de volume) et la contribution des termes de contrainte visqueuse qui ne peuvent pas être logés dans le terme de diffusion.

A cause de cette flexibilité, chaque portion du programme écrite pour la résolution de l'équation (4.1) peut être continuellement employée pour les différentes désignations de ϕ .

4.3. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis (*FVM*) consiste à transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques faciles à résoudre. Pour cela quatre étapes sont requises :

1. Effectuer un maillage du domaine d'étude : un maillage est une succession de volume du contrôle lié entre eux avec des nœuds placés au centre de chaque volume.
2. Intégrer les équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle.
3. Choix du schéma utilisé : choisir le profil de variation de ϕ entre deux nœuds adjacents pour son évaluation à l'interface.
4. Etablir n équations algébriques à résoudre pour n nœuds.
5. Utiliser une des méthodes de résolution des équations algébriques (exemple : *TDMA*) pour résoudre le système d'équation.

4.3.1. Maillage

Nous générons un maillage en divisant le domaine de calcul avec un nombre fini de volumes de contrôle (Fig. 4.1). L'opération consiste à définir un certain nombre de nœuds en traçant une grille sur le domaine (traits continus). Les interfaces sont placées exactement au milieu de chaque deux nœuds consécutifs (traits discontinus). Les sous

domaines obtenus représentent les volumes de contrôle avec quatre nœuds voisins par les quatre faces du volume de contrôle. La discrétisation de l'équation de mouvement sur un volume de contrôle fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces (U_e , U_w , U_n , U_s). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations). D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut entraîner des erreurs importantes du fait qu'une répartition de pression ou de vitesse en *damier* est vue comme un champ uniforme.

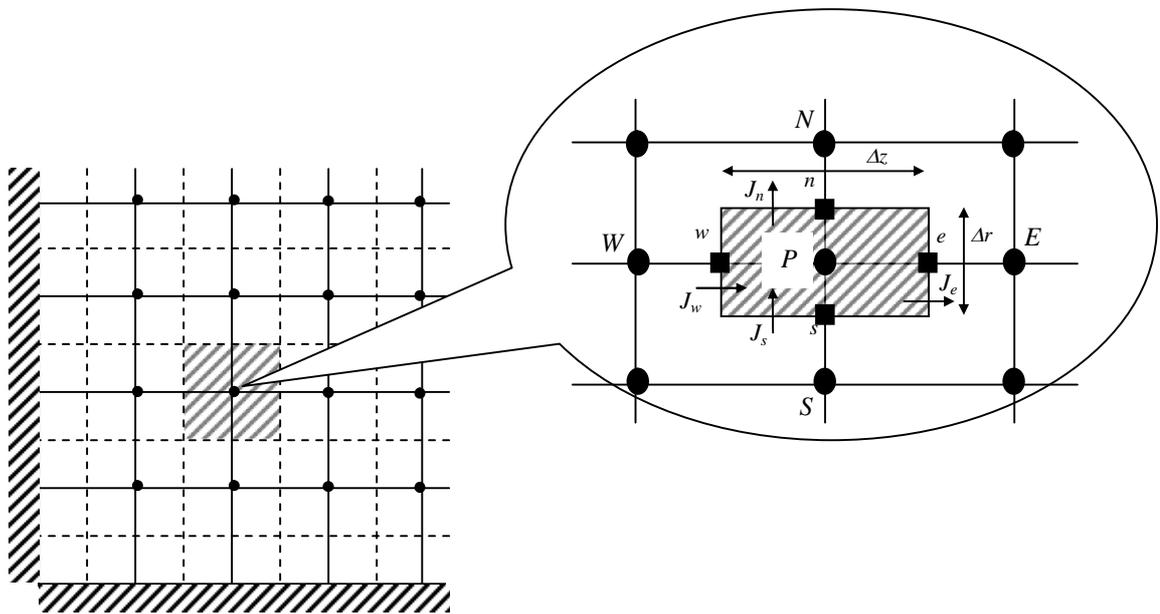


Fig. 4.1. Maillage et volume de contrôle.

Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées (*staggered grid*). Une grille principale est construite pour le calcul de la pression, la température (et/ou la concentration). Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut sont utilisées pour le calcul des vitesses (axiale u et radiale v), respectivement (Fig. 4.2).

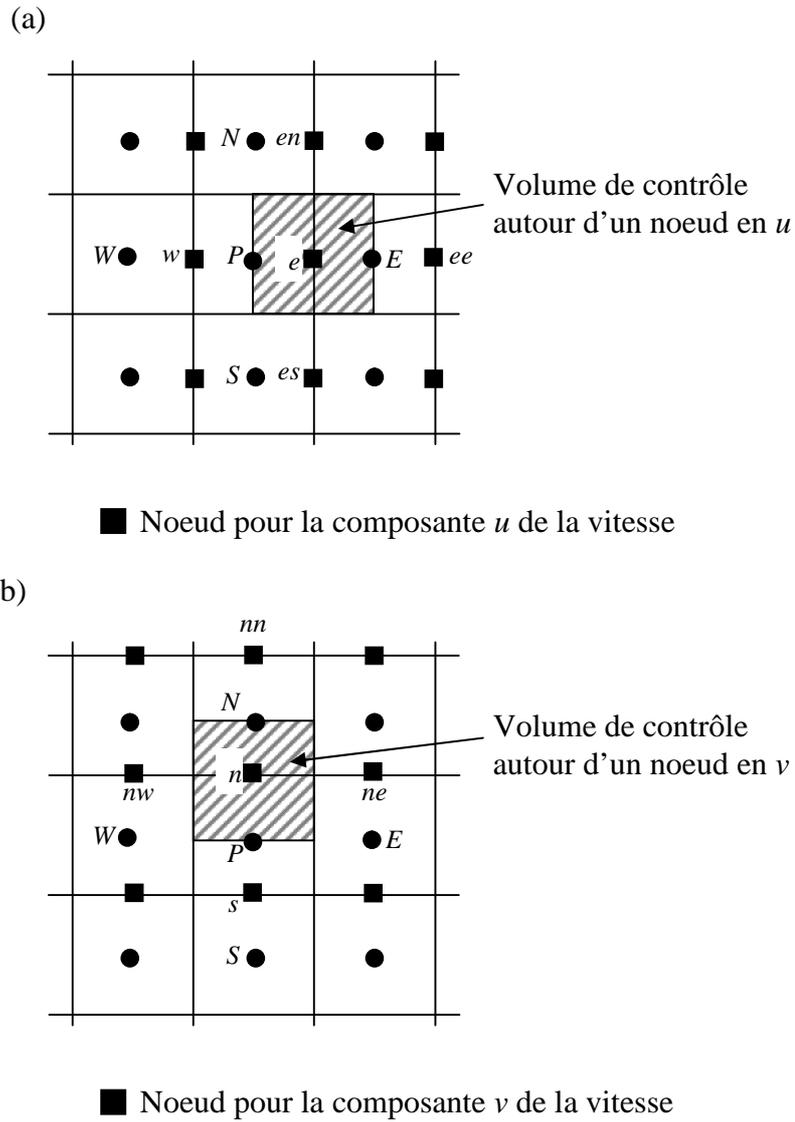


Fig. 4.2. Maillages décalés (a) UCV et (b) VCV

4.3.2. Discrétisation générale de l'équation de transport

La forme intégrée de l'équation du transport sur le volume de contrôle central Ω (Fig. 4.1) est donnée par l'expression suivante [49-50] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho r \phi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\rho r u \phi) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v \phi) - \frac{\partial}{\partial z} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] d\Omega = \iint_{\Omega} r S_{\phi} \, d\Omega \quad (4.3)$$

Le théorème d'Ostrogradski permet de remplacer l'intégral volume en intégrale de surface. L'équation devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho r \phi \, d\Omega + J_e - J_w + J_n - J_s = \iint_v r S_{\phi} \, d\Omega \quad (4.4)$$

avec

$$J_e = \int_s^n \left(\rho r u \phi - \Gamma_{\phi} r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dr = (\rho r u)_e \Delta r \phi_e - \frac{(r \Gamma_{\phi})_e}{\Delta z} \Delta r (\phi_E - \phi_P) \quad (4.5.a)$$

$$J_n = \int_w^e \left(\rho r v \phi - \Gamma_{\phi} r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dz = (\rho r v)_n \Delta z \phi_n - \frac{(r \Gamma_{\phi})_n}{\Delta r} \Delta z (\phi_N - \phi_P) \quad (4.5.b)$$

Les quantités J_w et J_s sont exprimées de manière analogue. Les indices e , w , n et s indiquent que la quantité correspondante est évaluée respectivement à la face du volume de contrôle est, ouest, nord et sud. Pour des raisons de simplicité, nous représentons le flux convectif par la variable F et le flux diffusif par la variable D . Elles seront définies comme suit

$$F_e = (\rho r u)_e \Delta r ; D_e = \frac{(r \Gamma_{\phi})_e}{\Delta z} \Delta r \quad (4.6.a)$$

$$F_n = (\rho r v)_n \Delta z ; D_n = \frac{(r \Gamma_{\phi})_n}{\Delta r} \Delta z \quad (4.6.b)$$

Le débit massique, la diffusion et les dimensions géométriques sont connues ou approximées par une interpolation linéaire. Pour l'évaluation de J_e par exemple, la grande difficulté réside dans l'approximation de ϕ_e . La solution exacte de l'équation (4.2) a un profil exponentiel. Ce profil peut être utilisé pour approximer la quantité J_e comme suit [49, 52] :

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(Pe_e) - 1} \right) \quad (4.7)$$

Pe_e désigne le nombre de Peclet à l'interface e défini par

$$Pe_e = \frac{(\rho u)_e}{(\Gamma_\phi)_e} \Delta z = \frac{F_e}{D_e} \quad (4.8)$$

Le profil exponentiel est rarement utilisé. En effet, le calcul exponentiel est assez coûteux et cette solution n'est pas exacte dans le cas multidimensionnel. Cependant, plusieurs schémas ont été proposés en vérifiant la propriété de transportivité. Cette propriété est liée à la nature du transport traduit par le nombre de Peclet (rapport entre le coefficient de convection et celui de diffusion). Les faibles valeurs du nombre de Peclet reflètent un transport dominé par la diffusion alors que l'inverse caractérise un transport dominé par la convection. Un bon schéma de convection doit refléter cette propriété. La formulation générale des schémas approximant J_e est donnée par [49] :

$$J_e = F_e \phi_P + [D_e A(|Pe_e|) + \|-F_e, 0\|](\phi_P - \phi_E) \quad (4.9)$$

$\|a, b\|$ désigne la plus grande valeur de a et b .

Pour les différents schémas, l'expression de la fonction $A(|Pe|)$ est donnée dans le tableau 4.2 et son évolution est représentée graphiquement dans la Fig 4.3

Tableau 4.2. Expression de la fonction $A(Pe)$ pour les différents schémas	
Schémas	Expression de $A(Pe)$
Différences centrales	$1 - 0,5 Pe $
Différences avant	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0,5 Pe)\ $
Puissance (Power law)	$\ 0, (1 - 0,1 Pe)^5\ $
Exponentiel (exact)	$\frac{ Pe }{\exp(Pe) - 1}$

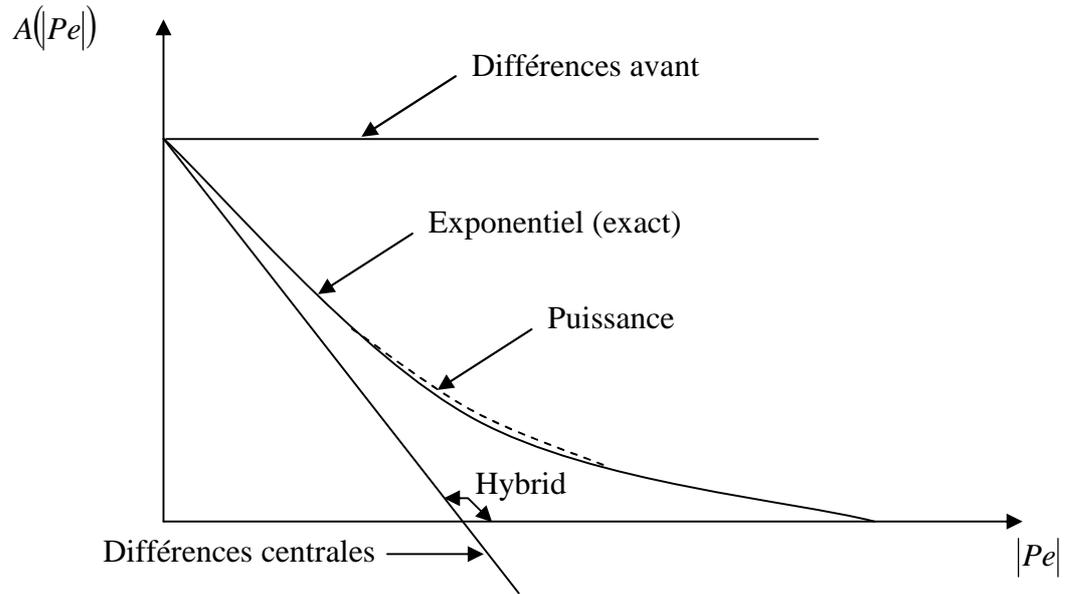


Fig. 4.3. Evolution de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas

La Fig. 4.3 montre clairement que le schéma de puissance fournit la meilleure approximation. L'approximation de J_w , J_n et J_s est obtenue de la même manière.

Un schéma implicite de premier ordre est utilisé pour approximer le terme transitoire comme suit [49-50] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho r \phi \, d\Omega = \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} (\phi_p - \phi_p^{anc}) \quad (4.10)$$

ϕ_p^{anc} désigne la valeur de ϕ_p au temps précédent. Après réarrangement, la forme générale discrétisée de l'équation (4.3) est donnée par :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} \phi_p^{anc} + \iint_{\nu} r S_{\phi} \, d\Omega \quad (4.11)$$

avec

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \| -F_e, 0 \| \quad (4.12.a)$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \| F_w, 0 \| \quad (4.12.b)$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \| -F_n, 0 \| \quad (4.12.c)$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \| F_s, 0 \| \quad (4.12.d)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} + (F_e - F_w + F_n - F_w) \quad (4.12.e)$$

Le terme $(F_e - F_w + F_n - F_w)$ représente l'accumulation massique totale dans le volume de contrôle qui s'annule lorsque l'équation de continuité est satisfaite. Le terme source $\iint_{\nu} r S_{\phi} d\Omega$ est généralement représenté par une forme linéaire [49-50].

$$S_{\phi} = S_P^{\phi} \phi_P + S_u^{\phi} \quad (4.13)$$

S_P^{ϕ} est le coefficient de ϕ_P et S_u^{ϕ} la partie qui ne dépend pas de ϕ_P . La forme finale de l'équation discrétisée devient alors [10, 45, 49-50]:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_{\phi} \quad (4.14)$$

ou sous la forme condensée classique :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_{\phi} \quad (4.15)$$

avec

$$b_{\phi} = r_P S_u^{\phi} \Delta z \Delta r + \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} \phi_P^{anc} \quad (4.16.a)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} - r_p S_p^\phi \Delta z \Delta r \quad (4.16.b)$$

nb désigne les nœuds voisins du nœud P .

4.3.3. Particularité de la discrétisation des équations de la quantité de mouvement

La forme générale de l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial (\rho r u)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho r v)}{\partial r} = 0 \quad (4.17)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle central donne

$$[(\rho r u)_e - (\rho r u)_w] \Delta r + [(\rho r v)_n - (\rho r v)_s] \Delta z = 0 \quad (4.18)$$

ou bien

$$(F_e - F_w + F_n - F_s) = 0 \quad (4.19)$$

Pour la résolution des équations de la quantité de mouvement, ϕ sera remplacée par les composantes de la vitesse. Alors, en utilisant un maillage décalé la forme discrétisée des équations de la quantité de mouvement sur les deux maillages (UCV pour u et VCV pour v) donne respectivement :

$$\begin{cases} a_e u_e = a_{ee} u_{ee} + a_{ew} u_{ew} + a_{en} u_{en} + a_{es} u_{es} + b_u + (P_P - P_E) (r_e \Delta r) \\ a_n v_n = a_{ne} v_{ne} + a_{nw} v_{nw} + a_{nn} v_{nn} + a_{ns} v_{ns} + b_v + (P_P - P_N) (r_n \Delta z) \end{cases} \quad (4.20)$$

Ceci s'écrit aussi sous la forme condensée classique :

$$\begin{cases} a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b_u + (P_P - P_E) A_e \\ a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b_v + (P_P - P_N) A_n \end{cases} \quad (4.21)$$

avec

$$A_e = r_e \Delta r ; A_n = r_n \Delta z \quad (4.22)$$

a. Algorithme de correction Vitesse-Pression

Puisqu'il n'existe aucune équation qui peut donner explicitement le champ de pression, la solution des équations de la quantité de mouvement ne peut pas être obtenue directement à partir de l'Eq. (4.21). Cependant, la pression est influencée par l'équation de continuité qui impose une condition de compatibilité avec u et v . Nous pouvons alors utiliser une méthode indirecte pour la détermination du champ de pression. Pour remédier à ce problème, plusieurs algorithmes ont été proposés tel que l'algorithme *SIMPLE* (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations).

Principe de l'algorithme SIMPLE [49, 53]

A partir d'un champ de pression estimé P^* (au départ ou à l'itération précédente), le champ des vitesses est calculé à l'aide des Eqs. (4.21) comme suit :

$$\begin{cases} a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u + (P_P^* - P_E^*) A_e \\ a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v + (P_P^* - P_N^*) A_n \end{cases} \quad (4.23)$$

La pression est ensuite corrigée d'une quantité P' qui induit une correction sur les vitesses u' et v' :

$$P = P^* + P' \quad (4.24.a)$$

$$u = u^* + u' \quad (4.24.b)$$

$$v = v^* + v' \quad (4.24.c)$$

Les corrections sur les vitesses se déduisent facilement en soustrayant membre à membre le système (4.21) du système (4.23). Cela aboutit à:

$$\begin{cases} a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + (P_P' - P_E') A_e \\ a_n v_n' = \sum a_{nb} v_{nb}' + (P_P' - P_N') A_n \end{cases} \quad (4.25)$$

L'hypothèse de l'algorithme **SIMPLE** consiste en outre à négliger les sommes dans les équations précédentes (ces termes sont nuls si la solution correcte est obtenue) :

$$\begin{cases} a_e u'_e = (P'_P - P'_E) A_e \\ a_n v'_n = (P'_P - P'_N) A_n \end{cases} \quad (4.26)$$

Des expressions similaires sont obtenues pour u_w et v_s . Ces expressions sont appelées formules de correction des vitesses qui s'écrivent aussi sous la forme :

$$\begin{cases} u_e = u_e^* + \frac{(P'_P - P'_E) A_e}{a_e} \\ v_n = v_n^* + \frac{(P'_P - P'_N) A_n}{a_n} \end{cases} \quad (4.27)$$

Ainsi, les corrections sur les vitesses sont déduites explicitement à partir de la correction de pression qui est déterminée à partir de l'équation de continuité discrétisée. En remplaçant le système (4.27) dans l'équation de continuité (4.18), nous aurons

$$a_p P'_p = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (4.28)$$

avec

$$a_E = \left(\frac{\rho A}{a} \right)_e \Delta r \quad (4.29.a)$$

$$a_W = \left(\frac{\rho A}{a} \right)_w \Delta r \quad (4.29.b)$$

$$a_N = \left(\frac{\rho A}{a} \right)_n \Delta z \quad (4.29.c)$$

$$a_S = \left(\frac{\rho A}{a} \right)_s \Delta z \quad (4.29.d)$$

$$\left[(\rho ru^*)_e - (\rho ru^*)_w \right] \Delta r + \left[(\rho rv^*)_n - (\rho rv^*)_s \right] \Delta z = 0 \quad (4.29.e)$$

L'équation (4.29.e) est appelée équation de correction de la pression.

L'algorithme *SIMPLE* se résume finalement aux étapes suivantes :

1. estimer le champ de pression P^*
2. Résoudre le système (4.23) pour obtenir u^* et v^* ;
3. Résoudre l'équation (4.28) pour obtenir P' ;
4. Calculer P à partir de l'équation (4.24.a) ;
5. Calculer u et v à partir du système (4.27) ;
6. Résoudre l'équation discrétisée (4.15) en remplaçant ϕ par T ;
7. traiter la pression corrigée P comme une nouvelle estimation de la pression P^* , retourner à l'étape 2 et répéter toute la procédure jusqu'à obtenir la solution convergée.

4.4. La sous-relaxation

Vu la forte non linéarité des équations algébriques obtenues (surtout pour les équations de la quantité de mouvement), il est souvent nécessaire de réduire la convergence de la variable à chaque itération. Cette opération est appelée sous-relaxation. Nous pouvons écrire les équations discrétisées sous la forme suivante :

$$\phi_P = \phi_P^* + \left[\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b_\phi}{a_P} - \phi_P^* \right] \quad (4.30)$$

ϕ_P^* représente les valeurs de ϕ_P à l'itération précédente.

Dans l'Eq. (4.30), le terme entre crochets traduit le changement de ϕ_P durant l'itération en cours. Pour réduire ce changement, un facteur de sous-relaxation (dont la valeur est comprise entre 0 et 1) est introduit de la manière suivante [49, 51]:

$$\phi_P = \phi_P^* + \omega \left[\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b_\phi}{a_P} - \phi_P^* \right] \quad (4.31)$$

où

$$\frac{a_P}{\omega} \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_\phi + (1 + \omega) \frac{a_P}{\omega} \phi_P^* \quad (4.32)$$

Le choix de la valeur ω introduit le type de relaxation désirée :

- Si ω est proche de 0, les valeurs de ϕ changent très doucement ;
- Si $\omega = 1$, aucune sous-relaxation n'est introduite (utilisée souvent pour le calcul de la température T) ;
- Si $\omega > 1$, les valeurs de ϕ changent très rapidement (il s'agit de la sur-relaxation) ;

4.5. Résolution des équations algébriques [49]

Dans le cas bidimensionnel, la solution des équations discrétisées non linéaires peut être obtenue par la méthode itérative ligne par ligne. Elle consiste à combiner la méthode directe **TDMA** (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*) pour le cas unidimensionnel et la méthode itérative de **Gauss Seidel**. La méthode consiste à :

1. Fixer une ligne du maillage (dans la direction r par exemple) ;
2. Supposer les valeurs de ϕ connues le long des lignes voisines et appartenant à l'autre direction (c-à-d z) à partir de leurs *dernières* valeurs ;
3. Calculer les ϕ au long de la ligne choisie par la méthode **TDMA** ;
4. Suivre cette procédure sur toutes les lignes de la direction choisie (r) ;
5. Répéter la procédure pour les lignes de l'autre direction (z).

L'utilisation de la méthode de Gauss Seidel dans la direction radiale donne

$$a_p \phi_p = a_N \phi_N + a_S \phi_S + d \quad (4.33.a)$$

$$d = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b_\phi \quad (4.33.b)$$

Ou de manière générale

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (4.34.a)$$

$$d_i = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b_\phi \quad (4.34.b)$$

L'Eq. (4.34.a) est résolue par la méthode **TDMA** dont le processus de calcul peut être donné par une formule de récurrence de la forme :

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (4.35.a)$$

avec

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (4.35.b)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i \phi_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (4.35.c)$$

CHAPITRE 5

VALIDATION EXPERIMENTAL

DU MODÈLE NUMÉRIQUE

5.1. Position du problème

5.1.1 Modèle physique

Pour valider le modèle numérique élaboré, une étude expérimentale de la coulée simple (moulage) des lingots cylindriques en zinc pur a été menée au sein du laboratoire de métallurgie, département de mécanique, faculté des sciences de l'ingénieur de Tlemcen.

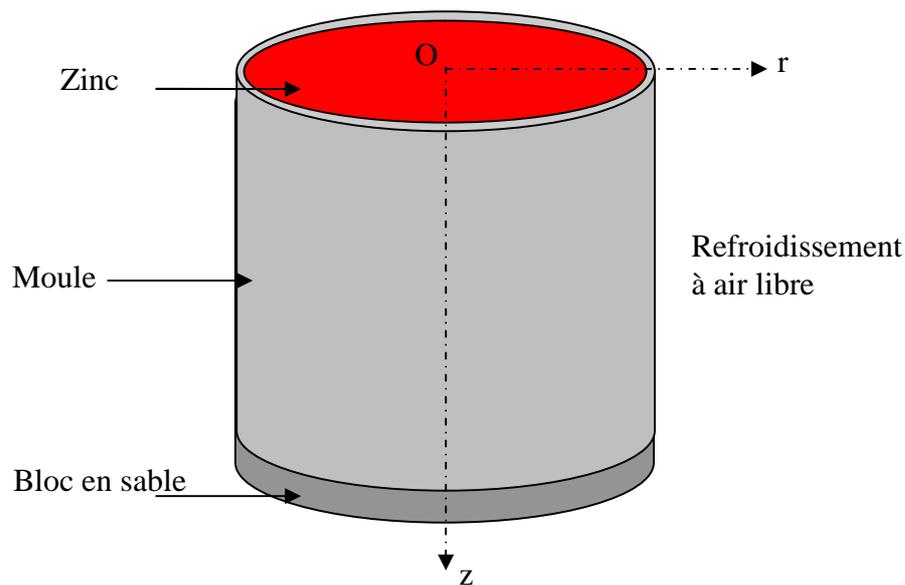


Fig. 5.1. Coulée simple des lingots de zinc

La Fig. 5.1 montre schématiquement le processus de moulage des lingots cylindriques en zinc pur. Le zinc liquide à haute température (750 K) est versé dans un moule creux de faible épaisseur, dont la paroi extérieure est exposée à un refroidissement à air libre. Le moule est ouvert par le haut et posé sur un bloc en sable. Par conséquent, le zinc est supposé isolé par le bas et exposé à un refroidissement à air libre par le haut. Grâce à l'extraction de la chaleur, une enveloppe solide commence à se former à partir du haut et de la surface extérieure pour se développer progressivement dans le temps jusqu'à la complète solidification. Pour mesurer les températures en fonction du temps, deux thermocouples sont plongés à une profondeur de 60 mm et placés, respectivement, au centre et à la surface (Fig. 5.2).

Vu la symétrie axiale, le système étudié devient bidimensionnel. Pour tenir compte du phénomène de changement de phase (solidification), nous avons développé deux schémas numériques avec *maillages fixes* : le premier utilise la méthode de la *capacité effective moyenne* et le deuxième utilise la méthode *enthalpique*.

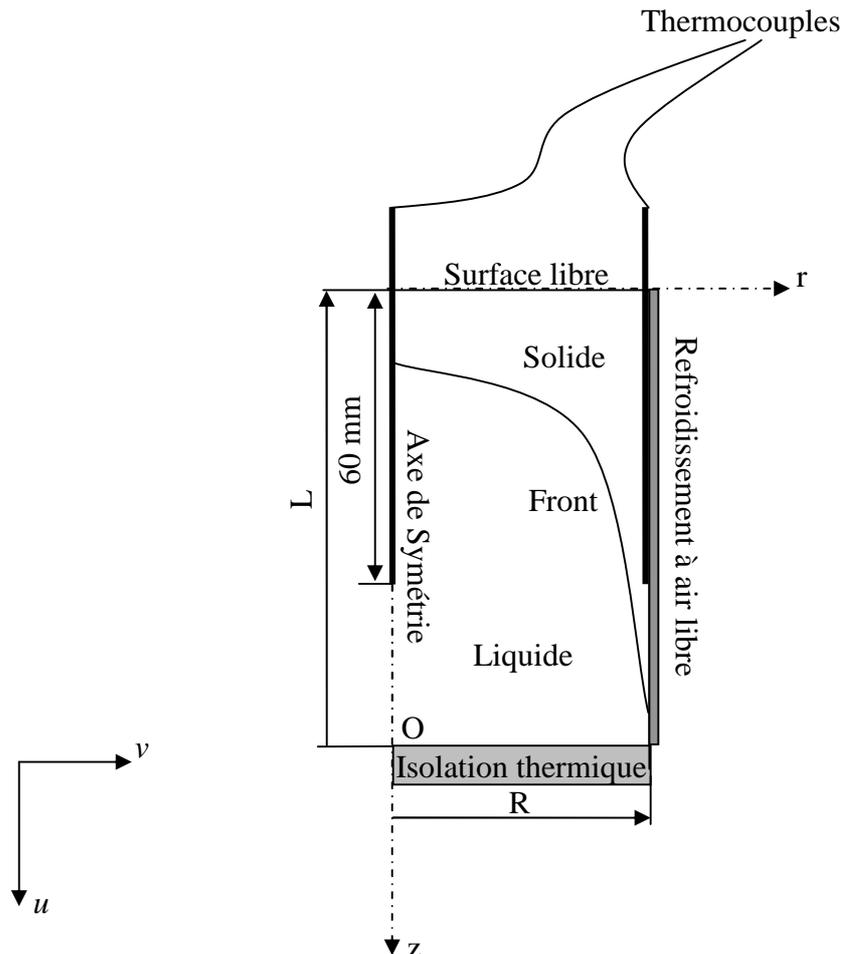


Fig. 5.2. Géométrie du problème étudié

5.1.2. Modèle d'écoulement

Le modèle d'écoulement est basé sur les équations de Navier Stokes régissant l'écoulement d'un fluide incompressible, modifiées pour tenir compte des spécificités du phénomène de changement de phase. Les propriétés thermo-physiques du zinc sont supposées indépendantes de la température, sauf pour la densité où la variation de la

masse volumique ρ engendrée par la température est prise en compte dans le terme de la poussée d'Archimède (hypothèse de Boussinesq). Nous supposons que la phase liquide est un fluide Newtonien en écoulement laminaire avec dissipation visqueuse négligeable.

Equation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v)}{\partial r} = 0 \quad (5.1)$$

Equations de la conservation de la quantité de mouvement dans les directions z et r ont respectivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \beta (T - T_{ref}) - \frac{\mu}{K} u \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial z} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\mu}{K} v - 2 \frac{\mu}{r^2} v \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes appliquées aux problèmes de changement de phase, il est nécessaire d'introduire une certaine stratégie numérique qui tient compte des spécificités de la solidification (les vitesses s'annulent dans la phase solide). Pour cela, deux grandes techniques ont été proposées :

- ❖ Donner une valeur très importante à la viscosité dans la phase solide (augmenter la viscosité) [23, 40] ;
- ❖ Simuler la région pâteuse comme un milieu poreux [35-36, 54-55].

Comme première application, nous allons simuler la région pâteuse comme un milieu poreux. La perméabilité K est exprimée en fonction de la fraction liquide par l'équation de Carman-Koseny comme suit [34, 55] :

$$K = \frac{f_\ell^3 + \chi}{D_1(1-f_\ell)^2} \quad (5.4)$$

D_1 est un paramètre qui dépend de la morphologie du milieu poreux et χ est un petit nombre positif introduit pour éviter la division par zéro. Dans le présent travail, la valeur de D_1 est supposée constante et égale à $1,6 \cdot 10^6$ [34]. Avec la progression de la solidification ($f_\ell \rightarrow 0$), K diminue et le terme source de Darcy devient dominant. Les autres termes dans les équations de la quantité de mouvement forcent le champ de vitesse à s'annuler dans la région solide. Dans la région liquide ($f_\ell = 1$), K tend vers l'infini et le terme source de Darcy disparaît.

5.1.3. Modèles de transfert thermique

Pour résoudre l'équation d'énergie, la méthode de la *capacité effective moyenne* et la méthode *enthalpique* sont adoptées.

a. Méthode de la capacité effective moyenne

Par analogie avec l'Eq. (3.16), la forme générale de l'équation d'énergie gouvernant le transfert thermique instationnaire en coordonnées cylindriques lors de la solidification d'un métal pur est donnée par :

$$\rho(T)c_{eff}(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial z} + v\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (5.5)$$

avec

$$c_{eff}(T) = \begin{cases} c_s & \text{si } T < T_f - \Delta T \\ \frac{c_\ell + c_s}{2} + \frac{L_s}{T_\ell - T_s} & \text{si } T_f - \Delta T \leq T \leq T_f + \Delta T \\ c_\ell & \text{si } T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_s(T) & \text{si } T < T_f - \Delta T \\ \lambda_s + \frac{\lambda_\ell - \lambda_s}{2\Delta T} [T - (T_f - \Delta T)] & \text{si } T_f - \Delta T \leq T \leq T_f + \Delta T \\ \lambda_\ell(T) & \text{si } T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (5.7)$$

b. Méthode enthalpique

La forme enthalpique de l'équation d'énergie gouvernant le transfert thermique instationnaire en coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial z} + v \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5.8)$$

En supposant que la chaleur latente varie linéairement avec la température et en remplaçant l'Eq. (3.23) dans (5.8), nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial z} + u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &\quad - \rho L_s \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial t} + u \frac{\partial f_\ell}{\partial z} + v \frac{\partial f_\ell}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

La théorie des mélanges est utilisée pour définir la densité, la capacité et la conductivité thermique dans le domaine biphasique en fonction de la fraction liquide. Ceci donne [57-59]:

$$\rho = \rho_\ell f_\ell + (1 - f_\ell) \rho_s \quad (5.10.a)$$

$$\lambda = \lambda_\ell f_\ell + (1 - f_\ell) \lambda_s \quad (5.10.b)$$

$$c = c_\ell f_\ell + (1 - f_\ell) c_s \quad (5.10.c)$$

5.1.4. Conditions aux limites

Pour décrire complètement le phénomène, il faut que la solution satisfasse les conditions aux limites associées. Elles sont formulées comme suit.

- En haut (la surface libre des lingots), pour $z = 0$ et $0 \leq r \leq R$.

$$u(0, r, t) = 0 \quad (5.11.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(0, r, t) = 0 \quad (5.11.b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(0, r, t) = h_1' [T(0, r, t) - T_\infty] \quad (5.11.c)$$

- En bas des lingots, pour $z = L$ et $0 \leq r \leq R$.

$$u(L, r, t) = 0 \quad (5.12.a)$$

$$v(L, r, t) = 0 \quad (5.12.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(L, r, t) = 0 \quad (5.12.c)$$

- A l'axe des lingots, pour $r = 0$ et $0 \leq z \leq L$.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z, 0, t) = 0 \quad (5.13.a)$$

$$v(z, 0, t) = 0 \quad (5.13.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(z, 0, t) = 0 \quad (5.13.c)$$

- A la surface latérale des lingots, pour $r = R$ et $0 \leq z \leq L$.

$$u(z, R, t) = 0 \quad (5.14.a)$$

$$v(z, R, t) = 0 \quad (5.14.b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(z, R, t) = h_1 [T(z, R, t) - T_\infty] \quad (5.14.c)$$

Les deux coefficients de convection h_1 et h'_1 ne sont pas constants et peuvent être approximés en fonction de la température de surface. Pour approximer cette variation, nous proposons d'utiliser une équation de la forme polynomiale du deuxième degré.

$$h_1(T) = a_1 T^2 + b_1 T + c_1 \quad (5.15.a)$$

$$h'_1(T) = a_2 T^2 + b_2 T + c_2 \quad (5.15.b)$$

où (a_1 , b_1 et c_1) et (a_2 , b_2 et c_2) sont des constantes empiriques calculées à partir des relevés expérimentaux de la température et qui doivent vérifier les deux bilans (5.14.c) et (5.11.c), respectivement. Les valeurs de ces constantes sont données dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1. Constantes empiriques	
Paramètre	Valeur
a_1	$5,81 \times 10^{-4}$
b_1	- 0,88
c_1	376,78
a_2	$7,55 \times 10^{-4}$
b_2	- 1,14
c_2	489,81

5.2. Procédure numérique

Les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique lors de la coulée simple sont discrétisées en utilisant une formulation volumes finis et résolues en utilisant l'algorithme *SIMPLE*. Pour intégrer le modèle de la *capacité effective* dans la formulation volumes finis, l'idée de la capacité calorifique moyenne développée par *Hsiao* [41, 56] est utilisée. Cette technique permet de stabiliser l'algorithme qui devient insensible à la grandeur de l'intervalle de la température $2\Delta T$ de changement de phase. Pour intégrer le modèle *enthalpique* dans la formulation numérique, le terme source dans l'équation d'énergie (5.9) est approximé comme suit :

$$S_T = S_u^T = -\iiint_v r\rho L_s \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial t} + u \frac{\partial f_\ell}{\partial z} + v \frac{\partial f_\ell}{\partial r} \right) dv \quad (5.17)$$

Dans l'Eq. (5.17), le terme convectif $\text{CON} = -\iiint_v r\rho L_s \left(u \frac{\partial f_\ell}{\partial z} + v \frac{\partial f_\ell}{\partial r} \right) dv$ est

traité en utilisant le schéma central. Ceci donne

$$J_e = \int_s^n (\rho r L_s u f_\ell)_e dr = L_s (\rho r u)_e \Delta r \frac{f_{\ell E} + f_{\ell P}}{2} \quad (5.18.a)$$

$$J_n = \int_w^e (\rho r L_s v f_\ell)_n dz = L_s (\rho r v)_n \Delta z \frac{f_{\ell N} + f_{\ell P}}{2} \quad (5.18.b)$$

Les quantités J_w et J_s sont exprimées de manière analogue. En Posant $F_e = L_s (\rho r u)_e \Delta r$ et $F_n = L_s (\rho r v)_n \Delta z$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \text{CON} = J_e - J_w + J_n - J_s &= \frac{F_e}{2} f_{\ell E} - \frac{F_w}{2} f_{\ell W} \\ &+ \frac{F_n}{2} f_{\ell N} - \frac{F_s}{2} f_{\ell S} + \left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} \right) f_{\ell P} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Dans l'équation (5.9), deux inconnus sont rencontrés T et f_ℓ . A chaque pas de temps, un calcul itératif est utilisé pour déterminer le champ de température T . Le calcul

itératif démarre par une approximation initiale de T et f_ℓ ou en utilisant les valeurs calculées au pas de temps précédant. Le système itératif à résoudre s'écrit alors :

$$a_p T_P^{n+1} = \sum_{nb} a_{nb} T_{nb}^{n+1} + \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} T_P^{anc} + \frac{\rho_p r_p L_s \Delta z \Delta r}{\Delta t} (f_{\ell P}^{anc} - f_{\ell P}^n) + \text{CON} \quad (5.20.a)$$

avec

$$\text{CON} = \frac{F_e}{2} f_{\ell E}^n - \frac{F_w}{2} f_{\ell W}^n + \frac{F_n}{2} f_{\ell N}^n - \frac{F_s}{2} f_{\ell S}^n + \left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} \right) f_{\ell P}^n \quad (5.20.b)$$

Les indices n et anc caractérisent respectivement, la $n^{\text{ème}}$ itération et le pas de temps précédant (ancien). Cependant, l'expérience numérique a montrée que cet arrangement itératif n'est pas fiable, en particulier, lorsque la différence entre la température de solidus et la température de liquidus est assez étroite. Lors des itérations, la température peut osciller au voisinage de l'interface de solidification et la convergence n'est plus assurée. Pour surmonter ce type des problèmes, plusieurs arrangements ont été proposés [44, 60-62]. Dans le présent travail, la technique de relaxation est utilisée [46, 62-63]. A chaque pas de temps, les deux inconnus T et f_ℓ sont initialisés grâce au pas de temps précédant et le système itératif devient :

$$a_p T_P^{n+1} = \sum_{nb} a_{nb} T_{nb}^{n+1} + \frac{\rho_p r_p \Delta z \Delta r}{\Delta t} T_P^{anc} + \frac{\rho_p r_p L_s \Delta z \Delta r}{\Delta t} (f_{\ell P}^{anc} - f_{\ell P}^{n+1}) + \text{CON} \quad (5.21.a)$$

avec

$$\text{CON} = \frac{F_e}{2} f_{\ell E}^{n+1} - \frac{F_w}{2} f_{\ell W}^{n+1} + \frac{F_n}{2} f_{\ell N}^{n+1} - \frac{F_s}{2} f_{\ell S}^{n+1} + \left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} \right) f_{\ell P}^{n+1} \quad (5.21.b)$$

$$f_{\ell}^{n+1} = f_{\ell}^n + \frac{\omega c}{L_s} [T_P^n - F^{-1}(f_{\ell}^n)] \quad (5.21.c)$$

ω est le facteur de sous relaxation (la valeur de 0,7 est utilisée). D'après l'Eq. (3.24), la fonction inverse $F^{-1}(f_{\ell}^n)$ est donnée par :

$$F^{-1}(f_{\ell}^n) = T_s + (T_{\ell} - T_s) f_{\ell}^n \quad (5.22)$$

En principe, l'actualisation de la fraction liquide est faite seulement aux noeuds où le changement de phase a lieu. En pratique, cet ajustement est appliqué à chaque nœud durant le calcul itératif suivi par la correction suivante.

$$f_{\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } f_{\ell}^{n+1} < 0 \\ 1 & \text{si } f_{\ell}^{n+1} > 1 \end{cases} \quad (5.23)$$

5.2.1. Conditions aux limites

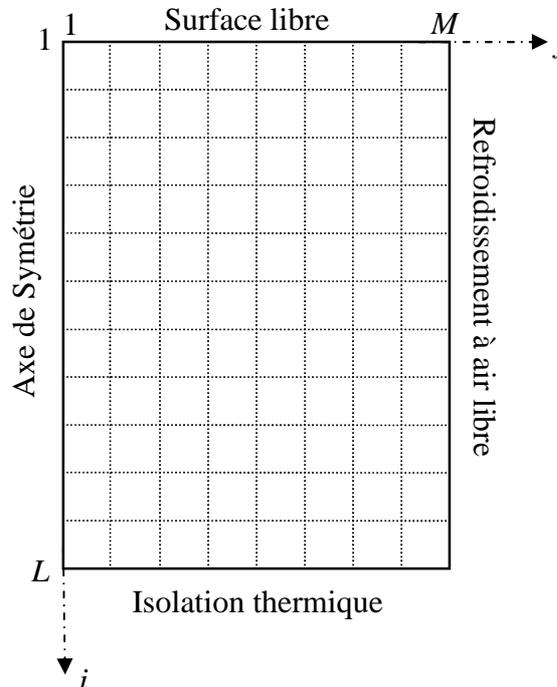


Fig. 5.3. Maillage du domaine de calcul

D'après la Fig. 5.3, les conditions aux limites associées peuvent être formulées numériquement comme suit.

- En haut (la surface libre des lingots), pour $i = 1$ et $1 \leq j \leq M$.

$$u(0, r, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{2,j} = 0 \quad (5.24.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(0, r, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{2,j} = v_{3,j} \quad (5.24.b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(0, r, t) = h'_1 [T(0, r, t) - T_\infty] \quad \Rightarrow \quad T_{1,j} = \frac{T_{2,j} + Bi_2 T_\infty}{1 + Bi_2} \quad (5.24.c)$$

avec $Bi_2 = \frac{h'_1 \Delta z}{\lambda_s}$

- En bas des lingots, pour $i = L$ et $1 \leq j \leq M$.

$$u(L, r, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{L,j} = 0 \quad (5.25.a)$$

$$v(L, r, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L,j} = 0 \quad (5.25.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(L, r, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{L,j} = T_{L-1,j} \quad (5.25.c)$$

- A l'axe des lingots, pour $j = 1$ et $1 \leq i \leq L$.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z, 0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i,2} = u_{i,3} \quad (5.26.a)$$

$$v(z, 0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{i,2} = 0 \quad (5.26.a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(z, 0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{i,1} = T_{i,2} \quad (5.26.a)$$

- A la surface des lingots, pour $j = M$ et $0 \leq i \leq L$.

$$u(z, R, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i,M} = 0 \quad (5.27.a)$$

$$v(z, R, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{i,M} = 0 \quad (5.27.a)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(z, R, t) = h_1 [T(z, R, t) - T_\infty] \quad \Rightarrow \quad T_{i,M} = \frac{T_{i,M-1} + Bi_1 T_\infty}{1 + Bi_1} \quad (5.27.a)$$

avec $Bi_1 = \frac{h_1 \Delta r}{\lambda_s}$

5.3. Résultats et interprétations

La simulation numérique a été effectuée pour la coulée simple des billettes cylindrique en zinc pur de rayon $R = 0,042$ m et de longueur $L = 0,11$ m. Les propriétés thermo-physiques sont supposées constantes mais différentes entre les deux phases solide et liquide, dont les valeurs sont données dans le tableau 5.2 [64].

tableau 5.2. Les variables physiques du zinc

Paramètre	Unités	Valeurs
λ_s	W.m ⁻¹ .K ⁻¹	101,181
λ_ℓ	W.m ⁻¹ .K ⁻¹	90
c_{ps}	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	461
$c_{p\ell}$	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	510,57
ρ_ℓ	kg.m ⁻³	7135
ρ_s	kg.m ⁻³	7130
μ_ℓ	N.s.m ⁻²	6,4×10 ⁻³
β	K ⁻¹	0,0237×10 ⁻³
T_f	K	693
L_s	J.kg ⁻¹	112 206

Afin d'établir la précision des résultats obtenus par la formulation numérique, un test d'indépendance du maillage a été effectué sur différentes tailles de maillage. Enfin, un maillage de 50×30 éléments uniformes a été adopté.

Les facteurs de sous-relaxation qui semblent favoriser la stabilité du processus itératif sont : 0,5 pour les deux composantes u et v et 0,8 pour T . Les itérations sont arrêtées lorsque le critère de convergence suivant est assuré :

$$\left| \phi^{n+1} - \phi^n \right| < 10^{-4} \quad (5.29)$$

Afin d'illustrer la validité du modèle numérique, les résultats numériques sont confrontés avec les résultats obtenus expérimentalement [65]. La Fig. 5.4 montre les évolutions de la température surfacique et la température axiale en fonction du temps calculées par la méthode *enthalpique*, calculées par la méthode de la *capacité effective moyenne* et ceux tirées expérimentalement. Après test, l'intervalle de solidification $T_\ell - T_s$ choisi est 0,04 K pour la méthode *enthalpique* et 0,016 K pour la méthode de la *capacité effective moyenne*. La figure montre clairement la bonne précision de la méthode *enthalpique* par rapport à la méthode la *capacité effective moyenne*. Pour augmenter la précision de cette dernière, il faut réduire l'intervalle de changement de phase davantage. Ceci entraîne une grande instabilité dans le processus itérative et la convergence n'est plus assurée.

Nous remarquons aussi que la variation de la température présente un palier où la température reste presque constante. Cette température s'appelle « température de solidification ». La fin de la solidification est indiquée par le changement brusque dans l'allure de ces paliers.

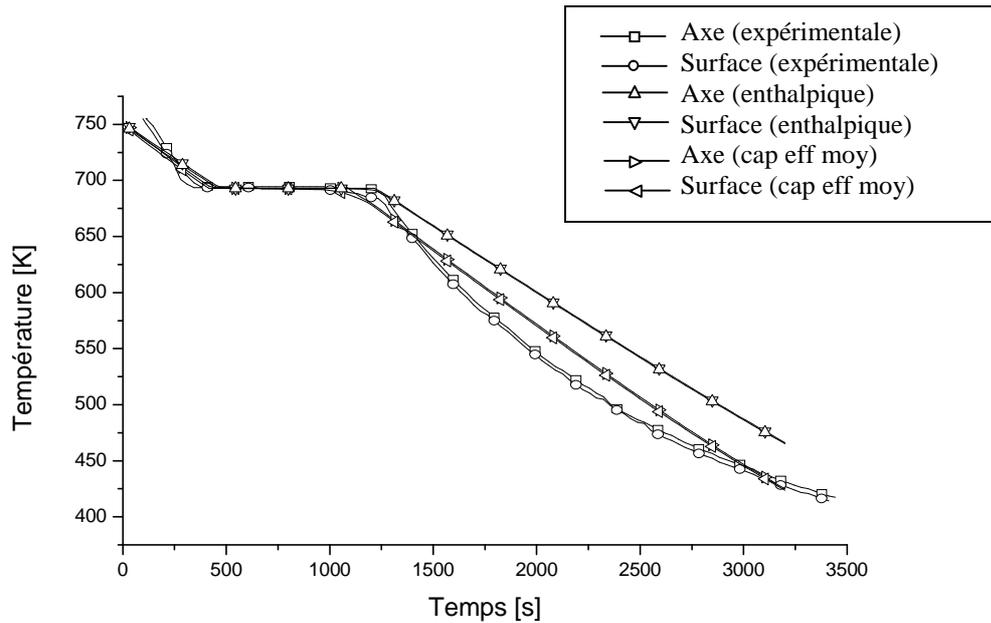


Fig. 5.4. Evolution des températures surfacique et axiale des lingots de zinc en fonction du temps

Les Figs. 5.5 et 5.6 illustrent la forme des lignes de courant en fonction du temps calculées par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*, respectivement. Les lignes de courant dans le liquide donnent une idée sur la circulation des particules fluides dans cette région. Nous remarquons que la vitesse est nulle dans la région solide. Dans la région liquide, il y a développement d'un écoulement mono cellulaire dont la taille diminue en fonction du temps. Le sens de la circulation de cet écoulement favorise les pertes de chaleur vers la surface libre et augmente ainsi la vitesse de solidification. En même temps, l'écoulement de retour diminue les pertes de chaleur vers la surface latérale et retarde ainsi la vitesse de solidification. Ceci est l'effet direct de la convection naturelle dans la région liquide.

Nous remarquons que la méthode *enthalpique* a offert des résultats très différents par rapport à la méthode de la *capacité effective moyenne*. Pour améliorer la précision de cette dernière, il faut utiliser un maillage plus raffiné pour ne pas manquer le dégagement de la chaleur latente. Cela se traduit par un temps de calcul assez chère.

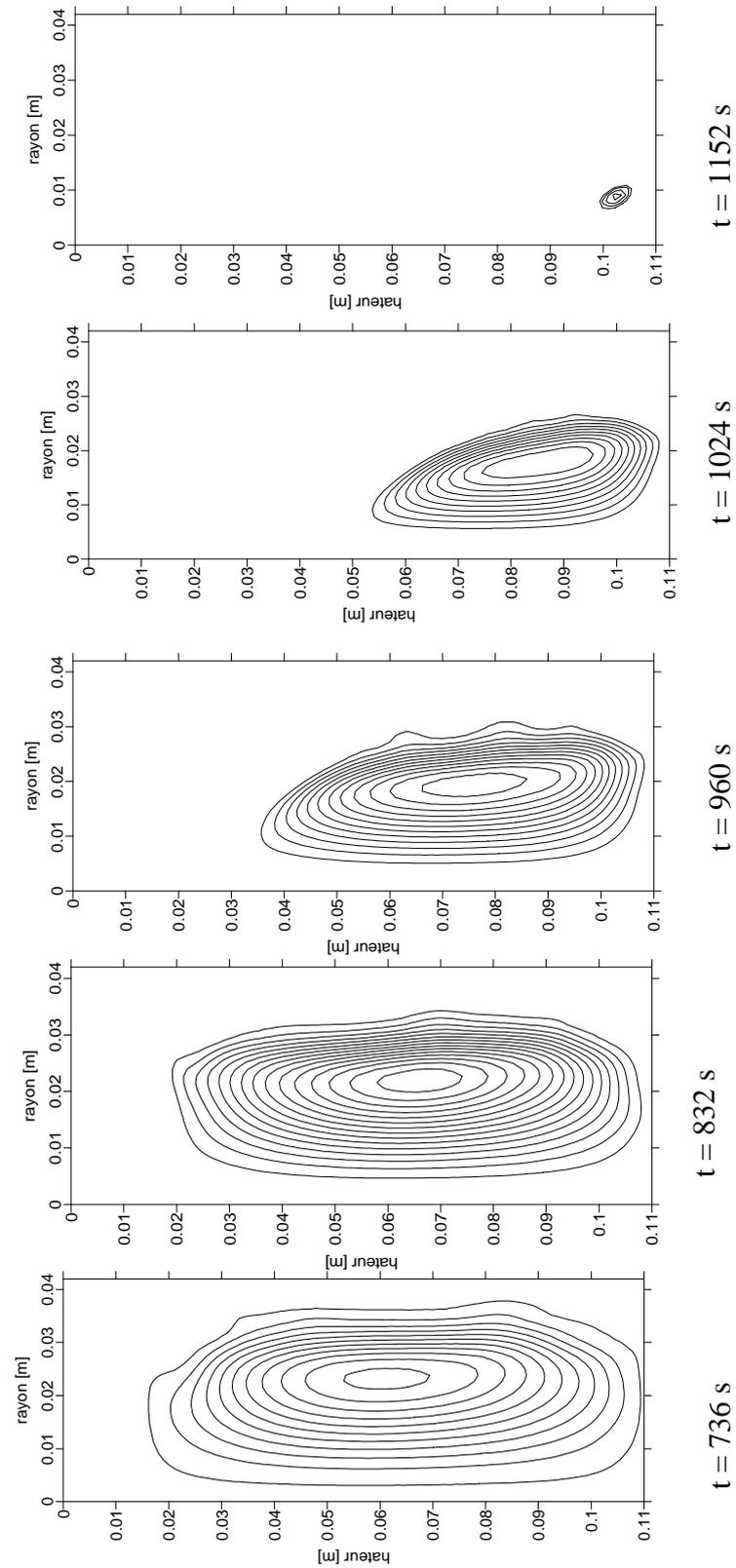


Fig. 5.5. Evolution des lignes de courant en fonction du temps calculées par la méthode *enthalpique*

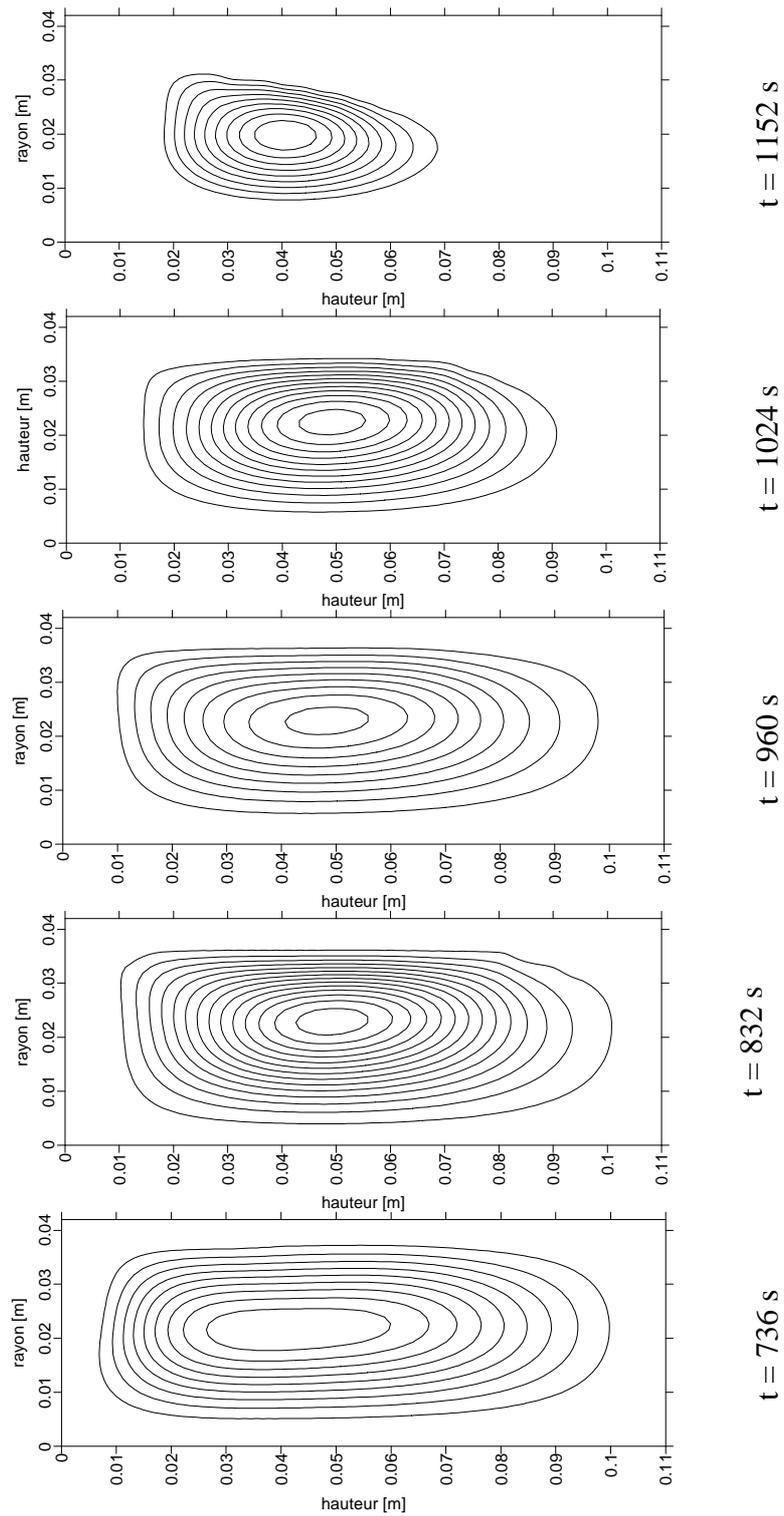


Fig. 5.6. Evolution des lignes de courant en fonction du temps calculées par la méthode de la *capacité effective moyenne*.

Les Figs. 5.7 et 5.8 illustrent l'évolution des isothermes en fonction du temps calculées par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*, respectivement. Nous remarquons que la température du métal fondu diminue en fonction du temps vers le fond central de la billette. Dû à l'écoulement circulaire, les gradients de température dans la région liquide sont assez faibles par rapport à ceux dans la région solide.

Nous remarquons que la méthode *enthalpique* a offert des résultats nettement plus précis par rapport à la méthode de la *capacité effective moyenne*. Après $t = 1152$ s, la billette est complètement solidifiée, pourtant la méthode de la *capacité effective moyenne* signale qu'une grande partie de la billette est encore liquide. Cela montre que la méthode de *capacité effective moyenne* peut conduire facilement à des calculs instables.

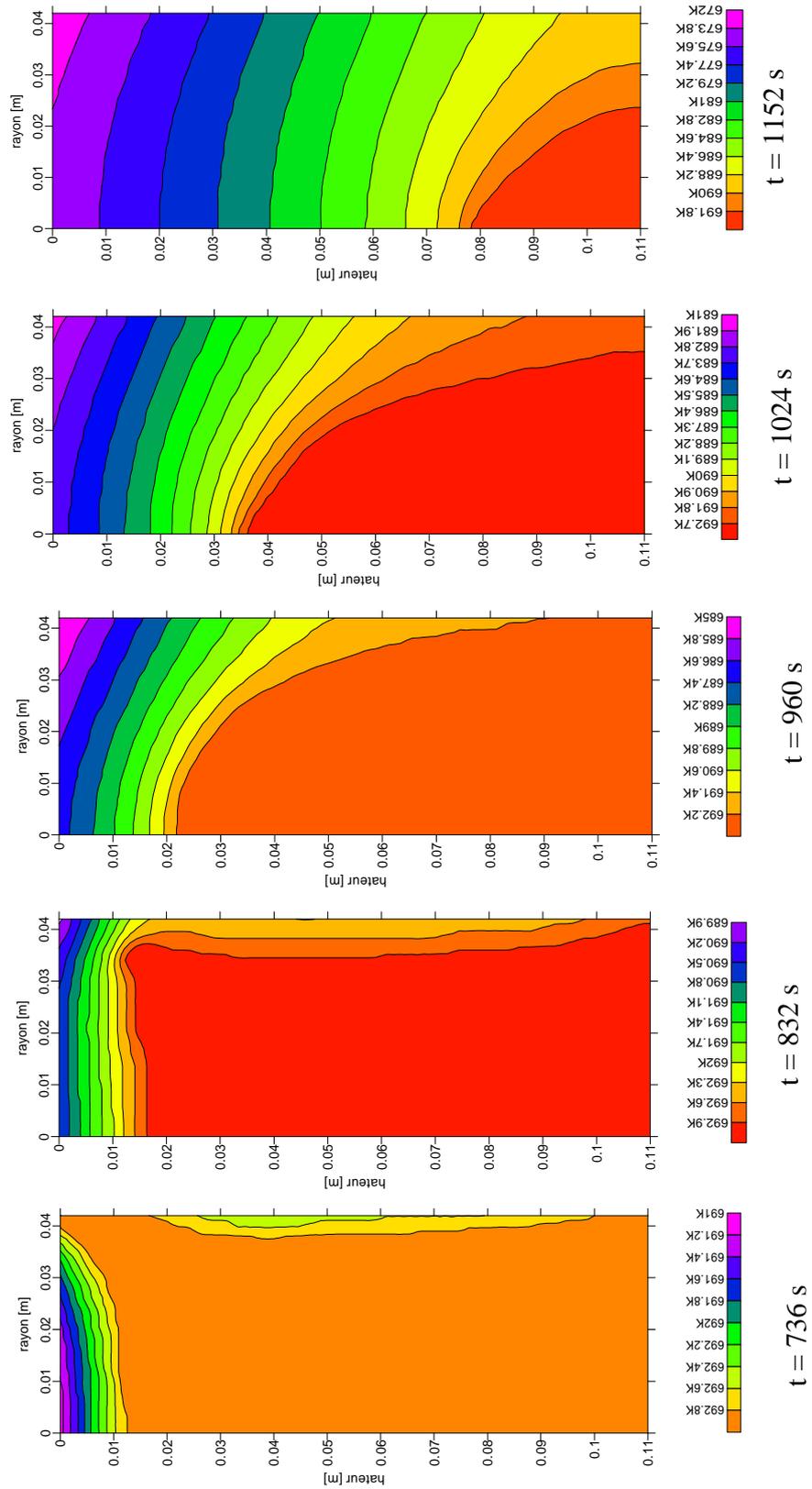


Fig. 5.7 Evolution des isothermes en fonction du temps calculées par la méthode *enthalpique*

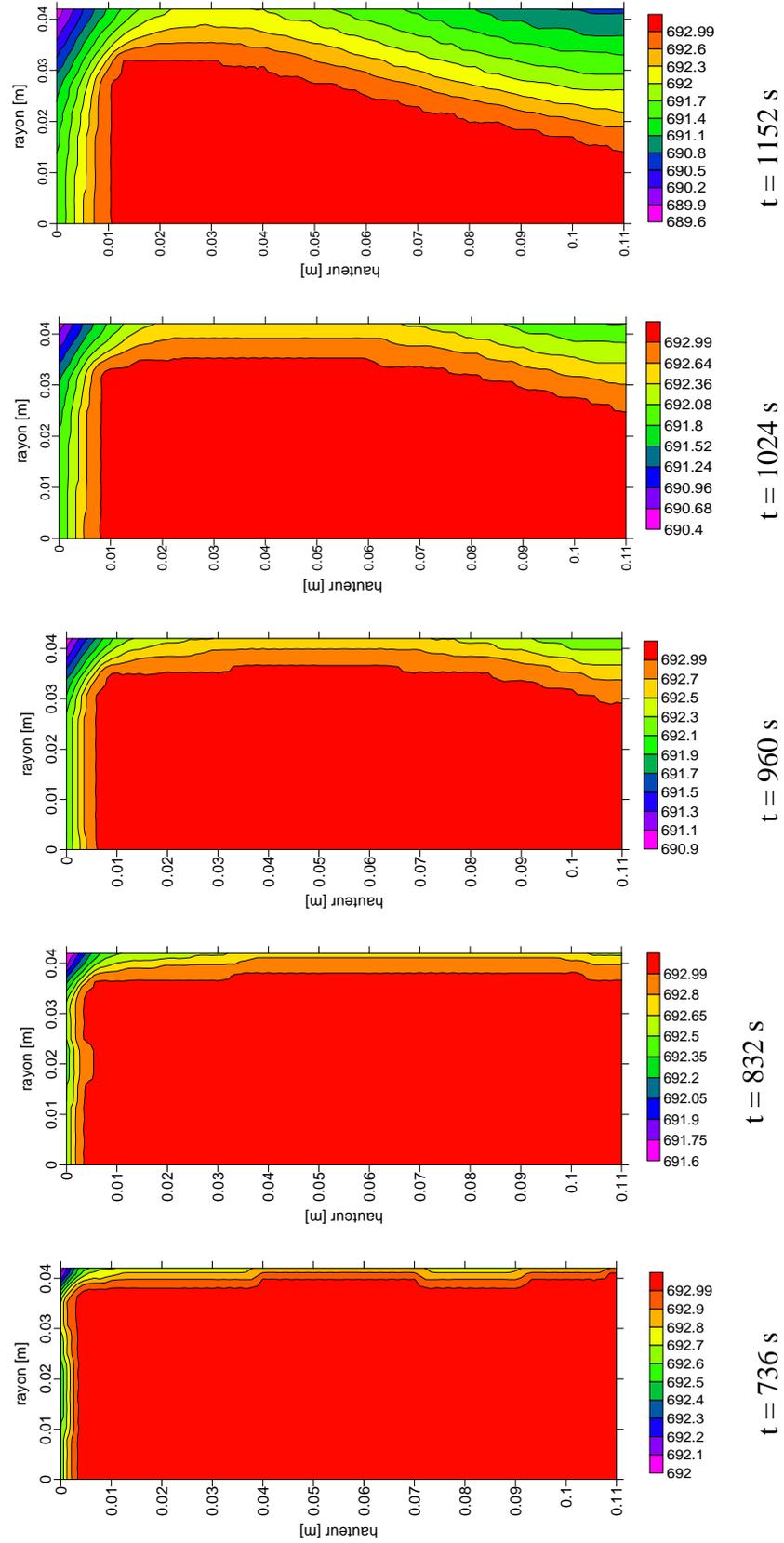


Fig. 5.8 Evolution des isothermes en fonction du temps calculées par la méthode de la *capacité effective moyenne*

La Fig. 5.9 montre l'évolution de la position et la forme du front de solidification en fonction du temps calculée par la méthode *enthalpique*. La solidification commence à partir de la surface latérale et de la surface libre du lingot et progresse en fonction du temps jusqu'à la solidification complète à $t \approx 1088$ s. Vers le début de la solidification et jusqu'à $t = 832$ s, le front présente une légère courbure indiquant que la conduction domine le transfert de chaleur. Avec la progression de la solidification, cette courbure devient plus importante et la convection naturelle domine le transfert de chaleur progressivement. Puisque l'écoulement convectif favorise les pertes de chaleur vers le haut et les retardent vers la surface, nous remarquons que la vitesse de déplacement du front de solidification dans le sens axial est plus importante que celle dans le sens radial.

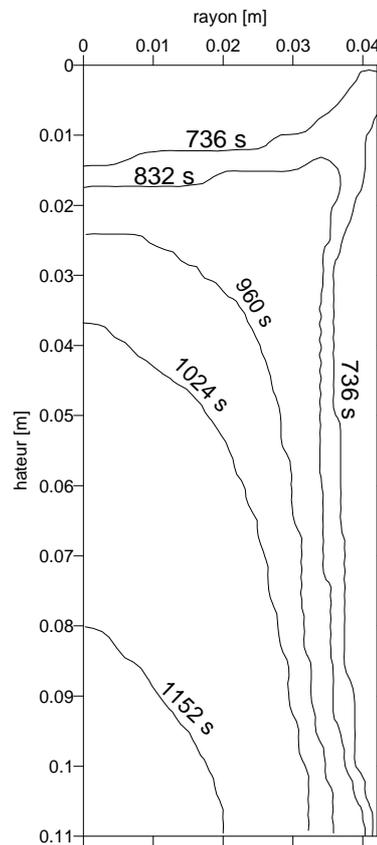
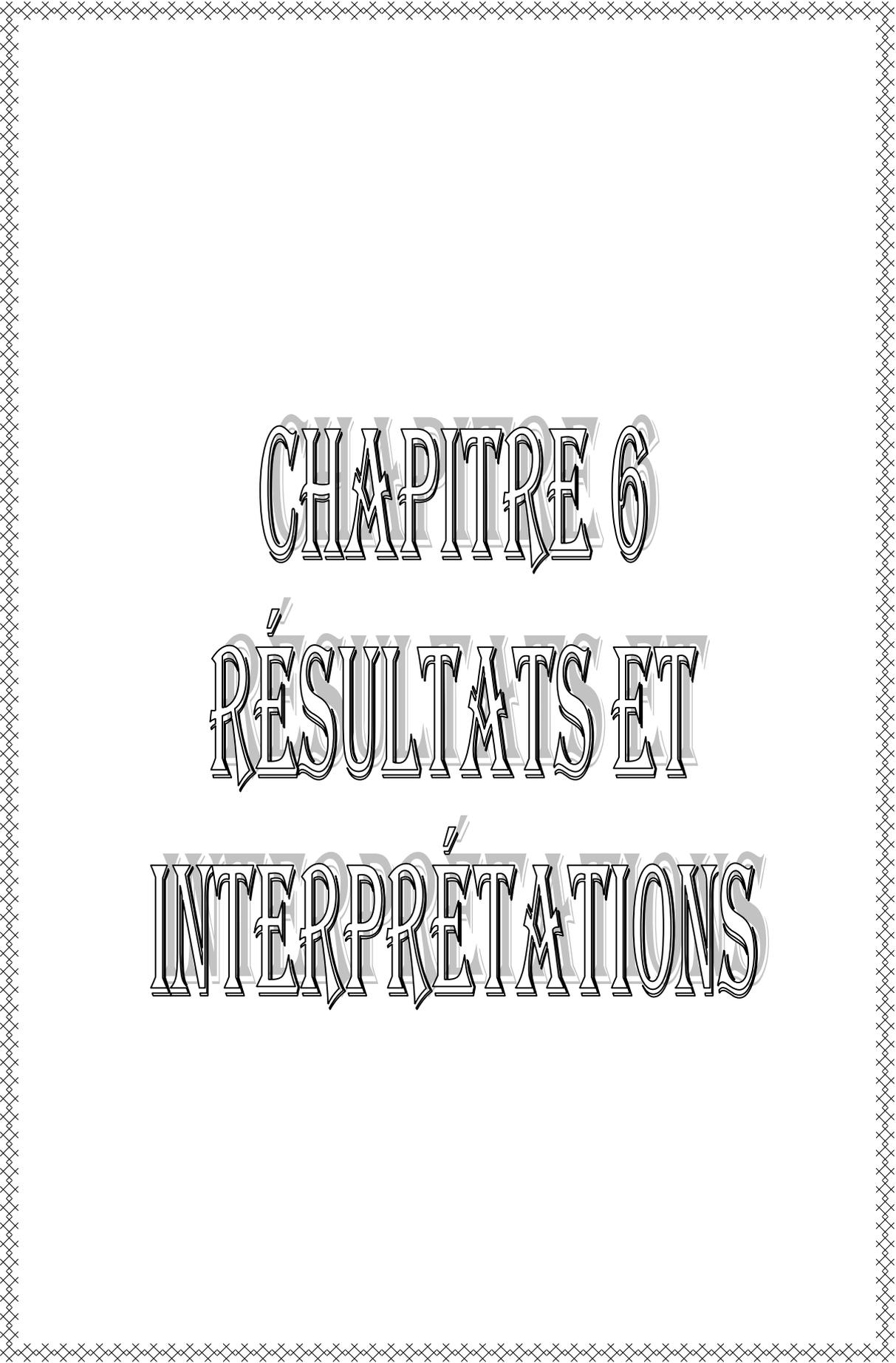


Fig. 5.9. Evolution de la position et de la forme du front de solidification en fonction du temps.



CHAPITRE 6

RESULTATS ET

INTERPRETATIONS

6.1. Position du problème

6.1.1. Modèle physique

La deuxième application porte sur la simulation numérique du processus de la coulée continue des billettes cylindriques en aluminium type A6063 avec refroidissement direct (Fig. 6.1). Le métal liquide à haute température est versé dans le moule qui possède un passage interne à travers lequel circule l'eau de refroidissement primaire. Ce dernier est éjecté vers l'extérieur du bas de moule et entre en contact direct avec la surface des billettes. Une enveloppe solide assez mince, qui doit être capable de contenir le métal encore liquide au noyau, est donc formée. Cela permet ainsi le retrait continu du métal coulé.

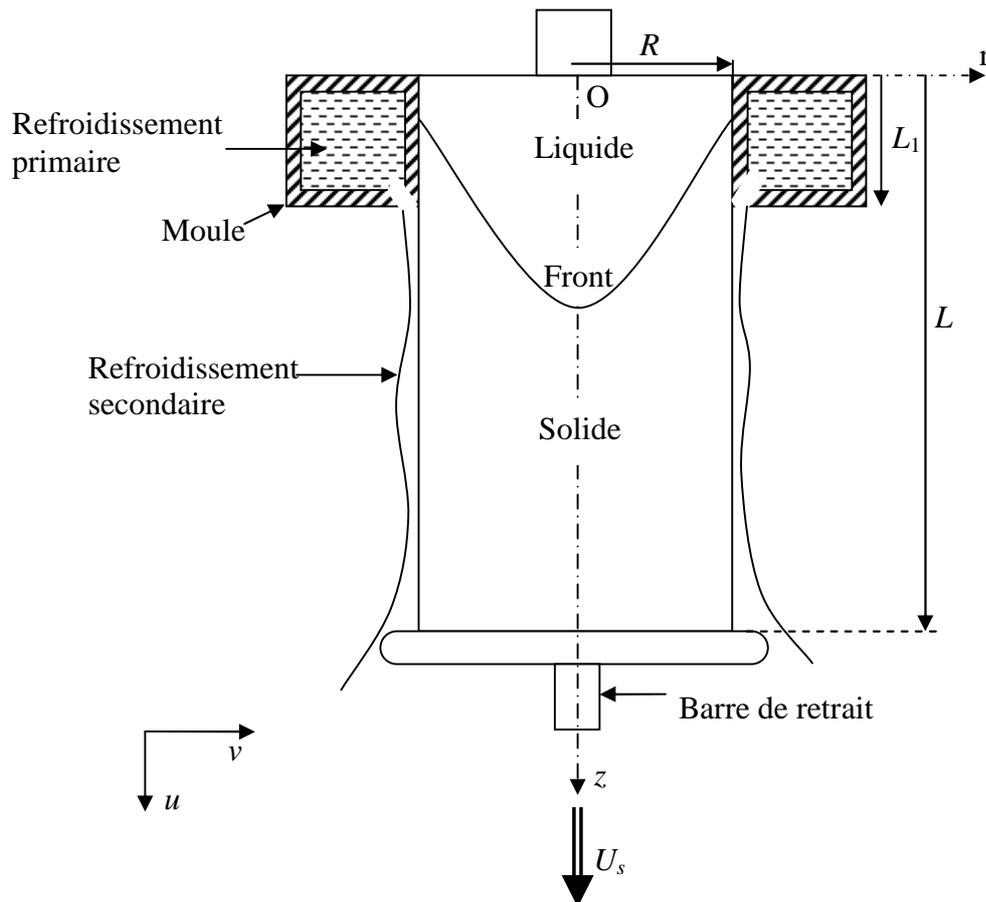


Fig. 6.1 Géométrie du problème étudié

Durant le processus de la coulée continue, la distribution de la température des billettes est indépendante du temps. Le transfert thermique est donc stationnaire. Vu la symétrie axiale, le système étudié devient bidimensionnel. Pour tenir compte du phénomène de changement de phase (solidification), nous avons développé deux schémas numériques avec *maillage fixe* : le premier utilise la méthode de la *capacité effective moyenne* et le deuxième utilise la méthode *enthalpique*.

6.1.2. Modèle d'écoulement

En régime stationnaire, les équations de conservation décrivant le champ dynamique s'écrivent :

Equation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v)}{\partial r} = 0 \quad (6.1)$$

Equations de la conservation de la quantité de mouvement dans les directions z et r ont respectivement les formes suivantes:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (6.2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial z} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (6.3)$$

Pour tenir compte des spécificités de la solidification, nous proposons d'attribuer une valeur très importante à la viscosité dans la région solide pour éliminer les équations de la continuité et de la quantité de mouvement. La seule équation gouvernant le transfert thermique dans la région solide sera donc l'équation d'énergie. Pour cela, nous proposons d'écrire la viscosité du métal sous la forme suivante [40, 55, 66]

$$\mu = f_\ell \cdot \mu_\ell + (1 - f_\ell) \cdot \mu_s \quad (6.4)$$

où μ_ℓ est la viscosité du métal liquide et μ_s est une constante attribuée de valeur très importante.

En pratique, quand la solidification a lieu, la composante radiale de la vitesse prend une valeur nulle et la composante axiale prend une valeur constante égale à la vitesse de coulée U_s . Pour surmonter cette difficulté, nous proposons d'écrire les deux composantes de la vitesse comme suit [40, 63, 66, 67] :

$$u = f_\ell \cdot u_\ell + (1 - f_\ell) \cdot U_s \quad (6.5)$$

$$v = f_\ell \cdot v_\ell \quad (6.6)$$

où u_ℓ et v_ℓ sont les composants de la vitesse dans la phase liquide. L'arrangement suggéré par les Eqs. (6.4) à (6.6) permet de réduire la forte non linéarité provoquée par la variation brusque de la viscosité et de la vitesse durant le changement de phase.

6.1.3. Modèles de transfert thermique

a. Méthode de la capacité effective moyenne

Par analogie avec l'Eq. (5.5), la forme générale de l'équation d'énergie gouvernant le transfert thermique stationnaire en coordonnées cylindriques lors de la solidification d'un métal pur est donnée par :

$$\rho(T) c_{eff}(T) \left(u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (6.7)$$

avec

$$c_{eff}(T) = \begin{cases} c_s & \text{si } T < T_f - \Delta T \\ \frac{c_\ell + c_s}{2} + \frac{L_s}{T_\ell - T_s} & \text{si } T_f - \Delta T \leq T \leq T_f + \Delta T \\ c_\ell & \text{si } T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_s(T) & \text{si } T < T_f - \Delta T \\ \lambda_s + \frac{\lambda_\ell - \lambda_s}{2\Delta T} [T - (T_f - \Delta T)] & \text{si } T_f - \Delta T \leq T \leq T_f + \Delta T \\ \lambda_\ell(T) & \text{si } T > T_f + \Delta T \end{cases} \quad (6.9)$$

b. Méthode enthalpique

Par analogie avec l'Eq. (5.9) et en supposant que la chaleur latente varie linéairement avec la température, l'équation d'énergie gouvernant le transfert thermique stationnaire en coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &\quad - \rho L_s \left(u \frac{\partial f_\ell}{\partial z} + v \frac{\partial f_\ell}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.1.2. Conditions aux limites

Pour que le phénomène soit décrit complètement, la solution doit satisfaire les conditions aux limites associées. Elles sont formulées comme suit.

- En amont (la surface libre des billettes), pour $z = 0$ et $0 \leq r \leq R$.

$$u(0, r) = U_s \quad (6.11.a)$$

$$v(0, r) = 0 \quad (6.11.b)$$

$$T(0, r) = T_0 \quad (6.11.c)$$

- En aval des billettes, pour $z = L$ et $0 \leq r \leq R$.

$$u(L, r) = U_s \quad (6.12.a)$$

$$v(L, r) = 0 \quad (6.12.b)$$

Si L est assez longue, le bas des billettes peut être supposé comme étant adiabatique [21, 34, 40, 68-69].

$$\frac{\partial T}{\partial z}(L, r) = 0 \quad (6.12.c)$$

- A l'axe des billettes, pour $r = 0$ et $0 \leq z \leq L$.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z, 0) = 0 \quad (6.13.a)$$

$$v(z, 0) = 0 \quad (6.13.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(z, 0) = 0 \quad (6.13.c)$$

- A la surface des billettes, pour $r = R$ et $0 \leq z \leq L$.

$$u(z, R) = (1 - f_\ell)U_s \quad (6.14.a)$$

$$v(z, R) = 0 \quad (6.14.b)$$

Lors de la solidification, le métal liquide subit une contraction ayant pour résultat la création d'un espace d'air entre le moule et le métal solidifié. Le transfert thermique à l'interface moule-métal est pris en considération en introduisant un coefficient de transfert de chaleur couplé (convection-rayonnement) h_1 à l'interface. Dans la région secondaire, le transfert thermique est supposé par ébullition nucléée avec convection forcée h_2 .

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(z, R) = \begin{cases} h_1(z)[T(z, R) - T_\infty] & z \leq L_1 \\ h_2(z)[T(z, R) - T_\infty] & z > L_1 \end{cases} \quad (6.14.c)$$

Nous supposons que les coefficients de convection $h_1(z)$ et $h_2(z)$ ne varient pas avec la température et ne dépendent que de l'altitude z . Une étude expérimentale menée par **Weckman** [15] a permis de donner l'allure de ces coefficients de convection (Fig. 6.2). Cette étude combine la corrélation de la convection par ébullition nucléée et la

corrélation de la convection forcée d'une goutte d'eau en chute libre. Le coefficient de convection dans le moule démarre avec des valeurs basses et chute davantage lorsque l'espace d'air entre le moule et la billette apparue. Lorsque la billette entre en contact direct avec l'eau de refroidissement secondaire, le coefficient de convection prend des valeurs très hautes et chute ensuite très rapidement à des valeurs voisines à $1,03 \cdot 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ [15, 69-70].

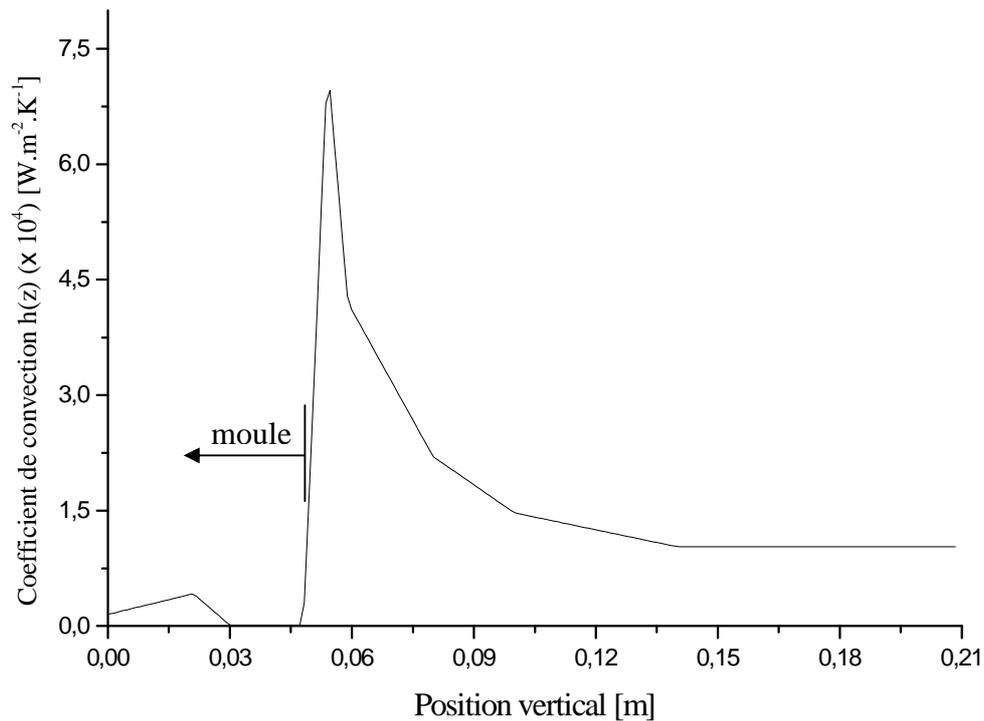


Fig. 6.2. Coefficient de convection à la surface des billettes

6.2. Procédure numérique

Les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique lors de la coulée continue sont discrétisées en utilisant une formulation volumes finis et résolues en utilisant l'algorithme *SIMPLE*. Dans la formulation numérique du modèle enthalpique, le terme transitoire disparaît du terme source de l'équation d'énergie. Il ne reste donc que le terme convectif défini par l'Eq. (5.19) :

$$S_\phi = S_u^T = -\iint_v r\rho L_s \left(u \frac{\partial f_\ell}{\partial z} + v \frac{\partial f_\ell}{\partial r} \right) dv \quad (6.15.a)$$

$$S_\phi = \text{CON} = \frac{F_e}{2} f_{\ell E} - \frac{F_w}{2} f_{\ell W} + \frac{F_n}{2} f_{\ell N} - \frac{F_s}{2} f_{\ell S} + \left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} \right) f_{\ell P} \quad (6.15.b)$$

6.2.1. Conditions aux limites

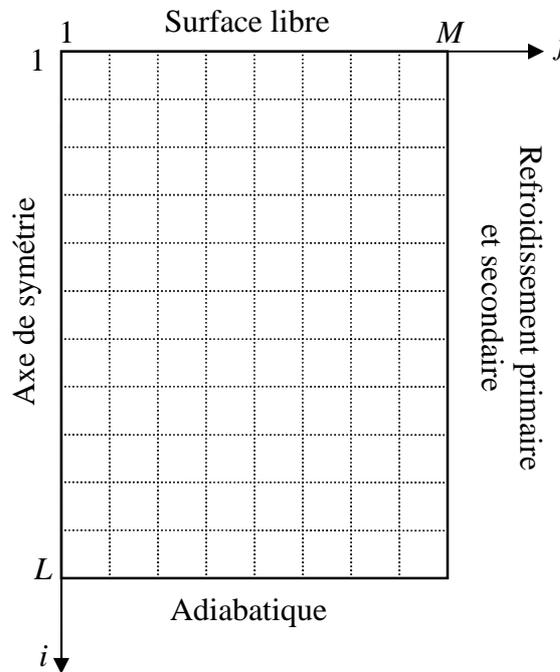


Fig. 6.3. Maillage du domaine de calcul

Les conditions aux limites associées sont formulées numériquement comme suit.

- A la surface libre des billettes, pour $i = 1$ et $1 \leq j \leq M$.

$$u(0, r) = U_s \quad \Rightarrow \quad u_{2,j} = U_s \quad (6.16.a)$$

$$v(0, r) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{2,j} = 0 \quad (6.16.b)$$

$$T(0, r) = T_0 \quad \Rightarrow \quad T_{1,j} = T_0 \quad (6.16.c)$$

- Au fond des billettes, pour $i = L$ et $1 \leq j \leq M$

$$u(L, r) = U_s \quad \Rightarrow \quad u_{L,j} = U_s \quad (6.17.a)$$

$$v(L, r) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L,j} = 0 \quad (6.17.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(L, r) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{L,j} = T_{L-1,j} \quad (6.17.c)$$

- A l'axe des billettes, pour $j = 1$ et $1 \leq i \leq L$.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i,2} = u_{i,3} \quad (6.18.a)$$

$$v(z, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{i,2} = 0 \quad (6.18.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(z, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{i,1} = u_{i,2} \quad (6.18.c)$$

- A la surface latérale des billettes, pour $j = M$ et $0 \leq i \leq L$.

$$u(z, R) = (1 - f_\ell)U_s \quad \Rightarrow \quad u_{i,M} = (1 - f_\ell)U_s \quad (6.19.a)$$

$$v(z, R) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{i,M} = 0 \quad (6.19.b)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r}(z, R) = h(z)[T(z, R) - T_\infty] \quad \Rightarrow \quad T_{i,M} = \frac{T_{i,M-1} + Bi_i T_\infty}{1 + Bi_i} \quad (6.19.c)$$

$$\text{avec } Bi_i = \frac{h_i \Delta r}{\lambda_s}$$

6.3. Résultats et interprétations

Afin d'établir la précision des résultats obtenus par la formulation numérique, un test d'indépendance du maillage a été effectué sur différentes tailles de maillage. Un maillage de 400×100 éléments non uniformes semble accomplir la tâche.

Pour les différentes vitesses de retrait, les facteurs de sous-relaxation qui semblent favoriser la stabilité du processus sont : 0,46 pour les deux composantes de la vitesse (u et v) et 0,8 pour la température (T). A l'itération $n+1$, la fraction liquide est évalué en utilisant le champ de thermique de l'itération précédente n . Les itérations sont arrêtées lorsque le critère de convergence suivant est assuré :

$$\left| \phi^{n+1} - \phi^n \right| < 10^{-4} \quad (6.20)$$

La Fig. 6.4 indique la convergence de la température du point ($z = L, r = R$) en fonction du nombre d'itération. Nous observons que le nombre des itérations assurant la convergence de la solution est de 3000 itérations pour une vitesse de coulée de $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, de 4000 itérations pour $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et de 5000 itérations pour $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse de convergence pour les deux méthodes *enthalpique* et *de la capacité effective moyenne* est assez identique et ne dépend que de la vitesse de coulée.

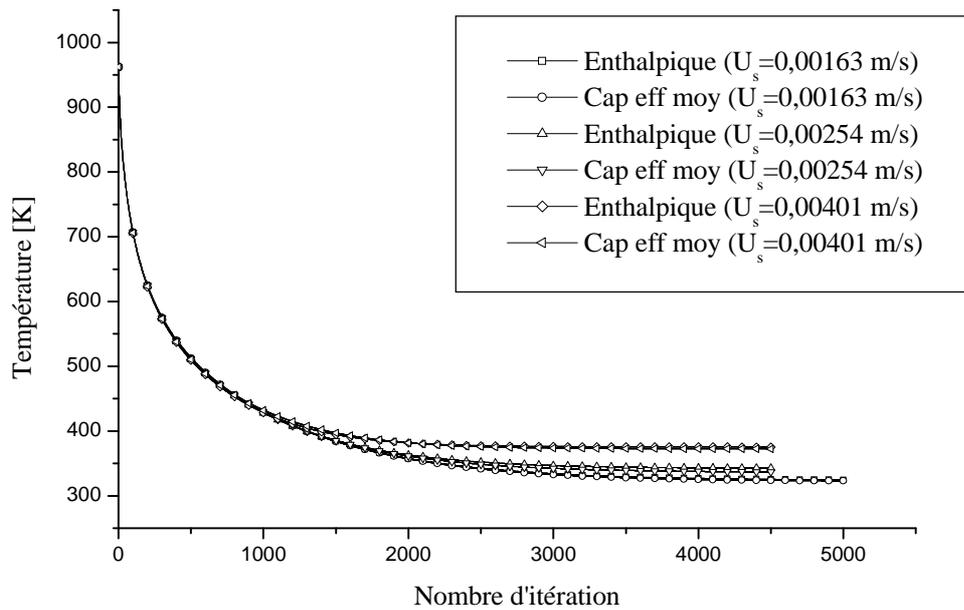


Fig. 6.4. Vitesse de convergence pour le deux méthodes *enthalpique* et de la *capacité moyenne* à différentes vitesses de coulée

Afin d'illustrer la validité de la présente technique, les évolutions de la température (surfaique et sous-surfaiques) et du flux de chaleur surfaique obtenues sont comparées avec ceux dans la littérature [15]. La simulation numérique a été effectuée pour la coulée continue des billettes cylindriques en alliage d'aluminium type A6063. Les valeurs définissant la géométrie et les paramètres de fonctionnement de l'installation de coulée sont récapitulées dans le tableau 6.1.

tableau 6.1. Géométrie et paramètres de fonctionnement de l'installation de coulée

Paramètre	Unités	Valeur
R	M	0,0762
L_1	M	0.05
T_∞	K	303

Nous supposons que les propriétés thermo-physiques sont constantes dans chaque phase mais différentes, dont les valeurs sont données dans le tableau 6.2. L'intervalle de solidification de l'alliage d'aluminium type A6063 est assez étroit. Alors, nous pouvons le considérer comme un métal pur dont la température de fusion est de 923 K [21].

tableau 6.2. Les variables physiques de l'alliage type A6063

Paramètre	Unités	Valeurs
λ_s	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	215,5
λ_ℓ	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	125
c_{ps}	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	992,5
$c_{p\ell}$	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	1075
ρ_ℓ	kg.m^{-3}	2700
ρ_s	kg.m^{-3}	2700
μ_ℓ	N.s.m^{-2}	$6,4 \times 10^{-3}$
β	K^{-1}	$0,0237 \times 10^{-3}$
T_0	K	962
T_f	K	923
L_s	J.kg^{-1}	355878

La Fig. 6.5.a montre l'évolution des températures surfacique, sous-surfacique ($r = 0,0619$ m) et axiale des billettes en fonction de la hauteur pour une vitesse de coulée de $4,01 \times 10^{-3}$ m.s⁻¹. La Fig. 6.5.b montre l'évolution du flux de chaleur surfacique pour la même vitesse de coulée. L'intervalle de solidification $T_\ell - T_s$ choisi pour la méthode *enthalpique* est de 4 K. Pour la méthode de la *capacité effective moyenne* un intervalle de 10 K donne une meilleure précision. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus expérimentalement et numériquement [15, 56]. Les résultats numériques de la référence [15] ont été obtenus par la méthode avec *maillage mobile* qui est considérée comme la plus précise des méthodes utilisées pour la résolution des problèmes de changement de phase. Ceci souligne la bonne précision des deux méthodes utilisées dans la présente étude.

La méthode *enthalpique* est moins sensible au choix de l'intervalle de solidification. Elle est donc plus stable et plus précise que la méthode de la *capacité effective moyenne*. Cependant, la précision de cette dernière peut s'améliorer considérablement avec un choix judicieux de l'intervalle de solidification.

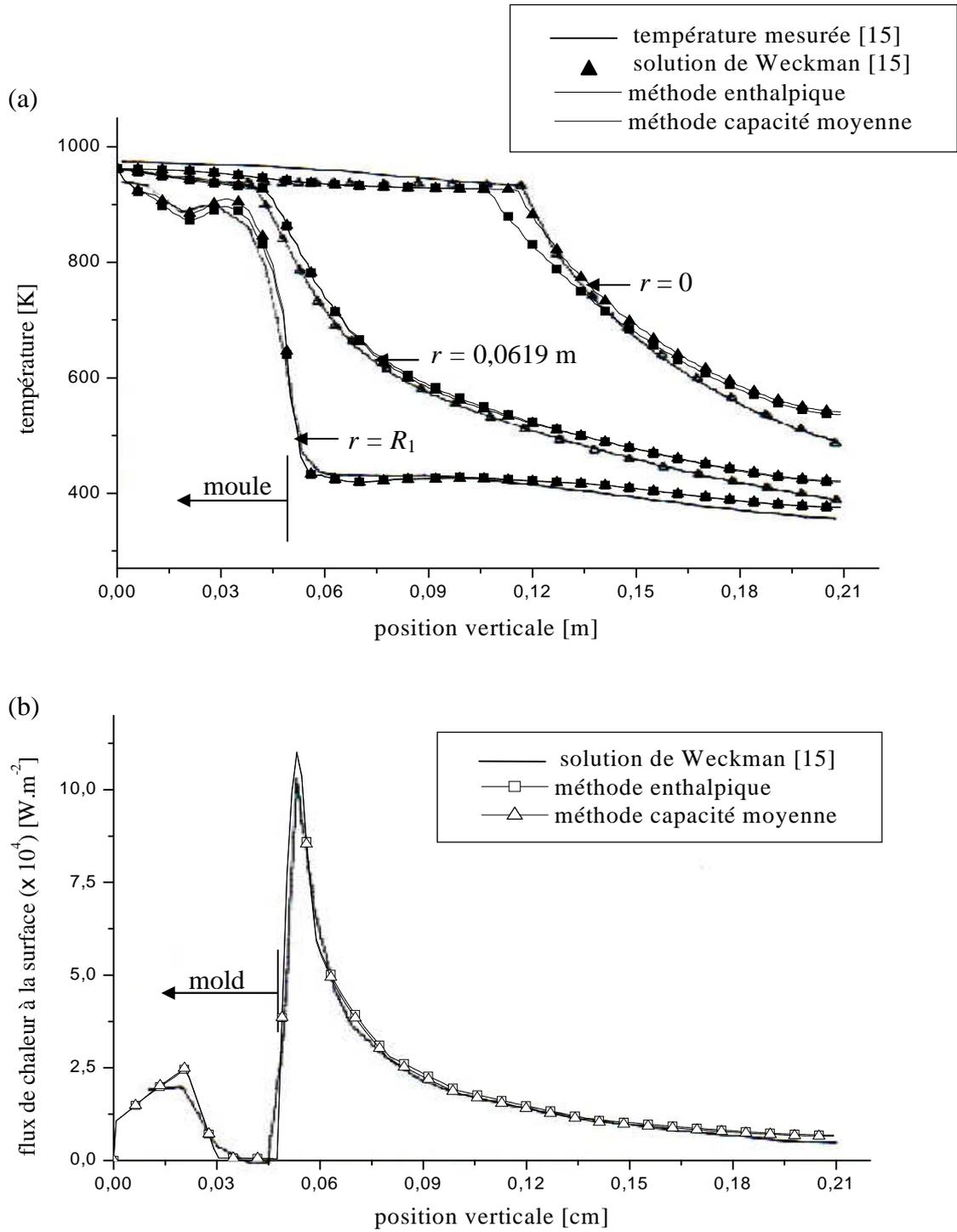


Fig. 6.5. Comparaison entre les résultats calculés et les résultats de la référence [15].

Les Figs. 6.6 et 6.7 montrent l'effet de la vitesse de coulée sur les lignes de courant calculées par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*, respectivement. Les lignes de courant identifient le chemin parcouru par les particules fluides lors de l'écoulement. Pour une faible vitesse de coulée ($1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$), le métal liquide stagnant pénètre à une profondeur de 0,039 m. Pour une vitesse de coulée de $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, cette distance est de l'ordre de 0,068 m. Pour une grande vitesse de coulée ($4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$), le métal liquide stagnant pénètre jusqu'à 0,11 m. Le volume du métal liquide stagnant pour les vitesses de coulée $1,63 \times 10^{-3}$, $2,54 \times 10^{-3}$ et $3,81 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ est $2,51 \times 10^{-4}$, $4,52 \times 10^{-4}$ et $6,53 \times 10^{-4} \text{ m}^3$, respectivement. L'épaisseur de l'enveloppe solidifiée augmente avec la direction axiale. Au bas du moule ($z = L_1$), cet épaisseur est de l'ordre de 0,0762, 0,046 et 0,026 m. Ces épaisseurs correspondent à 100 %, 60 % et 34 % du rayon des billettes pour les vitesses de coulée de $1,63 \times 10^{-3}$, $2,54 \times 10^{-3}$ et $3,81 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, respectivement. Alors, pour les faibles vitesses de coulée, la billette sort complètement solidifiée au bas du moule.

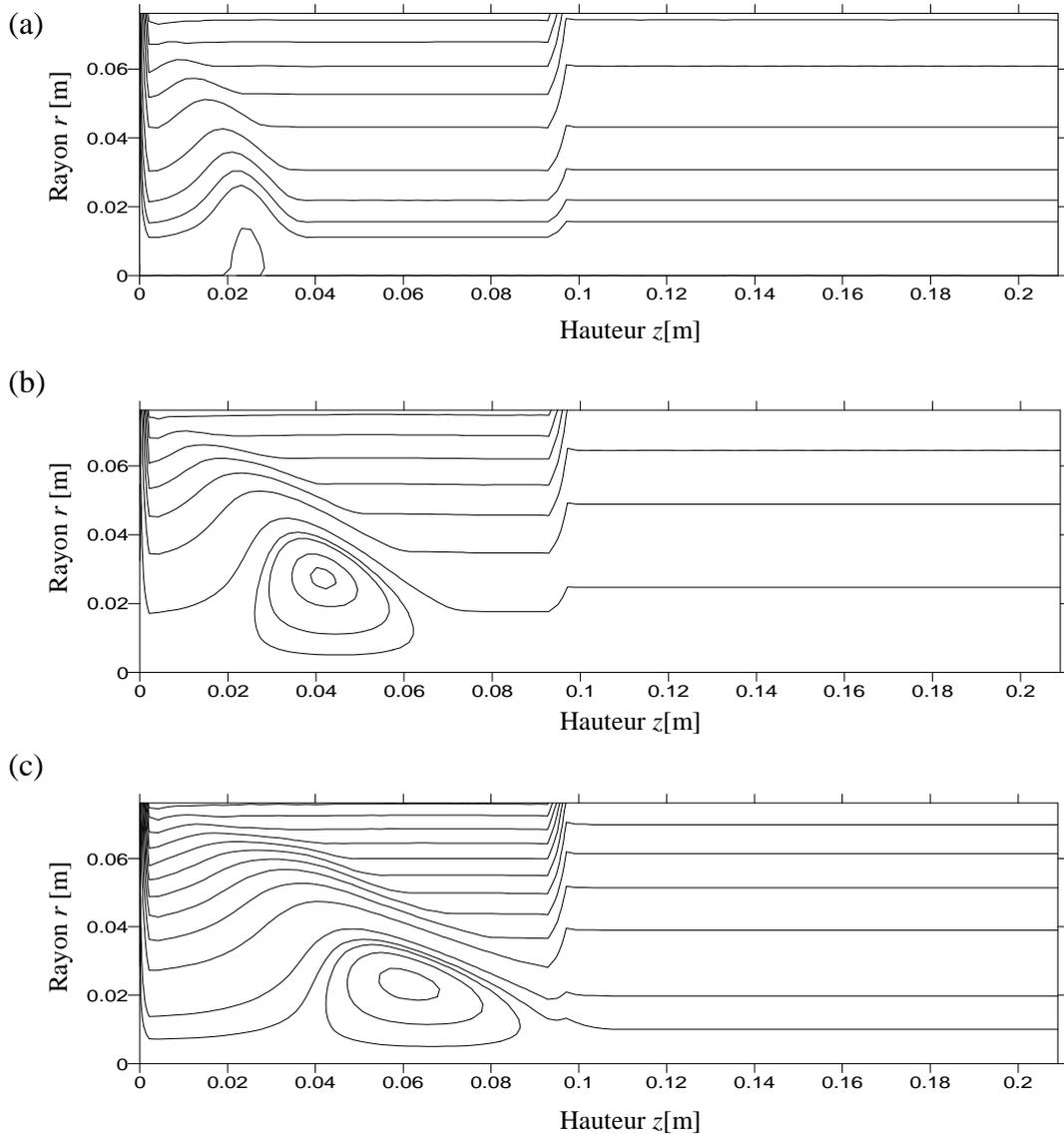


Fig. 6.6. Lignes de courant calculées par la méthode *enthalpique* pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$.

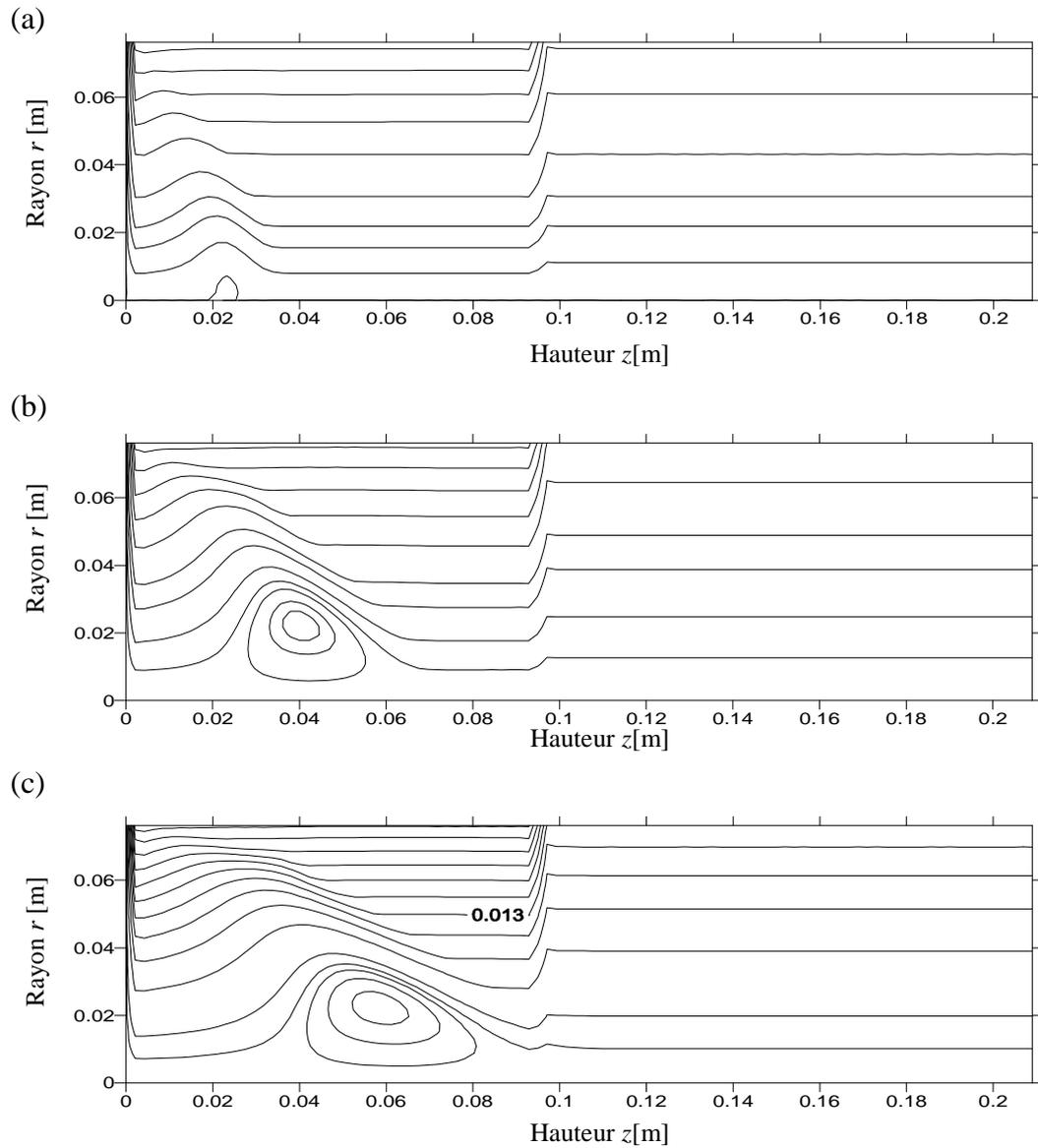


Fig. 6.7. Lignes de courant calculées par la méthode de la *capacité effective moyenne* pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$

Les Figs. (6.8.a) et (6.8.b) montrent l'effet de la vitesse de coulée sur la position et la forme du front de solidification obtenues par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*, respectivement. Avec l'augmentation de la vitesse de coulée, nous remarquons que :

- le front de solidification se déplace en aval (vers le bas). Ceci permet de prévoir la vitesse optimale de coulée afin d'éviter la condition d'évasion du métal liquide au bas du moule ;
- la pente du front de solidification devient de plus en plus forte.

Avec l'augmentation de la vitesse de coulée, la vitesse du fluide augmente et le temps d'extraction de la chaleur dans les deux régions de refroidissement (primaire et secondaire) devient insuffisant. Pour une structure uniforme du métal coulé, il est souhaitable d'avoir une pente du front de solidification aussi faible que possible.

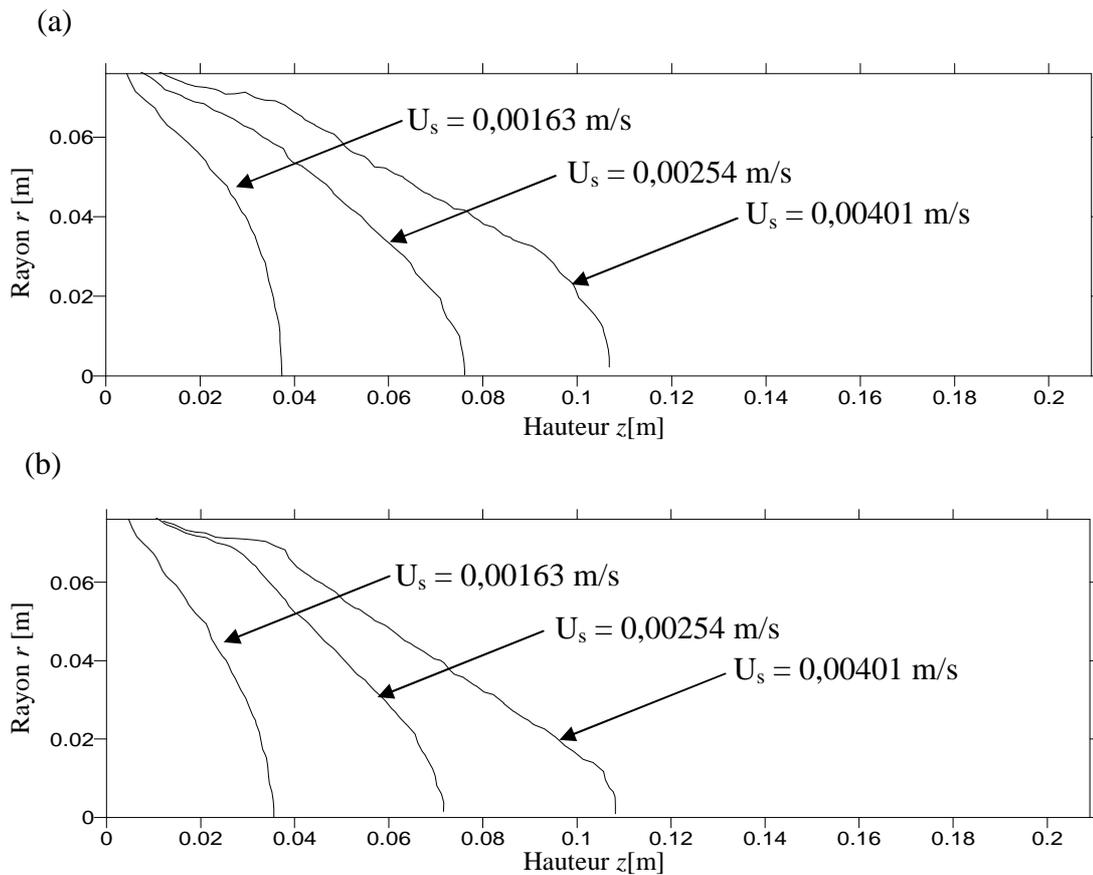


Fig. 6.8. Effet de la vitesse de coulée sur la position et la forme du front de solidification (a) méthode *enthalpique* (b) méthode de la *capacité effective moyenne*.

Les Figs. (6.9) et (6.10) montrent l'effet de la vitesse de coulée sur les profils de la température (isothermes) calculés par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*, respectivement. Nous remarquons que la vitesse de coulée influence considérablement sur la distribution de la température dans le métal coulé et contrôle donc le taux d'extraction de la chaleur. Pour une vitesse de coulée élevée ($4,01 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), Nous observons un réchauffement à la surface des billettes dans la région primaire. Cela indique que la refonte de l'enveloppe solidifiée peut avoir lieu, par conséquent il y a donc un grand risque d'évasion du métal liquide. Généralement, le réchauffement de la surface est considéré comme limite supérieure de la vitesse de coulée.

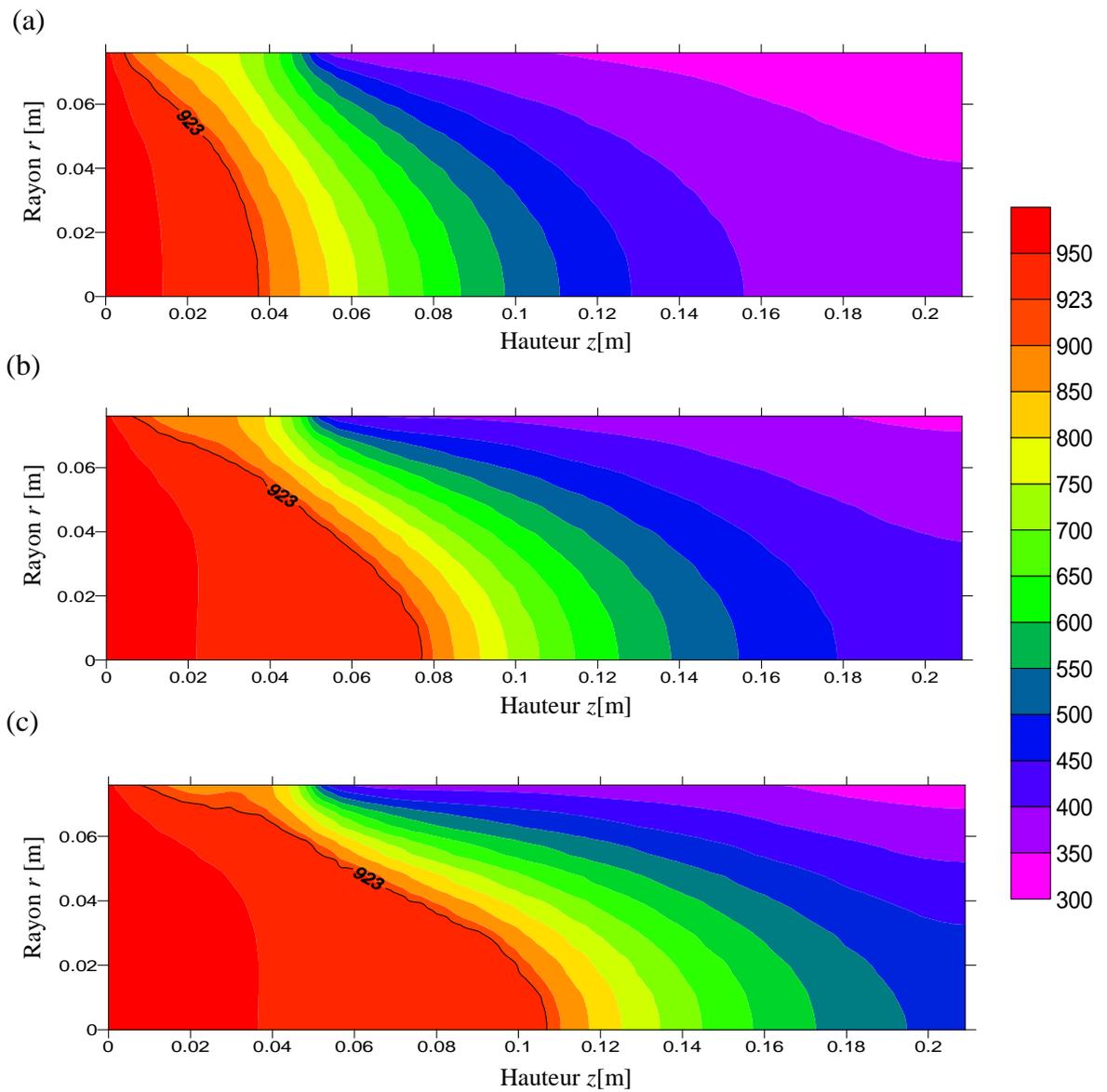


Fig. 6.9. Position du front de solidification et les isothermes calculées par la méthode *enthalpique* pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$.

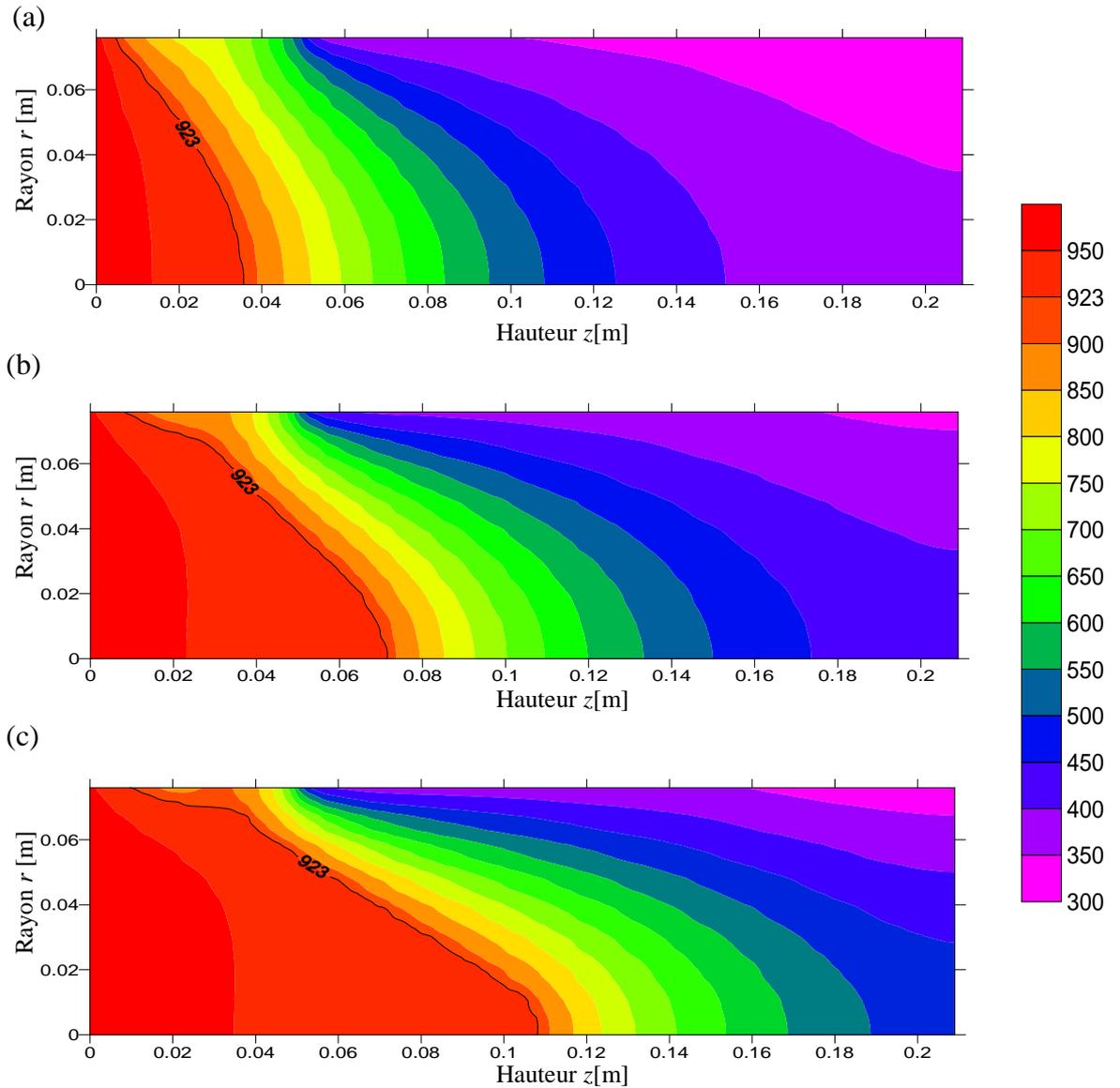


Fig. 6.10. Position du front de solidification et les isothermes calculées par la méthode de la *capacité effective moyenne* pour des vitesses de coulée (a) $1,63 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $2,54 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et (c) $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$.

Les Figs. (6.11.a) et (6.11.b) montrent l'évolution des températures à l'axe et à la surface des billettes pour les différentes vitesses de coulée (calculée par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*, respectivement). Nous remarquons qu'avec l'augmentation de la vitesse de coulée, les températures à l'axe et à la surface des billettes coulées deviennent plus importantes. En fait, l'augmentation de la vitesse de coulée entraîne l'augmentation du débit massique du métal fondu alimentant le moule qui doit être refroidi. Par conséquent, le front de solidification se déplace en aval et la température du métal coulé devient plus importante.

La section presque constante de la température (palier de solidification) de la Fig. (6.11.a) coïncide presque avec les sections dans les Figs. (6.8.a) et (6.8.b) qui marquent le début et la fin du front de solidification. Ceci vérifie bien que le changement de phase s'effectue à température constante dû au dégagement de la chaleur latente. Avec l'augmentation de la vitesse de coulée, nous remarquons que le prolongement du front de solidification (Figs. (6.8.a) et (6.8.b)) et le palier de solidification (Fig. (6.11.a)) deviennent plus importants. Le palier de solidification est clairement observé à l'axe des billettes (Fig. (6.11.a)). Il diminue jusqu'à disparaître à la surface des billettes (Fig. (6.11.b)), cela est dû à la forte cinétique de refroidissement qui est appliquée à la surface.

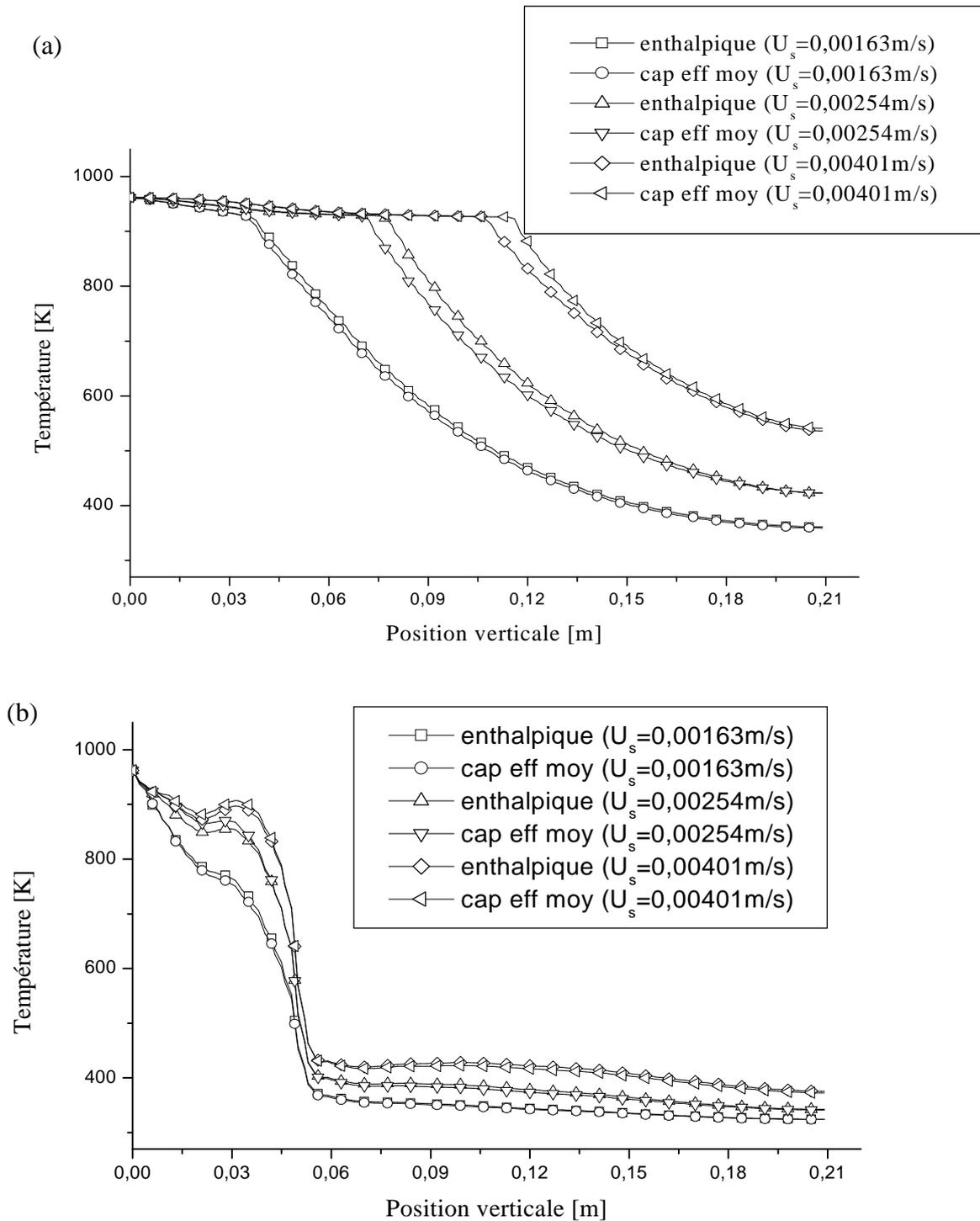


Fig. 6.11. Effet de la vitesse de coulée sur l'évolution de la température (a) à l'axe des billettes et (b) à la surface des billettes

La Fig. (6.12) montre la variation du flux de chaleur surfacique des billettes coulées à différentes vitesses calculée par la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*. Nous observons qu'avec l'augmentation de la vitesse de coulée, le taux du transfert thermique le long de la surface augmente. En effet, l'augmentation de la vitesse de coulée entraîne une augmentation de la quantité du métal fondu coulée et donc une augmentation de la quantité de chaleur évacuée. La discontinuité des courbes à $z = 0,05$ m est due au changement brusque dans la cinétique de refroidissement en passant de la région primaire à la région secondaire.

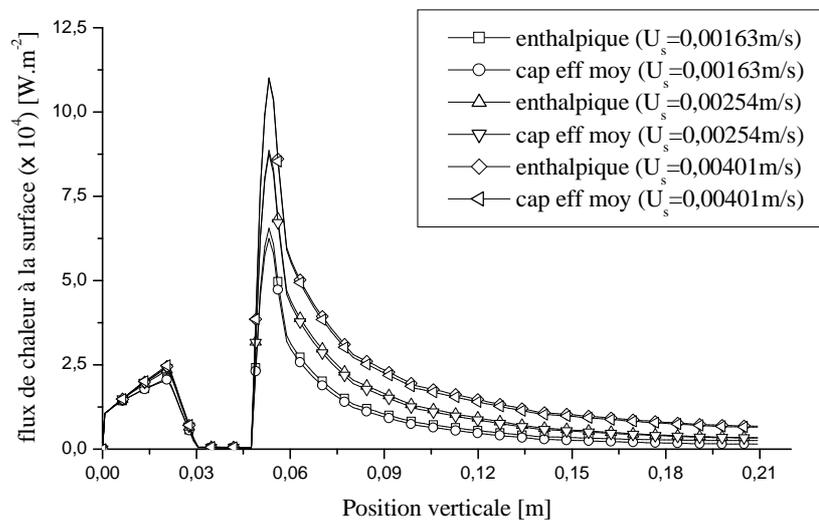


Fig. 6.12. Effet de la vitesse de coulée sur le flux de chaleur surfacique.

La température d'admission du métal fondu est un paramètre important dans la coulée des métaux, puisqu'elle détermine la quantité de chaleur qui doit être enlevée avant le début de la solidification. Elle est habituellement exprimée comme la différence de température d'admission du métal fondu et la température de solidification, appelée température de coulée.

La Fig. (6.13) montre l'effet de la température de coulée (calculée par la méthode *enthalpique*) sur la position du front de solidification pour une vitesse de coulée de $4,01 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$. Comme prévu, avec l'augmentation de la *température de coulée*, le front de solidification se déplace en aval. Nous observons que la forme du front de solidification reste presque inchangée avec le changement de la *température de coulée*. Ceci révèle que le taux de la chaleur évacuée par la région primaire, pour une cinétique de refroidissement constante, demeure inchangée avec l'augmentation de la *température de coulée*. Nous remarquons que la condition d'évasion du métal a lieu pour une *température de coulée* de 1022 K.

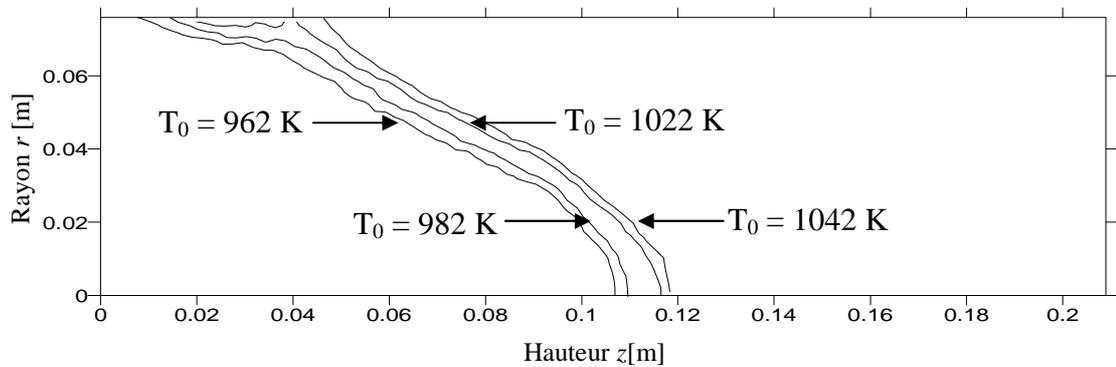


Fig. 5.13. Effet de la température de coulée sur la position du front de solidification.

CONCLUSION

GENERALE

La présente étude porte sur la résolution numérique par une formulation volumes finis du processus de la solidification lors de la coulée continue des billettes cylindriques en alliage d'aluminium type A6063 en utilisant la méthode *enthalpique* et la méthode de la *capacité effective moyenne*. Ces deux méthodes appartiennent à la famille de la méthode avec *maillage fixe* et permettent d'éviter le besoin pénible de changer la position du maillage pour coïncider avec le front de solidification. La complexité du calcul est donc réduite considérablement.

Pour tenir compte des spécificités de la solidification (vitesse relativement faible à l'interface solide-liquide) dans les équations de Navier-Stokes, deux techniques ont été utilisées : la première attribue une valeur très importante à la viscosité dans la phase solide et la deuxième simule la région pâteuse comme un milieu poreux.

Pour valider le modèle numérique élaboré, une étude expérimentale de la coulée simple (moulage) des lingots cylindriques en zinc pur a été menée au sein du laboratoire de métallurgie, département de mécanique, faculté des sciences de l'ingénieur de Tlemcen. Cette étude consiste à relever l'évolution de la température des lingots en fonction du temps qui est confrontée ensuite avec celle obtenue numériquement. Pour le calcul numérique, l'intervalle de solidification $T_\ell - T_s$ choisi est 0,016 K pour la méthode de la *capacité effective moyenne* et 0,04 K pour la méthode *enthalpique*. Cette dernière a donnée une meilleure précision avec un intervalle de solidification relativement plus important. Pour augmenter la précision de la méthode de la *capacité effective moyenne*, il faut réduire l'intervalle de changement de phase davantage. Ceci entraîne une grande instabilité dans le processus itératif et la convergence n'est plus assurée. La méthode *enthalpique* est donc plus stable et moins sensible au choix de l'intervalle de solidification $T_\ell - T_s$.

Dans la région liquide, il y a développement d'un écoulement mono cellulaire dont la taille diminue en fonction du temps. Le sens de la circulation de cet écoulement favorise les pertes de chaleur vers la surface libre et augmente ainsi la vitesse de solidification. En même temps, l'écoulement de retour diminue les pertes de chaleur vers la surface latérale et retarde la vitesse de solidification. Ainsi, la vitesse de déplacement du front de solidification dans le sens axial est plus importante que celle

dans le sens radial. Ceci est l'effet direct de la convection naturelle dans la région liquide.

Une deuxième validation a été faite sur un processus de coulée continue standard développé en [15]. Un bon accord des résultats obtenus avec les résultats expérimentaux et numériques disponibles en littérature a été obtenu. L'intervalle de solidification $T_\ell - T_s$ choisi pour la méthode *enthalpique* est de 4 K. La méthode de la *capacité effective moyenne* donne une meilleure précision avec un intervalle de 10 K. Les résultats numériques de la référence [15] ont été obtenus par la méthode avec *maillage mobile* qui est considérée comme la plus précise des méthodes utilisées pour la résolution des problèmes de changement de phase. Ceci souligne la bonne précision des deux méthodes utilisées dans la présente étude.

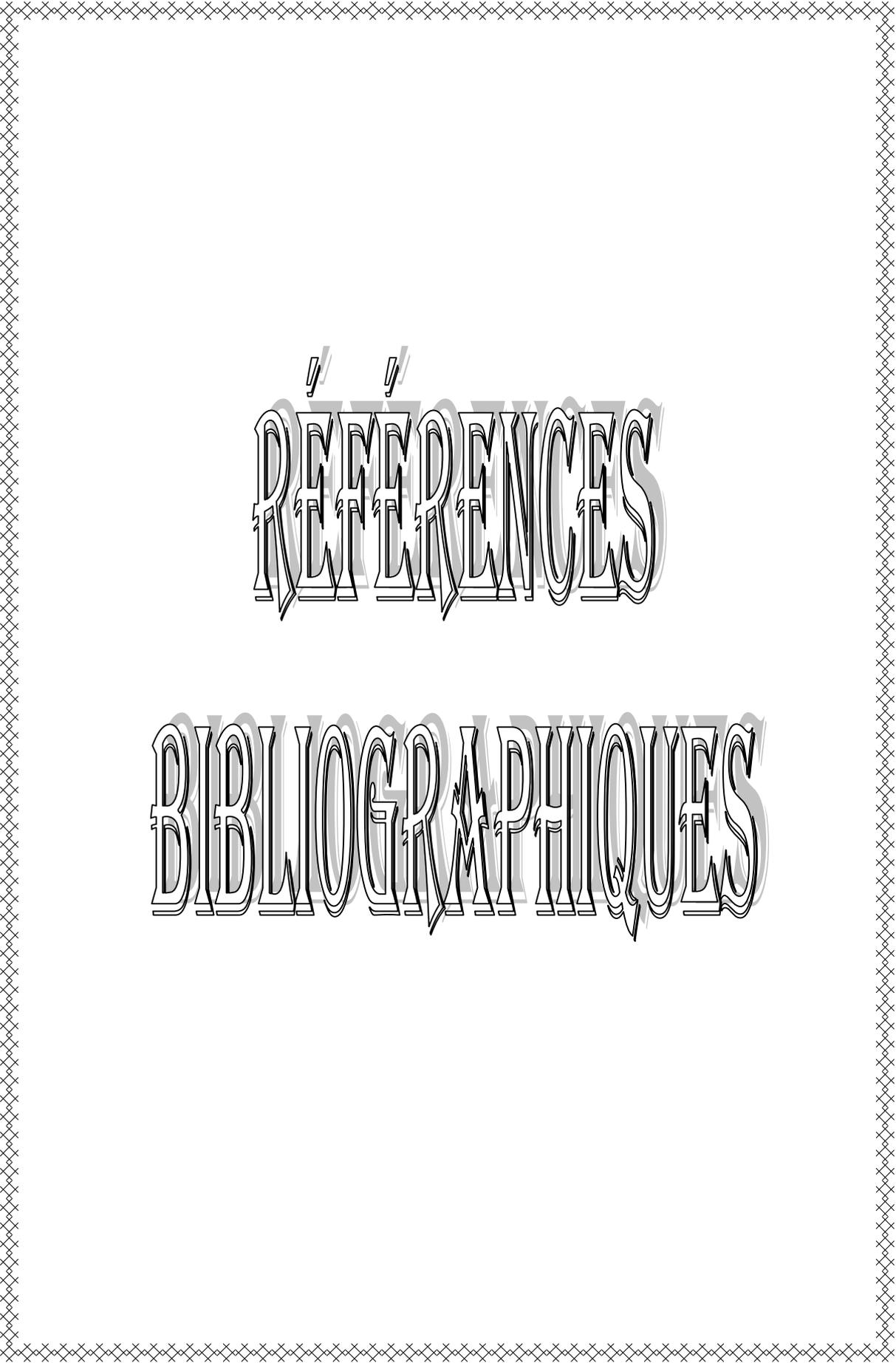
Cette étude a montré que la vitesse de coulée a un effet significatif sur le processus de solidification. Elle contrôle la position et la forme du front de solidification, qui contribue directement à la qualité microstructurale du métal coulé et à la détermination de la condition d'évasion. Le front de solidification se déplace en aval avec l'augmentation de la vitesse de coulée. Nous remarquons que la vitesse de coulée a également un grand effet sur la distribution de la température dans le métal coulé et contrôle ainsi le taux d'extraction de la chaleur. Dans la région du moule, nous constatons un certain réchauffement à la surface pour les grandes vitesses de coulée. Cela indique qu'une refonte de l'enveloppe solidifiée peut avoir lieu, entraînant avec elle l'évasion du métal liquide.

La température d'admission du métal fondu est un paramètre important dans la coulée des métaux puisqu'elle détermine la quantité de chaleur qui doit être enlevée avant le début de la solidification. La forme du front de solidification reste presque inchangée avec le changement de la *température de coulée*. Ceci révèle que le taux de la chaleur évacué par la région primaire, pour une cinétique de refroidissement constante, demeure inchangée avec l'augmentation de la *température de coulée*.

La méthode enthalpique est parfaitement insensible au choix de l'intervalle de solidification. Elle est donc plus stable et plus précise que la méthode de la *capacité*

effective moyenne qui reste assez sensible au choix de l'intervalle de solidification. Cependant, la précision de la méthode de la *capacité effective moyenne* peut s'améliorer considérablement avec un excellent choix de l'intervalle de solidification (surtout pour les alliages, où il y a présence réelle de l'intervalle de solidification).

Enfin, nous souhaitons que l'objectif de ce travail a été atteint et qu'il puisse servir comme outil de réponse à plusieurs problèmes (théoriques et industriel) dans le domaine de la coulée des métaux. Il reste beaucoup à faire, comme tenir compte de la composition chimique de l'alliage, l'évolution microstructurale de la solidification, trouver un modèle standard pour les refroidissements primaire et secondaire, l'écoulement turbulent qui peut avoir lieu dans le moule, etc. dont nous espérons une continuité.



REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Goodman T.R., The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase, *Trans. ASME* 80 (1958) 353-342.
- [2] Yeh L.T., Chung B.T.F., Solidification and melting of material subjected to convection and radiation, *J. Space. Rockets* 12 (1975) 329-334.
- [3] Boley B.A., The embedding technique in melting and solidification problems, moving boundary problems in heat flow and diffusion, in J. Ockendon and W. Hodgkins, eds., *Proceedings of the conferences held at the University of Oxford, 1974*, pp. 150-172.
- [4] Crank J. Gupta R., Isotherm migration method in two dimensions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 18 (1975) 1101-1117.
- [5] Keung C.S., The Use of sources and sinks in solving two-dimensional heat conduction problems with change of phase in arbitrary domains, PHD dissertation, Columbia Univ. New York, 1980.
- [6] Hills A.W.D., Moore M. R., Use of integral-profile methods to treat heat transfer during solidification, Edited by A. W. D. Hills, *Heat and Mass Transfer in Process Metallurgy*, Ins. Of Mining and Metallurgy, 1967, pp. 141-171.
- [7] Comini G., Guidice S. , Del Lewis, R., Zienkiewicz O., Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 8 (1974) 613-624.
- [8] Runnels S.R., Carey G.F., Finite element simulation of phase change using capacitance methods, *Numer. Heat Transfer, Part B* 19 (1991) 13-30.
- [9] Khadraoui Y., Korti A.N., Simulation numérique du transfert thermique dans un métal en voie de solidification, *J. Maghrébin de Physique* 1 (2000) 57-60.

- [10] Voller, V.R., Prakash, C., A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 30 (1987) 1709-1719.
- [11] Giangi M., Stella F., Kowalewski T.A., Phase change problems with free convection: fixed grid numerical simulation, *Computing and Visualization in Science* 2 (1999) 123–130.
- [12] Venneker B.C.H., Katgerman L., Modelling issues in macrosegregation predictions in direct chill castings, *Journal of light metals* 2 (2002) 149-159.
- [13] Huang C.H., Ozisik M.N., Sawaf B., Conjugate gradient method for determining unknown contact conductance during metal casting, *Int. J. Heat Mass Transfer* 35 (1992) 1779-1786.
- [14] Kang B.H., Jaluria Y., Thermal modeling of the continuous casting process, *J. of Thermophysics and Heat Transfer* 7 (1993) 139-147.
- [15] Weckman D.C., Niessen P., A numerical simulation of the D. C. continuous casting process including nucleate boiling heat transfer, *Metall. Trans. 13B* (1982) 593-602.
- [16] Jacob M., Heat transfer, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959, Vol. II, pp. 355.
- [17] Rohsenow W.M., *Developments in heat transfer*, MIT Press, Cambridge, 1964.
- [18] Rohsenow W.M., *Modern developments in heat transfer*, Academic Press, New York, 1963
- [19] John Lienhard IV, John Lienhard V, *A heat transfer textbook, Third Edition*, Phlogiston Press, Cambridge, 2000.
- [20] Rohsenow W.M., Boiling , in *Handbook of heat transfer* 33

- [21] Das S.K., Thermal modelling of D. C. continuous casting including sub-mould boiling heat transfer, *Applied Thermal Engineering* 19 (1999) 897-916.
- [22] Das S.K., Numerical formalism for solving heat transfer in continuous casting process by nonorthogonal co-ordinate transformation strategy, *Scandinavian J. of Metallurgy* 22 (1993) 198-202.
- [23] Amin M.R., Greif D., Conjugate heat transfer during two-phase solidification process in a continuously moving metal using average heat capacity method, *Int. J. of Heat Transfer* 42 (1999) 2883-2895.
- [24] Lee R.T., Chiou W.Y., Finite element analysis of phase change problems using multilevel techniques, *Numer. Heat Transfer, Part B* 27 (1995) 277-290.
- [25] Hsiao J. S., Chung B. T. F., An efficient algorithm for finite element solution to two-dimensional heat transfer with melting and freezing, ASME paper 84-HT-2, presented at the 22d national heat transfer Conf., Niagara Falls, 1984.
- [26] Gartling D.K., NACHOS II-A finite element computer program for incompressible flow problems, Part I-theoretical background, SAND86-1886, UC-32, Sandia laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1987.
- [27] Lan X.K., Khodadadi J.M, Fluid flow, heat transfer and solidification in the mold of continuous casters during ladle change, *Int. J. of heat and mass transfer* 44 (2001) 953-965.
- [28] Lam C.K.G., Bremhorst, A modified form of the k- ϵ model for predicting wall turbulence, *Trans. ASME, J. Fluids Eng.* 103 (1981) 456-460.
- [29] Patel V.C., Rodi W., Scheuerer G., Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows, *AIAA J.* 23 (1985) 1308-1319.

- [30] Mahmoudi J., Vynnycky M., Modelling of fluid flow, heat transfer and solidification in the strip casting of copper base alloy (II). Heat transfer, Scandinavian J. of Metallurgy 30 (2001) 30-40.
- [31] Hardin R.A., Liu K., Kapoor A., Beckermann C., A transient simulation and dynamic spray cooling control model for continuous steel casting, Metallurgical and Materials transactions B 34B (2003) 297-306.
- [32] Touloulian Y.S., Powell R.W., Ho C.Y., Klemens P.B., Thermophysical Properties of Matter, IFI/Plenum, New York 1972, vol. 8.
- [33] Nozaki T., Matsuno J.I., Murata K., Ooi H., Kodama M., Trans. Iron Steel Inst. Jpn., 1978, vol. 18 (6), pp. 330–38.
- [34] Mahmoudi J., Vynnycky M., Sivesson P., Fredriksson H., An experimental and numerical study on the modelling of fluid flow, heat transfer and solidification in a copper continuous strip casting process, Materials Transactions 44 (2003) 1741-1751.
- [35] Médale M., Jaeger M., Modélisation par éléments finis d'écoulements a surface libre avec changement de phase solide-liquide, Int. J. Therm. Sci. 38 (1999) 267-276.
- [36] Chakraborty S., Chakraborty N., Kumar P., Dutta P., Studies on turbulent momentum, heat and species transport during binary alloy solidification in a top-cooled rectangular cavity, Int. J. of Heat and Mass Transfer 46 (2003) 1115-1137.
- [37] The CRC Handbook of Thermal Engineering, Ed. Frank Kreith Boca Raton: CRC Press LLC, 2000
- [38] Sharma D. G. R., Krishnan M., Ravindran C., Determination of the rate of latent heat liberation in binary alloys, Materials Characterization 44 (2000) 309–320.

- [39] Bonacina, C., Comini, C., Fasano, A., Primicerio, M., Numerical solution of phase-change problems, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 16 (1973) 1825-1832.
- [40] Korti A.N., Khadraoui Y., A numerical simulation of the D. C. continuous casting using average heat capacity method. *Scandinavian J. of Metallurgy* 33 (2004) 374-354.
- [41] Hsiao J. S., An efficient algorithm for finite difference analyses of heat transfer with melting and solidification, *Numer. Heat Transfer* 8 (1985) 653-666.
- [42] Eyglunent B., *Manuel de thermique (revue et pratique)*, ED. Hermes, Paris 1997.
- [43] Semma E., El Ganaoui M., Bennacer R., Cheddadi A., Effets de la convection thermocapillaire sur les instabilités de la phase fluide et de l'interaction solide/liquide en croissance dirigée, 16ème Congrès Français de Mécanique, Nice, 1-5 septembre 2003.
- [44] Ahn K., Kim D., Kim B. S., Sohn C. H., Numerical investigation on the heat transfer characteristics of a liquid-metal pool subjected to a partial solidification, *Process Progress in Nuclear Energy* 44 (2004) 277-304.
- [45] SEYEDEIN S.H., HASAN M., A three-dimensional simulation of coupled turbulent flow and macroscopic solidification heat transfer for continuous slab casters, *Int. J. of heat and Mass Transfer*, 40 (1997) 4405-4423.
- [46] Wiwatanapataphee B., Wu Y.H., Archapitak J., Siew P.F., Unyong B., A numerical study of the turbulent flow of molten steel in a domain with a phase-change boundary, *J. of Computational and Applied Mathematics* 166 (2004) 307–319.

- [47] A. N. Korti, Y. Khadraoui, R. Saim, Modélisation numérique des problèmes de changement de phase par la méthode des éléments finis, 16ème Congrès Français de Mécanique CFM2003, 1-5 Septembre, Nice.
- [48] Bermudez A., Otero M.V., Numerical solution of a three-dimensional solidification problem in aluminum casting, *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004) 1885–1906.
- [49] Patankar S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere press, Washington, 1980.
- [50] Ferziger J.H., Peric M., *Computational methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996
- [51] Anjorin V.A.O., Barton I.E., Removal of temporal and under-relaxation terms from the pressure-correction equation of the simple algorithm *international journal of fluid dynamics* 5 (2001) 59-75.
- [52] Madhava S., *MFIX Documentation Numerical Technique*, EG&G Technical Services of West Virginia, Federal Energy Technology Center, 1998.
- [53] Vuik C., Saghir A., Boerstael G.P., The Krylov accelerated SIMPLE(R) method for flow problems in industrial furnaces, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 33 (2000) 1027–1040
- [54] Ha M.Y., Lee H.G., Seung S.H., Numerical simulation of three-dimensional flow, heat transfer, and solidification of steel in continuous casting mold with electromagnetic brake, *J. of Materials Processing Technology*, 133 (2003) 322-339.

- [55] Nigro N., Huespe A., Fachinotti V., Phasewise numerical integration of finite element method applied to solidification processes, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 43 (2000) 1053-1066.
- [56] Korti A.N., Khadraoui Y., Simulation numérique de la coulée continue des métaux avec refroidissement direct (DIRECT-CHILL), *XXX Journées d'Etude des Equilibres entre Phase*, Editeurs : M. Cochez, M. Ferriol, 31 Mars – 1 Avril 2004
- [57] Banaszek J., Jaluria Y., Kowalewski T.A., Rebow M., Semi-implicit FEM analysis of natural convection in freezing water, *Numer. Heat Transfer, Part A*, 36 (1999) 449-472.
- [58] Shi Z., Guo Z.X., Numerical heat transfer modeling for wire casting, *Materials Science and Engineering A365* (2004) 311–317
- [59] Souza E.N., Cheung N., Santos C.A., Garcia A., Factors affecting solidification thermal variables along the across-section of horizontal cylindrical ingots, *Materials Science and engineering A397* (2005) 239-248.
- [60] Voller V.R., Swaminathan C.R., Thomas B.G., Fixed grid techniques for phase change problems. *Int. J. for numerical methods in engineering* 30 (1990) 875-898.
- [61] Swaminathan C.R., Voller V.R., Towards a general numerical scheme for solidification systems. *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 40 (1997) 2859-2868.
- [62] Blase T.A., Guo Z.X., Shi Z., Long K., Hopkins W.G., A 3D conjugate heat transfer model for continuous wire casting, *Materials Science and Engineering A365* (2004) 318–324.
- [63] Arvind K. Pradip D., Modeling of transport phenomena in continuous casing of non-dendritic billets, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 48 (2005) 3674-3688.

- [64] Raznjevic K., Tables et diagrammes thermodynamique, Eyrolles, Ed. Paris, 1970.
- [65] Guellil H., Simulation numérique de transfert thermique lors de l'écoulement d'un métal en voie de solidification, Mémoire de magistère, Département de mécanique, Université Abou Bekr Belkaïd Tlemcen, 2005.
- [66] Korti A. N., Khadraoui Y., Thermal modeling of D. C. continuous casting process of a Al-Mg alloy, III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering C.A. Mota Soares et.al. (eds.) Lisbon, Portugal, 5–8 June 2006
- [67] Fachinotti V.D., Bellet M., Modélisation tridimensionnelle par éléments finis de la macroségrégation au cours de la solidification d'un alliage binaire, 16ème Congrès Français de Mécanique Nice, 1-5 septembre 2003
- [68] Vreeman C.J., Krane M.J.M., Incropera F.P., The effect of free-floating dendrites and convection on macrosegregation in direct chill cast aluminum alloys Part I: model development, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 43 (2000) 677-686.
- [69] Vreeman C.J., Incropera F.P., The effect of free-floating dendrites and convection on macrosegregation in direct chill cast aluminum alloys, Part II: predictions for Al-Cu and Al-Mg alloys, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 43 (2000) 687-704.
- [70] Korti A.N., Khadraoui Y., Simulation numérique du transfert thermique incluant l'ébullition nucléée lors de la coulée continue des métaux, *Mécanique & Industrie* 7 (2006), 29-37

RÉSUMÉ

Les procédés industriels tels que le moulage et la coulée continue en fonderie font apparaître des écoulements avec des fronts de changement de phase liquide-solide. Leur simulation numérique nécessite la mise en oeuvre de techniques de suivi d'interfaces. Nous avons à cet effet développé un module basé sur la méthode des volumes finis, qui permet de traiter ce type d'interfaces. Le suivi des fronts de changement de phases est assuré à l'aide de deux méthodes (enthalpique et de la capacité effective moyenne), avec prise en compte d'une zone pâteuse (changement de phase anisotherme). Avec ces deux méthodes, il n'est donc pas nécessaire de recourir à une adaptation du maillage. L'effet du changement de phase sur le régime convectif est tenu en compte en employant deux méthodes : la première attribue une valeur très importante à la viscosité dans la phase solide et la deuxième simule la région pâteuse comme un milieu poreux.

Pour valider le modèle numérique, une étude expérimentale de la coulée simple (moulage) des lingots cylindriques en zinc pur a été menée au sein du laboratoire de métallurgie, département de mécanique, faculté des sciences de l'ingénieur de Tlemcen. Cette étude consiste à relever l'évolution de la température des lingots en fonction du temps et de la confronter avec celle obtenue numériquement. Un bon accord a été obtenu.

Le modèle est appliqué ensuite à l'étude numérique bidimensionnelle d'un procédé de coulée continue d'un alliage d'aluminium type A6063 pour déterminer l'évolution des lignes de courant, la distribution de la température et du flux de chaleur dans les différentes phases. L'effet de la vitesse de coulée sur l'évolution de l'écoulement du fluide, sur la température et le flux de chaleur surfacique a été étudié. La distribution de la température et le flux de chaleur surfacique ont été comparés avec les mesures expérimentales et les résultats numériques disponibles en littérature. Un bon accord a été obtenu.

Mots clés : Changement de phase, solidification, volumes finis, modélisation numérique

ABSTRACT

The industrial processes such as the molding and continuous casting in foundry reveal flows with fronts of phase change liquid-solid. Their numerical simulation requires the implementation of tracking techniques of interfaces. We have for this purpose developed a module based on the finites volumes method, which makes it possible to treat this type of interfaces. The tracking of the fronts of phase change is ensured with two methods (enthalpy and average effective capacity), with taking into account of a mushy zone. With these two methods, it is thus not necessary to resort to an adaptation of the grid. The effect of the phase change on the convective mode is held in account by employing two methods: the first allots a very important value to viscosity in the solid phase and the second simulates the mushy zone like a porous environment.

To validate the numerical model, an experimental study of the simple casting (molding) of the cylindrical pure zinc ingots was undertaken within the laboratory of metallurgy, department of mechanics, faculty of science of engineer Tlemcen. This study consists in raising the change of the temperature of the ingots according to time and to confront it with that obtained numerically. A good agreement was obtained

The model is applied then to the two-dimensional numerical study of a continuous casting process of a standard aluminum alloy A6063 to determine the evolution of the stream function, the distribution of the temperature and heat flow in the different phases. The effect of the casting speed on the evolution of the fluid flow, on the temperature and the surface heat flow was studied. The distribution of the temperature and the surface heat flow were compared with experimental measurements and the numerical results available in literature. A good agreement was obtained.

Keys words : Phase change, solidification, finites volumes, numerical modeling

ملخص

عملية القولية و القولية المستمرة في مصانع السباكة تظهر سيلان المادة المصهورة مع جبهات تغيير المرحلة من صلب الى سائل. التمثيل الرقمي يقتضي استعمال تقنيات لتتبع جبهات التغيير. و لهذا الغرض وضعنا نظام يعتمد على طريقة الأحجام المحدودة يجعل من الممكن التعامل مع هذا النوع من الجبهات. تعقب جبهات تغيير المرحلة يعتمد على طريقتين (الأنثالبية و السعة الفعالة المتوسطة) مع مراعاة وجود المرحلة اللزجة. بهذه الطريقتين ليس من الضروري اللجوء إلى لتعديل الشبكة. تأثير تغيير المرحلة على نظام الانتقال الحراري بالحمل يأخذ بعين الاعتبار باستخدام طريقتين : الأولى تعتمد على تخصيص قيمة هامة جدا للزوجة في المرحلة الصلبة والثانية تمثل المرحلة اللزجة مثل البيئة المليء بالثغرات. لإثبات صحة النموذج العددي، دراسة تجريبية لقولية سبائك اسطوانية من الزنك النقي تم القيام بها داخل مختبر علم المعادن، قسم الميكانيك، كلية العلوم الهندسية تلمسان. تعتمد هذه الدراسة على رفع تغير درجة حرارة السبائك مع الزمن ومواجهتها مع التي تم الحصول عليها رقميا. اتفاق جيد تم الحصول عليه.

ثم تم تطبيق هذا النموذج لدراسة رقمية ثنائية الابعاد لعملية القولية المستمرة لسبائك الالومنيوم صنف A6063 ولتحديد تغير خطوط التيار و توزيع درجات الحرارة والدفق الحراري في المراحل المختلفة. تمت أيضا دراسة اثر سرعة القولية على تطور تدفق السائل، درجة الحرارة و الدفق الحراري على السطح. توزيع درجات الحرارة و الدفق الحراري على السطح تمت مقارنتها مع القياسات التجريبية والنتائج الرقمية المتاحة في الادب. اتفاق جيد تم الحصول عليه.

كلمات المفاتيح : جبهات التغيير، تصلب، الأحجام المحدودة، التمثيل الرقمي