



**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID –TLEMCEEN-**

**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

## **THESE**

**En vue de l'obtention du diplôme de doctorat en  
Génie Mécanique**

**Présenté par :**

**Mr. *BOUKHALFA Abdelkrim***

## **Thème**

**Comportement vibratoire des arbres tournants  
en matériaux composites**

**Soutenu le Mardi 12 Mai 2009 devant le jury composé de :**

<b>Président</b>	<b>Mr. CHEIKH Abdelmadjid</b>	<b>Prof</b>	<b>UAB - Tlemcen</b>
<b>Directeur de thèse</b>	<b>Mr. HADJOUI Abelhamid</b>	<b>M.C</b>	<b>UAB - Tlemcen</b>
<b>Examineur</b>	<b>Mr. HOUMAT Abderahim</b>	<b>Prof</b>	<b>UAB - Tlemcen</b>
<b>Examineur</b>	<b>Mr. BENGUEDIAB Mohamed</b>	<b>Prof</b>	<b>UDL - SBA</b>
<b>Examineur</b>	<b>Mr. BOUTCHICHA Djilali</b>	<b>M.C</b>	<b>USTMB- Oran</b>

***Année universitaire 2008-2009***

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

---

## Dédicace

Je dédie cette thèse :

A ma famille que je prie de trouver ici l'expression de ma reconnaissance, de mon profond respect et de mes sentiments les plus respectueux. Ainsi qu'a tous mes amis.

Mr : BOUKHALFA. Abdelkrim

السيد: بوخالفة عبد الكريم

## **Remerciements**

Avant de commencer à parcourir cette thèse, j'aimerais faire quelques remerciements.

Je remercie Mr. Hadjoui Abdelhamid pour l'encadrement, ses précieux conseils et toute la confiance qu'il m'a accordée tout au long de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent à Mr. Cheikh Abdelmadjid qui a accepté de présider mon jury, puis Mr. Houmat Abderahim, Mr. Benguediab Mohamed, et Mr. Boutchicha Djilali qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon travail.

Je tiens à remercier également toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

---

## Résumé

Le travail de cette thèse est consacré à l'étude du comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites embarqués, avec des disques rigides isotropes, sur paliers élastiques amortis modélisés comme ressorts et amortisseurs visqueux. Une version- $p$  de la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser la structure. Un élément fini hiérarchique de type poutre avec six degrés de liberté par noeud est développé. L'assemblage est fait de la même manière que la version standard de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments. Une étude théorique est faite pour l'établissement de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation du système (arbre, disque et paliers) nécessaires à la détermination des équations du mouvement. Dans cette étude la déformation transversale de cisaillement, l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et l'effet de couplage dû à la stratification des couches de l'arbre en matériaux composites sont pris en considération. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences propres et des vitesses critiques du système. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de la méthode utilisée. Plusieurs exemples sont traités, et une discussion est établie pour déterminer l'influence des différents paramètres étudiés et de conditions aux limites.

**Mots clés:** Arbre tournant ; Disque; Matériaux composites; Effet gyroscopique; Version- $p$ ; MEF.

---

## **Abstract**

The work of this thesis is concerned with the study of the vibratory behavior of the rotating composite shafts. The composite shaft contains isotropic rigid disks and is supported by bearings that are modeled as springs and viscous dampers. A  $p$ - version of the finite element method is used to model the structure. A hierarchical finite element of beam type with six degrees of freedom per node is developed. The assembly is made same manner as the standard version of the finite element method for several elements. A theoretical study allows the establishment of the kinetic energy and the strain energy of the system (shaft, disk and bearings) necessary to the result of the equations of motion. In this study the transverse shear deformation, rotary inertia and gyroscopic effects, as well as the coupling effect due to the lamination of composite layers have been incorporated. A program is elaborate for the calculation of the eigenfrequencies and critical speeds of the system. The results obtained are compared with those available in the literature and show the speed of convergence, the precision and the effectiveness of the method used. Several examples are treated, and a discussion is established to determine the influence of the various parameters and boundary conditions.

**Keywords:** Rotating shaft; Disk; Composite materials; Gyroscopic effect;  $p$ - version; FEM.

---

## ملخص

عمل هذه الأطروحة مكرس لدراسة السلوك الاهتزازي للأعمدة الدوّارة ذات المواد المركبة المحملة لأقرص صلبة ذات مواد موحدة الخواص، على أسندة مرنة مُنمّجة على شكل نوابض و مُخمّات لزجة. نسخة  $p$ - لطريقة العناصر المتناهية، أستعملت لنمذجة البنية. عنصر منتهي تسلسلي من فصيلة رافدة ذات عقدتين و ست درجات حرية بكل عقدة طوّرت. التركيب لعدة عناصر للبنية عمل بنفس نمط النسخة المعيارية لطريقة العناصر المتناهية. دراسة نظرية أستخدمت للحصول على الطاقات الحركية و الكامنة للبنية (عمود، قرص و أسندة)، وذلك قصد الوصول إلى معادلات الحركة، آخذين بعين الاعتبار في هذه الدراسة التشوهات العرضية للقص، العطالة الدورانية، التأثير المداري و تأثير التزاوج الناتج عن تنضيد طبقات العمود الدوّار ذو المواد المركبة. برنامج عددي حَقَقَ يسمح بتحديد الذبذبات الخاصة و السرعات الخطرة للبنية الواردة سابقا. النتائج المحصّل عليها و المقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع أثبتت سرعة التقارب، الدقة و فعالية الطريقة المستعملة. عدة أمثلة عُولجت و مناقشة حَقَّقت من أجل تبين تأثير مختلف العوامل المدروسة و الشروط الحدودية للعمود الدوّار.

الكلمات الرئيسية : عمود دوّار؛ قرص ؛ مواد مركبة ؛ تأثير مداري ؛ نسخة  $p$ - FEM.

# Sommaire

<b>Sommaire</b> .....	i
<b>Liste des figures</b> .....	iv
<b>Listes des tableaux</b> .....	viii
<b>Listes des symboles</b> .....	ix
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Revue bibliographique</b>	
1.1. Dynamique des rotors .....	3
1.1.1. <i>Introduction</i> .....	3
1.1.2. <i>Bref historique de la dynamique des rotors</i> .....	5
1.2. Les matériaux composites .....	9
1.2.1. <i>Introduction</i> .....	9
1.2.2. <i>Définitions</i> .....	10
1.2.3. <i>Bref historique des matériaux composites</i> .....	14
1.3. Dynamique des rotors en matériaux composites .....	21
<b>Chapitre 2 : Théorie de poutres</b>	
2.1. Structure poutre .....	24
2.1.1. <i>Définition</i> .....	24
2.1.2. <i>Hypothèse cinématique de la théorie des poutres</i> .....	24
2.2. Equations cinématiques .....	25
2.2.1. <i>Relations déformations - déplacements</i> .....	27
2.2.2. <i>Relations contraintes - déformations</i> .....	29
2.3. Energie de déformation de l'arbre .....	32
2.4. Energie cinétique de l'arbre.....	34
2.4.1. <i>Systèmes de coordonnées</i> .....	34
2.4.2. <i>Position et vitesse d'un point de la poutre</i> .....	35
2.4.3. <i>Expression de l'énergie cinétique</i> .....	36
2.5. Energie cinétique du disque.....	36
2.6. Travail virtuel des paliers .....	37
2.7. Equations du mouvement .....	38
<b>Chapitre 3 : Formulations par la version- <math>p</math> de la méthode des éléments finis</b>	
3.1. Introduction .....	40

3.2. Sélection des fonctions de forme et modélisation de l'élément poutre.....	40
3.3. Détermination de la matrice élémentaire de l'arbre $[K_a^e]$ .....	42
3.4. Détermination des matrices élémentaires de l'arbre $[M_a^e]$ et $[G_a^e]$ .....	45
3.5. Détermination des matrices élémentaires du disque $[M_D^e]$ et $[G_D^e]$ .....	46
3.6. Détermination des matrices élémentaires $[K_p^e]$ et $[C_p^e]$ .....	47
3.7. Forme finale des équations du mouvement .....	48

#### **Chapitre 4 : Organisation de la programmation**

4.1. Introduction .....	51
4.2. Schéma de calcul .....	51
4.3. Description du programme .....	52
4.3.1. Fichiers d'entrée .....	52
4.3.1.1. Paramètres du système (arbre+disque+paliers) .....	53
4.3.1.2. Conditions aux limites.....	53
4.3.1.3. Valeurs des intégrales .....	54
4.3.2. Le programme arbre tournant composite .....	54
4.3.2.1. Le programme de calcul .....	54
4.3.2.2. Formation des matrices $[M]$ , $[K]$ , $[G]$ , $[C_p]$ , $[A]$ et $[B]$ .....	55
4.3.2.3. Conditions aux limites.....	55
4.3.2.4. Résolution.....	55
4.3.3. Fichier de sortie.....	57

#### **Chapitre 5 : Résultats et interprétation**

5.1. Introduction .....	58
5.2. Validation et convergence .....	58
5.2.1. Convergence .....	58
5.2.2. Validation.....	60
5.3. Résultats et interprétations .....	63
5.3.1. Influence de l'effet gyroscopique sur les fréquences propres.....	63
5.3.2. Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres.....	64
5.3.3. Influence de l'orientation des fibres sur les fréquences propres.....	66
5.3.4. Influence du rapport $L/D$ sur les fréquences propres.....	67
5.3.5. Influence des rapports $L/D$ , $e/D$ et $\eta$ sur les vitesses critiques et la rigidité .....	68
5.3.6. Influence des paliers élastiques sur les fréquences propres.....	78

5.3.6.1. Paliers isotropes/symétrique .....	78
5.3.6.2. Paliers anisotropes/dissymétriques.....	80
5.3.7. Influence de l'amortissement des paliers sur les fréquences propres .....	82
5.3.8. Influence de la nature du matériau sur les fréquences propres .....	84
5.3.9. Influence de l'ordre d'empilement sur les fréquences propres .....	87
5.3.10. Influence de la position de disque sur l'arbre tournant .....	89
5.3.11. Influence de la forme géométrique de l'arbre tournant .....	92
<b>Conclusion</b> .....	95
<b>Références bibliographiques</b> .....	97
<b>Annexe</b> .....	101

# Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Pompe à double aspiration (Double suction pump).....	3
<b>Figure 1.2</b> : Turbine à gaz .....	4
<b>Figure 1.3</b> : Turbocompresseur (STC-SV single-shaft turbocompressors).....	4
<b>Figure 1.4</b> : Moteur électrique (Technologie Hybride) .....	5
<b>Figure 1.5</b> : Modèle de rotor de Jeffcott.....	7
<b>Figure 1.6</b> : Arborescence des matériaux de synthèse.....	11
<b>Figure 1.7</b> : Principaux matériaux de renfort .....	12
<b>Figure 1.8</b> : Les différentes familles de Matrice .....	12
<b>Figure 1.9</b> : Réalisation d'un arbre en enroulement filamentaire .....	20
<b>Figure 1.10</b> : Tubes en matériaux composites .....	20
<b>Figure 2.1</b> : Structure d'une poutre avant et après déformation.....	25
<b>Figure 2.2</b> : Champ de déplacement dans un élément de structure poutre .....	27
<b>Figure 2.3</b> : Système de coordonnées cylindriques .....	29
<b>Figure 2.4</b> : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié .....	29
<b>Figure 2.5</b> : Axes principaux d'une couche de stratifié et axes de référence $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ du stratifié....	30
<b>Figure 2.6</b> : Composantes des vecteurs des contraintes .....	31
<b>Figure 2.7</b> : k –couches de l'arbre en matériaux composites .....	34
<b>Figure 2.8</b> : Déplacement d'un point arbitraire P de la section droite de l'arbre tournant .....	34
<b>Figure 2.9</b> : Déplacement de la section droite de l'arbre tournant .....	35
<b>Figure 2.10</b> : Différentes positions du disque sur l'arbre tournant (un seul élément).....	37
<b>Figure 2.11</b> : Modèle de palier .....	37
<b>Figure 2.12</b> : Arbre tournant (un seul élément) sur deux paliers flexibles amortis .....	37
<b>Figure 3.1</b> : Élément poutre 3D à deux nœuds.....	40
<b>Figure 4. 1</b> : Schéma de calcul .....	52
<b>Figure 4. 2</b> : Numérotation des nœuds de l'élément poutre .....	54
<b>Figure 5.1</b> : Convergence des cinq premières fréquences de flexion $\omega$ en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique $p$ d'un arbre bi- appuyé (A-A).....	59
<b>Figure 5.2</b> : Convergence des cinq premières fréquences de flexion $\omega$ en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique $p$ d'un arbre bi -encasté (E-E).....	59
<b>Figure 5.3</b> : Convergence des cinq premières fréquences de flexion $\omega$ en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique $p$ d'un arbre encasté- appuyé (E-A) .....	59

<b>Figure 5.4 :</b> Diagramme de Campbell des cinq modes de flexion de l'arbre tournant en graphite-époxyde ((F) modes directs, (B) modes inverses) .....	63
<b>Figure 5.5 :</b> Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en graphite-époxyde pour différentes conditions aux limites et différentes vitesses de rotation .....	64
<b>Figure 5.6 :</b> Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différentes conditions aux limites et différentes vitesses de rotation. ....	65
<b>Figure 5.7 :</b> Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différentes orientations des fibres et différentes vitesses de rotation .....	66
<b>Figure 5.8 :</b> Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en bore - époxyde pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen et différentes vitesses de rotation .....	67
<b>Figure 5.9 :</b> Première vitesse critique $\Omega_{1cr}$ de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis $\eta$ pour différents rapports $L/D$ et différentes conditions aux limites (A-A, E-E) .....	69
<b>Figure 5.10 :</b> Deuxième vitesse critique $\Omega_{2cr}$ de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis $\eta$ pour différents rapports $L/D$ et différentes conditions aux limites (A-A, E-E) .....	69
<b>Figure 5.11 :</b> Première vitesse critique $\Omega_{1cr}$ de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport $L/D$ pour différents angles des plis $\eta$ .....	70
<b>Figure 5.12 :</b> Deuxième vitesse critique $\Omega_{2cr}$ de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport $L/D$ pour différents angles des plis $\eta$ .....	70
<b>Figure 5.13 :</b> Première vitesse critique $\Omega_{1cr}$ de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport $L/D$ pour différents angles des plis $\eta$ .....	71
<b>Figure 5.14 :</b> Deuxième vitesse critique $\Omega_{2cr}$ de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport $L/D$ pour différents angles des plis $\eta$ .....	71
<b>Figure 5.15 :</b> Première vitesse critique $\Omega_{1cr}$ de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis $\eta$ pour différents rapports $e/D$ et différentes conditions aux limites (A-A, E-E).....	72
<b>Figure 5.16 :</b> Deuxième vitesse critique $\Omega_{2cr}$ de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis $\eta$ pour différents rapports $L/D$ et différentes conditions aux limites (A-A, E-E) .....	73
<b>Figure 5.17 :</b> Première vitesse critique $\Omega_{1cr}$ de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport $e/D$ pour différents angles des plis $\eta$ ( $L/D=20$ ) .....	73
<b>Figure 5.18 :</b> Deuxième vitesse critique $\Omega_{2cr}$ de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport $e/D$ pour différents angles des plis $\eta$ ( $L/D=20$ ) .....	74
<b>Figure 5.19 :</b> Première vitesse critique $\Omega_{1cr}$ de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport $e/D$ pour différents angles des plis $\eta$ ( $L/D=20$ ) .....	74
<b>Figure 5.20 :</b> Deuxième vitesse critique $\Omega_{2cr}$ de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport $e/D$ pour différents angles des plis $\eta$ ( $L/D=20$ ) .....	75
<b>Figure 5.21 :</b> Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- appuyé en matériaux composite pour différents angles des plis, et en acier en fonction du rapport $L/D$ .....	76

<b>Figure 5.22 :</b> Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- encastré en matériaux composite pour différents angles des plies, et en acier en fonction du rapport $L/D$ .....	76
<b>Figure 5.23 :</b> Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- appuyé en matériaux composite pour différents angles des plies, et en acier en fonction du rapport $e/D$ ( $L/D=20$ ).....	77
<b>Figure 5.24 :</b> Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- encastré en matériaux composite pour différents angles des plies, et en acier en fonction du rapport $e/D$ ( $L/D=20$ ).....	77
<b>Figure 5.25 :</b> Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques pour différentes raideurs en fonction la vitesse de rotation.....	78
<b>Figure 5.26 :</b> Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques pour différentes raideurs en fonction la vitesse de rotation.....	79
<b>Figure 5.27:</b> Troisième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques pour différentes raideurs en fonction la vitesse de rotation.....	79
<b>Figure 5.28:</b> Trois premières vitesses critiques de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction des raideurs des paliers.....	80
<b>Figure 5.29 :</b> Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction la vitesse de rotation.....	81
<b>Figure 5.30 :</b> Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction la vitesse de rotation.....	81
<b>Figure 5.31:</b> Troisième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction la vitesse de rotation.....	82
<b>Figure 5.32:</b> Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde encastré- amorti pour différents coefficients d'amortissement en fonction la vitesse de rotation.....	83
<b>Figure 5.33:</b> Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde encastré- amortis pour différents coefficients d'amortissement en fonction la vitesse de rotation.....	83
<b>Figure 5.34 :</b> Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents matériaux en fonction de la vitesse de rotation.....	85
<b>Figure 5.35:</b> Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents matériaux en fonction de la vitesse de rotation.....	86
<b>Figure 5.36 :</b> Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents classements des matériaux sur chaque couche en fonction de la vitesse de rotation.....	86
<b>Figure 5.37:</b> Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents classements des matériaux sur chaque couche en fonction de la vitesse de rotation.....	87
<b>Figure 5.38 :</b> Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en carbone- époxyde bi- appuyé pour différents ordres d'empilement en fonction de la vitesse de rotation.....	88
<b>Figure 5.39 :</b> Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en carbone- époxyde bi- appuyé pour différents ordres d'empilement en fonction de la vitesse de rotation.....	88
<b>Figure 5.40 :</b> Arbre tournant creux embarqué.....	89

**Figure 5.41:** Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué .....91

**Figure 5.42 :** Diagramme de Campbell de la première fréquence de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué .....91

**Figure 5.43:** Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué pour différentes positions du disque sur l'arbre.....92

**Figure 5.44 :** Système arbre tournant creux embarqué.....93

**Figure 5.45 :** Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué pour différentes formes géométriques de l'arbre .....94

# Liste des tableaux

<b>Tableau 1.1</b> : Quelques fibres et matrices.....	13
<b>Tableau 4.1</b> : Introduction des conditions aux limites.....	54
<b>Tableau 5.1</b> : Propriétés des matériaux composites.....	58
<b>Tableau 5.2</b> : La première vitesse critique de l'arbre tournant en bore- époxyde .....	60
<b>Tableau 5.3</b> : La vitesse critique de l'arbre tournant en graphite- époxyde.....	61
<b>Tableau 5.4</b> : La vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en graphite- époxyde pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen .....	62
<b>Tableau 5.5</b> : La vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en graphite- époxyde pour différentes orientations des fibres.....	62
<b>Tableau 5.6</b> : Première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différentes conditions aux limites.....	65
<b>Tableau 5.7</b> : Première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différentes orientations des fibres.....	67
<b>Tableau 5.8</b> : Première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen .....	68
<b>Tableau 5.9</b> : Propriétés des matériaux composites.....	84
<b>Tableau 5.10</b> : Propriétés du système (arbre+disque).....	90
<b>Tableau 5.11</b> : Propriétés géométriques des arbres tournants .....	92

## Liste des symboles

$U(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction $x$ .
$V(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction $y$ .
$W(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction $z$ .
$\beta_x$	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe $y$ .
$\beta_y$	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe $z$ .
$\phi$	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe $x$ due à la déformation de torsion.
$(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$	Axes des coordonnées cylindriques.
$(x, r, \theta)$	Coordonnées cylindriques.
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Axes des coordonnées cartésiennes.
$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes.
$(1, 2, 3)$	Axes principaux d'une couche de stratifié.
$L$	Direction longitudinale suivant l'axe 1.
$T'$	Direction transversale suivant l'axe 2.
$T''$	Direction transversale suivant l'axe 3.
$E$	Module Young.
$G$	Module de cisaillement.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$E_L$	Module de Young mesuré dans un essai de traction longitudinale.
$E_T, E_{T'}$	Modules de Young mesurés dans un essai de traction transversale.
$G_{LT}$	Modules de cisaillement mesuré dans un essai de cisaillement longitudinal.
$G_{TT'}$	Modules de cisaillement mesuré dans un essai de cisaillement transversal.
$\nu_{LT}$	Coefficient de Poisson, mesuré dans un essai de traction longitudinale.
$\nu_{TT'}$	Coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction transversale.
$C_{ij}$	Constants élastiques.
$k_s$	Facteur de correction de cisaillement.
$\rho$	Masse volumique.
$L$	Longueur de l'arbre.
$D$	Diamètre moyen de l'arbre.

$e$	Epaisseur de l'arbre.
$R_n$	Le $n^{\text{ème}}$ rayon intérieur de l'arbre composite
$R_{n+1}$	Le $n^{\text{ème}}$ rayon extérieur de l'arbre composite.
$I_m, I_m^D$	Moment d'inertie massique de l'arbre tournant, du disque par unité de longueur.
$I_d, I_d^D$	Moment d'inertie diamétral de l'arbre tournant, du disque par unité de longueur.
$I_p, I_p^D$	Moment d'inertie polaire de l'arbre tournant, du disque par unité de longueur.
$k$	Nombre des couches
$\eta$	Orientation des fibres.
$\theta$	Coordonnée circonférentielle.
$P$	Point arbitraire de la section droite de l'arbre.
$G_c$	Centre de la section droite de l'arbre.
$(O, x, y, z)$	Repère fixe ( $R_F$ ).
$(G, x_1, y_1, z_1)$	Repère mobile ( $R_M$ ) lié à l'arbre en mouvement.
$\vec{R}_{P/O}$	Vecteur déplacement de P dans ( $R_F$ ).
$\vec{R}_{P/G}$	Vecteur déplacement de P dans ( $R_M$ ).
$\vec{R}_{G/O}$	Vecteur déplacement de G dans ( $R_F$ ).
$E_{ca}$	Energie cinétique de l'arbre
$E_{cD}$	Energie cinétique du disque
$E_{cg}$	Energie cinétique globale (arbre+disques)
$E_d$	Energie de déformation
$\zeta$	Coordonnée locale.
$\varepsilon_{ij}$	Tenseur de déformation.
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contrainte.
$\omega$	Fréquence, valeur propre.
$\{w\}$	Vecteurs propres.
$\{x1\}$	Vecteur d'amplitude.
$[L]$	Matrice triangulaire inférieure.
$[I]$	Matrice -identité
$\Omega$	Vitesse de rotation.
$[N]$	Matrices des fonctions de forme.

$[C]$	Matrice des coefficients de rigidité dans la base (1, 2, 3)
$[C']$	Matrice des coefficients de rigidité dans la base $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
$[M]$	Matrice masse globale (arbre+disque).
$[K]$	Matrice de rigidité globale (arbre+paliers).
$[G]$	Matrice de l'effet gyroscopique globale (arbre+disques).
$[C_p]$	Matrice d'amortissement globale.
$[R]$	Matrice de changement de base.
$\{q_i\}$	Coordonnées généralisées. Avec $(i = U, V, W, \beta_x, \beta_y, \phi)$
$\{\dot{q}_i\}$	Vitesses généralisées.
$\{\ddot{q}_i\}$	Accélérations généralisées.
$t$	Temps.
$\delta A$	Travail virtuel des forces généralisées.
$F_i(t)$	Forces généralisées.
$\{F_v\}$	Vecteur des forces de Coriolis et des forces centrifuges.
$\{F_g\}$	Vecteur des forces non- linéaires.
$\{F_{ex}\}$	Vecteur des forces généralisées (des paliers).
$f(\xi)$	Fonction de forme.
$[A], [B]$	Matrices transformées.
$\{qtr\}$	Vecteur transformé.
$[M_a]$	Matrice masse globale de l'arbre.
$[M_D]$	Matrice masse globale des disques.
$[G_a]$	Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de l'arbre.
$[G_D]$	Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale des disques.
$[C_p]$	Matrice d'amortissement globale.
$[K_a]$	Matrice de rigidité linéaire globale de l'arbre.
$[K_p]$	Matrice de raideur des paliers globale.
$[R_{cen}]$	Matrice de rigidification centrifuge globale (arbre +disques)
$[R_{acc}]$	Matrice de rigidification d'accélération angulaire globale (arbre +disques).
$[M^e]$	Matrice masse globale (arbre+disque).
$[G^e]$	Matrice de l'effet gyroscopique élémentaire (arbre+disques).
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire (arbre+paliers).

$[C_p^e]$	Matrice d'amortissement élémentaire.
$K_{yy0}, K_{yz0}, K_{zy0}, K_{zz0}$	Raideurs des paliers à $x = 0$ .
$K_{yyL}, K_{yzL}, K_{zyL}, K_{zzL}$	Raideurs des paliers à $x = L$ .
$C_{yy0}, C_{yz0}, C_{zy0}, C_{zz0}$	Coefficients d'amortissement des paliers à $x = 0$ .
$C_{yyL}, C_{yzL}, C_{zyL}, C_{zzL}$	Coefficients d'amortissement des paliers à $x = L$ .
$p_U$	Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale $x$ .
$p_V$	Nombre de fonction de forme de la direction transversale $y$ .
$p_W$	Nombre de fonction de forme de la direction transversale $z$ .
$p_{\beta_x}$	Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe $y$ .
$p_{\beta_y}$	Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe $z$ .
$p_\phi$	Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe $x$ .
$p$	Nombre des fonctions de forme.
$j$	$j = \sqrt{-1}$
$\lambda$	$j\omega$
$J_{mn}^{\alpha\beta}$	Formes des intégrales.
$\{ \}^T$	Transposée d'un vecteur.
$[ ]^T$	Transposée d'une matrice.
$\left( \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)$	$\frac{d(\ )}{dt}$
$\left( \begin{array}{c} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{array} \right)$	$\frac{d^2(\ )}{dt^2}$

Note :

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_L ; E_T ; E_{T'}) = (E_1 ; E_2 ; E_3) \\ (v_{LT} ; v_{LT'} ; v_{TT'}) = (v_{12} ; v_{13} ; v_{23}) \\ (G_{LT} ; G_{LT'} ; G_{TT'}) = (G_{12} ; G_{13} ; G_{23}) \\ E_T = E_{T'} \\ v_{LT} = v_{LT'} \\ G_{LT} = G_{LT'} \end{array} \right.$$

# Introduction

Les machines tournantes telles que les pompes, les turbines, les compresseurs, etc. sont devenues des éléments indispensables pour l'industrie moderne. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesse de rotation de plus en plus élevées. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent souvent trop élevées pour que la structure puisse les supporter. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter qu'une trop grande vibration engendre un rendement moindre, un bruit trop important,... ; et cette vibration peut même aboutir à l'instabilité et à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

L'arrivée des matériaux composites a ouvert de nouvelles voies en augmentant la performance des machines industrielles (secteurs automobile, aéronautique et spatial) grâce à leurs qualités intrinsèques telles que la légèreté (associée à des caractéristiques de résistance élevée) et la bonne tenue à la corrosion. Le domaine d'utilisation des machines s'est élargi grâce au développement de matériaux nouveaux, élaborés à partir de nouvelles méthodes de conception et de fabrication.

La maîtrise de comportement vibratoire nécessite une connaissance des caractéristiques des arbres tournants en matériaux composites, la prédiction de cette connaissance est fondamentale dans la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages " sécurisées " en terme de vitesses de rotation.

La thématique de recherche abordée dans le cadre de ce doctorat concerne l'étude du comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites, et plus précisément, leur comportement en rotation à partir de la prise en compte des effets de cisaillement, d'inertie rotatoire, de l'effet gyroscopique, de l'effet de couplage dû à la stratification des couches de l'arbre en matériaux composites, de l'effet des paliers élastiques et de l'amortissement externe.

Le présent travail est organisé en cinq chapitres. A partir d'une recherche bibliographique, le premier chapitre présente une vision globale de l'état de l'art dans le domaine de la dynamique des machines tournantes et plus précisément le domaine de la dynamique des rotors. Après un bref historique de la dynamique des rotors. Le chapitre se termine par des généralités sur les matériaux composites et leurs interventions dans ce domaine.

Le deuxième chapitre présente la théorie des poutres et ses hypothèses fondamentales (l'étude de l'arbre tournant comme poutre) et la théorie des stratifiés, dans ce chapitre les déplacements, les déformations et les expressions des énergies de déformation et cinétique de l'arbre tournant en matériaux composites sont déterminés, ainsi que l'énergie cinétique du disque rigide embarqué sur l'arbre et le travail virtuel des paliers.

Le chapitre trois détaille la formulation par la version-  $p$  de la méthode des éléments finis pour l'obtention des matrices de rigidité, matrice masse, matrice de l'effet gyroscopique, matrice de raideurs des paliers et la matrice d'amortissement des paliers. Pour aboutir à l'équation du mouvement.

Dans le chapitre quatre est décrit le programme de calcul avec ses différentes étapes.

Après la validation du programme élaboré, le cinquième chapitre illustre et interprète plusieurs exemples pour déterminer l'influence des différents paramètres étudiés et des conditions aux limites.

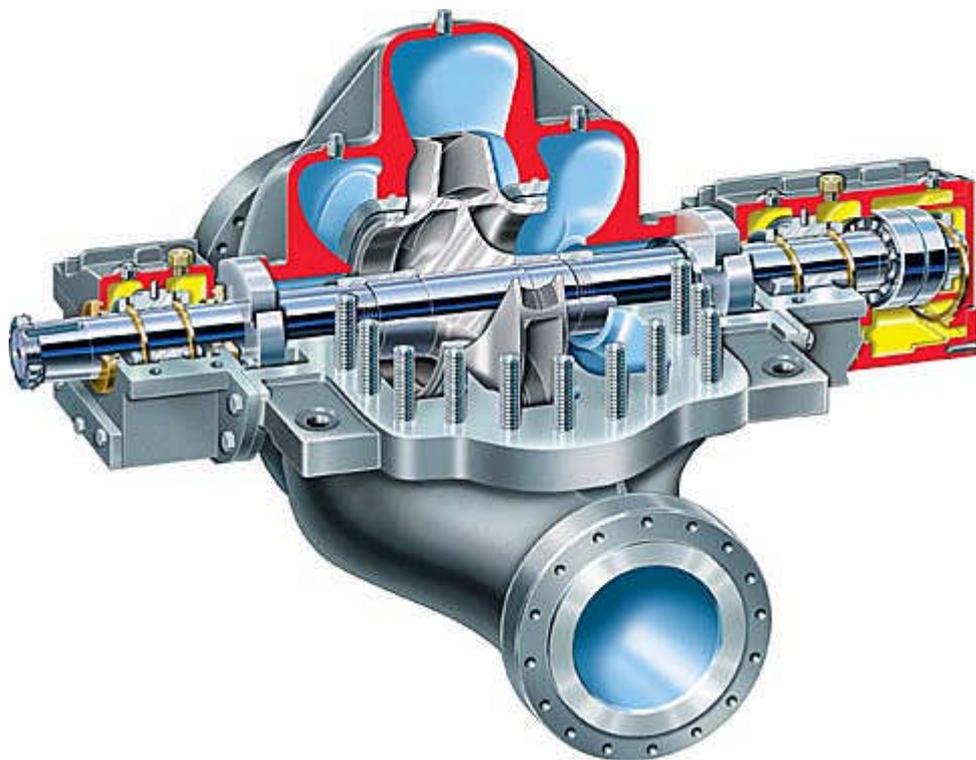
La présente thèse se termine par une conclusion recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les futurs développements.

# 1. Revue bibliographique

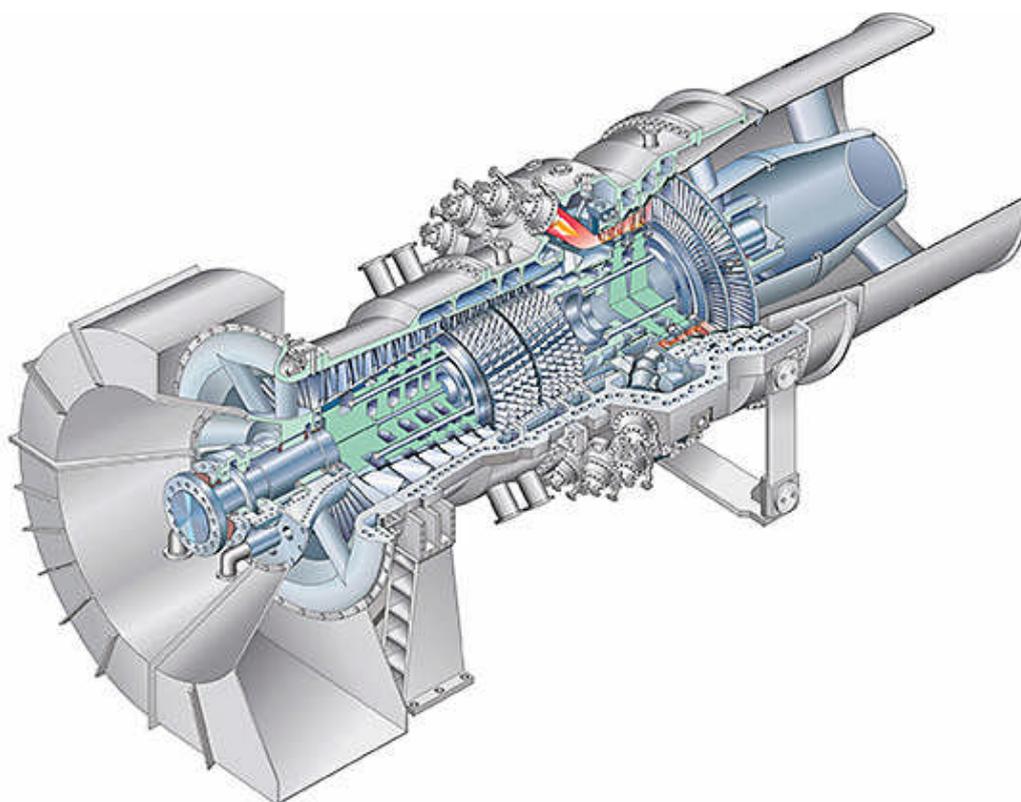
## 1.1. Dynamique des rotors

### 1.1.1. Introduction

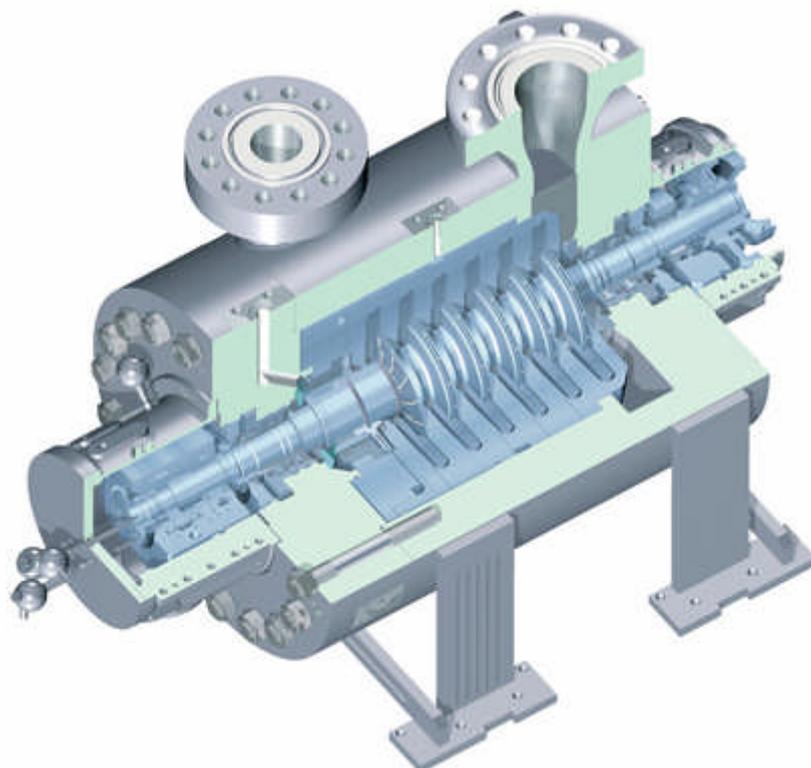
Les rotors (arbres tournants) sont définis comme tout élément tournant autour d'un axe fixe. Le champ des rotors est donc vaste. Les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre étant, conformément à cette définition, des rotors. De tels rotors sont appelés rotors libres, par opposition aux rotors fixés qui sont eux supportés par des paliers. Ces derniers sont présents dans de nombreux domaines: l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire, ou encore l'industrie pétrolière. Dans notre étude, on se focalisera sur les rotors fixés. On peut citer quelques applications des arbres tournants des machines tournantes telles que les pompes (figure 1.1), les turbines (figure 1.2), les compresseurs (figure 1.3) et les moteurs électriques (figures 1.4).



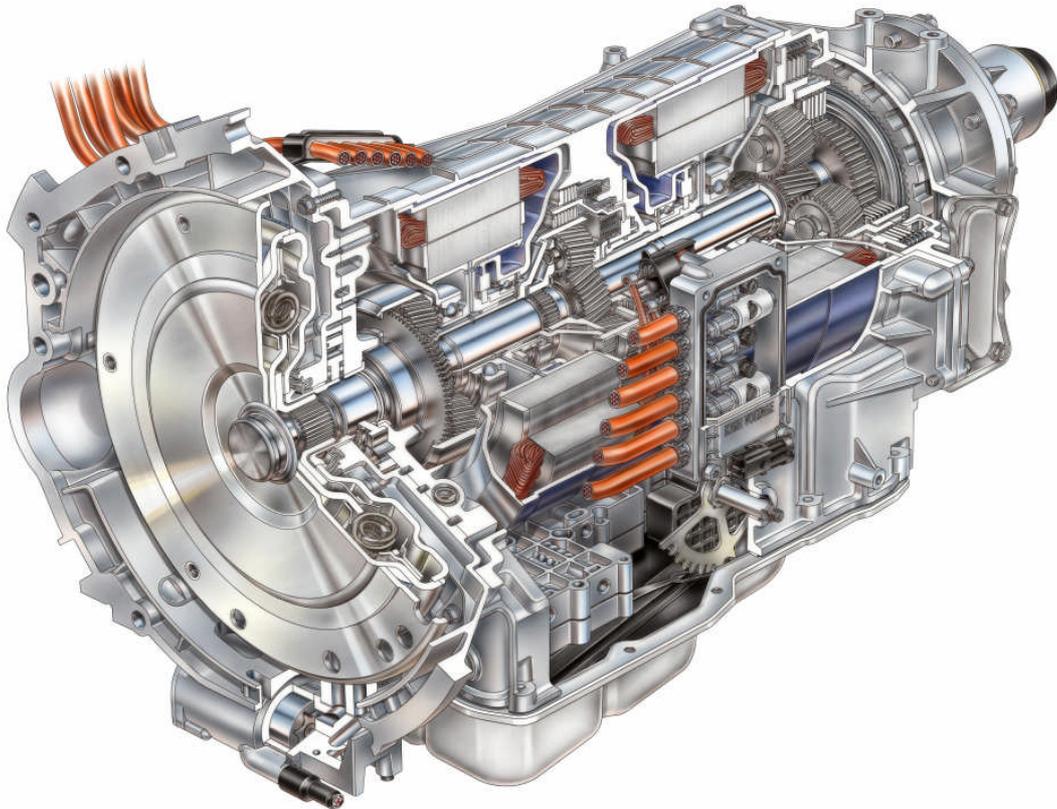
*Figure 1.1* : Pompe à double aspiration (Double suction pump) [1].



*Figure 1.2* : Turbine à gaz [2].



*Figure 1.3* : Turbocompresseur (STC-SV single-shaft turbochargers) [2].



*Figure 1.4* : Moteur électrique (Technologie Hybride) [3].

### *1.1.2. Bref historique de la dynamique des rotors*

La dynamique des rotors a une histoire remarquable, en grande partie due à l'effet entre ses théories et ses applications. En effet, on pourrait raisonner du fait que la dynamique des rotors a été conduite plus par ses applications que par ses théories. Cette brève revue [4-5] est particulièrement appropriée à l'histoire des débuts de la dynamique des rotors.

Rankine à Kerr. W. J. Macquorn Rankine a exécuté la première analyse d'un arbre tournant en 1869 [6] où il a choisi un modèle infortuné et a prévu une certaine vitesse de rotation. L'arbre est considéré flexible. Il a défini certaine vitesse comme vitesse de tourbillonnement "whirling speed" de l'arbre. En fait, il a montré qu'au delà de cette vitesse de tourbillonnement que le déflexion radial du modèle de Rankine augmente sans limite [7]. Aujourd'hui, cette vitesse s'appellerait la vitesse de seuil "threshold speed" pour l'instabilité divergente. Cependant, Rankine a ajouté le terme tourbillonnant "whirling" au vocabulaire de la dynamique des rotors.

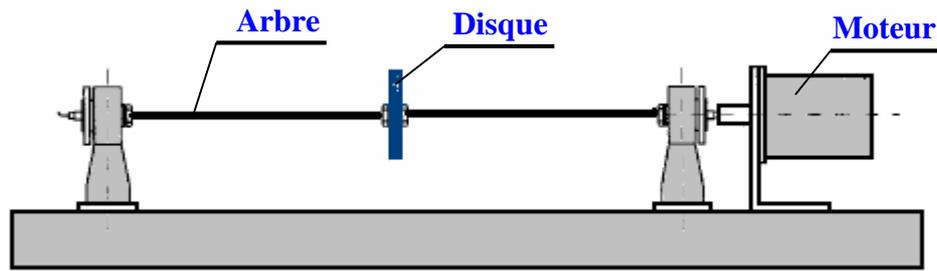
En 1895, Stanley Dunkerley a publié une étude de la vibration des arbres embarqués par des poulies [8]. La première phrase de son papier lit, " il est bien connu que chaque arbre, toutefois presque équilibré, une fois conduit à une vitesse particulière, et à moins que la quantité de déflexion soit limitée, pourrait même se casser, bien qu'à des vitesses plus élevées, l'arbre se mette en marche encore. Cette vitesse particulière ou vitesse critique dépend de la façon de laquelle l'arbre est soutenu, sa taille, module d'élasticité, et les tailles, les poids, et les positions de toutes les poulies qu'il porte". D'après l'auteur de cet article, c'est la première utilisation du terme vitesse critique.

Il est regrettable que le travail de Dunkerley a été peu connu. Par exemple, si des praticiens de ce jour se rendaient compte de l'analyse de 1895 par l'ingénieur allemand Août Foppl qui a prouvé qu'un modèle de rotor alternatif a exhibé une solution stable au-dessus de la vitesse de tourbillonnement de Rankine [9], nous ne pouvons pas le blâmer trop puisque Foppl a publié son analyse dans *Der Civilingenieur*, un journal qui n'était pas probablement bien connu par des dynamistes contemporains des rotors. Plus de dire était l'indifférence apparente au travail pratique de l'ingénieur suédois, Carl G. P. De Laval, qui en 1889 a mis en marche une turbine à vapeur simple d'étage à une vitesse supercritique.

On peut spéculer que les ingénieurs de ce jour ont travaillé sous une confusion des concepts - égalisation de la vitesse de tourbillonnement de Rankine avec la vitesse critique de Dunkerley. C'était particulièrement malheureux puisque Rankine était bien plus éminent que Dunkerley et, en conséquence, ses grandes prévisions ont été largement acceptées et sont devenues responsables de découragement de développement des rotors à grande vitesse pendant presque 50 années.

C'était en Angleterre en 1916 que les choses sont venues. W. Kerr a publié l'évidence expérimentale qu'une deuxième vitesse critique existe [10], et elle était évidente à tous qu'une deuxième vitesse critique pourrait seulement être atteinte par la traverse assurée de la première vitesse critique. La société royale de Londres a alors commissionné Henry Jeffcott pour résoudre ce conflit entre la théorie de Rankine et la pratique de Kerr et De Laval.

Jeffcott a publié son travail classique en 1919 [11] dans un journal (*Philosophical Magazine*) pour être lu par les intéressés de la dynamique des rotors. Son modèle de rotor est illustré dans la figure 1.5 [12].



**Figure 1.5** : Modèle de rotor de Jeffcott [12].

Jeffcott a confirmé la prévision de Foppl qu'une solution supercritique stable existe et il a prolongé l'analyse de Foppl en incluant l'amortissement externe (c.-à-d., l'amortissement du à la terre). Il n'y a aucune évidence que Jeffcott se rendait compte du travail antérieur de Foppl; en fait, le travail de Jeffcott ne contient pas une référence simple. À ce jour, au moins aux Etats-Unis et à l'Angleterre, un modèle d'un rotor se composant d'un arbre flexible et des disques rigides s'appelle un rotor de Jeffcott.

En 1924, Aurel B. Stodola a prouvé que ces solutions supercritiques ont été stabilisées par l'accélération de Coriolis [13]. La contrainte involontaire de ces accélérations était le défaut dans le modèle de Rankine. Il est intéressant de noter que le modèle de Rankine est sensible pour un rotor dont la rigidité dans une direction est plus grande que sa rigidité dans la direction de quadrature. En effet, il est maintenant bien connu qu'un tel rotor aura des régions d'instabilité divergente. Il est moins bien connu que Ludwig Prandtl ait été le premier qui a étudié un rotor de Jeffcott avec une section transversale non circulaire. Il a publié ce travail en 1918 [14].

Cependant, les dynamistes des rotors s'inquiètent au sujet de l'instabilité. Au début des années 20 une instabilité supercritique dans des rotors constitués a été produite et, ensuite, a été montré par A. L. Kimball pour être une manifestation de l'amortissement interne de rotor (c.-à-d., l'amortissement entre les composants du rotor)[15]. L'explication de Kimball de ce phénomène est convoluté et que des explications plus récentes doivent être préférées. Puis, B. L. Newkirk et H. D. Taylor ont décrit une instabilité provoquée par l'action non- linéaire du palier d'huile dans un coussinet, qui était doublée "fouet d'huile" [16]. Le phénomène du fouet d'huile et de son précurseur, mouvement giratoire d'huile, sont imparfaitement compris en dépit des efforts suivants de nombreux investigateurs. D'autres instabilités ont été découvertes. Comme celles dus aux rigidités à travers l'accouplement dans les roulements, les joints, le mouvement giratoire de vapeur, qui peut également se produire dans des turbines à gaz.

Dans le modèle analytique de Jeffcott, le disque n'oscille pas. En conséquence, le vecteur de vitesse angulaire et le vecteur d'impulsion angulaire étaient colinéaires et aucun moment gyroscopique ne se produit. Cette restriction a été enlevée par Stodola en 1924 [17].

En 1933 David M. Smith a obtenu les formules étonnamment simples qui ont prévu comment la vitesse de rotation de seuil pour l'instabilité supercritique change avec la rigidité de roulement et avec le rapport de l'amortissement visqueux externe et interne [18]. L'augmentation de la dissymétrie de la rigidité de roulement et de l'intensité de l'amortissement externe relativement à l'amortissement interne soulève la vitesse de seuil "Threshold". Cette vitesse de seuil est toujours plus grande que l'une ou l'autre vitesse critique. La formule de l'amortissement a été obtenue indépendamment par Stephen Crandall environ 40 ans après.

Graduellement, le modèle de rotor de Jeffcott, dans ses nombreuses variations, est venu plus près des besoins pratiques des dynamistes des rotors du jour. Mais, pas assez fin. Beaucoup de rotors pratiques, particulièrement ceux étant conçus pour des turbines à gaz d'avion, n'étaient pas appropriés à un modèle de Jeffcott. Pour une chose, la distinction entre le disque et l'arbre est brouillée dans la turbine à gaz typique d'avion. Une technique modelant plus générale était nécessaire. Ceci a été fourni par Melvin Prohl vers la fin des années 30 et publié en 1945 [19] il est semblable, presque identique, à la méthode publiée par N. O. Myklestad pour l'analyse dynamique des ailes d'avion mais a été développé indépendamment. Évidemment, la méthode de Prohl a été conçue pour une structure tournante plutôt que stationnaire. En même temps, le travail de Prohl et de Myklestad a été mené à une plus large méthode, maintenant appelée la méthode de matrice de transfert (MMT). La MMT pour des rotors reste viable; en effet, il paraît être toujours la méthode choisie pour la plupart des analyses dynamiques des rotors industriels.

Dans l'ère Moderne, on considère la deuxième guerre mondiale comme délimitation entre les premières parties de la dynamique des rotors et celle qui pourrait s'appeler la dynamique moderne des rotors. On croit que c'est la conséquence de deux facteurs. D'abord, il y avait une conscience de croissance des contributions des dynamistes des rotors des pays non parlants l'anglais, par exemple, F. M. Dimentberg en Russie, Alex Tondl en Tchécoslovaquie, Erwin Kramer en Allemagne, et Toshio Yamamoto au Japon, parmi beaucoup d'autres. Clairement, après la deuxième guerre mondiale, la dynamique des rotors était devenue une force internationale, un fait qui a été identifié par la fondation du Comité de la dynamique des rotors de la fédération internationale de la théorie des machines et des mécanismes (FITMM).

Au début de 1982, des conférences internationales ont été organisées par ce comité à Rome, Tokyo, Lyon, Chicago, Darmstadt et à Sydney.

En second lieu, il y avait une révolution des possibilités de solution; une transition des modèles légèrement simplifiés de la géométrie presque réelle. Dans les années 60 il y avait une coalescence des méthodes numériques appliquées à la dynamique des structures et des capacités des calculateurs numériques qui ont stimulé le développement d'une série de codes machine. L'application initiale de ces codes à la dynamique des rotors a été basée sur la MMT, mais dans les années 70 un autre algorithme fondamental, la méthode des éléments finis (MEF), est devenu disponible pour la résolution des modèles poutre. Maintenant, dans le début du 21ème siècle, les dynamistes des rotors combinent les techniques de la MEF et les théories des solides pour étudier le comportement couplé des disques flexibles, des arbres flexibles et des supports flexibles dans un modèle simple, massif et multidimensionnel. Nous sommes maintenant loin des approches de Jeffcott et de Prohl, un voyage qui mérite sa propre histoire autrefois.

Le thème fondamental de cette brève revue a été qu'une compréhension du comportement des machines tournantes, il est conçu par un effet entre la théorie et la pratique. La dynamique des rotors n'est pas unique à cet égard mais offre un nombre peu commun d'exemples vifs. Récemment, l'équilibre entre l'analyse et l'expérience a été affecté par l'apparition des outils informatiques modernes. De peur qu'une fascination avec ces outils remplacent les leçons de la pratique, nous serions sages d'observer les mots de Dara Childs, [20] "la qualité des prévisions d'un code machine a plus à faire avec la solidité du modèle de base et de la perspicacité des techniques et physiques du dynamistes des rotors que l'algorithme particulier utilisé. Les meilleurs ingénieurs obtiennent de bons résultats de bons modèles, menant à retentir des jugements de technologie avec une variété d'algorithmes ou de codes machine. Les algorithmes ou les codes machine supérieurs ne traiteront pas de mauvais modèles ou un manque du jugement de technologie".

## **1.2. Les matériaux composites**

### **1.2.1. Introduction**

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels: légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils

offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

### 1.2.2. Définitions

Un matériau composite est tout alliage ou matière première comportant un renfort sous forme filamentaire. Il nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le renfort et la matrice, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, l'interface [21].

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et anisotropes [22].

Il faut différencier charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance au ultra violet, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

Actuellement, les composites à matrice organique représentent plus de 99% des matériaux composites ; toutefois, il existe également des composites à matrice inorganique (métallique ou céramique) dont la diffusion reste encore marginale.

Les matériaux composites, tels qu'ils sont définis dans cette thèse (voir figure1.6), ont été limités à ceux constitués par :

- ✓ une matrice organique, résine thermoplastique ou thermodurcissable,
- ✓ une structure de renfort constituée de fibres, qui peuvent être de verre, de carbone, d'aramide ou de fibres naturelles (lin, chanvre, sisal),

- ✓ ces deux constituants principaux reçoivent des additifs ou charges nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice. Ils permettent également de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés : pigments de coloration, agents anti-ultra violet, charges ignifugeantes, isolation thermique ou acoustique.

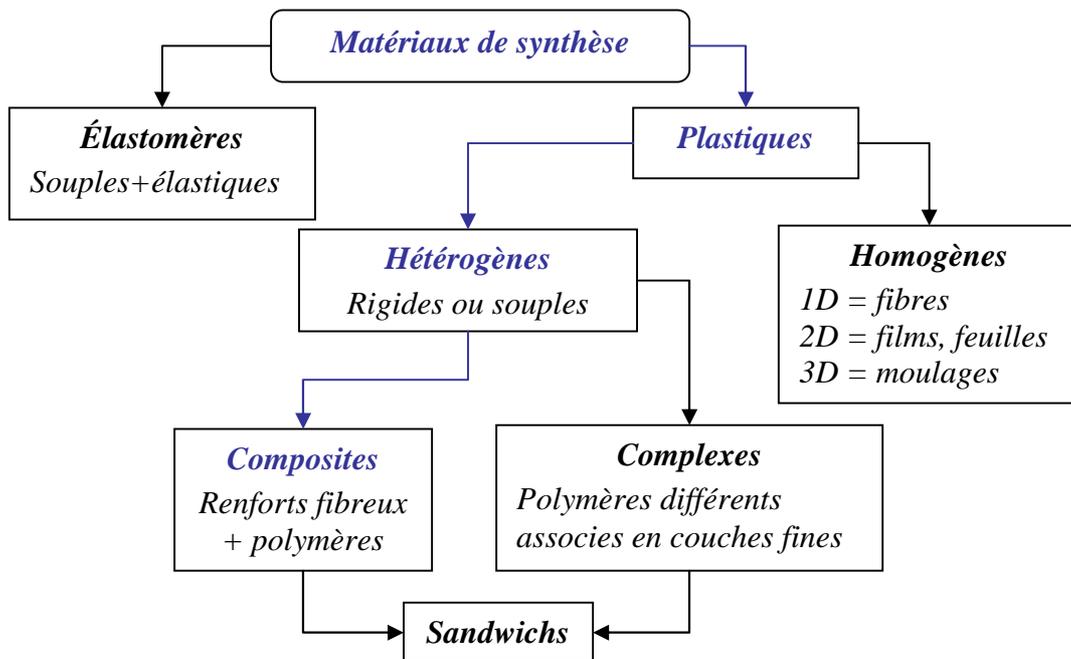


Figure 1.6 : Arborescence des matériaux de synthèse [21].

Les renforts (voir figure 1.7) contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par :

- ✓ la nature de la fibre, minérale ou organique,
- ✓ l'architecture du renfort, Unidirectionnel ou Tissu...

La matrice permet de lier les fibres de renforts, de répartir les contraintes, d'apporter la tenue chimique de la structure et de donner la forme désirée au produit final. La figure 1.8 montre les différentes familles des matrices.

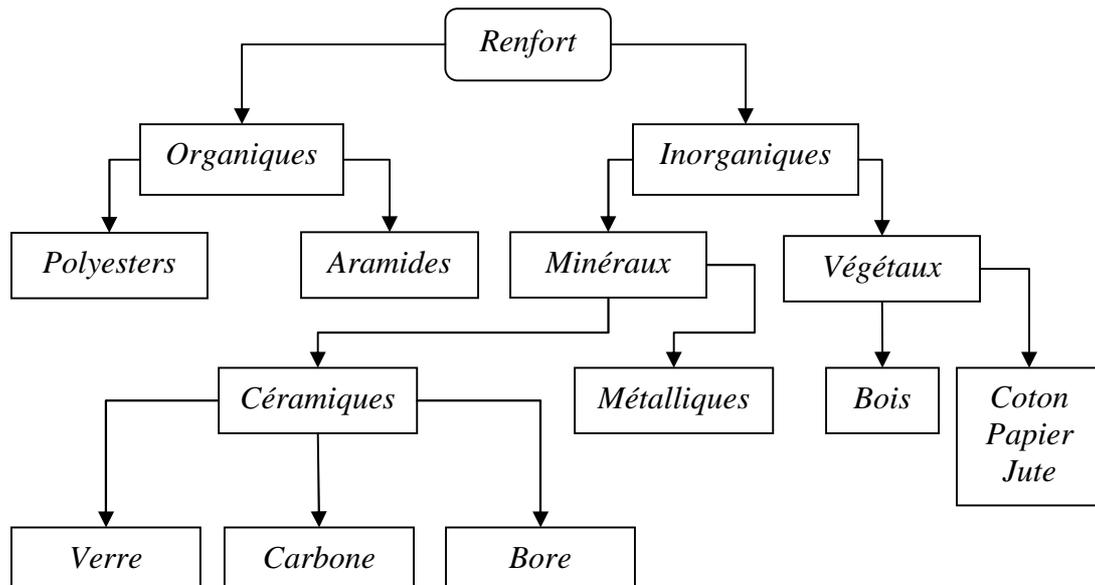


Figure 1.7 : Principaux matériaux de renfort [21].

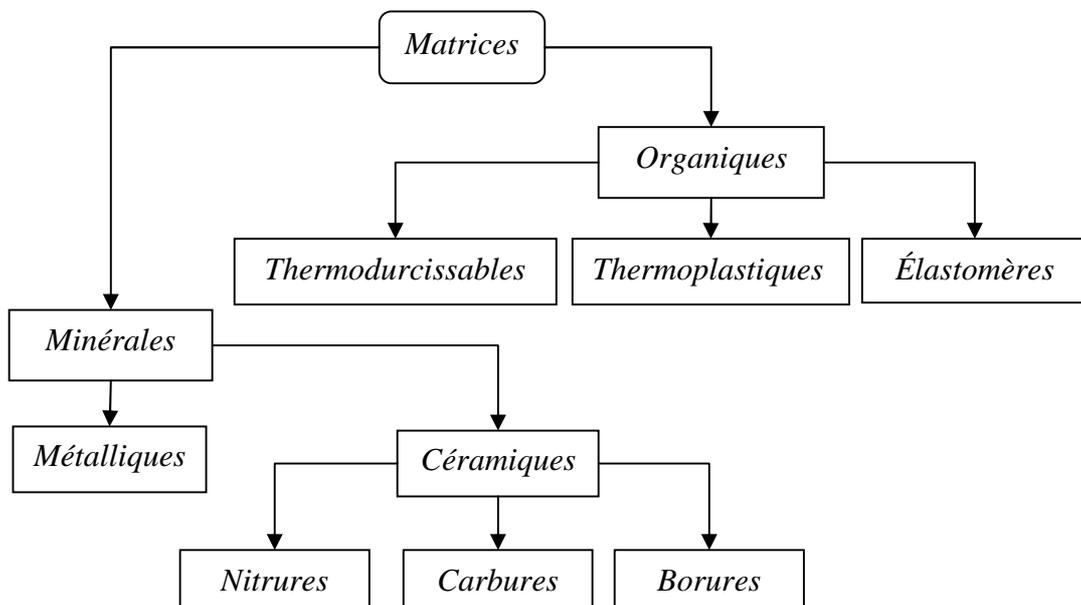
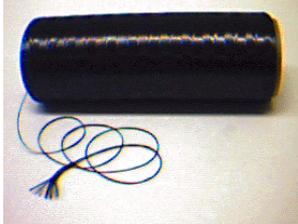
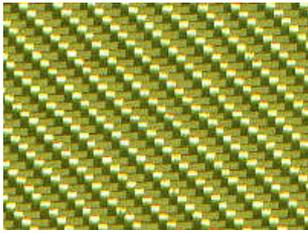


Figure 1.8 : Les différentes familles de Matrice [21].

Le tableau 1.1 montre quelques fibres et matrices utilisées dans l'industrie des matériaux composites.

Tableau 1.1 : Quelques fibres et matrices.

 <p>Fibre de verre [23]</p>	<p><b>Fibre de verre :</b> Les fibres de verres sont utiles en raison de leur très bon rapport surface/poids. Cependant, l'ampleur de la surface les rend beaucoup plus vulnérables à des attaques chimiques. Les résistances du verre sont habituellement testées et considérées comme des fibres « vierges » qui ont juste été fabriquées. Les fibres les plus fraîches et les plus fines sont les plus résistantes et l'on pense que c'est dû au fait qu'il est plus facile aux fibres les plus fines d'être flexibles. Contrairement aux fibres de carbone, le verre peut supporter un grand allongement avant de rompre.</p>
 <p>Fibre de carbone [23]</p>  <p>Fibre de graphite [24]</p>	<p><b>Fibre de carbone :</b> La fibre de carbone est constituée à 95% de carbone pur. Le carbone pur se trouve dans la nature sous forme de graphite ou de diamant. Ses propriétés mécaniques et dynamiques sont:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Haute résistance</li> <li>▪ Grand module d'élasticité</li> <li>▪ Petite densité (léger)</li> <li>▪ Presque pas de fatigue de la matière</li> <li>▪ Presque pas de fluage</li> <li>▪ Très bonne absorption des vibrations</li> <li>▪ Résistance souvent plus grande que les métaux</li> </ul> <p><b>Exemples d'utilisations du carbone :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Pièce devant supporter de fortes contraintes (rigidité)</li> <li>▪ Pièce de design</li> <li>▪ Prototype</li> <li>▪ Réparation</li> </ul>
 <p>Kevlar [23]</p>	<p><b>Kevlar :</b> Le Kevlar est un polymère constitué de noyaux aromatiques (benzène) séparés par des groupements amides, d'où son appartenance au groupe des fibres d'aramides. Le Kevlar fut découvert en 1965 par des chercheurs de la société DuPont. Il faut attendre 1971 pour que la première usine voit le jour et fabrique les premiers kilos de Kevlar.</p> <p><b>Structure &amp; Propriétés</b></p> <p>Le Kevlar est une fibre synthétique qui possède d'exceptionnelles qualités de résistance à la traction et à l'allongement. Seule la toile d'araignée propose de meilleures caractéristiques (3 fois plus résistante).</p>
	<p><b>Fibre de bore :</b> Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.</p>



Matrice époxyde [25]

**Epoxydes :** Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction :

- du durcissement à chaud ou à froid ;
- de la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C).

Ses avantages sont :

- Tenue mécanique, thermique, chimique et fatigue
- Faible retrait (1 à 2 %)
- Excellente adhérence sur fibres
- Auto-extinguibilité
- Mise en oeuvre facile, sans solvant

### 1.2.3. Bref historique des matériaux composites

Cette brève revue [26-27] est particulièrement appropriée à l'histoire moderne des matériaux composites.

Bien que des matériaux composites aient été connus dans diverses formes dans toute l'histoire de l'humanité, l'histoire des composites modernes a probablement commencé en 1937 où les vendeurs d'Owens Corning Fiberglass Company ont commencé à vendre la fibre de verre aux ayants droit dans les Etats-Unis. La fibre de verre avait été faite, presque par accident en 1930, quand un ingénieur est devenu intrigué par une fibre qui a été formée pendant le processus d'application du lettrage à une bouteille à lait en verre.

Owens Corning Fiberglass Company a été formé en 1935 par Owens-Illinois et Corning Glass pour profiter de ce nouveau matériau fibreux. Une compagnie japonaise (Nitto Boseki) avait également fait la fibre de verre et essayait de lancer les fibres sur le marché au Japon et aux Etats-Unis. Les produits initiaux pour ce verre fondu finement tiré étaient comme isolation (laine de verre) mais les produits structuraux ont bientôt suivi.

Les vendeurs de fibre de verre se sont rendus compte que l'industrie aéronautique était, en particulier, un client probable pour ce nouveau type de matériel parce que les nombreuses petites et vigoureuses compagnies aériennes ont semblé créer de nouvelles conceptions d'avion et concepts innovateurs en fabriquant presque quotidiennement avec plusieurs de ces innovations exigeant de nouveaux matériaux.

Une compagnie, avion de Douglas, a acheté le premier rouleau de fibre de verre embarqué à la côte occidentale parce qu'elles ont cru que la fibre de verre les aiderait à résoudre un problème de production. Elles ont eu un goulot d'étranglement dans la fabrication des moules en métal pour leur métal de feuille formant le processus (appelé hydropress forming). Chaque conception changée d'avion a eu besoin de nouveaux moules et les moules en métal étaient

chers et ont eu de longs délais d'obtention. Douglas machine ont essayé d'utiliser des moules en plastique, mais ils ne pourraient pas résister aux forces du processus de pièces forgées. Peut-être si les moules en plastique étaient renforcés avec la fibre de verre ils seraient assez forts pour permettre au moins à quelques pièces d'être faits de sorte que les nouvelles conceptions aurait pu être rapidement vérifiées. Si les pièces s'avérées être acceptables, alors des matrices en métal pourraient être faites pour de pleines cadences de production. En collaboration avec la fibre de verre d'Owens Corning, les matrices étaient fait en utilisant le nouveau matériau de fibre de verre et la résine phénolique (la seule résine disponible à ce temps là). Quel succès ! Les matrices en plastique renforcées pour des pièces de prototype sont devenues la norme.

D'autres applications pour l'avion ont aussitôt suivi. Plusieurs outils (des gabarits et des montages) pour former et tenir des sections et des ensembles d'avion, nécessaires pour être forts, légères, avec des formes courbées (compliquées). Les métaux disponibles n'ont pas pu facilement être réalisés avec ces critères et ainsi l'outillage phénolique renforcé par fibre de verre est devenu le matériau préféré pour ces applications de fabrication d'avion.

Peu de temps après, les résines insaturées de polyester sont devenues disponibles (brevetées en 1936) et elles sont devenues par la suite (pas immédiatement) la résine préférée en raison de la facilité relative en traitant ces résines comparées aux composites phénoliques. Le peroxyde traitant des systèmes étaient déjà disponible avec des peroxydes de benzoyle brevetés en 1927, peroxyde de lauroyl en 1937, et beaucoup d'autres peroxydes suivant pas trop longtemps après. La performance des systèmes de résine est devenu disponible et plus élevé à ce temps avec l'invention des époxydes en 1938. Les matériaux et les applications apparus convergents en même temps.

Le pas du développement des composites, déjà rapide, a été accéléré pendant la deuxième guerre mondiale dans le développement des avions, en conséquence, des composites plus largement répandus dans l'outillage, mais l'utilisation des composites pour les pièces structurales et semi structurales était exploré et puis adopté. Par exemple, en jours effrénés de la guerre, parmi les dernières pièces sur un avion à concevoir avaient lieu les conduits. Puisque tous les autres systèmes étaient déjà fixes, les conduits ont été exigés pour circuler les autres systèmes, souvent ayant pour résultat les conduits qui étaient convulsé, tordant, tournant, et mis dans le plus difficile d'accéder à des emplacements. Des conduits en métal juste n'ont pas pu facilement être faits dans ces formes "horribles". Les composites ont donné la réponse. Les composites étaient réalisés par moulage au contact sur les mandrins de plâtre

qui ont été faits dans la forme exigée. Puis, après que la résine ait traité, les mandrins de plâtre ont été éclatés avec les pièces composites. Littéralement des milliers de tels conduits ont été faits dans nombreuses usines de fabrication des équipements des avions.

D'autres applications au début de la deuxième guerre mondiale sont apparus, comme les nacelles de moteur, qui ont développé l'avion A-20 et les radômes (dômes pour protéger les antennes de radar d'avion) et qui ont donné la résistance de la structure et le transparent de radar. Le papier Phénolique- renforcé a été employé pour fabriquer une poutre structurale de boîte d'aile pour l'avion PT-19 à ce temps. Employer en plastique des portées d'avion peigné et cardé des fibres de coton imbibées de l'urée et le polyester qui ont été également faits sur un contrat de l'Armée de l'Air pendant les années de guerre. Les applications hors de la construction des avions ont inclus les roulements des bateaux en coton- phénoliques, mécanismes phénoliques d'amiante, doublures de frein de coton/ asbestose- phénolique, scabreuses de baïonnette en coton- acétate, et milliers d'autres.

La période de la guerre a également marqué la première production d'un bateau renforcé par fibre de verre formé par Basons Industries. Cependant, en formant le bateau, aucun dégagement de moule ou agent de démoulage n'a été employé et la pièce ne pourrait pas être extrait à partir du moule. Après que toutes les tentatives de séparer la pièce du moule aient échoué, l'ensemble entière a été roulée dans le fleuve de Bronx.

Environ cette période (1942), le gouvernement des Etats-Unis est devenu intéressé que les approvisionnements en métaux pour l'avion ne peuvent pas être disponibles et ainsi ils ont instruit les ingénieurs à la base aérienne de Wright Patterson à inspecter tous les fabricants des pièces composites aux Etats-Unis et essayer de déterminer les meilleures conceptions de la fabrication des composites. Le personnel de Wright Patterson devait également favoriser l'utilisation et la conception des composites et, en encourageant le développement de nouveaux matériaux composites et ses applications, et en employant leur propre expertise pour les développer. Peut-être de toutes les applications les plus encouragés étaient le développement des ailes d'avion pour l'AT-6 et les BT-15, deux avions d'entraînement. Un total de six ensembles d'ailes ont été faits, et installés sur l'avion, et avec succès au vol. Malgré le succès de ce projet, des pièces structurales d'avion n'ont pas été faites encore pendant 50 années. Plus stupéfiant, après le hiatus de 50 ans, la méthode de la fabrication des pièces était presque identique à la méthode utilisée à la base aérienne de Wright Patterson en 1942.

Plusieurs d'autres améliorations des composites ont été développées pendant la deuxième guerre mondiale comprenant certaines méthodes de fabrication innovatrices telles que

l'enroulement filamentaire (voir figure 1.9) et le spray. Les structures sandwich en utilisant un noyau cellulaire, les composites résistantes au feu, et les matériaux pré- imprégnés (prepreg) ont été également développés pendant cette période à l'occasion de ce développement.

Quand la guerre est soudain arrêtée, des nombreuses compagnies qui avaient été en activité en fabricant des matériaux de guerre ont été confrontées à un problème aigu. Elles ont dû identifier rapidement les marchés et les nouveaux produits qui ont employé l'expertise qu'ils avaient développée. Les compagnies comme la technologie de Goldsworthy essayaient de faire n'importe quelle pièce composite pour recevoir l'appui des compagnies qui ont fabriqué la fibre de verre qui sont les sponsors de certains des ces projets. Par exemple, les fabricants de fibre de verre payeraient l'outillage pour une nouvelle application juste pour réduire le coût de développement.

Certaines des applications orientées par la guerre ont été dirigées directement aux applications commerciales telles que les bateaux de polyester renforcés par les fibres de verre. En 1948, plus d'un millier de bateaux commerciaux avaient été faits.

Presque chacun a convenu que la demande refoulée des automobiles était une demande logique des composites. Dès 1947 une automobile entièrement composite de corps avait été fabriquée et testée. Cette voiture était raisonnablement réussie et mené au développement de la Corvette en 1953 qui a été construit en utilisant les préformes de la fibre de verre qui ont été imbibées de la résine et formées en métal assorti meurt. Par la suite, la méthode dominante de moulage des pièces d'automobile était le moulage sous compression des couches composites. Des matériaux de pré mélange (Premix) de ces types ont été développés dès 1948 par Galstic Corporation.

Une innovation des véhicules à moteur qui mérite la mention spéciale est le développement d'auto/avion mené par Convair Aircraft Company. Des nombreux pilotes de guerre voulaient continuer leur vol, mais voulaient également le combiner avec des vacances de famille. Par conséquent, Convair a fait une automobile avec un corps tout composite (pour l'épargne de poids) qui permettrait à une aile spéciale d'être jointe. Les ailes seraient disponibles pour le loyer à de divers aéroports, de ce fait en permettant au conducteur de louer une aile à un aéroport, volez à l'emplacement de vacances, tournez les ailes, et conduisez loin. Des prototypes démontrés ont été faits et avec succès. Quelle avantage qu'ils seraient aujourd'hui à Los Angeles, bien que les ciex pourrait être plus dangereux que les routes!

Certains produits fabriqués pendant et après la guerre ont maintenant émergé en tant que marchés principaux pour les matériaux composites. Ceux-ci incluent l'assemblage des baquets et des douches, des pipes non-corrosives, des pièces d'appareils, des plateaux, des récipients de stockage, et des meubles. D'autres produits composites ont également été réussis, le cas contraire pour autres produits qui n'ont été pas connu pour les gents. Par exemple, des ensembles pour des groupes de divertissement et des phases de productions, particulièrement ceux qui ont voyagé dans les folies de glace, ont été fabriqués en composites. Dans le film "capitaine de Castille" l'armure et les casques des soldats espagnols ont été faits de composites et peints pour ressembler au métal. L'habillement principal des Aztecs était également formé en composites.

Plusieurs méthodes de fabrication innovatrices ont été également développées vers la fin des années 40 et du début des années 50 du siècle dernier comprenant la pultrusion (par Goldsworthy), moulage au sac à vide, et l'enroulement filamentaire à grande échelle.

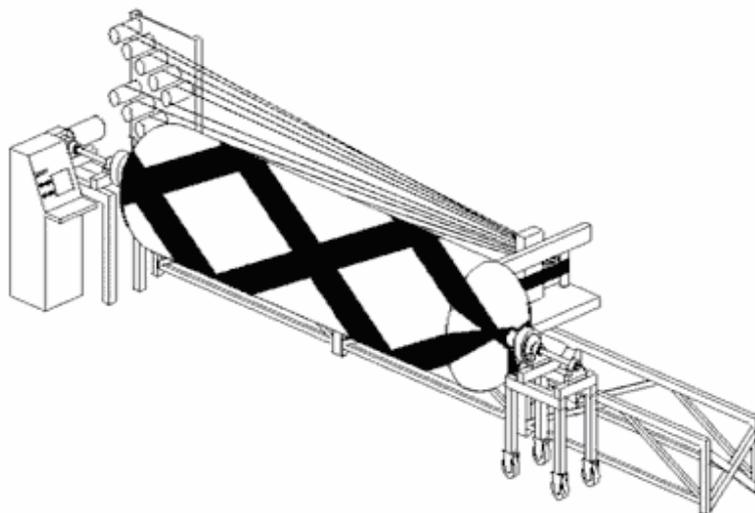
La poussée pour la dominance aérospatiale est commencée dans les années 50 et elle est vraiment aller vite dans les années 60 du siècle dernier, c'était une nouvelle impulsion pour le développement des composites. Richard Young de W. M. Kellogg Company a commencé à employer l'enroulement filamentaire pour faire des petits moteurs de fusée. Cette technologie était achetée par Hercule et devient la base pour les grandes affaires de moteur de fusée, qui étaient au coeur de la course de l'espace. Dès 1962, le besoin des machines fortement précises d'enroulement filamentaire est devenu évident à Larry Ashton, un ingénieur chez Hercule, qui a fondé la technologie (Engineering Technology) pour produire ces machines. Cette technologie a commencée à partir de peu d'argent que les fondateurs ont obtenu à partir de la vente de leur sang à une banque de sang. Cela tout est donné pour la compagnie!

En 1961 un brevet a été publié à A. Shindo pour produire expérimentalement la première fibre de carbone (graphite) mais c'est Courtauld's Limited du royaume uni qui était le premier à produire les fibres commercialement viables de carbone après plusieurs années. Avec ces fibres, la rigidité de pièce au poids a été améliorée et bien plus d'applications dans l'espace ont été introduites. Peut-être le bijou couronné de cette période (1978) était le développement du premier fuselage d'avion par l'enroulement filamentaire, le bateau (Starship), par Ashton. L'avion a été piloté avec succès, mais n'a pas été commercialisé en utilisant la technologie de l'enroulement filamentaire. Beaucoup de gens croient toujours que cette technologie est la meilleure méthode pour produire des petits fuselages d'avion.

De nouvelles fibres ont été également introduites avec des filaments de bore devenant disponibles en 1965 et les fibres d'aramide (Kevlar<sup>®</sup>) ont offert commercialement par DuPont en 1971. Des fibres à partir d'ultra polyéthylène ont été faites au début des années 70 du siècle dernier. Ces fibres avancées de performance, avec la fibre de verre et les fibres de carbone, ont mené aux développements énormes dans l'espace, l'armure (structurale et personnelle), l'équipement de sports, les dispositifs médicaux, et beaucoup d'autres applications de rendement élevé. Le développement des nouvelles résines améliorées a également contribué à l'expansion du marché de composites, particulièrement dans des applications plus élevées de la température et des applications où la résistance élevée à la corrosion est nécessaire.

Aujourd'hui, le marché de composites est très vaste. Comme il est rapporté récemment par l'institut de composites (SPI), le plus grand marché est toujours dans le transport (31%), mais la construction (19,7%), la marine (12,4%), l'équipement électrique et électronique (9,9%), le consommateur (5,8%), et l'équipement d'application/business sont également de grands marchés. Le marché d'avion/aérospatial représente seulement 0,8% qui étonne à cause de son importance dans les origines des composites. Évidemment, les produits aérospatiaux sont moins en nombre mais sont beaucoup plus hauts en valeur.

La plupart des marchés continuent à se développer. Les composites ont trouvé leur endroit dans le monde et semblent gagner leur part dans le marché, particulièrement dans les produits où la performance est critique. Certains de ces produits sont très nouveaux, mais ne sont pas intéressants de cette construction, sont toujours un marché important pour des composites, juste comme il était dans 1500 avant JC quand les Egyptiens avaient l'habitude d'utiliser la paille pour renforcer les briques de boue.



a)



b)



c)

**Figure 1.9 (a- b- c):** Réalisation d'un arbre en enroulement filamentaire [28].

La figure 1.10 montre quelques tubes en matériaux composites réalisés en enroulement filamentaire.



a)



b)

**Figure 1.10 :** Tubes en matériaux composites.

a) Tube en verre- époxyde [29]

b) Arbre de transmission en carbone- époxyde (domaine maritime) [30]

### 1.3. Dynamique des rotors en matériaux composites

Les matériaux composites sont très utilisés dans les domaines des machines tournantes. Nous pouvons citer leur utilisation dans les arbres de transmission des véhicules à moteur à vitesse réduite aux rotors de queue d'hélicoptère fonctionnant au-dessus de la deuxième vitesse critique. Avec le fonctionnement aux vitesses supercritiques, une quantité substantielle de profits et les réductions nettes de poids de système sont possibles. En même temps, les aspects de la dynamique des rotors prennent plus d'importance, et l'analyse détaillée est exigée. Certains problèmes technologiques liés à l'exécution, telle que les joints des roulements, les balourds, les couplages, la fourniture des amortisseurs externes peuvent apparaître, et les solutions proposées sont simples et adéquates, mais exigent des améliorations substantielles, qui pourraient expliquer certaines expériences différentes de divers auteurs.

Zinberg et Symmonds [31] ont étudié le comportement d'un arbre de transmission en matériaux composites en bore-époxyde d'un rotor de queue d'hélicoptère. Les vitesses critiques ont été déterminées en utilisant la théorie des poutres du module équivalent (EMBT), considérant l'arbre en matériaux composites comme un tube à section circulaire à parois minces simplement appuyé à ces extrémités, où la déformation de cisaillement n'est pas été prise en considération. La vitesse critique de l'arbre est déterminée par l'extrapolation de la courbe de réponse de déséquilibre obtenue dans la région sous-critique.

Dos Reis et al [32] ont publié des investigations analytiques sur les tubes cylindriques en matériaux composites à parois minces. Dans la partie III de la série de leurs publications, l'élément poutre est développé pour formuler le problème d'un rotor supporté par des roulements. Des résultats ont été obtenus et comparés avec ceux trouvés par Zinberg et Symmonds. Les auteurs ont prouvé que les effets de couplage dus aux déformations flexion-extension et aux contraintes de cisaillement - normales avec la séquence d'empilement, changent les valeurs de fréquences.

Gupta et Singh [33] ont étudié l'effet du couplage des contraintes de cisaillement- normales sur les fréquences naturelles du rotor et l'amortissement modal. Kim et Bert [34] ont formulé le problème de la détermination des vitesses critiques d'un arbre en matériaux composites comprenant les effets du couplage flexion-torsion. L'arbre a été modélisé comme une poutre de Bresse-Timoshenko. L'effet gyroscopique a été également inclus. Les résultats s'accordent avec ceux du rotor de Zinberg [31]. Dans une autre étude, Bert et Kim [35] ont analysé l'instabilité dynamique d'un arbre de transmission en matériaux composites soumis à la

fluctuation du couple et/ou à la vitesse de rotation en utilisant diverses théories des coques minces. Les effets de rotation incluent les forces centrifuges et les forces de Coriolis. Des régions d'instabilité dynamique d'un arbre de longue envergure simplement appuyé sont présentées.

M Y. Chang et al [36] ont publié une étude sur le comportement vibratoire d'un arbre tournant en matériaux composites. Dans leur modèle la déformation transversale de cisaillement, l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et l'effet de couplage dû à la stratification des couches du composite sont incorporés. Le modèle est basé sur la théorie des poutres et la déformation de cisaillement du premier ordre (Théorie des poutres de Timoshenko).

M Y. Chang et al [37] ont édité un article sur l'analyse de vibration des arbres tournants en matériaux composites contenant des renforts aléatoirement orientés. La théorie de Signifier-Champ de Mori-Tanaka est adoptée pour expliquer l'interaction aux concentrations finies des renforts dans le matériau composite.

Des travaux récents supplémentaires sur les arbres en matériaux composites traitant les aspects théoriques et expérimentaux, ont été rapportés par Singh [38], Gupta et Singh [33] et par Singh et Gupta [39]. La formulation de la dynamique des rotors basée sur la théorie des poutres du module équivalent a été développée pour un rotor en matériaux composites avec un nombre de balourds, et supporté par des roulements. Une théorie des poutres de stratifié a été dérivée par Singh et Gupta [33] d'une théorie disponible des coques, avec un champ de déplacement de stratifié. Elle a permis de résoudre un problème général de la dynamique des rotors en matériaux composites. Les paramètres dynamiques de rotor conventionnel aussi bien que les vitesses critiques, fréquences naturelles, facteurs d'amortissement, déséquilibre de la réponse et seuil de stabilité ont été analysés en détail et les résultats des formulations basées sur les deux théories, à savoir, la théorie des poutres du module équivalent (EMBT) et la théorie des poutres de stratifié (LBT) ont été comparés [39]. Les études de la dynamique des rotors expérimentales portées par Singh et Gupta [40-41] ont été entreprises sur deux arbres en carbone-époxyde avec des orientations des fibres constantes ( $45^\circ$  et  $60^\circ$ ). L'équilibrage progressif a été effectué pour permettre à l'arbre de traverser la première vitesse critique. Inspiré de configuration très différente de l'arbre utilisé, les auteurs ont prouvé que les effets de couplage dus aux déformations flexion-extension et aux contraintes de cisaillement - normales changent avec la séquence d'empilement, et changent les valeurs de fréquences. Certains aspects pratiques tels que l'effet de la déviation d'alignement angulaire de disque et d'arbre, l'interaction entre le rayon de courbure d'arbre, qui est commun dans les arbres en

matériaux composites et le déséquilibre de rotor, et un fonctionnement non réussi d'un rotor en matériaux composites avec un amortisseur externe ont été discutés et rapportés par Singh et Gupta [40].

Dans ce travail nous utilisons la version-  $p$  de la méthode des éléments finis appliquée à l'analyse des vibrations libres des arbres tournants en matériaux composites. Le concept hiérarchique pour des fonctions forme de l'élément fini a été étudié pendant les 25 dernières années. Babuška et al [42] ont établi une base théorique pour des éléments-  $p$ , où l'élément est conservé sans changement et le degré du polynôme des fonctions de forme augmente; cependant, dans la version-  $h$  standard, de la méthode des éléments finis le maillage est raffiné pour réaliser la convergence et le degré du polynôme des fonctions de forme demeure sans changement. Des formes standard des fonctions de forme hiérarchiques ont été présentées dans la littérature; comme par exemple [43-44]. Meirovitch et Baruh [45] et Zhu [46] ont prouvé que la méthode des éléments finis hiérarchiques donne une meilleure exactitude par rapport à la version-  $h$  pour les problèmes de valeurs propres. Les fonctions de forme hiérarchiques employées par Bardell [47] sont basées sur des polynômes de Legendre orthogonaux intégrés; le calcul symbolique est employé pour calculer les matrices de la masse et de la rigidité des poutres et des plaques. Coté et Charron [48] donnent un choix des fonctions de forme de la version-  $p$  pour l'analyse vibratoire des plaques.

Dans le modèle présenté, la théorie de Timoshenko est adoptée. Le but du travail est de déterminer les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et les vitesses critiques d'un arbre tournant en matériaux composites. Dans ce modèle la déformation transversale de cisaillement, l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique, et l'effet de couplage dû à la stratification de couches du composite ont été incorporés. Pour déterminer les réponses des arbres tournants en matériaux composites, la version-  $p$  de la méthode des éléments finis avec un assemblage de la même manière que la version conventionnelle de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments et avec des fonctions de forme trigonométriques [49], est employée pour résoudre les équations gouvernant le mouvement.

## 2. Théorie des Poutres

### 2.1. Structures poutres

#### 2.1.1. Définition

De manière générale, on peut considérer qu'une structure poutre ou un élément de structure sera de type poutre si l'une de ses dimensions (la longueur) est supérieur devant les deux autres. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.

#### 2.1.2. Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres.

- L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres [50] est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".
- L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.
- L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

#### Remarques importantes

1) L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne.

2) L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes  $\sigma_{ij}$  en chaque point de la section droite.

Dans notre étude on utilise le modèle de Timoshenko considérant l'arbre tournant en matériaux composites comme poutre (Figure 2.1), en appliquant la théorie des stratifiés qui

consiste à étudier le matériaux composite par couches successives comportant matrice et renfort.

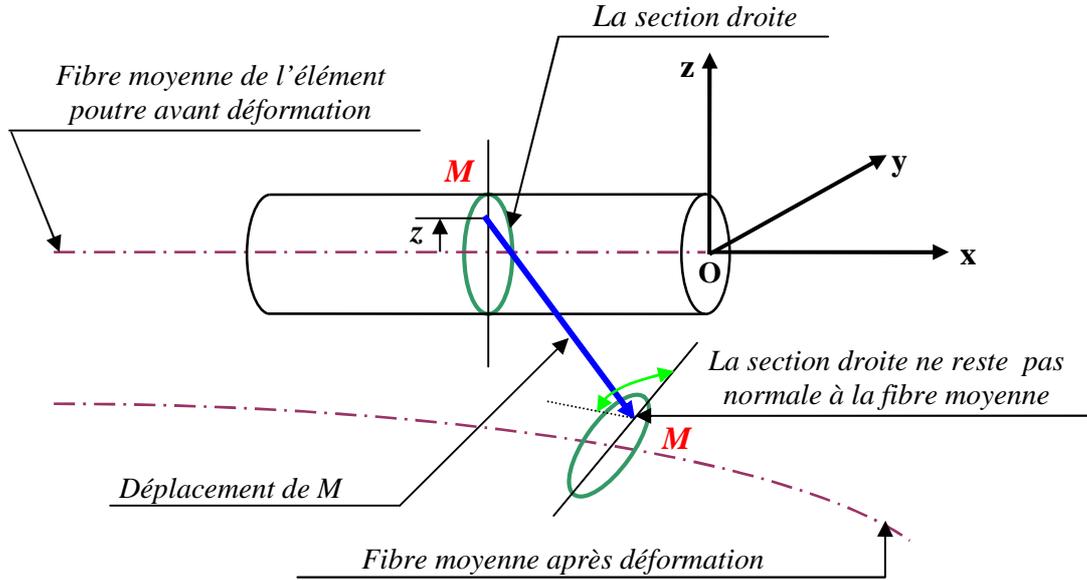


Figure 2.1 : Structure d'une poutre avant et après déformation [51].

## 2.2. Equations cinématiques

Dans le modèle de Timoshenko, on adopte les hypothèses cinématiques suivantes :

Le champ de déplacement  $(U, V, W)$  dans la couche  $n$  en un point  $M$  de la section droite de centre  $G_c$  de l'élément poutre (Figure 2.2) en fonction du temps est :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = U_0(x, t) + z\beta_x(x, t) - y\beta_y(x, t) \\ V(x, y, z, t) = V_0(x, t) - z\phi(x, t) \\ W(x, y, z, t) = W_0(x, t) + y\phi(x, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec :

$$\begin{cases} U_0(x, t) = U(x, 0, 0, t) \\ V_0(x, t) = V(x, 0, 0, t) \\ W_0(x, t) = W(x, 0, 0, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

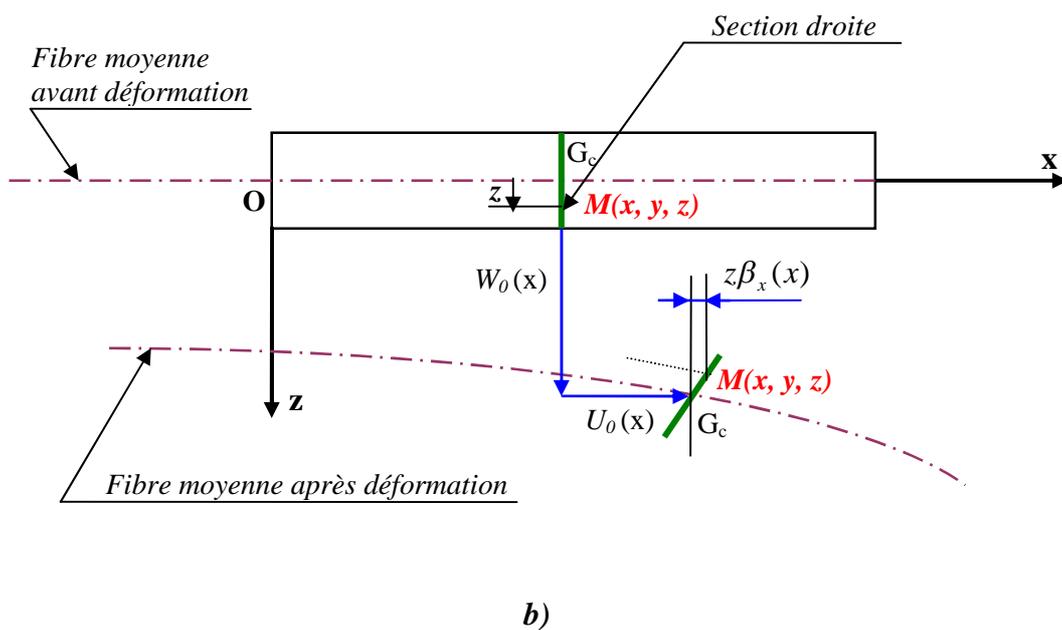
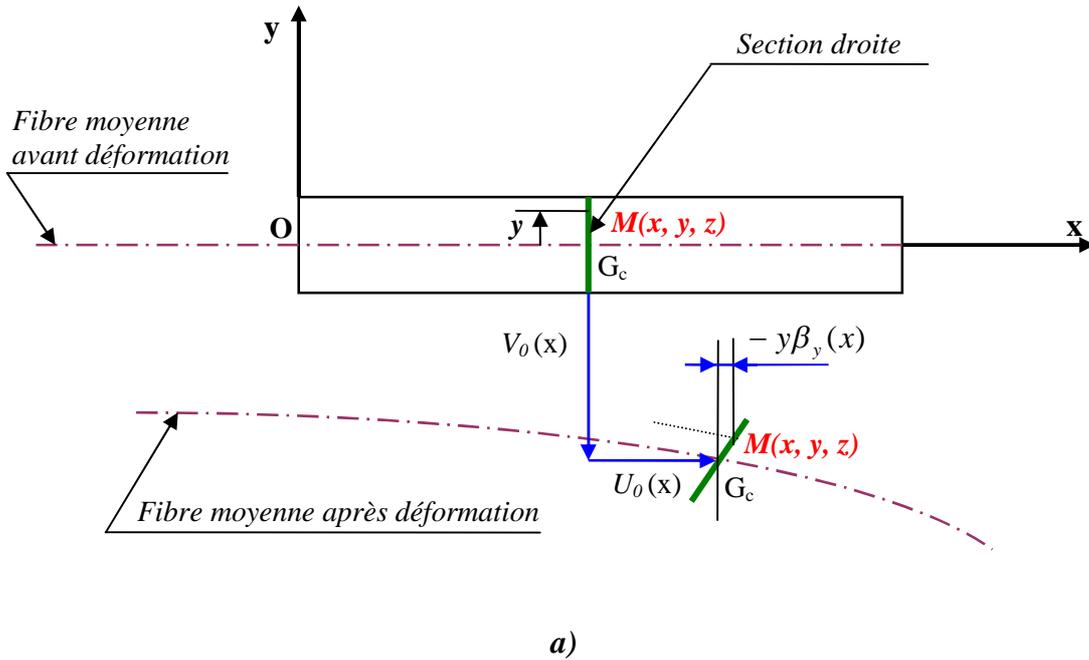
Par hypothèse les fonctions inconnues sont :

$$\{U_0(x, t), V_0(x, t), W_0(x, t), \beta_x(x, t), \beta_y(x, t), \phi(x, t)\}$$

Où :

- $U_0(x, t)$  : Déplacement longitudinal.
- $V_0(x, t)$  : Déplacement transversal horizontal.
- $W_0(x, t)$  : Déplacement transversal vertical.
- $z\beta_x(x, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe  $z$ .

- $-y\beta_y(x,t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe y.
- $\beta_x(x,t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe y.
- $\beta_y(x,t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe z.
- $-z\phi(x,t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe z.
- $y\phi(x,t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe y.
- $\phi(x,t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe x.



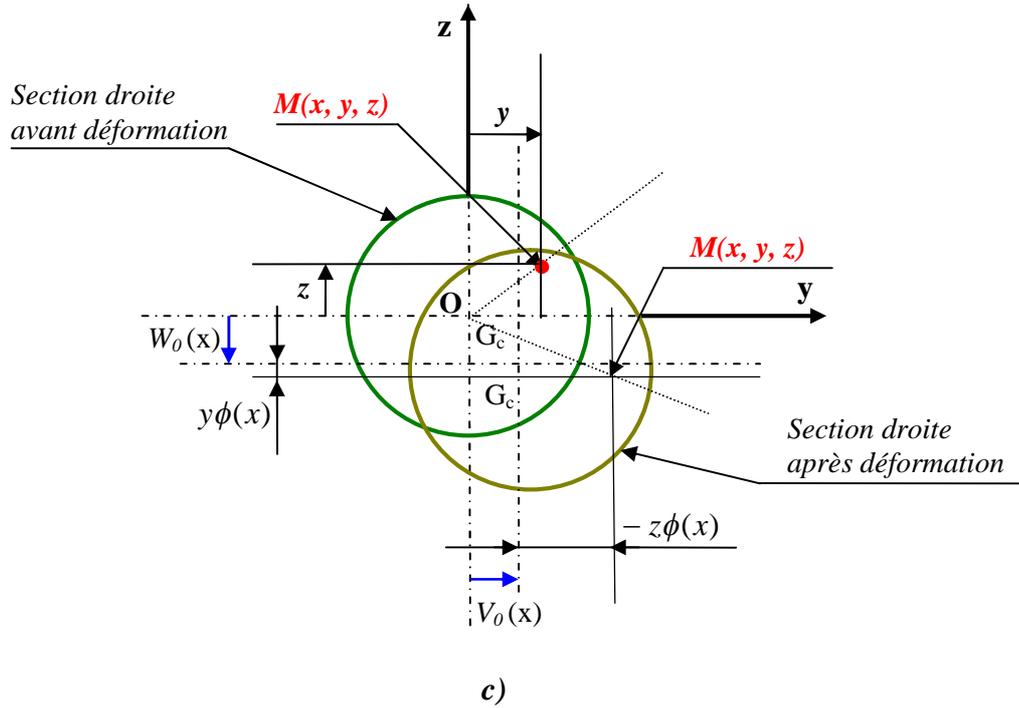


Figure 2.2 : Champ de déplacement dans un élément de structure poutre.

- a) Déplacement d'un point  $M$  de la section droite dans le plan  $Oxy$ .
- b) Déplacement d'un point  $M$  de la section droite dans le plan  $Oxz$ .
- c) Déplacement d'un point  $M$  de la section droite dans le plan  $Oyz$ .

### 2.2.1. Relation déformation –déplacement

Dans le cas des petits déplacements, les relations déformation -déplacement sont les suivantes:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Avec:  $(i, j = 1, 2, 3)$ ;  $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ ;  $(U_1=U, U_2=V, U_3=W)$

La relation (2.3) sous forme développée est :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right] \end{cases} \quad (2.4)$$

Le champ des déformations réduit du champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - y \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( -\beta_y + \frac{\partial V_0}{\partial x} - z \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \beta_x + \frac{\partial W_0}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

On a :

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$$

Le tenseur de déformation dans le système des coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$  illustré dans la figure 2.3 est [36]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{xr} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La relation (2.6) sous forme développée est :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + r \sin \theta \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - r \cos \theta \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left( \beta_y \sin \theta + \beta_x \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial V_0}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial W_0}{\partial x} + r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xr} = \frac{1}{2} \left( \beta_x \sin \theta - \beta_y \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial W_0}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

On a :

$$\varepsilon_{xr} = \varepsilon_{rx} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{\theta x}$$

Donc le tenseur des déformations dans la couche  $n$  en un point  $M$  du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{rx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\theta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

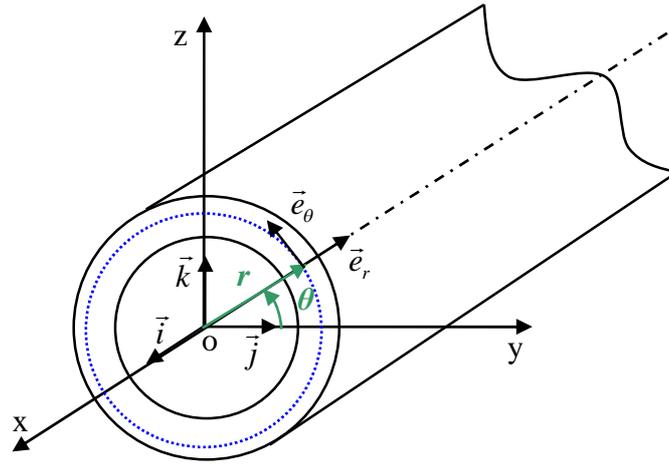


Figure 2.3: Système de coordonnées cylindriques.

2.2.2. Relation contraintes –déformations

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$[\sigma] = [C] \{\varepsilon\} \tag{2.9}$$

Cette loi, généralement appelée la loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité [C], symétrique. Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit en introduisant les constantes de rigidité  $C_{ij}$ , la loi de Hooke s'écrit suivant la forme matricielle dans la base principale (1, 2, 3) illustrée dans la figure 2.4 comme suit [52]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

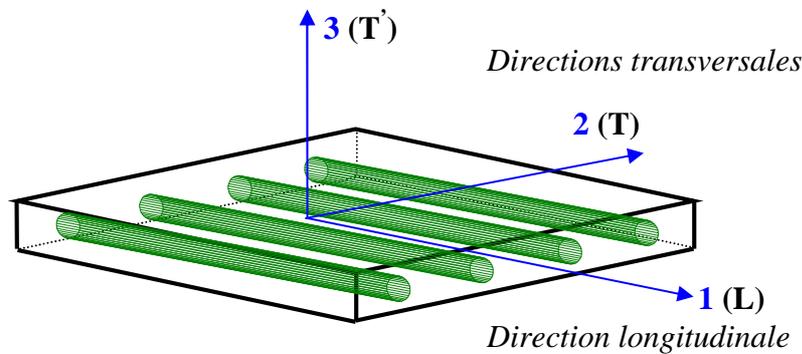


Figure 2.4 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié [52].

Les contraintes dans la base de référence  $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  montrée dans la figure 2.5 sont :

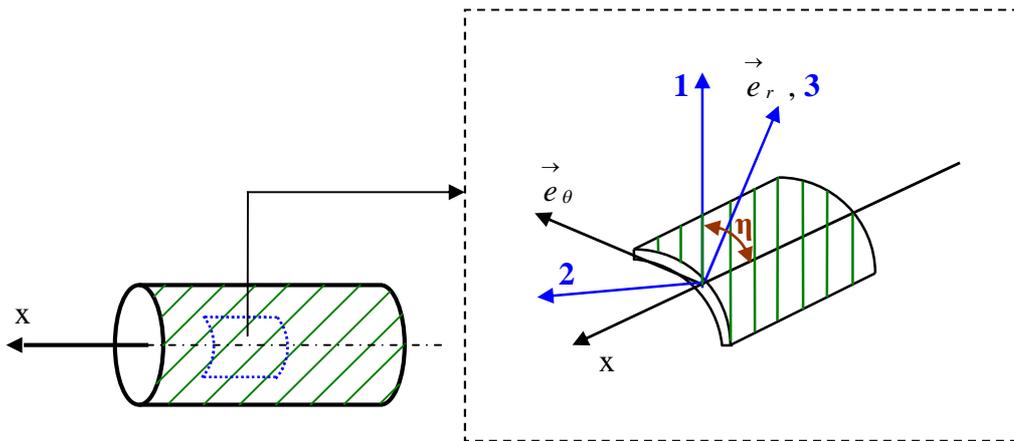
$$[\sigma] = [C'] \{\varepsilon\} = [R]^{-1} [C] [R]^T \{\varepsilon\} \quad (2.11)$$

Où  $[C']$  est la matrice des coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié  $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , et  $[R]$  c'est la matrice de changement de base des contraintes exprimée en fonction de l'angle  $\eta$  appelé l'orientation des fibres [52]:

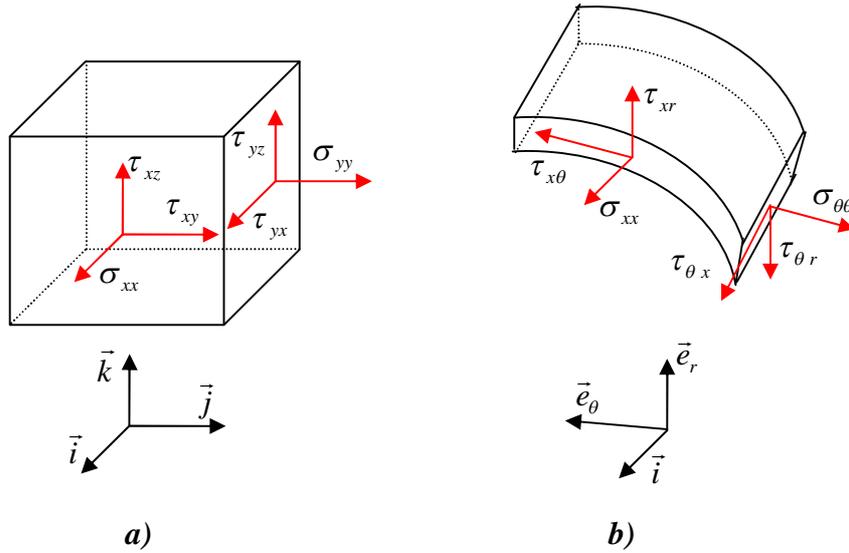
$$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2 \eta & \sin^2 \eta & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \eta \sin \eta \\ \sin^2 \eta & \cos^2 \eta & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \eta \sin \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ -2 \cos \eta \sin \eta & 2 \cos \eta \sin \eta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \eta - \sin^2 \eta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Les contraintes dans le système des coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$  dans la couche  $n$  illustrées dans la figure 2.6 s'expriment suivant la relation suivante [52]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$



**Figure 2.5 :** Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence  $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  du stratifié.



**Figure 2.6:** Composantes des vecteurs des contraintes ;  
**a)** dans le système d'axe  $(x, y, z)$ .  
**b)** dans le système d'axe  $(x, r, \theta)$ .

Donc les contraintes exprimées dans la relation (2.13) sous forme simplifiée sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & 0 & C'_{16} \\ C'_{16} & 0 & C'_{66} \\ 0 & C'_{55} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xr} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Et qu'on peut les écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = C'_{11}\varepsilon_{xx} + k_s C'_{16}\gamma_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} = k_s C'_{16}\varepsilon_{xx} + k_s C'_{66}\gamma_{x\theta} \\ \tau_{xr} = k_s C'_{55}\gamma_{xr} \end{cases} \quad (2.15)$$

Où  $k_s$  est le facteur de correction de cisaillement.

On a :  $\tau_{xr} = \tau_{rx}$  et  $\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x}$

Le tenseur des contraintes dans la couche  $n$  en un point  $M$  du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xr} & \tau_{x\theta} \\ \tau_{rx} & 0 & 0 \\ \tau_{\theta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux sont [52]:

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\ C_{22} = \frac{E_T}{E_L} C_{11} \\ C_{12} = \nu_{LT} C_{22} \\ C_{66} = G_{LT} \\ C_{44} = G_{TT'} \\ C_{55} = G_{LT'} \end{cases} \quad (2.17)$$

Avec :

$$\begin{cases} (E_L ; E_T ; E_{T'}) = (E_1 ; E_2 ; E_3) \\ (\nu_{LT} ; \nu_{LT'} ; \nu_{TT'}) = (\nu_{12} ; \nu_{13} ; \nu_{23}) \\ (G_{LT} ; G_{LT'} ; G_{TT'}) = (G_{12} ; G_{13} ; G_{23}) \\ E_T = E_{T'} \\ \nu_{LT} = \nu_{LT'} \\ G_{LT} = G_{LT'} \end{cases} \quad (2.18)$$

Le plan transverse repéré par les directions 2 et 3 notées également  $T$  et  $T'$ , ces directions étant équivalentes.

$E_L ; \nu_{LT}$  : Module de Young et coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale.

$E_T ; \nu_{TL} ; \nu_{TT'}$  : Module de Young et coefficient de Poisson mesurés dans un essai de traction transversale.

$G_{LT} ; G_{TT'}$  : Modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transversal.

Les coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches sont exprimés en fonction de l'angle  $\eta$  fait par la direction principale 1 (ou L) avec la direction x de référence [52] :

$$\begin{cases} C'_{11} = C_{11} \cos^4 \eta + C_{22} \sin^4 \eta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \eta \cos^2 \eta \\ C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \eta \cos^3 \eta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \eta \cos \eta \\ C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \eta \cos^2 \eta + C_{66} (\sin^4 \eta + \cos^4 \eta) \\ C'_{55} = C_{44} \sin^2 \eta + C_{55} \cos^2 \eta \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.3. Energie de déformation de l'arbre

La formule de l'énergie de déformation de l'arbre (un seul élément poutre) est :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma_{ij}\}^T \{\varepsilon_{ij}\} dV \quad (2.20)$$

En remplaçant (2.8) et (2.16) dans (2.20) on trouve :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\tau_{xr} \varepsilon_{xr} + 2\tau_{x\theta} \varepsilon_{x\theta}) dV \quad (2.21)$$

Qu'on peut l'écrire de la façon suivante :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_k} \begin{bmatrix} C'_{11} \varepsilon_{xx} + k_s C'_{16} \gamma_{x\theta} \\ k_s C'_{16} \varepsilon_{xx} + k_s C'_{66} \gamma_{x\theta} \\ k_s C'_{55} \gamma_{xr} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} + r \sin \theta \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - r \cos \theta \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ (\beta_y \sin \theta + \beta_x \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial V_0}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial W_0}{\partial x} + r \frac{\partial \phi}{\partial x}) \\ (\beta_x \sin \theta - \beta_y \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial W_0}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial V_0}{\partial x}) \end{bmatrix} r dr d\theta dx \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) sous forme développée prend la forme:

$$\begin{aligned} E_{da} = & \frac{1}{2} A_{11} \int_0^L \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} B_{11} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} k_s B_{66} \int_0^L \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} k_s A_{16} \left[ 2 \int_0^L \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} dx + \int_0^L \beta_y \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial V_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx \right] + \\ & \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \beta_x^2 dx + \int_0^L \beta_y^2 dx + 2 \int_0^L \beta_x \frac{\partial W_0}{\partial x} dx - 2 \int_0^L \beta_y \frac{\partial V_0}{\partial x} dx \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Avec :

$$\begin{cases} A_{11} = \pi \sum_{n=1}^k C'_{11n} (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ A_{55} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k C'_{55n} (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ A_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k C'_{66n} (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ A_{16} = \frac{2\pi}{3} \sum_{n=1}^k C'_{16n} (R_n^3 - R_{n-1}^3) \\ B_{11} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^k C'_{11n} (R_n^4 - R_{n-1}^4) \\ B_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k C'_{66n} (R_n^4 - R_{n-1}^4) \end{cases} \quad (2.24)$$

Où  $k$  est le nombre des couches et  $n$  c'est l'indice des couches.

Où  $R_0$  est le rayon intérieur de l'arbre,  $R_k$  est le rayon extérieur de l'arbre et  $e$  est l'épaisseur de l'arbre (Figure 2.7),  $L$  est la longueur de l'arbre en matériaux composites.

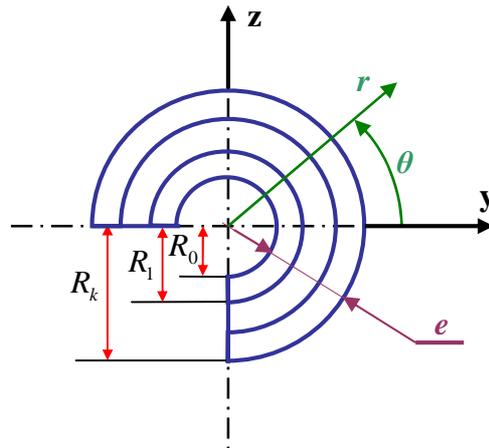


Figure 2.7 :  $k$  –couches de l’arbre en matériaux composites.

## 2.4. Energie cinétique de l’arbre

### 2.4.1. Système des coordonnées

La figure 2.8 schématise le déplacement d’un point arbitraire  $P$  de la section droite de l’arbre flexible tournant (un seul élément poutre), cette nouvelle position de  $P$  est le résultat d’une déformation : longitudinale, de flexion et de torsion de l’arbre tournant en matériaux composites.

$x, y, z$  dénotent les coordonnées fixes et  $x_1, y_1, z_1$  dénotent les coordonnées mobiles fixées à l’arbre tournant et la section droite. Le centre  $G_c$  de la section droite coïncide avec le centre  $O$  avant déformation de l’arbre.

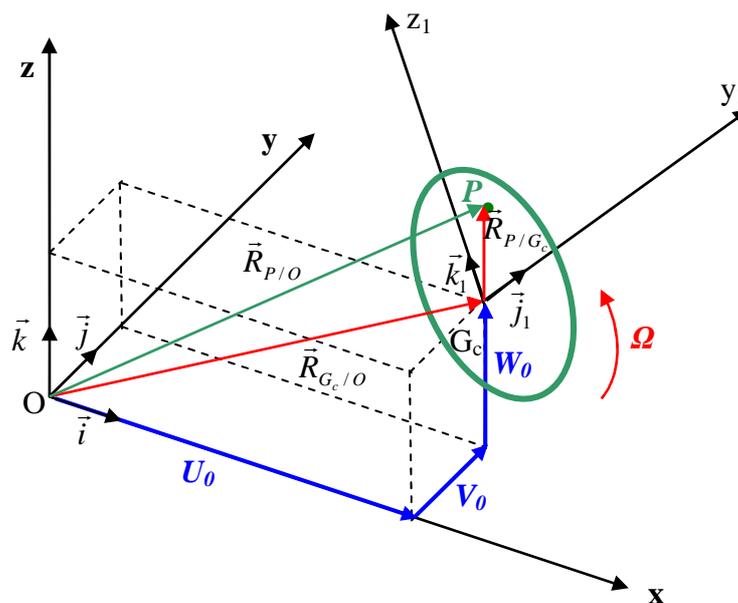


Figure 2.8 : Déplacement d’un point arbitraire  $P$  de la section droite de l’arbre tournant.

- $(O, x, y, z)$  : Repère fixe ( $R_F$ ).  
 $(G_c, x_1, y_1, z_1)$  : Repère mobile ( $R_M$ ) lié à l'arbre en mouvement.  
 $\Omega$  : Vitesse de rotation de l'arbre.  
 $\vec{R}_{P/O}$  : Vecteur déplacement de P dans ( $R_F$ ).  
 $\vec{R}_{P/G_c}$  : Vecteur déplacement de P dans ( $R_M$ ).  
 $\vec{R}_{G_c/O}$  : Vecteur déplacement de  $G_c$  dans ( $R_F$ ).

#### 1.4.2. Position et vitesse d'un point de l'arbre

Le vecteur position  $\vec{R}_{P/O}$  est donné par:

$$\vec{R}_{P/O} = \vec{R}_{G_c/O} + \vec{R}_{P/G_c} = \left( U_0 \vec{i} + V_0 \vec{j} + W_0 \vec{k} \right) + \left( y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1 \right) \quad (2.25)$$

Qu'on peut écrire en fonction des rotations de la section droite illustrés dans la figure (2.9) et qui représentent les angles d'Euler de cette section, et qui sont classés respectivement  $(\beta_y, \beta_x, \varphi)$ , avec  $\varphi = \phi + \Omega t$  :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{P/O} = & \left( U_0 - y_1 \beta_y \cos \varphi + y_1 \beta_x \sin \varphi + z_1 \beta_y \sin \varphi + z_1 \beta_x \cos \varphi \right) \vec{i} + \\ & \left( V_0 - y_1 \cos \varphi + y_1 \beta_x \beta_y \sin \varphi - z_1 \sin \varphi + z_1 \beta_x \beta_y \cos \varphi \right) \vec{j} + \left( W_0 + y_1 \sin \varphi + z_1 \cos \varphi \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le vecteur vitesse est:  $\frac{d \vec{R}_{P/O}}{dt} = \vec{R}_{P/O}$

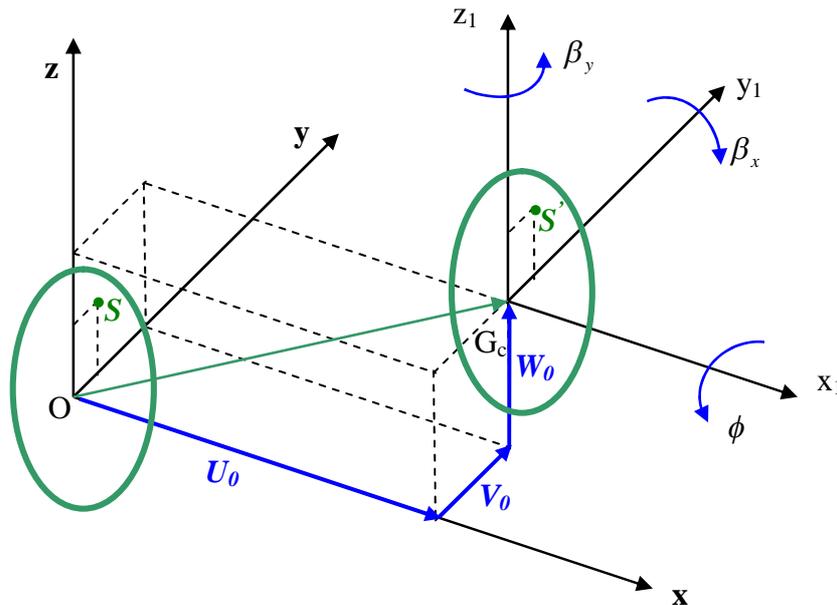


Figure 2.9 : Déplacement de la section droite de l'arbre tournant.

### 2.4.3. Expression de l'énergie cinétique de l'arbre.

L'expression de l'énergie cinétique de l'arbre est donnée par l'équation suivante:

$$E_{ca} = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \vec{R}_{P/O} \cdot \vec{R}_{P/O} \right) dV \quad (2.27)$$

L'énergie cinétique sous forme développée est :

$$E_{ca} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ I_m (\dot{U}_0^2 + \dot{V}_0^2 + \dot{W}_0^2) + I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - 2\Omega I_p \beta_x \dot{\beta}_y + 2\Omega I_p \dot{\phi} + I_p \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p + \Omega^2 I_d (\beta_x^2 + \beta_y^2) \right] dx \quad (2.28)$$

Avec :

$$\begin{cases} I_m = \pi \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ I_d = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^4 - R_{n-1}^4) \\ I_p = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^4 - R_{n-1}^4) \end{cases} \quad (2.29)$$

Où  $\rho_n$  est la masse volumique de la  $n$ ième couche de l'arbre composite.

Le moment d'inertie massique  $I_m$ , Le moment d'inertie diamétral  $I_d$  et le moment d'inertie polaire  $I_p$  de l'arbre tournant par unité de longueur.

Le terme  $2\Omega I_p \beta_x \dot{\beta}_y$  représente l'effet gyroscopique, et  $I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)$  représente l'effet de l'inertie rotatoire. Le terme  $\Omega^2 I_d (\beta_x^2 + \beta_y^2)$  est très petit devant  $\Omega^2 I_p$ , représente l'effet de la rigidification centrifuge, il sera négligé par la suite de l'analyse.

### 2.5. Energie cinétique du disque

Le disque fixé à l'arbre en matériaux composites (figure 2.10) est supposé rigide et en matériaux isotropes. Selon l'équation (2.28) et de façon semblable, l'énergie cinétique du disque s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{cD} = \frac{1}{2} \left[ I_m^D (\dot{U}_0^2 + \dot{V}_0^2 + \dot{W}_0^2) + I_d^D (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - 2\Omega I_p^D \beta_x \dot{\beta}_y + 2\Omega I_p^D \dot{\phi} + I_p^D \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p^D + \Omega^2 I_d^D (\beta_x^2 + \beta_y^2) \right] \quad (2.30)$$

Où  $I_m^D, I_d^D$  et  $I_p^D$  sont respectivement le moment d'inertie massique (la masse), Le moment d'inertie diamétral et le moment d'inertie polaire du disque. Le terme  $\Omega^2 I_p^D (\beta_x^2 + \beta_y^2)$  est très petit devant  $\Omega^2 I_p^D$ , il sera négligé par la suite de l'analyse.

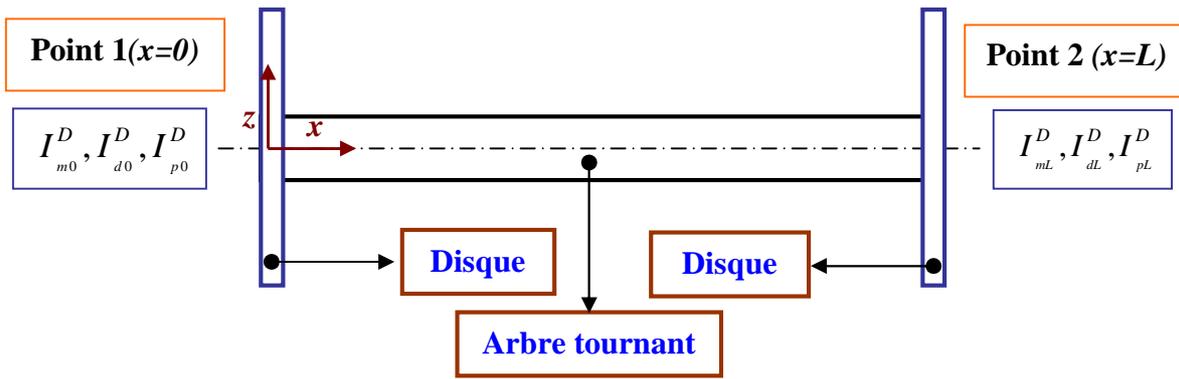


Figure 2.10 : Différentes positions du disque sur l'arbre tournant (un seul élément).

2.6. Travail virtuel des paliers.

Les paliers sont caractérisés par des valeurs de raideurs et d'amortissement visqueux suivant les directions de y et z et par les termes croisés (Figures 2.11 et 2.12).

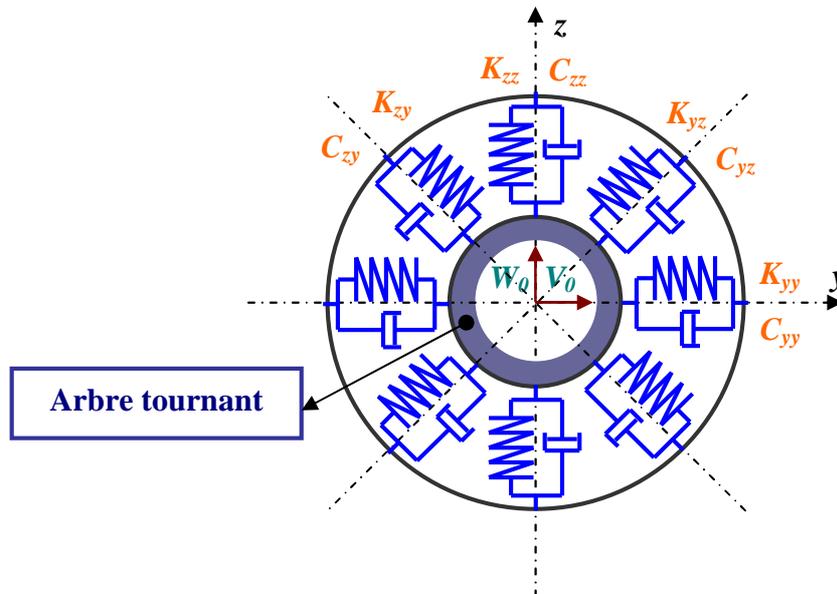


Figure 2.11: Modèle de palier.

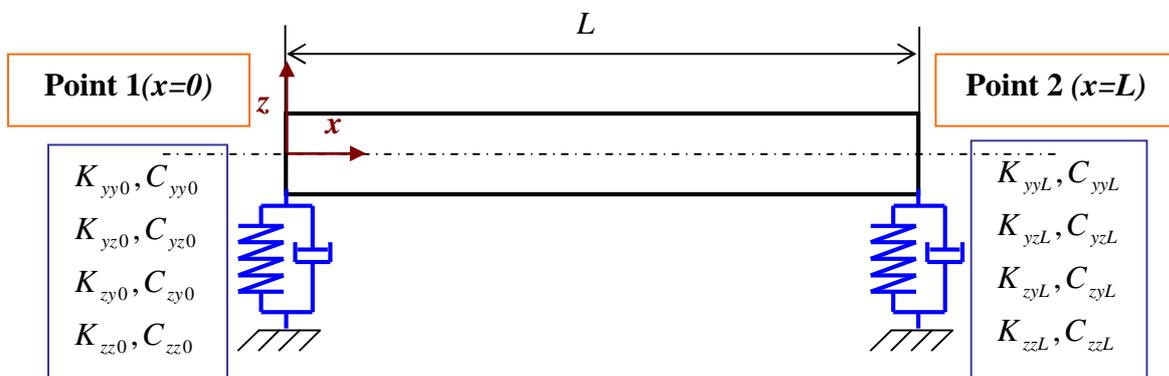


Figure 2.12: Arbre tournant (un seul élément) sur deux paliers élastiques amortis.

Le travail virtuel  $\delta A$  des forces agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta A = F_{V_0} \delta V_0 + F_{W_0} \delta W_0 \quad (2.31)$$

Où  $F_{V_0}$  et  $F_{W_0}$  sont les forces généralisées exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} F_{V_0} \\ F_{W_0} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{W}_0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

## 2.7. Equations du mouvement

Pour la détermination des équations différentielles du mouvement nous appliquons les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cg}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cg}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = \frac{\delta A}{\delta q_i} = F_i(t) \quad (2.33)$$

Avec :

$E_{cg}$ : Energie cinétique globale (arbre+disques).

$E_d$ : Energie potentielle (de déformation).

$\{q_i\}$ : Coordonnées généralisées. Avec ( $i = U, V, W, \beta_x, \beta_y, \phi$ )

$F_i(t)$ : Forces généralisées.

$\delta A$ : Travail virtuel des forces généralisées.

De (2.33) on aura :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cg}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cg}}{\partial q_i} = [[M_a] + [M_D]] \{\ddot{q}\} - \{F_v\} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial q_i} = [K_a] \{q\} - \{F_g\} \quad (2.35)$$

$$\frac{\delta A}{\delta q_i} = \{F_{ex}\} \quad (2.36)$$

Avec :

$\{F_v\}$ : Vecteur des forces de Coriolis et des forces centrifuges.

$\{F_g\}$ : Vecteur des forces non- linéaires (nul dans notre cas).

$\{F_{ex}\}$ : Vecteur des forces généralisées (des Paliers).

Donc l'équation (2.33) devient :

$$[[M_a] + [M_D]] \{\ddot{q}\} + [K_a] \{q\} = \{F_{ex}\} + \{F_v\} + \{F_g\} \quad (2.37)$$

Qu'on peut écrire sous la forme suivante dans le cas des vibrations libres:

$$[[M_a] + [M_D]] \{\ddot{q}\} + [[G_a] + [G_D] + [C_P]] \{\dot{q}\} + [[K_a] + [K_P] + [R_{cen}] + [R_{acc}]] \{q\} = \{0\} \quad (2.38)$$

Avec:

$[M_a]$ : Matrice masse globale de l'arbre.

$[M_D]$ : Matrice masse globale des disques.

$[G_a]$ : Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de l'arbre.

$[G_D]$ : Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale des disques.

$[C_p]$ : Matrice d'amortissement globale.

$[K_a]$ : Matrice de rigidité linéaire globale de l'arbre.

$[K_p]$ : Matrice de raideur des paliers globale.

$[R_{cen}]$ : Matrice de rigidification centrifuge globale (arbre +disques)

$[R_{acc}]$ : Matrice de rigidification d'accélération angulaire globale (arbre +disques).

$$\text{Avec } [R_{acc}] = \frac{1}{2} \left[ [\dot{G}_a] + [\dot{G}_D] \right]$$

Et puisque les matrices de couplage due à l'effet gyroscopique sont fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  et qui est constante, on a  $\dot{\Omega} = 0$  et ceci annule la matrice de rigidification d'accélération angulaire  $[R_{acc}]$ , pour  $[R_{cen}] = 0$  (voir § 2.4.3).

Donc, on peut écrire l'expression (2.38) sous la forme:

$$\left[ [M_a] + [M_D] \right] \{\ddot{q}\} + \left[ [G_a] + [G_D] + [C_p] \right] \{\dot{q}\} + \left[ [K_a] + [K_p] \right] \{q\} = \{0\} \quad (2.39)$$

La détermination de toutes les matrices formant le système (2.39) sera faite par la version-  $p$  de la méthode des éléments finis.

## 3. Modélisation par la version- $p$ de la méthode des éléments finis

### 3.1. Introduction

Dans la version-  $p$  de la méthode des éléments finis, avec un assemblage de la même manière que la version conventionnelle de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments, l'erreur peut être contrôlée non seulement par l'affinage du maillage mais aussi en augmentant le degré des fonctions de forme de tous les éléments. Généralement le degré des fonctions de forme noté  $p$ . Cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide. Cette version de la méthode des éléments finis peut être aperçue comme étant un cas spécial de la méthode classique de Rayleigh Ritz.

L'utilisation de cette méthode évite le problème de continuité le long des interfaces et maîtrise les problèmes de singularité. Pour améliorer la précision, il faut augmenter l'ordre du mode hiérarchique " $p$ " et l'affinage du maillage. Plusieurs fonctions de formes sont utilisées dans la méthode des éléments finis hiérarchiques, parmi ces fonctions on a :

Les fonctions polynomiales, Les fonctions trigonométriques et Les fonctions polynomiales et trigonométriques.

Ces dernières fonctions de formes sont celles développées et utilisées dans la méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométriques dans le cas des vibrations des plaques [49].

### 3.2. Sélection des Fonctions de Forme et modélisation de l'élément poutre

Dans notre étude, on utilise la méthode des éléments finis hiérarchiques avec des fonctions de forme trigonométrique [49], combinée avec la méthode des éléments finis classique.

L'arbre en rotation est modélisé par des éléments poutres 3D hiérarchiques. Chaque élément représenté sur la figure 3.1 à deux nœuds 1 et 2. Dans le cas d'un arbre étagé plusieurs éléments peuvent être utilisés.

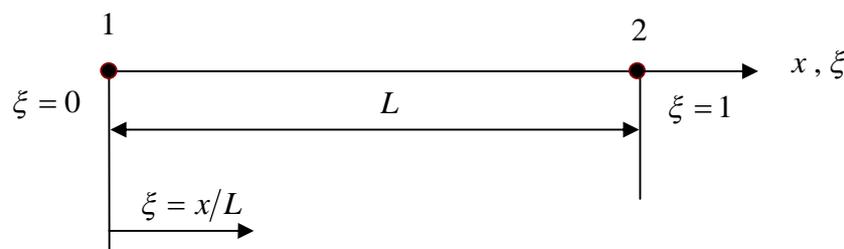


Figure 3.1 : Élément poutre 3D à deux nœuds.

Les coordonnées locales sont liées aux coordonnées adimensionnelles par la relation :

$$\xi = x/L \quad \text{Avec } (0 \leq \xi \leq 1). \quad (3.1)$$

Le groupe des fonctions de forme pour les déplacements  $U_0, V_0, W_0$  et les rotations  $\beta_x, \beta_y, \phi$  est donné par :

$$[f_1, f_2, \dots, f_{r+2}] \quad (3.2)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} f_1 = 1 - \xi \\ f_2 = \xi \\ f_{r+2} = \sin(\delta_r \xi) \\ \delta_r = r\pi ; r = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Les deux fonctions de forme du groupe ( $f_1, f_2$ ) sont celles de la méthode des éléments finis nécessaires à la description des déplacements aux nœuds de l'élément, alors que les fonctions trigonométriques contribuent seulement au champ de déplacement interne et n'affectent pas les déplacements aux nœuds.

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\{q\} = \{q_U, q_V, q_W, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_\phi\}^T \quad (3.4)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \{q_U\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{p_U}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_V\} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{p_V}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_W\} = \{z_1, z_2, z_3, \dots, y_{p_W}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_{\beta_x}\} = \{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \beta_{x_3}, \dots, \beta_{x_{p_{\beta_x}}}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_{\beta_y}\} = \{\beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3}, \dots, \beta_{y_{p_{\beta_y}}}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_\phi\} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{p_\phi}\}^T \exp(j\omega t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Le champ déplacement d'un point de la poutre est donné par :

$$\begin{cases} U_0 = [N_U] \{q_U\} = \sum_{m=1}^{p_U} x_m(t) \cdot f_m(\xi) \\ V_0 = [N_V] \{q_V\} = \sum_{m=1}^{p_V} y_m(t) \cdot f_m(\xi) \\ W_0 = [N_W] \{q_W\} = \sum_{m=1}^{p_W} z_m(t) \cdot f_m(\xi) \\ \beta_x = [N_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} = \sum_{m=1}^{p_{\beta_x}} \beta_{x_m}(t) \cdot f_m(\xi) \\ \beta_y = [N_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} = \sum_{m=1}^{p_{\beta_y}} \beta_{y_m}(t) \cdot f_m(\xi) \\ \phi = [N_\phi] \{q_\phi\} = \sum_{m=1}^{p_\phi} \phi_m(t) \cdot f_m(\xi) \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec :

$p_U$  : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale  $x$ .

$p_V$  : Nombre de fonction de forme de la direction transversale  $y$ .

$p_W$  : Nombre de fonction de forme de la direction transversale  $z$ .

$p_{\beta_x}$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe  $y$ .

$p_{\beta_y}$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe  $z$ .

$p_\phi$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe  $x$ .

Le vecteur déplacement  $\{B\}$  est donné par :

$$\{B\} = [N] \{q\} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_V] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [N_W] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_x}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [N_\phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_U \\ q_V \\ q_W \\ q_{\beta_x} \\ q_{\beta_y} \\ q_\phi \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Où  $[N]$  est la matrice des fonctions de forme.

$$[N_{U,V,W,\beta_x,\beta_y,\phi}] = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{p_U, p_V, p_W, p_{\beta_x}, p_{\beta_y}, p_\phi}] \quad (3.8)$$

### 3.3. Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre $[K_a^e]$

D'après les équations (2.23) et (2.24) la forme de l'énergie de déformation est:

$$\begin{aligned} E_{da} = & \frac{1}{2} A_{11} \int_0^L \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} B_{11} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} k_s B_{66} \int_0^L \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} k_s A_{16} \left[ 2 \int_0^L \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} dx + \int_0^L \beta_y \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial V_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx \right] + \\ & \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \beta_x^2 dx + \int_0^L \beta_y^2 dx + 2 \int_0^L \beta_x \frac{\partial W_0}{\partial x} dx - 2 \int_0^L \beta_y \frac{\partial V_0}{\partial x} dx \right] \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie de déformation en coordonnées adimensionnelles est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
E_{da} = & \frac{1}{2L} A_{11} \int_0^1 \left( \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2L} B_{11} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \int_0^1 \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] + \frac{1}{2L} k_s B_{66} \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \\
& \frac{1}{2} k_s A_{16} \left[ \frac{2}{L} \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} d\xi + \int_0^1 \beta_y \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} d\xi - \int_0^1 \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{\partial V_0}{\partial \xi} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{\partial W_0}{\partial \xi} \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} d\xi \right] + \\
& \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 \left( \frac{\partial V_0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \left( \frac{\partial W_0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + L \int_0^1 \beta_x^2 d\xi + L \int_0^1 \beta_y^2 d\xi + 2 \int_0^1 \beta_x \frac{\partial W_0}{\partial \xi} d\xi - \right. \\
& \left. 2 \int_0^1 \beta_y \frac{\partial V_0}{\partial \xi} d\xi \right] \tag{3.9}
\end{aligned}$$

En introduisant les matrices des fonctions de forme  $[N_{U,V,W,\beta_x,\beta_y,\phi}]$  dans l'expression (3.9)

on trouve :

$$\begin{aligned}
E_{da} = & \frac{1}{2L} A_{11} \int_0^1 \{q_U\}^T [N'_U]^T [N'_U] \{q_U\} d\xi + \frac{1}{2L} B_{11} \left[ \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N'_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi + \right. \\
& \left. \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N'_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi \right] + \frac{1}{2L} k_s B_{66} \int_0^1 \{q_\phi\}^T [N'_\phi]^T [N'_\phi] \{q_\phi\} d\xi + \\
& \frac{1}{2} k_s A_{16} \left[ \frac{2}{L} \int_0^1 \{q_\phi\}^T [N'_\phi]^T [N'_U] \{q_U\} d\xi + \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N'_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi - \right. \\
& \left. \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N'_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi - \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_V\}^T [N'_V]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi - \right. \\
& \left. \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_W\}^T [N'_W]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi \right] + \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_V\}^T [N'_V]^T [N'_V] \{q_V\} d\xi + \right. \\
& \left. \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_W\}^T [N'_W]^T [N'_W] \{q_W\} d\xi + L \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N'_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi + \right. \\
& \left. L \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N'_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi + 2 \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N'_{\beta_x}]^T [N'_W] \{q_W\} d\xi - \right. \\
& \left. 2 \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N'_{\beta_y}]^T [N'_V] \{q_V\} d\xi \right] \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Où:

$$[N'_i] = \frac{\partial [N_i]}{\partial \xi}, \text{ avec } (i = U, V, W, \beta_x, \beta_y, \phi) \tag{3.11}$$

De la formule (2.33), on trouve la forme de la matrice de rigidité élémentaire  $[K_a^e]$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_U\}} = & \left[ \frac{1}{L} A_{11} \int_0^1 [N'_U]^T [N'_U] d\xi \right] \{q_U\} + \left[ \frac{1}{L} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_\phi]^T [N'_U] d\xi \right] \{q_\phi\} \\
= & [K_U] \{q_U\} + [K_1] \{q_\phi\} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_v\}} &= \left[ \frac{1}{L} k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_v]^T [N'_v] d\xi \right] \{q_v\} - \left[ \frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_v]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} - \\ &\quad \left[ k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N'_v] d\xi \right] \{q_{\beta_y}\} = [K_v] \{q_v\} + [K_2] \{q_{\beta_x}\} + [K_3] \{q_{\beta_y}\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_w\}} &= \left[ \frac{1}{L} k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_w]^T [N'_w] d\xi \right] \{q_w\} + \left[ k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N'_w] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} - \\ &\quad \left[ \frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_w]^T [N'_{\beta_y}] d\xi \right] \{q_{\beta_y}\} = [K_w] \{q_w\} + [K_4] \{q_{\beta_x}\} + [K_5] \{q_{\beta_y}\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_{\beta_x}\}} &= \left( \left[ \frac{1}{L} B_{11} \int_0^1 [N'_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] + \left[ L k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_x}\} - \\ &\quad \left[ \frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_{\beta_x}]^T [N'_v] d\xi \right] \{q_v\} + \left[ k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_w]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_w\} + \\ &\quad \left( \left[ \frac{1}{2} k_s A_{16} \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] - \left[ \frac{1}{2} k_s A_{16} \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_y}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_y}\} \\ &= [K_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} + [K_2]^T \{q_v\} + [K_4]^T \{q_w\} + [K_6] \{q_{\beta_y}\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_{\beta_y}\}} &= \left( \left[ \frac{1}{L} B_{11} \int_0^1 [N'_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_y}] d\xi \right] + \left[ L k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_y}\} - \\ &\quad \left[ \frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_v]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \{q_v\} + \left[ k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_{\beta_y}]^T [N'_w] d\xi \right] \{q_w\} + \\ &\quad \left( \left[ \frac{1}{2} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_{\beta_x}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] - \left[ \frac{1}{2} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_{\beta_y}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_x}\} \\ &= [K_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} + [K_3]^T \{q_v\} + [K_5]^T \{q_w\} + [K_6]^T \{q_{\beta_x}\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_\phi\}} &= \left[ \frac{1}{L} B_{66} \int_0^1 [N'_\phi]^T [N'_\phi] d\xi \right] \{q_\phi\} + \left[ \frac{1}{L} k_s A_{16} \int_0^1 [N'_u]^T [N'_\phi] d\xi \right] \{q_u\} \\ &= [K_\phi] \{q_\phi\} + [K_1]^T \{q_u\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donc on peut écrire la matrice de rigidité élémentaire  $[K_a^e]$  de l'arbre tournant sous la forme suivante :

$$[K_a^e] = \begin{bmatrix} [K_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_1] \\ 0 & [K_V] & 0 & [K_2] & [K_3] & 0 \\ 0 & 0 & [K_W] & [K_4] & [K_5] & 0 \\ 0 & [K_2]^T & [K_4]^T & [K_{\beta_x}] & [K_6] & 0 \\ 0 & [K_3]^T & [K_5]^T & [K_6]^T & [K_{\beta_y}] & 0 \\ [K_1]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_\phi] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Les intégrales de l'expression (3.18) sont de la forme :

$$J_{mn}^{\alpha\beta} = \int_0^1 f_m^\alpha(\xi) f_n^\beta(\xi) d\xi \quad (3.19)$$

Où :

$\alpha, \beta$  désignent l'ordre de dérivation.

$m, n$  désignent le nombre de fonction de forme utilisées.

### 3.4. Détermination des matrices élémentaires de l'arbre $[M_a^e]$ et $[G_a^e]$

D'après l'équation de l'énergie cinétique de l'élément poutre donnée par l'équation (2.28) sous forme simplifiée on a:

$$E_{ca} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ I_m (\dot{U}_0^2 + \dot{V}_0^2 + \dot{W}_0^2) + I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - 2\Omega I_p \beta_x \dot{\beta}_y + 2\Omega I_p \dot{\phi} + I_p \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p \right] dx$$

L'expression de l'énergie cinétique de l'arbre tournant en coordonnées adimensionnelles et après l'introduction des fonctions de forme est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} E_{ca} = & \frac{1}{2} I_m L \left[ \int_0^1 \{\dot{q}_U\}^T [N_U]^T [N_U] \{\dot{q}_U\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_V\}^T [N_V]^T [N_V] \{\dot{q}_V\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_W\}^T [N_W]^T [N_W] \{\dot{q}_W\} d\xi \right] + \\ & \frac{1}{2} I_d L \left[ \int_0^1 \{\dot{q}_{\beta_x}\}^T [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] \{\dot{q}_{\beta_x}\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_{\beta_y}\}^T [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] \{\dot{q}_{\beta_y}\} d\xi \right] + \Omega I_p L \left[ \int_0^1 [N_\phi] \{\dot{q}_\phi\} d\xi \right] + \\ & \frac{1}{2} I_p L \left[ \int_0^1 \{\dot{q}_\phi\}^T [N_\phi]^T [N_\phi] \{\dot{q}_\phi\} d\xi \right] - \Omega I_p L \left[ \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_y}] \{\dot{q}_{\beta_y}\} d\xi \right] + \frac{L}{2} \Omega^2 I_p \end{aligned} \quad (3.20)$$

De la formule (2.33), on trouve les formes des matrices élémentaires  $[M_a^e]$  et  $[G_a^e]$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}_U\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q_U\}} = \left[ I_m L \int_0^1 [N_U]^T [N_U] d\xi \right] \{\ddot{q}_U\} = [M_U] \{\ddot{q}_U\} \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}_V\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q_V\}} = \left[ I_m L \int_0^1 [N_V]^T [N_V] d\xi \right] \{\ddot{q}_V\} = [M_V] \{\ddot{q}_V\} \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q_w\}} = \left[ I_m L \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \right] \{\ddot{q}_w\} = [M_w] \{\ddot{q}_w\} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}_{\beta_x}\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q_{\beta_x}\}} &= \left[ I_d L \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{\ddot{q}_{\beta_x}\} + \left[ \Omega I_p L \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \{\dot{q}_{\beta_y}\} \\ &= [M_{\beta_x}] \{\ddot{q}_{\beta_x}\} + [G_1] \{\dot{q}_{\beta_y}\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}_{\beta_y}\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q_{\beta_y}\}} &= \left[ I_d L \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \{\ddot{q}_{\beta_y}\} - \left[ \Omega I_p L \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{\dot{q}_{\beta_x}\} \\ &= [M_{\beta_y}] \{\ddot{q}_{\beta_y}\} - [G_1]^T \{\dot{q}_{\beta_x}\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}_\phi\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q_\phi\}} = \left[ I_p L \int_0^1 [N_\phi]^T [N_\phi] d\xi \right] \{\ddot{q}_\phi\} = [M_\phi] \{\ddot{q}_\phi\} \quad (3.26)$$

Donc on peut écrire la matrice masse élémentaire  $[M_a^e]$  et la matrice de l'effet gyroscopique  $[G_a^e]$  élémentaire de l'arbre tournant sous les formes suivantes :

$$[M_a^e] = \begin{bmatrix} [M_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_V] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_W] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_{\beta_x}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [M_{\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [M_\phi] \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Et

$$[G_a^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [G_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[G_1]^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Les intégrales des expressions (3.27) et (3.28) ont la forme de l'équation (3.19).

$$J_{mn}^{\alpha\beta} = \int_0^1 f_m^\alpha(\xi) f_n^\beta(\xi) d\xi$$

### 3.5. Détermination des matrices élémentaires du disque $[M_D^e]$ et $[G_D^e]$

De façon semblable, En introduisant les matrices des fonctions de formes dans l'expression de l'énergie cinétique du disque donnée par l'équation (2.30) à partir de

l'équation (3.7) aux points (1) et (2) donnés par la figure 2.10. Après l'application des équations de Lagrange donnée par l'équation (2.33), on peut écrire la matrice masse élémentaire  $[M_D^e]$  et la matrice de l'effet gyroscopique élémentaire  $[G_D^e]$  du disque sous les formes suivantes :

$$[M_D^e] = \begin{bmatrix} [I_m^D] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [I_m^D] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [I_m^D] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [I_d^D] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [I_d^D] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [I_p^D] \end{bmatrix}; \quad (3.29)$$

$$[G_D^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega [I_p^D] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega [I_p^D]^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Où les termes non nuls des sous matrices qui forment les matrices élémentaires (3.29) et (3.30) sont comme suit :

$$I_m^D(1,1) = I_{m0}^D ; I_m^D(2,2) = I_{mL}^D ; I_d^D(1,1) = I_{d0}^D ; I_d^D(2,2) = I_{dL}^D ; I_p^D(1,1) = I_{p0}^D \text{ et } I_p^D(2,2) = I_{pL}^D .$$

### 3.6. Détermination des matrices élémentaires $[K_p^e]$ et $[C_p^e]$

D'après les équations (2.31) et (2.32), le travail virtuel  $\delta A$  des forces agissant sur l'élément poutre est :

$$\delta A = F_{V_0} \delta V_0 + F_{W_0} \delta W_0$$

Où  $F_{V_0}$  et  $F_{W_0}$  sont les forces généralisées exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} F_{V_0} \\ F_{W_0} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{W}_0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix}$$

En introduisant les matrices des fonctions de formes  $[N_{V,W}]$  dans l'expression (2.32) à partir de l'équation (3.7) aux points (1) et (2) donnés par la figure 2.12 on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \{F_{V_0}\} \\ \{F_{W_0}\} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [C_{yy}] & [C_{yz}] \\ [C_{zy}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_V\} \\ \{\dot{q}_W\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{yy}] & [K_{yz}] \\ [K_{zy}] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_V\} \\ \{q_W\} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

De la même façon, le travail virtuel donné par l'équation (2.31) devient :

$$\delta A = F_{V_0} \delta q_V + F_{W_0} \delta q_W \quad (3.32)$$

En appliquant les équations de Lagrange données par l'équation (2.33) on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \left\{ \frac{\delta A}{\delta q_V} \right\} \\ \left\{ \frac{\delta A}{\delta q_W} \right\} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [C_{yy}] & [C_{yz}] \\ [C_{zy}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_V\} \\ \{\dot{q}_W\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{yy}] & [K_{yz}] \\ [K_{zy}] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_V\} \\ \{q_W\} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Donc on peut écrire la matrice élémentaire des raideurs  $[K_p^e]$  et la matrice élémentaire des amortisseurs visqueux des paliers sous la forme suivante :

$$[K_p^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{yy}] & [K_{yz}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{zy}] & [K_{zz}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$[C_p^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [C_{yy}] & [C_{yz}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [C_{zy}] & [C_{zz}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Où les termes non nuls des sous matrices qui forment les matrices élémentaires (3.34) et (3.35) sont comme suit :

$$\begin{aligned} K_{yy}(1,1) &= K_{yy0} \quad ; \quad K_{yy}(2,2) = K_{yyL} \quad ; \quad K_{zz}(1,1) = K_{zz0} \quad ; \quad K_{zz}(2,2) = K_{zzL} \quad ; \quad K_{yz}(1,1) = K_{yz0} \quad ; \\ K_{yz}(2,2) &= K_{yzL} \quad ; \quad K_{zy}(1,1) = K_{zy0} \quad ; \quad K_{zy}(2,2) = K_{zyL} \quad ; \quad C_{yy}(1,1) = C_{yy0} \quad ; \quad C_{yy}(2,2) = C_{yyL} \quad ; \\ C_{zz}(1,1) &= C_{zz0} \quad ; \quad C_{zz}(2,2) = C_{zzL} \quad ; \quad C_{yz}(1,1) = C_{yz0} \quad ; \quad C_{yz}(2,2) = C_{yzL} \quad ; \quad C_{zy}(1,1) = C_{zy0} \quad \text{et} \\ C_{zy}(2,2) &= C_{zyL} \end{aligned}$$

### 3.7. Forme finale des équations du mouvement

Donc après la discrétisation par la version-  $p$  de la méthode des éléments finis et l'application des équations de Lagrange on a le système différentiel suivant :

$$[ [M_a] + [M_D] ] \{\ddot{q}\} + [ [G_a] + [G_D] + [C_p] ] \{\dot{q}\} + [ [K_a] + [K_p] ] \{q\} = \{0\} \quad (3.36)$$

Les matrices qui composent le système (3.36) sont les matrices globales qui assemblent les matrices élémentaires en fonction des conditions aux limites des éléments.

L'équation (3.36) pour un seul élément sous forme matricielle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccccc}
 [[M_U]+[I_m^D]] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & [[M_V]+[I_m^D]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & [[M_W]+[I_m^D]] & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & [[M_{\beta_x}]+[I_d^D]] & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & [[M_{\beta_y}]+[I_d^D]] & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [[M_\phi]+[I_p^D]]
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_U \\ \ddot{q}_V \\ \ddot{q}_W \\ \ddot{q}_{\beta_x} \\ \ddot{q}_{\beta_y} \\ \ddot{q}_\phi \end{array} \right\} + \\
 & \left[ \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & [C_{yy}] & [C_{yz}] & 0 & 0 & 0 \\
 0 & [C_{zy}] & [C_{zz}] & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -[[G_1]^T + \Omega [I_p^D]^T] & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_U \\ \dot{q}_V \\ \dot{q}_W \\ \dot{q}_{\beta_x} \\ \dot{q}_{\beta_y} \\ \dot{q}_\phi \end{array} \right\} + \\
 & \left[ \begin{array}{cccccc}
 [K_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_1] \\
 0 & [[K_V]+[K_{yy}]] & [K_{yz}] & [K_2] & [K_3] & 0 \\
 0 & [K_{zy}] & [[K_W]+[K_{zz}]] & [K_4] & [K_5] & 0 \\
 0 & [K_2]^T & [K_4]^T & [K_{\beta_x}] & [K_6] & 0 \\
 0 & [K_3]^T & [K_5]^T & [K_6]^T & [K_{\beta_y}] & 0 \\
 [K_1]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_\phi]
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} q_U \\ q_V \\ q_W \\ q_{\beta_x} \\ q_{\beta_y} \\ q_\phi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Où les vecteurs  $\{\ddot{q}\}$ ;  $\{\dot{q}\}$  et  $\{q\}$  sont respectivement les vecteurs accélération, vitesse et déplacement généralisés exprimés dans le repère mobile ( $R_M$ ).

Pour simplifier l'écriture de l'équation (3.36) et sans forme indicielle, on va prendre la forme simplifiée suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [[G]+[C_p]]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \tag{3.38}$$

Avec :

- Les matrices globales qui assemblent les matrices élémentaires du système sont :

$$\begin{cases} [M] = [M_a] + [M_D] \\ [G] = [G_a] + [G_D] \\ [K] = [K_a] + [K_p] \\ [C_p] \end{cases} \tag{3.39}$$

- o Les matrices élémentaires du système sont :

$$\begin{cases} [M^e] = [M_a^e] + [M_D^e] \\ [G^e] = [G_a^e] + [G_D^e] \\ [K^e] = [K_a^e] + [K_P^e] \\ [C_P^e] \end{cases} \quad (3.40)$$

On a d'après les équations (3.7) et (3.8) le vecteur des déplacements généralisés:

$$\{q\} = \{q_U, q_V, q_W, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_\phi\}^T$$

Où :

$$\begin{cases} \{q_U\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{p_U}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_V\} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{p_V}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_W\} = \{z_1, z_2, z_3, \dots, y_{p_W}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_{\beta_x}\} = \{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \beta_{x_3}, \dots, \beta_{x_{p_{\beta_x}}}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_{\beta_y}\} = \{\beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3}, \dots, \beta_{y_{p_{\beta_y}}}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_\phi\} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{p_\phi}\}^T \exp(j\omega t) \end{cases}$$

Qu'on peut écrire de façon suivante :

$$\{q\} = \{q_U, q_V, q_W, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_\phi\}^T = \{w\} \exp(j\omega t)$$

$$= \begin{cases} \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{p_U}\}^T \\ \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{p_V}\}^T \\ \{z_1, z_2, z_3, \dots, y_{p_W}\}^T \\ \{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \beta_{x_3}, \dots, \beta_{x_{p_{\beta_x}}}\}^T \\ \{\beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3}, \dots, \beta_{y_{p_{\beta_y}}}\}^T \\ \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{p_\phi}\}^T \end{cases} \exp(j\omega t) \quad (3.41)$$

Donc de l'équation (3.41), le système différentiel (3.38) sera :

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [G] + [C_P]) \{q\} = \{0\} \quad (3.42)$$

Où  $\omega$  est la pulsation propre du système et  $\{w\}$  le vecteur propre correspondant.

## 4. Organisation de la programmation

### 4.1. Introduction

Un programme écrit en FORTRAN 90, basé sur la formulation de la version-  $p$  de la méthode des éléments finis (L'assemblage est fait de la même manière que la version standard de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments), détermine les fréquences propres d'un arbre tournant en matériaux composites embarqué sur paliers élastiques amortis suivant différentes conditions aux limites et différents paramètres physiques et géométriques.

Le matériel utilisé pour l'exécution de notre programme est un micro ordinateur Pentium IV, la capacité de sa mémoire centrale est 512 Mo RAM.

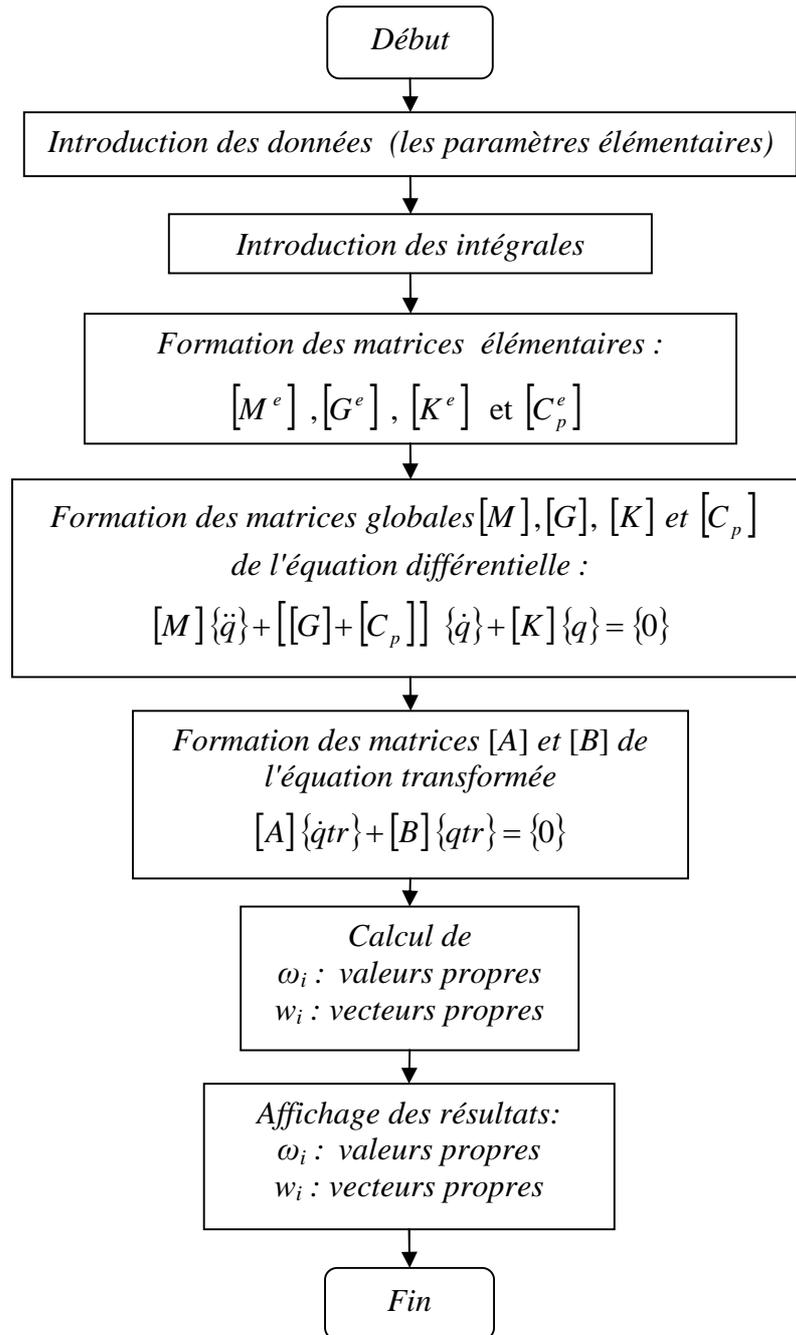
Ce programme comporte :

- ✓ Des fichiers d'entrée;
- ✓ Le programme de calcul;
- ✓ Un fichier de sortie.

### 4.2. Schéma de calcul

La figure 4.1 montre les différentes étapes de programmation, ces étapes sont les suivantes :

- ✓ Lecture des données de tous les paramètres élémentaires nécessaires physiques et géométriques du système (arbre+disques+paliers).
- ✓ Lecture de toutes les valeurs des intégrales  $J_{mn}^{\alpha\beta}$
- ✓ Formation des matrices élémentaires  $[M^e]$ ,  $[G^e]$ ,  $[K^e]$  et  $[C_p^e]$  (voir chapitre 3).
- ✓ Formation des matrices globales  $[M]$ ,  $[G]$ ,  $[K]$  et  $[C_p]$  en fonction des conditions aux limites (voir chapitre 3).
- ✓ Formation des matrices transformées  $[A]$  et  $[B]$ , ces deux matrices sont celles qui forment l'équation transformée à résoudre (voir § 4.3.2.2).
- ✓ Le programme donne  $\omega$  et  $\{w\}$  qui sont respectivement les valeurs propres et ses vecteurs propres.



**Figure 4. 1 :** Schéma de calcul.

### 4.3. Description du programme

#### 4.3.1. Fichiers d'entrée

Les fichiers d'entrée utilisés par le programme sont de deux types : un fichier des données dans lequel toutes les données nécessaires pour le calcul des fréquences (paramètres élémentaires physiques et géométriques de l'arbre en matériaux composites, du disque et des paliers, et les paramètres de la version-  $p$  de la méthode des éléments finis) sont introduites. Et des fichiers contenant les valeurs des intégrales. Les paramètres du système sont introduits

dans le programme sous formes de vecteurs suivant le nombre des éléments et le nombre des couches de chaque élément.

#### 4.3.1.1. Paramètres du système (arbre+disque+paliers)

Les paramètres de la version-  $p$  de la méthode des éléments finis et les paramètres physiques et géométriques pour chaque élément de l'arbre en matériaux composites, et les propriétés des paliers et du disque qui sont posés sur les nœuds (voir figure 4.2), sont comme suit :

##### Arbre

$ep$  : Nombre des éléments poutres.

$p$  : Nombre des fonctions hiérarchiques.

$Nc$ : Nombre des couches de l'arbre.

$N\ mode$  : Nombre de mode propre désiré.

$E, G, \nu$  : Modules d'élasticité dans les différentes directions de l'arbre.

$D$  : Diamètre moyen de l'arbre ( $D = R_{ext} + R_{int}$ ).

$e$  : Epaisseur de l'arbre ( $e = R_{ext} - R_{int}$ ).

$\rho_n$  : Masse volumique de la nième couche.

$L$  : Longueur de l'arbre.

$\eta_n$  : Orientations des fibres de la nième couche.

##### Disque

$I_m^D$  : Moment d'inertie massique (la masse)

$I_d^D$  : Moment d'inertie diamétral

$I_p^D$  : Moment d'inertie polaire du disque

##### Paliers

Les paliers sont caractérisés par les valeurs de raideur et d'amortissement visqueux suivant les directions de  $y$  et  $z$  et par les termes croisés :

$K_{yy}, K_{yz}, K_{zy}, K_{zz}$  : Raideurs des paliers.

$C_{yy}, C_{yz}, C_{zy}, C_{zz}$  : Coefficients d'amortissement des paliers.

#### 4.3.1.2. Conditions aux limites

Nœud : nombre de nœuds (1 et 2).

On a 6 degrés de liberté à chaque nœud qui sont:

$U$ : Déplacement suivant l'axe  $x$ .

$V$ : Déplacement suivant l'axe  $y$ .

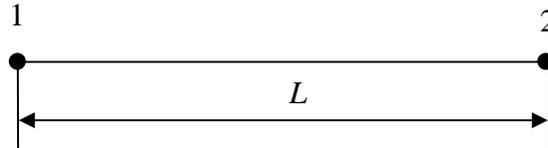
**W**: Déplacement suivant l'axe z.

**Beta x**: Rotation de la section droite autour de l'axe y.

**Beta y**: Rotation de la section droite autour de l'axe z.

**Phi**: Rotation de la section droite autour de l'axe x.

Les conditions aux limites s'effectuent suivant l'ordre de numérotation des nœuds de l'élément poutre (Figure 4.2).



**Figure 4.2** : Numérotation des nœuds de l'élément poutre.

L'introduction des conditions aux limites de l'élément poutre dans le fichier des données se fait dans la disposition suivante, donnée par le tableau 4.1.

**Tableau 4.1**: Introduction des conditions aux limites.

	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>W</i>	<i>Beta x</i>	<i>Beta y</i>	<i>Phi</i>
<b>Nœud 1</b>	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
<b>Nœud 2</b>	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

Les cellules du tableau 4.1 prennent la valeur de **0** si le déplacement ou la rotation sont nuls, et **1** si les nœuds sont libres.

#### 4.3.1.3. Valeurs des intégrales

Les valeurs des intégrales de l'équation (3.19) sont introduites dans des fichiers auxquels le programme principal fait appel pour le calcul des matrices: masse, de rigidité, de l'effet gyroscopique et d'amortissement  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[G]$  et  $[C_p]$ .

Ces intégrales sont déterminées par un calcul symbolique à l'aide de logiciel Matlab 6.5, et sont stockés dans des fichiers des données.

- ✓ Intégrales  $J_{mn}^{\alpha\beta}$  : on a trois fichiers un pour  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ , le deuxième lorsque cas  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  et le troisième lorsque  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$

#### 4.3.2. Le programme "Arbre tournant composite"

##### 4.3.2.1. Le programme de calcul

Le programme "**Arbre tournant composite**" permet de déterminer les fréquences propres d'un arbre tournant en matériaux composites embarqué sur paliers élastiques amortis où les

vibrations sont libres, à partir des fichiers d'entrées. Son organigramme est présenté comme la montre la figure 4.1.

#### 4.3.2.2. Formation des matrices $[M]$ ; $[K]$ ; $[G]$ ; $[C_p]$ ; $[A]$ et $[B]$

Ce programme permet de calculer les matrices globales de l'équation (3.42): la matrice masse, matrice de rigidité, matrice de l'effet gyroscopique et la matrice d'amortissement ensuite les matrices transformées. Ces matrices globales données par l'équation (3.39) et qui assemblent les matrices élémentaires données par l'équation (3.40) sont :

- ✓ La matrice masse  $[M]$  est calculée à partir des équations (3.27) et (3.29).
- ✓ La matrice de rigidité  $[K]$  est calculée à partir des équations (3.18) et (3.34).
- ✓ La matrice de l'effet gyroscopique  $[G]$  est calculée à partir des équations (3.28) et (3.30).
- ✓ La matrice d'amortissement  $[C_p]$  est calculée à partir de l'équation (3.35).
- ✓ Les matrices transformées  $[A]$  et  $[B]$  sont calculées à partir des relations suivantes [53]:

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [[G] + [C_p]] & [K] \\ -[K] & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$[M]$  et  $[K]$  symétriques, avec  $[M]$  définie positive,  $[K]$  positive, définie si il n'y a pas des modes rigides.

#### 4.3.2.3. Conditions aux limites

On donne le vecteur des conditions aux limites suivant le cas d'une poutre (voir tableau 4.1).

#### 4.3.2.4. Résolution

Dans notre cas les vibrations sont libres :

Ce programme permet de calculer :

- ✓ Les pulsations propres  $\omega$ .
- ✓ Les vecteurs propres  $\{w\}$ .

Pour calculer ces deux paramètres, on transforme le système différentiel (3.38) de  $n$  équations différentielles du second ordre, en un système de  $2n$  équations différentielles du premier ordre suivant [53] :

$$[A]\{\dot{qtr}\} + [B]\{qtr\} = \{0\} \quad (4.3)$$

Où  $\{qtr\}$  c'est le vecteur transformé donné par la relation suivante :

$$\{qtr\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

On écrit la solution générale des équations (4.3) sous la forme :

$$\{qtr\} = \{x1\} e^{\lambda t} \quad (4.5)$$

$$\text{Avec } \{x1\} = \{\lambda\{w\}, \{w\}\}^T \quad \text{et} \quad \lambda = j\omega$$

Où  $\{x1\}$  est un vecteur d'amplitude et où  $\lambda$  est l'inverse d'une constante de temps.  $\{x1\}$  et  $\lambda$  sont solutions de l'équation :

$$([B] + \lambda [A]) \{x1\} = 0 \quad (4.6)$$

Le système admet donc  $2n$  vecteurs propres  $\{x1_r\}$  associés aux valeurs propres  $\lambda_r$  qui sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\text{Det} ([B] + \lambda [A]) = 0 \quad (4.7)$$

Avec:  $\text{Det}$  : Déterminant

Pour déterminer les valeurs propres et ses vecteurs propres correspondants on passe par les transformations suivantes :

La matrice  $[A]$  est une matrice symétrique et définie positive, ce qui permet de la décomposer en utilisant la méthode de Cholesky [54].

$$[A] = [L] [L]^T \quad (4.8)$$

Où  $[L]$  une matrice triangulaire inférieure.

En remplaçant (4.8) dans (4.6) on trouve:

$$([L]^T [L]^{-1} [B] + \lambda [I]) \{x1\} = 0 \quad (4.9)$$

Avec  $[I]$  est la matrice identité

On peut écrire (4.9) sous la forme:

$$([C1] + \lambda [I]) \{x1\} = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{Avec } [C1] = [L]^T [L]^{-1} [B]$$

Les valeurs propres de l'équation (4.9) sont les mêmes que ceux de l'équation (4.6).

La matrice  $[C1]$  est obtenue en deux étapes:

- Résoudre le système  $[L] [D] = [B]$  avec  $[D] = [L]^{-1} [B]$
- Résoudre le système  $[L]^T [C1] = [D]$  avec  $[C1] = [L]^{-T} [L]^{-1} [B]$

Le problème devient standard, du fait que la matrice  $[C1]$  n'est pas symétrique et les méthodes de Hessenberg et HQR [55] peuvent être appliquées.

- ✓ Méthode de Hessenberg : permet de décomposer la matrice [C1].
- ✓ Méthode de HQR : permet de déterminer les valeurs propres.

Les  $2n$  valeurs propres  $\lambda_r$  sont imaginaires, conjuguées deux à deux. De plus, si  $\lambda_r$  est une valeur propre du vecteur propre  $\{x_{1,r}\}$ ,  $-\lambda_r$  est valeur propre du vecteur propre  $\{\bar{x}_{1,r}\}$ .

#### **4.3.3. Fichier de sortie**

Les valeurs propres (fréquences propres) obtenues par le programme sont classées dans un ordre croissant et stockées dans un fichier de sortie.

## 5. Résultats et interprétations

### 5.1. Introduction

Dans ce chapitre nous exposons les résultats obtenus par notre programme pour différents exemples d'application. La convergence vers les solutions est étudiée en augmentant les nombres de fonctions de forme hiérarchiques pour deux éléments. L'étude de l'influence de : paramètres physiques et géométriques, conditions aux limites, paliers flexibles et rigides, amortissement visqueux et le disque sur le comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites embarqués sur paliers élastiques amortis. Et exactement l'influence de ces paramètres sur les fréquences propres et les vitesses critiques de l'arbre tournant en matériaux composites. Dans tous les exemples étudiés (sauf dans le cas de l'étude de la convergence), on prend :  $p_U = p_V = p_W = p_{\beta_x} = p_{\beta_y} = p_\phi = p = 10$ .

### 5.2. Validation et convergence

#### 5.2.1. Convergence

Dans le premier exemple, les propriétés physiques de l'arbre en Bore- époxyde sont définies dans le Tableau 5.1, le facteur de correction de cisaillement  $k_s$  est 0.503, et les paramètres géométriques sont :  $L = 2.47$  m,  $D = 12.69$  cm,  $e = 1.321$  mm, 10 couches à des épaisseurs égales ( $90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$ ). Dans cet exemple l'arbre tournant en Bore - époxyde est modélisé par un seul élément de longueur  $L$  ensuite par deux éléments de mêmes longueurs  $L/2$ .

**Tableau 5.1** : Propriétés des matériaux composites [56].

	Bore- époxyde	Graphite- époxyde
$E_{11}$ (GPa)	211.0	139.0
$E_{22}$ (GPa)	24.1	11.0
$G_{12}$ (GPa)	6.9	6.05
$G_{23}$ (GPa)	6.9	3.78
$\nu_{12}$	0.36	0.313
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1967.0	1578.0

Les résultats des cinq modes de flexion pour différentes conditions aux limites de l'arbre tournant en fonction du nombre des fonctions de formes sont représentés dans les Figures 5.1, 5.2 et 5.3. Les figures montrent la rapidité de la convergence vers les valeurs exactes en augmentant le nombre des fonctions de formes.

Les modes de flexions sont identiques pour un nombre des éléments finis hiérarchiques égal 1 ensuite 2, ça montre l'exactitude de la méthode même avec un seul élément et un nombre réduit des fonctions de forme.

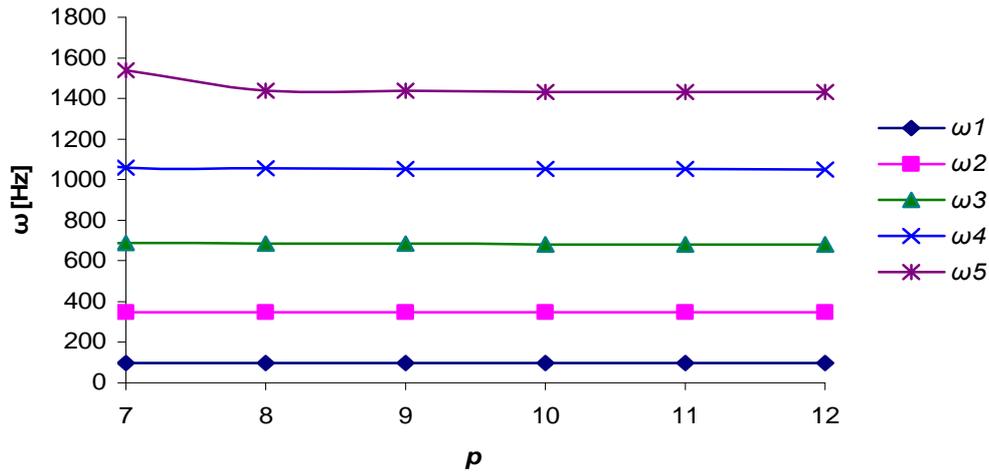


Figure 5.1 : Convergence des cinq premières fréquences de flexion  $\omega$  en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'un arbre bi- appuyé (A-A).

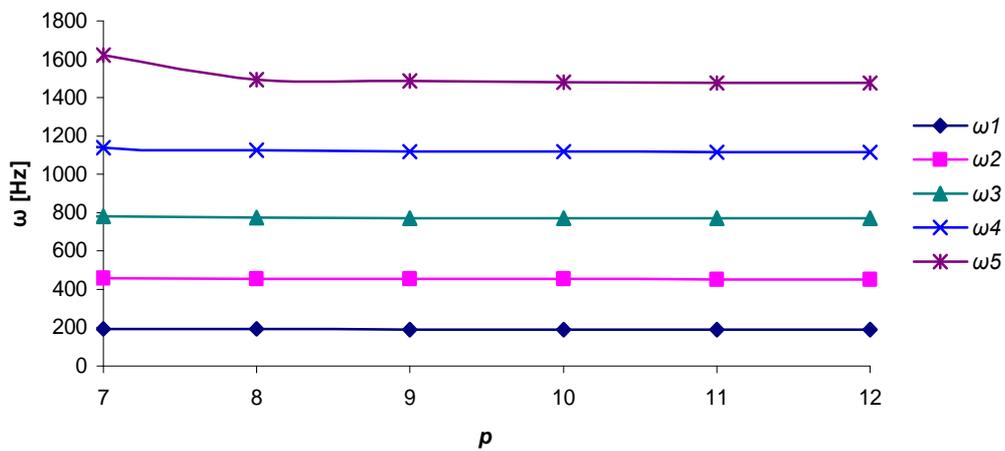


Figure 5.2 : Convergence des cinq premières fréquences de flexion  $\omega$  en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'un arbre bi- encasté (E-E).

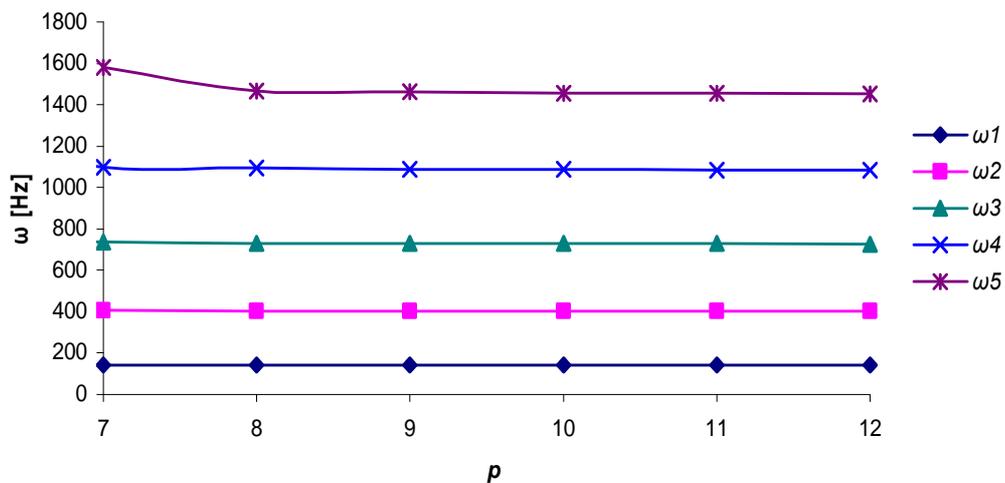


Figure 5.3 : Convergence des cinq premières fréquences de flexion  $\omega$  en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'un arbre encasté- appuyé (E-A).

### 5.2.2. Validation

Dans le premier exemple les propriétés de l'arbre en bore- époxyde sont données dans le tableau 5.1. Les résultats obtenus en utilisant le modèle présent sont montrés dans le tableau 5.2 avec les résultats trouvés dans la littérature avec différentes théories et méthodes. Puisque dans cet exemple étudié la paroi de l'arbre est relativement mince, donc le modèle basé sur la théorie des coques peut s'appliquer et donne des résultats plus précis en employant la théorie des coques de Sander [34] et de Donnell pour les coques minces [57].

Dans cet exemple, la vitesse critique est mesurée expérimentalement et elle est encore sous-estimation [31]. Dans ce cas, la première vitesse critique ( $\Omega_{cr1}$ ) obtenu par notre modèle donnée dans le tableau 5.2 est compatible à celle de la théorie des poutres de Timoshenko de M.Y. Chang et al [36], en savant que dans la référence [36] les paliers sont flexibles mais dans notre application les paliers sont rigides.

**Tableau 5.2 :** La première vitesse critique de l'arbre tournant en bore- époxyde.

<i>L=2.47 m, D =12.69 cm, e =1.321 mm, 10 couches à des épaisseurs égales (90°, 45°,-45°,0°,90°)</i>		
	Théories ou Méthodes	$\Omega_{cr1}$ (tr/mn)
Zinberg et Symonds [31]	Mesurée expérimentalement	6000
	EMBT	5780
Dos Reis et al. [32]	Poutre de Bernoulli–Euler par la rigidité déterminée par les éléments finis des coques	4942
Kim et Bert [34]	Coque de Sanders	5872
Bert [57]	Coque mince de Donnell	6399
Bert et Kim [56]	Poutre de Bernoulli–Euler	5919
Singh et Gupta [33]	Poutre de Bresse–Timoshenko	5788
	EMBT	5747
	LBT	5620
M.-Y. Chang et al [36]	Poutre de Timoshenko	5762
Présent	Poutre de Timoshenko avec la version- <i>p</i> de la méthode des éléments finis	5760

La première fréquence propre de l'arbre tournant en bore- époxyde calculée par notre programme dans le cas stationnaire (la vitesse de rotation est nulle) est 96.0594 Hz sur paliers rigides et 96.0575 sur deux appuis élastiques de raideurs 1740 GN/m. Dans la référence [58], ils ont utilisé la théorie des coques pour le même arbre étudié dans notre cas et sur paliers rigide, la fréquence trouvée est 96 Hz. Dans cet exemple, on ne constate pas la

différence entre arbre bi- appuyé sur paliers rigide ou sur paliers élastiques parce que les raideurs des paliers sont très grandes (voir § 5.3.6).

Dans le deuxième exemple, en gardant les mêmes propriétés géométriques de l'arbre en matériaux composites de l'exemple 1 et les mêmes conditions aux limites (A-A), et en changeant le matériau en graphite- époxyde avec  $k_s = 0.503$ . Nous obtenons la première vitesse critique qui est montrée dans le tableau 5.3 et qui s'accorde avec les résultats de [36].

**Tableau 5.3** : La vitesse critique de l'arbre tournant en graphite- époxyde.

$L=2.47$ m, $D=12.69$ cm, $e=1.321$ mm, 10 couches à des épaisseurs égales ( $90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$ )		
	Théories ou Méthodes	$\Omega_{cr1}$ (tr/mn)
Bert et Kim [56]	Coque de Sanders	5349
	Coque mince de donnell	5805
	Poutre de Bernoulli–Euler	5302
	Poutre de Bresse–Timoshenko	5113
M.-Y. Chang et al [36]	Poutre de Timoshenko	5197
Présent	Poutre de Timoshenko avec la version- $p$ de la méthode des éléments finis	5200

En suite, des comparaisons de la première vitesse critique d'un arbre tournant en matériaux composites (A-A) qui a les mêmes propriétés physiques de l'arbre de l'exemple 2 sont faites avec ceux des références [56] et [36] pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen ( $L/D$ ). Les résultats sont donnés dans le tableau 5.4, et s'accordent avec les résultats de [36]. D'autres résultats étant comparés pour différentes orientations des fibres (angle de stratifié  $\eta$ ) sont représentés et comparés avec ceux de la littérature dans le tableau 5.5.

Les résultats de notre modèle s'accordent avec ceux du modèle de M.Y. Chang et al [36] basé sur la théorie des poutres de Timoshenko. Dans notre travail on a modélisé l'arbre par un seul élément à deux nœuds par contre le modèle de la référence [36] a modélisé l'arbre par 20 éléments de mêmes longueur (version-  $h$ ). L'avantage de la méthode utilisé résulte dans le fait que la convergence est rapide par rapport à celle de la référence [36] tout en prenant un seul élément et un nombre réduit de fonction de forme.

Pour comparer nos résultats à ceux trouvés dans la littérature, dans les exemples étudiés précédemment l'arbre en matériaux composites est creux et à paroi mince. Notre modèle n'est pas limité à ce cas là, il donne des bons résultats même pour les arbres en matériaux composites à parois épaisses où pleins.

**Tableau 5.4 :** La vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en graphite- époxyde pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen.

Théorie		L/D							
		2	5	10	15	20	25	30	35
Bert et Kim [56]	Coque de Sanders	112400	41680	16450	8585	5183	3441	2440	1816
	Poutre de Bernoulli- Euler	329600	76820	20210	9072	5121	3283	2282	1677
	Poutre de Bresse-Timoshenko	176300	54830	17880	8543	4945	3209	2246	1658
M.-Y. Chang et al [36]	Poutre de Timoshenko	181996	55706	17929	8527	4925	3192	2233	1648
Présent	Poutre de Timoshenko avec la version- $p$ de la méthode des éléments finis	184667	56196	18005	8549	4934	3198	2236	1650

**Tableau 5.5 :** La vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en graphite- époxyde pour différentes orientations des fibres.

Théorie		Orientation des fibres $\eta$ (°)						
		0	15	30	45	60	75	90
Bert et Kim [56]	Coque de Sanders	5527	4365	3308	2386	2120	2020	1997
	Poutre de Bernoulli- Euler	6425	5393	4269	3171	2292	1885	1813
	Poutre de Bresse-Timoshenko	6072	5209	4197	3143	2278	1874	1803
M.-Y. Chang et al [36]	Poutre de Timoshenko	6072	5331	4206	3124	2284	1890	1816
Présent	Poutre de Timoshenko avec la version- $p$ de la méthode des éléments finis	6094	5359	4222	3129	2284	1890	1816

### 5.3. Résultats et interprétations

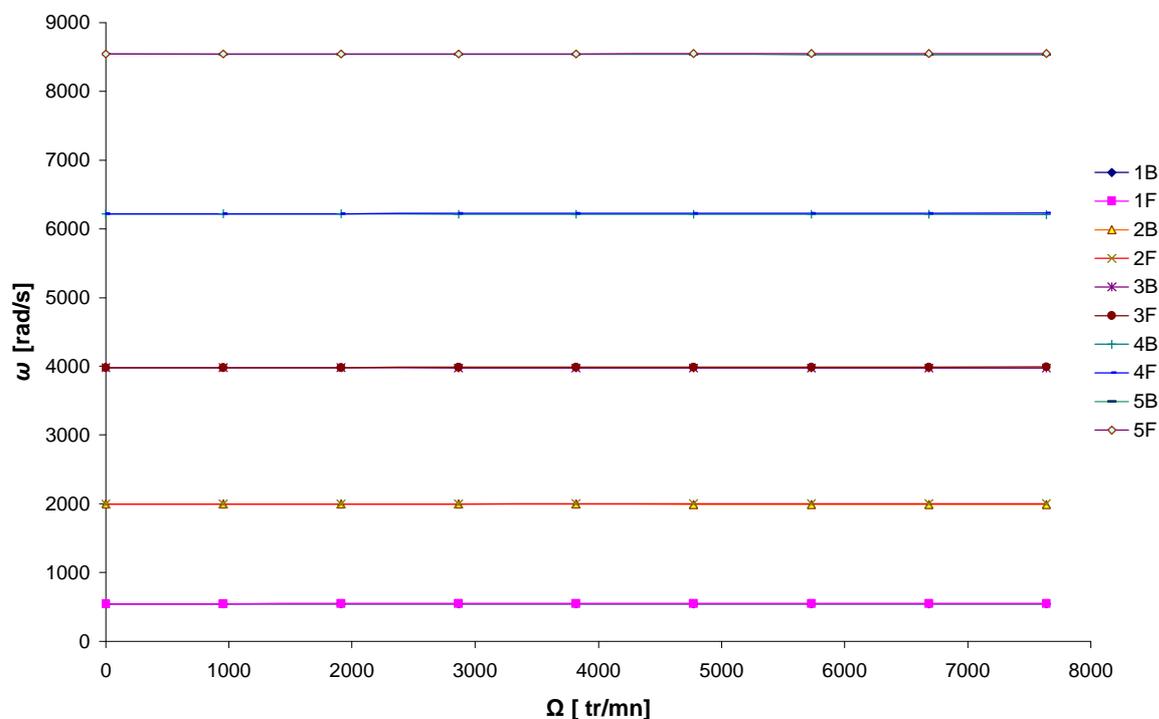
Dans cette partie, on a étudié l'influence des paramètres mentionnés dans l'introduction de ce chapitre.

#### 5.3.1. Influence de l'effet gyroscopique sur les fréquences propres

Dans l'exemple suivant, les fréquences, d'un arbre tournant en graphite- époxyde bi-appuyé sont analysées. Les propriétés physiques du matériau sont montrées dans le tableau 5.1 avec  $k_s = 0.503$ . L'orientation des fibres dans les différentes couches et les propriétés géométriques sont les mêmes que celles du premier exemple.

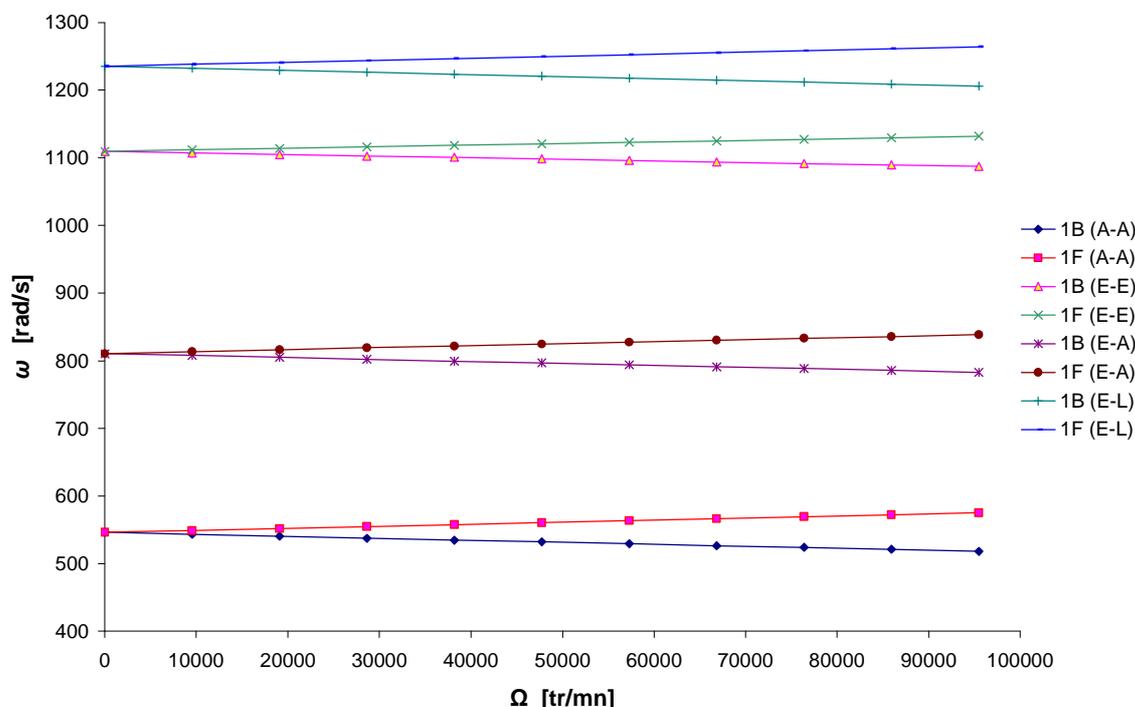
Le diagramme de Campbell pour les cinq premières paires modes de flexion de l'arbre tournant est montré dans la figure 5.4. En sachant que le point d'intersection de la ligne ( $\Omega = \omega$ ) avec les courbes de fréquence de flexion indique la vitesse à laquelle l'arbre tournant vibre fortement (vitesse critique  $\Omega_{cr}$ ). Les 10 premières valeurs correspondent à 5 modes directs (5 F) et 5 modes inverses (5 B) des 5 modes de flexion de l'arbre tournant.

L'effet gyroscopique provoque un couplage des déplacements orthogonaux à l'axe de rotation ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences en rotation en deux branches, mode en précession directe et mode en précession inverse. Dans tous les cas, les modes directs augmentent avec l'augmentation de la vitesse de rotation, et cependant les modes indirectes (inverses) diminuent.



**Figure 5.4 :** Diagramme de Campbell des cinq modes de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde ((F) modes directs, (B) modes inverses).

La figure 5.5 montre la variation de la fréquence fondamentale de flexion  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  (diagramme de Campbell) pour différentes conditions aux limites. Le couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit un mouvement de précession directe ou inverse (rétrograde) selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre.



**Figure 5.5 :** Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en graphite- époxyde pour différentes conditions aux limites et différentes vitesses de rotation.

### 5.3.2. Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres

Dans l'exemple suivant, l'arbre tournant en Bore -époxyde est modélisé par deux éléments de mêmes longueurs  $L/2$ . Les fréquences de l'arbre tournant sont analysées. Les propriétés physiques du matériau sont montrées dans le tableau 5.1 avec  $k_s = 0.503$ . L'orientation des fibres dans les différentes couches et les propriétés géométriques sont les mêmes à ceux de l'exemple précédent pour les deux éléments.

La figure 5.6 montre la variation de la fréquence fondamentale de flexion  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  (diagramme de Campbell) pour différentes conditions aux limites.

Le tableau 5.6 donne la première vitesse critique en tour par minute (tr/mn) de l'arbre tournant analysé pour différentes conditions aux limites.

D'après ces résultats trouvés, on remarque que les conditions aux limites ont une influence très importante sur les fréquences propres d'un arbre tournant en matériaux composites et par

conséquences sur les vitesses critiques. Par exemple, si on ajoutant un palier au milieu de l'arbre tournant, la rigidité de l'arbre augmente qui se implique l'augmentation des valeurs des fréquences propres et les vitesses critiques.

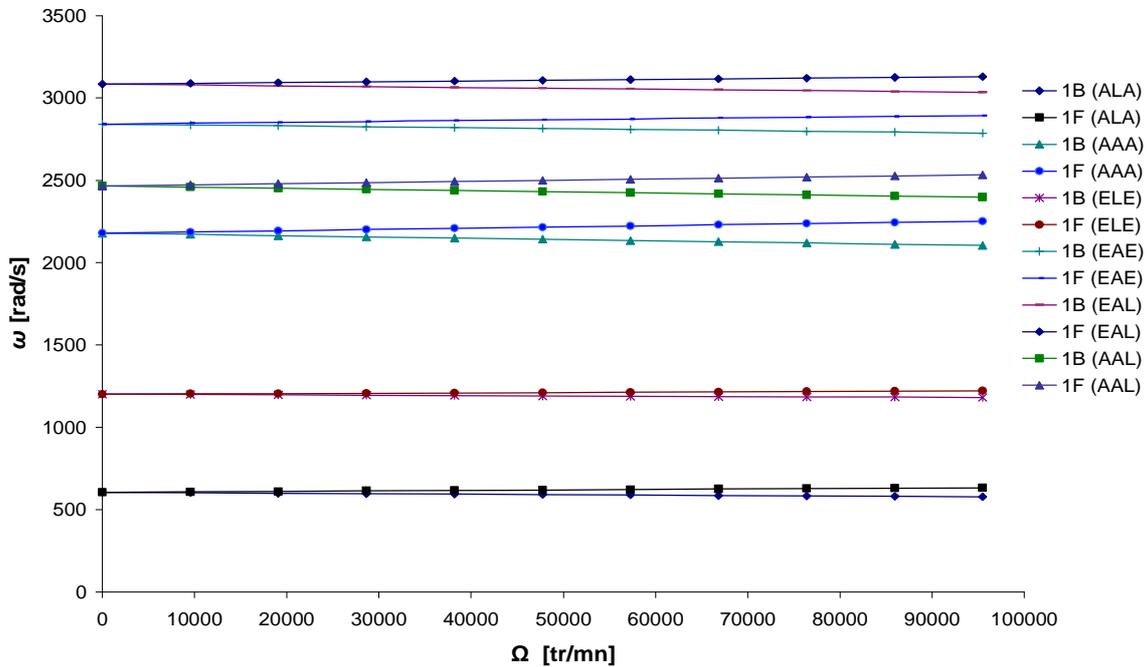
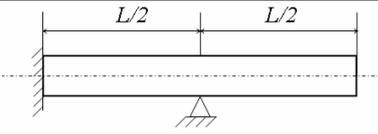
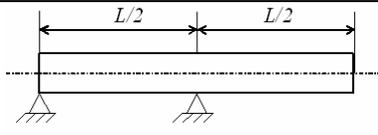


Figure 5.6 : Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en bore-époxyde pour différentes conditions aux limites et différentes vitesses de rotation.  $L = 2.47\text{ m}$ ,  $D = 12.69\text{ cm}$ ,  $e = 1.321\text{ mm}$ , 10 couches à des épaisseurs égales ( $90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$ ).

Tableau 5.6 : Première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en bore-époxyde pour différentes conditions aux limites.

conditions aux limites	Schéma de l'arbre tournant	$\Omega_{cr1}$ (tr/mn)
A L A		5760
A A A		20665
E L E		11421
E A E		26986

$E A L$		29278
$A A L$		23396

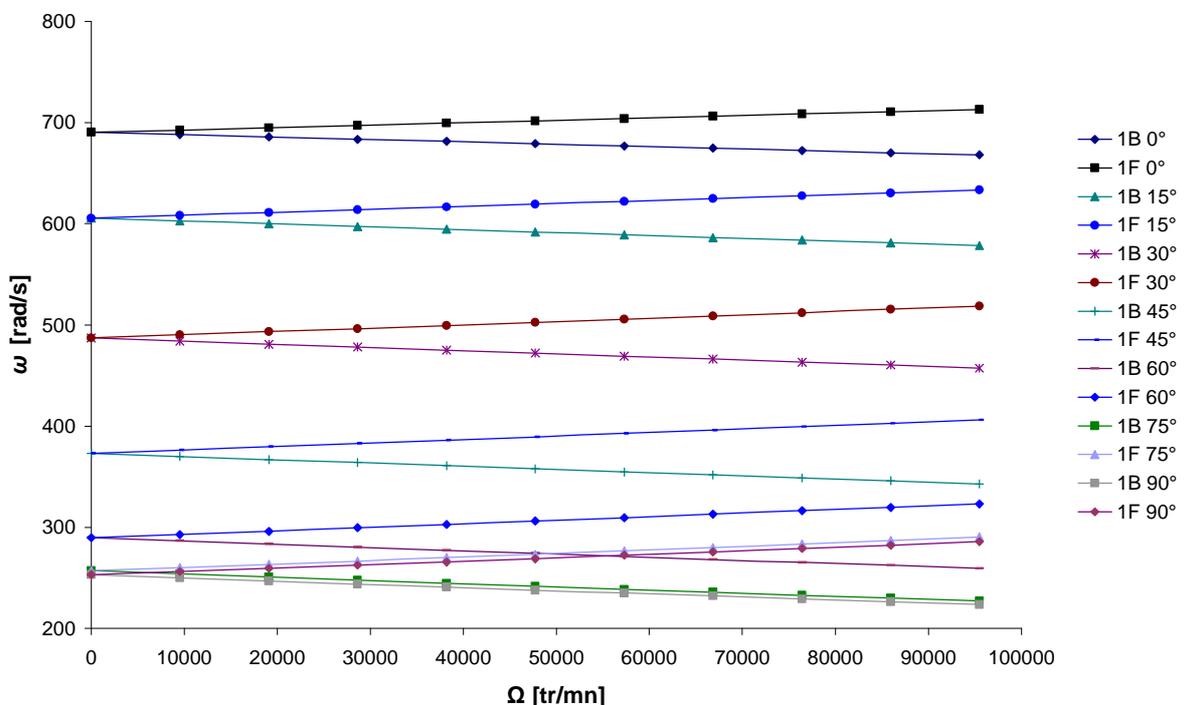
**5.3.3. Influence de l'orientation des fibres sur les fréquences propres**

En gardant le même exemple précédent, et on varie les angles des stratifiés pour avoir leurs influences sur les fréquences propres de l'arbre tournant en matériaux composites bi- appuyé.

La figure 5.7 montre la variation de la fréquence fondamentale de flexion  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  (diagramme de Campbell) pour différentes orientations des fibres.

Le tableau 5.7 donne la première vitesse critique en tour par minute (tr/mn) de l'arbre tournant analysé pour différentes orientations des fibres.

D'après ces résultats, les fréquences de flexion et par conséquent les vitesses critiques de l'arbre en matériaux composites diminuent lorsque l'angle du pli augmente et l'inverse est juste.



**Figure 5.7 :** Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en bore-époxyde pour différentes orientations des fibres et différentes vitesses de rotation.  $L=2.47\text{ m}$ ,  $D=12.69\text{ cm}$ ,  $e=1.321\text{ mm}$ , 10 couches à des épaisseurs égales.

**Tableau 5.7 :** Première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différentes orientations des fibres.

$\eta$ [°]	$0^\circ_{10}$	$15^\circ_{10}$	$30^\circ_{10}$	$45^\circ_{10}$	$60^\circ_{10}$	$75^\circ_{10}$	$90^\circ_{10}$
$\Omega_{cr1}$ [tr/mn]	6532	5768	4622	3571	2750	2464	2416

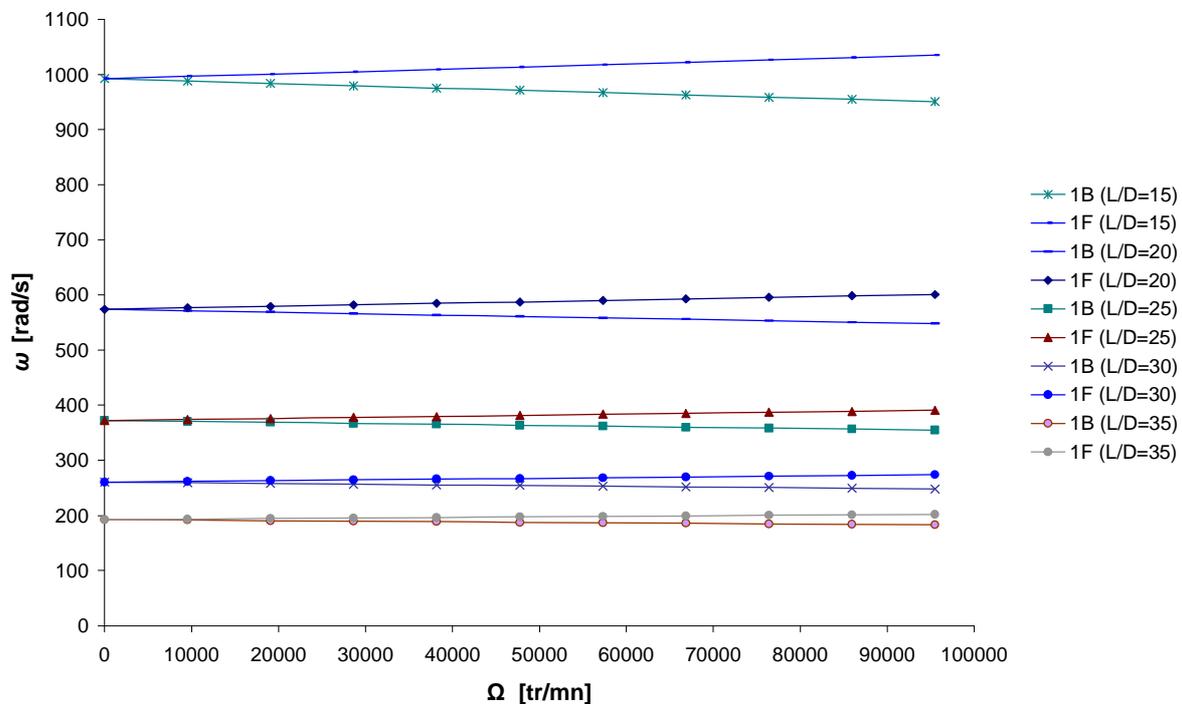
#### 5.3.4. Influence du rapport $L/D$ sur les fréquences propres

En gardant le même exemple précédent, et on varie la géométrie de l'arbre (rapport entre la longueur et le diamètre moyen) pour avoir ses influences sur les fréquences propres de l'arbre tournant en matériaux composites.

La figure 5.8 montre la variation de la fréquence fondamentale de flexion  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  (diagramme de Campbell) pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen de l'arbre.

Le tableau 5.8 donne la première vitesse critique en tour par minute (tr/mn) de l'arbre tournant analysé pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen.

D'après ces résultats, les fréquences de flexion et par conséquent les vitesses critiques de l'arbre en matériaux composite diminuent lorsque le rapport  $L/D$  augmente et l'inverse est juste.



**Figure 5.8:** Premier mode de flexion inverse (1B) et direct (1F) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen et différentes vitesses de rotation.  $D = 12.69$  cm,  $e = 1.321$  mm, 10 couches à des épaisseurs égales ( $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ).

**Tableau 5.8 :** Première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en bore- époxyde pour différents rapports de la longueur et le diamètre moyen.

$L/D$	15	20	25	30	35
$\Omega_{cr1}$ [tr/mn]	9416	5434	3571	2473	1843

### 5.3.5. Influence des rapports $L/D$ , $e/D$ et $\eta$ sur les vitesses critiques et la rigidité

Dans la figure 5.9, les premières vitesses critiques de l'arbre tournant en graphite- époxyde (Les propriétés sont définies dans le tableau 5.1 avec  $k_s = 0.503$ ) sont tracées en fonction de l'angle de pli pour différents rapports  $L/D$  et différentes conditions aux limites (A-A, E-E). On observe que la première vitesse critique pour un arbre bi- simplement appuyé a la valeur maximum à  $\eta = 0^\circ$  pour un rapport  $L/D = 10, 15$  et  $20$ , et à  $\eta = 15^\circ$  pour un rapport  $L/D = 5$ . Pour le cas d'un arbre bi- encasté, la vitesse critique maximum est à  $\eta = 0^\circ$  pour un rapport  $L/D = 20$  et à  $\eta = 15^\circ$  pour un rapport  $L/D = 10$  et  $15$  et à  $\eta = 30^\circ$  pour un rapport  $L/D = 5$ .

Dans la figure 5.10, les deuxièmes vitesses critiques sont tracées du même arbre tournant en graphite- époxyde en fonction de l'angle de pli pour différents rapports  $L/D$  et différentes conditions aux limites (A-A, E-E). On observe que la deuxième vitesse critique pour un arbre bi- simplement appuyé a la valeur maximum à  $\eta = 0^\circ$  pour un rapport  $L/D = 15$  et  $20$ , à  $\eta = 15^\circ$  pour un rapport  $L/D = 10$  et à  $\eta = 30^\circ$  pour un rapport  $L/D = 5$ . Pour le cas d'un arbre bi- encasté, la vitesse critique maximum est à  $\eta = 15^\circ$  pour un rapport  $L/D = 15$  et  $20$  et à  $\eta = 30^\circ$  pour un rapport  $L/D = 5$  et  $10$ .

Ces résultats expliquent que la rigidité de flexion atteint le maximum à  $\eta = 0^\circ$  et décline quand l'angle de pli augmente; en outre, la rigidité de cisaillement atteint le maximum à  $\eta = 30^\circ$  et le minimum à  $\eta = 0^\circ$  et  $\eta = 90^\circ$ . Une situation dans laquelle l'effet de flexion prédomine des causes pour avoir une valeur maximum à  $\eta = 0^\circ$ . Cependant, comme décrit par Singh et Gupta [59], la valeur maximum tend vers un angle de pli plus élevé quand l'effet de rigidité de cisaillement augmente. Par conséquent, tout en comparant les phénomènes, l'influence des conditions aux limites soulèverait l'effet de rigidité de cisaillement. On observe une tendance semblable pour les arbres courts montrés dans les figures 5.9 et 5.10.

Les figures 5.11, 5.12, 5.13 et 5.14 donnent la variation des premières et deuxièmes vitesses critiques en fonction du rapport  $L/D$  du même arbre bi- simplement appuyé et du même arbre bi- encasté pour différentes orientations des fibres. On constate que si le rapport  $L/D$  augmente la vitesse critique diminue et l'inverse est juste.

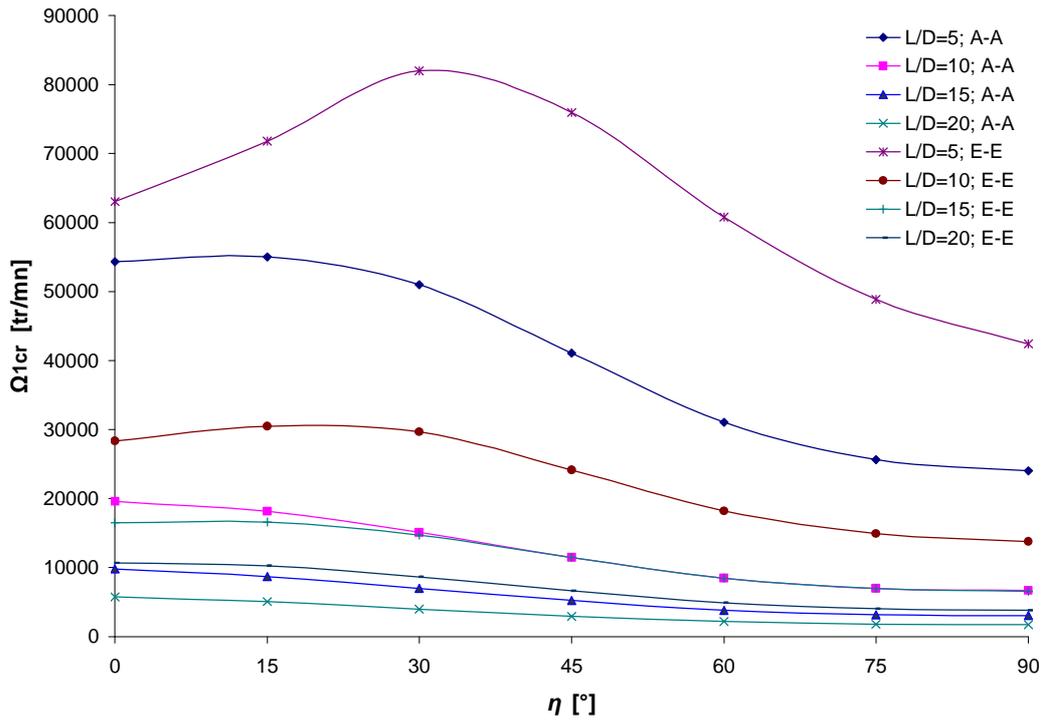


Figure 5.9 : Première vitesse critique  $\Omega_{1cr}$  de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis  $\eta$  pour différents rapports  $L/D$  et différentes conditions aux limites (A-A, E-E).

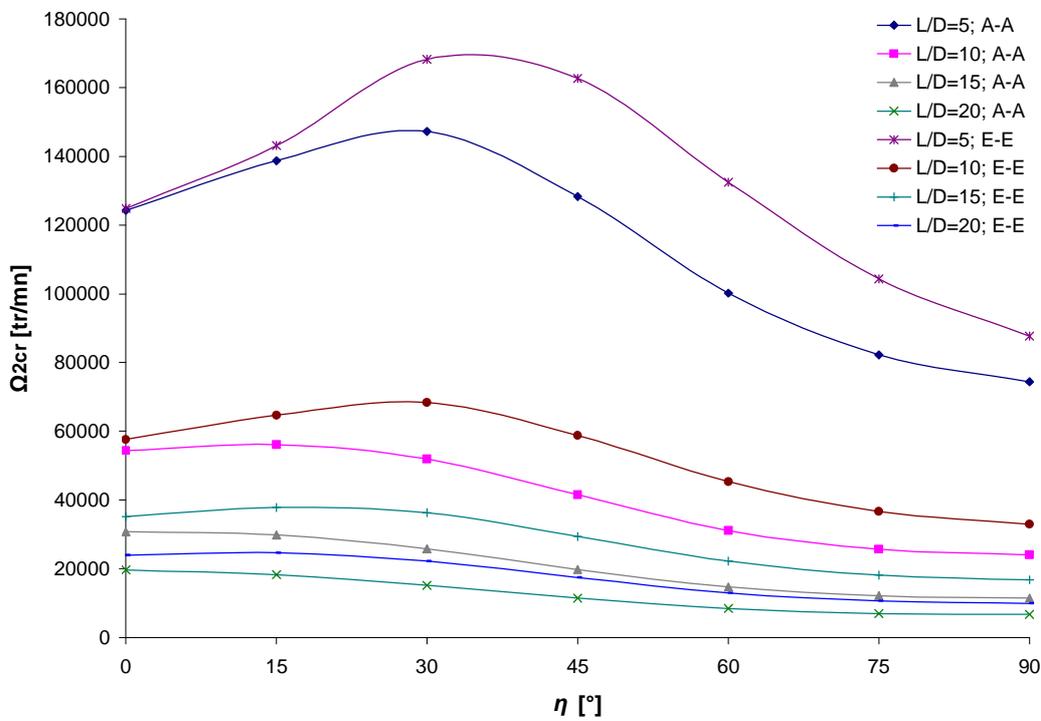


Figure 5.10 : Deuxième vitesse critique  $\Omega_{2cr}$  de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis  $\eta$  pour différents rapports  $L/D$  et différentes conditions aux limites (A-A, E-E).

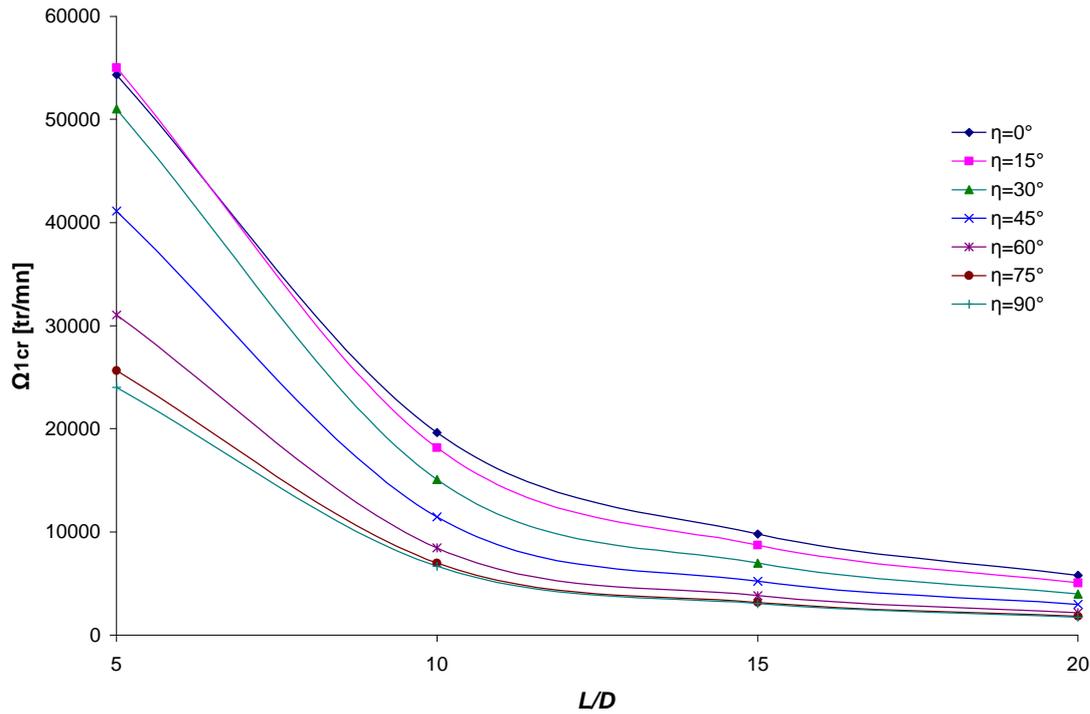


Figure 5.11 : Première vitesse critique  $\Omega_{1cr}$  de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport  $L/D$  pour différents angles des plis  $\eta$ .

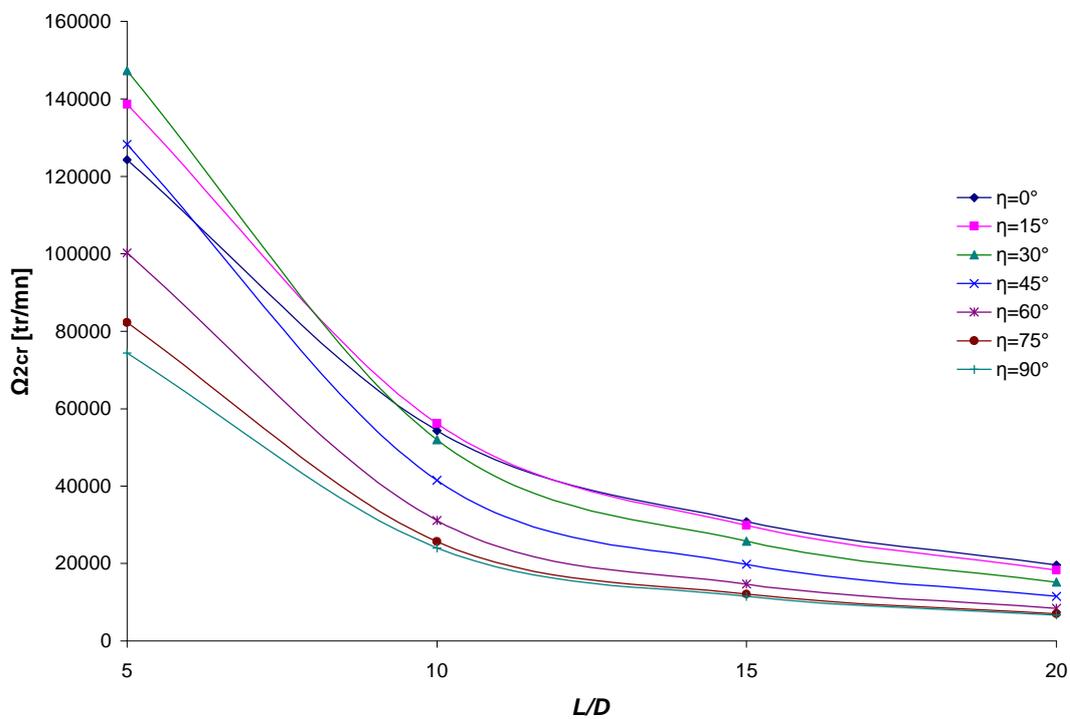


Figure 5.12 : Deuxième vitesse critique  $\Omega_{2cr}$  de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport  $L/D$  pour différents angles des plis  $\eta$ .

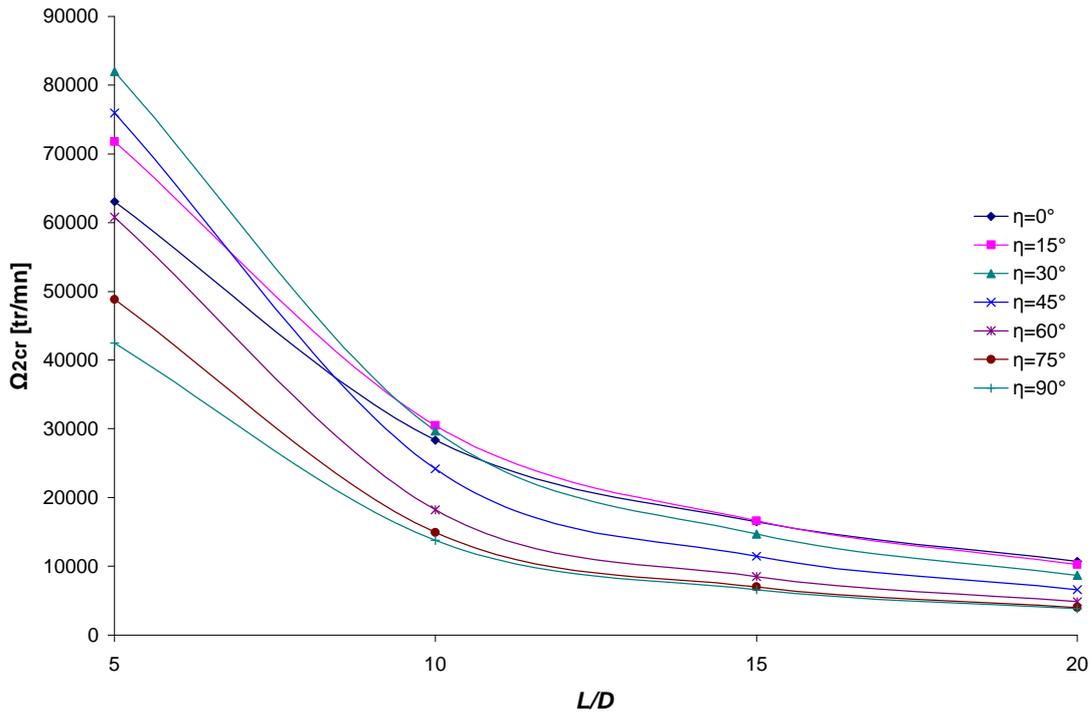


Figure 5.13 : Première vitesse critique  $\Omega_{1cr}$  de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport  $L/D$  pour différents angles des plis  $\eta$ .

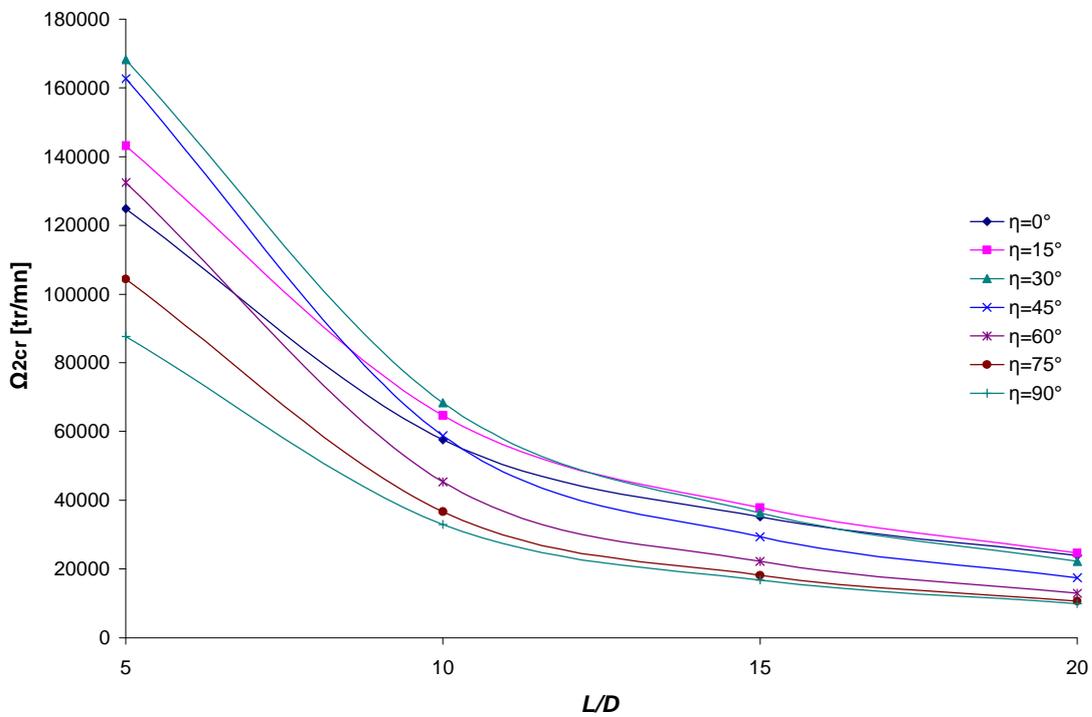
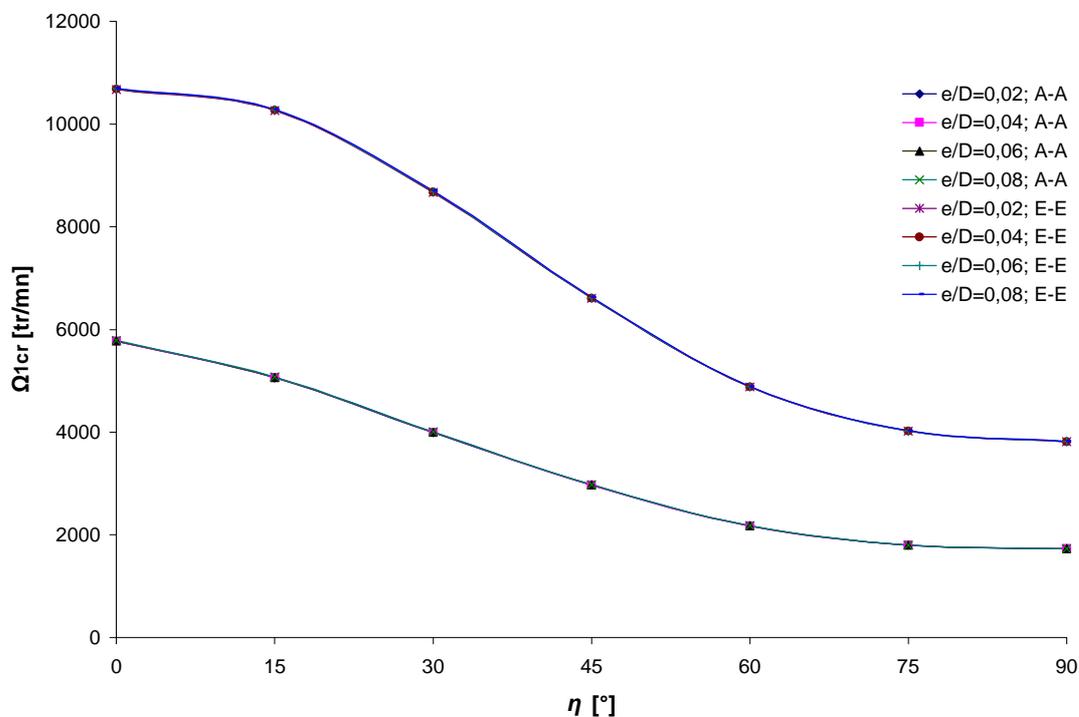


Figure 5.14 : Deuxième vitesse critique  $\Omega_{2cr}$  de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport  $L/D$  pour différents angles des plis  $\eta$ .

Les figures 5.15 et 5.16 donnent successivement la variation des premières et deuxièmes vitesses critiques du même arbre tournant en graphite- époxyde avec un rapport  $L/D=20$  en fonction de l'angle de pli pour différents rapports  $e/D$  et différentes conditions aux limites. On remarque que l'influence du rapport  $e/D$  sur la vitesse critique est presque négligeable, les courbes sont presque identiques pour les différents rapports  $e/D$  de chaque condition aux limites.

Dans les figures 5.17, 5.18, 5.19 et 5.20, la même remarque est observée, malgré la variation du rapport  $e/D$ , la vitesse critique est légèrement agrandie. C'est dû à la déformation négligeable de la section transversale, et la vitesse critique de l'arbre à paroi mince est approximativement indépendante du rapport  $e/D$ .

Selon ces résultats obtenus, tout en prévoyant quelle orientation des fibres de l'arbre tournant en matériaux composites ayant la vitesse critique maximum, nous devrions prendre en considération le rapport  $L/D$  et le type des conditions aux limites. C'est-à-dire, la vitesse critique maximum d'un arbre tournant en matériaux composites n'est pas toujours à un angle de pli égale zéro degré, mais elle dépend du rapport de  $L/D$  et le type des conditions aux limites.



**Figure 5.15 :** Première vitesse critique  $\Omega_{1cr}$  de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis  $\eta$  pour différents rapports  $e/D$  et différentes conditions aux limites (A-A, E-E).

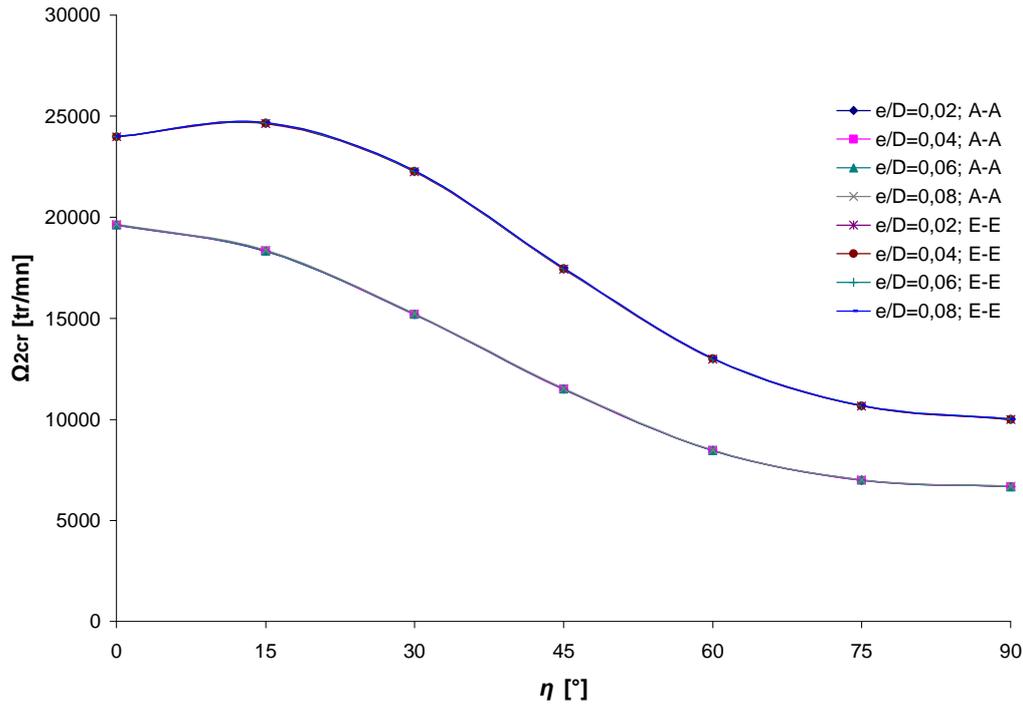


Figure 5.16 : Deuxième vitesse critique  $\Omega_{2cr}$  de l'arbre tournant en fonction de l'angle des plis  $\eta$  pour différents rapports  $L/D$  et différentes conditions aux limites (A-A, E-E).

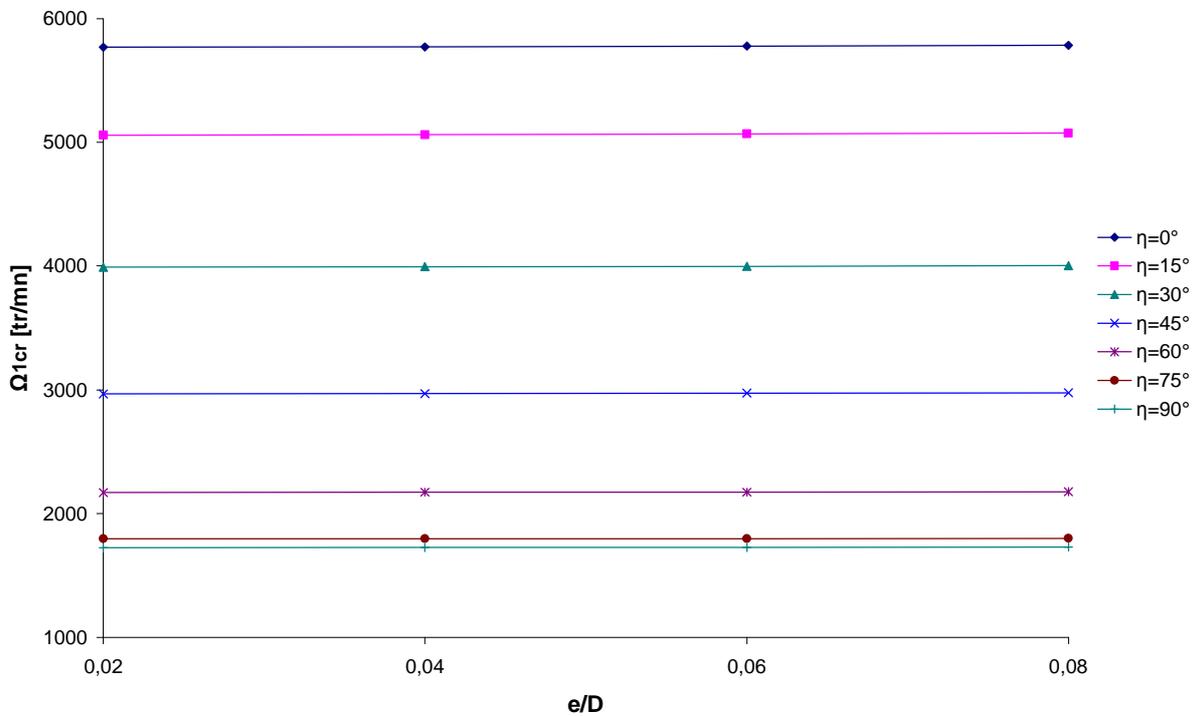
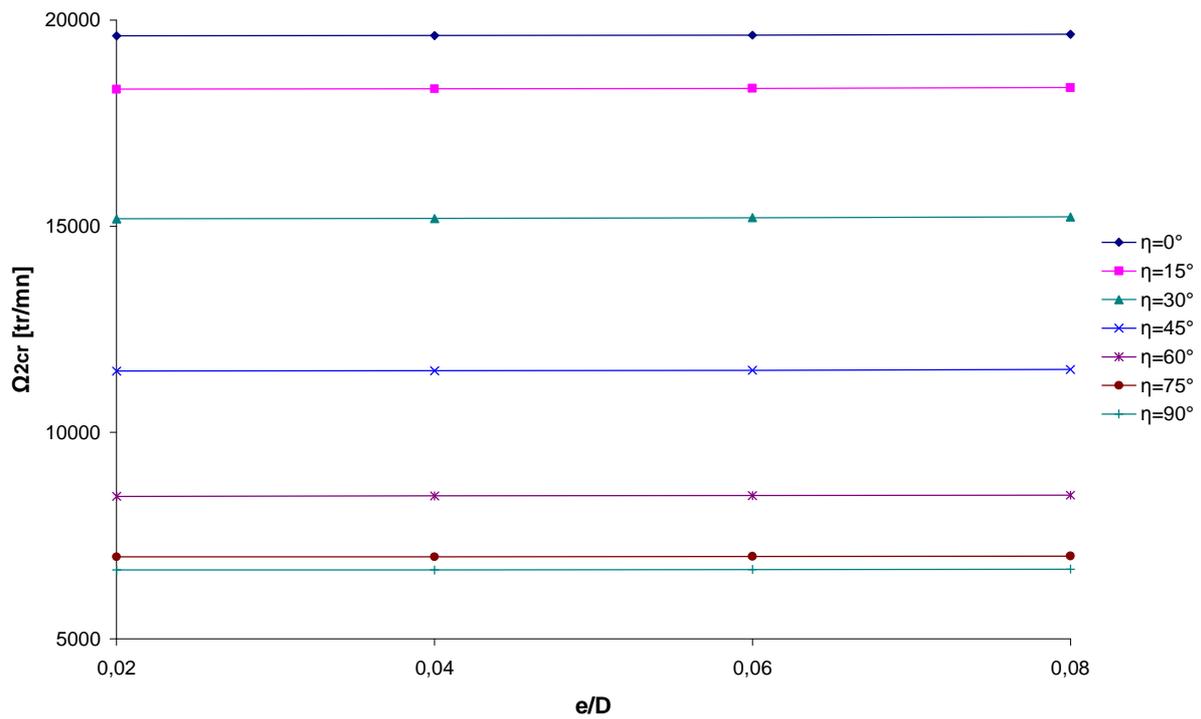
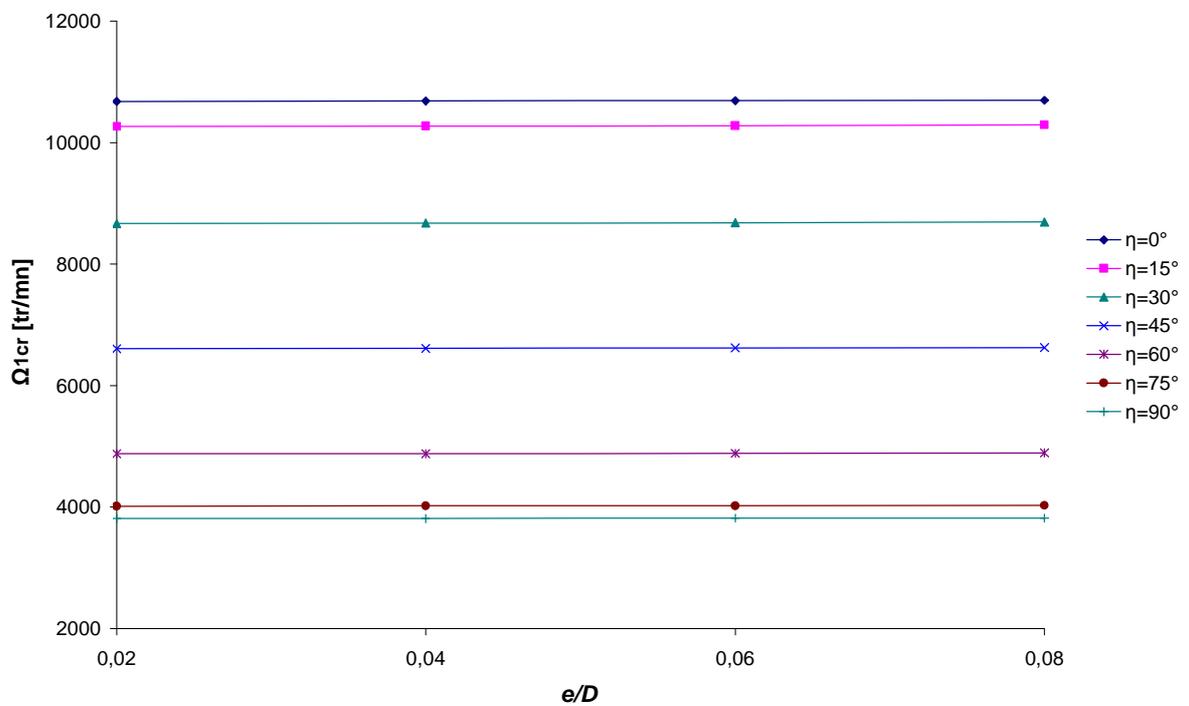


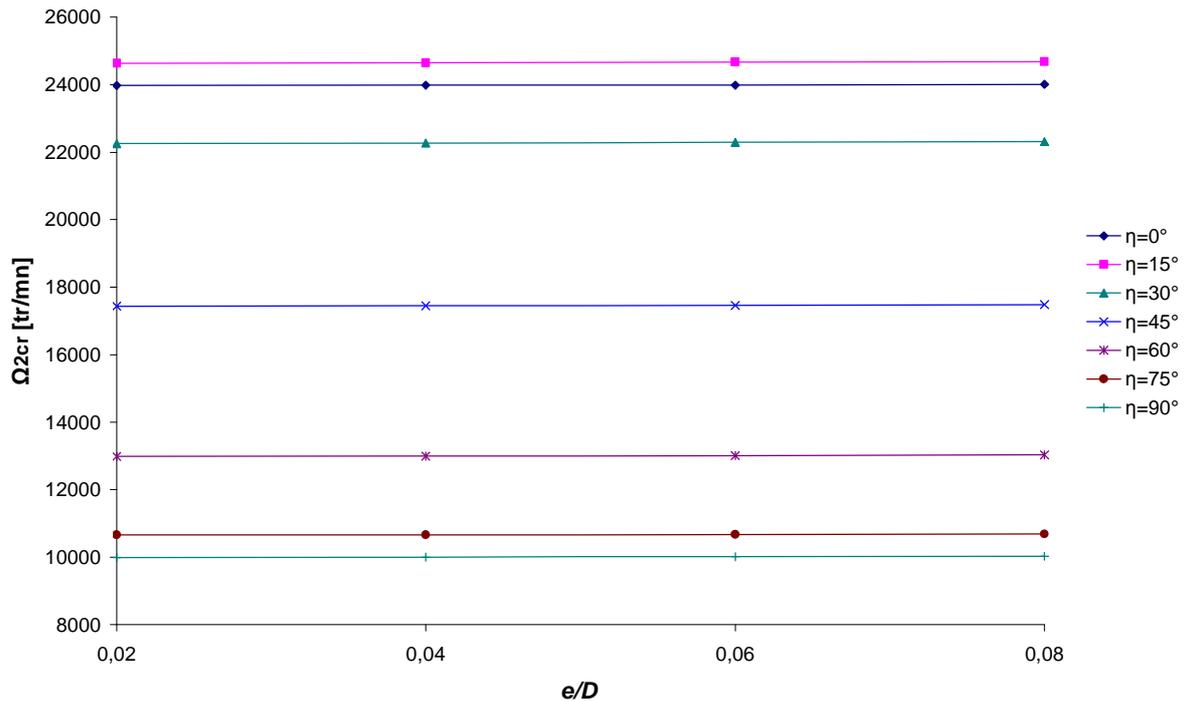
Figure 5.17 : Première vitesse critique  $\Omega_{1cr}$  de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport  $e/D$  pour différents angles des plis  $\eta$  ( $L/D=20$ ).



**Figure 5.18** : Deuxième vitesse critique  $\Omega_{2cr}$  de l'arbre tournant bi- appuyé en fonction du rapport  $e/D$  pour différents angles des plis  $\eta$  ( $L/D=20$ ).



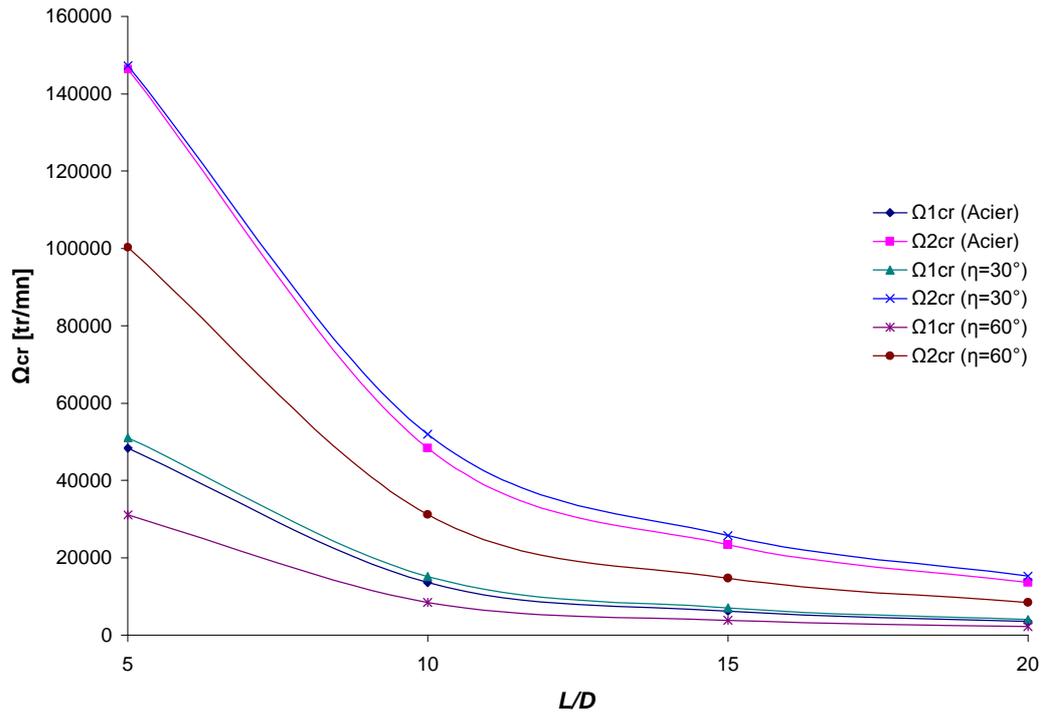
**Figure 5.19** : Première vitesse critique  $\Omega_{1cr}$  de l'arbre tournant bi- encastré en fonction du rapport  $e/D$  pour différents angles des plis  $\eta$  ( $L/D=20$ ).



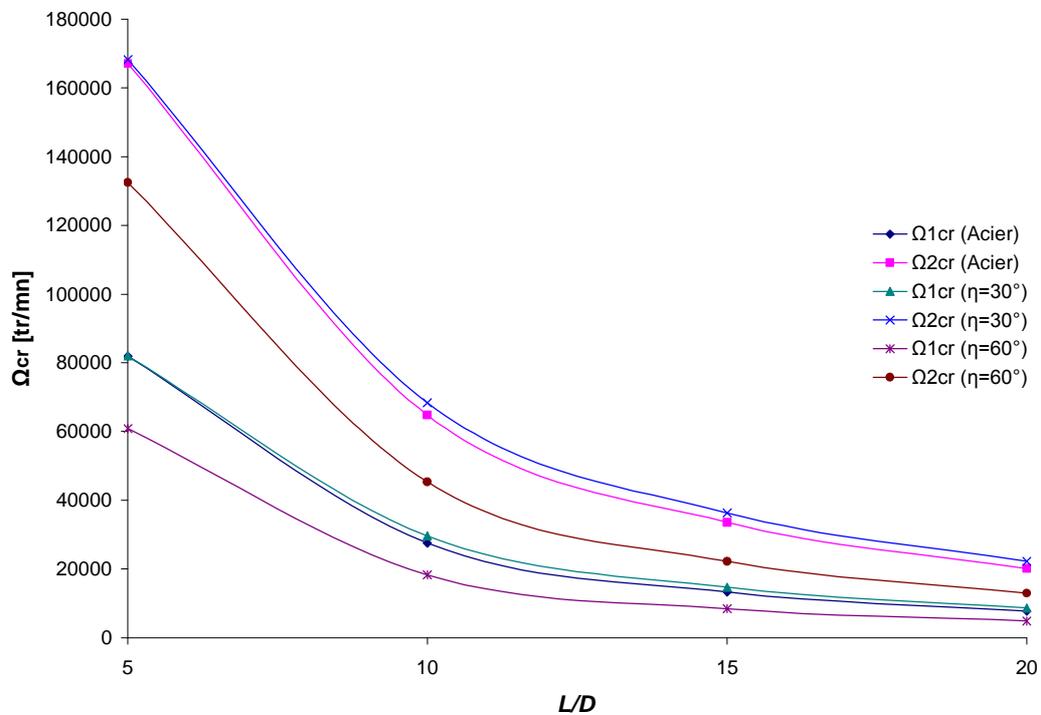
**Figure 5.20 :** Deuxième vitesse critique  $\Omega_{2cr}$  de l'arbre tournant bi-encasté en fonction du rapport  $e/D$  pour différents angles des plis  $\eta$  ( $L/D=20$ ).

Les figures 5.21 et 5.22 illustrent la variation des vitesses critiques (la première et la deuxième) du même arbre tournant en graphite-époxyde avec différentes orientations des fibres et d'un arbre tournant en acier ( $E = 207$  GPa,  $G = 79.6$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7680$  kg/m<sup>3</sup>) [60] en fonction du rapport  $L/D$  et différentes conditions aux limites. On constate que si le rapport  $L/D$  augmente la vitesse critique diminue et l'inverse est juste. Les courbes de l'arbre en acier sont situées entre les courbes des arbres en matériaux composites d'angle de pli 30° et 60°. Par exemple, dans le cas d'un arbre bi-simplement appuyé, une même première ou deuxième vitesse critique pour un arbre en matériaux composites à un angle de pli  $\eta = 30^\circ$ , il faut un arbre en acier à une longueur inférieure à celle de l'arbre en matériaux composites. L'arbre bi-encasté en acier a la plus grande première vitesse critique quand  $L/D$  est moins de 7.5. Le cas où  $L/D$  entre 7.5 et 20, la première vitesse critique de  $\eta = 30^\circ$  est la plus grande que les autres.

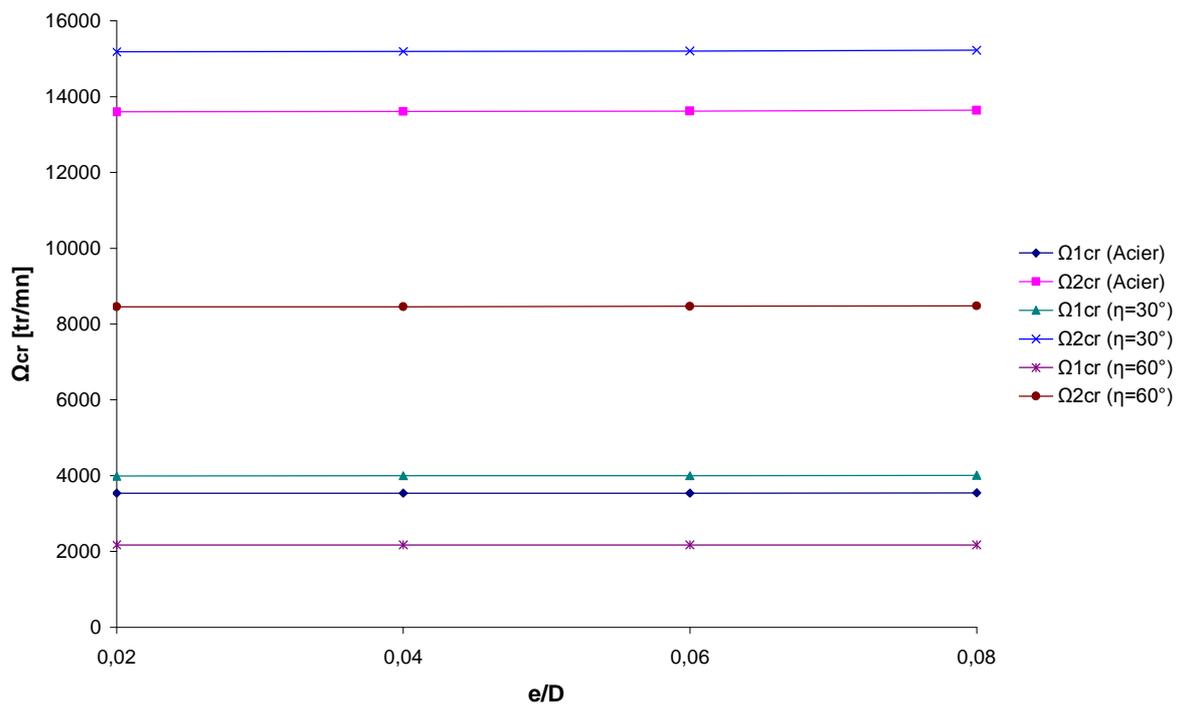
Dans les figures 5.23 et 5.24, malgré le changement du rapport  $e/D$ , la vitesse critique est légèrement agrandie. C'est dû à la déformation négligeable de la section transversale, et la vitesse critique de l'arbre à paroi mince est approximativement indépendante du rapport  $e/D$ . Les vitesses critiques de l'acier sont entre celles des arbres en matériaux composites qui ont successivement l'angle de pli 30° et 60°.



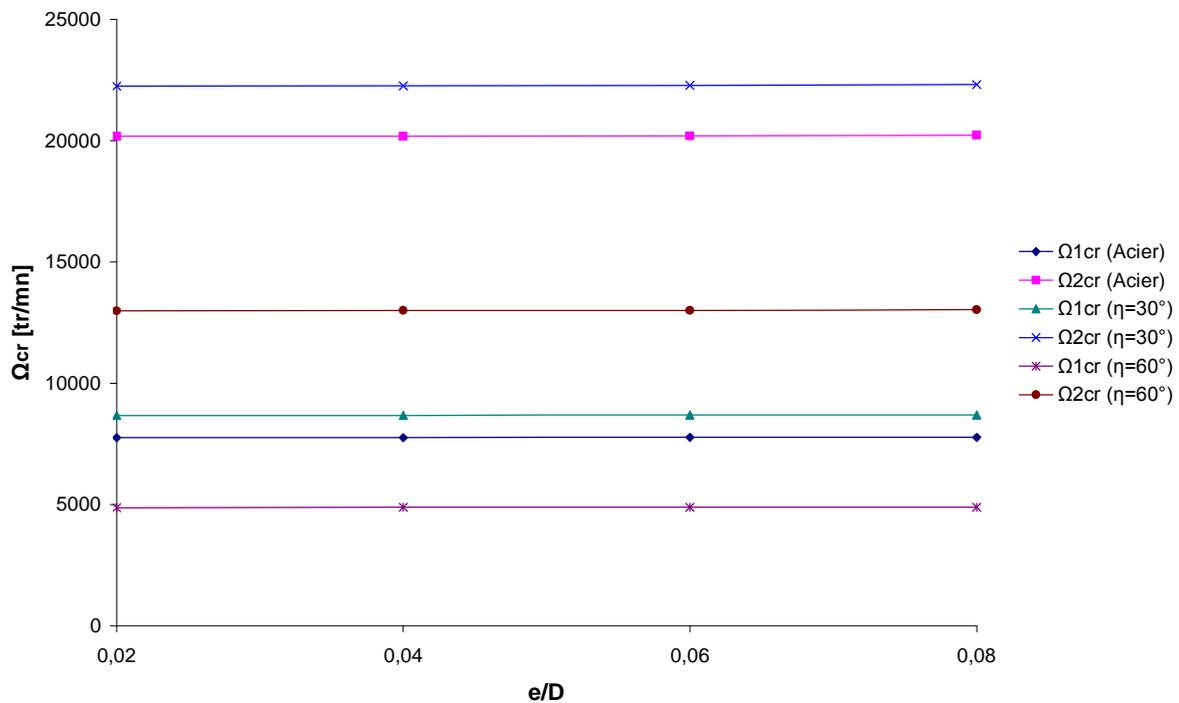
**Figure 5.21** : Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- appuyé en matériaux composite pour différents angles des plis, et en acier en fonction du rapport  $L/D$ .



**Figure 5.22** : Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- encasté en matériaux composite pour différents angles des plis, et en acier en fonction du rapport  $L/D$ .



**Figure 5.23 :** Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- appuyé en matériaux composite pour différents angles des plis, et en acier en fonction du rapport  $e/D$  ( $L/D=20$ ).



**Figure 5.24 :** Première et deuxième vitesse critique de l'arbre tournant bi- encastré en matériaux composite pour différents angles des plis, et en acier en fonction du rapport  $e/D$  ( $L/D=20$ ).

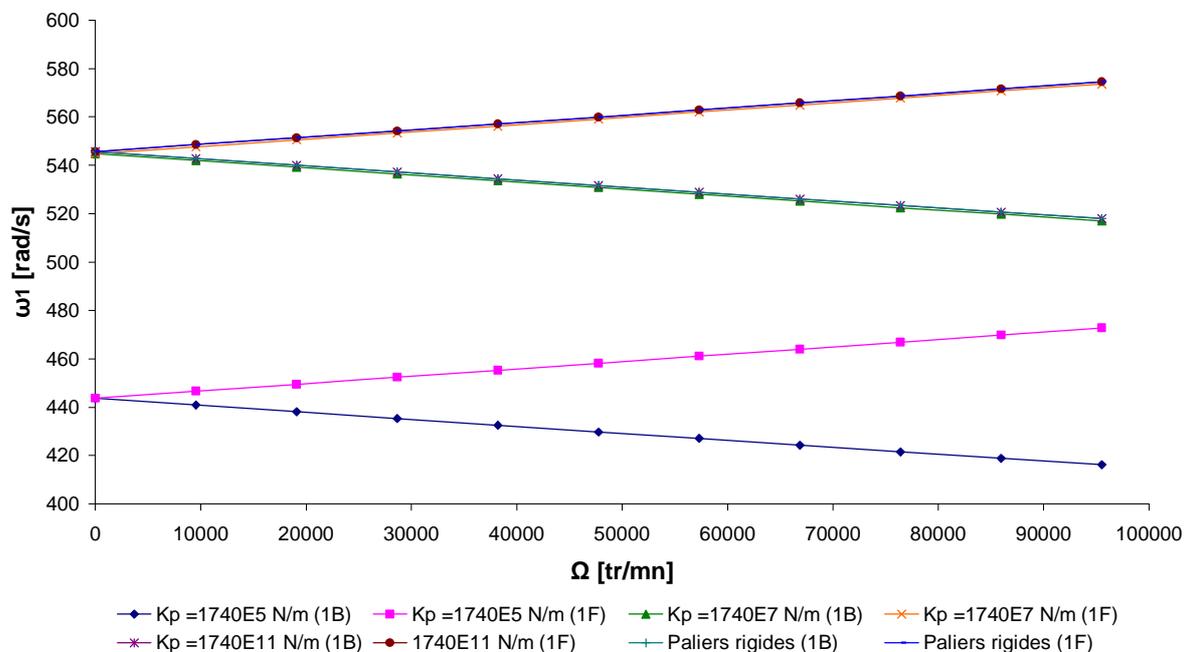
### 5.3.6. Influence des paliers élastiques sur les fréquences propres

#### 5.3.6.1. Paliers isotropes/symétrique

Les propriétés physiques et géométriques de l'arbre en graphite- époxyde à étudier sont données dans le tableau 5.1 avec  $k_s = 0.503$ .

Les figures 5.25, 5.26 et 5.27 montrent l'évolution des trois premières fréquences de flexion d'un arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction de la vitesse de rotation pour différentes raideurs des paliers. Dans cet exemple les paliers sont isotropes, les raideurs des deux paliers sont égales dans les différentes directions et leurs valeurs sont :  $K_{yy} = K_{zz} = K_P$  et  $K_{yz} = K_{zy} = 0$ .

On remarque que lorsque la valeur de  $K_P$  augmente les fréquences augmentent et l'inverse est juste. C'est-à-dire à chaque fois la rigidité de l'arbre tournant en matériaux composites augmente ses fréquences propres augmentent et par conséquence les vitesse critiques aussi augmentent (voir la figure 5.28), on constate ça bien lorsque on prend deux valeurs de  $K_P$  plus élevée, les fréquences propres sont très proches (presque identiques) et tendent vers les fréquences propres d'un arbre tournant bi- simplement appuyé (paliers rigides), le cas où la valeur de  $K_P$  tend vers l'infini.



**Figure 5.25 :** Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques pour différentes raideurs en fonction la vitesse de rotation.

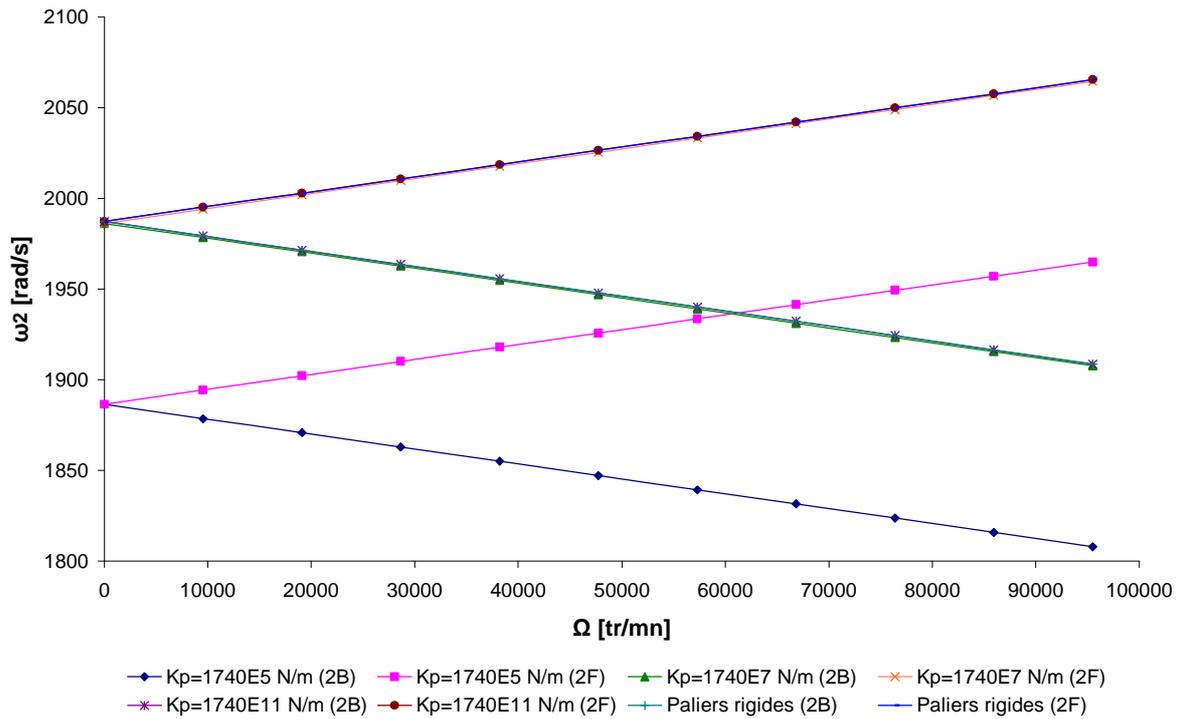


Figure 5.26 : Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques pour différentes raideurs en fonction la vitesse de rotation.

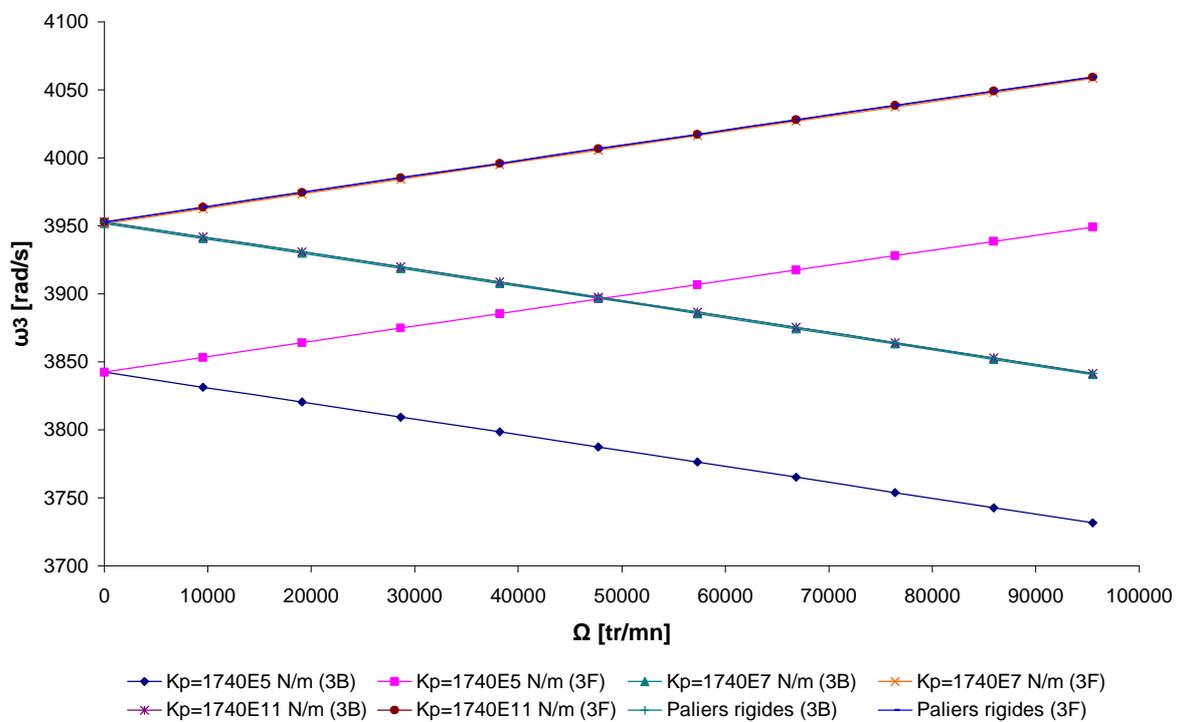
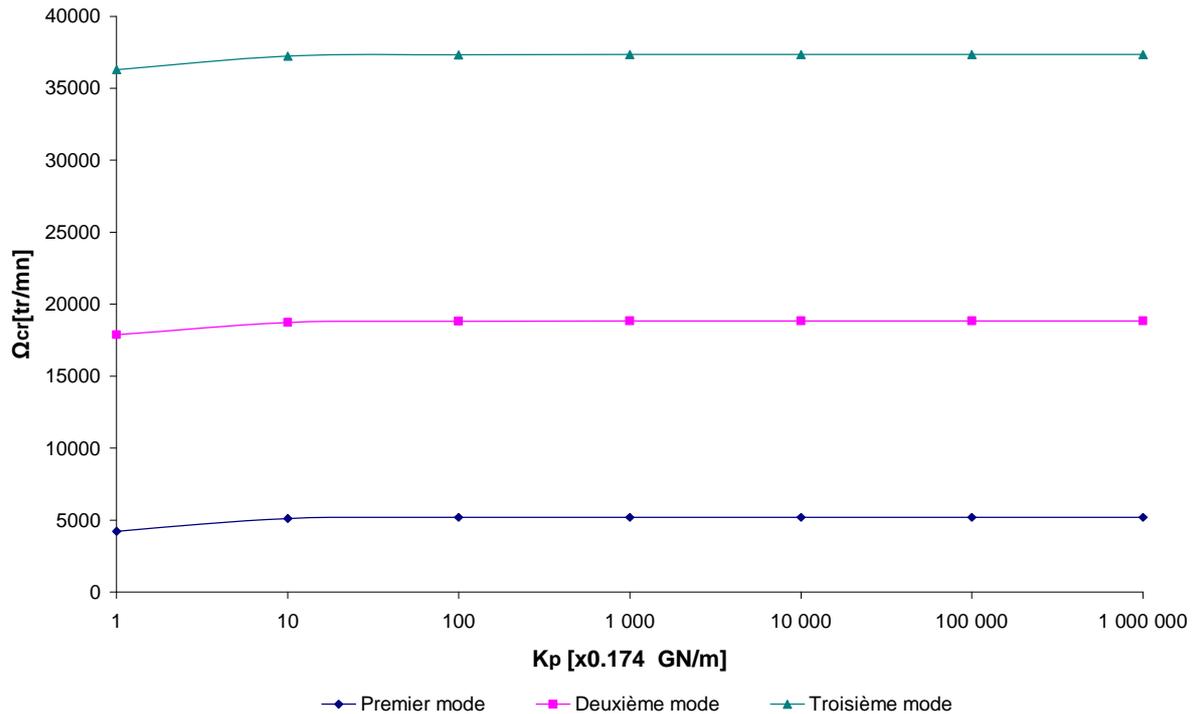


Figure 5.27: Troisième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques pour différentes raideurs en fonction la vitesse de rotation.



**Figure 5.28:** Trois premières vitesses critiques de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi-appuyé sur paliers élastiques en fonction des raideurs des paliers.

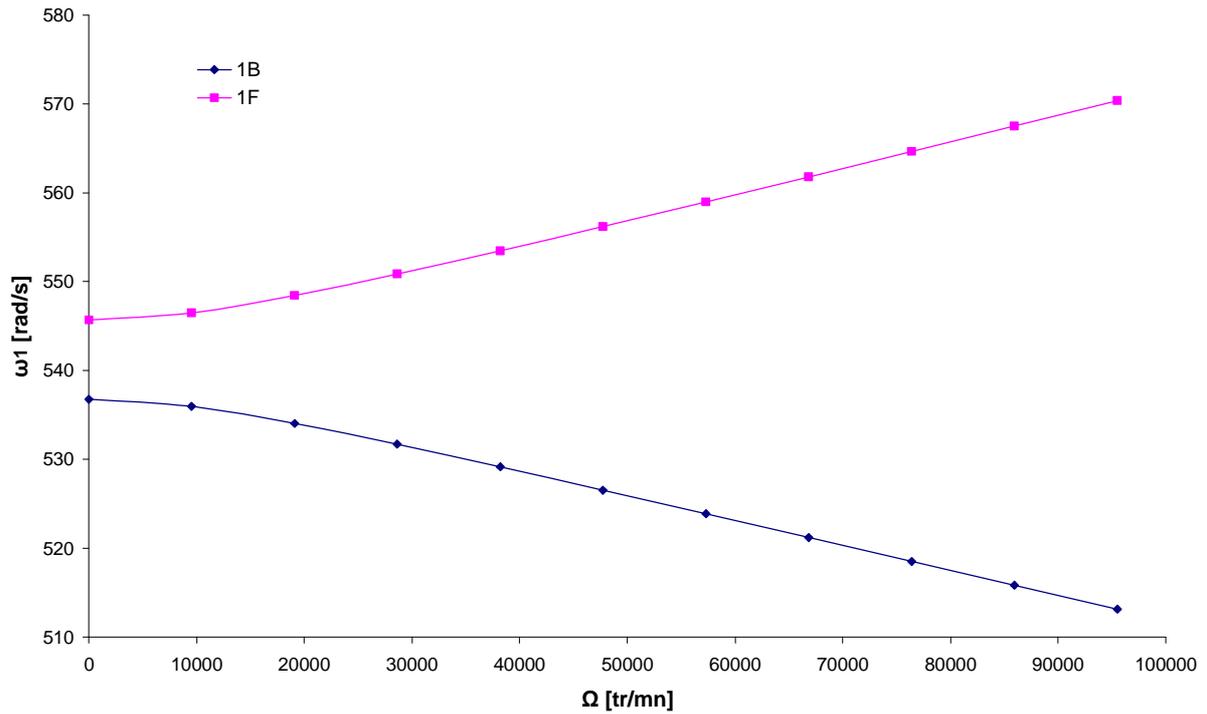
### 5.3.6.2. Paliers anisotropes/dissymétriques

On va prendre le même exemple précédent mais avec des raideurs des paliers différentes dans les directions des axes orthogonaux à l'axe de rotation. Dans ce cas l'arbre est asymétrique. Les caractéristiques mécaniques des deux paliers sont :

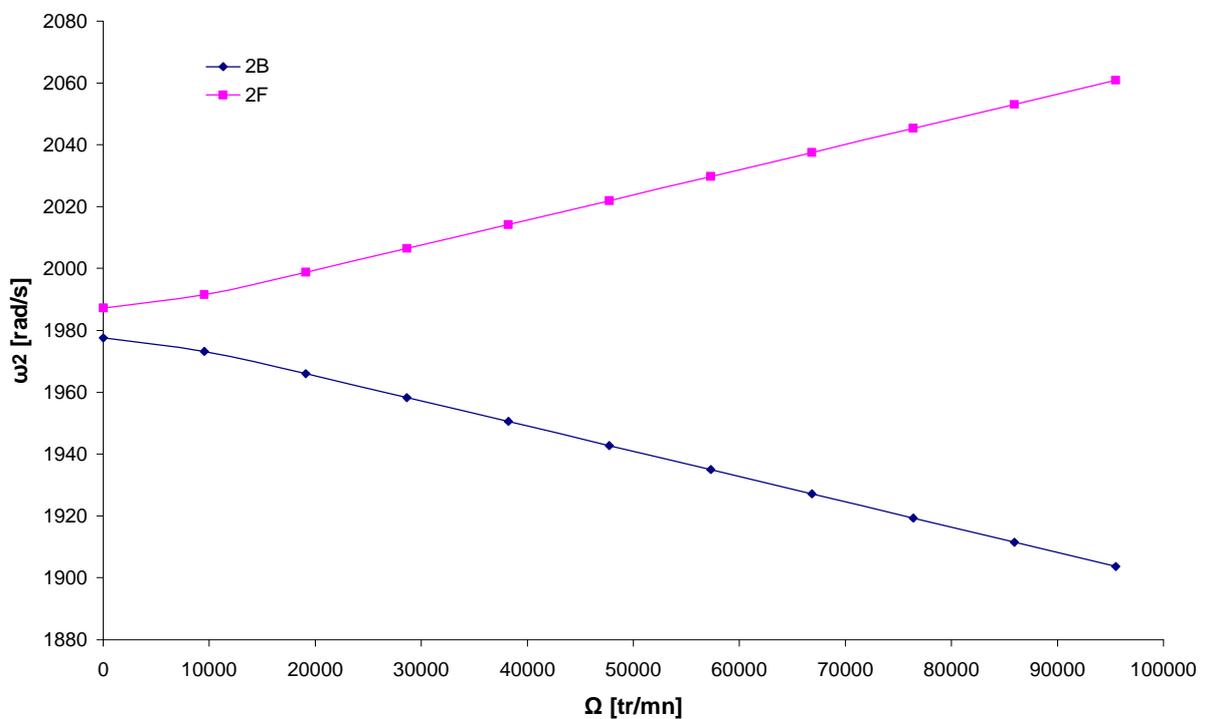
$$K_{yy} = 1740 \text{ GN/m}, K_{zz} = 1.74 \text{ GN/m} \text{ et } K_{yz} = K_{zy} = 0.$$

Les figures 5.29, 5.30 et 5.31 montrent l'évolution des trois premières fréquences de flexion d'un arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques anisotropes en fonction de la vitesse de rotation. On remarque que la séparation des fréquences des modes directes et indirectes commence à la valeur zéro de la vitesse de rotation au contraire des cas des paliers isotropes (on a une même fréquence pour les deux modes de précession dans le cas stationnaire). Cette séparation est due aux paliers élastiques anisotropes qui rendent l'arbre asymétrique et par conséquent les valeurs des fréquences de flexion sont différentes dans les différentes directions. Dans ce cas on a deux vitesses critiques.

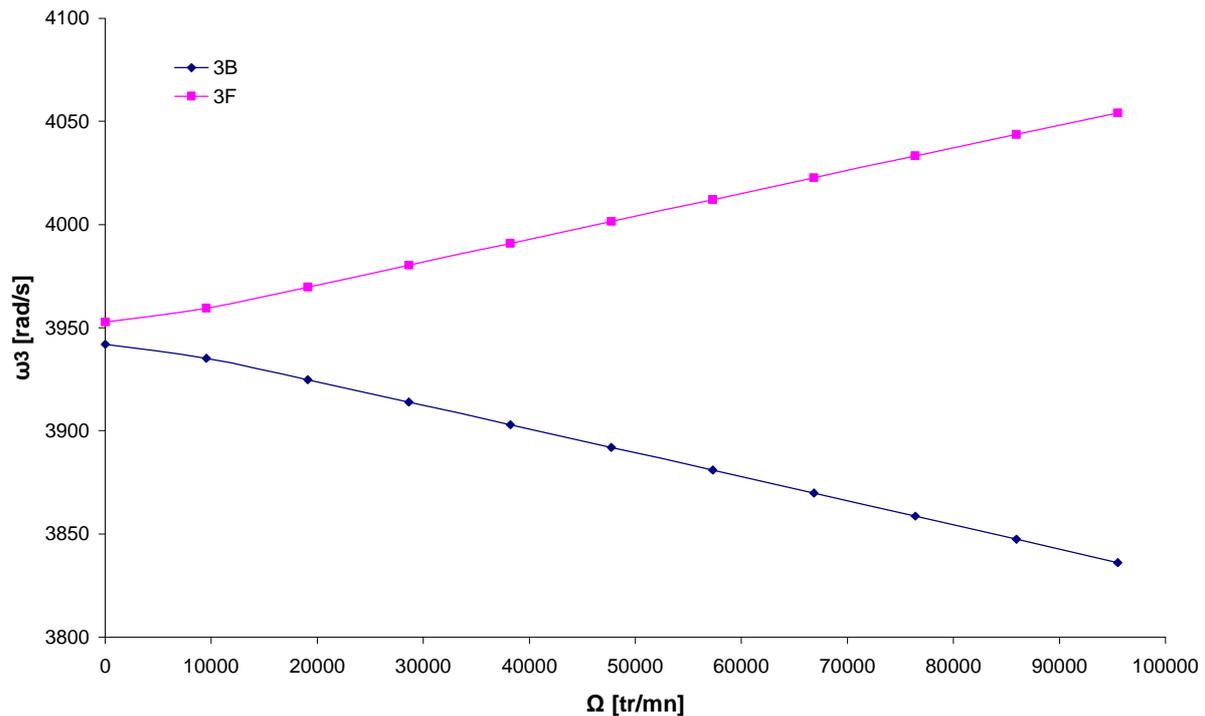
Si les paliers présentent des rigidités différentes dans la direction radiale, on obtient pour les deux directions de plus grande rigidité différentes vitesses critiques, c'est-à-dire, que les résonances surviennent successivement dans les deux directions principales.



**Figure 5.29 :** Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction la vitesse de rotation.



**Figure 5.30 :** Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde bi- appuyé sur paliers élastiques en fonction la vitesse de rotation.



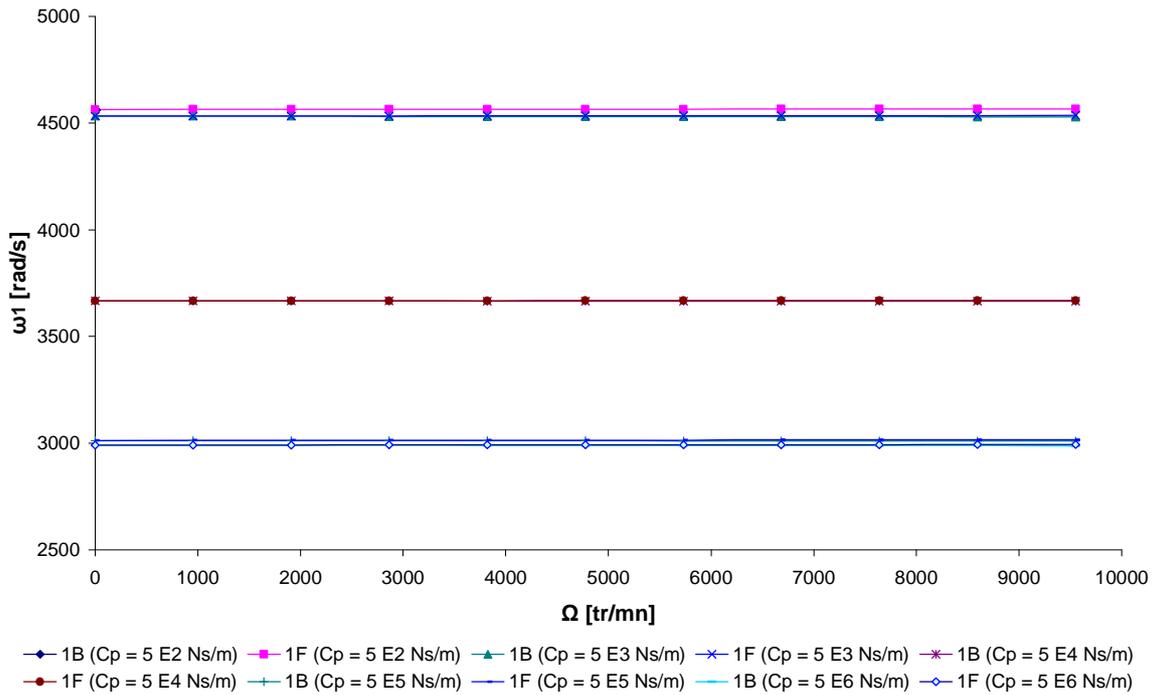
**Figure 5.31:** Troisième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite-époxyde bi-appuyé sur paliers élastiques en fonction la vitesse de rotation.

### 5.3.7. Influence de l'amortissement des paliers sur les fréquences propres

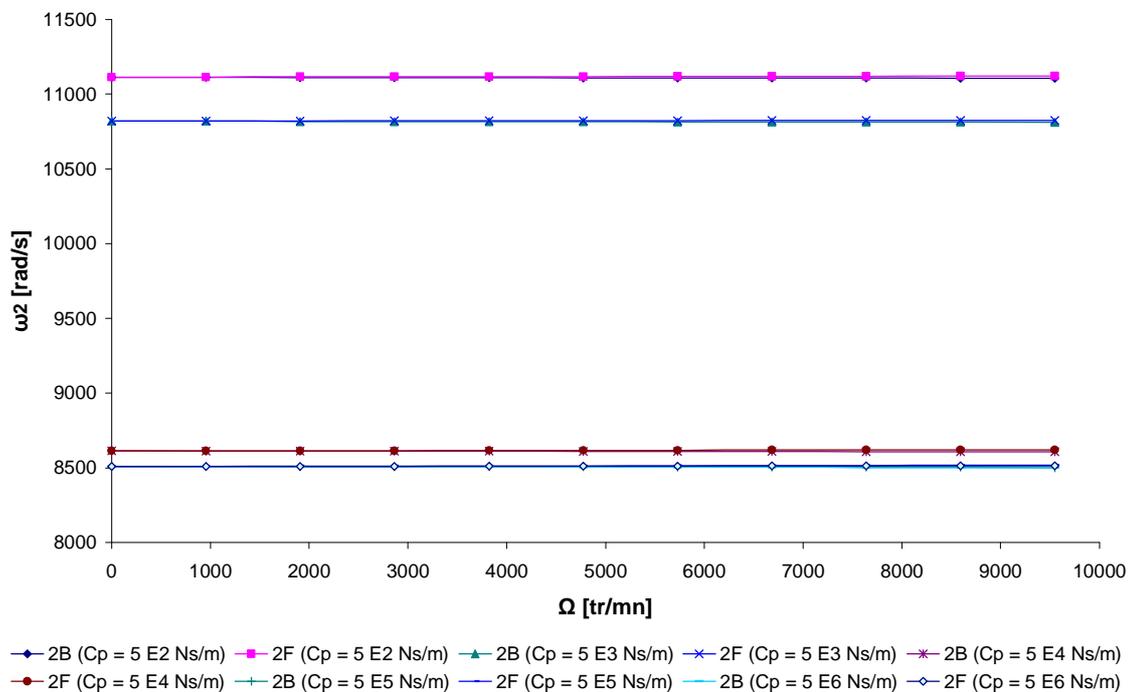
Les propriétés physiques de l'arbre en graphite-époxyde à étudier sont données dans le tableau 5.1, Les propriétés géométriques sont :  $L = 0.72$  m, Rayon intérieur = 0.014 m, rayon extérieur = 0.024 m et  $k_s = 0.56$ . En gardant la même orientation des fibres de l'exemple précédent, l'arbre est encasté à une extrémité, et l'autre extrémité est amortie.

Les figures 5.32 et 5.33 montrent l'évolution des deux premières fréquences de flexion d'un arbre tournant en graphite-époxyde encasté- amorti en fonction de la vitesse de rotation pour différents coefficients d'amortissement visqueux du palier. Dans cet exemple le palier est isotrope, les coefficients d'amortissement visqueux du palier sont égales dans les différentes directions et leurs valeurs sont :  $C_{yy} = C_{zz} = C_P$  et  $C_{yz} = C_{zy} = 0$ . On remarque que lorsque la valeur de  $C_P$  augmente les fréquences diminuent et l'inverse est juste et par conséquent les vitesses critiques aussi (on a démontré ça précédemment). Les fréquences du deuxième mode ont une diminution très importante en fonction du coefficient d'amortissement à celles du premier mode.

La maîtrise de comportements vibratoires nécessite une prévision des caractéristiques d'amortissement des rotors, en particulier l'amortissement des paliers. Cette prédiction est fondamentale dans la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages sécurisées en terme de vitesses de rotation.



**Figure 5.32:** Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite-époxyde encastéré- amorti pour différents coefficients d'amortissement en fonction la vitesse de rotation.



**Figure 5.33:** Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en graphite-époxyde encastéré- amortis pour différents coefficients d'amortissement en fonction la vitesse de rotation.

### 5.3.8. Influence de la nature du matériau sur les fréquences propres

Les mêmes propriétés géométriques et les mêmes orientations des fibres des différentes couches de l'arbre étudié dans l'exemple précédent sont prises dans cet exemple, avec différents matériaux.

Les figures 5.34 et 5.35 montrent respectivement le diagramme de Campbell de la première et la deuxième fréquence propre d'un arbre tournant avec différents matériaux, le premier arbre en graphite- époxyde (G-E), le deuxième en bore- époxyde (B-E), le troisième en carbone- époxyde (C-E), et le quatrième en verre- époxyde (V-E).les propriétés des matériaux utilisés sont définies le tableau 5.9.

Les résultats montrent que les propriétés physiques d'un arbre tournant ont une influence très importante sur les fréquences propres et par conséquent sur les vitesses critiques de l'arbre tournant.

**Tableau 5.9** : Propriétés des matériaux composites.

$L=2.47$ m, $D=12.69$ cm, $e=1.321$ mm, 10 couches à des épaisseurs égales ( $90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$ )				
Propriétés physiques	Bore- époxyde (B-E) [56]	Graphite- époxyde (G-E) [56]	Carbone- époxyde (C-E) [61]	Verre- époxyde (V-E) [62]
$E_{11}$ (GPa)	211.0	139.0	172.7	50
$E_{22}$ (GPa)	24.1	11.0	7.20	12
$G_{12}$ (GPa)	6.9	6.05	3.76	5.6
$G_{23}$ (GPa)	6.9	3.78	3.76	5.6
$\nu_{12}$	0.36	0.313	0.3	0.3
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1967.0	1578.0	1446.2	2000.0

Les figures 5.36 et 5.37, donnent respectivement le diagramme de Campbell de la première et la deuxième fréquence propre d'un arbre tournant avec les mêmes propriétés géométriques et l'orientations des fibres utilisées précédemment mais avec différents matériaux dans chaque couche. On a pris des différents classements des matériaux utilisés précédemment dans chaque couches, ces classements sur les dix couches sont données comme suit :

1 M : [V-E (deux couches)/C-E (deux couches)/B-E (trois couches)/G-E (trois couches)]

: [V-E ( $90^\circ, 45^\circ$ )/C-E ( $-45^\circ, 0^\circ$ )/B-E ( $0^\circ_3$ )/G-E ( $0^\circ_2, 90^\circ$ )]

2 M : [G-E (trois couches)/B-E (trois couches)/C-E (deux couches)/V-E (deux couches)]

: [G-E (90°, 45°, -45°)/B-E (0°<sub>3</sub>)/C-E (0°<sub>2</sub>)/V-E (0°, 90°)]

3 M : [B-E (trois couches)/V-E (deux couches)/C-E (deux couches)/G-E (trois couches)]

: [B-E (90°, 45°, -45°)/V-E (0°<sub>2</sub>)/C-E (0°<sub>2</sub>)/G-E (0°<sub>2</sub>, 90°)]

On constate que dans les cas des 1 M et 2 M, les fréquences sont proches à cause de la symétrie du classement des matériaux utilisés dans les différentes couches, et ont une légère dépendance aux orientations des fibres des couches, par contre dans le troisième cas sont inférieures à celles des 1 M et 2 M.

Les résultats obtenus montrent que le classement des matériaux sur les différentes couches de l'arbre tournant influe sur les fréquences propres et aussi par conséquent sur les vitesses critiques et change le comportement vibratoire de l'arbre.

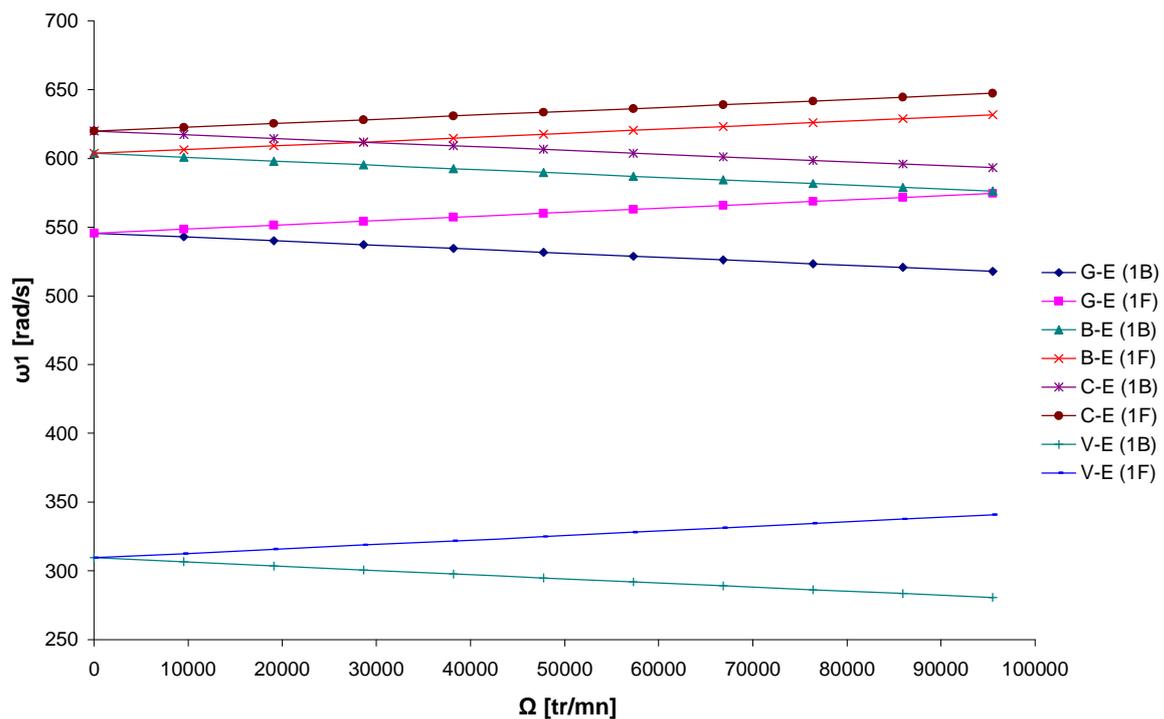


Figure 5.34 : Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents matériaux en fonction de la vitesse de rotation.

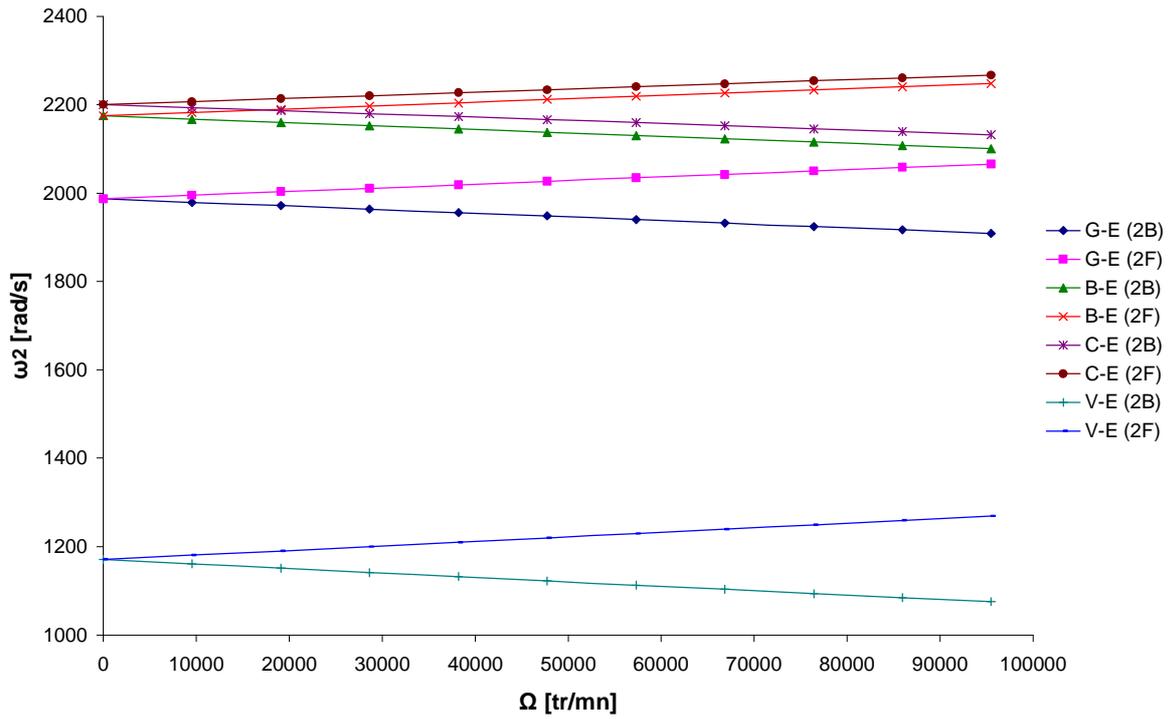


Figure 5.35 : Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents matériaux en fonction de la vitesse de rotation.

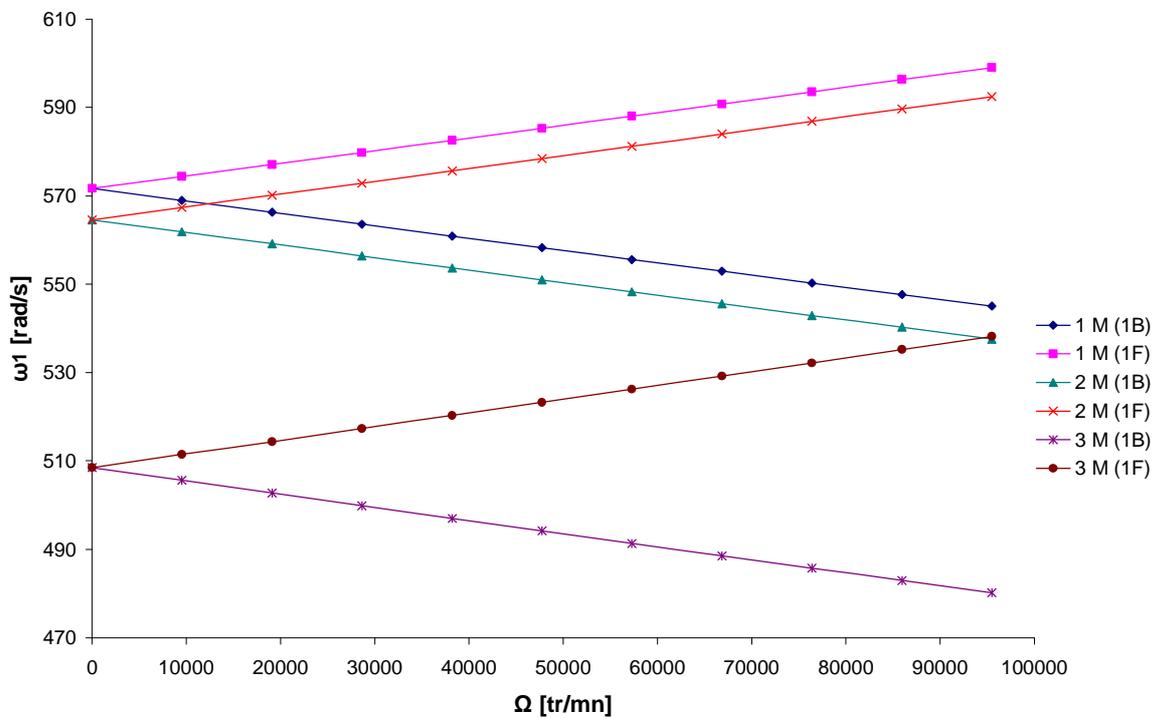
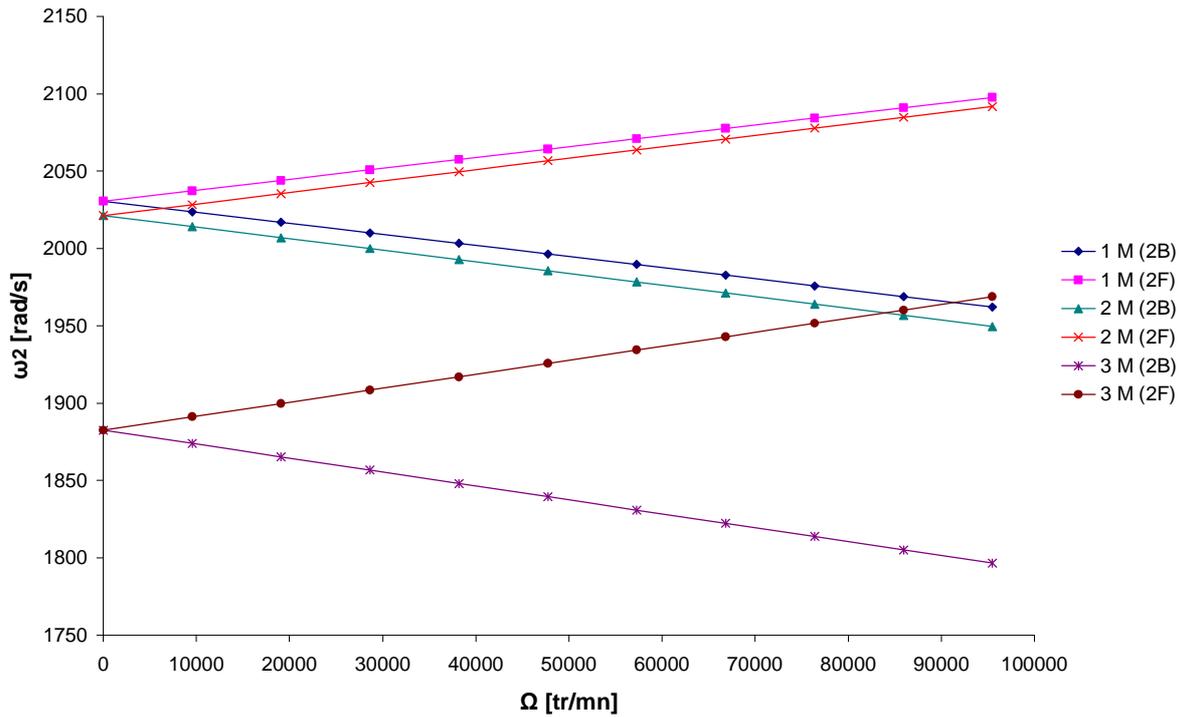


Figure 5.36 : Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents classements des matériaux sur chaque couche en fonction de la vitesse de rotation.



**Figure 5.37:** Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant bi- appuyé pour différents classements des matériaux sur chaque couche en fonction de la vitesse de rotation.

### 5.3.9. Influence de l'ordre d'empilement sur les fréquences propres

Pour montrer les effets de changement de l'ordre d'empilement sur les fréquences propres, un arbre tournant en carbone- époxyde est monté sur deux appuis rigides, Les propriétés physiques et géométriques de cet arbre à étudier sont [41]:

$$E_{11} = 130 \text{ GPa}, E_{22} = 10 \text{ GPa}, G_{12} = G_{23} = 7 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25, \rho = 1500 \text{ Kg/m}^3$$

$$L = 1.0 \text{ m}, D = 0.1 \text{ m}, e = 4 \text{ mm}, 4 \text{ couches à des épaisseurs égales}, k_s = 0.503$$

Un arrangement de fibre de quatre couches a été considéré, avec deux couches de  $0^\circ$  et de deux autre de  $90^\circ$ . Les fréquences de flexions ont été obtenues pour différentes combinaisons (symétrique et asymétrique) des orientations des fibres de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$  (voir les figures 5.38 et 5.39). Ces figures, donnent respectivement le diagramme de Campbell de la première et la deuxième fréquence propre d'un arbre tournant pour différents ordres d'empilement.

On peut observer de ces figures que pour des séquences d'empilement symétriques, les fréquences propres de l'arbre tournant en matériaux composites sont très proches, et ont une légère dépendance aux orientations des fibres des couches.

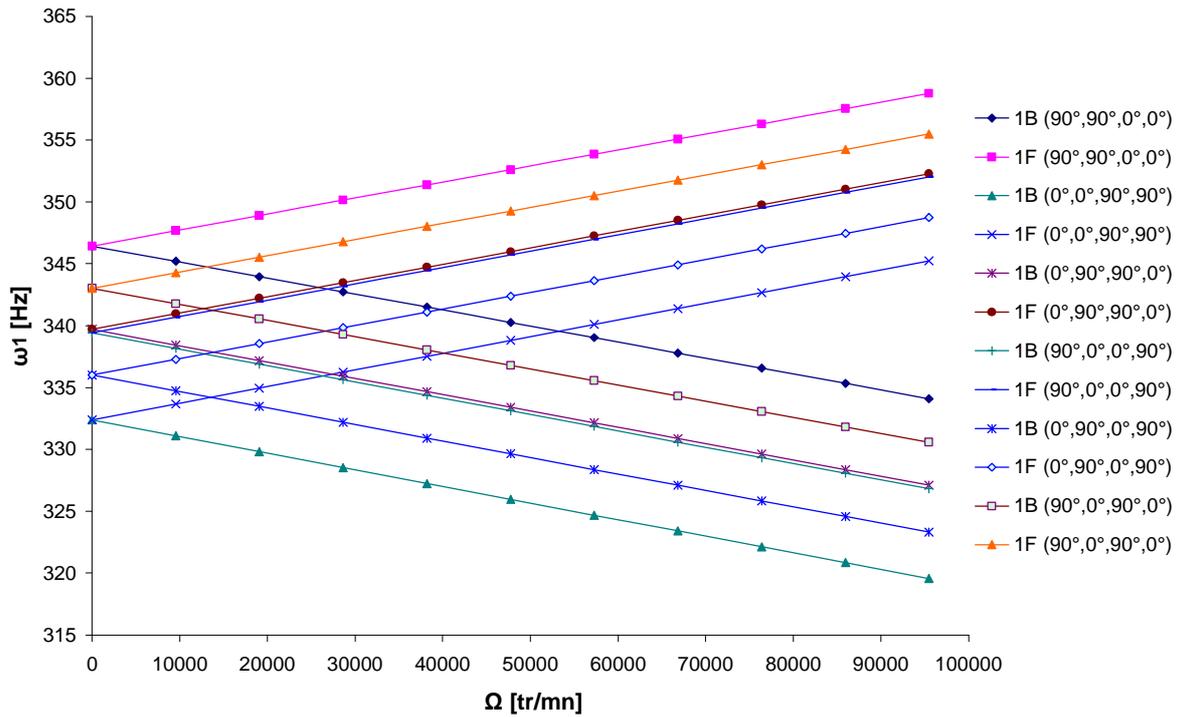


Figure 5.38 : Première fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en carbone- époxyde bi- appuyé pour différents ordres d'empilement en fonction de la vitesse de rotation.

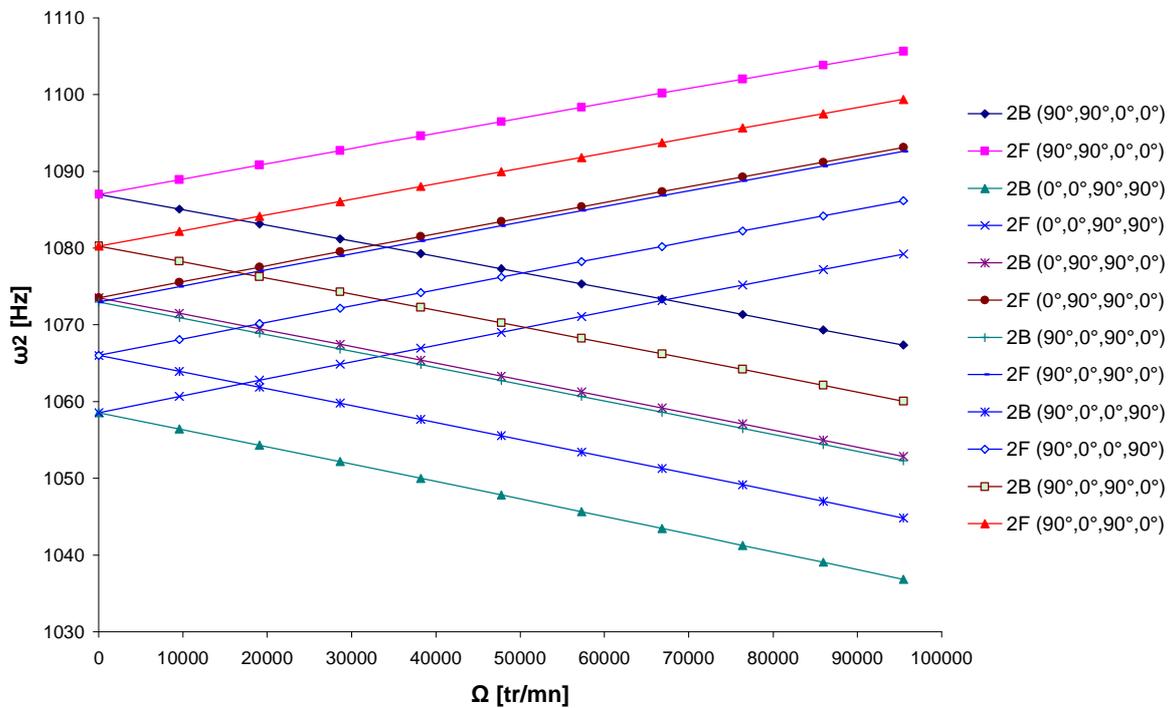


Figure 5.39 : Deuxième fréquence propre de flexion de l'arbre tournant en carbone- époxyde bi- appuyé pour différents ordres d'empilement en fonction de la vitesse de rotation.

### 5. 3.10. Influence de la position de disque sur l'arbre tournant

On commence cette partie par une validation pour le cas d'un arbre stationnaire bi-appuyé embarqué (le disque rigide au milieu), les propriétés mécaniques et géométriques de l'arbre et du disque en acier sont comme suit :  $E = 207 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Arbre : Longueur = 457 mm, Rayon intérieur = 12.7 mm, Rayon extérieur = 17.7 mm.

Disque : Rayon extérieur = 88.5 mm ; Epaisseur = 4.425 mm.

La première fréquence du système (arbre+disque) calculée par notre programme dans le cas stationnaire (la vitesse de rotation est nulle) est 310 Hz sur paliers rigides (avec  $k_s=0.56$ ). Dans la référence [63], ils ont utilisé un élément cylindrique tridimensionnel épais en appliquant la théorie 3D pour le même arbre étudié dans notre cas mais avec un disque flexible, la fréquence trouvée est 288 Hz. Dans cette application, on constate la différence entre les deux travaux à cause des différentes théories appliquées, et de la flexibilité du disque.

On revient à notre étude et on prend un autre exemple, les fréquences propres d'un système d'arbre flexible en graphite- époxyde supportant un disque rigide uniforme sont analysées. Les propriétés mécaniques de l'arbre bi- appuyé sont montrées dans le tableau 5.1 et l'orientation des fibres dans les différentes couches c'est le même que l'exemple 1, alors que ses propriétés géométriques et les propriétés géométriques et mécaniques de du disque sont illustrées dans le tableau 5.10. Le disque est mis au milieu de l'arbre ( $x = L/2$ , voir la figure 5.40).

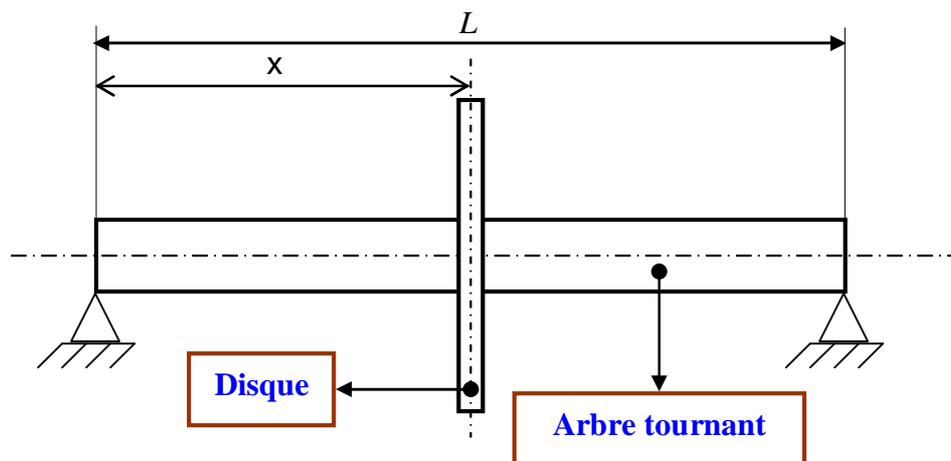


Figure 5.40 : arbre tournant creux embarqué.

Le diagramme de Campbell des trois premières paires de fréquences des modes de tourbillonnement (whirling) du système composé ci-dessus montré dans la figure 5.40 est donnée par la figure 5.41. En sachant que le point d'intersection de la courbe des fréquences de tourbillonnement en fonction des vitesses de rotation avec la droite ( $\gamma=1$ ) où  $\omega = \Omega$  est la vitesse critique du système. Dans cette figure, la première vitesse critique qui s'apparaît c'est du deuxième paire des fréquences de tourbillonnement est exactement c'est le mode rétrograde de tourbillonnement. Ceci pourrait être dû au couplage du mouvement de fluctuation (pitching) du disque avec la vibration transversale de l'arbre. Notez que le disque est situé au milieu (mid-span) de l'arbre, alors que le seconde mode de tourbillonnant direct et les mode de flexion rétrograde sont biaise- symétriques (skew-symmetric) au milieu de l'arbre.

Pour visionner mieux la courbe du premier pair de fréquences de flexion. On agrandie cette courbe à part (voir figure 5.42).

La figure 5.43 montre le Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué pour différentes positions (x) du disque sur l'arbre (voir la figure 5.40).

On constate que lorsque le disque s'approche de l'appui, la première fréquence de flexion diminue et la deuxième fréquence de flexion augmente et l'inverse est juste.

**Tableau 5.10** : Propriétés du système (arbre+disque).

Propriétés	Arbre	Disque
$L$ (m)	0.72	
Diamètre intérieur (m)	0.028	
Diamètre extérieur (m)	0.048	
$k_s$	0.56	
$I_m$ (kg)		2.4364
$I_d$ (kg m <sup>2</sup> )		0.1901
$I_p$ (kg m <sup>2</sup> )		0.3778

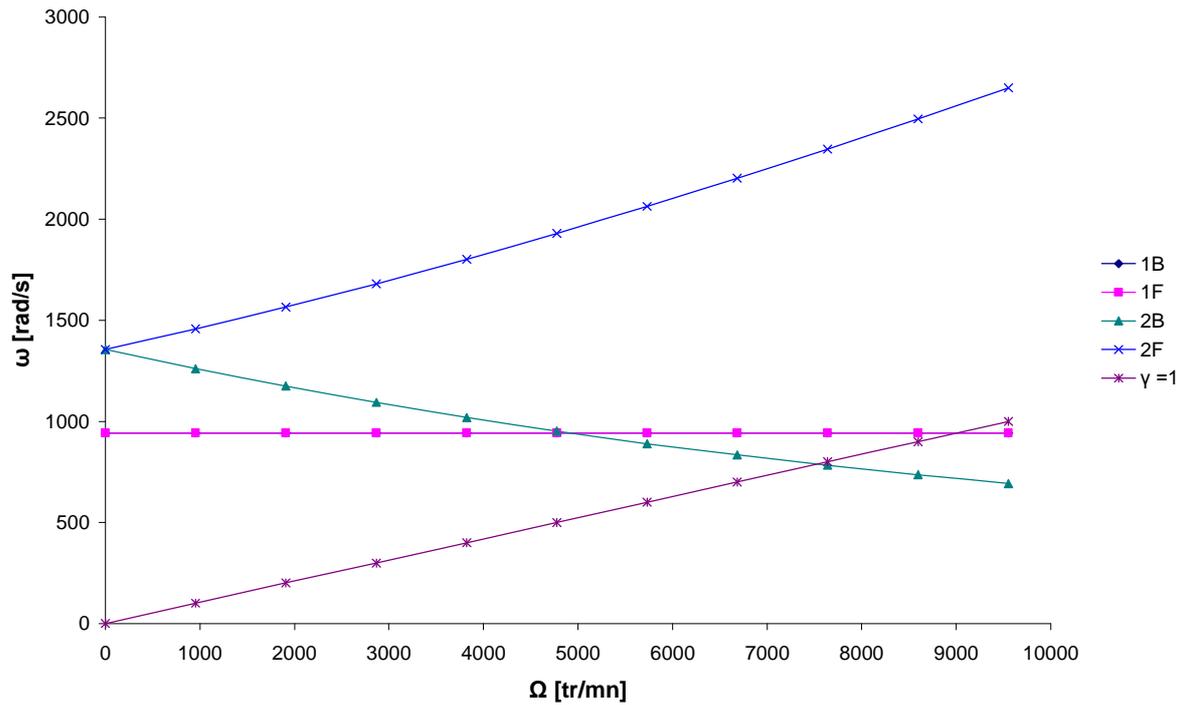


Figure 5.41: Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué.

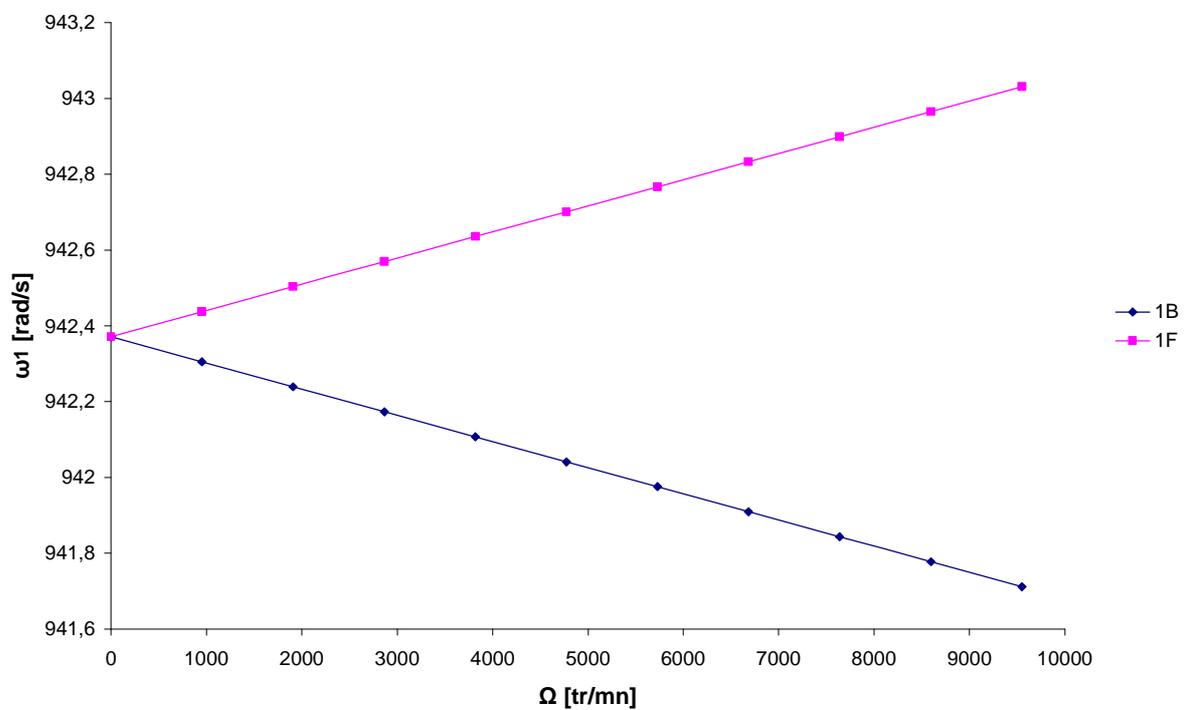
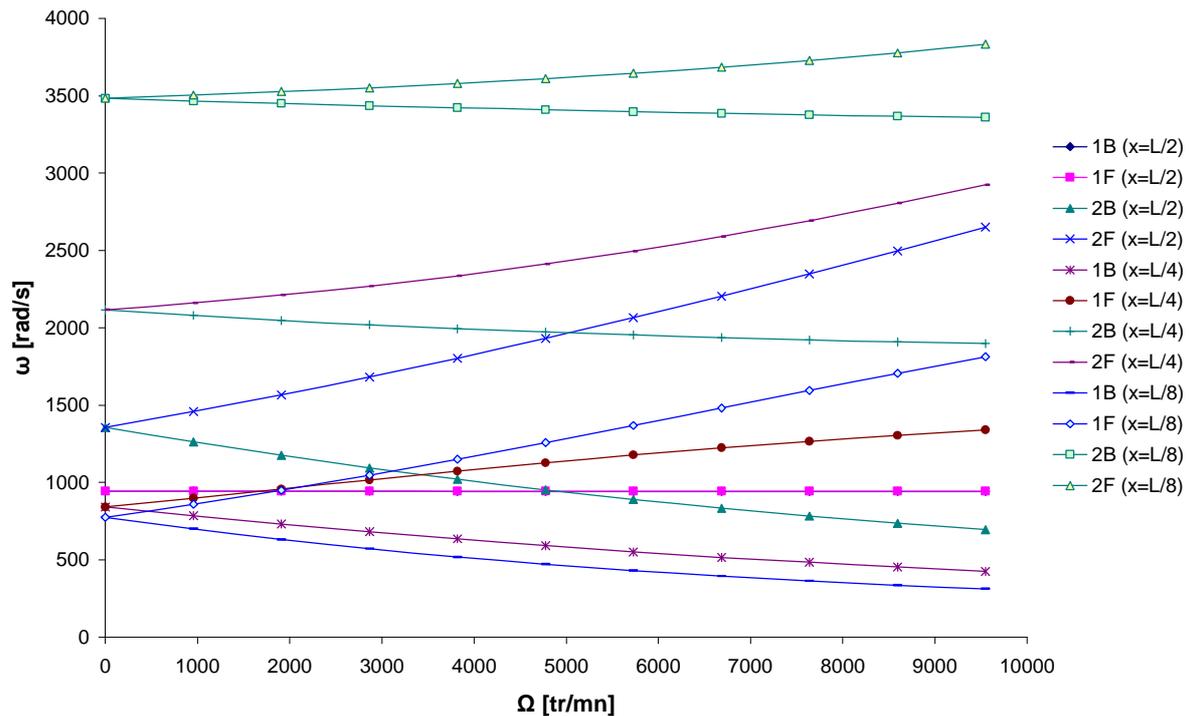


Figure 5.42 : Diagramme de Campbell de la première fréquence de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué.



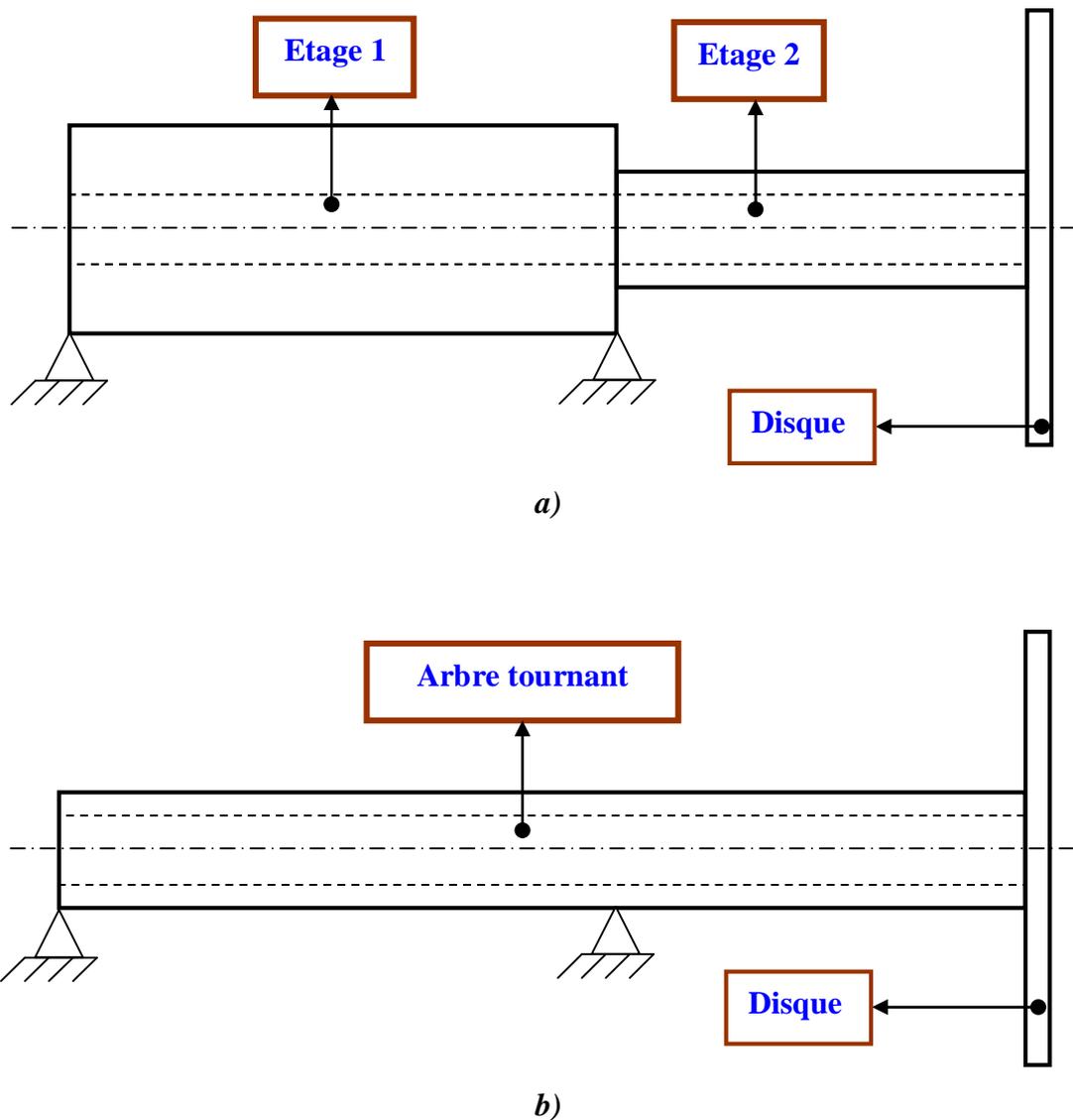
**Figure 5.43:** Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite-époxyde embarqué pour différentes positions du disque sur l'arbre.

### 5.3.11. Influence de la forme géométrique de l'arbre tournant

En gardant le même disque précédent, et on varie la forme géométrique de l'arbre en graphite-époxyde. Les propriétés mécaniques des arbres étudiés sont celles de l'exemple précédent. Les propriétés géométriques et les angles des plis de l'arbre non étagé et étagé sont donnés par le tableau 5.11, La figure 5.44 montre les systèmes à étudier.

**Tableau 5.11 :** Propriétés géométriques des arbres tournants.

Dimension	Arbre étagé		Arbre non étagé
	Etage 1	Etage 2	
$L$ (m)	0.360	0.360	0.720
$D$ (m)	0.048	0.038	0.038
$e$ (m)	0.020	0.010	0.010
Nombre des couches (à des épaisseurs égales)	20	10	10
$\eta$ (°)	90°, 45°, -45°, 0°, 90°, 90°, 45°, -45°, 0°, 90°	90°, 45°, -45°, 0°, 90°	90°, 45°, -45°, 0°, 90°



**Figure 5.44 :** Système arbre tournant creux embarqué.

*a)* arbre tournant embarqué étagé ;

*b)* arbre tournant embarqué non étagé.

La figure 5.45 montre le diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué pour différentes formes géométriques de l'arbre (voir la figure 5.44).

On constate que les fréquences propres pour le cas d'un arbre non étagé sont inférieures à celles d'un arbre étagé.

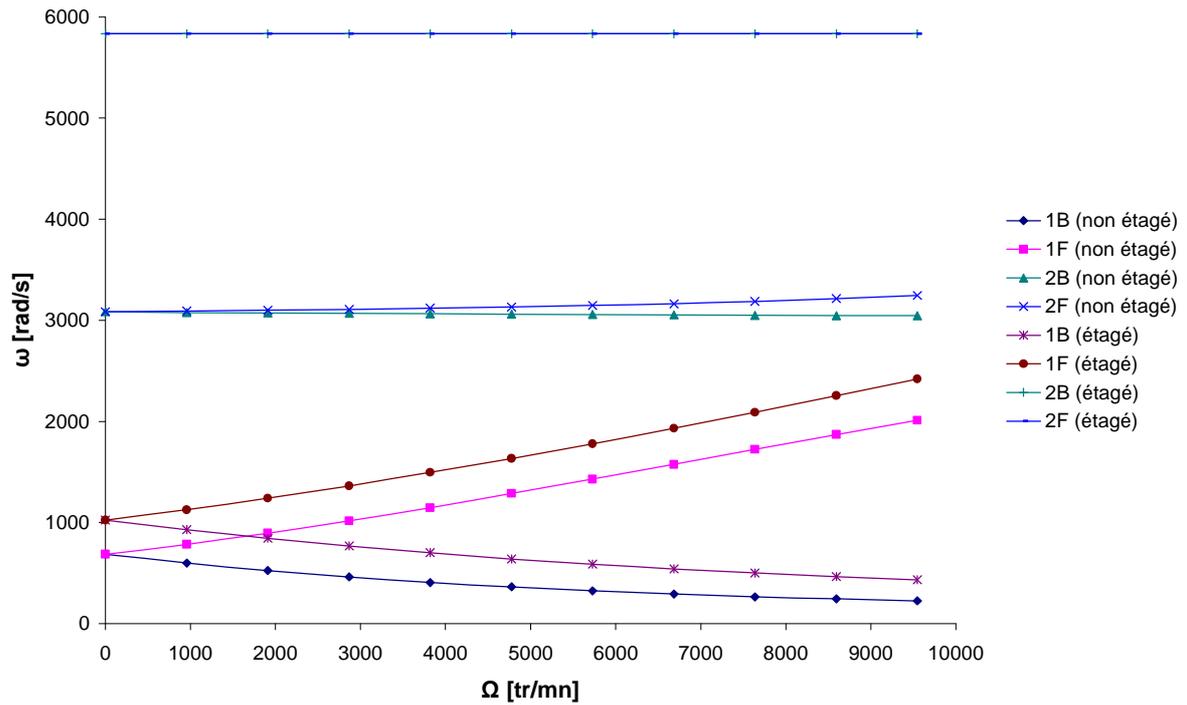


Figure 5.45 : Diagramme de Campbell des deux premières fréquences de flexion du système arbre en graphite- époxyde embarqué pour différentes formes géométriques de l'arbre.

## Conclusion

L'analyse des vibrations libres des arbres tournants en matériaux composites en utilisant la version-  $p$  de la méthode des éléments finis, avec un assemblage de la même manière que la version conventionnelle de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments, est présentée dans ce travail. Les résultats obtenus concordent avec ceux disponibles dans la littérature. Plusieurs exemples ont été traités pour déterminer l'influence des différents paramètres géométriques et physiques des arbres tournants (avec et sans disques) sur paliers (rigides ou flexibles) amortis et non amortis. Ce travail nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes:

1. La convergence monotone et uniforme est vérifiée en augmentant le nombre des fonctions de forme  $p$  et le nombre des éléments finis hiérarchiques. La convergence des solutions est assurée par l'élément poutre à deux nœuds avec des résultats qui s'accordent avec les solutions disponibles dans la littérature.
2. L'effet gyroscopique provoque un couplage des déplacements orthogonaux à l'axe de rotation ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences en rotation en deux branches, mode en précession directe et mode en précession inverse selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre. Cet effet a une influence importante sur les comportements des arbres tournants.
3. Les arbres tournants en matériaux composites doivent traverser plusieurs vitesses critiques en montée et en ralentissement.
4. Les caractéristiques dynamiques et notamment les fréquences propres, les vitesses critiques et la rigidité de flexion et de cisaillement de l'arbre tournant en matériaux composites sont influencées sensiblement en changeant l'orientation des fibres, la séquence d'empilement, l'ordre d'empilement, la longueur, le diamètre moyen, la nature du matériaux, la vitesse de rotation et les conditions aux limites.
5. La vitesse critique de l'arbre tournant en matériaux composites à paroi mince est approximativement indépendante du rapport de l'épaisseur et du diamètre moyen de l'arbre tournant.
6. Les vitesses critiques de l'arbre tournant en acier sont entre celles des arbres tournants en matériaux composites qui ont successivement l'angle de pli  $30^\circ$  et  $60^\circ$ .

7. Les paliers élastiques ont une influence très importante sur les caractéristiques dynamiques de l'arbre tournant en matériaux composites. Si les paliers présentent des rigidités différentes dans la direction radiale, on obtient pour les deux directions de plus grande rigidité différentes vitesses critiques, c'est-à-dire, que les résonances surviennent successivement dans les deux directions principales.
8. La maîtrise de comportements vibratoires nécessite une prévision des caractéristiques d'amortissement des rotors, en particulier l'amortissement des paliers. Cette prédiction est fondamentale dans la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages sécurisées en terme de vitesses de rotation.
9. Les caractéristiques dynamiques du système (arbre+disque+paliers) sont influencées sensiblement en changeant la position du disque sur l'arbre et la section de l'arbre.
10. La détermination des caractéristiques dynamiques d'un arbre tournant étagé en matériaux composites embarqué avec différentes positions du disque est assurée par notre programme de calcul.

Les perspectives d'études qui peuvent être menée à la suite de ce travail : une étude qui prend en compte l'amortissement interne dans le cas d'un rotor en FGM (Functionally Graded Materials) avec des disques flexibles, supportés par des paliers à huile et soumis à des forces perturbatrices comme les trous d'air ou séismes, etc.

## Références bibliographiques

- [1] <http://www.lightmypump.com>
- [2] <http://www.powergeneration.siemens.com>
- [3] <http://www.theautochannel.com>
- [4] N. Rieger, Past Problems of Turbines Which Led to Technology Advances, Proc. of the 25th Annual Meeting of the Vibration Inst, (2001)19-32.
- [5] C. Frederick, A. Nelson, Brief History of Early Rotor Dynamics, Sound And Vibration, Jun (2003)
- [6] W. J. McQ. Rankine, On the Centrifugal Force of Rotating Shafts, Engineer, 27 (1869) 249.
- [7] R. G. Loewy, and V. J. Piarulli, Dynamics of Rotating Shafts, Shock and Vibration Information Center, SVM-4, (1969).
- [8] S. Dunkerley, On the Whirling and Vibration of Shafts, Phil. Trans. R. Soc, London, Ser. A, 185 (1894) 279-360.
- [9] A. Foppl, Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle, Der Civilingenieur, 41 (1895) 335-342.
- [10] W. Kerr, On the Whirling Speeds of Loaded Shafts, Engineering, (1916) 150.
- [11] H. H. Jeffcott, The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed, Phil. Mag, 37, 6 (1919) 304-314.
- [12] A. R. Guido and G. Adiletta, Dynamics of a Rigid Unbalanced Rotor with Nonlinear Elastic Restoring Forces. Part I: Theoretical Analysis, Nonlinear Dynamics 19(1999) 359-385.
- [13] T. Yamamoto, and Y. Ishida, Linear and Nonlinear Rotordynamics, Wiley & Sons, (2001) 295-297.
- [14] L. Prandtl, Beitrage zur Frage der Kritischen Drehzahlen, Dingers Polytechn Journal, 333 (1918) 179-182.
- [15] A. L. Kimball, Internal Friction as a Cause of Shaft Whirling, Phil. Mag, 49 (1925) 724-727.
- [16] B. L. Newkirk, and H. D. Taylor, Shaft Whirling Due to Oil Action in Journal Bearings, Gen. Electric Rev, 28, 7 (1925) 559-568.
- [17] A. Stodola, Dampf- und Gas-Turbinen, Springer Verlag, (1924).
- [18] D. M. Smith, The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 142 (1933) 92-118.

- [19] M. A. Prohl, A General Method for Calculating the Critical Speeds of Flexible Rotors, J. Appl. Mech, 12, 3 (1945)142-148.
- [20] D. Childs, Turbomachinery Rotordynamics, Wiley & Sons, (1993) 430.
- [21] M. Reyne, Les composites, Presses Universitaires de France (PUF), Novembre 2007.
- [22] Glossaire des Matériaux Composites, Centre d'Animation Régional en Matériaux Avances -CARMA -Actualisation octobre 2006.
- [23] <http://www.mb-travaux-composite.ch>
- [24] <http://pegase.inrp.fr>
- [25] <http://www.rebar-suppliers.com>
- [26] A. Brent Strong, Fundamentals of Composites Manufacturing, Dearborn, MI: Society of Manufacturing Engineers, (1989).
- [27] A. Brent Strong, History of Composite Materials Opportunities and Necessities, Brigham Young University.
- [28] <http://www.addax.com>
- [29] <http://www.cpl-composites.com>
- [30] <http://www.compositesworld.com>
- [31] H. Zinberg, M.F. Symonds, The Development of an Advanced Composite Tail Rotor Driveshaft, Presented at the 26th Annual Forum of the American helicopter Society, Washington, DC, June1970.
- [32] H. L. M. Dos Reis, R. B. Goldman, P. H. Verstrate, Thin Walled Laminated Composite Cylindrical Tubes: Part III- Critical Speed Analysis, Journal of Composites Technology and Research. 9 (1987) 58–62.
- [33] K. Gupta, S. E. Singh, Dynamics of Composite Rotors, Proceedings of Indo-US symposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering, New Delhi, India. (1996) 59-70.
- [34] C. D. Kim, C. W. Bert, Critical Speed Analysis of Laminated Composite, Hollow Drive Shafts, Composites Engineering, 3 (1993) 633–643.
- [35] C. W. Bert, C. D. Kim, Dynamic Instability of Composite-Material Drive Shaft Subjected to Fluctuating Torque and/or Rotational Speed, Dynamics and Stability of Systems, 2(1995) 125-147.
- [36] M. Y. Chang et al, A Simple Spinning Laminated Composite Shaft Model, International Journal of Solids and Structures. 41(2004) 637–662.
- [37] C. Y Chang et al, Vibration Analysis of Rotating Composite Shafts Containing Randomly Oriented Reinforcements, Composite structures, 63 (2004) 21-32.

- [38] S. P. Singh, Some Studies on Dynamics of Composite Shafts, Ph. D Thesis, Mechanical Engineering Department, IIT, Delhi, India, 1992.
- [39] S.P. Singh, K. Gupta, Dynamic Analysis of Composite Rotors, 5th International Symposium on Rotating Machinery (ISROMAC-5), also International Journal of Rotating Machinery, 2 (1994)179-186.
- [40] S. E. Singh, K. Gupta, Experimental Studies on Composite Shafts, Proceedings of the International Conference on Advances in Mechanical Engineering, Bangalore, India. (1995)1205-1221.
- [41] S. P. Singh, K. Gupta, Composite Shaft Rotordynamic Analysis Using a Layerwise Theory, Journal of Sound and Vibration, 191, 5 (1996) 739–756.
- [42] I. Babuška, B. A Szabó, I. N. Katz, The  $p$ - Version of The Finite Element Method, SIAM Journal on Numerical Analysis, 18 (1981) 515-545.
- [43] B. A. Szabó, G. J. Sahrman, Hierarchical Plate and Shells Models Based On  $p$ - Extension, Int. J. Num. Meth, Eng. 26 (1988) 1855-1881.
- [44] B. A. Szabó, I. Babuška, Finite Element Analysis, John Wiley & Sons. Inc, New York. 1991.
- [45] L. Meirovitch, H. Baruh, On the Inclusion Principle for the Hierarchical Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng, 19 (1983) 281-291.
- [46] D. C. Zhu, Development of Hierarchical Finite Element Method at BIAA, Proc. of the International Conference on Computational Mechanics, Tokyo, I (1986) 123-128.
- [47] N. S. Bardell, The Application Of Symbolic Computing To Hierarchical Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng, 28 (1989) 1181-1204.
- [48] A. Coté, F. Charron, On the Selection of  $p$ - Version Shape Functions for Plate Vibration Problems, Computers and Structures, 79 (2001) 119-130.
- [49] A. Houmat, A Sector Fourier  $p$ - element Applied to Free Vibration Analysis of Sector Plates, Journal of. Sound and Vibration, 243 (2001) 269-282.
- [50] G. Coffignal, Mécanique Non- Linéaire et Eléments Finis, Version Electronique e.1.0, (Version 2.1b), LMSP, ENSAM, 11 Novembre 2001, <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>.
- [51] B. Drouin, J. M. Sécourt, F. Lavaste et G. Fezans, De La Mécanique Vibratoire à La Méthode des Eléments Finis, Volume 1, Afnor, 1993.
- [52] J.M. Berthelot, Matériaux Composites, Comportement Mécanique et Analyse des Structures, Masson, Paris, Deuxième édition, 1996.
- [53] M. Geradin, D. Rixen, Théorie des Vibrations, Application à La Dynamique des Structures, Deuxième édition, Masson, Paris, Octobre 1996.

- [54] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes Numériques: Algorithmes, Analyse Et Applications*, Edition 2, Springer, 2007.
- [55] Rainer Kress, *Numerical analysis*, Edition 1, Springer, 1998.
- [56] C.W. Bert, C.D. Kim, Whirling of Composite-Material Driveshafts Including Bending, Twisting Coupling and Transverse Shear Deformation, *Journal of Vibration and Acoustics*, 117 (1995) 17-21.
- [57] C.W. Bert, The Effect of Bending–Twisting Coupling on The Critical Speed Of a Driveshafts, In: *Proceedings, 6th Japan-US Conference on Composites Materials*, Orlando, FL. Technomic, Lancaster. PA (1992) 29-36.
- [58] E. Chatelet et al, A Three Dimensional Modeling of The Dynamic Behavior of Composite Rotors, *International Journal of Rotating Machinery*, 8(3) (2002)185-192.
- [59] S.P. Singh, K. Gupta, Free Damped Flexural Vibration Analysis of Composite Cylindrical Tubes Using Beam and Shell Theories, *Journal of Sound and Vibration*, 172(2) (1994)171-190.
- [60] L.W. Chen, W. K. Peng, The Stability Behaviour of Rotating Composite Shafts Under Axial Compressive Loads, *Composite Structures*, 41(1998) 253-263.
- [61] R. Sino et al, Dynamic Analysis of a Rotating Composite Shaft, *Composites Science and Technology*, 68(2) (2008) 337-345.
- [62] Gummadi Sanjay Akula Jagadeesh Kumar, *Optimum Design and Analysis of a Composite Drive Shaft of an Automobile*, Department of Mechanical Engineering, Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden, 2007.
- [63] A. A. S. Shahab, J. Thomas, Coupling Effects of Disc Flexibility on The Dynamic Behaviour of Multi Disc-Shaft Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 114(3) (1987) 435-452.

# Annexe

## Exemples d'applications

L'exemple traité dans cette annexe est celui du § 5.2.2 pour un seul élément poutre.

### Fichier d'entrée

Les données sont élémentaires, chaque donnée est entrée sous forme d'un vecteur. Dans ce cas on a pris un seul élément.

10	Nombre de fonction hiérarchiques $p$ .	
13	Nombre de mode propre désiré $N$ mode.	
0.	Vitesse de rotation de l'arbre $\Omega$ .	
1 1 0 0 1 1 1	Condition limite au nœud 1.	
2 1 0 0 1 1 1	Condition limite au nœud 2.	
2.47	Longueur de l'arbre $L$ .	
1.321E-3	Epaisseur de l'arbre $e$	
12.69E-2	Diamètre moyen de l'arbre $D$ .	
10	Nombre de couches.	
90 45 -45 0 0 0 0 0 0 90	Orientations des fibres $\eta$ .	
1967. 1967. 1967. 1967. 1967. 1967. 1967. 1967. 1967. 1967.		$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
211E9		$E_{11}$ [Pa]
24E9		$E_{22}$ [Pa]
0.36 0.36 0.36 0.36 0.36 0.36 0.36 0.36 0.36 0.36 0.36		$\nu_{12}$ [Pa]
6.9E9		$G_{12}$ [Pa]
6.9E9		$G_{23}$ [Pa]
6.9E9		$G_{13}$ [Pa]

### Fichier de sortie

LA VITESSE DE ROTATION EN tr/mn :

.0000

LES PULSATIONS PROPRES EN Hz:

96.0594

96.0594

346.1173

346.1173

414.4062

680.6951

680.6951

828.9408

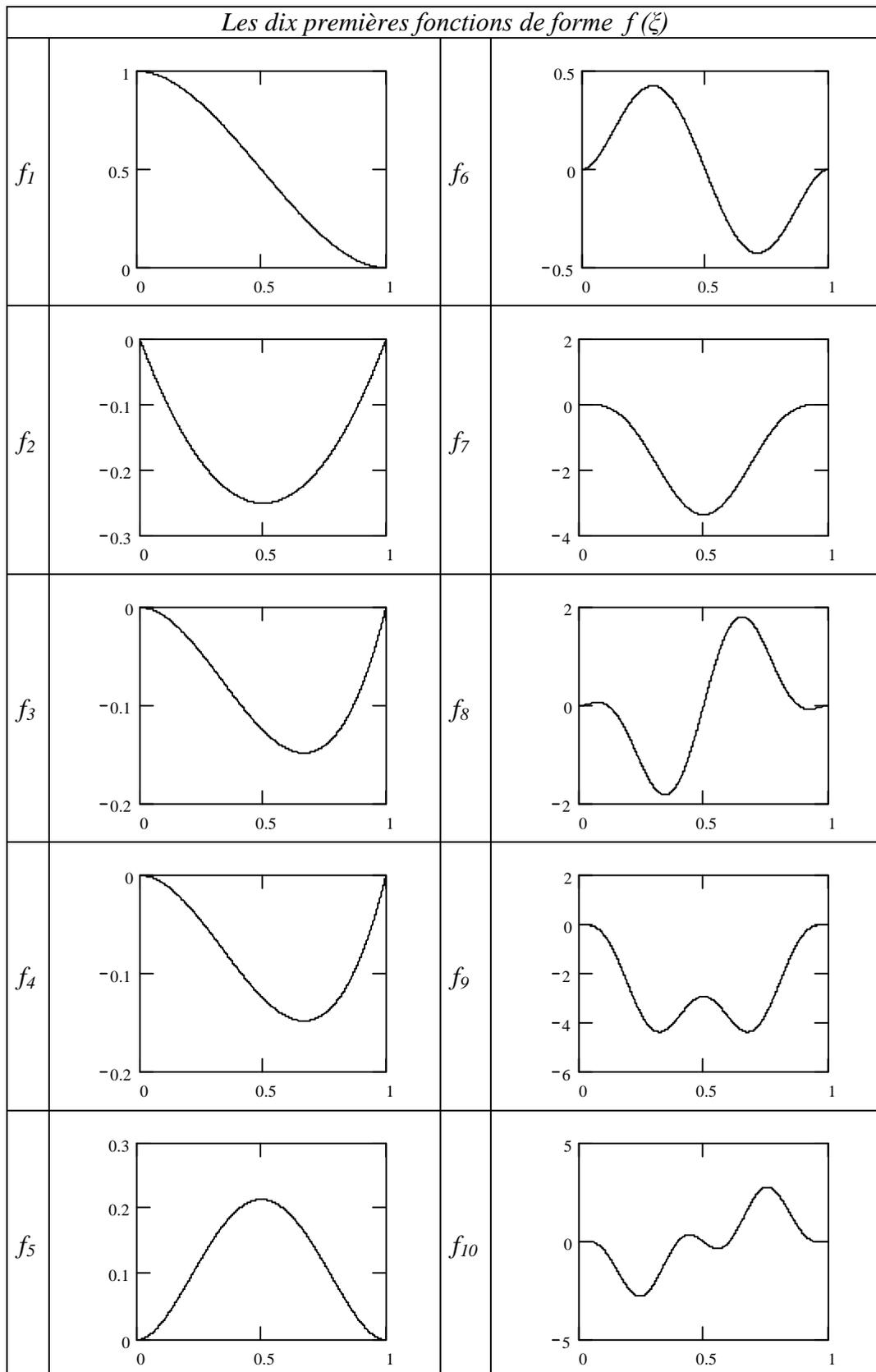
1049.2833

1049.2833

1243.4960

1429.6680

1429.6680



## Résumé

Le travail de cette thèse est consacré à l'étude du comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites embarqués, avec un disque rigide isotrope, sur paliers élastiques amortis modélisés comme ressorts et amortisseurs visqueux. Une version-  $p$  de la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser la structure. Un élément fini hiérarchique de type poutre avec six degrés de liberté par noeud est développé. L'assemblage est fait de la même manière que la version standard de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments. Une étude théorique est faite pour l'établissement de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation du système (arbre, disque et paliers) nécessaires à la détermination des équations du mouvement. Dans cette étude la déformation transversale de cisaillement, l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et l'effet de couplage dû à la stratification des couches de l'arbre en matériau composite sont pris en considération. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences propres et des vitesses critiques du système. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de la méthode utilisée. Plusieurs exemples sont traités, et une discussion est établie pour déterminer l'influence des différents paramètres étudiés et de conditions aux limites.

**Mots clés:** Arbre tournant ; Disque; Matériaux composites; Effet gyroscopique; Version  $-p$ ; MEF.

## Abstract

The work of this thesis is concerned with the study of the vibratory behavior of the rotating composite shafts. The composite shaft contains isotropic rigid disks and is supported by bearings that are modeled as springs and viscous dampers. A  $p$ - version of the finite element method is used to model the structure. A hierarchical finite element of beam type with six degrees of freedom per node is developed. The assembly is made same manner as the standard version of the finite element method for several elements. A theoretical study allows the establishment of the kinetic energy and the strain energy of the system (shaft, disk and bearings) necessary to the result of the equations of motion. In this study the transverse shear deformation, rotary inertia and gyroscopic effects, as well as the coupling effect due to the lamination of composite layers have been incorporated. A program is elaborate for the calculation of the eigenfrequencies and critical speeds of the system. The results obtained are compared with those available in the literature and show the speed of convergence, the precision and the effectiveness of the method used. Several examples are treated, and a discussion is established to determine the influence of the various parameters and boundary conditions.

**Keywords:** Rotating shaft; Composite materials; disk; Gyroscopic effect;  $p$ - version; FEM.

## ملخص

عَمَلُ هذه الأطروحة مكرس لدراسة السلوك الاهتزازي للأعمدة الدوّارة ذات المواد المركبة المحمّلة لأقراص صلبة ذات مواد موحدة الخواص، على أسندة مرنة مُنمّجة على شكل نوابض و مُخمّلات لزجة. نسخة  $p$ - لطريقة العناصر المتناهية، استعملت لنمذجة البنية. عنصر منتهي تسلسلي من فصيلة رافدة ذات عقدتين و ست درجات حرية بكل عقدة طوّرت التركيب لعدة عناصر للبنية عمل بنفس نمط النسخة المعيارية لطريقة العناصر المتناهية. دراسة نظرية استُخدمت للحصول على الطاقات الحركية و الكامنة للبنية (عمود، قرص و أسندة)، وذلك قصد الوصول إلى معادلات الحركة، آخذين بعين الاعتبار في هذه الدراسة التشوهات العرضية للقص، العطالة الدورانية، التأثيرات المدارية و تأثير التزاوج الناتج عن تنضيد طبقات العمود الدوّار ذو المواد المركبة. برنامج عددي حَقَقَ يسمح بتحديد الذبذبات الخاصة و السرعات الخطرة للبنية الواردة سابقا. النتائج المحصّل عليها و المقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع أثبتت سرعة التقارب، الدقة و فعالية الطريقة المستعملة. عدة أمثلة عُولجت و مناقشة حَققت من أجل تبين تأثير مختلف العوامل المدروسة و الشروط الحدودية للعمود الدوّار.

الكلمات الرئيسية : عمود دوار؛ قرص ؛ مواد مركبة ؛ تأثير مداري ؛ نسخة  $p$ - FEM.