

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique  
جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -  
Université Aboubaker Belkaid - Tlemcen -



Faculté de Technologie



Thèse présentée pour obtenir le diplôme de Docteur  
En Génie-Mécanique

## **Application de la méthode des éléments finis hiérarchiques à l'analyse thermo-élastique d'un panneau solaire d'un satellite**

HAMZA-CHERIF Sidi Mohammed

*Soutenu à la Faculté de Technologie en 2011 devant le jury composé de :*

<b>BOURDIM A.</b>	<b>Président</b>	<b>Maitre de conférences</b>	<b>UABT</b>
<b>HOUMAT A.</b>	<b>Directeur de thèse</b>	<b>Professeur</b>	<b>UABT</b>
<b>HADJOUI A.</b>	<b>Co-directeur de thèse</b>	<b>Professeur</b>	<b>UABT</b>
<b>RAHMANI O.</b>	<b>Examineur</b>	<b>Maitre de conférences</b>	<b>USTO</b>
<b>HAMMADI F.</b>	<b>Examineur</b>	<b>Maitre de conférences</b>	<b>U. Bechar</b>

# Remerciements

Le présent travail a été effectué à l'université Aboubekr Belkaid, faculté de technologie, au département de génie-mécanique.

Je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à terme ce présent travail.

Tout d'abord, mes remerciements s'adressent aux personnes qui m'ont proposé le sujet de thèse et qui m'ont encadré tout au long de ces années d'étude: Professeur **Houmat Abderrahim** et Professeur **Hadjoui Abdelhamid**. Au travers de nos discussions, ils m'ont apporté une compréhension plus approfondie des divers aspects du sujet. Je salue aussi la souplesse et l'ouverture d'esprit de mes directeurs de thèse qui ont su me laisser une large marge de liberté pour mener à bien ce travail de recherche.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur A. **Bourdim**, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse de doctorat, pour l'intérêt et le soutien chaleureux dont il a toujours fait preuve.

Je suis très reconnaissant à *Monsieur F. Hammadi* et *Monsieur O. Rahmani* d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à mes parents et à ma femme et à mon fils Anes que j'ai eus la chance d'avoir à mes côtés, qui m'ont soutenu tout au long de ces années de travail.

---

# Résumé

Dans l'ère actuelle, Les satellites sont devenus des outils incontournables dans le développement économique (télécommunications, positionnement, prévision météorologique), militaire (renseignement) et scientifique (observation astronomique, microgravité, observation de la Terre, océanographie, altimétrie). Les satellites en orbite sont soumis à des conditions de fonctionnement très sévères, en plus des effets de l'oxygène atomique, le rayonnement ultraviolet, la radiation électromagnétique, le vide spatial, les micrométéorites et les débris spatiaux, l'effet de l'environnement thermique peut jouer un rôle néfaste dans le bon déroulement de la mission d'un satellite. En effet, l'exposition permanente des satellites aux différents flux radiatifs solaire, terrestre et albédo provoque la déformation quasi-statique et dynamique des éléments du satellite et en particulier les panneaux solaires, ce qui peut être considéré comme une cause d'instabilité pour les satellites (le télescope Hubble constitue un exemple concret), et à long terme une source de contraintes de fatigues pouvant mettre fin à toute une mission. C'est dans ce contexte que notre travail se situe, et il a pour objectif la prédiction du comportement thermo-élastique du panneau solaire en orbite.

Dans ce but, la première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de l'environnement thermique et à la détermination des différents flux reçus par le panneau solaire (flux solaire, flux terrestre et flux albédo). La position du satellite, et son mouvement relatif par rapport à la terre et au soleil font que ses flux soient variables et dépendent principalement des paramètres orbitaux, déterminés à partir des équations de mouvement de Gauss, faisant intervenir les différentes perturbations gravitationnelles terrestre, solaire et lunaire et les perturbations de surface dues à la pression de radiation solaire et à la traînée atmosphérique. Ces équations de Gauss sont exprimées dans un repère inertiel de l'époque de référence J2000.0, le passage d'une époque à une autre met en évidence les paramètres d'orientation de la terre dans l'espace. Les phénomènes de précession, nutation, mouvement du pôle et rotation de la terre sont pris en compte dans cette étude, les calculs sont basés sur le modèle de précession-nutation IAU2000A préconisé par l'Union Astronomique Internationale.

En orbite le transfert de chaleur est conditionné par les échanges radiatifs avec le soleil et la terre. Les rayons lumineux reçus par les surfaces éclairées du panneau solaire constituent une source de déformation, en effet, la différence de températures entre les deux faces du panneau solaire donne l'apparition d'un gradient thermique au sein du panneau solaire. Dans la deuxième partie de cette thèse, la formulation du problème thermo-élastique est considérée. Le panneau solaire est modélisé par une plaque sandwich. La théorie TLT « Thermal Layers

---

Theory » est utilisée en vue de transformer le problème thermique tridimensionnel en un problème bidimensionnel. Ensuite, la méthode des éléments finis hiérarchiques est utilisée pour modéliser le transfert de chaleur dans la plaque. L'élément développé dans cette étude est un élément fini de type  $p$  rectangulaire à quatre nœuds, les degrés de liberté aux nœuds sont respectivement : la température, le gradient de température et la courbure de la température. Les fonctions de forme utilisées dans l'analyse thermique sont composées des fonctions de forme  $C^0$  de la MEF et d'un ensemble de fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques permettant d'enrichir le champ de température à l'intérieure et aux bords de l'élément. Une fois le champ de température déterminé, l'étude thermo-élastique permet d'analyser la réponse du panneau solaire à une excitation provoquée par un gradient thermique. Les énergies cinétique et potentielle du modèle permettront l'établissement des équations de mouvement. La modélisation du système étudié est faite par la version- $p$  de la méthode des éléments finis. Pour cela un élément fini hiérarchique rectangulaire à quatre nœuds est développé, les fonctions de forme utilisées sont composées des fonctions de forme  $C^0$  et  $C^1$  de la MEF et d'un ensemble de fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.

En fin, dans le troisième volet de ce travail, une étude de validation du code de calcul est faite, les résultats trouvés sont comparés aux résultats de la littérature. Les cas traités par la suite, sont relatifs à des cas concrets de satellites : NOAA, GOES-12, NAVSTAR-44 et KOMPSAT en vue de tester et de valider le code de calcul réalisé et de proposer des solutions afin d'atteindre les objectifs fixés. Deux situations sont traitées dans cette étude : la première concerne la phase de transition ombre-soleil (phase délicate pour la majorité des satellites), alors que la seconde concerne une étude détaillée durant une révolution complète du satellite. Nous avons montré à travers cette analyse que l'intégration des matériaux composites à la place de l'aluminium peut contribuer à l'amélioration du comportement thermo-élastique du panneau solaire, notamment les FGM qui présentent certains avantages par rapport aux composites multicouches. On peut citer les problèmes de délaminage et de dégazage « outgassing » des matériaux composites à matrices polymères.

---

# Abstract

In the current era, satellites have become indispensable tools in economic development (telecommunications, positioning, weather forecasting), military and scientific (astronomical observation, microgravity, Earth observation, oceanography, altimetry). Satellites in orbit are subjected to very severe operating conditions, in addition to the effects of atomic oxygen, ultraviolet radiation, electromagnetic radiation, the vacuum space, micrometeorites and space debris, the effect of the thermal environment may play a negative role in the success of the mission of a satellite. Indeed, the permanent exhibition of satellites at different radiation fluxes solar, earth and albedo causes a quasi-static deformation and dynamic vibration of the satellite elements in particular solar panels, which can be considered as a cause of instability of satellites (the Hubble Telescope is a concrete example), and in long-term a source of fatigue which can end a mission. This work aims to predict the thermo-elastic response of a solar panel in orbit.

To this end, the first part of this thesis is devoted to the study of the thermal environment and the determination of the different fluxes received by the solar panel (solar flux, earth flux and albedo flux). The satellite's position and its relative motion to the earth and sun are that fluxes are variable and depend mainly on the orbital parameters, determined from the equations of motion of Gauss, involving different gravitational perturbations, terrestrial, solar and lunar, and surface disturbances caused by solar radiation pressure and atmospheric drag. These equations are expressed in inertial frame of reference epoch J2000.0, the transition from one epoch to another highlights the earth orientation parameters in space. The precession, nutation, polar motion and rotation of the earth are taken into account in this study; computations are based on the IAU2000A precession-nutation model advocated by the International Astronomical Union.

In orbit the heat transfer is conditioned by the radiative exchange with the sun and earth. The light rays received by the illuminated surfaces of the solar panel is a source of distortion, in fact, the temperature difference between both sides of the solar panel gives a thermal gradient within the solar panel. In the second part of this thesis, the formulation of thermo-elastic problem is considered. The solar panel is modeled by a sandwich plate. The Thermal Layers Theory (TLT) is used to transform the three-dimensional thermal problems into the two-dimensional thermal problems. Next, the hierarchical finite element method is used to model heat transfer in the plate. The element developed in this study is a rectangular four node p-element, the degrees of freedom at the nodes are respectively: temperature, temperature gradient and curvature of the temperature. The shape functions used in thermal analysis are composed of  $C^0$  shape functions of the FEM and a set of trigonometric hierarchical shape functions used to enrich the temperature field

inside and at the edges of the element. Once the temperature field determined, the thermo-elastic study analyzes the response of the solar panel to excitation caused by a thermal gradient. The kinetic and potential energies of the model will enable the establishment of the equations of motion. Modeling the system under study is made by the p-version finite element method. For this purpose a hierarchical rectangular finite element with four-node is developed, the shape functions used are composed from  $C^0$  and  $C^1$  shape functions of the FEM and a set of trigonometric hierarchical shape functions.

Late in the third part of this work, a validation study of the computer code is made, the results obtained are compared with literature results. Cases treated below, are related to specific cases of satellites: NOAA-14 GOES-12, NAVSTAR-44 and KOMPSAT-44 to test and validate the computer code made and propose solutions to achieve their objectives. Two situations are considered in this study: the first situation is the phase of transition shade-sun (most delicate phase for the satellites), while the second is a detailed study during a complete revolution of the satellite. We have shown through this analysis that the integration of composite materials instead of aluminum may contribute to the improvement of thermo-elastic behavior of the solar panel, in particular FGM, which have certain advantages over the multilayer composite. One can cite the problems of delamination and outgassing of the polymer matrix composite materials.

# ملخص

في العصر الحالي، أصبحت الأقمار الصناعية أداة لا غنى عنها في مجال التنمية الاقتصادية (الاتصالات السلكية واللاسلكية، وتحديد المواقع، والتنبؤ بالطقس) والعسكرية (المخابرات) والعلمية (المراقبة الفلكية، والجاذبية الصغرى، ورصد الأرض وعلم المحيطات وقياس الارتفاعات). تتعرض الأقمار الصناعية في المدار لظروف تشغيل قاسية جداً، بالإضافة إلى آثار الأكسجين الذري، الأشعة فوق البنفسجية، الأشعة الكهرومغناطيسية، الفراغ في الفضاء، الجسيمات النيزكية الدقيقة، الحطام الفضائي، تأثير البيئة الحرارية قد يلعب دوراً سلبياً في نجاح مهمة القمر الصناعي. في الواقع، يتعرض الدائم لمختلف التدفقات لإشعاع الشمس، الأرض و البياض السطحي يعرض عناصر الأقمار الصناعية وخاصة الألواح الشمسية إلى التشوه، مما يجعله سبباً لعدم استقرار الأقمار الصناعية (تلسكوب هابل هو مثال ملموس)، ومصدراً للجهدات المتعبة على المدى الطويل قد تؤدي إلى إنهاء مهمة الأقمار الصناعية.

لهذه الغاية، خصص الجزء الأول من هذه الأطروحة إلى دراسة البيئة الحرارية وتحديد التدفقات المختلفة (الإشعاع الشمس، الأرض و البياض السطحي) التي يتلقاها اللوح الشمسي. وضع القمر الصناعي وحركته النسبية إلى الأرض والشمس تجعل التدفقات متغيرة وتعتمد بشكل أساسي على البارامترات المدارية التي تحدد من معادلات الحركة ل Gauss، التي تنطوي على مختلف الاضطرابات للجاذبية الأرضية، القمرية و الشمسية و الاضطرابات السطحية بواسطة ضغط الإشعاع الشمسي و السحب الناتج عن الغلاف الجوي.

في المدار، نقل الحرارة مشروط بالتبادل الإشعاعي مع الشمس والأرض. تعتبر أشعة الضوء التي تتلقاها الأسطح المضاءة من الألواح الشمسية مصدراً للتشويه، في الواقع، فإن الفرق في درجة الحرارة بين كلا الجانبين من الألواح الشمسية يعطي التدرج الحراري داخل الألواح الشمسية. في الجزء الثاني من هذه الأطروحة، تم صياغة المسألة مطايطي حراري. تم تصميم اللوح الشمسي على نوع لوحة شطيرة. تستخدم نظرية TLT "نظرية الطبقات الحرارية" لتحويل المشكلة الحرارية ثلاثية الأبعاد إلى مشكلة ثنائية الأبعاد. بعد ذلك يتم استخدام طريقة العناصر المحدودة الهرمية لتصميم النقل الحراري في اللوح. العنصر المطور في هذه الدراسة هو عنصر محدود من نوع-p مستطيل بأربعة عقد، درجات الحرية في العقد هي على التوالي: درجة الحرارة، والتدرج في درجة الحرارة و انحناء الحرارة. وتتكون الدوال الشكلية المستخدمة في التحليل الحراري من الدوال الشكلية  $C^0$  للطريقة العناصر المحدودة ومجموعة من

الدوال الشكلية الهرمية المثلثة تتيح إثراء نطاق الحرارة في الداخل و على حواف العنصر. بعد حساب نطاق الحرارة، تتيح الدراسة مطاطي حراري تحليل رد الفعل اللوح الشمسي إلى الإثارة التي يسببها التدرج الحراري. الطاقات الحركية والكامنة للنموذج تسمح بإنشاء معادلات الحركة. نمذجة النظام تمت باستعمال نوع-p للطريقة العناصر المحدودة. لهذا الغرض عنصر محدود من نوع-p مستطيل بأربعة عقد تم تطويره، وتتكون الدوال الشكلية المستخدمة في التحليل الحراري من الدوال الشكلية  $C^0$  و  $C^1$  للطريقة العناصر المحدودة ومجموعة من الدوال الشكلية الهرمية المثلثة. وأخيراً، في الجزء الثالث من هذا العمل، تم إجراء دراسة المصادقة على برنامج الحساب، يتم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج الأبحاث. ترتبط الحالات المعالجة أدناه، إلى حالات محددة من الأقمار الصناعية: NAVSTAR، SGOE، NOAA و KOMPSAT لاختبار والتحقق من صحة برنامج الحساب المحرز واقتراح الحلول لتحقيق الأهداف المرجوة. تم اعتبار حالتان في هذه الدراسة: الحالة الأولى هي المرحلة الانتقال ظل-شمس (مرحلة حساسة بالنسبة لمعظم الأقمار الصناعية)، في حين الحالة الثانية هي دراسة تفصيلية خلال دورة كاملة للقمر الصناعي. لقد أثبتنا من خلال هذا التحليل أن دمج المواد المركبة بدلاً من الألمنيوم يمكن أن يسهم في تحسين سلوك مطاطي حراري للوح الشمسي، خاصة FGM، التي لها مزايا معينة على مركب متعدد الطبقات. يمكننا ذكر مشاكل التبطين والتفريغ "outgassing" للمواد المركبة ذات المصفوفة البوليمرية.

# Sommaire

Résumé	i
Sommaire	vii
Liste des figures	x
Liste des tableaux	xv
Principales notations	xvii
<b>Chapitre I : Introduction générale</b>	<b>1</b>
I-1 Généralités	1
I-2 Exposé du problème	7
I-2-1 Stabilité des satellites	7
I-2-2 Anomalies de certaines missions satellitaires	10
I-2-3 Revue de littérature	15
I-3 Objectifs de l'étude et structure du manuscrit	19
I-4 Choix des matériaux	5
<b>Chapitre II : Environnement thermique du satellite en orbite</b>	<b>7</b>
II-1 Introduction	22
II-2 Modélisation de la rotation terrestre	23
II-2-1 Sphère céleste et Mouvement apparent du soleil autour de la terre	23
II-2-2 Repères et systèmes de coordonnées célestes et terrestres	25
II-2-2-1 Repère inertiel géocentrique RIG	26
II-2-2-2 Repère terrestre géocentrique RTG	28
II-2-3 Echelles de temps	29
II-2-4 Paramètres d'orientation de la terre dans l'espace	31
II-2-4-1 Phénomènes de précession et de nutation	32
II-2-4-2 Mouvement du pôle	32
II-2-4-3 Mouvement de rotation de la terre	33
II-2-4-4 Passage du RTG au RIG	32
II-3 Attitude du satellite	37
II-3-1 Repère orbital local RTN	38
II-3-2 Repère fixé au satellite RFS	39
II-3-3 Modes de navigation	39
II-3-4 Articulation du panneau solaire	41
II-3-5 Passage du repère RFS au repère RTN	42
II-4 Equations de mouvement du satellite	43
II-4-1 Mouvement képlérien	43
II-4-2 Mouvement perturbé	46
II-5 Perturbations du mouvement Képlérien	48
II-5-1 Perturbations dues au champ gravitationnel terrestre	49
II-5-1-1 Introduction	49
II-5-1-2 Modélisation du potentiel gravitationnel	50
II-5-1-3 Modèles de champ gravitationnel terrestre	54

II-5-1-4 Modélisations des forces de perturbations gravitationnelles	54
II-5-2 Perturbations dues à la lune, le soleil et les autres planètes	56
II-5-3 Perturbations dues à la traînée atmosphérique	58
II-5-3-1 Formulation de la perturbation	58
II-5-3-2 Modélisation de la densité de l'atmosphère	61
II-5-3-3 Coefficient aérodynamique	61
II-5-4 Perturbations dues à la pression de radiation solaire	64
II-5-4-1 Réflexion spéculaire	65
II-5-4-2 Réflexion diffuse	67
II-5-4-3 Modélisation de la force de pression de radiation solaire	68
II-6 Calcul des périodes d'éclipse	71
II-6-1 Phase d'éclipse	71
II-6-1-1 Ensoleillement	72
II-6-1-2 Ombre	73
II-6-1-3 Pénombre	73
II-6-2 Facteur d'éclipse	74
II-7 Ephémérides de la lune et le soleil	76
II-8 Flux thermiques	78
II-8-1 Flux solaire	78
II-8-2 Flux albédo	79
II-8-3 Flux terrestre	81
<b>Chapitre III : Formulation du problème thermo-élastique du panneau solaire</b>	<b>82</b>
III-1 Equations générales du problème thermique	82
III-2 Mécanique des solides déformables	84
III-3 Problèmes couplés	86
III-4 Analyse thermique du panneau solaire	86
III-4-1 Hypothèses générales	86
III-4-2 Tenseur de conductivité et capacités thermiques	87
III-4-3 Champs de température dans le panneau	89
III-5 Théorie des plaques sandwich	94
III-5-1 Définition	94
III-5-2 Constantes élastiques	95
III-5-1-1 Stratifiées	96
III-5-1-2 FGM	99
III-5-3 Champ de déplacement	101
III-5-4 Relations déformations-déplacements	102
III-5-5 Efforts internes	103
III-5-5-1 Efforts de membrane et moments de flexion	103
III-5-5-2 Efforts de cisaillement	105
III-5-6 Energies cinétique et de déformation	106
III-5-7 Etude dynamique du panneau solaire	107
III-5-7-1 Equations de mouvement	108
<b>Chapitre IV : Discrétisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques du problème thermique et thermo-élastique</b>	<b>110</b>
IV-1 Développement d'un élément fini de type p pour le problème thermique	110
IV-1-1 Forme discrétisée des équations de la chaleur	110

IV-1-2 Choix de l'élément et sélection des fonctions de forme	114
IV-1-3 Détermination des différentes matrices élémentaires	116
IV-1-3-1 Matrices de conduction, de convection et de rayonnement	116
IV-1-3-2 Vecteurs charges thermiques	117
IV-1-3-3 Matrice de capacitance	118
IV-2 Développement d'un élément fini de type p pour l'analyse thermo-élastique	118
IV-3-1 Choix de l'élément	118
IV-2-2 Sélection des fonctions de forme	118
IV-2-3 Détermination des matrices de rigidité	120
IV-2-3-1 Matrice de rigidité de flexion	120
IV-2-3-1 Matrice de rigidité de cisaillement	121
IV-2-4 Détermination de la matrice masse	122
IV-2-5 Détermination du vecteur force dû à l'effet thermique	124
<b>Chapitre V: Méthodologie de résolution numérique et d'élaboration d'un programme de calcul</b>	<b>125</b>
V-1 Démarche d'un schéma de résolution	125
V-2 Intégrations numériques en orbitographie	128
V-2-1 Méthodes d'intégration numérique multi-pas	130
V-2-1-1 Méthode d'intégration de Tchebychev	131
V-2-2 Méthode d'intégration de Runge-Kutta	135
V-3 Intégration numérique en analyse dynamique transitoire	136
V-3-1 Méthode d'intégration de Newmark	137
V-4 Intégration numérique en analyse thermique transitoire	139
V-4-1 Méthode PTI	139
V-5 Calcul des paramètres de fréquences	146
<b>Chapitre VI : Validations, comparaisons et analyse de cas</b>	<b>147</b>
VI-1 Validation et comparaisons des résultats	147
VI.1.1 Thermique	147
VI.1.2 Vibrations libres d'un stratifié	149
VI.1.3 Vibrations libres d'une plaque sandwich	153
VI-2 Analyse dynamique d'un panneau solaire en phase de pénombre	155
VI.2.1 Comparaison avec les résultats de Johnston	156
VI.2.2 Peaux en matériaux composites	163
VI-3 Influence de la Propagation d'orbite sur la variation du flux	168
VI.3.1 Comparaison avec la littérature	169
VI.3.2 Extrapolation d'orbite	172
VI-3-2-1 KOMPSAT	172
VI-3-2-2 GOES-12	174
VI-3-2-2 NAVSTAR-44	188
VI.3.3 Flux reçus par le panneau solaire	195
VI-4 Comportement thermo-élastique du panneau solaire du satellite KOMPSAT	196
VI.4.1 Flux reçus par le panneau solaire	196
VI.4.2 Analyse thermique	202
VI.4.3 Analyse thermo-élastique	203
VI.4.4 Peaux en matériaux composites	204
<b>Chapitre VII : Conclusions et perspectives</b>	<b>207</b>

Références bibliographiques	212
Annexe A	223
A-1 Coordonnées X(t) et Y(t) du CIP et déplacement s(t) du CEO	223
A-2 Coordonnées $x_p$ et $y_p$ du CIP dans le repère terrestre	230
A-3 Passage du repère RFS au repère RTN	231
A-4 Harmoniques sphériques et potentiel gravitationnel terrestre	231
A-5 Densité, température et composition de l'atmosphère	238
A-6 Valeurs numériques	240
Annexe B	223
B-1 Matrices de transformation	241
Annexe C	242
C-1 Fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques	242

# Liste des figures

## Introduction

- 1.1 Plate-forme et charge utile d'un satellite
- 1.2 Panneaux solaires fixés directement sur la structure du satellite
- 1.3 Cellules photovoltaïques sur une paroi mince flexible
- 1.4 Panneaux solaires flexibles du satellite HST
- 1.5 Panneau solaire rigide du satellite UARS
- 1.6 Plaque sandwich en nids d'abeilles
- 1.7 Modèle d'un panneau solaire
- 1.9 Satellite OGO-IV
- 1.10 Satellite LANDSAT
- 1.11 Perturbations du satellite HST en phase d'éclipse
- 1.12 Perturbations du satellite UARS en phase d'éclipse
- 1.13 Tube cylindrique à section ouverte du satellite OGO-IV

## Environnement thermique du satellite en orbite

- 2.1 Environnement thermique du panneau solaire
- 2.2 Sphère céleste et mouvement apparent du soleil
- 2.3 Repère RIG et coordonnées du satellite
- 2.4 Repère RTG et coordonnées du satellite
- 2.5 Phénomènes de précession, nutation et mouvement du pôle
- 2.6 Repère orbital local RTN
- 2.7 Repère fixé au satellite RFS
- 2.8 Mode de navigation airplane
- 2.9 Mode de navigation sailboat
- 2.10 Mode de navigation optimal
- 2.11 Articulation du panneau solaire
- 2.12 Paramètres de positionnement et de repérage du satellite

- 
- 2.13 Repère péricentral et anomalies
  - 2.14 Comparaison des perturbations pour les basses orbites
  - 2.15 Géoïde terrestre
  - 2.16 Configuration d'un satellite P subissant une force perturbatrice due au champ gravitationnel terrestre
  - 2.17 Position relative du troisième corps par rapport au satellite et la terre
  - 2.18 Vitesse relative du satellite et force de frottement
  - 2.19 Réflexion spéculaire
  - 2.20 Forces de PRS dans le cas d'une réflexion spéculaire
  - 2.21 Réflexion diffuse
  - 2.22 Surfaces éclairées du satellite
  - 2.23 Position relative du satellite par rapport au soleil
  - 2.24 Eclipse du satellite : phases de pénombre, d'ombre et d'enseillement
  - 2.25 Phase enseillement
  - 2.27 Phase pénombre
  - 2.28 Angles apparents du soleil et de la terre
  - 2.29 Eclipse partielle du soleil par la terre
  - 2.30 Les angles de Delaunay
  - 2.31 Rayonnement terrestre

### **Formulation du problème thermo-élastique d'un panneau solaire**

- 3.1 Milieu  $\Omega$  et ses frontières
- 3.2 Plaque hybride constituée de plusieurs couches
- 3.3 Variation quadratique de la température dans une couche  $k$
- 3.4 Conditions de continuité aux interfaces
- 3.5 Dimensions géométriques et coordonnées des couches
- 3.6 Plaque sandwich à âme creuse en nids d'abeilles
- 3.7 Dimensions géométriques de la plaque sandwich
- 3.8 Peau de la plaque sandwich en FGM

---

## **Discrétisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques du problème thermique et thermo-élastique**

- 4.1 Elément hiérarchique rectangulaire de type p pour l'analyse thermique
- 4.2 Elément hiérarchique rectangulaire de type p pour l'analyse thermo-élastique

## **Méthodologies de résolutions numériques et d'élaboration d'un programme de calcul**

- 5.1 Schéma de calcul global
- 5.2 Discrétisation du temps et point nodal
- 5.3 Schéma de calcul utilisé dans la méthode de prédiction-correction
- 5.4 Schéma de calcul utilisé dans le calcul de la matrice [A]

## **Validations, comparaisons et analyse de cas**

- 6.1 Stratifié à trois couches
- 6.2 Stratifié à trois couches encastré d'un coté
- 6.3 Paramètres orbitaux
- 6.4 Coupe transversale du panneau solaire
- 6.5 Variation de l'angle  $\eta$  en fonction du temps orbital
- 6.6 Variation de l'angle  $\eta$  en fonction du temps orbital dans la phase pénombre
- 6.7 Variation du facteur d'éclipse  $\gamma_{ecl}$  durant une orbite
- 6.8 Variation du facteur d'éclipse  $\gamma_{ecl}$  en phase de pénombre
- 6.9 Variation du flux solaire  $q_s$  en phase de transition
- 6.10 Variation de la température des deux faces du panneau solaire en phase de nombre
- 6.11 Variation du gradient de température dans le panneau solaire en phase de pénombre
- 6.12 Modélisation du panneau solaire
- 6.13 Déplacement transversal du point A du panneau solaire
- 6.14 Déformée du panneau solaire

- 
- 6.15 Variation de la conductivité thermique effective du FGM pour différentes valeurs du coefficient  $n$
  - 6.16 Variation de la température des deux faces du sandwich pour les différents matériaux utilisés
  - 6.17 Variation du gradient de température dans le panneau solaire pour les différents matériaux utilisés
  - 6.18 Déplacement transversal du point A du panneau
  - 6.19 Variation du demi grand axe ( $a$ ) du satellite NOAA-14
  - 6.20 Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite NOAA-14
  - 6.21 Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite NOAA-14
  - 6.22 Variation de l'Argument du périégée ( $\omega$ ) du satellite NOAA-14
  - 6.23 Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite NOAA-14
  - 6.24 Variation du demi grand axe ( $a$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h
  - 6.25 Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h
  - 6.26 Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h
  - 6.27 Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h
  - 6.28 Variation de l'argument du périégée ( $\omega$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h
  - 6.29 Trajectoire du satellite KOMPSAT durant 264.4h
  - 6.30 Variation du flux total  $q$  durant une orbite complète du satellite KOMPSAT
  - 6.31 Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h
  - 6.32 Variation du demi grand axe ( $a$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h
  - 6.33 Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h
  - 6.34 Variation de l'argument du périégée ( $\omega$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h
  - 6.35 Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h
  - 6.36 Trajectoire du satellite GOES-12 durant 384h
  - 6.37 Variation du flux total  $q$  durant une orbite complète du satellite GOES-12
  - 6.38 Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h

- 
- 6.39 Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h
  - 6.40 Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h
  - 6.41 Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h
  - 6.42 Variation de l'argument du périégée ( $\omega$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h
  - 6.43 Trajectoire du satellite NAVSTAR-44 durant 191h
  - 6.44 Variation du flux total  $q$  durant une orbite complète du satellite NAVSTAR-44
  - 6.45 Coupe transversale du panneau solaire du satellite KOMPSAT.
  - 6.46 Variation de l'angle  $\eta$  en fonction du temps orbital.
  - 6.47 Variation du flux radiatif terrestre  $q_t$  durant une orbite complète.
  - 6.48 Variation du flux solaire  $q_s$  durant une orbite complète.
  - 6.49 Variation du flux albédo  $q_{al}$  durant une orbite complète.
  - 6.50 Variation du flux total  $q$  durant une phase complète.
  - 6.51 Variation de la température des deux faces du panneau solaire durant une orbite complète.
  - 6.52 Variation de la température de la face supérieure du sandwich en fonction des différents matériaux utilisés.
  - 6.53 Variation du gradient de température en fonction des différents matériaux utilisés.
  - 6.54 Variation du déplacement transversal durant une révolution du satellite.

## **Annexes**

- A.1 Mouvement du pôle dans le repère terrestre (IERS).
- A.2 Fonctions harmoniques sphériques (GRGS).
- A-3 Variation de la densité de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude et de l'activité solaire (ESA 2000).
- A.4 Variation de la température de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude et de l'activité solaire (ESA 2000).
- A.5 Variation de la composition de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude (ESA 2000).
- C.1 Les six premières fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques

# Liste des tableaux

- 1.1 Anomalies dues au gradient thermique des missions satellitaires.
- 6.1 Conditions aux limites et les propriétés thermomécaniques.
- 6.2 Température aux interfaces dans un stratifié à 3 couches et comparaison avec ANSYS.
- 6.3 Propriétés mécaniques des matériaux considérés.
- 6.4 Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) avec les conditions aux limites : E-L-L-L.
- 6.5 Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) avec les conditions aux limites : E-L-L-L.
- 6.6 Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite ( $30^\circ/-30^\circ/30^\circ$ ) avec les conditions aux limites : L-L-L-L.
- 6.7 Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite ( $30^\circ/-30^\circ/30^\circ$ ) avec les conditions aux limites : L-L-L-L.
- 6.8 Propriétés mécaniques de la plaque sandwich avec les deux peaux en aluminium
- 6.9 Fréquences propres (en Hz) d'une plaque sandwich avec les deux peaux en aluminium.
- 6.10 Propriétés mécaniques de la plaque sandwich avec les deux peaux en aluminium
- 6.11 Comparaison des cinq premiers modes d'une plaque sandwich sur appuis simples.
- 6.12 Comparaison du premier mode d'une plaque sandwich sur appuis simples
- 6.13 Propriétés mécaniques et thermo-mécaniques du panneau solaire du satellite UARS.
- 6.14 Propriétés mécaniques des matériaux considérés

- 
- 6.15 Masse surfacique des différents matériaux.
  - 6.16 Paramètres orbitaux du satellite NOAA-14.
  - 6.17 Paramètres orbitaux et caractéristiques du satellite KOMPSAT.
  - 6.18 Paramètres orbitaux et caractéristiques du satellite GOES-12.
  - 6.19 Paramètres orbitaux et caractéristiques du satellite NAVSTAR-44.
  - 6.20 Propriétés mécaniques et thermomécaniques du panneau solaire du satellite KOMPSAT.
  - A.1 Coefficients polynomiaux.
  - A.2 Les 20 premiers termes du développement de  $X(t)$  en  $\mu\text{as}$  .
  - A.3 les 20 premiers termes du développement de  $Y(t)$  en  $\mu\text{as}$  .
  - A.4 les 20 premiers termes du développement de  $s + XY/2$  en  $\mu\text{as}$  .
  - A.5 Fonctions de Legendre  $P_{nm}(\sin(\phi))$  de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .
  - A.6 Modèle gravitationnel JGM-3 (20x20).
  - A.7 Valeurs numériques.

# Principales notations

Cette nomenclature regroupe les notations les plus souvent employées au cours de cette thèse

## A-Liste des symboles

### Environnement thermique du satellite en orbite

$\alpha$	Ascension droite
$\alpha$	Coefficient d'accommodation de Cook
$\alpha$	Coefficient d'absorption solaire de la surface du panneau
$\beta$	Angle entre le plan orbital et le rayon vecteur géocentrique terre-soleil
$\delta$	Déclinaison
$\varepsilon$	Coefficient d'émissivité de la surface du panneau solaire
$\varphi$	Latitude
$\eta$	Angle d'éclipse
$\theta_i$	Angle d'incidence
$\vartheta_{1,2,3}$	Angles d'Euler
$\kappa_i$	Coefficient de réflectivité diffuse de la face considérée
$\lambda$	Longitude
$\lambda_s^e$	Longitude géocentrique du soleil par rapport au repère lié à l'écliptique
$\lambda_m^e$	Longitude géocentrique de la lune par rapport au repère lié à l'écliptique
$\mu$	Constante gravitationnelle terrestre
$\mu_j$	Constante gravitationnelle du 3 <sup>ième</sup> corps (soleil, la lune et les autres planètes)
$\nu_i$	Coefficient de réflectivité spéculaire de la face considérée
$\nu$	Anomalie vraie
$\rho^*$	Distance entre un point P' quelconque de la terre au satellite
$\rho$	Densité de l'atmosphère à l'altitude du satellite
$\rho_e$	Angle apparent de la terre
$\rho_s$	Angle apparent du soleil
$\sigma$	Vitesse de rotation de la terre

---

$\sigma$	Constante de Boltzmann
$\varphi_s^e$	Latitude du soleil par rapport au repère lié à l'écliptique
$\varphi_m^e$	Latitude de la lune par rapport au repère lié à l'écliptique
$\omega$	Argument du périégée
$\theta$	Angle de rotation de la terre
$\Upsilon$	Facteur d'éclipse
$\Phi_0$	Constante solaire
$\Omega$	Ascension droite du nœud ascendant
$a$	Demi grand axe de l'ellipse
$a_{\odot}$	Rayon équatorial moyen
$a_{\oplus}$	Rayon du soleil
$c$	Vitesse de la lumière
$e$	Excentricité
$f$	Facteur albédo
$h$	Moment cinétique réduit
$i$	Inclinaison orbital par rapport au plan équatorial
$l$	Anomalie moyenne de la lune
$l'$	Anomalie moyenne du soleil
$F$	Angle entre le nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique et la lune
$D$	Elongation moyenne de la lune par rapport au soleil
$\Omega$	Longitude moyenne du nœud ascendant de la lune sur l'écliptique
$l_{Me}$	Longitude moyenne de la planète Mercure
$l_{Ve}$	Longitude moyenne de la planète Vénus
$l_E$	Longitude moyenne de la planète Terre
$l_{Ma}$	Longitude moyenne de la planète Mars
$l_{Ju}$	Longitude moyenne de la planète Jupiter
$l_{Sa}$	Longitude moyenne de la planète Saturne
$l_{Ur}$	Longitude moyenne de la planète Uranus
$l_{Ne}$	Longitude moyenne de la planète Neptune
$p_a$	Cumul de précession
$m$	Masse du satellite
$m_i$	Masse molaire du $i^{\text{ème}}$ constituant
$n$	Vitesse angulaire moyenne
$n_i$	Nombre de molécules par unité de volume
$q_s$	Flux solaire reçu par le panneau solaire
$q_{al}$	Flux albédo intercepté par le panneau solaire
$q_t$	Flux terrestre reçu par le panneau solaire
$q_{ir}$	Flux radiatif terrestre

$r$	Distance géocentrique du satellite par rapport au centre de la terre
$r_s$	Distance de référence égale à une unité astronomique
$r_{ss}$	Distance soleil-satellite
$r_s^e$	Altitude du soleil par rapport au repère lié à l'écliptique
$r_m^e$	Altitude de la lune par rapport au repère lié à l'écliptique
$s$	Ratio de vitesse moléculaire
$t_{per}$	Temps de passage au périégée
$x_p$ et $y_p$	Coordonnées du CIP dans le repère terrestre
$A_i$	Surface de la face considérée
$A_e$	Surface apparente de la terre
$A_s$	Surface apparente du soleil
$C_{Di}$	Coefficient aérodynamique de traînée de la face $i$
$C_{Da}$	Coefficient d'absorption
$C_{Dr}$	Coefficient de réémission
$\bar{C}_{nm}$ et $\bar{S}_{nm}$	Coefficients de stokes normalisés des harmoniques tesséraux
$\bar{C}_{nn}$ et $\bar{S}_{nn}$	Coefficients de stokes normalisés des harmoniques sectoriaux
$\bar{C}_{n0}$ et $\bar{S}_{n0}$	Coefficients de stokes normalisés des harmoniques zonaux
$E$	Anomalie excentrique
$F_R$	Composante radiale de la résultante des perturbations suivant la direction R
$F_T$	Composante tangentielle de la résultante des perturbations suivant la direction T
$F_N$	Composante normale de la résultante des perturbations suivant la direction N
$F_{sat-ter}$	Facteur de vue satellite-terre
$G$	Constante de gravitation universelle
$J_1, J_2$ et $J_3$	Coefficients du développement en série du potentiel terrestre
$M$	Masse de la terre
$M_j$	Masse du 3 <sup>ième</sup> corps
$M_o$	Anomalie moyenne
$N_p$	Nombre de surfaces éclairées
$P_{nm}$	Fonctions de Legendre associées
$\bar{P}_{nm}$	Fonctions de Legendre associées normalisées
$R_n$	Potentiel perturbateur
$R_T$	Ratio de température
$R$	Constante des gaz parfaits
$S_i$	Section de la surface considérée
$T$	Température de l'atmosphère
$T_i$	Température de la face $i$
$T_p$	Température de la terre
$U$	Potentiel terrestre dans le cas d'une terre non sphérique
$U_0$	Potentiel newtonien

$V_e$	Vitesse d'écoulement des molécules
$W_{mm}$	Poids moléculaire moyen
$X$ et $Y$	Coordonnées du CIP dans le RIG
$\overrightarrow{dF}_l$	Force élémentaire due au rayon incident
$\overrightarrow{dF}_{rs}$	Force élémentaire due à la réflexion spéculaire
$\overrightarrow{dF}_{rd}$	Force élémentaire due à la réflexion diffuse
$\overrightarrow{f}_G$	Vecteur forces gravitationnelles
$\overrightarrow{f}_{NG}$	Vecteur forces de surface
$\overrightarrow{f}_{pot}$	Vecteur forces de perturbation dues au champ gravitationnel terrestre
$\overrightarrow{f}_{III}$	Vecteur forces de perturbation dues au troisième corps
$\overrightarrow{f}_{PRS}$	Vecteur forces de perturbation dues à la pression de radiation solaire
$\overrightarrow{f}_{Atm}$	Vecteur forces de perturbation dues à la trainée atmosphérique
$\overrightarrow{n}_i$	Vecteur unitaire normale à la face $i$
$\overrightarrow{p}_s$	Vecteur de base
$\vec{q}$	Vecteur position du satellite dans la base pérfocale
$\vec{\dot{q}}$	Vecteur vitesse du satellite dans la base pérfocale
$\vec{r}$	Rayon vecteur terre-satellite
$\overrightarrow{r}_{s_j}$	Rayon vecteur satellite-3 <sup>ième</sup> corps
$\overrightarrow{r}_j$	Rayon vecteur géocentrique du 3 <sup>ième</sup> corps
$\overrightarrow{v}_r$	Vecteur vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère en rotation
$[Q_1]$	Matrice de passage du repère terrestre au repère céleste
$[Q_2]$	Matrice de passage du repère RTN au repère RIG
$[Q_3]$	Matrice de passage du repère RFS au repère RTN

### Formulation du problème thermo-élastique du panneau solaire

$\alpha_0^{(k)}$	Gradient de température ( $\alpha_0^{(k)} = T_{0,z}^{(k)}$ ) de la surface moyenne de la couche ( $k$ )
$\beta_0^{(k)}$	Courbure de la température ( $\beta_0^{(k)} = T_{0,zz}^{(k)}$ ) de la surface moyenne de la couche ( $k$ )
$\rho$	Densité du milieu considéré
$\theta$	Orientaion des fibres
$\delta_i$	Coordonnées du point considéré sur la frontière $\Gamma$
$\Omega$	Milieu à étudier
$\Gamma_q$ et $\Gamma_T$	Frontières du milieu $\Omega$
$c$	Capacité thermique du milieu considéré

$c_a$	Capacité thermique du constituant $a$
$c_b$	capacité thermique du constituant $b$
$c_{eff}$	Capacité effective du FGM
$f^T$	Température imposée sur la frontière $\Gamma_T$
$f^q$	Flux thermique imposé sur la frontière $\Gamma_q$
$h_p$	Epaisseur de la plaque en FGM
$n$	Exposant positif
$n_i$	Normale à la frontière $\Gamma_q$
$k_a$	Conductivité thermique du constituant $a$
$k_b$	Conductivité thermique du constituant $b$
$k_{ij}$	Composantes du tenseur de conductivité thermique
$q_r$	Flux thermique échangé par rayonnement
$q_c$	Flux thermique échangé par convection
$q_z$	Flux thermique suivant la direction $z$
$\bar{k}_{ij}$	Tenseur de conductivité thermique
$k_{eff}$	Conductivité effective du FGM
$Q$	Source de chaleur interne
$T$	Température du milieu $\Omega$
$T_c, T_r$	Température du fluide
$T(x, y, z)$	Température d'un point quelconque de la plaque
$T^{(k)}(x, y, z)$	Température d'un point quelconque de la couche ( $k$ )
$T_0^{(k)}$	Température de la surface moyenne de la couche ( $k$ )
$[T]$	matrice de transformation
$\alpha_1$ et $\alpha_2$	Coefficients thermo-élastiques suivant les directions 1 et 2
$\alpha_{eff}$	Coefficient de dilatation thermique effectif
$\rho^*$	Densité équivalente de la plaque sandwich
$\rho_{eff}$	Densité effective de la plaque
$\nu_{eff}$	Coefficient de Poisson effectif de la plaque
$\sigma_i$	Contraintes normales
$\tau_{ij}$	Contraintes tangentielles
$\omega$	Fréquence propre
$T^*_k$	Variation de température dans la couche $k$
$m$ et $n$	Cosinus directeurs

## Discrétisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques du problème thermique et thermo-élastique

$\xi, \eta$	Coordonnées adimensionnelles
$\alpha_{ij}$	Amplitudes de $\alpha_0$
$\beta_{ij}$	Amplitudes de $\beta_0$
$f_1, f_2, f_{r+2}$	Fonctions de forme hiérarchiques de continuité $C^0$
$g_1, \dots, g_{r+4}$	Fonctions de forme hiérarchiques de continuité $C^1$
$h_k$ et $h_{k-1}$	Coordonnées de chaque couche par rapport à la surface moyenne.
$h_p$	Épaisseur de la plaque
$n$	Exposant positif
$P_x$ et $P_y$	Nombre de fonctions de forme utilisé pour $T_0$
$q_x$ et $q_y$	Nombre de fonctions de forme utilisé pour $\alpha_0$
$r_x$ et $r_y$	Nombre de fonctions de forme utilisé pour $\beta_0$
$s_x$ et $s_y$	Nombre de fonctions de forme utilisé pour $w_0^s$
$t_x$ et $t_y$	Nombre de fonctions de forme utilisé pour $w_0^b$
$u$ ( $v$ )	Déplacement longitudinal
$u_0, v_0$	Déplacements membranaires de la plaque sandwich
$w_0^b$	Déplacement transversal dû à la flexion de la plaque
$w_0^s$	Déplacement transversal dû à l'effet de cisaillement de l'âme
$w$	Déplacement transversal
$w$	Fonction de pondération
$A_{ij}$	Rigidités de membrane
$D_{ij}$	Rigidités de flexion
$E_{eff}$	Module de Young effectif de la plaque
$E_C$	Energie cinétique
$E_{C1}$	Energie cinétique relatif au mouvement transversal
$E_{C2}$	Energie cinétique relatif au mouvement de rotation
$E_m$	Module d'élasticité longitudinal de la matrice
$G_f$	Module de cisaillement de la fibre
$G_m$	Module de cisaillement de la matrice
$I_b$	Moment d'inertie équivalent de la plaque sandwich
$I_p$	Moment d'inertie du stratifié
$I_a$	Moment d'inertie de l'âme
$L$	Lagrangien du système
$N_H$	Nombre de couches du stratifié
$N^{\Delta T}$	Forces de membrane dues à la variation de température $\Delta T$

$PM_a$	Propriétés mécaniques du matériau 1
$PM_b$	Propriétés mécaniques du matériau 2
$T_{ij}$	Amplitudes de $T_0$
$U$	Energie de déformation
$U_f$	Energie de déformation relative à la flexion
$U_s$	Energie de déformation relative au cisaillement
$U_{\Delta T}$	Energie de déformation relative à l'effet de température
$V_f$	Fraction volumiques de la fibre
$V_m$	Fraction volumiques de la matrice
$V_a$	Fraction volumique
$V_x$ et $V_y$	Efforts de cisaillement dans l'âme
$W$	Travail des forces extérieures
$W_{ij}$	Amplitudes de $w_0^s$
$Z_{ij}$	Amplitudes de $w_0^b$
$[C_{cp}]$	Matrice de capacitance
$[K]$	Matrice de rigidité de la plaque sandwich
$[K_{cd}]$	Matrice de conduction
$[K_{cv}]$	Matrice de convection
$[K_{rd}]$	Matrice de rayonnement
$[K_{ps}]$	Matrice de rigidité de la plaque sandwich
$[K_f]$	Matrice de rigidité de flexion
$[K_s]$	Matrice de rigidité de cisaillement.
$[M]$	Matrice masse de la plaque sandwich
$[M_{ps}]$	Matrice masse de la plaque sandwich
$[M_1]$	Matrice masse relative au mouvement transversal
$[M_2]$	Matrice masse relative au mouvement de rotation
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
$[Q]$	Matrice des constantes élastiques
$\{F(t)\}$	Vecteur forces extérieures dues à l'effet thermique
$\{q(t)\}$	Vecteur déplacement généralisé
$\{\ddot{q}(t)\}$	Vecteur accélération généralisée
$\{Q\}$	Vecteur charge thermique.
$\{Q_{cv}\}$	Vecteur charge thermique convectif
$\{Q_{rd}\}$	Vecteur charge thermique radiatif

$\{Q_q\}$	Vecteur charge thermique relatif à la source de chaleur
$\{Q_B\}$	Vecteur charge thermique relatif à la température imposée
$\{\bar{\theta}\}$	Vecteur des coordonnées généralisées

### Méthodologies de résolutions numériques et d'élaboration d'un programme de calcul

$\alpha, \delta$	Paramètres d'intégration de Newmark
$\varepsilon$	Précision
$\theta_j$	Pas de temps exprimé sous forme angulaire
$g_k(\cos \phi)$	Fonctions de Tchebychev
$h$	Pas de discrétisation
$m$	Entier pris égale à 20
$x_j$	Point nodal de l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$
$\{q_i\}$	vecteur des déplacements généralisés à l'instant $t_i$
$\{\dot{q}_i\}$	vecteur des vitesses généralisées à l'instant $t_i$
$\{\ddot{q}_i\}$	vecteur des accélérations généralisées à l'instant $t_i$

## B-Liste des abréviations

ABAQUS	Abaqus Finit element analysis
ANSYS	ANalysis SYStem
ASTM	American Society for Testing and Materials
$A_r$	Argon
BWSM	Box Wing Satellite Macro-model
CEO	Celestial Ephemerid Origin
CIP	Celestial Intermediate Pole
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales
DORIS	Détermination d'Orbite et Radio-Positionnement Intégré sur Satellite
DTM	Drag Temperature Model
ELP	Ephéméride Lunaire Parisienne
ENVISAT	ENVironnemental SATellite

EOP	Earth Orientation Parameters
FGM	Functionally Graded Materials
EJ	Époque julienne 13/05/2010
FK5	Fondamental Catalogue 5
GCRS	Geocentric Celestial Reference System
GEM	Goddard Arth Model
CHAMP	CHallenging Mini satellite Payload
GSFC	Goddard Space Flight Center
GPS	Global Positioning System
GMST	Greenwich Mean Sidereal Time
GST	Greenwich Sidereal Time
GFZ-Potsdam	GeoForschungs Zentrum Potsdam
GRGS	Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GRIM	GRavity model IMprovement
H	Hydrogène
H <sub>e</sub>	Hélium
HST	Hubble Space Telescope
HOTBIRD	Réseau de satellites de télédiffusion et radiodiffusion européen
ICRF	International Celestial Reference Frame
IERS	International Earth Rotation Service
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
J2000	Date de référence correspondant au 1 <sup>er</sup> Janvier 2000 à 12h UT
JD	Julien Date
JGM	Joint Gravity Model
KOMPSAT	KOrea Multi-Purpose SATellite
LANDSAT	LAND SATellite
LLR	Lunar Laser Ranging
MEF	Méthode des Eléments Finis
MHB2000	Modèle de Matthews, Harring et Buffet
MSC/PATRAN	CAE Modeling and Pre/Post Processing
NASTRAN	
MSISE	Mass Spectrometer-Incoherent Scatter

---

N <sub>2</sub>	Nitrogène
NASA	National Aeronautical ans Space Administration
O	Oxygène
OGO	Orbital Geophysical Observatory
ONERA	Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
PRS	Pression de Radiation Solaire
PTI	Precise Time Integration
QUASARS	QUAsi-StellAire Radio Source
ROCK	ROCKwell International Corporation : GPS satellite solar radiation pressure models
RTN	(Radial, Transverse, Normal) orbit-fixed frame
RTG	Repère terrestre géocentrique
STEM	Storable Tubular Extendable Member
SLR	Satellite Laser Ranging
TAI	Temps Atomique International
TLE	Two Lines Element
TRANSIT	Système américain de navigation par satellites
TRASYS	Thermal Radiation Analysis SYStem
TT	Terrestrial Time
TEO	Terrestrial Ephemerid Origin
TOPEX/Poseidon	Ocean TOPography EXperiment
UARS	Upper Atmospheric Research Satellite
UAI	Union Astronomique Internationale
UA	Unité Astronomique
UT	Universal Time
UTC	Universal Time Coordinated
VANGUARD	Satellite américain lancé en 1957
VLBI	Very Long Baseline Interferometry
mas	milli arc seconde
$\mu$ as	Micro arc seconde
2D	Bidimensionnel
3D	Tridimensionnel

# Chapitre I

## Introduction Générale

*Dans l'introduction de cette thèse, nous donnons d'abord le cadre dans lequel se place ce travail, nous retraçons ensuite l'historique du problème thermo-élastique des panneaux solaires des satellites et enfin nous offrons un plan des chapitres suivants.*

### I-1 Généralités

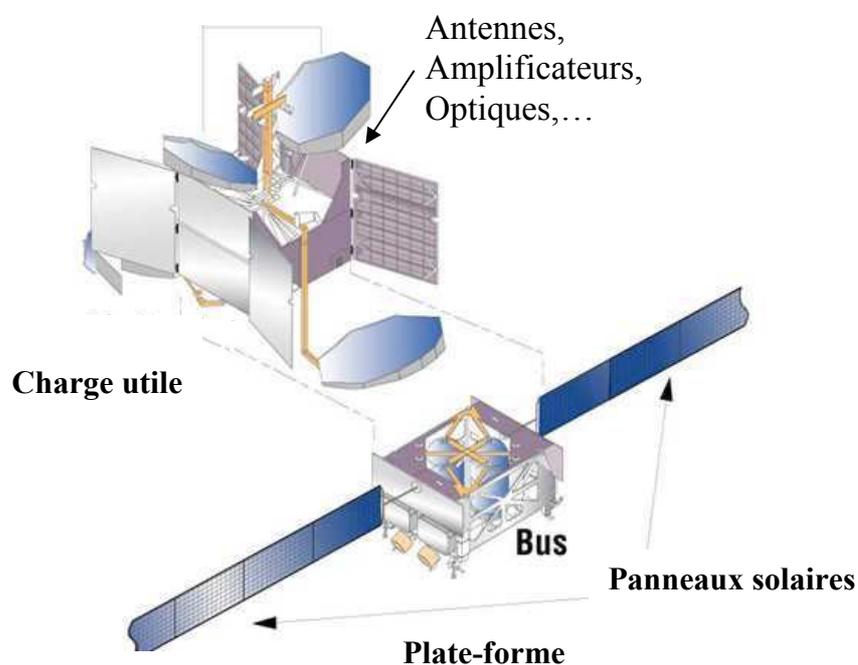
Le 4 octobre 1957 l'URSS a lancé le premier satellite artificiel orbitant autour de la terre, c'est le satellite Spoutnik I. Cette date fut le point de départ de la course vers l'espace, depuis cette époque plus de 6000 satellites ont été placés en orbite. Les satellites sont devenus des outils incontournables dans le développement économique (télécommunications, positionnement, prévision météorologique), militaire (renseignement) et scientifique (observation astronomique, microgravité, observation de la Terre, océanographie, altimétrie). La construction de satellites a donné naissance à une industrie très spécialisée mais les instruments les plus complexes sont encore souvent réalisés par des laboratoires de recherche. La conception d'un satellite est un processus qui peut prendre plusieurs années. Les coûts de fabrication sont élevés, et qui peuvent atteindre les centaines de millions d'euros.

Les principales caractéristiques d'un satellite sont son orbite, sa plate-forme, sa charge utile, sa masse et sa durée de vie opérationnelle. L'orbite d'un satellite est généralement choisie en fonction de la mission prévue. Elle peut prendre différentes formes, les plus utilisées sont : héliosynchrone, géostationnaire, elliptique, circulaire. On parle aussi d'orbite basse, moyenne et haute. Un satellite est constitué de deux sous-ensembles (voir figure 1.1): une charge utile, définie spécifiquement pour la mission qu'il doit remplir, elle regroupe les instruments nécessaires tels que : antennes et amplificateurs pour un satellite de télécommunications, instrument d'optique pour l'observation de la Terre, etc. ; et

d'une plate-forme, ou « bus », souvent standardisée assurant les fonctions de support comme la fourniture d'énergie, la propulsion, le contrôle thermique, le maintien de l'orientation et les communications. La masse d'un satellite est un des principaux facteurs de coût. La masse maximale a longtemps été limitée par la capacité des lanceurs. Les progrès techniques permettent aujourd'hui de mettre en orbite des satellites plus lourds, capables de remplir des missions toujours plus sophistiquées (satellites scientifiques), avec une grande autonomie. Les satellites les plus massifs sont les satellites de télédétection, en orbite basse, qui peuvent atteindre 20 tonnes, des satellites de reconnaissance militaire (KH-11, 19,6 tonnes) ou civils (ENVISAT, 8 tonnes). La durée de vie d'un satellite est liée au type de mission. Un satellite de télécommunications récent (par exemple HOTBIRD 10 mis en orbite début 2009) est construit pour fonctionner une quinzaine d'années tandis qu'un satellite d'observation, comme ceux de la série Spot, est construit pour une durée de vie de 5 ans. La fin de vie d'un satellite est souvent liée à l'épuisement des ergols qui lui permettent de maintenir son orbite sur une trajectoire nominale et d'orienter ses instruments. Les autres équipements vulnérables sont les batteries qui, sur certains types de missions, peuvent être épuisées par des cycles de charge/décharge répétés et l'électronique. Le fonctionnement de certains satellites scientifiques (télescope infrarouge...) utilise de l'hélium liquide embarqué pour le refroidissement qui une fois épuisé entraîne l'arrêt de l'instrument. Les pannes peuvent être également à l'origine d'un arrêt total ou partiel du fonctionnement d'un satellite. Une étude effectuée sur les satellites géostationnaires pour la période 1965-1990 recense la défaillance totale de 13 satellites géostationnaires et 355 pannes partielles (Lebègue 1991). Ces pannes touchent dans 39 % des cas la charge utile, 20 % le système de contrôle de l'orientation et de l'orbite, 9,6 % la propulsion, 9,3 % l'alimentation électrique et 9,2 % des composants mécaniques. Ces défaillances ont pour origine la conception (25 %), l'environnement (22 %) ou encore les composants (16 %).

En plus de la structure du satellite, le système de contrôle thermique, le système de contrôle d'attitude et d'orbite (SCAO), la gestion du bord qui pilote le fonctionnement du satellite et le système de propulsion ; la plate-forme est équipée d'un système de production de l'énergie. En effet le satellite doit disposer d'énergie électrique pour le fonctionnement de la charge utile et de la plate-forme. Les besoins en énergie électrique varient en fonction de la taille des satellites et du type d'application. Les plus gourmands sont les satellites de télécommunications qui consomment énormément d'énergie en amplifiant les signaux reçus. Les satellites d'observation utilisant des radars ont besoin également de beaucoup

d'énergie mais de manière irrégulière. Les satellites mettant en œuvre des instruments d'observation passifs (télescopes spatiaux...) sont les moins exigeants, la puissance nécessaire étant comprise entre 1 et 15 kW, une valeur relativement basse, grâce au recours à une électronique basse puissance sophistiquée. La puissance électrique est généralement fournie par des panneaux solaires utilisant l'énergie solaire. Les rayons incidents venus du soleil sont convertis en énergie électrique par l'intermédiaire de cellules photovoltaïques imbriquées à l'intérieur du panneau solaire.



**Figure 1.1 :** Plate-forme et charge utile d'un satellite.

La technologie des panneaux solaires a beaucoup évolué depuis leur première utilisation en espace, sur le satellite VANGUARD en 1958. Actuellement, Les missions satellitaires sont devenues plus complexes et exigent plus d'énergie électrique. Ce qui a poussé les chercheurs à développer des panneaux selon le besoin. Deux catégories de panneaux sont utilisées : ceux qui sont fixés sur le corps du satellite, et ceux qui sont attachés au satellite. Alors, pour générer le

maximum d'énergie, dans le premier cas on utilise les faces du satellite comme support pour les cellules photovoltaïques (la surface du panneau solaire est égale à la surface de la face), voir figure 1.2. Notons que dans ce cas le panneau n'est pas orientable ce qui limite par conséquent la surface totale de production d'énergie. Dans le deuxième cas, la surface est beaucoup plus grande et plusieurs configurations sont possibles (voir figures 1.4 à 1.10) avec bien sûr la possibilité d'orienter le panneau solaire en vue de capter le maximum de rayons lumineux. La technologie à panneaux multiples avec déploiement est actuellement la plus utilisée. Actuellement la recherche est focalisée sur la structure, les mécanismes de déploiement ainsi que sur les cellules photovoltaïques.

Les cellules photovoltaïques sont interposées de deux façons :

- sur une paroi flexible (film ou stratifié en carbone/époxy très mince) attachée à un cadre métallique formé de tubes extensibles appelés STEM, utilisé pour assurer la rigidité du panneau, c'est le cas par exemple du satellite HST, voir figures 1.3 et 1.4.
- sur une structure rigide, généralement sous forme de plaque sandwich, c'est le cas du satellite UARS (voir figure 1.5).

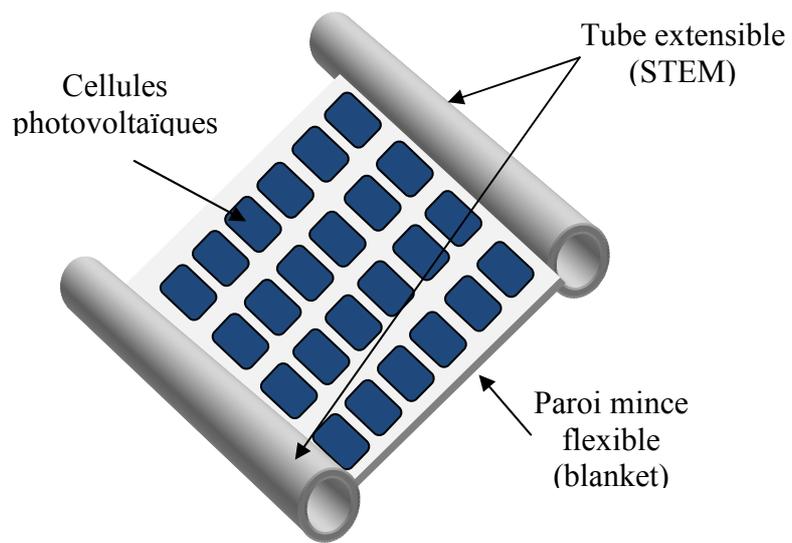


**Figure 1.2** : Panneaux solaires fixés directement sur la structure du satellite (NASA).

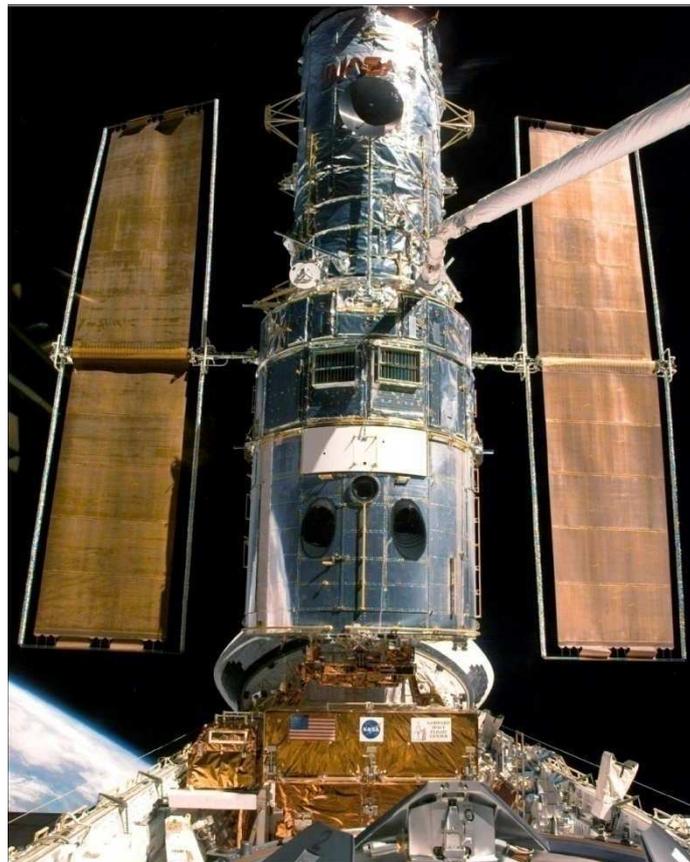
Mécaniquement la structure doit être légère, rigide et stable et en plus elle doit résister aux différentes contraintes de l'environnement spatial. Les plaques sandwich en nids d'abeilles (voir figure 1.6) sont les plus adaptées aux exigences structurales. Dans la suite de l'étude, la structure sous forme de plaque sandwich en nids d'abeilles est considérée. La face éclairée du panneau est munie de cellules photovoltaïques pour la conversion de l'énergie solaire en énergie électrique. Elle est couverte d'une couche de protection (coverglass) contre les effets de la radiation solaire qui se traduisent par une dégradation des propriétés optiques des cellules. Une couche en polyamide est utilisée entre les cellules photovoltaïques et la plaque sandwich. L'autre face du panneau solaire est couverte d'une couche de protection ou d'une peinture contre l'érosion provoquée par l'oxygène atomique. Pour coller les différentes couches du panneau solaire on utilise généralement un film adhésif résistant aux ultraviolets. Le modèle géométrique d'un panneau solaire est donné par la figure 1.7.

Le choix des matériaux est très important dans ces conditions de fonctionnement car toute défaillance dans le panneau solaire peut provoquer l'échec de toute la mission. Pour cela, un soin minutieux doit être pris lors de la conception, de la phase lancement jusqu'au fonctionnement en orbite. La sélection des matériaux dans ce cas doit répondre au besoin de contrer ces effets indésirables (Silverman 1995).

- *Ame du sandwich* : l'alliage d'aluminium (5056 2 ou 5056 h38) est utilisé comme matériau dans la fabrication de l'âme du sandwich.
- *Peaux du sandwich* : Les peaux sont fabriquées en :
  - aluminium renforcé (2024-T3 ou 6061),
  - en composite à matrice polymère : graphite/époxy (HFGCU-125NS ou carbone/époxy (T300-956 ou 934).
- *Kapton* : couche en polyamide.
- *Peintures blanches* : en céramique z-93 ou en YB-71.
- *Adhésifs* : l'époxy ou la silicone est utilisée pour la fabrication des adhésifs.
- Cellules photovoltaïques : sont faites en gallium arsenide (GaAs/Ge).



**Figure 1.3 :** Cellules photovoltaïques sur une paroi mince flexible.



**Figure 1.4 :** Panneaux solaires flexibles du satellite HST (NASA).



Figure 1.5 : Panneau solaire rigide du satellite UARS (NASA).

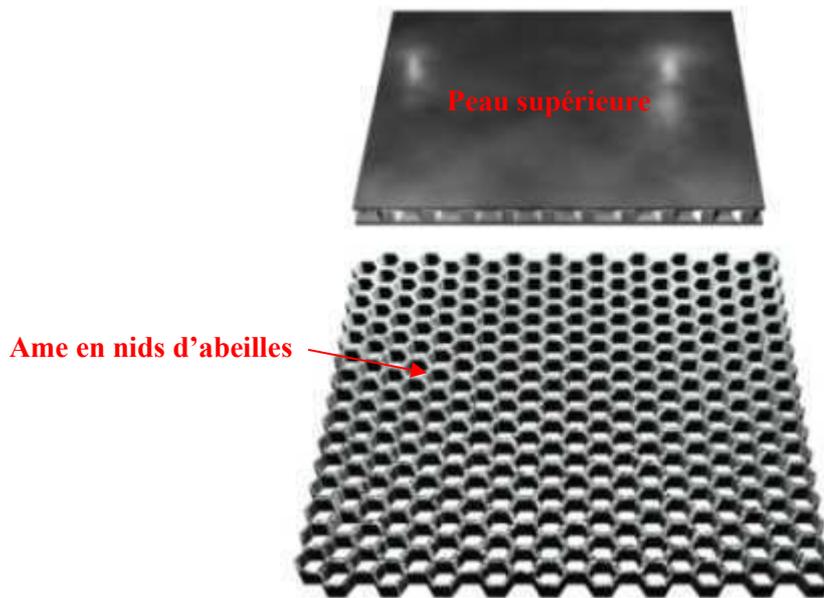
## I-2 Exposé du problème

### I-2-1 Stabilité des satellites

En 1605, Kepler identifie par observation les orbites des planètes à des ellipses de foyer le soleil. Plus tard, en 1667, Newton qui retrouvera par le calcul différentiel les trajectoires coniques, en déduira la loi de la gravitation, et confirmera toutes les lois de Kepler, ouvrant ainsi la voie à la conquête spatiale.

Les satellites, une fois éjectés vers l'espace orbitent autour de la terre. Dans le modèle képlérien la seule force appliquée sur le satellite est l'attraction terrestre et l'orbite est généralement elliptique ou circulaire même si cette dernière est pratiquement impossible à obtenir. Dans la réalité ces deux hypothèses sont fausses ; l'expérience montre que les structures spatiales sont soumises à d'autres forces telles que les forces de frottement avec l'atmosphère, les forces dues à la pression de radiation solaire, l'attraction de la lune, le soleil et les autres planètes. Les études montrent que les accélérations causées par les forces autres que

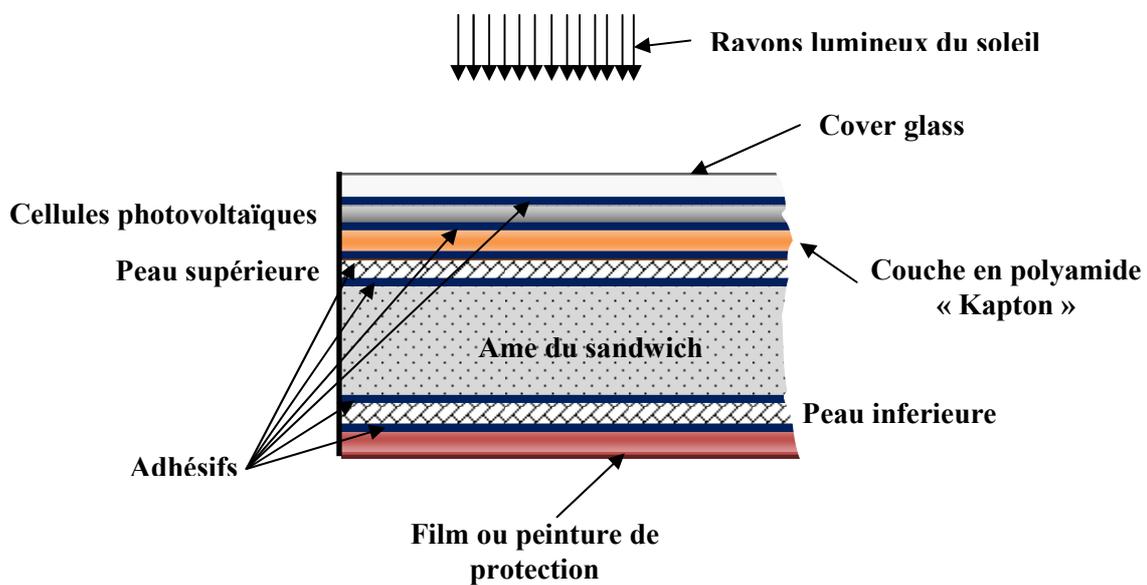
l'attraction centrale sont faibles devant l'accélération képlérienne. C'est pourquoi on considère que les autres forces sont des perturbations du mouvement.



**Figure 1.6 :** Plaque sandwich en nids d'abeilles.

Les missions satellitaires, devenues plus sophistiquées exigent une stabilité parfaite du satellite afin d'achever correctement leurs tâches. Le télescope Hubble constitue un exemple concret, la précision exigée du pointage est de l'ordre 0.007 arc-sec (précision jamais atteinte dans d'autres missions), considéré comme un défi pour les chercheurs de la NASA. Pour contrecarrer les effets perturbateurs, les satellites sont munis d'un système de contrôle d'attitude et d'orbite (SCAO). En effet, le satellite est suivi par un centre de contrôle au sol, qui envoie des instructions et recueille les données collectées grâce à un réseau de stations terrestres. Pour remplir sa mission le satellite doit se maintenir sur une orbite de référence en orientant ses instruments de manière précise. Le contrôle d'attitude (orientation angulaire) dans ce cas est important pour que le système optique par exemple reste pointé vers la zone au sol dont on veut obtenir une image. Or le satellite a tendance à se dépointer sous l'action de couples produits par la pression de radiation solaire, le frottement atmosphérique, etc... Il faut donc contrôler activement l'orientation angulaire mais aussi assurer une stabilité de cette

orientation pour éviter l'effet de "bougé" sur les images, par exemple. Le contrôle est assuré en permanence par une boucle d'asservissement : des capteurs mesurent l'orientation du satellite, le calculateur de bord traite ces mesures et établit les commandes qui, exécutées par les actuateurs, doivent maintenir un pointage parfait. Par conséquent, un bon fonctionnement du satellite nécessite que sa stabilité soit confinée durant toute sa durée de vie, ce qui n'est pas une tâche facile.



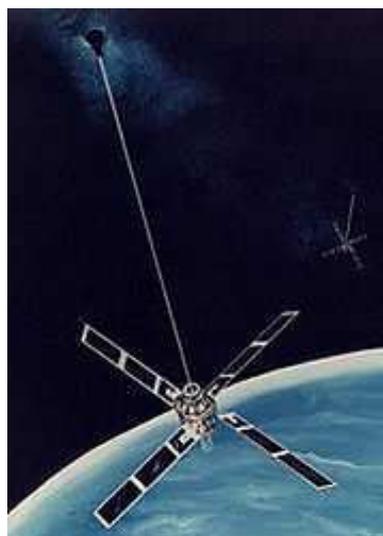
**Figure 1.7 :** Modèle d'un panneau solaire.

D'autres perturbations peuvent parvenir du satellite lui-même : en effet, le mouvement de vagues provoqué par l'ergol liquide au sein du réservoir est une source de perturbations pour le satellite. Pendant les manœuvres de corrections d'orbite ou d'orientation, les éléments flexibles (barre stabilisatrice, antennes, paraboles, panneaux solaires) sont excités par le système de propulsion. Attachés aux satellites, ils transmettront à leur tour leurs vibrations au satellite. Cette situation n'est pas unique, en effet, l'exposition permanente du satellite aux flux radiatifs : terrestre, solaire et albédo et son passage rapide de la phase froide à la phase chaude (ou l'inverse) donnent naissance à un gradient thermique au sein des éléments flexibles du satellite, qui a tendance à les déformer.

## I-2-2 Anomalies de certaines missions satellitaires

Nous savons que pour un maximum d’approvisionnement en électricité les satellites sont équipés de panneaux solaires très larges. Pour un satellite en orbite autour de la Terre, il faut en moyenne  $40 \text{ m}^2$  de panneaux solaires pour fournir 10 kW. Les dimensions peuvent atteindre 40m de longueur et 3m de largeur, mais par contre l’épaisseur reste très faible afin de ne pas trop charger le satellite. En effet, les concepteurs de satellites ont depuis toujours, été confrontés à de très fortes exigences de poids. Dès lors, ces concepteurs se sont orientés vers les matériaux légers tels que les matériaux composites, et les structures minces. L’obligation de respecter ces critères fait que les panneaux solaires sont très flexibles. Cette flexibilité est souvent à l’origine des problèmes de pointage et d’instabilité du satellite (Wright 1981), car toute déformation du panneau due à un gradient thermique (les deux faces du panneau ont des températures différentes, donc des allongements différents, d’où flexion du panneau) se traduit par une transmission d’un couple au satellite, d’où réaction du système de contrôle d’attitude qui a tendance à conserver le moment cinétique du satellite.

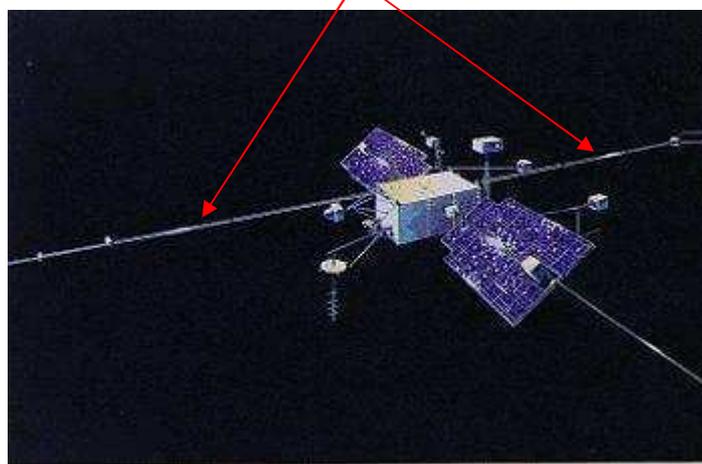
Ce phénomène fut observé pour la première fois en 1963 lors du lancement du satellite TRANSIT-5A (voir figure 1.8), lancé dans le but de tester les théories de stabilisation par gradient de gravité. Le passage du satellite de l’ombre à l’ensoleillement produisait des oscillations de la barre stabilisatrice qui se traduisaient par une erreur de pointage de l’ordre de  $5^\circ$  tous les 15 secondes.



**Figure 1.8 :** Satellite TRANSIT 5A (NASA).

Lancé en 1967, le satellite OGO-IV a subi le même phénomène. A chaque fois que le satellite passait à l'ombre (ou sortait de l'ombre), le système de contrôle était soumis à des perturbations qui faisaient déstabiliser le satellite. Après étude, la NASA a mis en évidence la cause principale de ces vibrations, en effet la barre de fixation des instruments de mesure utilisés dans cette mission (voir figure 1.9), de longueur de 18.288m, était vulnérable au changement brutal de température, ce qui a causé sa déformation, d'où instabilité du satellite.

Barre de fixation des instruments de mesure

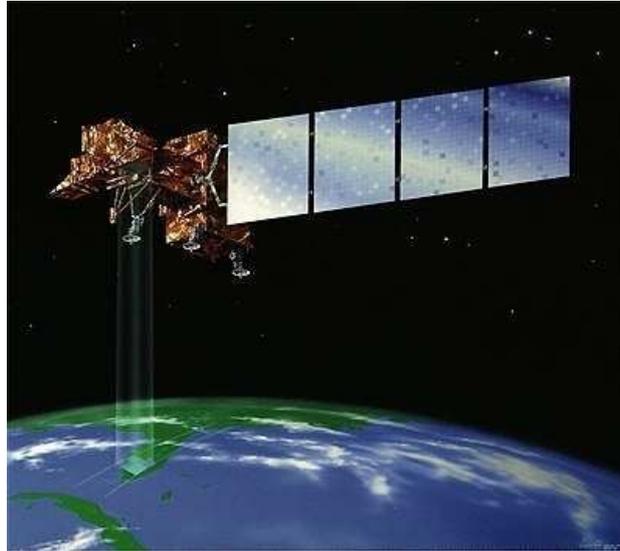


**Figure 1.9** : Satellite OGO-IV (NASA).

Après et en 1980, les deux satellites LANDSAT 4 et 5 ont subi le même phénomène. Le panneau solaire du satellite (voir figure 1.10) a subi une déformation dynamique flexionnelle due à un gradient thermique.

De même les satellites HST et UARS n'ont pas échappé à la règle. Le satellite HST est mis en orbite en 1990, il est muni de deux grands panneaux solaires (40mx3m), voir figure 1.4. Dès sa mise en orbite les scientifiques de la NASA ont détecté des anomalies de transmission lors du passage de la zone chaude vers la zone froide (Sawyer 1990 ; Asker 1990 ; Polidam 1991). La figure 1.11 montre les oscillations du satellite pendant la phase de transition (entre 19.61 et 19.67) due à la vibration des panneaux solaires. Ces vibrations ont causé la mise à l'arrêt des

deux panneaux solaires après une courte période d'utilisation, ce qui a obligé la NASA à les remplacer en 1994.



**Figure 1.10 :** Satellite LANDSAT (NASA).

La figure 1.12 montre les perturbations du satellite UARS suivant les trois axes : de roulis, de tangage et de lacet. Le satellite est muni d'un seul panneau solaire, on voit bien que les accélérations du satellite sont plus prononcées au moment de la phase de transition qui dure environ 45 secondes. Ces perturbations sont dues principalement à la flexion du panneau solaire en cette phase. Notons que cette déformation se fait sans vibration. Les deux figures 1.11 et 1.12 montrent aussi des perturbations légères hors la phase d'éclipse dues à l'action de couples produits par l'environnement en orbite (pression de radiation solaire, frottement avec l'atmosphère, etc...)

Le tableau 1.1 suivant résume les anomalies dues au gradient thermique rencontrées dans diverses missions satellitaires (Thorton 1996).

Le constat réalisé après ces missions se résume comme suit :

- Une déformation quasi-statique «*thermal flutter*» du panneau solaire due à une variation très lente du gradient thermique, ce cas est observé dans le cas des satellites utilisant le principe du gradient de gravité (barre

stabilisatrice munie d'une masse), la flexion de la barre est provoquée par une variation très douce du gradient ce qui va entraîner par la suite la perturbation du satellite.

- Un choc thermo-élastique, déformations sans vibrations de la structure, dû à une variation très rapide du gradient thermique «*thermal snap*», se produit généralement en phases de transition.
- Des vibrations, provoquées par le changement brusque, et très rapide du gradient thermique «*thermally induced vibrations*».
- Des vibrations instables du panneau solaire «*stick-slip motion*».

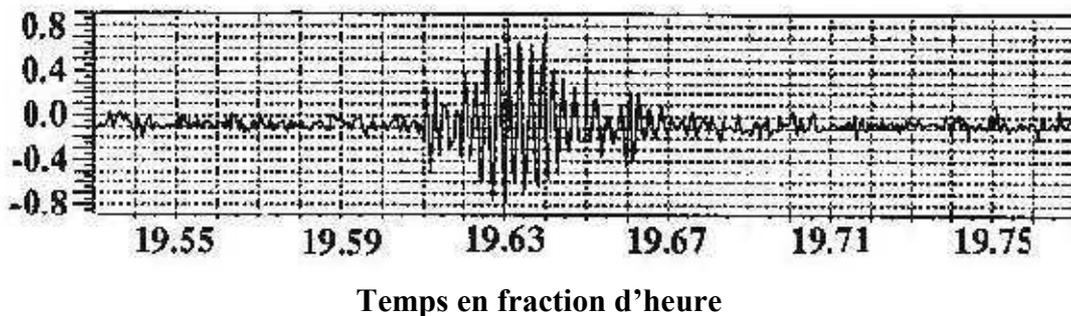


Figure 1.11 : Perturbations du satellite HST en phase d'éclipse (Foster et al. 1995).

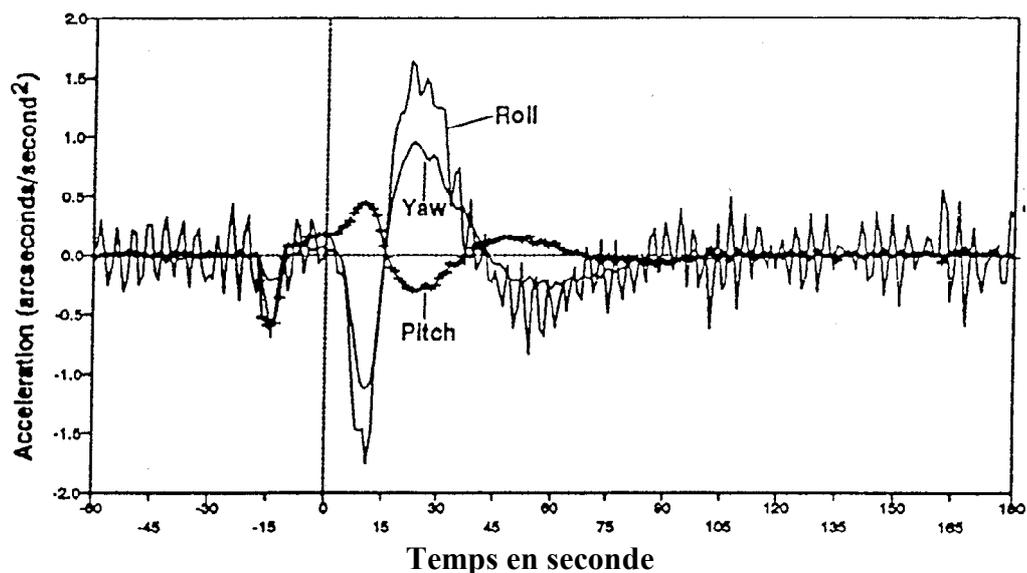


Figure 1.12 : Perturbations du satellite UARS en phase d'éclipse (Lambertson et al. 1993).

**Tableau 1.1** : Anomalies dues au gradient thermique des missions satellitaires.

Missions	Année	Observations
TRANSIT 5A	1963	Oscillations de la barre stabilisatrice durant le passage ombre/soleil.
EXPLORER XX	1964	L'interaction entre la flexion du STEM et la pression de radiation a provoquée la décadence de la rotation du satellite.
OV-10	1966	La déformation quasi-statique de la barre stabilisatrice (gradient de gravité) a désorientée le satellite d'une rotation complète.
OGO-IV	1967	Vibrations du STEM durant le passage ombre/soleil.
NRL 161-63-64	1969	Les vibrations de la barre stabilisatrice (gradient de gravité) ont provoqué les perturbations du satellite.
EXPLORER 45	1971	Nutation du satellite due à la flexion des quatre barres flexibles.
APOLLO 15	1971	Vibrations des deux bi-STEM.
VOYAGER	1977	Petites oscillations du boom.
CTS	1978	Choc Thermo-élastique durant le passage ombre/soleil.
LANDSAT 4 et 5	1980	Choc thermo-élastique du panneau solaire durant le passage ombre/soleil.
HST	1990	Vibrations des deux panneaux solaires durant le passage ombre/soleil.
UARS	1991	Choc thermo-élastique du panneau solaire durant le passage ombre/soleil.
ULYSSES	1991	Les vibrations de la barre axiale ont provoqué la nutation du satellite.
ADEOS	1996	La rupture du panneau solaire « Stick-slip motion » a causé l'arrêt définitif de la mission.

### I-2-3 Revue de littérature

Le comportement thermo-élastique des structures mécaniques poutres, plaques et coques a été largement étudié depuis une cinquantaine d'années, pour cela seules quelques références seront citées. Les premiers travaux sur le sujet reviennent à Boley (Boley 1956), il a étudié la réponse dynamique d'une poutre mince soumise à un chargement thermique uniforme. Par la suite d'autres chercheurs ont contribué au développement de nouvelles formulations (cas des structures poutres, plaques et coques, isotopes et composites,...). Pour plus de détails le lecteur pourra consulter les références suivantes : (Jones 1966 ; Stroud 1971 ; Bargmann 1974 ; Manolis 1980 ; Namburu 1991 ; Jianping 1993 ; Ko et Kim 2003 ; Vinson 2005).

Par la suite nous allons focaliser notre recherche bibliographique sur les structures spatiales. Les problèmes de stabilité rencontrés avec le satellite OGO-IV ont poussé pour la première fois les chercheurs du centre GSFC de la NASA à étudier avec un grand intérêt l'influence de l'environnement thermique provoqué par les rayons solaires sur le comportement thermo-élastique de la barre de fixation des instruments de mesures afin de remédier aux problèmes de stabilité du satellite. Il a fallu attendre jusqu'en 1967 pour voir apparaître les premières publications de Frisch et Donahue qui traitent et analysent le phénomène rencontré durant la mission du satellite OGO-IV. En effet, les premiers travaux de Frisch (Frisch 1967) concernaient le comportement en flexion et en torsion d'une barre à gradient de gravité « *Gravty Gradient Boom* » modélisée par une poutre longue à section circulaire creuse et ouverte (voir figure 1.13), soumise à l'effet du flux solaire pendant la phase d'enseillement. L'étude montre que la barre à gradient de gravité n'est pas stable et admet plusieurs positions d'équilibre du moment qu'à chaque fois que la barre se déforme, de nouvelles conditions de chargement thermique s'imposent.

Donahue et Frisch (Donahue et Frisch 1969 ; Frisch 1970) ont étudié le comportement dynamique d'une poutre longue à section circulaire creuse et ouverte (barre à gradient de gravité). L'étude montre que le gradient thermique dans la barre varie suivant deux directions : la circonférence et l'axe de la barre. Un couplage flexion-torsion aura lieu, ce qui signifie que la poutre va se déformer et prendre une nouvelle position dans l'espace et un nouveau chargement thermique va être appliqué à la barre. Cette situation fait que la position d'équilibre dynamique n'est pas stable, ce qui veut dire que la poutre peut être

entraînée à la résonance. Ainsi, les résultats des deux auteurs ont confirmé le phénomène subit par le satellite.

Graham a étudié l'effet du rayonnement solaire sur la stabilité des membres flexibles (STEM) de satellites, soumis aux vibrations transversales (Graham 1970). Flatley a étudié l'effet thermo-élastique sur la stabilité du satellite Explorer 45. Bainum et al. ont étudié la flexion d'une poutre et d'une plaque soumise à un chargement thermique brutal en vue de prédire son effet sur l'attitude du satellite (Bainum et al 1980). Chambers et al. ont développé une méthode simple pour la détermination du gradient thermique afin de l'utiliser dans une analyse de déformation des structures spatiales (Chambers et al. 1981).



**Figure 1.13 :** Tube cylindrique à section ouverte du satellite OGO-IV.

Malla et ses coéquipiers ont étudié l'effet des radiations solaires sur le mouvement orbital et les déformations axiales des structures axialement flexible (Malla et al. 1988). Zimbelman et ses coéquipiers ont étudié l'effet des déformations d'un panneau solaire sur le contrôle du satellite TOPEX. Le couple perturbateur en phase de transition ombre/ensoleillement est donné sous forme analytique en fonction du gradient thermique et ses deux dérivées premières par rapport au temps. Le panneau solaire est modélisé par une poutre encasté d'un coté et libre de l'autre coté. Les températures des deux faces du panneau sont déterminées à partir des relevés in-situ grâce à des capteurs placés sur le panneau solaire. Ces températures permettent de calculer le gradient thermique. La vibration du panneau solaire n'est pas traitée dans ce travail (Zimbelman et al 1991).

Johnston et Thornton ont développé un modèle analytique unidimensionnel très simplifié pour l'analyse des vibrations d'un panneau solaire en phase de transition du froid au chaud. Le panneau est modélisé par une plaque sandwich composée d'une âme et de deux peaux, et fixée à un disque rigide représentant le satellite. Les cellules photovoltaïques, coverglass et les adhésifs ne sont pas considérés dans l'étude. Selon le modèle proposé le transfert de chaleur s'effectue suivant l'épaisseur de la plaque, la température est considérée constante dans les deux peaux (gradient nul), et varie seulement dans l'âme. L'expression du gradient thermique en régime transitoire est approximée par une expression analytique, ce qui permet de calculer le moment de flexion induit. Dans ce modèle la flexion de la plaque est supposée cylindrique ce qui permet de réduire le problème à une dimension. Le mouvement rigide de rotation du satellite est couplé au mouvement de flexion du panneau, les équations de mouvement du système sont déterminées à partir de la forme généralisée des équations de Lagrange (Johnston et Thornton 1998).

La deuxième étude proposée par ses deux auteurs (Johnston et Thornton 2000) concerne le comportement dynamique (choc thermo-élastique) d'un panneau solaire provoqué par une variation très rapide du gradient thermique pendant la phase de transition ombre/ensoleillement. Les résultats de l'analyse montre que le panneau se déforme très rapidement et prend plusieurs positions d'équilibre (déformation quasi-statique) à chaque pas de temps jusqu'à atteindre une position d'équilibre stable, la déformation du panneau s'effectue sans oscillations. Dans cet article, le panneau solaire est modélisé par une plaque hybride (plaque sandwich avec adhésifs, cellules photovoltaïques et coverglass), les deux peaux de la plaque sont supposées isotropes. La distribution de température en régime transitoire est déterminée par la méthode des éléments finis en utilisant ABAQUS, 25 éléments linéaires à deux nœuds sont utilisés pour modéliser le transfert de chaleur suivant l'épaisseur de la plaque. Par contre le transfert de chaleur longitudinal est négligeable. Dans la partie mécanique, les auteurs supposent que la flexion du panneau est cylindrique, ainsi le problème est réduit à une dimension. Une expression très simpliste du moment de flexion provoqué par le gradient thermique est donnée. Les équations de mouvement sont déterminées à partir de la forme généralisée des équations de Lagrange. Pour valider le modèle proposé, une étude expérimentale est présentée.

L'étude menée par Shin et ses coéquipiers concerne la réponse dynamique du panneau solaire du satellite KOMPSAT induite par les différents flux : terrestre,

solaire et albédo. Dans cette étude, les auteurs ont utilisés le code TRASYS pour la simulation de l'environnement thermique en orbite, les différents flux sont déterminés par la suite. Pour l'analyse thermique et mécanique, la méthode des éléments finis est utilisée, le code MSC/PATRAN est utilisé pour la modélisation géométrique et la discrétisation en éléments finis du panneau solaire, alors que le code ABAQUS est utilisé pour déterminer la distribution de la température et la déformation du panneau solaire. L'objectif de l'étude consistait à remplacer les peaux en aluminium par un stratifié à plusieurs couches en graphite/époxy et de comparer ensuite les déformations. La dégradation des propriétés mécaniques et thermomécaniques du matériau composite due aux effets du vide spatial est introduite dans l'étude. Les résultats trouvés mettent en évidence l'intérêt des matériaux composites par rapport à l'aluminium dans le cas du satellite KOMPSAT (Shin et al. 2001).

Song et ses coéquipiers ont étudié l'influence de l'orientation des fibres sur les vibrations d'un boom en matériaux composites, une étude analytique est proposée. Le boom est modélisé par une poutre de section creuse, avec une masse attachée à son extrémité et fixé à l'autre extrémité. L'effet de cisaillement est considéré dans le modèle de poutre utilisé (Song et al. 2003).

Xue et al. ont présenté en détails les vibrations couplées flexion-torsion des panneaux solaires flexibles du satellite HST. Le panneau est composé de deux booms et d'une paroi mince et flexible (blanket) sur lequel sont collées les cellules photovoltaïques. Le boom est modélisé par une poutre mince, cylindrique à section creuse, la théorie d'Euler-Bernoulli avec gauchissement est développée, alors que la paroi flexible est modélisée par une membrane (Xue et al. 2006). La méthode des éléments finis est utilisée dans la résolution du problème thermique et mécanique. Pour la détermination de la distribution de température en régime transitoire suivant l'axe et la circonférence de la poutre, et la réponse dynamique, un élément fini à deux nœuds est utilisé.

La méthode des éléments finis est utilisée dans l'analyse des vibrations non linéaires du panneau solaire du satellite HST en phase de transition (Li et al. 2006). Un élément fini à deux nœuds est utilisé dans l'analyse thermique et dynamique. Le couplage thermo-élastique entre la déformée et le flux normal incident est considéré dans l'analyse. Dans le même ordre d'idées la stabilité du système est étudiée.

Allegri a étudié l'effet de l'environnement spatial : l'oxygène atomique, le rayonnement UV, le vide spatial, le plasma et le cycle thermique sur le

comportement thermo-élastique d'un panneau solaire. L'action d'érosion de l'oxygène atomique et du plasma sur les films de protection du panneau solaire est déterminée expérimentalement. Les résultats obtenus sont considérés dans l'analyse thermo-élastique. Le panneau solaire est modélisé par une plaque sandwich en nids d'abeilles, les deux peaux sont réalisées en matériaux composites (stratifiés) : carbone/époxy. La méthode des éléments finis (code NASTRAN) est utilisée pour déterminer la distribution de la température dans le panneau, ainsi que pour la résolution du problème thermo-élastique, pour cela un élément fini 3D est utilisé. Les résultats trouvés montrent que l'érosion provoquée par l'oxygène atomique modifie énormément l'équilibre thermique du panneau solaire et par la suite son comportement thermo-élastique, d'où risque d'endommagement du panneau solaire (Allegri et al. 2007).

### **I-3 Objectifs de l'étude et structure du manuscrit**

L'étude bibliographique menée a permis d'avoir une connaissance générale du problème. Cela nous amène au sujet de notre thèse. Cette étude concerne la modélisation du comportement thermo-élastique d'un panneau solaire soumis aux conditions de l'environnement thermique en orbite. Une connaissance de ce comportement permet de résoudre les problèmes de stabilité des satellites et permet d'éviter à long terme les problèmes de fatigue. Nous nous sommes fixés comme objectifs le développement d'un code de calcul capable de prédire :

- Les éphémérides du satellite,
- Les différents flux reçus par le panneau solaire,
- Le gradient thermique dans le panneau solaire,
- Les déplacements statiques et dynamiques du panneau solaire.

Cette étude a porté parallèlement sur le développement de deux éléments finis hiérarchiques pour l'analyse thermique et mécanique. Ce n'est toutefois pas le seul aspect original, nous en avons relevés un autre : l'intégration des FGM dans la conception du panneau solaire.

La thèse est organisée en sept chapitres :

Après ce chapitre d'introduction, dans le chapitre II de cet ouvrage, nous allons décrire la démarche retenue permettant de déterminer les différents flux reçus par le panneau solaire : flux solaire, terrestre et albédo. La première étape consiste à modéliser la rotation terrestre, les repères et systèmes de coordonnées célestes et

terrestres seront définis. C'est dans ces repères de l'espace et en fonction de ces coordonnées que les équations de mouvement d'un satellite seront écrites. Nous allons par la suite présenter les paramètres d'orientation de la terre en vue de déterminer la matrice de passage du repère terrestre au repère céleste, en tenant compte des phénomènes de précession, nutation et mouvement du pôle. Une fois que nous avons modélisé la rotation terrestre nous allons établir les équations de mouvement de Gauss en fonction des éléments osculateurs, en présence des perturbations dues au champ gravitationnel terrestre, à la lune, au soleil, à la traînée atmosphérique et à la pression de radiation solaire. Et en fin de ce chapitre nous allons présenter le modèle d'ombre conique pour le calcul d'éclipse.

Le chapitre III est consacré à la formulation du problème thermique d'un panneau solaire. Les équations générales du problème thermique sont posées, en respectant certaines hypothèses relatives à notre cas. Le panneau solaire est modélisé par une plaque composite hybride dont le champ de température est exprimé en fonction de la température  $T_0$ , du gradient  $T_{0,z}$  et de la courbure de température  $T_{0,zz}$  de la surface moyenne de la première couche de la plaque. Cette transformation nous sera nécessaire dans la suite de l'étude, en vue de transformer le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel dans la modélisation par éléments finis.

Le quatrième chapitre présente l'analyse thermo-élastique d'une plaque sandwich. Le modèle de plaque utilisé prend en compte l'effet de cisaillement dans l'âme. L'énergie de déformation est déterminée en considérant la loi de comportement de Duhamel-Neuman, alors que l'énergie cinétique est calculée en tenant compte de l'inertie de rotation de la section droite de l'âme. Le principe d'Hamilton est utilisé dans la détermination des équations de mouvement libre et forcé.

Le cinquième chapitre est consacré à la formulation du problème thermique et mécanique par la méthode des éléments finis hiérarchiques. La première partie de ce chapitre est consacrée au développement d'un élément fini hiérarchique rectangulaire pour l'analyse thermique, trois degrés de liberté par nœuds sont utilisés : la température  $T_0$ , le gradient  $T_{0,z}$  et la courbure  $T_{0,zz}$  de la température. L'avantage de cet élément 2D est sa capacité de résoudre les problèmes thermiques 3D ce qui constitue une originalité de cette thèse. Les fonctions de forme utilisées sont construites sur la base d'un élément linéaire unidimensionnel à deux nœuds. Les fonctions hiérarchiques trigonométriques permettent d'enrichir le champ de température à l'intérieur et aux bords de l'élément. La seconde partie de

ce chapitre est consacrée à la formulation d'un élément fini hiérarchique à quatre nœuds pour l'analyse thermo-élastique. Les matrices de rigidité et masse et le vecteur force enrichis sont déterminés.

Dans le sixième chapitre, les méthodes numériques utilisées pour résoudre les problèmes formulés auparavant sont développées. Un schéma de calcul est présenté en détails. Composés de trois modules, le premier module est utilisé pour calculer les différents flux reçus par le panneau solaire. Dans ce module, les équations de mouvement de Gauss sont résolues par la méthode d'intégration de Tchebychev en conjonction avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, utilisée pour amorcer la première. Le deuxième module concerne le calcul thermique en transitoire, la méthode PTI est explicitée et utilisée pour déterminer la distribution de la température au sein du panneau solaire. Alors que la méthode de Newmark est utilisée pour calculer la réponse dynamique du panneau solaire dans le troisième module.

Le septième chapitre exposera l'ensemble des applications choisies pour illustrer le travail effectué. La première partie du septième chapitre met en évidence la validité du programme développé. Ainsi, une étude comparative est faite avec différents travaux d'autres auteurs. La deuxième partie fait l'objet d'une étude thermo-élastique d'un panneau solaire dans les conditions de l'environnement en orbite. Les cas étudiés sont relatifs à des cas concrets de satellites : NOAA, NAVSTAR, GOES et KOMPSAT en vue de tester et de valider le code de calcul réalisé et de proposer des solutions à fin d'atteindre les objectifs fixés au chapitre I.

Nous clôturerons évidemment cette thèse par un ensemble de conclusions et de perspectives de recherche.

# Chapitre II

## Environnement thermique du satellite en orbite

*Nous présenterons dans ce chapitre l'environnement thermique du satellite ainsi que la démarche à suivre pour calculer les différents flux reçus par le panneau solaire.*

### II-1 Introduction

En orbite le transfert de chaleur dans le panneau solaire est conditionné par les échanges radiatifs avec le soleil et la terre, et aussi par le flux thermique aérodynamique provoqué par le frottement des molécules de l'atmosphère avec les parois du satellite.

Les rayonnements externes venus du soleil et de la terre qui éclairent les panneaux solaires constituent la source principale de chaleur. Le flux solaire direct hors atmosphère est essentiellement situé dans le spectre visible (90%) et infrarouge (10%). Le flux albédo est constitué par le flux solaire réfléchi par la terre et les nuages. Son spectre est de même nature que celui du soleil avec quelques bandes d'absorption dues à la traversée de l'atmosphère et la nature des surfaces réfléchissantes. Du point de vue thermique, la terre vue de l'espace est équivalente à une sphère de 18°C environ. Elle émet en permanence un rayonnement électromagnétique dans le spectre infrarouge. La figure 2.1 schématise ces flux. A l'altitude des satellites, le fond du ciel est noir. L'ensemble du rayonnement (gamma, x, ultraviolet, visible, infrarouge et radio) qui proviennent du fond du ciel représentent un total d'énergie extrêmement faible. Le fond du ciel à -270°C constitue la principale source froide pour les satellites. Cet environnement radiatif entraîne des variations extrêmes de températures dans les panneaux solaires des satellites.

Pour les altitudes inférieures à 250 km le flux thermique aérodynamique peut être considéré comme une source de chaleur non négligeable du fait que l'atmosphère est plus dense. Mais par contre, pour les hautes altitudes cet effet n'est pas pris en compte (Fortescue and Starck, 1995).

Le flux thermique reçu par les parois du satellite dépend de plusieurs facteurs parmi lesquels on peut citer : l'altitude du satellite, la position relative du satellite par rapport au soleil et la terre, phase d'éclipse,...

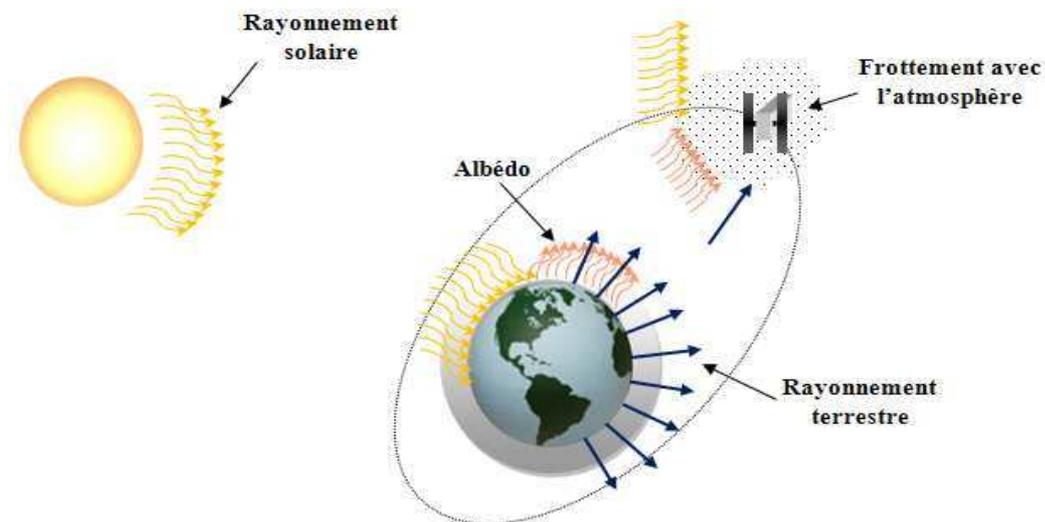


Figure 2.1 : Environnement thermique du panneau solaire.

## II-2 Modélisation de la rotation terrestre

### II-2-1 Sphère céleste et Mouvement apparent du soleil

Le système solaire est composé du soleil formé il y a 4,55 milliard d'années et de corps célestes de dimensions variables qui orbitent soit autour du soleil, soit autour d'autres corps célestes. Dans le système solaire, 9 planètes orbitent autour du soleil parmi eux la terre.

La terre est une sphère qui tourne sur elle même et qui se déplace avec une vitesse variable sur une orbite elliptique de faible excentricité dont le soleil occupe

l'un des foyers de cette ellipse. Son déplacement angulaire par jour est plus grand au voisinage du périhélie et plus faible au voisinage de l'aphélie. Le plan de l'orbite terrestre est appelé plan écliptique. Pour une révolution complète autour du soleil la terre met environ 365,25 jours. Pendant cette révolution, l'axe de rotation de la terre, axe joignant les deux pôles reste quasi parallèle avec lui même avec une inclinaison quasi constante avec l'écliptique.

Vu depuis la terre, le ciel est considéré comme étant une sphère dont le centre est le centre de la terre sur la quelle les objets célestes sont contenus, voir figure 2.2. Le soleil, la lune et les planètes sont en mouvement au cours du temps alors que les étoiles semblent être fixes, c'est l'observation naturelle depuis la terre. Cette sphère est appelée sphère céleste, avec un pôle nord et un pôle sud qui sont la prolongation des pôles terrestres et un équateur qui est la projection de l'équateur terrestre. Le cercle de référence principal ou grand cercle est l'équateur céleste qui délimite les hémisphères Nord et Sud. L'écliptique projeté sur la sphère céleste est la courbe sur la quelle le mouvement apparent du soleil, de la lune et des autres planètes semble avoir lieu. Ce mouvement est appelé respectivement trajectoire solaire, lunaire et planétaire.

L'équateur céleste coupe l'écliptique en deux points: L'équinoxe vernale et l'équinoxe d'automne. L'équinoxe vernale est la position du soleil au début du printemps de l'hémisphère nord. La ligne joignant les deux équinoxes est appelée la ligne vernale.

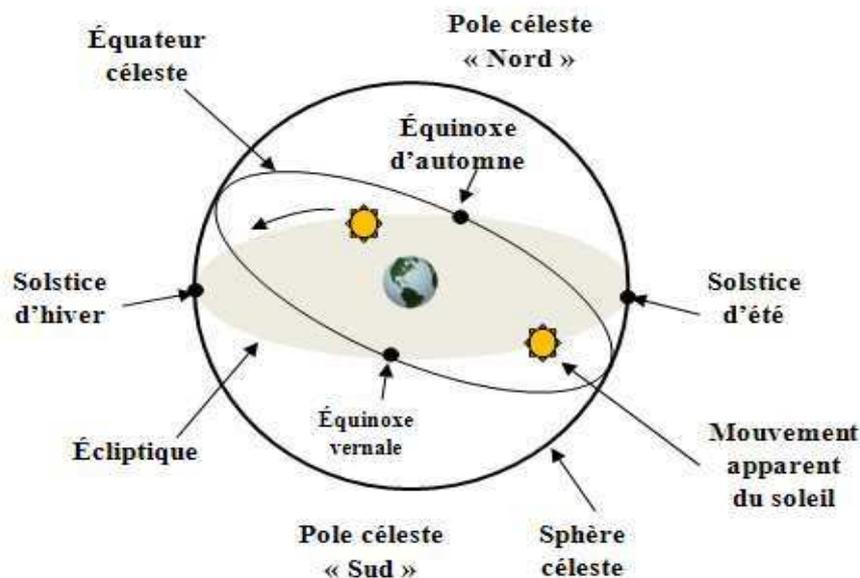


Figure 2.2 : Sphère céleste et mouvement apparent du soleil.

Le mouvement apparent du soleil sur la sphère céleste n'est que le miroir du mouvement réel de la terre sur son orbite. En effet, le soleil se déplace le long de l'écliptique, à une époque donnée il est localisé par ses coordonnées sphériques qui sont l'ascension droite et la déclinaison. Quatre positions remarquables sont observées pendant une rotation complète du soleil : deux équinoxes et deux solstices.

*Solstices* : Les solstices sont des moments de l'année où le soleil atteint ses positions les plus méridionales et septentrionales. Il atteint une déclinaison maximale par rapport à l'équateur et qui est égale à  $23.26^\circ$ . Le jour du solstice d'été est le plus long de l'année alors que le solstice d'hiver marque la plus longue nuit de l'année.

*Equinoxes*: les équinoxes sont deux moments de l'année où la déclinaison est nulle. La durée du jour est égale à celle de la nuit.

## II-2-2 Repères de coordonnées célestes et terrestres

Pour être en mesure de prédire le flux radiatif émis par le soleil et le flux albédo, il faut définir les systèmes de références d'espace et de temps dans lesquels sont exprimés les positions et les mouvements de la terre, du soleil, et du satellite. Le repère de référence est la matérialisation à l'aide d'objets astronomiques du système de référence. Pour le construire, il est nécessaire de choisir des corps de référence (planètes, étoiles,..). Les repères astronomiques sont caractérisés par une origine qui peut être :

- Le lieu d'observation : repère topocentrique.
- Le centre de la terre : repère géocentrique.
- Le centre du soleil : repère héliocentrique.
- Un centre de masse : repère barycentrique.

Et de directions fondamentales :

- La verticale locale : système horizontal.
- Le pôle céleste : système équatorial.
- La normale à l'écliptique : système écliptique.
- Un pôle conventionnel : système galactique.

En orbitographie il est nécessaire de définir deux types de références d'espace : l'un céleste fixe dans l'espace (inertiel) pour exprimer les équations de

mouvement du satellite, et l'autre terrestre utilisé pour positionner les objets célestes et les satellites artificiels.

### II-2-2-1 Repère inertiel géocentrique RIG

Dans les applications de la mécanique spatiale, le repère céleste est le plus souvent utilisé pour exprimer les équations de mouvement d'un satellite orbitant autour de la terre, c'est un repère inertiel ne présentant théoriquement aucun mouvement dans l'espace.

D'après la résolution B2 de la 21<sup>ème</sup> assemblée générale de l'UAI, le repère fondamental inertiel sera le repère céleste international de référence (ICRF) réalisé par l'IERS. Depuis 1998 l'ICRF est utilisé à la place du repère FK5, défini à partir de 1535 étoiles brillantes du catalogue FK5 et adopté par l'UAI depuis 1984. Ce repère est matérialisé à partir de la position dans le ciel de 212 noyaux de galaxie appelés QUASARS supposées fixes dans l'espace et qui émettent des signaux radios lointains observés en VLBI. L'ICRF est représenté par le plan équatorial moyen de la date de référence J2000.0 (1<sup>er</sup> Janvier 2000 à 12h UT), et l'origine des ascensions droites aussi près que possible de l'équinoxe J2000.0. Le système de coordonnées attaché à ce repère est le système de référence céleste géocentrique (GCRS), défini par la résolution (B1.3) de la 24<sup>ème</sup> assemblée générale de l'UAI.

Comme illustré dans la figure 2.3, ce système d'axes est défini par :

- Origine O : centre de masses de la terre.
- Axe X : porté par la ligne vernale qui n'est que l'intersection du plan équatorial moyen et de l'écliptique de la date de référence de J2000.0, dirigé vers le point vernal  $\Upsilon$  appelé aussi équinoxe du printemps de la date J2000.0.
- Axe Z : perpendiculaire au plan équatorial moyen de la date de référence J2000.0.
- axe Y : complète le repère direct et appartient au plan équatorial.

Dans ce repère le satellite est localisé soit par ses coordonnées cartésiennes  $x, y$  et  $z$  soit par ses coordonnées sphériques  $r, \alpha$  et  $\delta$  :

$r$  : distance géocentrique du satellite par rapport au centre de la terre,

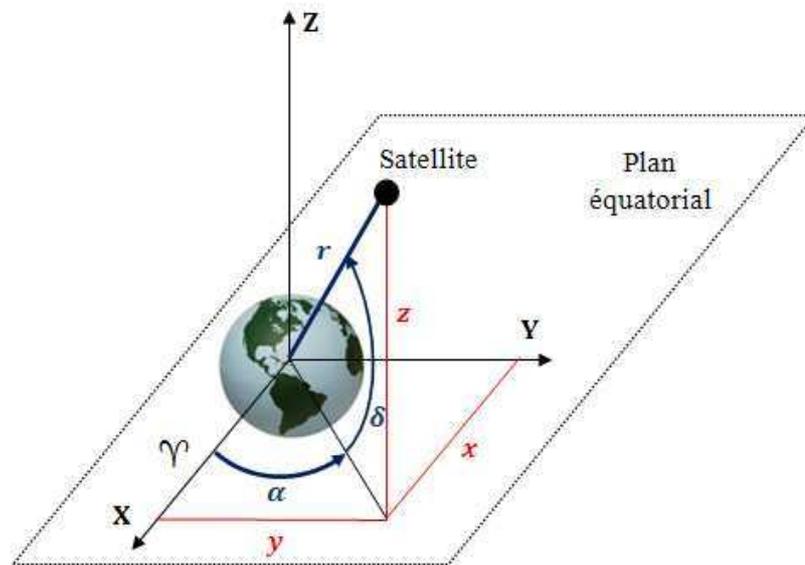
$\alpha$  : ascension droite, mesurée positivement vers l'Est à partir de la ligne vernale, elle est exprimée en unités de temps ou en degrés fractionnaires,

$\delta$  : déclinaison, mesurée positivement vers le Nord à partir du plan équatorial exprimé en degré entre  $\pm 90^\circ$ .

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes se fait de la façon suivante :

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} r \cos \delta \cos \alpha \\ r \cos \delta \sin \alpha \\ r \sin \delta \end{cases} \quad (2.1)$$

A cause des perturbations provoquées par la lune, le soleil et les autres planètes, les coordonnées célestes ne sont pas fixes dans le temps. Pour cela, ces coordonnées doivent être spécifiées pour une équinoxe donnée correspondant à une époque de référence qui est le J2000.0.



**Figure 2.3** : Repère RIG et coordonnées du satellite

### II-2-2-2 Repère terrestre géocentrique RTG

Le repère de référence terrestre permet de positionner un objet céleste ou un satellite artificiel orbitant autour de la terre. Il permet aussi d'exprimer les différentes perturbations subies par le satellite. C'est un repère fixé à la croûte terrestre ne présentant aucun mouvement (translation, rotation, expansion).

En pratique, ce repère est réalisé sur la base d'un ensemble de stations réparties à la surface du globe dont les positions et leurs vitesses sont déterminées en utilisant les techniques suivantes :

- L'interférométrie à très longues lignes de base (VLBI).
- La télémétrie laser sur satellite et sur la lune (SLR, LLR).
- Le GPS.
- Le Doppler Doris.

Le repère terrestre le plus utilisé actuellement est l'ITRF2000 réalisé par le service international de la rotation de la terre (IERS) et approuvé par UAI. Le système de coordonnées géocentrique est utilisé dans cette étude, son origine est le centre de masses de la terre (incluant l'atmosphère et les océans) et son plan de référence le plan équatorial vrai.

D'après la figure 2.4, ce système d'axes est défini par :

- Origine O : centre de masse de la terre.
- Axe X' : appartient au plan équatorial et pointe le méridien de Greenwich.
- Axe Z' : coïncide avec l'axe de rotation moyen de la terre et normale au plan équatorial vrai.
- Axe Y' : complète le repère direct et appartient au plan équatorial vrai.

Dans ce repère le satellite est localisé par ses coordonnées sphériques  $r$ ,  $\varphi$  et  $\lambda$ . Où  $\varphi$  est la latitude mesurée positivement vers le Nord depuis l'équateur de  $0^\circ$  à  $\pm 90^\circ$ . Alors que,  $\lambda$  est la longitude mesurée positivement vers l'Est à partir du méridien de Greenwich, exprimé en unités de temps de 0h à 24h. La longitude  $\lambda$  diffère de l'ascension droite  $\alpha$  par l'ascension droite  $\Theta$  du méridien de Greenwich appelée angle de rotation de la terre, d'après la résolution B1-3 de l'UAI 2000 qui préconise l'utilisation d'une origine non tournante appelée CEO. Notons que dans les modèles de transformation dit « classique » l'angle  $\Theta$  est appelé temps sidéral à Greenwich (GST).

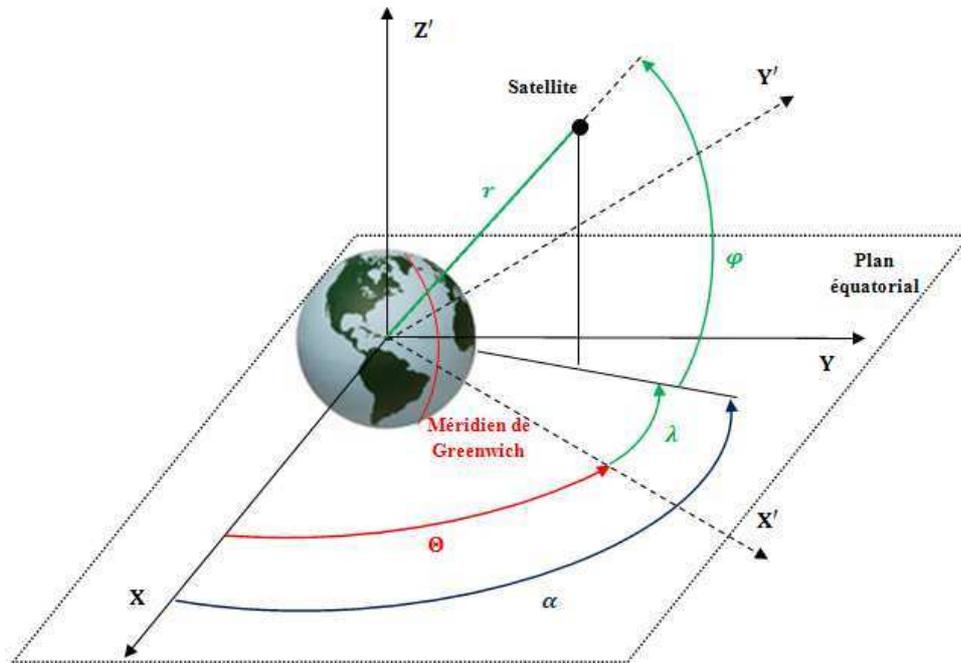


Figure 2.4 : Repère RTG et coordonnées du satellite.

Comme illustré dans la figure 2.4, la relation entre la longitude et l'ascension droite est donnée par :

$$\lambda = \alpha - \Theta \quad (2.2)$$

### II-2-3 Echelles de temps

Jusqu'en 1967, les échelles de temps étaient fixées par des phénomènes astronomiques. La valeur de la seconde de temps découlait du découpage d'abord de la durée de la période de rotation de la Terre sur elle-même puis de la rotation de la Terre autour du Soleil, alors on parlait du temps sidéral (GMST) et du temps universel (TU). Aujourd'hui, et depuis 1967, l'horloge atomique au césium a permis l'élaboration d'une échelle de temps stable, le temps atomique international (TAI).

**a) Le temps sidéral (GMST):**

Le temps sidéral en un lieu donné est défini comme étant l'angle horaire du point vernal en ce lieu. C'est aussi l'ascension droite du méridien local. Il dépend du mouvement héliocentrique de la terre et du mouvement de rotation diurne de la terre mettant perpétuellement en mouvement tout lieu d'observation. Du moment que le point vernal  $\Upsilon$  n'a pas de matérialisation précise sur le globe terrestre il est difficile de le déterminer avec précision. C'est pour cette raison que le temps sidéral n'est plus considéré comme étant une échelle de temps mais un angle : angle horaire à Greenwich. On distingue le temps sidéral moyen (GMST) et le temps sidéral vrai (GST), liés par l'équation des équinoxes.

**b) Le temps universel (UT) :**

C'est le temps entre deux passages par rapport au méridien de Greenwich du soleil dans son mouvement apparent. Le temps universel permet de rapporter un événement de la sphère céleste à la position terrestre d'un observateur. Il est lié directement à la rotation de la terre. Cette échelle de temps n'est pas uniforme à cause de l'irrégularité de la rotation terrestre en raison du ralentissement séculaire, de perturbations saisonnières et de phénomènes aléatoires. Pour ces raisons deux autres échelles de temps sont utilisées:

- UT1, est l'échelle de temps associé à la rotation de la Terre, il est linéairement proportionnel à l'angle de rotation de la Terre, angle géocentrique entre deux directions dans le plan équatorial, l'une tournant avec la Terre et l'autre n'ayant pas de rotation instantanée. Sachant que UT1 est affecté par les irrégularités de la vitesse de rotation de la Terre (longueur du jour) qui est imprévisible, la durée de la seconde UT1 n'est donc pas constante quand on l'exprime dans une échelle de temps uniforme.
- UTC, est le temps universel coordonné, c'est une échelle de temps uniforme (créé en 1960 et adopté en 1972 par l'IERS) et constitue le temps légal civil (celui des montres). Il possède la même unité de base que le temps atomique TAI (même durée de la seconde) mais il est périodiquement réajusté de manière à maintenir en phase la rotation de la terre et les horloges des laboratoires (Duffet-Smith, 1995) :

$$\text{TAI} - \text{UTC} = n \quad (2.3)$$

$$\text{UT1} - \text{UTC} \leq \pm 0.9 \text{ s} \quad (2.4)$$

Où  $n$  est un nombre entier en secondes déterminé tel que UTC ne s'écarte pas de plus de 0.9 secondes de UT1. Ce dernier est calculé par l'IERS.

**c) Le temps terrestre (TT) :**

Le temps astronomique appelé temps terrestre (TT) est le TAI avec un décalage temporel, voir (Petit, 2000):

$$TT = TAI + 32.184s \quad (2.5)$$

**d) Date julienne (JD):**

Intervalle de temps, en jour et fractions de jour, depuis le 1er janvier 4713 avant JC, midi à Greenwich.

**e) Époques :**

Datation des catalogues, date de validité des positions et des éléments d'orbites. L'époque standard recommandée aujourd'hui est J2000.0, équivalente en date julienne à JD2451545.0. Le préfixe J correspond au système actuellement en usage du temps mesuré en siècles juliens de 36525 jours.

La relation entre l'époque et la date julienne est donnée par:

$$EJ = J \left[ 2000.0 + \frac{JD - 2451545.0}{365.25} \right] \quad (2.6)$$

où EJ est l'époque julienne.

## II-2-4 Paramètres d'orientation de la terre dans l'espace

L'orientation de la terre dans l'espace est le passage du repère céleste au repère terrestre, ce passage s'effectue à l'aide de transformations en utilisant un repère intermédiaire. Cette orientation est décrite par la matrice de rotation entre ces deux systèmes de référence. Si la terre avait une vitesse uniforme autour d'un axe fixe alors, dans ce cas, l'orientation de la terre serait représentée par un seul paramètre qui est l'angle horaire ou sidéral.

A cause des perturbations provoquées par l'attraction gravitationnelle des corps du système solaire (la lune, le soleil et les autres planètes), le bourrelet équatorial de la terre et les oscillations dues au déplacement des plaques tectoniques, de

l'aplatissement de la terre, des propriétés rhéologiques du noyau, des eaux souterraines et des fluctuations des océans et l'atmosphère, la rotation de la terre sur son centre de gravité montre des irrégularités (mouvement de toupie). En effet, l'axe de rotation de la terre n'est fixe, ni dans l'espace (phénomènes de précession et de nutation), ni par rapport à la croute terrestre (mouvement du pôle) et de plus la rotation de la terre n'est pas uniforme (voir figure 2.5).

#### **II-2-4-1 Phénomènes de précession et de nutation**

Le mouvement orbital des corps du système solaire provoque des basculements. La précession est un mouvement lent mais périodique de l'axe de rotation terrestre de grande amplitude. Le phénomène de précession est décomposé en deux : précession de l'équateur et précession de l'écliptique. Le mouvement conique de précession de l'équateur est causé par les forces de marée de la lune et du soleil, provoquant ainsi un mouvement séculaire le long de l'écliptique d'une période de 25700 ans. L'axe de rotation décrit un cône dans l'espace ce qui se traduit par un déplacement des deux équinoxes vers l'ouest le long de l'écliptique d'environ 50'' d'arc par an. Ce mouvement fut mis en évidence par Hipparque et Copernic(1532). La terre subit aussi l'action gravitationnelle des autres planètes, d'où le mouvement de précession de l'écliptique qui a pour conséquence la variation de l'inclinaison de l'écliptique par rapport au plan équatorial d'environ 47'' d'arc par siècle.

La nutation se superpose à la précession, elle a été observée pour la première fois par Bradley (1748). C'est un mouvement de courte période (variation périodique des angles d'Euler d'environ 18.6 ans, d'amplitude 17'' d'arc) provoqué par les forces de marée de la lune et des autres planètes.

#### **II-2-4-2 Mouvement du pôle**

Le mouvement du pôle comporte une oscillation libre de période d'environ 435 jours (oscillation de Chandler 1891), le mécanisme d'excitation de ce mouvement libre est d'origine atmosphérique et océanique. Le déplacement saisonnier des masses d'eau et d'air produit une oscillation forcée de période d'une année. Les déformations de la croute terrestre dues à la fonte des calottes glacières polaires provoquent une dérive du pôle.

### II-2-4-3 Mouvement de rotation de la terre

La vitesse de rotation de la terre autour de son axe est variable, ce qui signifie que le jour lui aussi est de durée variable présentant une fluctuation autour d'une valeur moyenne  $\sigma$ . Ces variations sont dues essentiellement au couplage électromagnétique entre le noyau du manteau, les marées zonales et les déplacements des masses atmosphériques.

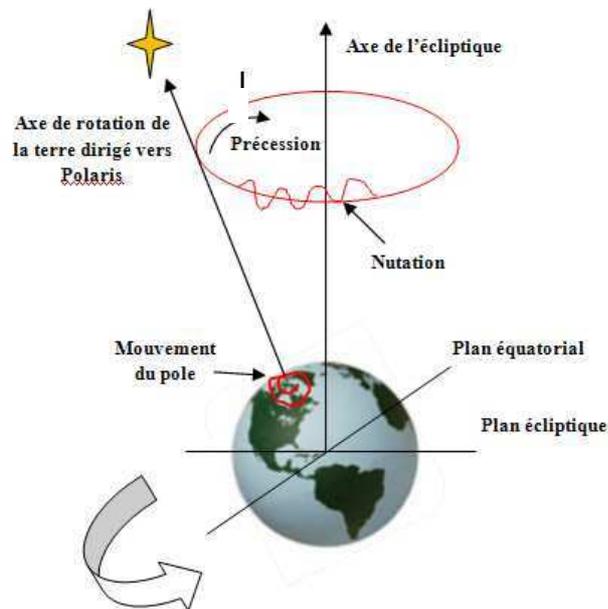


Figure 2.5 : Phénomènes de précession, nutation et mouvement du pôle.

### II-2-4-4 Passage du RTG au RIG

Des progrès considérables ont été effectués ces dernières années dans la modélisation de l'orientation terrestre. En effet l'utilisation de la VLBI a révélé des insuffisances dans le modèle de nutation IAU 1980 (Seidelman, 1982) construit sur la base d'une terre rigide subissant exclusivement le couple lunisolaire, et dans le modèle de précession IAU1976 de Lieske (Lieske et al., 1977). Ces deux modèles ne tenaient pas compte de certains phénomènes tels que les effets planétaires, les couches fluides et les mouvements internes au sein

de la terre, difficiles à modéliser. Dans ce but, l'Union Astronomique Internationale a recommandé l'utilisation d'un nouveau modèle de précession-nutation (IAU2000A), développé à partir de la théorie de nutation de Souchay (Souchay et al., 1999) tenant compte des effets planétaires et d'une fonction de transfert MHB2000 (Mathews et al., 2002) exprimée en fonction d'un certain nombre de paramètres géophysiques exprimant les effets de marées océaniques, le couplage entre noyau et manteau, les effets atmosphériques, etc...

En vue de séparer le mouvement diurne de la terre (mouvement rapide) au mouvement de basculement de l'axe de rotation (mouvement lent), l'UAI préconise l'utilisation d'un nouveau pôle céleste appelé pôle céleste intermédiaire (CIP) définissant l'axe du repère intermédiaire. Sa position dans le repère céleste est donnée par le modèle de précession-nutation IAU 2000A. La résolution B1.8 recommande aussi l'utilisation d'une origine non tournante (Guinot, 1979) permettant de découpler l'angle de rotation de la terre de la précession-nutation, ce qui permettra une définition exacte de UT1.

Le passage du repère terrestre au repère céleste se fait par l'intermédiaire de la matrice de rotation  $[Q_1]$  qui est donnée par l'équation suivante (2.7). Notons que cette transformation est largement présentée et développée par les articles suivants (Lieske et al., 1977, Souchay et al., 1999 ; Mathews et al., 2002 ; Capitaine, 1990 ; Lambert et Bizouard, 2002 ; McCarthy et Petit, 2003) :

$$[RIG] = [Q_1] [RTG] \quad (2.7)$$

Avec

$$[Q_1] = [PN] [S] [PM] \quad (2.8)$$

où  $[PN]$  est la matrice de précession-nutation,  $[S]$  est la matrice de rotation terrestre et  $[PM]$  est la matrice du mouvement du pôle.

Dans la suite de l'étude, le modèle de précession-nutation IAU2000A adopté par l'UAI en août 2000, comprenant les séries de nutation MHB2000 et la précession IAU 1976 corrigée est utilisé.

La matrice du mouvement du pôle  $[PM]$  est la matrice qui lie le repère terrestre au repère intermédiaire, et qui est exprimée par (capitaine 1990) :

$$[PM] = [R_3(-s')] [R_2(x_p)] [R_1(y_p)], \quad (2.9)$$

sachant que  $x_p$  et  $y_p$  sont les coordonnées du CIP dans le repère terrestre. D'après Lambert (Lambert et Bizouard 2002) le déplacement du TEO entre l'époque et la date, noté par la quantité  $s'$ , est donnée par :

$$s'(t) = -47 t, \quad (2.10)$$

la quantité  $s'$  est exprimée en  $\mu\text{as}$ , où  $t$  est le temps terrestre (TT) écoulé depuis J2000.0, exprimé par :

$$t = (TT - 1^{\text{er}} \text{ Janvier } 2000 \text{ à } 12h \text{ TT}) \text{ en jour julien } / 36525. \quad (2.11)$$

La matrice de rotation terrestre  $[S]$  définit le passage du repère intermédiaire d'origine terrestre au repère intermédiaire d'origine céleste par une simple rotation d'un angle  $\theta$  compté depuis la CEO vers la TEO dans le plan équatorial instantané.

$$[S] = [R_3(-\theta)] \quad (2.12)$$

l'angle de rotation de la terre  $\theta$  peut être exprimé linéairement en fonction de UT1 (Capitaine et al., 2000) par :

$$\theta(T_u) = 2\pi(0.7790572732640 + 1.00273781135448 T_u) \quad (2.13)$$

avec

$$T_u = (\text{date julienne UT1} - 2451545.0) \quad (2.14)$$

et

$$UT1 = UTC + (UT1 - UTC). \quad (2.15)$$

Alors que la matrice de précession–nutation (Capitaine et al., 2003) est donnée par :

$$[PN] = \begin{bmatrix} 1 - a X^2 & -a XY & X \\ -a XY & 1 - a Y^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{bmatrix} R_3(s) \quad (2.16)$$

les termes X et Y sont les coordonnées du CIP dans le RIG, donnés par les expressions suivantes :

$$X(t) = \sum_{i=0}^5 x_i t^i + \sum_{k=0}^3 t^k \sum_j (a_{kj} \sin(ARG) + b_{kj} \cos(ARG)) \quad (2.17)$$

$$Y(t) = \sum_{i=0}^5 y_i t^i + \sum_{k=0}^3 t^k \sum_j (c_{kj} \sin(ARG) + d_{kj} \cos(ARG)) \quad (2.18)$$

avec :

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(X^2 + Y^2) \quad (2.19)$$

Le déplacement du CEO entre l'époque et la date, noté par la quantité s(t), est donné par :

$$s(t) + \frac{XY}{2} = \sum_{i=0}^5 s_i t^i + \sum_{k=0}^3 t^k \sum_j (e_{kj} \sin(ARG) + f_{kj} \cos(ARG)) \quad (2.20)$$

où l'indice k est le nombre de termes utilisés dans la série.

Dans les expressions précédentes, ARG désigne une combinaison des arguments lunisolaires de Delaunay, des arguments planétaires et du cumul de précession qu'on peut l'exprimer par :

$$ARG = \sum_{j=0}^{14} N_{jm} F_m \quad (2.21)$$

Les cinq premiers termes de  $F$  sont les arguments de Delaunay ( $l, l', F, D, \Omega$ ), ils caractérisent les positions de la lune et du soleil sur la sphère céleste. Les termes  $F_6$  jusqu'à  $F_{13}$  représentent les longitudes moyennes des planètes de Mercure jusqu'à Neptune, le dernier terme  $F_{14}$  représente le cumul de précession.

Les coefficients polynomiaux  $x_i, y_i, s_i$  ainsi que ceux des arguments sont donnés par le tableau A.1 de l'annexe A. Les coefficients  $a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}, d_{kj}, e_{kj}, f_{kj}$  et  $N_{jm}$  sont donnés par les tableaux A.2-4, alors que les coordonnées du pôle  $x_p$  et  $y_p$  sont données par la figure A.1. Notons que ces paramètres sont disponibles sur le site de l'IERS.

## II-3 Attitude du satellite

Le contrôle d'attitude c'est-à-dire l'orientation angulaire du satellite est important pour que le système de réception (parabole) reste pointé vers la zone au sol dont on veut obtenir le signal. Or le satellite a tendance à se dépointer sous l'action des forces de perturbations telles que la pression de radiation solaire et le frottement atmosphérique, etc. Il faut donc contrôler activement l'orientation angulaire mais aussi assurer une stabilité de cette orientation. Le contrôle est assuré en permanence par une boucle d'asservissement : des capteurs mesurent l'orientation du satellite, le calculateur de bord traite ces mesures et établit les commandes qui, exécutées par les acteurs, doivent maintenir un pointage parfait.

Plusieurs modes de stabilisation sont pratiqués, on peut citer :

- *Mode spin* : la forme du satellite est généralement cylindrique, la stabilité du satellite est effectuée grâce à la rotation du satellite par rapport à son axe de révolution. Les panneaux solaires sont en mouvement de rotation avec le satellite.
- *Mode stabilisé trois axes* : le satellite est stabilisé suivant les axes de lacet, de roulis et de tangage, ce qui veut dire qu'il est asservi sur une orientation donnée pour chacune des trois directions de l'espace. Ce mode est pratiqué en général dans le cas des satellites de forme prismatique. Les panneaux solaires dans ce cas, sont soit articulés, soit fixés sur le satellite.

A fin de pouvoir positionner le satellite dans son orbite, il est nécessaire de définir les repères suivants :

### II-3-1 Repère orbital local RTN

Comme illustré sur la figure 2.6, le système de coordonnées utilisé pour décrire les forces de perturbations est le système de coordonnées radiale, tangentielle et normale. Les forces de perturbations projetées suivant ces axes sont utilisées dans les équations de mouvement de Gauss.

Ce système d'axes est défini par :

- Origine P : centre de masses du satellite.
- Axe R : de vecteur de base  $t_1$ , il est suivant la direction géocentrique, dans le sens opposé du nadir.
- Axe N : de vecteur de base  $t_3$ , il est normale au plan orbital du satellite dans la direction du moment cinétique.
- Axe T : de vecteur de base  $t_2$ , appelé orthoradial, il complète le repère direct. Il est orthogonale à R et suivant la direction du mouvement du satellite mais il ne coïncide pas exactement avec le vecteur vitesse à cause de l'excentricité de l'orbite.

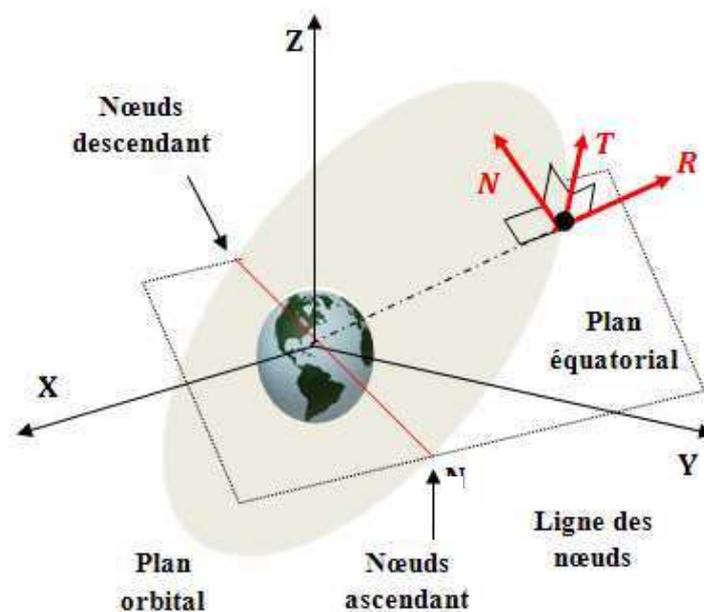


Figure 2.6 : Repère orbital local RTN.

### II-3-2 Repère fixé au satellite RFS

Pour assurer un bon fonctionnement des panneaux solaires ainsi que les différents instruments utilisés, il est nécessaire de définir un repère lié au satellite (voir figure 2.7). A partir de ce repère, on peut effectuer par exemple des manœuvres pour orienter le satellite afin d'assurer la transmission avec la terre. Il permet aussi au panneau solaire de pointer le soleil durant le mouvement orbital quand celui ci est orientable.

Ce système d'axes est défini par :

- Origine P : centre de masse du satellite.
- Axe Z<sub>B</sub> : pointe le nadir dans la direction du centre de la terre. Il définit l'axe de lacet.
- Axe Y<sub>B</sub> : parallèle au plan du panneau solaire, Il définit l'axe de roulis.
- Axe X<sub>B</sub> : complète le repère direct. Il définit l'axe de tangage.

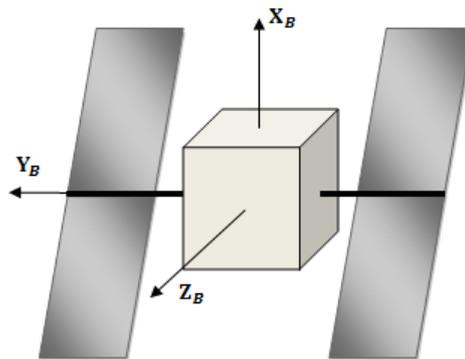
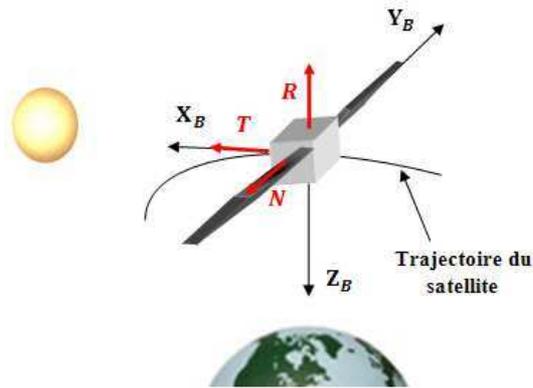


Figure 2.7 : Repère fixé au satellite RFS.

### II-3-3 Modes de navigation

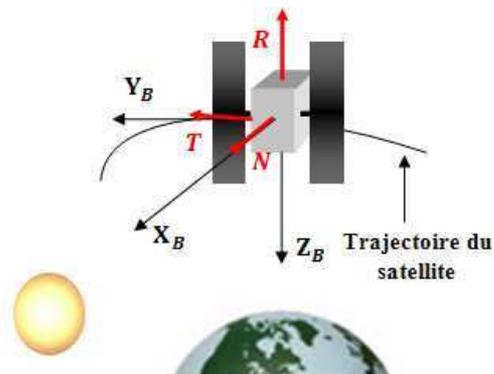
Pour assurer l'alimentation du satellite et la charge des batteries utilisées pour la phase d'éclipse, il est nécessaire d'orienter les panneaux solaires vers le soleil. Plusieurs modes de navigation sont possibles et qui sont fonctions de la position du soleil ainsi que du plan orbital et de la mission à réaliser (satellite orienté vers la terre ou vers l'espace).

- *Mode airplane*: ou mode vol d'avion, qui consiste à aligner au mieux le repère RFS sur le repère orbital local RTN, voir la figure 2.8. L'axe  $Y_B$  du panneau solaire est normale au plan orbital. Ce mode de navigation est prévu pour les satellites de télécommunications, orientés vers la terre.



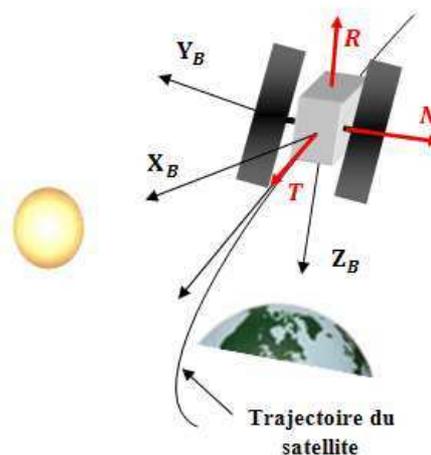
**Figure 2.8** : Mode de navigation airplane.

- *Mode sailboat* : ou mode bateau à voile, qui consiste à orienter le repère RFS de sorte que le plan des panneaux solaires se trouve dans le plan du mouvement orbital, voir la figure 2.9. L'axe  $Y_B$  du panneau solaire est porté par le plan orbital. Ce mode de navigation est prévu pour les satellites de télécommunications, orientés vers la terre.



**Figure 2.9** : Mode de navigation sailboat.

- *Mode optimal* : les rayons lumineux sont toujours normales à la surface du panneau solaire en vue d'emmagasiner le maximum d'énergie électrique. Ce mode de navigation est pratiqué dans les missions orientées vers l'espace, pour le suivi des étoiles par exemple, c'est le cas du télescope Hubble. En général les axes  $X_B$  et  $Y_B$  ne coïncident pas avec  $T$  et  $N$ , mais par contre, l'axe  $Y_B$  doit être toujours perpendiculaire au plan formé par le soleil, la terre et le satellite (voir la figure 2.10). Enfin, pour que les rayons lumineux soient normales au panneau solaire, il faut assurer une rotation du panneau solaire par rapport à  $Y_B$  de telle sorte que la normale au panneau solaire coïncide avec le vecteur satellite-soleil. Notons que ce mode de navigation exige beaucoup d'énergie électrique.

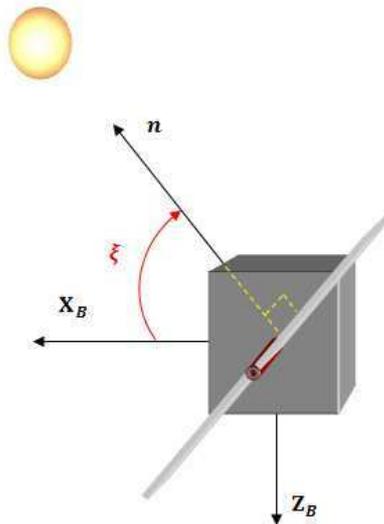


**Figure 2.10** : Mode de navigation optimal.

#### II-3-4 Articulation du panneau solaire

Un mécanisme d'entraînement du panneau solaire, rattaché au système de contrôle d'attitude et d'orbite, permet de contrôler la position du panneau solaire de façon à l'orienter au mieux vers le soleil en fonction du mouvement du satellite sur son orbite. L'angle  $\zeta$  formé par la normale au panneau solaire et l'axe  $X_B$  définit cette orientation, explicité sur la figure 2.11. Afin d'assurer que la face active du

panneau solaire reçoit les rayons lumineux, l'angle  $\zeta$  peut varier de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . Dans certains cas le panneau solaire est fixé sur le satellite.



**Figure 2.11** : Articulation du panneau solaire.

### II-3-5 Passage du repère RFS au repère RTN

Le passage du repère RFS au repère RTN s'effectue grâce à la matrice de transformation  $[Q_3]$  suivante :

$$[Q_3] = [R_1(\vartheta_1)][R_2(\vartheta_2)][R_3(\vartheta_3)] \quad (2.22)$$

Les matrices  $[R_1]$ ,  $[R_2]$  et  $[R_3]$  sont les matrices de rotation par rapport aux axes  $X_B$ ,  $Y_B$  et  $Z_B$  respectivement, où  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  et  $\vartheta_3$  sont les angles d'Euler, choisis en fonction du mode de navigation considéré.

## II-4 Equations de mouvement du satellite

### II-4-1 Mouvement képlérien

En général les corps célestes sont capturés par le champ gravitationnel d'un autre corps plus important appelé corps central. En effet, les planètes et les satellites artificiels sont soumis à un mouvement orbital dit mouvement képlérien autour d'un corps central, c'est le cas du mouvement de la terre autour du soleil.

En absence de perturbations, le mouvement orbital est défini par l'équation différentielle suivante :

$$\vec{r}'' = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (2.23)$$

Cette équation régit le mouvement d'un point P de masse m (supposé le satellite) attiré à un centre O de masse M (supposé la terre) par l'intermédiaire d'un champ gravitationnel de constante d'attraction  $\mu$  positif, émis par le centre O.

Où  $\vec{r}$  est le rayon vecteur terre-satellite, alors que r est la distance qui sépare le satellite et la terre.

Par définition le mouvement képlérien est la solution générale de l'équation (2.23). Cette solution dépend de six constantes d'intégration qui sont les éléments d'orbites ou paramètres orbitaux a, e, i,  $\Omega$ ,  $\omega$  et  $M_0$ . Le mouvement képlérien est présenté en détails dans l'ouvrage « Orbits » (Xu, 2008).

Les paramètres orbitaux conditionnent le positionnement et le repérage du satellite (voir figure 2.12) :

**a) *Eléments caractérisant la géométrie de l'ellipse***

- a : demi grand axe de l'ellipse.
- e : excentricité.

**b) *Eléments positionnant le plan orbital dans l'espace***

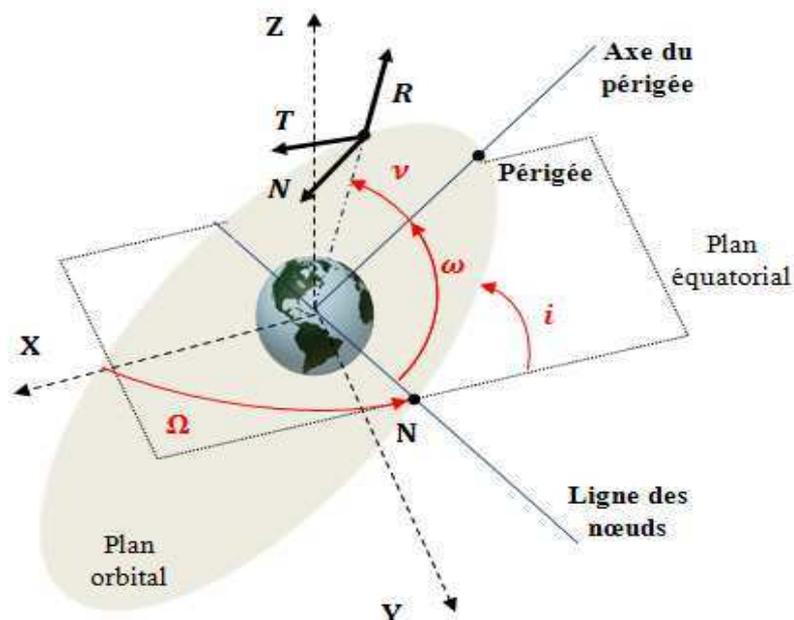
- i : inclinaison orbital par rapport au plan équatorial.

On appelle inclinaison de l'orbite, l'angle i mesuré entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  positivement autour de la ligne vernale, entre le plan équatorial et le plan orbital. Le choix de l'inclinaison dépend de la mission prévue :

- $i=0^\circ$ , orbite équatoriale, essentiellement l'orbite géostationnaire,

- $i=63.4^\circ$ , inclinaison orbitale fréquemment utilisée pour les satellites soviétiques,
- $i=90^\circ$ , orbites polaires pratiquées pour les satellites météorologiques en orbite basse, leur permettant de suivre 15 fois par jour les masses d'air polaire,
- $i=98.7^\circ$ , inclinaison choisie pour les satellites de la famille SPOT, travaillant en imagerie spatiale et utilisant la propriété d'héliosynchronisme.
- $\Omega$  : ascension droite du nœud ascendant N

On appelle  $\Omega$  l'angle, mesuré positivement autour de Z, entre l'axe X et la ligne nodale (ON), intersection du plan orbital avec le plan équatorial. Conventionnellement, il est exprimé entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ . Cet angle conditionne le positionnement du plan orbital par rapport au repère inertiel RIG.



**Figure 2.12** : Paramètres de positionnement et de repérage du satellite.

### c) Repérage du grand axe dans son plan

Pour le repérage du grand axe appelé aussi axe focal il est nécessaire de définir la base péri-focale (voir figure 2.13) : origine O centre de la terre, PW axe focal

dans la direction du périégée, PH axe dans la direction du moment cinétique et PQ axe ortho-focal complète la base directe PWPQPH.

- $\omega$  : argument du périégée

On appelle  $\omega$  argument nodal du périégée, l'angle entre la ligne nodale et l'axe focal pointant le périégée, mesuré positivement entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ .

**d) Eléments repérant le satellite dans son orbite**

Le dernier des paramètres orbitaux, est en fait constitué de deux données, une position sur l'orbite appelée anomalie et un temps  $t$  correspondant à cette position.

- $M_o$  : anomalie moyenne

Le satellite peut être positionné dans son orbite soit par l'angle  $v$ , appelé anomalie vraie, soit par l'angle  $E$  appelé anomalie excentrique (en utilisant le cercle fictif), ou par l'anomalie moyenne  $M_o$ . La figure 2.13 explicite ces anomalies.

La relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique est donnée par :

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{1+e}}{1-e} \tan \frac{E}{2}, \quad (2.24)$$

la relation qui lie l'anomalie moyenne  $M_o$  à l'anomalie excentrique  $E$  est donnée par l'équation suivante :

$$M_o = E - e \sin E, \quad (2.25)$$

l'anomalie moyenne  $M_o$  décrit le mouvement d'un satellite orbitant avec une vitesse angulaire moyenne  $n$ ,

$$M_o = n(t - t_{per}). \quad (2.26)$$

La vitesse angulaire moyenne  $n$  peut être calculée à partir de la période de passage  $T_P$  du satellite au périégée.

$$T_P = 2\pi a^{3/2} \mu^{-1/2}, \quad (2.27)$$

d'où

$$n = \frac{T_p}{2\pi} a^{-3/2} \mu^{1/2}, \quad (2.28)$$

alors que,  $t_{\text{per}}$  représente le temps de passage au péri-gée.

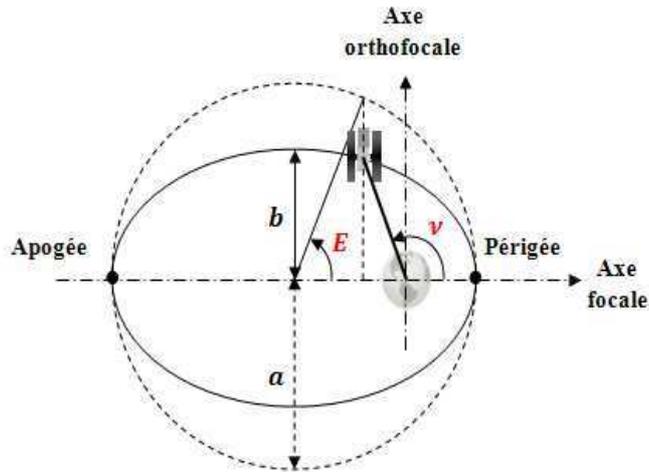


Figure 2.13 : Repère péri-focal et anomalies.

## II-4-2 Mouvement perturbé

Le mouvement képlérien ne reflète pas le mouvement réel du satellite, en effet, il est soumis à des forces perturbatrices dues à la non sphéricité de la terre, à l'action gravitationnelle des autres corps tels que le soleil, la lune et les autres planètes et aux forces de surface provoquées par la pression de radiation solaire et le freinage atmosphérique (Xu, 2008).

Les équations de mouvement d'un satellite autour de la terre sont exprimées dans le repère inertiel par :

$$\vec{r}'' = \vec{f}_G + \vec{f}_{NG} + \vec{f}_r, \quad (2.29)$$

où  $\vec{f}_G$  est la somme des forces gravitationnelles et  $\vec{f}_{NG}$  est la somme des forces de surface (non gravitationnelles), alors que  $\vec{f}_r$  représente les forces empiriques non modélisables, considérées négligeable dans cette étude.

Les différentes forces sont exprimées par :

$$\vec{f}_G = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{f}_{pot} + \vec{f}_{III} \quad (2.30)$$

$$\vec{f}_{NG} = \vec{f}_{PRS} + \vec{f}_{Atm}. \quad (2.31)$$

Où :

$\vec{f}_{pot}$  : force de perturbation due au champ gravitationnel terrestre,

$\vec{f}_{III}$  : force de perturbation due au troisième corps,

$\vec{f}_{PRS}$  : force de perturbation due à la pression de radiation solaire,

$\vec{f}_{Atm}$  : force de perturbation due à la traînée atmosphérique.

Les forces perturbatrices sont généralement calculées dans le repère terrestre en fonction des coordonnées du satellite exprimées dans ce même repère, puis exprimées dans le repère d'intégration. Notons que les différentes forces sont exprimées en unités de force par unités de masse.

L'ajout d'accélération complémentaires génère des perturbations de l'orbite elliptique. Les éléments képlériens deviennent dépendants du temps sous la forme des équations de Gauss. On les appelle alors éléments osculateurs (Xu, 2008) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [F_R e \sin \nu + F_T (1 + e \sin \nu)] \\ \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [F_R \sin \nu + F_T (\cos E + e \sin \nu)] \\ \frac{di}{dt} = -\frac{F_N r \cos(\nu + \omega)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \\ \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{F_N r \sin(\nu + \omega)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -F_R \cos \nu + F_T \cos \nu \left( 1 + \frac{1}{1+e \cos \nu} \right) - \frac{F_N r \cos i \cos(\omega + \nu)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \right] \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{nae} \left[ F_R \left( \cos \nu - \frac{2e}{1+e \cos \nu} \right) - F_T \sin \nu \left( 1 + \frac{1}{1+e \cos \nu} \right) \right] \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Les composantes radiale  $F_R$ , orthoradiale  $F_T$  et normale  $F_N$  sont les composantes de la résultante des perturbations suivant les directions R, T et N, respectivement.

La position du satellite peut être exprimée, soit par les paramètres orbitaux  $a, e, i, \Omega, \omega$  et  $M_0$ , soit par les coordonnées cartésiennes  $x, y$  et  $z$ , dans le repère inertiel. La position et la vitesse du satellite dans le repère RIG sont exprimées en fonction des paramètres orbitaux par :

$$\begin{Bmatrix} \vec{r} \\ \vec{\dot{r}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_3(-\Omega)][R_1(-i)][R_3(-\omega)] \\ [R_3(-\Omega)][R_1(-i)][R_3(-\omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{q} \\ \vec{\dot{q}} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

sachant que la position et la vitesse du satellite dans la base péri-focale sont données par:

$$\{\vec{q}\} = \begin{Bmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\{\vec{\dot{q}}\} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \begin{Bmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

## II-5 Perturbations du mouvement Képlérien

Dans le modèle képlérien la seule force appliquée sur le satellite est l'attraction terrestre et la terre étant considérée sphérique et homogène. Ces deux hypothèses sont fausses en réalité ; l'expérience montre que les structures spatiales sont soumises à d'autres forces tels que les forces de frottement avec l'atmosphère, les forces dues à la pression de radiation solaire, l'attraction de la lune, le soleil et les autres planètes. Les études ont montrées que les accélérations causées par les forces autres que l'attraction centrale sont faibles devant l'accélération képlérienne. C'est pourquoi on considère que les autres forces sont des perturbations du mouvement. L'intensité de ces perturbations est proportionnelle à l'altitude du satellite. La figure 2.14 illustre ces perturbations (Fortescue et Starck, 1995).

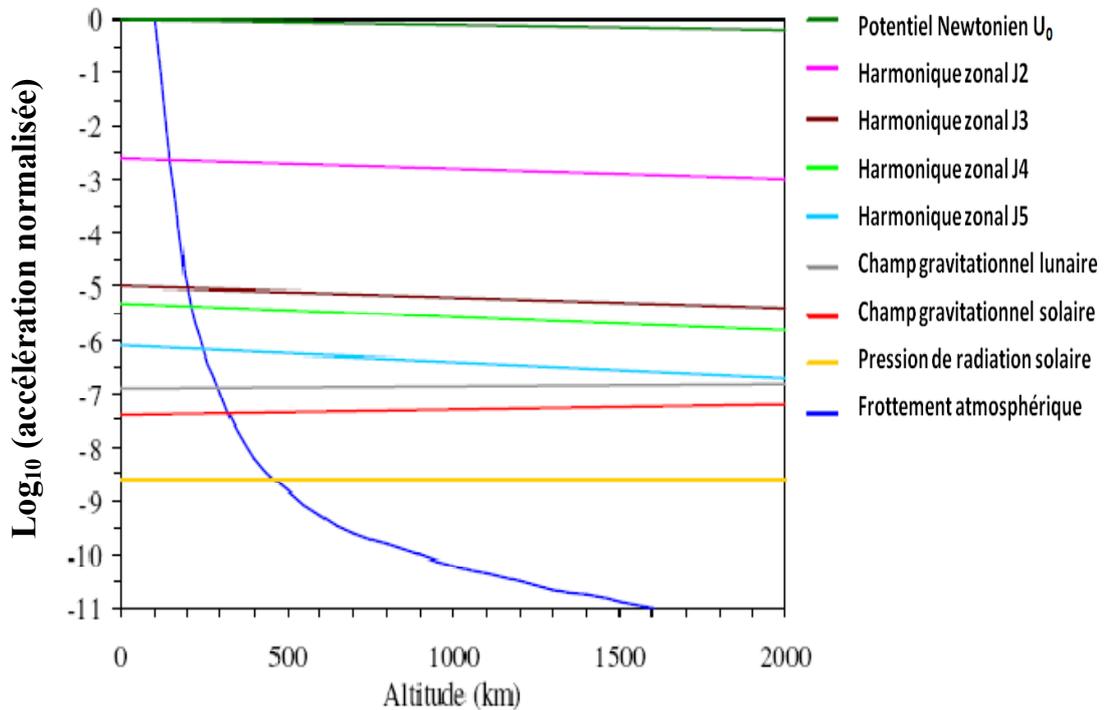


Figure 2.14 : Comparaison des perturbations pour les basses orbites.

## II-5-1 Perturbations dues au champ gravitationnel terrestre

### II-5-1-1 Introduction

Un satellite mis en orbite autour de la terre dans le champ de gravité va se positionner sur une équipotentielle du potentiel de gravité. Sa trajectoire dépendra en grande partie de la forme de ce potentiel. En effet, le champ gravitationnel terrestre n'est que l'image du géoïde, voir la figure 2.15 : forme géométrique équipotentielle de la terre. Si on suppose que le géoïde est parfaitement sphérique, alors dans ce cas la trajectoire du satellite sera képlérienne. Dans le cas réel, la terre n'est ni sphérique, ni formée de couches concentriques, mais elle présente une forme ellipsoïdale irrégulière aplatie avec des bosses et des creux, qui révèlent des hétérogénéités de densité du matériau à l'intérieur de la terre. Ces irrégularités sont la cause principale de déviation des satellites de leurs trajectoires nominales, d'où la notion de perturbation. Notons que le potentiel perturbateur est exprimé dans le repère terrestre géocentrique RTG.

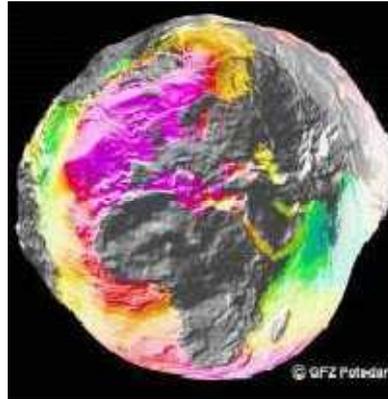


Figure 2.15 : Géoïde terrestre (GRGS).

### II-5-1-2 Modélisation du potentiel gravitationnel

Soit  $(OX'Y'Z')$  le repère instantané lié à la terre et  $\vec{r}$  le rayon vecteur indiquant la position du satellite supposé ponctuel (point P) de masse  $m$ . Considérons un système matériel de volume  $V$  (non ponctuel) et de masse  $M$ , caractérisant notre planète, et soit un point  $P'$  de ce système de coordonnées sphériques  $(R_p, \varphi', \lambda')$ , voir figure 2.16.

Le potentiel créé en un point P de coordonnées  $(r, \varphi, \lambda)$  par l'ensemble des points du système matériel est donnée par l'expression suivante :

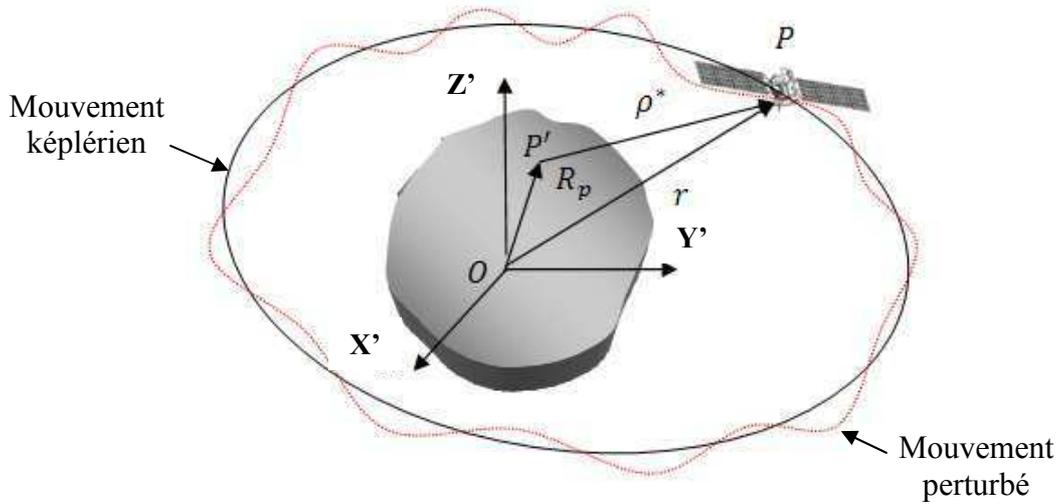
$$U = \int_M \frac{G}{\rho^*} dm \quad (2.36)$$

nous savons que la distance  $\rho^*$  entre  $P'$  et  $P$  peut être exprimée par la relation suivante :

$$\rho^* = r \sqrt{\left(\frac{R_p}{r}\right)^2 + 1 - 2 \left(\frac{R_p}{r}\right) \cos \psi}. \quad (2.37)$$

le rapport  $\frac{1}{\rho^*}$  est développable en série entière de  $\frac{R_p}{r}$ , ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\rho^*} = P_0 + \left(\frac{R_p}{r}\right) P_1 + \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 P_2 + \dots + \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_n \quad (2.38)$$



**Figure 2.16 :** Configuration d'un satellite P subissant une force perturbatrice due au champ gravitationnel terrestre.

qu'on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{r} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{R_p}{r} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (2.39)$$

où les  $P_n(\cos \psi)$  sont les polynômes de Legendre de degré  $n$  en  $\cos \psi$ , donnés par :

$$P_n(\cos \psi) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k (2n-k)}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} \cos^{n-2k} \psi \quad (2.40)$$

ce qui nous permet d'exprimer  $U$  en fonction des polynômes de Legendre :

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{r^n} \int_V \sum_{n \geq 0} \left( \frac{R_p}{r} \right)^n P_n(\cos \psi) dm, \quad (2.41)$$

où  $\mu (= GM)$  est la constante gravitationnelle terrestre.

En utilisant la trigonométrie sphérique entre  $P'(R_p, \varphi', \lambda')$  et  $P(r, \varphi, \lambda)$ , on obtient la relation suivante :

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (2.42)$$

en décomposant les polynômes de Legendre en harmoniques sphériques (voir figure A.2 de l'annexe A), on aura l'expression du potentiel terrestre dans le cas d'une terre non sphérique, qui est donnée par (Kaula, 1966 ; Heiskanen et Moritz, 1967):

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \left( 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\odot}}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \right), \quad (2.43)$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$U(r, \varphi, \lambda) = U_0 + \sum_{n=1}^N R_n(r, \varphi, \lambda) \quad (2.44)$$

le terme  $U_0 (= \frac{\mu}{r})$  représente le potentiel newtonien, alors que  $R_n$  est le potentiel perturbateur, exprimé en fonction des harmoniques sphériques par la relation suivante :

$$R_n(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\odot}}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \quad (2.45)$$

les  $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$  sont les fonctions de Legendre associées normalisées, de degré  $n$  et d'ordre  $m$ , données par :

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = \sqrt{\frac{(n-m)! (2n+1)! (2-\delta_{0m})!}{(n+m)!}} P_{nm}(\sin \varphi), \quad (2.46)$$

sachant que  $P_{nm}(\sin \varphi)$  sont les fonctions de Legendre associées, exprimées par :

$$P_{nm}(\sin \varphi) = \cos^m \varphi \sum_{t=0}^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)!(2-\delta_{0m})!}{(n+m)!}} \sin^{(n-m-2t)} \varphi \quad (2.47)$$

les polynômes de Legendre associés de degré  $n=3$  et d'ordre  $m=3$  sont donnés par le tableau A.5 de l'annexe A.

Les termes  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  sont les coefficients de stokes normalisés des harmoniques tesséraux. Les termes  $\bar{C}_{nn}$  et  $\bar{S}_{nn}$  sont les coefficients de stokes normalisés des harmoniques sectoriaux. Les termes  $\bar{C}_{n0}$  et  $\bar{S}_{n0}$  sont les coefficients de stokes normalisés des harmoniques zonaux.

$a_{\odot}$  représente le rayon équatorial moyen.

**a) Harmoniques zonaux :**

Les harmoniques zonaux caractérisent la variation du potentiel en latitude, ils divisent la terre en  $(n+1)$  zones. Le terme zonal  $\bar{C}_{20}$  est le terme dominant, il caractérise l'aplatissement de la terre au niveau des deux pôles. En général, les harmoniques zonaux provoquent un mouvement séculaire de courtes et longues périodes. Les harmoniques pairs causent des perturbations séculaires en longitude du nœud ascendant (régression nodale), de l'argument du périégée et du mouvement moyen.

**b) Harmoniques tesséraux et sectoriaux :**

Les harmoniques sectoriaux caractérisent la variation en longitude, orthogonales aux harmoniques zonaux. Les effets des termes sectoriaux et tesséraux sont visibles à long terme en provoquant des perturbations plus complexes que celles des harmoniques zonaux et qui se traduisent par des oscillations périodiques.

Si on considère que la terre est un ellipsoïde avec une répartition uniforme, alors dans ce cas les harmoniques sectoriaux et tesséraux seront nuls. Si on suppose que le plan équatorial est un plan de symétrie pour la terre, alors dans ce cas les termes impairs des harmoniques zonaux seront nuls.

### II-5-1-3 Modèles de champ gravitationnel terrestre

Grace au développement des techniques spatiales la géodésie a permis de grandes avancées dans le domaine de la gravimétrie. En effet le champ gravitationnel est construit à partir de mesures de perturbations d'orbites de satellites, dits satellites gravimétriques, en utilisant des techniques de poursuite tels que la SLR, système Doppler Doris et le GPS, voir (Nerem et al. 93).

Dès le début de l'ère spatiale plusieurs missions satellitaires ont vu le jour, objectifs : élaboration de modèles gravitationnels. La qualité des modèles réalisés dépend de la précision des coefficients de stockes et du degré et de l'ordre obtenus. Des progrès importants ont été réalisés dans la connaissance des grandes et moyennes longueurs d'ondes, notamment avec la mission TOPEX/Poseidon de la NASA et l'ONERA (1992-1995), qui a permis l'élaboration du modèle JGM-3 (70x70) (Nerem et al. 93 ; Tapley et al. 96). Afin d'atteindre les plus hauts degrés dans les coefficients du champ de gravité (faible longueurs d'ondes), trois missions satellitaires ont été programmées après l'an 2000. Le satellite CHAMP a été lancé le 15 juillet 2000, une mission réalisée par le GFZ-Potsdem, le CNES et l'ONERA qui a aboutit aux modèles EIGEN1-S, EIGEN2 et EIGEN-CHAMP03S (Reigber et al. 2004a). Deux ans après le satellite GRACE a été lancé, c'est une mission programmée par la NASA visant à déterminer avec une très grande précision le champ gravitationnel.

Dans la suite de l'étude, le modèle JGM-3 (70x70) est utilisé dans le calcul du potentiel gravitationnel (voir tableau A.6. de l'annexe A).

### II-5-1-4 Modélisations des forces de perturbations gravitationnelles

La force de perturbation due au champ gravitationnel exercée par la terre sur le satellite exprimée dans le repère instantané (OX'Y'Z') est donnée par :

$$\{f_{pot}\}_{RTG} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

A partir des relations qui lient les coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

on peut exprimer (2.48) sous la forme suivante :

$$\{f_{pot}\}_{RTG} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi \cos \lambda}{r} & -\frac{\sin \varphi \sin \lambda}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \\ -\frac{\sin \lambda}{r \cos \varphi} & \frac{\cos \lambda}{r \cos \varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R_n}{\partial r} \\ \frac{\partial R_n}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial R_n}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Les dérivées partielles du potentiel en fonction des coordonnées sphériques sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a_{\odot}}{r}\right)^n \frac{d\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \\ \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_{\odot}}{r}\right)^n \frac{d\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \\ \frac{\partial R}{\partial \lambda} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n m \left(\frac{a_{\odot}}{r}\right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) [-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda] \end{array} \right. \quad (2.51)$$

En utilisant l'équation (2.7), on peut exprimer le vecteur force dans le repère inertiel géocentrique RIG, d'où:

$$\{f_{pot}\}_{RIG} = [Q_1]^{-1} \{f_{pot}\}_{RTG}, \quad (2.52)$$

mais l'utilisation des équations de mouvement de Gauss exige l'utilisation des composantes radiale  $F_R$ , orthoradiale  $F_T$  et normale  $F_N$ . Ainsi, le passage du repère RIG au repère RTN s'effectue de la façon suivante :

$$\{f_{pot}\}_{RTN} = [Q_2]^{-1}\{f_{pot}\}_{RIG}, \quad (2.53)$$

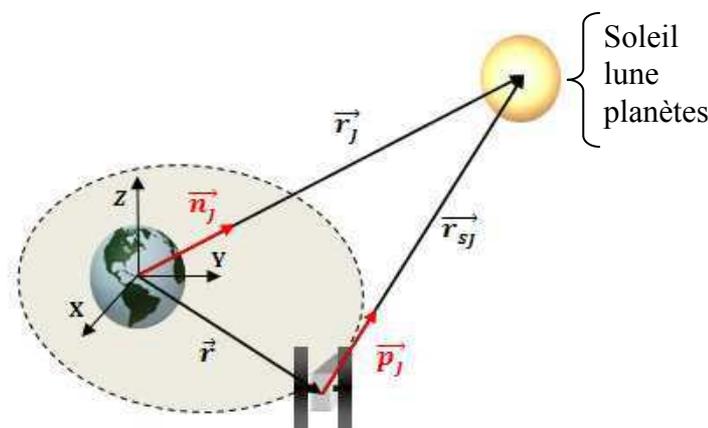
la matrice  $[Q_2]$  est la matrice de passage du repère RTN au repère RIG, qui est peut être exprimée par :

$$[Q_2] = [R_3(-\Omega)][R_1(-i)][R_3(-\omega)][R_3(-\nu)] \quad (2.54)$$

## II-5-2 Perturbations dues à la lune, le soleil et les autres planètes

L'effet des perturbations lunisolaires et planétaires est négligeable à basse orbite, mais pour les missions interplanétaires, orbites fortement elliptiques et orbites géostationnaires, la force du troisième corps est importante. Les études montrent que les perturbations lunisolaires provoquent des oscillations de l'inclinaison orbitale  $i$  qui peuvent atteindre  $\mp 15^\circ$  et des variations séculaires à long termes de l'ascension droite  $\Omega$  et de l'argument du périégée  $\omega$ .

Considérons maintenant l'effet du soleil, la lune et les autres planètes. Supposons que ces corps sont modélisés par des points matériels de masse  $m_j$  et de coordonnées sphériques  $(r_j, \varphi_j, \lambda_j)$  par rapport au repère RTG, explicités sur la figure 2.17.



**Figure 2.17 :** Position relative du troisième corps par rapport au satellite et la terre.

La force de perturbation du troisième corps peut être exprimée via l'expression suivante. Pour plus de détails voir (Tapley et al. 2004) :

$$\vec{f}_{III} = \sum_j \mu_j \left( \frac{\vec{r}_{sj}}{r_{sj}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (2.55)$$

où :

$\vec{r}_j$  : rayon vecteur géocentrique lune, soleil ou planètes,

$\mu_j := (m_j G)$  constante gravitationnelle du corps considéré,

$\vec{r}_{sj}$  : rayon vecteur satellite-3<sup>ième</sup> corps, qu'on peut le mettre sous la forme :

$$\vec{r}_{sj} = \vec{r}_j - \vec{r}, \quad (2.56)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\vec{f}_{III} = - \sum_j \mu_j \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (2.57)$$

Exprimons maintenant l'expression précédente en fonction des vecteurs unitaires  $\vec{p}_j$  et  $\vec{n}_j$  :

$$\vec{f}_{III} = - \sum_j \mu_j \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \vec{p}_j + \frac{1}{r_j^2} \vec{n}_j \right) \quad (2.58)$$

avec :

$$\vec{p}_j = \frac{\vec{r}_{sj}}{r_{sj}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad (2.59)$$

$$\vec{n}_j = \frac{\vec{r}_j}{r_j} \quad (2.60)$$

Le calcul de  $\vec{f}_{III}$  exige la détermination de la position géocentrique du satellite ainsi que la position relative du 3<sup>ième</sup> corps, en utilisant le calcul d'éphémérides.

On peut écrire le vecteur force  $\vec{f}_{III}$  dans le repère RTN en utilisant l'équation (2.54):

$$\{f_{III}\}_{RTN} = [Q_2]^{-1}\{f_{III}\}_{RIG} \quad (2.61)$$

### II-5-3 Perturbations dues à la traînée atmosphérique

Les satellites en contact avec l'atmosphère sont soumis aux forces aérodynamiques, ils subissent une perte de leur énergie mécanique qui se traduit à long terme par une perte d'altitude, qui mettra fin à leur mission. Les forces aérodynamiques se décomposent en trois types : force aérodynamique de traînée ou frottement, force aérodynamique de portance et moment aérodynamique. Pour les altitudes supérieures à 2000 km les effets de l'atmosphère sont négligeable, mais au dessus de cette altitude les satellites subissent des perturbations séculaires qui peuvent atteindre 2km/jour pour l'inclinaison orbitale et jusqu'à 100 km/jour pour l'excentricité et des perturbations périodiques de l'ordre de 2 km/jour pour l'ascension droite (King-Hel, 1987).

Dans la suite de l'étude seule la force de traînée est prise en compte. En général la force aérodynamique de portance et le moment aérodynamique sont négligeables.

#### II-5-3-1 Formulation de la perturbation

La force aérodynamique de traînée dépend principalement de la densité de l'atmosphère, de la vitesse du satellite et de l'interaction entre les constituants de l'atmosphère et les parois du satellite, qu'on peut exprimer par (Montenbruck et Gill, 2000 ; Abd El-Salam et Sehnal, 2004) :

$$\vec{f}_{Atm} = -\frac{1}{2} \rho \sum C_{Di} \frac{S_i}{m} (\vec{v}_r \cdot \vec{n}_i) \cdot \vec{n}_i \quad (2.62)$$

où :

$\rho$  : densité de l'atmosphère à l'altitude du satellite, voir figure A.5 de l'annexe

$C_{Di}$  : coefficient aérodynamique de traînée de la face i,

$S_i$  : section de la surface considérée,

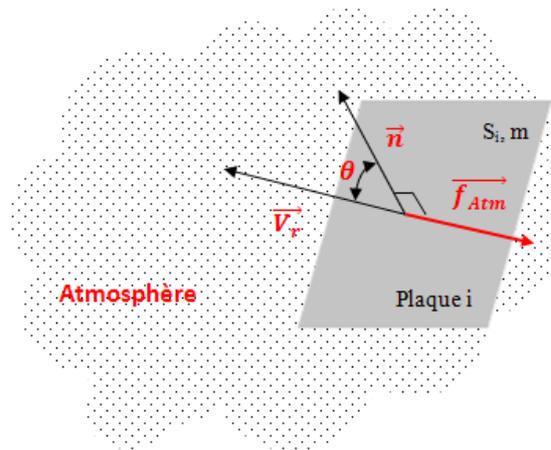
$\vec{n}_i$  : vecteur unitaire normale à la face i,

$\vec{v}_r$  : vecteur vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère en rotation.

Sachant que :

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_i = v_r \cos \theta_i. \quad (2.63)$$

Comme illustré sur la figure 2.18, l'angle  $\theta_i$  est l'angle d'incidence, mesuré entre la normale à la surface considérée et le vecteur vitesse  $\vec{v}_r$ .



**Figure 2.18 :** Vitesse relative du satellite et force de frottement.

ce qui permet d'écrire :

$$\vec{f}_{Atm} = -\frac{1}{2} \rho \sum_i \left( C_{D_i} \frac{S_i \cos \theta_i}{m} \right) v_r \vec{v}_r. \quad (2.64)$$

le terme  $\sum_i \left( C_{D_i} \frac{S_i \cos \theta_i}{m} \right)$  est appelé coefficient balistique du satellite.

Le vecteur vitesse relative  $\vec{v}_r$  par rapport à l'atmosphère en mouvement de rotation est donné par l'expression suivante :

$$\vec{v}_r = \vec{\dot{r}} - \vec{\sigma} \wedge \vec{r}, \quad (2.65)$$

où  $\vec{\dot{r}}$  est le vecteur vitesse du satellite de module  $V$ , alors que  $\vec{\sigma}$  représente le vecteur vitesse de rotation de l'atmosphère. Nous supposons dans cette étude que

$\sigma$  est égale à la vitesse de rotation de la terre. Sachant que l'atmosphère n'est pas fixe dans l'espace mais tourne avec une vitesse de rotation légèrement différente de celle de la terre.

A partir de l'équation (2.65), on peut écrire :

$$v_r^2 = V^2 - 2 \vec{r} \cdot (\vec{\sigma} \wedge \vec{r}) + (\vec{\sigma} \wedge \vec{r})^2. \quad (2.66)$$

Ce qui nous permet d'exprimer les modules des vitesses  $v_r$  et  $V$  en fonction du moment cinétique réduit  $h$ , de l'inclinaison  $i$  et de la latitude  $\varphi$  par :

$$v_r^2 = V^2 - 2 \sigma h \cos i + \sigma^2 r^2 \cos^2 \varphi, \quad (2.67)$$

mettant  $V^2$  en facteur dans le terme à gauche de l'équation précédente, on aura :

$$v_r^2 = V^2 k_r, \quad (2.68)$$

avec

$$k_r = 1 - \frac{2 \sigma h \cos i}{V^2} + \frac{\sigma^2 r^2 \cos^2 \varphi}{V^2}. \quad (2.69)$$

La force aérodynamique de trainée est dirigée dans le sens opposé du vecteur vitesse relative, elle admet trois composantes dans le repère RTN et qui sont données par (Abd El-Salam et Sehnal, 2004) :

$$\{f_{Atm}\}_{RTN} = -\frac{1}{2} K_D \rho V \left\{ \begin{array}{l} e \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \sin v \\ \frac{a(1-e^2)}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} - \sigma r \cos i \\ \sigma r \cos(v + \omega) \sin i \end{array} \right\} \quad (2.70)$$

Avec

$$K_D = \sum_i \left( C_{Di} \frac{S_i \cos \theta_i}{m} \right) \sqrt{k_r}. \quad (2.71)$$

Notons que le moment cinétique réduit  $h$  est donné par :

$$h = |\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}|. \quad (2.72)$$

### **II-5-3-2 Modélisation de la densité de l'atmosphère**

Le modèle atmosphérique utilisé dans cette étude est le modèle MSISE-90 (Hedin, 1991) recommandé par ESA. Ce modèle est semi-empirique complété par une fonction empirique introduite par Hedin (Hedin, 1974) qui tient compte de différents paramètres comme les indices de flux solaire et d'activité géomagnétique, la latitude, l'heure locale, la saison,...

### **II-5-3-3 Coefficient aérodynamique**

Le coefficient aérodynamique de traînée  $C_D$  caractérise l'interaction des constituants de l'atmosphère à une hauteur donnée avec les matériaux des surfaces qui composent le satellite. Les modèles mathématiques développés pour le calcul des coefficients  $C_D$  sont basés sur la nature de la collision et le mode de réflexion des molécules de l'atmosphère une fois en contact avec les parois du satellite (Schamberg, 1959b ; Sentman, 1961a ; Saltsburg et al., 1967 ; Zuppari, 2005). En effet pour les altitudes supérieures à 125 km, les satellites sont soumis à un écoulement moléculaire libre. A basse altitude l'atmosphère est dense, elle est constituée principalement de l'oxygène atomique, qui a pour effet la contamination des surfaces. Les molécules en mouvement, une fois en contact avec les parois du satellite cèdent une partie de leur énergie cinétique, emprisonnées pendant un laps de temps, elles sont ensuite réfléchies dans l'espace, la réflexion dans ce cas est complètement diffuse. Mais plus on prend de l'altitude plus la concentration de l'oxygène atomique diminue d'où diminution du degré de contamination des surfaces, alors dans ce cas la réflexion est quasi-spéculaire et l'énergie cédée aux parois est moins importante (Moe et Moe, 2005 ; Bowman et Moe, 2005).

De la nature de la collision et du mode de réflexion, on déduit que le coefficient aérodynamique  $C_D$  dépend de plusieurs facteurs : la forme du satellite, son altitude, l'excentricité de son orbite, la température et la masse moyenne moléculaire de l'atmosphère, de l'activité solaire et du degré de contamination des surfaces.

Plusieurs modèles mathématiques ont été développés pour le calcul du  $C_D$ . On peut citer les travaux de Cook (Cook,1965 ; 1966) concernant les satellites de forme compacte (cylindrique, sphérique, cubique,...), la valeur préconisée du coefficient aérodynamique est de 2.2. Cette valeur est indépendante de la forme et de l'altitude. Dans son modèle mathématique la réflexion des molécules est considérée complètement diffuse. Dans ces travaux concernant un satellite sphérique, Zerouati 1987 a montré que le coefficient aérodynamique est fonction de l'altitude et de l'état de l'atmosphère : calme, moyenne ou excitée. Moe (Moe et Bowman, 2005), Bowman (Bowman et al. 2007) et Pardini (Pardini et al., 2008) ont étudié l'effet de l'atmosphère, de l'activité solaire, degré de contamination et la composition des surfaces du satellite en utilisant les mesures effectuées in situ du coefficient d'accommodation d'énergie.

Les coefficients aérodynamiques sont la somme de coefficients d'absorption (des molécules de gaz) et de réémission supposée diffuse. Ils s'explicitent différemment selon la forme et la température de la paroi dans une hypothèse de distribution Maxwellienne (modèle d'interaction gaz-surface) des vitesses moléculaires et dans le cas d'un régime d'écoulement moléculaire libre (Cook,1965 ; Harrison et Swinerd, 1995 ; Koppenwallner, 2008) :

$$C_D = C_{Da} + C_{Dr} \quad (2.73)$$

Notons que  $C_{Da}$  est le coefficient d'absorption, alors que  $C_{Dr}$  est le coefficient de réémission.

Dans le cas d'une surface plane les coefficients aérodynamiques sont donnés par (Graziano, 2007):

$$\begin{cases} C_{Da} = (1 + \operatorname{erf}(s \sin \theta)) \left(1 + \frac{1}{2s^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}s \sin \theta} e^{-(s \sin \theta)^2} \\ C_{Dr} = \frac{1}{2s^2} R_T (\sqrt{\pi}s \sin \theta (1 + \operatorname{erf}(s \sin \theta)) + e^{-(s \sin \theta)^2}) \end{cases} \quad (2.74)$$

Sachant que la fonction d'erreur  $\operatorname{erf}(x)$  vaut :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (2.75)$$

où  $s$  représente le ratio de vitesse moléculaire exprimé par :

$$s = V_e \sqrt{\frac{W_{mm}}{2RT}}, \quad (2.76)$$

$R$  est la constante des gaz parfaits, alors que,  $V_e$  est la vitesse d'écoulement des molécules, égale à la vitesse du satellite  $V$  dans le cas d'un régime d'écoulement libre. Sachant que  $R_T$  est le ratio de température exprimé selon le signe de  $\sin \theta$  :

$$\sin \theta > 0 ; R_T = \sqrt{\frac{T_i}{T}} + \sqrt{1 - \alpha} \left( s - \sqrt{\frac{T_i}{T}} \right) \quad (2.77)$$

$$\sin \theta < 0 ; R_T = \sqrt{\frac{T_i}{T}} + \sqrt{1 - \alpha} \left( 1 - \sqrt{\frac{T_i}{T}} \right) \quad (2.78)$$

Dans cette étude  $T$  représente la température de l'atmosphère donnée par le modèle d'atmosphère MSISE-90 (voir figure A.4 de l'annexe A) et exprimée en degré kelvin, alors que  $T_i$  est la température de la face  $i$  prise égale à 300 K (Graziano, 2007).

Le paramètre  $\alpha$  est le coefficient d'accommodation de Cook, exprimé par :

$$\alpha = \frac{3.6u}{(1 + u)^2}, \quad (2.79)$$

avec :

$$u = \min \left( 1, \frac{W_{mm}}{16} \right), \quad (2.80)$$

où  $W_{mm}$  est le poids moléculaire moyen, exprimé en kg/kmol. Par définition  $W_{mm}$  d'un mélange de gaz composé de  $c$  constituants est équivalent au poids moyen de la masse molaire de chaque constituant

$$W_{mm} = \frac{\sum_{i=1}^c n_i m_i}{\sum_{i=1}^c n_i}. \quad (2.81)$$

Les termes  $n_i$  et  $m_i$  sont respectivement le nombre de molécules par unité de volume (densité) et la masse molaire du  $i^{\text{ème}}$  constituant. Sachant que les constituants de l'atmosphère sont principalement H, He, N, N<sub>2</sub>, O, O<sub>2</sub> et Ar dont la densité de ces gaz est donnée par la figure A.5 de l'annexe A. Au voisinage de 200 km les principaux constituants sont O et le N<sub>2</sub> et à 600 km la densité de He est comparable à celle de O. Pour les altitudes élevées He reste le gaz le plus dominant.

#### II-5-4 Perturbations dues à la pression de radiation solaire

Le Soleil émet de façon continue autour de lui une énergie sous forme d'ondes électromagnétiques. Quand une surface est exposée à une source de rayonnement elle subit une pression de radiation due au choc des photons avec cette surface. Ce phénomène physique fut déduit théoriquement par James Maxwell en 1871 et prouvé expérimentalement par Pyotr Lebedev en 1900, puis par Ernest Nichols et Gordon Hull en 1901.

Lancé en 1958 le satellite VANGUARD I a fait l'objet de plusieurs études. En particulier, l'étude faite par Musen (Musen et al., 1960) en 1960 a révélée une nette différence entre l'orbite calculée et l'orbite réelle et cela malgré l'introduction du terme J3 et du champ gravitationnel lunisolaire dans l'équation du mouvement du satellite, ce qui a suscité l'attention des auteurs et les a poussé à confirmer l'existence d'une perturbation due à la pression de radiation solaire. En 1960 un autre satellite appelé Echo I a été lancé à une altitude de 1852 km. Les conséquences de la PRS ont été rapidement mit en évidence par une perte d'altitude du satellite au périégée d'environ 3,5 km/jour (Parkinson et al., 1960). A partir de la, les chercheurs ont développés les premiers modèles de la PRS en se basant sur des hypothèses simplificatrices très simples en supposant que la réflexion des rayons lumineux est spéculaire et que la surface éclairée du satellite projetée au soleil est constante (forme sphérique), voir (Musen et al., 1960 ; Kozai, 1961 ; Koskela, 1962) . Après, d'autres chercheurs ont présentés des modèles plus raffinés et plus précis en tenant compte de la forme du satellite et de la nature de l'interaction des photons avec les parois du satellite et du mode d'absorption et de réflexion spéculaire ou diffuse des surfaces éclairées. On peut citer les modèles ROCK 4 et ROCK 42 développés par Fliegel (Fliegel et al., 1985) et (Fliegel et Gallini, 1989) pour les satellites GPS. Dans ces modèles le satellite est divisé en surfaces planes et cylindriques. Le même auteur a développé

deux autres modèles T10 et T20 en tenant compte des phénomènes d'absorption et de réflexion des ondes électromagnétiques (Fliegel 1992). Par la suite, Marshal (Marshal et al., 1995) a développé un modèle plus complexe appelé BWSM pour la mission Topex/Poseidon et qui consiste à modéliser le satellite par six faces et le panneau solaire par deux faces. Les résultats obtenus sont très satisfaisantes du moment que l'erreur radiale entre l'orbite calculée et l'orbite réelle ne dépasse pas 13 cm sur une période de dix jours, ce qui peut être considéré comme un exploit. D'autres modèles par la suite ont été développés. On peut citer les travaux de Ziebart (Ziebart et Darc, 2001 ; Ziebart, 2004) et de Bar-Sever (Bar-Sever et Kuang, 2004).

Dans la suite de l'étude le rayonnement terrestre ainsi que le flux albédo ne sont pas pris en compte.

#### II-5-4-1 Réflexion spéculaire

Lorsque le rayon incident est réfléchi dans une direction privilégiée alors la réflexion est dite spéculaire, voir la figure 2.19.

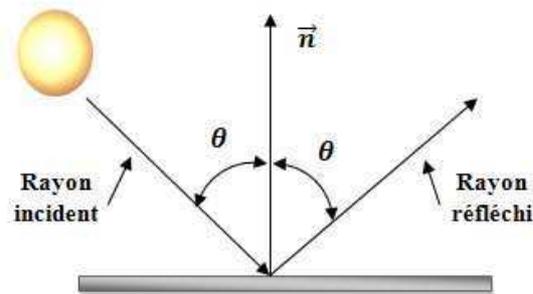


Figure 2.19 : Réflexion spéculaire.

La réflexion spéculaire dans ce cas provoque deux forces, une suivant la direction du rayon incident et l'autre suivant le rayon réfléchi.

La force élémentaire due au rayon incident est donnée par (McInnes, 1999 ; Webb, 2007) :

$$\overrightarrow{dF}_i = \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 dA \cos \theta \overrightarrow{u}_i, \quad (2.82)$$

où :

- $\Phi_0$  : constante solaire,
- $c$  : vitesse de la lumière,
- $r_s$  : distance de référence égale à 1UA,
- $r_{ss}$  : distance soleil-satellite.

Nous savons que le flux photonique une fois en contact avec les parois du satellite va céder une partie de son énergie aux molécules du corps du satellite à cause du phénomène d'absorption, et le reste étant réfléchi. Ce qui nous permet d'écrire l'équation (2.82) sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{dF}_i = \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 (\kappa dA \cos \theta \overrightarrow{u}_i + (1 - \kappa) dA \cos \theta \overrightarrow{u}_i), \quad (2.83)$$

Le premier terme à droite représente la force due à la réflexion, alors que le deuxième terme représente la force due à l'absorption d'une partie du rayon incident. Ainsi nous pouvons exprimer la force  $\overrightarrow{dF}_{rs}$  due à la réflexion spéculaire par :

$$\overrightarrow{dF}_{rs} = \kappa \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 dA \cos \theta \overrightarrow{u}_r, \quad (2.84)$$

la résultante de ces deux forces est donnée par :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF}_i + \overrightarrow{dF}_{rs}, \quad (2.85)$$

la résultante exprimées dans la base  $(\overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{u}_n)$  appliquée à un élément de surface  $dA$  du satellite est donnée par :

$$\overrightarrow{dF} = \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 [(1 - \kappa) dA \cos \theta \overrightarrow{u}_i + 2\kappa dA \cos^2 \theta \overrightarrow{u}_n], \quad (2.86)$$

D'après la figure 2.20, on peut écrire les relations suivantes :

$$\overrightarrow{u}_i = \cos \theta \overrightarrow{u}_n + \sin \theta \overrightarrow{u}_t, \quad (2.87)$$

$$\overrightarrow{u}_r = \cos \theta \overrightarrow{u}_n - \sin \theta \overrightarrow{u}_t, \quad (2.88)$$

qu'on peut l'exprimer dans la base  $(\vec{p}_s, \vec{n})$  de la façon suivante :

$$\vec{dF} = -\frac{\Phi_0}{c} \left(\frac{r_s}{r_{ss}}\right)^2 [(1 - \kappa) dA \cos \theta \vec{p}_s + 2\kappa dA \cos^2 \theta \vec{n}], \quad (2.89)$$

du moment que :

$$\vec{u}_i = -\vec{p}_s \text{ et } \vec{u}_n = -\vec{n} \quad (2.90)$$

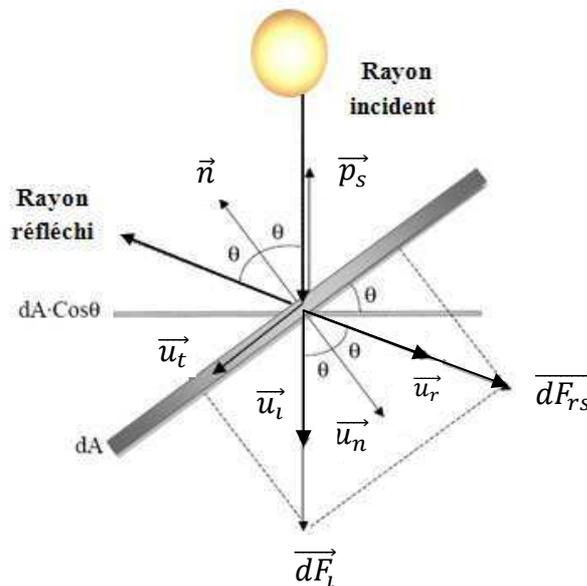


Figure 2.20 : Forces de PRS dans le cas d'une réflexion spéculaire.

#### II-5-4-2 Réflexion diffuse

Lorsque la réflexion du rayon incident se fait dans différentes directions de l'espace, alors la réflexion est dite diffuse (voir figure 2.21). Chaque rayon réfléchi provoque une force appliquée sur l'élément de surface  $dA$  de direction opposée à ce rayon (McInnes, 1999 ; Webb, 2007).

Dans ce cas, la force due à la réflexion spéculaire est exprimée par :

$$\vec{dF}_{rs} = \nu \kappa \frac{\Phi_0}{c} \left(\frac{r_s}{r_{ss}}\right)^2 dA \cos \theta \vec{u}_r, \quad (2.91)$$

et la force due à la réflexion diffuse s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{dF_{rd}} = \frac{2}{3} (1 - \nu) \kappa \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 dA \cos \theta \overrightarrow{u_n}, \quad (2.92)$$

sachant que  $\overrightarrow{dF_1}$  peut s'exprimer ainsi :

$$\overrightarrow{dF_l} = \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 \left[ \begin{array}{l} (1) \quad (\nu \kappa dA \cos \theta) + \\ (2) \quad ((1 - \nu) \kappa dA \cos \theta) + \\ (3) \quad ((1 - \kappa) dA \cos \theta) \end{array} \right] \overrightarrow{u_l} \quad (2.93)$$

Le premier terme à droite représente la réflexion spéculaire, le deuxième terme est lié à la réflexion diffuse alors que le troisième terme est celui de l'absorption.

La force résultante  $\overrightarrow{dF}$  dans ce cas est donnée par:

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF_l} + \overrightarrow{dF_{rs}} + \overrightarrow{dF_{rd}}, \quad (2.94)$$

exprimée dans la base  $(\overrightarrow{p_s}, \overrightarrow{n})$  par :

$$\overrightarrow{dF} = -\frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 dA \cos \theta \left[ \left( 2\nu \kappa \cos \theta + (1 - \nu) \kappa \frac{2}{3} \right) \overrightarrow{n} + (1 - \nu \kappa) \overrightarrow{p_s} \right] \quad (2.95)$$

on voit bien que si  $\nu = 1$ , on retrouve le cas de la réflexion spéculaire et si  $\nu = 0$ , c'est le cas où la réflexion est complètement diffuse.

Rappelons que la résultante  $dF$  est la force élémentaire appliquée à l'élément  $dA$ . Pour calculer la force totale de pression de radiation solaire appliquée au satellite il faut intégrer sur toute la face éclairée.

### II-5-4-3 Modélisation de la force de pression de radiation solaire

La force exercée par le flux photonique sur les parois du satellite est la résultante des forces dues à la réflexion spéculaire, réflexion diffuse et

l'absorption. Ces forces dépendent de la forme du satellite et des propriétés optiques. En général les formes prismatiques, cylindriques et sphériques sont les plus utilisées dans la conception des satellites.

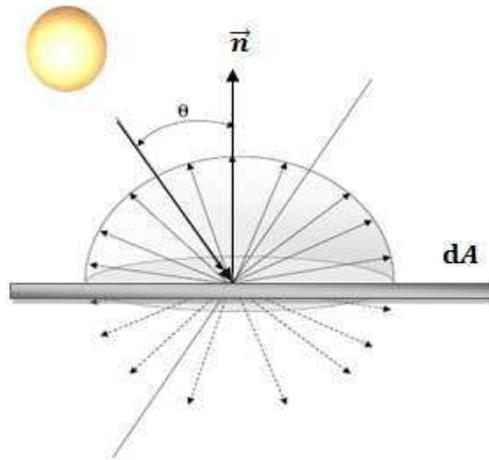


Figure 2.21 : Réflexion diffuse.

Considérons le cas d'un satellite de forme prismatique muni de panneaux solaires composé de NP surfaces planes de normales  $\vec{n}_i$ , positionné par rapport à la terre par le rayon vecteur  $\vec{r}$  et par rapport au soleil par  $\vec{r}_{ss}$ , explicités sur la figure 2.22. La relation entre ces deux vecteurs est déterminée à partir de la figure 2.23 :

$$\vec{r}_{ss} = \vec{r}_s - \vec{r}, \quad (2.96)$$

où  $\vec{r}_s$  est le rayon vecteur géocentrique du soleil. Notons que la position du soleil par rapport au repère RTG est obtenue à partir d'un calcul d'éphémérides.

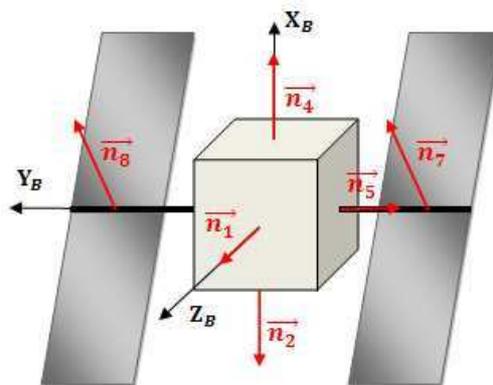
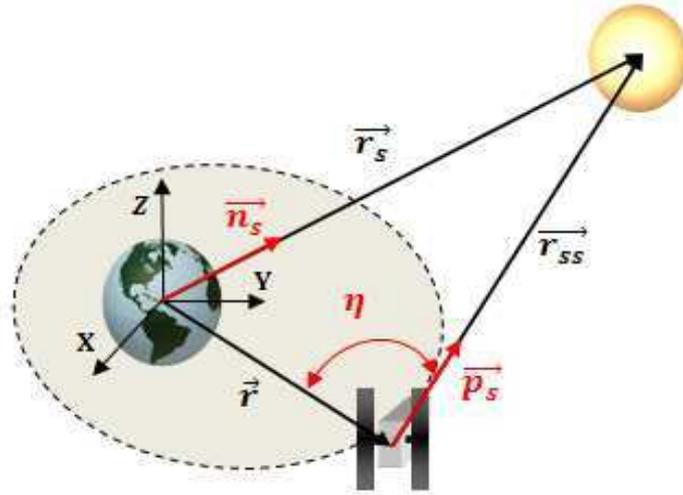


Figure 2.22 : Surfaces éclairées du satellite.



**Figure 2.23 :** Position relative du satellite par rapport au soleil.

Le vecteur de base  $\vec{p}_s$  du rayon vecteur  $\vec{r}_{ss}$  est exprimé par:

$$\vec{p}_s = \frac{\vec{r}_{ss}}{r_{ss}} \quad (2.97)$$

La force exercée par le flux photonique sur une face éclairée du satellite peut être obtenue par intégration de l'équation (2.95). La force de pression de radiation solaire n'est que la résultante de toutes les forces exercées sur les faces éclairées et qui peut être exprimée par (Webb, 2007) :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{PRS} = -\Upsilon \frac{\Phi_0}{c} \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N_p} & \left[ \left( 2 \nu_i \kappa_i A_i (\vec{n}_i \cdot \vec{p}_s)^2 + (1 - \nu_i) \kappa_i \frac{2}{3} A_i (\vec{n}_i \cdot \vec{p}_s) \right) \vec{n}_i \right. \\ & \left. + [(1 - \nu_i \kappa_i) A_i (\vec{n}_i \cdot \vec{p}_s)] \vec{p}_s \right], \end{aligned} \quad (2.98)$$

Notons que la force  $\vec{f}_{PRS}$  est exprimée dans la base RFS du satellite, pour cela,  $\vec{p}_s$  doit être projeté dans cette même base.

La force de pression de radiation solaire est ensuite exprimée dans le repère RTN:

$$\{f_{PRS}\}_{RTN} = [Q_3] \{f_{PRS}\}_{RFS}, \quad (2.99)$$

où :

- $v_i$  coefficient de réflectivité spéculaire de la face considérée,
- $\kappa_i$  coefficient de réflectivité diffuse de la face considérée,
- $A_i$  surface de la face considérée,
- $\Upsilon$  facteur d'éclipse,
- $\vec{n}_i$  vecteur unitaire normale la face considérée.
- $[Q_3]$  matrice de passage du repère RFS au repère RTN.

Sachant que si  $\vec{n} \cdot \vec{p}_s > 0$  c'est la face avant de normale  $\vec{n}$  qui est éclairée et dans le cas où le produit scalaire est négatif c'est la face arrière de normale  $-\vec{n}$  qui est éclairée.

## II-6 Calcul des périodes d'éclipse

Le mouvement orbital entraîne des périodes d'éclipses solaires durant lesquelles les rayons lumineux du soleil sont interceptés par la terre ou la lune, le satellite se trouve donc dans l'ombre. C'est une phase critique pour le satellite du moment que l'énergie solaire est absente ce qui peut provoquer un déséquilibre thermique ou même un manque en électricité qui peut être fatale pour la mission prévue. Sans oublier la phase de transition entre le soleil et l'ombre appelée la pénombre qui constitue une source de perturbation non négligeable. Les rayons lumineux provenant du soleil sont interceptés par la terre, la forme sphérique de cette dernière favorise la formation de deux régions de forme conique appelées ombre et pénombre, voir la figure 2.24. La pénombre est une région partiellement éclairée, si la pression de radiation est nulle dans l'ombre, elle ne l'est pas dans la pénombre du fait qu'une partie du soleil est visible au satellite.

### II-6-1 Phase d'éclipse

Si la pression de radiation est nulle dans l'ombre, elle ne l'est pas dans la pénombre, du fait qu'une partie du soleil est visible au satellite. Géométriquement on peut définir ces trois régions par l'angle  $\eta$ , l'angle formé par les rayons vecteurs  $-\vec{r}$  et  $\vec{r}_{SS}$ , donné par la relation suivante :

$$\eta = \cos^{-1} \left( \frac{-\vec{r} \cdot \vec{r}_{SS}}{r r_{SS}} \right) \quad (2.100)$$

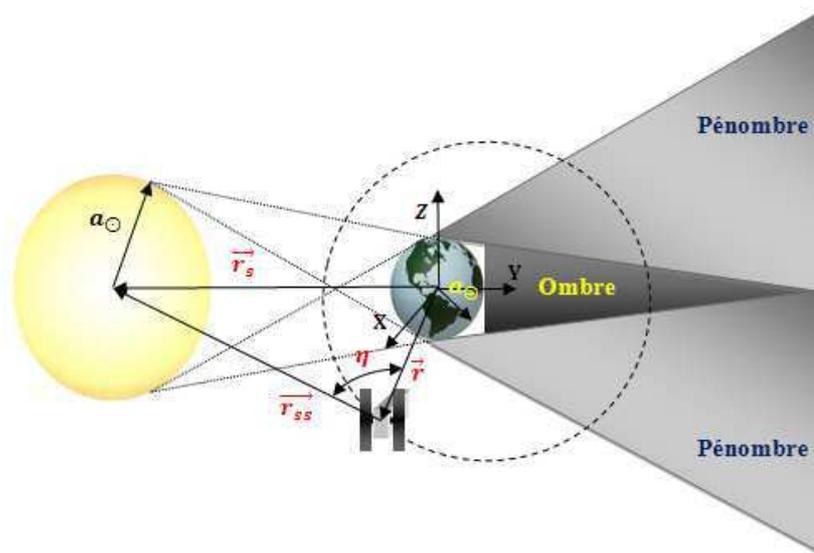


Figure 2.24 : Eclipse du satellite : phases de pénombre, d'ombre et d'enseillement.

### II-6-1-1 Ensoleillement

Vus depuis le satellite, les deux disques apparents du soleil et de la terre sont éloignés et ne se coupent pas. C'est la phase dans laquelle le satellite est éclairé, voir la figure 2.25. La relation géométrique modélisant la phase ensoleillement est donnée par :

$$\eta \geq \rho_s + \rho_e \quad (2.101)$$

Où  $\rho_s$  et  $\rho_e$  sont les angles apparents de la terre et du soleil.

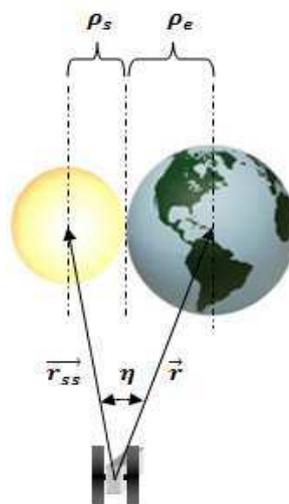


Figure 2.25 : Phase ensoleillement.

### II-6-1-2 Ombre

C'est la phase dans laquelle le soleil est complètement invisible. Le disque apparent du soleil est caché par celui de la terre, voir la figure 2.26. Cette configuration est définie mathématiquement par :

$$\eta \leq (\rho_e - \rho_s) \quad (2.102)$$

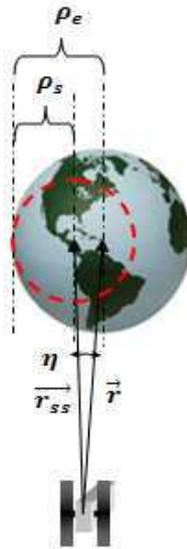


Figure 2.26 : Phase ombre.

### II-6-1-3 Pénombre

Comme illustré sur la figure 2.27, la pénombre est la phase dans laquelle le soleil est partiellement visible depuis le satellite. Les deux disques se coupent, une partie du disque apparent du soleil éclaire le satellite. C'est une phase intermédiaire entre l'ensoleillement et l'ombre, qu'on peut exprimer par la relation suivante :

$$\rho_e - \rho_s < \eta < \rho_e + \rho_s \quad (2.103)$$

Les angles apparents  $\rho_s$  et  $\rho_e$  sont les angles formés par les tangentes aux disques depuis le satellite et les rayons vecteurs, explicités sur la figure 2.28.

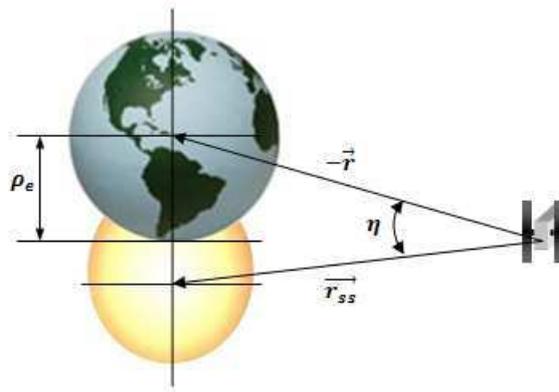


Figure 2.27 : Phase pénombre.

et qui sont donnés par :

$$\rho_e = \sin^{-1} \left( \frac{a_{\odot}}{r} \right) \quad (2.104)$$

$$\rho_s = \sin^{-1} \left( \frac{a_{\oplus}}{r_{ss}} \right) \quad (2.105)$$

où  $a_{\oplus}$  est le rayon moyen du soleil.



Figure 2.28 : Angles apparents du soleil et de la terre.

## II-6-2 Facteur d'éclipse

Le facteur d'éclipse est une fonction régularisante, valant 1 au soleil et 0 à l'ombre. La pénombre est définie par une fonction proportionnelle à la surface visible du soleil, définie par :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \geq \rho_s + \rho_e \\ 0 & \text{si } \eta \leq (\rho_e - \rho_s) \\ 1 - \frac{A_e \cap A_s}{A_e} & \text{si } \rho_e - \rho_s < \eta < \rho_e + \rho_s \end{cases}. \quad (2.107)$$

Les quantités  $A_e$  et  $A_s$  sont les surfaces apparentes de la terre et du soleil.

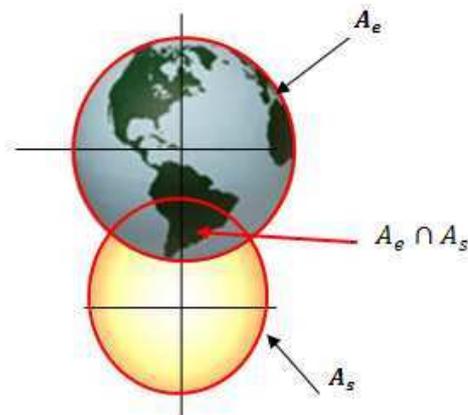
$$A_e = \pi \rho_e^2 \quad \text{et} \quad A_s = \pi \rho_s^2 \quad (2.107)$$

Pendant la phase pénombre, la partie  $A_e \cap A_s$  du disque solaire n'est pas visible au satellite, voir la figure 2.29. A partir des relations géométriques on peut déterminer la surface non visible (Webb, 2007) :

$$A_e \cap A_s = \rho_s^2 \cos^{-1}\left(\frac{\xi}{\rho_s}\right) + \rho_e^2 \cos^{-1}\left(\frac{\eta - \xi}{\rho_e}\right) - \eta \left(\sqrt{(\rho_s^2 - \xi^2)}\right), \quad (2.108)$$

Avec :

$$\xi = \frac{\eta^2 + \rho_s^2 - \rho_e^2}{2\eta}. \quad (2.109)$$



**Figure 2.29** : Eclipse partielle du soleil par la terre.

## II-7 Ephémérides de la lune et du soleil

Le calcul d'éphémérides du soleil et de la lune est nécessaire pour le calcul des forces de perturbations ainsi que pour le calcul du flux solaire, du flux terrestre et des phases d'éclipses. Les positions géométriques des planètes sont calculées à partir des théories planétaires sans perturbations (mouvement képlérien). Dans cette étude le modèle de Montenbruck (Montenbruck, 1989) est utilisé pour déterminer l'ascension droite et la déclinaison du soleil et de la lune respectivement.

La longitude géocentrique  $\lambda_s^e$ , l'altitude  $r_s^e$  et la latitude  $\varphi_s^e$  du soleil par rapport au repère lié à l'écliptique sont données par :

$$\lambda_s^e = \Omega + \omega + M + 6892'' \sin M + 72'' \sin 2M, \quad (2.110)$$

$$r_s^e = (149.619 - 2.499 \cos M - 0.021 \cos 2M)10^6 \text{km}, \quad (2.111)$$

$$\varphi_s^e = 0, \quad (2.112)$$

Du moment que l'orbite du soleil coïncide avec l'écliptique, la latitude  $\varphi_s^e$  du soleil est nulle.

Sachant que l'ascension droite du nœud ascendant  $\Omega$ , l'argument du périégée  $\omega$  et l'anomalie moyenne  $M$  sont exprimées par

$$\Omega + \omega = 282^\circ 9400 \quad (2.113)$$

$$M = 357^\circ 5256 + 35999^\circ 049 t \quad (2.114)$$

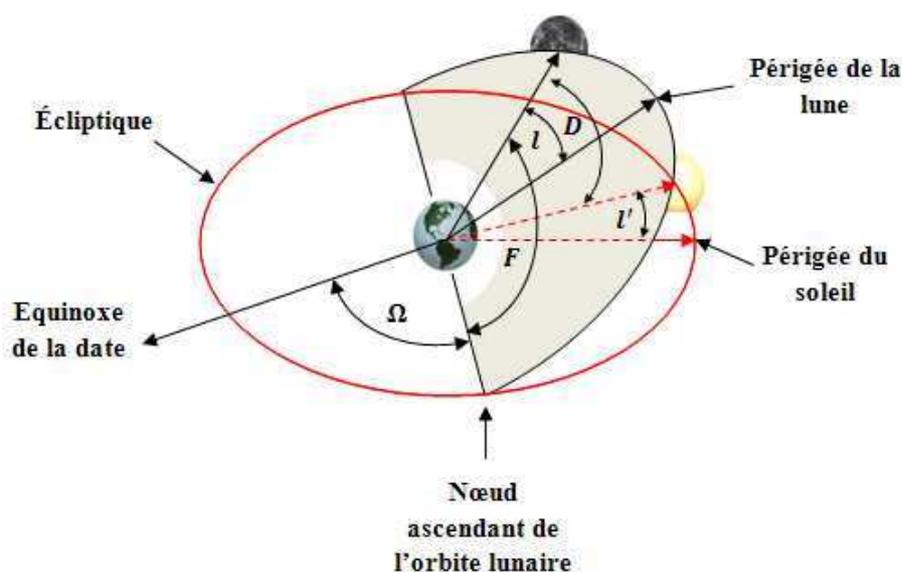
Dans le cas de la lune la longitude géocentrique  $\lambda_m^e$ , l'altitude  $r_m^e$  et la latitude  $\varphi_m^e$  de la lune par rapport au repère lié à l'écliptique sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_m^e = & L_0 + 22640'' \sin l + 769'' \sin 2l - 4586'' \sin(l - 2D) \\ & + 2370'' \sin 2D - 668'' \sin l' - 412'' \sin 2F \\ & - 212'' \sin(2l - 2D) - 206'' \sin(l + l' - 2D) \\ & + 192'' \sin(l + 2D) - 165'' \sin(l' - 2D) \\ & - 110'' \sin(l + l') - 55'' \sin(2F - 2D) \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^e = & 18520'' \sin(F + l - L_0 + 412'' \sin 2F + 541'' \sin l') \\
 & -526'' \sin(F - 2D) + 44'' \sin(l + F - 2D) \\
 & -31'' \sin(-l + F - 2D) - 25'' \sin(-2l + F) \\
 & -23'' \sin(l' + F - 2D) + 21'' \sin(-l + F) \\
 & +11'' \sin(-l' + F - 2D)
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}
 r_m^e = & 385000 - 20905 \cos(l) - 3699 \cos(2D - l) - 2956 \cos(2D) \\
 & -570 \cos(2l) + 246 \cos(2l - 2D) - 205 \cos(l' - 2D) \\
 & -171 \cos(l + 2D) - 152 \cos(l + l' - 2D).
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Où  $L_0, l, l', F$  et  $D$  sont les coefficients de Delaunay, dont les coefficients polynomiaux sont donnés par le tableau A.1 de l'annexe A et explicités par la figure 2.30 suivante :



**Figure 2.30** : Les angles de Delaunay.

Les coordonnées cartésiennes sont exprimées en fonction des coordonnées sphériques dans le repère écliptique par :

$$\left\{ r_s(m) \right\}_{ECL} = \left\{ \begin{array}{l} r_s(m) \cos \lambda_s(m) \cos \varphi_s(m) \\ r_s(m) \sin \lambda_s(m) \cos \varphi_s(m) \\ r_s(m) \sin \varphi_s(m) \end{array} \right\}_{ECL} \tag{2.118}$$

Le passage aux coordonnées cartésiennes relatives au plan équatorial s'effectue par une simple rotation par rapport à la ligne vernale du plan écliptique d'une valeur de  $\varepsilon_0$  (inclinaison).

$$\{r_{s(m)}\}_{RIG} = [Q_1(\varepsilon_0)]\{r_{s(m)}\}_{ECL} \quad (2.119)$$

L'ascension droite  $\alpha_s$  et la déclinaison  $\delta_s$  du soleil sont liées à la longitude géocentrique  $\lambda_s^e$  et la latitude  $\varphi_s^e$  par les relations de la trigonométrie sphérique suivantes :

$$\alpha_s = atan(tan \lambda_s^e \cos \varepsilon_0) \quad (2.120)$$

$$\delta_s = asin(\sin \varepsilon_0 \sin \lambda_s^e) \quad (2.121)$$

et dans le cas de la lune par :

$$\alpha_m = atan\left(-tan \varphi_m^e \frac{\sin \varepsilon_0}{\cos \lambda_m^e} + tan \lambda_m^e \cos \varepsilon_0\right), \quad (2.122)$$

$$\delta_m = asin(\sin \varphi_m^e \cos \varepsilon + \cos \varphi_m^e \sin \lambda_m^e \sin \varepsilon), \quad (2.123)$$

avec :

$$t = \frac{(JD - 2451545.0)}{36525.0}, \quad (2.124)$$

où t est le nombre de siècles julien depuis J2000.0 et JD est la date julienne.

## II-8 Flux thermiques

Le flux thermique est composé du flux solaire émis par le soleil, du flux albédo et du flux terrestre.

### II-8-1 Flux solaire

Le flux solaire reçu par le panneau solaire dépend principalement de l'orientation du panneau solaire vis-à-vis des rayons lumineux émis par le soleil. En phase d'éclipse la terre intercepte les rayons lumineux. De ce fait, le flux

soilaire est nul. L'expression qui permet de calculer ce flux est la suivante (Yang et al., 2004) :

$$q_s(t) = \Phi_0 \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 \gamma \alpha A \cos \theta(t). \quad (2.125)$$

où :

A : surface du panneau solaire

$\alpha$  : coefficient d'absorption solaire de la surface du panneau

$\theta(t)$  : angle formé entre la normale à la surface considérée et le rayon vecteur soleil-satellite  $\vec{r}_{ss}$ , il varie avec le mode de navigation du satellite, les paramètres orbitaux de ce dernier et la position relative du soleil.

## II-8-2 Flux albédo

La terre réfléchit environ 30% du rayonnement électromagnétique reçu du soleil. Le flux reçu dépend principalement de l'orientation du panneau solaire vis-à-vis des rayons lumineux réfléchis par la terre, c'est à dire de la position relative du satellite par rapport au soleil et la terre. Le flux albédo intercepté par le panneau solaire est donné par (Yang et al., 2004) :

$$q_{al}(t) = \Phi_0 \left( \frac{r_s}{r_{ss}} \right)^2 \gamma f \alpha F_{sat-ter} A \cos \beta(t). \quad (2.126)$$

où :

$f$  : facteur albédo,

$\beta(t)$  : l'angle formé entre le plan orbital et  $\vec{r}_s$ . Il dépend de la position relative du soleil et des paramètres orbitaux. L'angle  $\beta$  varie continuellement et atteint des valeurs minimales et maximales, ce qui explique la variation du flux albédo,

$F_{sat-ter}$  : facteur de vue satellite-terre.

Le facteur de vue dépend essentiellement de l'orientation du panneau solaire par rapport au rayon vecteur terre-satellite et de son altitude.

Le facteur de vue est exprimé par (Chung et Naraghi, 1981) :

$$F_{sat-ter} = \begin{cases} \frac{\cos \phi}{H^2} & \text{si } 0 \leq \phi \leq \Psi \\ -\frac{H_1 \sin \phi}{\pi H^2} \sqrt{1 - (H_1 \cot \phi)^2} \\ + \frac{1}{\pi} \left( \text{atan}(\sin \phi) \frac{\sqrt{1 - (H_1 \cot \phi)^2}}{H_1} \right) & \text{si } \Psi < \phi \leq \pi - \Psi \\ + \frac{\cos \phi}{H^2} \text{acos}(-H_1 \cot \phi) & \\ 0 & \text{si } \pi - \Psi < \phi < 2\pi \end{cases} \quad (2.127)$$

avec :

$$H = \frac{r}{a_{\odot}}, \quad (2.128)$$

$$H_1 = \sqrt{H^2 - 1} \quad (2.129)$$

$$\phi = \text{atan } H_1. \quad (2.130)$$

La figure 2.31 explicite les angles  $\phi$  et  $\beta$  ainsi que les différents vecteurs.

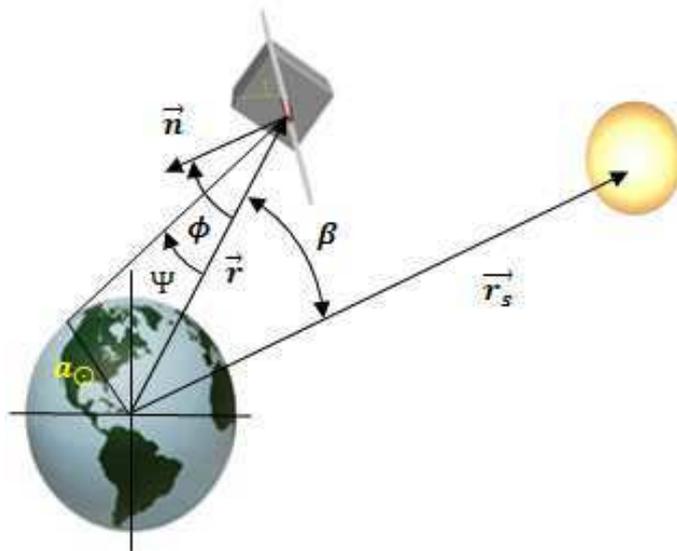


Figure 2.31 : Rayonnement terrestre.

### II-8-3 Flux terrestre

La terre est équivalente à une sphère (corps noir) de 250 K environ, elle émet en permanence un rayonnement électromagnétique. Le flux terrestre reçu par le panneau solaire est donné par (Yang et al., 2004) :

$$q_t(t) = q_{ir} F_{sat-ter} A \varepsilon \quad (2.132)$$

Le terme  $q_{ir}$  est le flux radiatif terrestre donné par l'équation suivante :

$$q_{ir} = \sigma T_p^4 \quad (2.133)$$

où :

- $\sigma$  : constante de Boltzmann,
- $T_p$  : température de la terre,
- $\varepsilon$  : coefficient d'émissivité de la surface du panneau solaire.

# Chapitre III

## Formulation du problème thermo-élastique du panneau solaire

*Dans ce chapitre nous avons pour but de formuler les équations régissant le comportement d'un milieu continu. Le formalisme développé aura la capacité de prendre en compte le couplage entre les champs mécanique et thermique.*

### III-1 Equations générales du problème thermique

Le transfert de chaleur dans un milieu  $\Omega$  obéit aux principes fondamentaux de la thermodynamique. Le premier principe dit de conservation gouverne le transfert de chaleur à travers le milieu  $\Omega$  de frontière ( $\Gamma$ ). En générale le milieu  $\Omega$  peut être composé de plusieurs milieux de propriétés différentes, et qui peuvent être solides ou fluides, voir figure 3.1. Le transfert de chaleur entre ces milieux peut se faire de la façon suivante (Jiji 2006):

- Conduction au sein de ces milieux qui se fait par le mouvement d'électrons libres à travers le réseau cristallin.
- Echange de chaleur par convection, limité aux fluides, il s'effectue par le mouvement de groupes de molécules.
- Echange de chaleur par rayonnement, et qui est un transfert d'énergie à distance entre deux milieux par rayonnement électromagnétique.

En appliquant le principe de la conservation d'énergie, l'équation de la chaleur dans un milieu  $\Omega$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho c T_{,t} = -q_{i,j} + Q \quad (3.1)$$

Le terme  $q_i$  est le flux de chaleur obtenu à partir de la loi de Fourier classique

$$q_i = -k_{ij}T_{,j} \quad (3.2)$$

Où :

- T : température du milieu à déterminer,
- $k_{ij}$  : composantes du tenseur de conductivité thermique,
- $\rho$  : densité du milieu considéré,
- c : capacité thermique du milieu considéré,
- Q : source de chaleur interne.

En générale,  $\rho$ , c et  $k_{ij}$  sont fonctions de l'espace  $(x_1, x_2, x_3)$ , de la température T et du temps t.

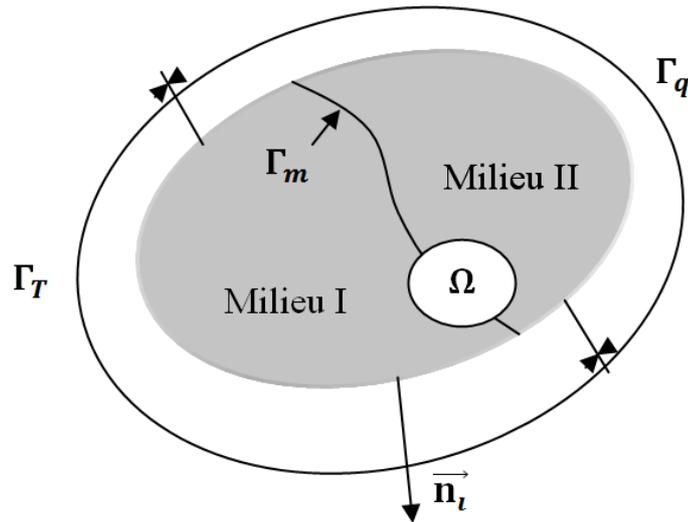
Il reste à définir pour la résolution de l'équation de la chaleur, les conditions aux limites, c'est-à-dire le flux et la température imposé sur les frontières ( $\Gamma_q$  et  $\Gamma_T$ ) du milieu  $\Omega$ , la distribution de la température au début de la sollicitation appelé aussi condition initiale.

Quatre types de conditions aux limites peuvent être appliqués : température imposée ou condition du premier type, flux imposé ou condition du deuxième type, échange par convection avec un fluide à une température  $T_c$  ou condition mixte et échange par rayonnement avec un milieu à la température  $T_r$  ou condition mixte.

Dans le cas général, toutes ces conditions aux limites peuvent varier le long des frontières en fonction du temps, on peut les interpréter ainsi :

$$\begin{cases} T = f^T(\delta_i, t) & \text{sur } \Gamma_T \\ -(k_{ij} T_{,j}) n_i = q_c + q_r + f^q(\delta_i, t) & \text{sur } \Gamma_q \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $f^T$  et  $f^q$  : sont les valeurs de la température et du flux thermique imposés sur les frontière ( $\Gamma_T$  et  $\Gamma_q$ ) respectivement.  $n_i$  est la normale à la frontière  $\Gamma_q$ , et  $\delta_i$  représente les coordonnées du point considéré sur la frontière  $\Gamma$ .



**Figure 3.1 :** Milieu  $\Omega$  et ses frontières.

Notons que  $q_r$  et  $q_c$  sont les flux thermiques échangés par rayonnement et par convection, et qui sont données par les expressions suivantes :

$$q_c = h_c (\delta_i, T, t) (T - T_c), \quad (3.4)$$

$$q_r = \sigma \varepsilon (\delta_i, T, t) (T^4 - T_r^4). \quad (3.5)$$

En supposant que le contact thermique entre les milieux est parfait, c'est-à-dire sans résistance thermique, les conditions d'interface exprimant la continuité des fonctions température et flux thermique peuvent être écrites de la façon suivante :

$$T|_{\Gamma_m^+} = T|_{\Gamma_m^-}, \quad (3.6)$$

$$(k_{ij} T_{,j}) n_i|_{\Gamma_m^+} = (K_{ij} T_{,j}) n_i|_{\Gamma_m^-}. \quad (3.7)$$

## III-2 Mécanique des solides déformables

Pour obtenir les lois constitutives qui gouvernent le comportement du matériau. Il faut ajouter aux deux principes de la thermodynamique, les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'équation fondamentale

est déduite du principe de conservation de la quantité de mouvement, et qui se traduit par l'équation de Navier suivante :

$$\rho \ddot{u} - \sigma_{ij,j} = \rho f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

où  $\rho$  est la densité du matériau,  $u$  le champ de déplacements,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes d'ordre 2, et  $f_i$  les forces volumiques.

L'expression de  $\sigma_{ij}$  en terme des autres paramètres et variables se fait au travers des lois de comportement. Celles-ci feront en particulier intervenir, dans l'hypothèse des petites déformations, le tenseur des déformations de Cauchy, qui est donné par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.9)$$

La relation contraintes-déformations, aussi appelée loi de comportement, est dépendante de nombreux facteurs : nature du matériau, nature et amplitude des déformations, paramètres physiques, etc... . Afin de rendre compte des effets mécaniques et thermiques, la loi de comportement présentée ci-dessus doit tenir compte de ces phénomènes. Dans cette situation, les déformations sont d'origines : élastiques et thermiques, et l'on décompose le tenseur total des déformations suivant ces origines :

$$\varepsilon_{ij}^{tot} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{th}. \quad (3.10)$$

le tenseur de déformations élastiques vérifie la loi de Hooke généralisée suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (3.11)$$

où  $C_{ijkl}$  est le tenseur des constantes élastiques d'ordre 4.

L'influence des effets thermiques se traduit par une variation du champ de déplacements. Dans ce cas, le tenseur des déformations thermiques  $\varepsilon_{ij}^{th}$  est donné par :

$$\varepsilon_{ij}^{th} = -C_{ijkl} \alpha_{kl} T^* \quad (3.12)$$

où  $\alpha_{kl}$  est le tenseur de dilatation thermique, alors que  $T^*(= T - T_0)$  est la différence de température entre la température  $T$  du solide (milieu  $\Omega$ ) et la température de référence  $T_0$ .

### III-3 Problèmes couplés

Une grande partie des applications mécaniques rencontrées dans le domaine spatial est soumise à des températures extrêmes. Le comportement des matériaux utilisés est fortement dépendant de ces températures, et cette dépendance induit un couplage entre l'évolution thermique et mécanique des éléments de l'ossature du satellite. Les variations de température induisent des déformations thermiques, réciproquement, l'influence de la mécanique sur le problème de diffusion se fait principalement au travers de l'évolution du domaine. Il existe toutefois des modèles dans lesquelles les déformations plastiques du solide sont génératrices de chaleur (source interne).

En pratique, ce couplage est souvent asymétrique : l'influence des variations thermiques sur la mécanique est beaucoup plus importante que l'influence des déformations sur le problème de diffusion. Le problème de thermomécanique est modélisé par les équations de la mécanique des milieux continus (Eq. 3.6) et celle de la diffusion thermique (Eq 3.1) :

$$\rho c T_{,t} = -q_{i,j} + Q \quad \text{dans } (\Omega(t_0)), \quad (3.13)$$

$$\rho \ddot{u} - \sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{dans } (\Omega(t)). \quad (3.14)$$

où  $\Omega(t_0)$  désigne le domaine dans sa configuration initiale, et  $\Omega(t)$  ce domaine déformé au cours du temps.

### III-4 Analyse thermique du panneau solaire

#### III-4-1 Hypothèses générales

En orbite le transfert de chaleur dans le panneau solaire est conditionné par les échanges radiatifs avec le soleil et la terre, et aussi par le flux thermique aérodynamique provoqué par le frottement des molécules de l'atmosphère avec les

parois du satellite. Les surfaces intérieures de l'âme du panneau solaire sont exposées à un rayonnement interne. Du point de vue thermique, la terre vue de l'espace est équivalente à une sphère de 18°C environ. Le fond du ciel à -270°C constitue la principale source froide pour les satellites. Cet environnement radiatif entraîne des variations extrêmes de températures dans les panneaux solaires des satellites. Les flux thermiques dans ce cas varient le long de l'orbite, le flux solaire et le flux albédo sont nul quand le satellite est dans l'ombre.

Dans la suite de l'étude on suppose que :

- Le contact est parfait entre les éléments du panneau solaire.
- Le transfert de chaleur par convection est nul dans les nids d'abeilles de l'âme.
- Le rayonnement interne entre les surfaces de l'âme et la peau est négligeable.
- Aucune condition aux limites n'est appliquée sur les faces frontales du panneau solaire.
- Source de chaleur interne négligeable.
- Propriétés thermo-physiques indépendantes de la température.

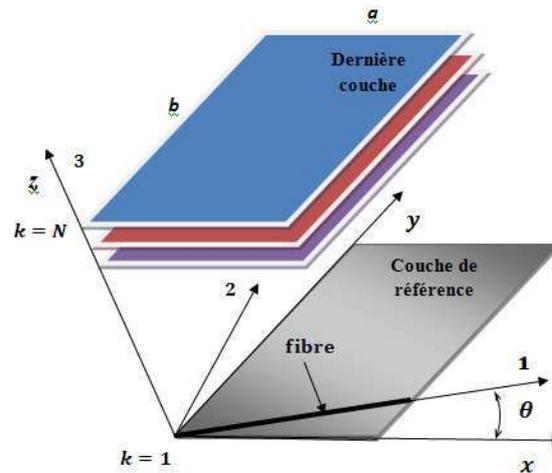
Le panneau solaire est modélisé par une plaque hybride composée de couches de propriétés différentes.

### III-4-2 Tenseurs de conductivité et capacité thermiques

Après avoir décrit les équations générales de la chaleur dans un milieu ( $\Omega$ ), nous allons nous intéresser à l'analyse thermique des plaques composites hybrides, composées de plusieurs couches de propriétés thermo-physiques différentes dont le modèle thermique est donné par la figure 3.2. Soit le système d'axes de référence (x,y,z) lié à la première couche. Considérons le cas général d'un stratifié muni d'un système d'axes principaux (1,2,3) liés à l'orientation des fibres  $\theta$ , voir figure 3.2.

Le tenseur de conductivité thermique  $\bar{k}_{ij}$  d'une couche (k) lié à la base (1,2,3) est donné par :

$$\bar{k}_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \bar{k}_{ii}^{(k)} & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}, \quad (3.15)$$



**Figure 3.2 :** Plaque hybride constituée de plusieurs couches.

où, les  $\bar{k}_{ij}^k$  sont les conductivités thermiques de la couche (k) suivant les directions 1, 2 et 3. Les  $\bar{k}_{ij}$  peuvent varier suivant z dans le cas d'un matériau à gradient de propriétés (FGM).

La projection du tenseur de conductivité thermique dans la base (x, y, z) devient nécessaire du moment que les couches possèdent des orientations différentes, d'où :

$$[k]_{(k)} = [R_3]_{(k)} [\bar{k}]_{(k)} [R_3]_{(k)}^T, \quad (3.16)$$

$[R_3]_{(k)}$  est la matrice de rotation, définissant la rotation par rapport à l'axe z (=3) du système d'axes (1,2,3) vers le système d'axes (x, y, z).

La matrice de conductivité thermique dans le cas d'un matériau orthotrope se réduit donc à :

$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 \\ k_{xy} & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Notons que les termes  $k_{ij}^k$  sont les composantes du tenseur de conductivité thermique de la couche (k) exprimées dans le repère (x,y,z). Les termes  $k_{ij}^k$  en fonction de  $\bar{k}_{ij}$  sont exprimés dans l'annexe B.

Dans le cas d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) le tenseur de conductivité thermique se réduit à :

$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{eff}(z) & 0 & 0 \\ 0 & k_{eff}(z) & 0 \\ 0 & 0 & k_{eff}(z) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

où  $k_{eff}$  est la conductivité effective du FGM.

La loi de mélange de Wakashima-Tsukamoto (Wakashima et Tsukamoto 1991 ; 1992) est utilisée pour exprimer la capacité effective  $c_{eff}$  et la conductivité effective  $k_{eff}$ .

$$c_{eff}(z) = (c_a - c_b) \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n + c_b \quad (3.19)$$

et

$$k_{eff}(z) = k_a + \frac{k_a \left( 1 - \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n \right) (k_b - k_a)}{k_a + (k_a - k_b) \frac{1}{3} \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n} \quad (3.20)$$

où  $h_p$  est l'épaisseur de la plaque en FGM et  $n$  est un exposant positif, alors que  $z$  est la variable  $\left( -\frac{h_p}{2} \leq z \leq \frac{h_p}{2} \right)$ . Les termes  $c_a, k_a, c_b$  et  $k_b$  représentent la capacité thermique ainsi que la conductivité thermique des deux constituants du matériau composite.

### III-4-3 Champs de température dans le panneau

Pour les problèmes transitoires, la variation de la température suivant l'épaisseur d'une couche (k) de la plaque est parabolique, voir figure 3.3. Dans ce

cas l'approche quadratique peut représenter correctement cette variation. La température  $T^{(k)}(x, y, z)$  d'un point quelconque de la couche (k) peut être exprimée en fonction de la température  $T_0^{(k)}$  de la surface moyenne, du gradient de température suivant l'épaisseur de la plaque de la surface moyenne, noté  $\alpha_0^{(k)} (= T_{0,z}^{(k)})$  et de la courbure de la température suivant l'épaisseur  $\beta_0^{(k)} (= T_{0,zz}^{(k)})$  au niveau de la surface moyenne, qu'on peut écrire sous la forme suivante (Noack et al. 2003) :

$$T^{(k)}(x, y, z) = T_0^{(k)}(x, y) + z_k \alpha_0^{(k)}(x, y) + \frac{1}{2} z_k^2 \beta_0^{(k)}(x, y), \quad (3.21)$$

avec :

$$-\frac{t_k}{2} \leq z_k \leq \frac{t_k}{2} \quad (3.22)$$

En utilisant les conditions de continuité au niveau des interfaces de deux couches voisines (k) et (k+1), voir figure 3.4, dont les dimensions géométriques et les coordonnées des couches sont données par la figure 3.5, la température  $T(x, y, z)$  d'un point quelconque de la plaque peut être déterminée. Supposons qu'à l'interface le contact est parfait, c'est-à-dire sans résistance thermique, la continuité de la température au niveau de cette interface permet d'écrire :

$$T^{(k)}\left(\frac{t_k}{2}\right) = T^{(k+1)}\left(-\frac{t_{k+1}}{2}\right) \quad (3.23)$$

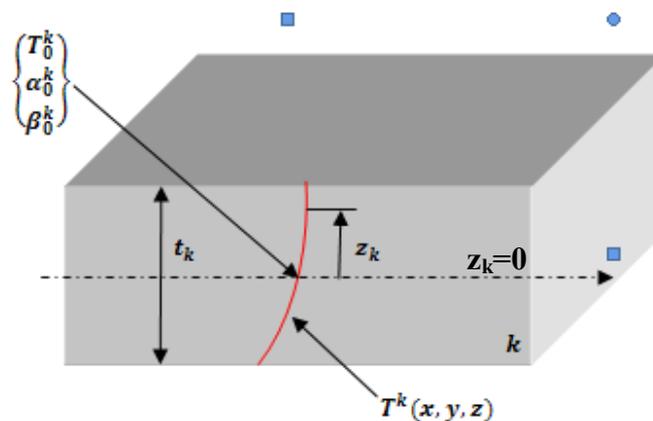
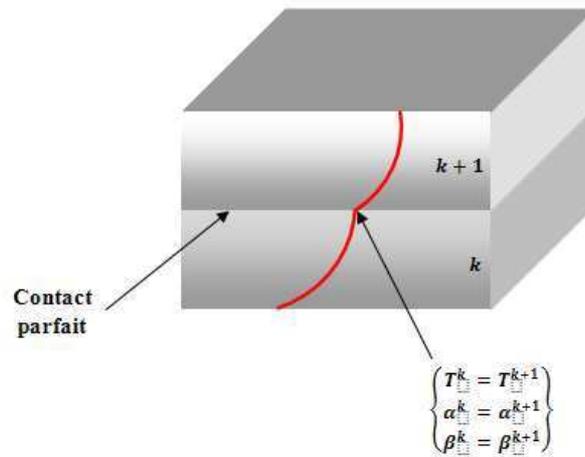


Figure 3.3 : Variation quadratique de la température dans une couche k.



**Figure 3.4 :** Conditions de continuité aux interfaces.

La continuité du flux thermique  $q_z$  suivant la direction  $z$  dans le cas où la source de chaleur interne est nulle permet d'établir la relation suivante :

$$q_z^{(k)} \left( \frac{t_k}{2} \right) = q_z^{(k+1)} \left( -\frac{t_{k+1}}{2} \right) = const \quad (3.24)$$

sachant que d'après la loi de Fourier, le flux de chaleur suivant l'épaisseur de la couche est donnée par :

$$q_z^{(k)} = k_{zz}^{(k)} T_{,z}^{(k)}(x, y) \quad (3.25)$$

Une troisième condition est nécessaire, c'est celle qui suppose que la variation de la dérivée du flux thermique suivant l'axe  $z$  est constante (Noack et al. 2003)

$$q_{z,z}^{(k)} = q_{z,z}^{(k+1)} = const \quad (3.26)$$

En appliquant ces trois conditions, on aura les relations qui lient les trois fonctionnelles de la couche  $(k+1)$  aux celles de la couche  $(k)$

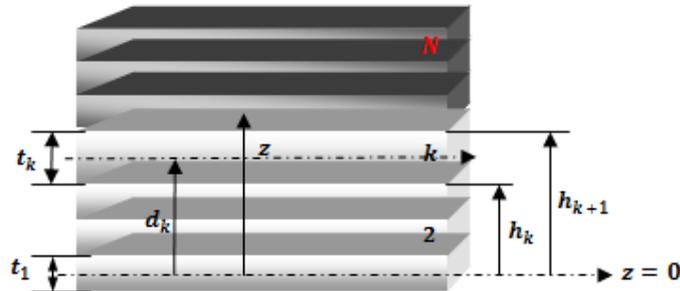
$$\beta_0^{(k+1)} = \frac{k_{zz}^{(k)}}{k_{zz}^{(k+1)}} \beta_0^{(k)} \quad (3.27)$$

$$\alpha_0^{(k+1)} = \frac{k_{zz}^{(k)}}{k_{zz}^{(k+1)}} \alpha_0^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{k_{zz}^{(k)}}{k_{zz}^{(k+1)}} \beta_0^{(k)} (t_k + t_{k+1}) \quad (3.28)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} T_0^{(k+1)} = T_0^{(k)} + \frac{1}{2} \alpha_0^{(k)} \left( t_k + \frac{k_{zz}^{(k)}}{k_{zz}^{(k+1)}} t_{k+1} \right) \\ + \beta_0^{(k)} k_{zz}^{(k)} \left( t_k + \frac{1}{2} \frac{k_{zz}^{(k)}}{k_{zz}^{(k+1)}} (t_k + t_{k+1}) \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{t_k^2}{k_{zz}^{(k)}} - \frac{t_{k+1}^2}{k_{zz}^{(k+1)}} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

D'après ces trois relations, on peut conclure que si les trois fonctionnelles  $T_0$ ,  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  de la première couche sont connues alors on peut facilement déduire la distribution de la température de n'importe quel point de la plaque.



**Figure 3.5 :** Dimensions géométriques et coordonnées des couches.

Considérons ainsi la première couche comme étant la couche de référence. La variable locale  $z_k$  est liée à la variable globale  $z$  par la relation suivante :

$$z_k = z + d_k \quad (3.30)$$

avec :

$$d_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} (t_i + t_{i+1}) \quad ; \quad k > 1 \quad (3.31)$$

En se servant des équations précédentes, la distribution de la température  $T(x, y, z)$  d'un point quelconque de la plaque peut être trouvée (Noack et al. 2003) :

$$T(x, y, z) = T_0(x, y) + Z_L(z)\alpha_0(x, y) + Z_Q(z)\beta_0(x, y) \quad (3.32)$$

Avec :

$$Z_L(z) = k_{zz}^{(1)} \left( s_k + \frac{1}{k_{zz}^{(k)}} (z + d_k) \right) \quad (3.33)$$

$$Z_Q(z) = (g_k + h_k) + \frac{1}{2} f_k (t_k v_k + 2d_k + 2z) + \frac{1}{2} \frac{k_{zz}^{(1)}}{k_{zz}^{(k)}} (z + d_k)^2 \quad (3.34)$$

où :

$$s_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{t_i}{k_{zz}^{(i)}} + \frac{t_{i+1}}{k_{zz}^{(i+1)}} \right) \quad ; \quad k > 1 \quad (3.35)$$

$$h_k = \sum_{i=1}^{k-1} (t_i f_i) \quad ; \quad k > 1 \quad (3.36)$$

$$f_k = \frac{1}{2} \frac{k_{zz}^{(1)}}{k_{zz}^{(k)}} \sum_{i=1}^{k-1} (t_i + t_{i+1}) \quad ; \quad k > 1 \quad (3.37)$$

$$g_k = \frac{1}{8} \left( t_1^2 - t_k^2 \frac{k_{zz}^{(1)}}{k_{zz}^{(k)}} \right) \quad ; \quad k > 1 \quad (3.38)$$

$$v_k = 1 \quad ; \quad k > 1 \quad (3.39)$$

Notons que  $d_k, h_k, f_k, v_k$  et  $s_k$  sont nuls pour les autres valeurs de  $k$ .

## III-5 Théorie des plaques sandwich

On peut recommander l'emploi d'une structure sandwich pour la réalisation des panneaux solaires à cause de sa rigidité élevée en flexion et de sa faible densité. Cette rigidité importante provient de l'augmentation de l'épaisseur du composite comparé à un stratifié sans structure alvéolaire. L'utilisation d'une structure sandwich permet de réduire le besoin de mettre des renforts à l'intérieur de la structure en augmentant la rigidité de la plaque. Il en résulte un gain de poids.

Dans la suite de l'étude nous présenterons en détails la théorie des plaques sandwich, dans le cas thermo-élastique.

### III-5-1 Définition

Une plaque sandwich est un milieu tridimensionnel dont le volume  $V$  est engendré par une surface plane moyenne  $S$  et une épaisseur  $h$ . Un sandwich est constitué de deux feuilles ou peaux possédant de bonnes propriétés mécaniques en traction, collée à une âme légère par l'intermédiaire d'adhésif (modélisé par une plaque mince isotrope), voir figure 3.6.

On distingue deux types de sandwich : les sandwich à âme pleine et les sandwich à âme creuse.

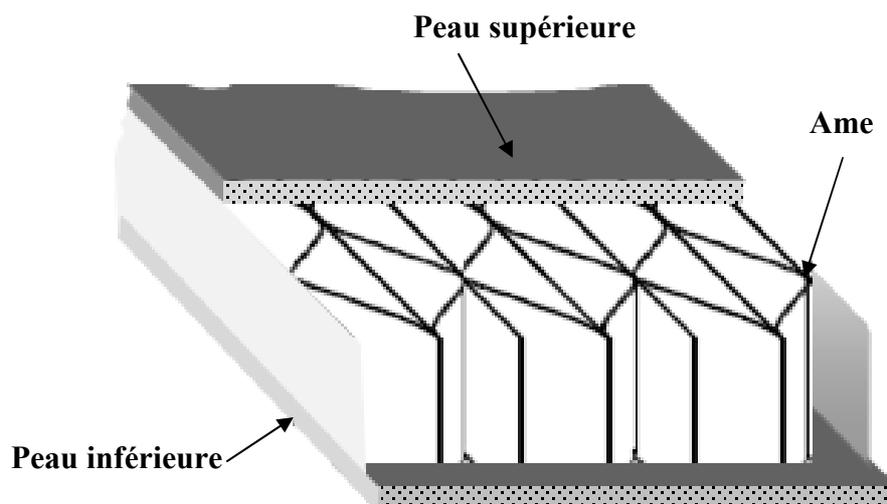


Figure 3.6 : Plaque sandwich à âme creuse en nids d'abeilles.

Les sandwich à âme métallique creuse sous forme de nids d'abeilles "honeycomb" sont les plus utilisées dans les structures de satellite en particulier dans les panneaux solaires, voir figure 3.6. Les peaux sont soit en aluminium soit en matériaux composites, stratifiées ou en FGM (Xia et Shen 2008 ; Shen et Li 2008).

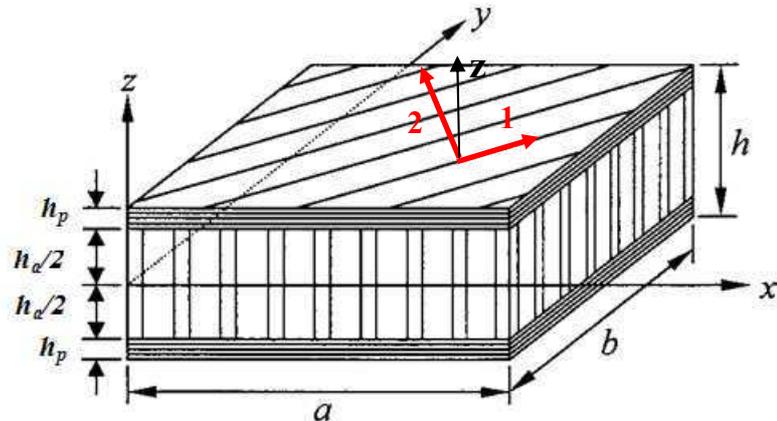


Figure 3.7 : Dimensions géométriques de la plaque sandwich.

### III-5-2 Constantes élastiques

Dans l'hypothèse de petites déformations et de variations de température très faibles comparées à une température de référence et lorsqu'un matériau orthotrope est dans un état plan de contraintes, la matrice des constantes élastiques [Q] reliant les contraintes aux déformations est donnée par la relation de Duhamel-Neuman (Schäfer 2006) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}_k \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}_k - \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_k T^*_k(z, t) \right) \quad (3.40)$$

Le vecteur à gauche de l'équation (3.40) avec cinq composantes indépendantes :  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  contraintes normales et  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  et  $\tau_{31}$  contraintes

tangentielles, caractérise le tenseur des contraintes. Alors que le premier vecteur à droite de l'équation avec cinq composantes indépendantes :  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  déformations et  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$  et  $\gamma_{31}$  déformations angulaires, caractérise le tenseur de déformations, le deuxième vecteur à droite représente la déformation linéaire due à la variation de température  $T^*_k(z, t)$ , où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les coefficients thermo-élastiques du matériau considéré, suivant les directions 1 et 2, voir figure 3.7.

### III-5-2-1 Stratifiées

Dans le repère principal ou repère du pli, les constantes élastiques  $Q_{ij}$  d'une couche orthotrope d'un stratifié sont liées directement aux propriétés mécaniques suivantes (Miracle et Donaldson 2001) :

- **Module de Young longitudinal  $E_1$**

$$E_1 = E_f V_f + E_m(1 - V_f) \quad (3.41)$$

- **Module de Young transversal  $E_2$**

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \quad (3.42)$$

- **Modules de cisaillement  $G_{12}$**

$$G_{12} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)} \quad (3.43)$$

- **Coefficient de poisson  $\nu_{12}$**

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m(1 - V_f) \quad (3.44)$$

où :

- $E_f$  et  $E_m$  : modules d'élasticité longitudinal de la fibre et de la matrice,
- $G_f$  et  $G_m$  : modules de cisaillement de la fibre et de la matrice,
- $V_f$  et  $V_m$  : fractions volumiques de la fibre et de la matrice.

Les relations entre les constantes élastiques et les propriétés mécaniques dans ce cas sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} = \nu_{21}Q_{11} \\ Q_{33} = G_{12} \\ Q_{44} = G_{23} \\ Q_{55} = G_{13} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

en plus, nous avons la relation suivante :

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (3.46)$$

La relation (3.40) est écrite dans le repère du pli, sa projection dans le repère du stratifié est exprimée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\}_k = [\bar{Q}] \left( \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\}_k - \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_k T^*_k \right) \quad (3.47)$$

avec :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} [\bar{Q}_{NM}] & 0 \\ 0 & [\bar{Q}_V] \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

et

$$[\bar{Q}_{NM}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

et

$$[\bar{Q}_V] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

sachant que la matrice des constantes élastiques  $[\bar{Q}]$  dans le repère du stratifié s'exprime en fonction de la matrice de transformation  $[T]$  et la matrice  $[Q]$  par :

$$[\bar{Q}]_k = [T]_k^{-1} [Q]_k [T]_k \quad (3.51)$$

les composantes  $\bar{Q}_{ij}$  en fonction des  $Q_{ij}$  sont données sous forme explicite par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{13} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})mn^3 \\ \bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{23} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})m^3n \\ \bar{Q}_{33} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{33}(m^2 - n^2)^2 \\ \bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \end{array} \right. \quad (3.52)$$

De la même façon on peut exprimer le vecteur thermo-élastique dans le repère du stratifié en fonction de la matrice de transformation  $[T_1]$  (Miracle et Donaldson 2001) par:

$$\{\bar{\alpha}\}_k = [T_1]_k \{\alpha\}_k \quad (3.53)$$

les composantes  $\alpha_x, \alpha_y$  et  $\alpha_{xy}$  du vecteur thermo-élastique  $\{\bar{\alpha}\}_k$  peuvent être écrites en fonction de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$  dans le repère du pli.

$$\begin{cases} \alpha_x = \alpha_1 m^2 + \alpha_2 n^2 \\ \alpha_y = \alpha_1 n^2 + \alpha_2 m^2 \\ 2\alpha_{xy} = 2(\alpha_1 - \alpha_2)mn \end{cases} \quad (3.54)$$

les termes  $m(= \cos \theta)$  et  $n(= \sin \theta)$  sont les cosinus directeurs.

La densité du stratifié  $\rho$  est exprimée en fonction des densités de la fibre  $\rho_f$  et de la matrice  $\rho_m$  (Miracle et Donaldson 2001) :

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f) \quad (3.55)$$

### III-5-2-2 FGM

Dans le cas d'un matériau à gradient de propriétés (voir figure 3.8), les propriétés mécaniques sont considérés non homogènes et varient suivant l'épaisseur de la plaque. Les constantes élastiques  $\bar{Q}_{ij}$  sont exprimées en fonction du module de Young et du coefficient de Poisson effectifs de la plaque (Reddy et Chin 1998).

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} = \frac{E_{eff}(z)}{1 - \nu_{eff}^2(z)} \\ \bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{eff} E_{eff}(z)}{1 - \nu_{eff}^2(z)} \\ \bar{Q}_{44} = \bar{Q}_{55} = \bar{Q}_{33} = \frac{E_{eff}(z)}{2(1 + \nu_{eff}(z))} \end{cases} \quad (3.56)$$

Sachant que dans le cas des FGM les modules effectifs sont proportionnelles aux fractions volumiques de chaque constituants (Reddy et Chin 1998), notées par  $V_a$  et  $V_b$ .

$$PM_{eff}(z) = PM_a V_a(z) + PM_b V_b(z), \quad (3.57)$$

les termes  $PM_a$  et  $PM_b$  représentent les propriétés mécaniques du matériau  $a$  et du matériau  $b$ , respectivement.

La relation suivante entre les deux fractions volumiques est évidente :

$$V_a + V_b = 1 \quad (3.58)$$

la fraction volumique  $V_a$  est obtenue selon la loi de puissance suivante (Bhangale et Ganesan 2006) :

$$V_a = \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n, \quad (3.58)$$

où  $h_p$  est l'épaisseur de la plaque et  $n$  est un exposant positif, alors que  $z$  est la variable  $(-\frac{h_p}{2} \leq z \leq \frac{h_p}{2})$ .

Ce qui permet d'écrire :

$$E_{eff}(z) = (E_a - E_b) \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n + E_b \quad (3.59)$$

$$\nu_{eff}(z) = (\nu_a - \nu_b) \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n + \nu_b \quad (3.60)$$

A partir de la même formule on peut déterminer la densité effective  $\rho_{eff}$  et le coefficient de dilatation thermique effectif  $\alpha_{eff}$  :

$$\rho_{eff}(z) = (\rho_a - \rho_b) \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n + \rho_b \quad (3.61)$$

$$\alpha_{eff}(z) = (\alpha_a - \alpha_b) \left( \frac{2z + h_p}{2h_p} \right)^n + \alpha_b \quad (3.62)$$

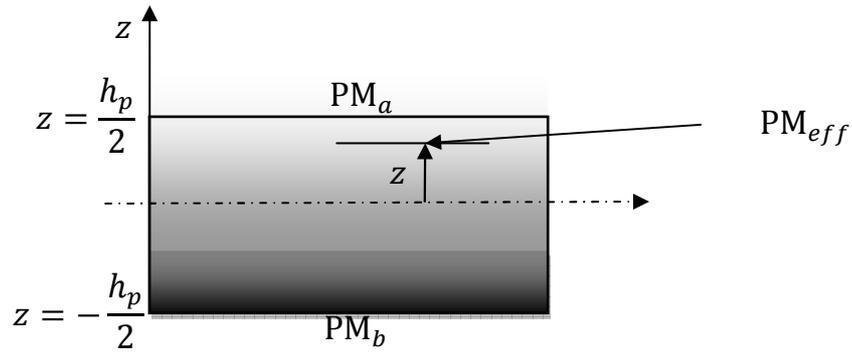


Figure 3.8 : Peau de la plaque sandwich en FGM.

### III-5-3 Champ de déplacement

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est le suivant (Shiau et Kuo 2006) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0^b(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \frac{\partial w_0^b(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0^b(x, y) + w_0^s(x, y) \end{array} \right. \quad (3.63)$$

où  $u_0$  et  $v_0$  sont les déplacements membranaires de la plaque sandwich,  $w_0^b$  est le déplacement transversal dû à la flexion de la plaque, alors que  $w_0^s$  est le déplacement transversal dû à l'effet de cisaillement de l'âme.

### III-5-4 Relations déformations-déplacements

Les cinq composantes du tenseur de déformation en fonction des déplacements  $(u, v, w)$  sont données par la relation Suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

En injectant le champ de déplacement dans (3.64) on aura :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^0\} + z\{\chi\} \quad (3.65)$$

avec :

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (3.66)$$

et

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0^b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0^b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0^b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.67)$$

Les déformations de cisaillement sont données par :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0^s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^s}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.68)$$

### III-5-5 Efforts internes

Nous savons que l'âme supporte les efforts de cisaillement, tandis que les peaux sont soumises aux contraintes de compression et de traction. Il est raisonnable de supposer que les efforts internes de membrane et de flexion soient appliqués aux peaux, alors que les efforts de cisaillement soient plutôt supportés par le noyau ou l'âme.

#### III-5-5-1 Efforts de membrane et moments de flexion

Les efforts de membrane et de flexion appliqués au sandwich sont:

##### a) Les efforts de membrane

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.68)$$

injectons les relations (3-47) dans (3-68) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A]\{\varepsilon^0\} - \{N^{AT}\} \quad (3.69)$$

##### b) Les moments de flexion

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.70)$$

injectons les relations (3-47) dans (3.70) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\chi\} - \{M^{AT}\} \quad (3.71)$$

D'après les équations (3.69) et (3.71), on voit bien que les efforts internes dépendent principalement des rigidités de membrane et de flexion et des coefficients thermo-élastiques. Dans le cas d'un:

➤ **Stratifié**

Les rigidités de membrane et de flexion d'un stratifié sont donnés par :

$$A_{ij} = 2 \sum_{k=1}^{N_H} \bar{Q}_{ij} (h_k - h_{k-1}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.72)$$

$$D_{ij} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{N_H} \bar{Q}_{ij} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.73)$$

où  $h_k$  et  $h_{k-1}$  représentent les coordonnées de chaque couche par rapport à la surface moyenne de la plaque. Alors que,  $N_H$  représente le nombre de couches du stratifié.

Les forces de membrane et les moments de flexion induits par la variation de température dépendent des coefficients thermo-élastiques et des rigidités élastiques du matériau, ce qui nous permet d'écrire :

$$\{N^{\Delta T}\} = \int_z [\bar{Q}_{NM}]_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k T^* dz \quad (3.74)$$

$$\{M^{\Delta T}\} = \int_z [\bar{Q}_{NM}] \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k z T^* dz \quad (3.75)$$

➤ **FGM**

Dans le cas d'un FGM, les rigidités de membrane, de flexion et de cisaillement, les forces de membrane et les moments de flexion sont exprimés par :

$$A_{ij} = 2 \int_{-\frac{h_a}{2} - h_p}^{-\frac{h_a}{2}} [\bar{Q}_{NM}] dz \quad (3.76)$$

et

$$D_{ij} = 2 \int_{-\frac{h_a}{2}}^{\frac{h_a}{2}} [\bar{Q}_{NM}] z dz \quad (3.77)$$

$$\{N^{dT}\} = \int_z [\bar{Q}_{NM}] \begin{Bmatrix} \alpha_{eff} \\ \alpha_{eff} \\ 0 \end{Bmatrix} T^* dz \quad (3.78)$$

$$\{M^{dT}\} = \int_z [\bar{Q}_{NM}] \begin{Bmatrix} \alpha_{eff} \\ \alpha_{eff} \\ 0 \end{Bmatrix} z T^* dz \quad (3.79)$$

### III-5-5-2 Efforts de cisaillement

Les efforts de cisaillement dans l'âme sont exprimés par :

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_a}{2}}^{\frac{h_a}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad (3.80)$$

injectons les relations (3.47) dans (3.80) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = [S] \{\gamma\}, \quad (3.81)$$

avec :

$$S_{ij} = \bar{Q}_{ij} h_a \quad i, j = 4, 5 \quad (3.82)$$

### III-5-6 Energies cinétique et de déformation

L'énergie de déformation est la somme des énergies de membrane, de flexion, de cisaillement et de l'effet thermique :

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon^0\}^T [A] \{\varepsilon^0\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T [D] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T [S] \{\gamma\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon^0\}^T \{N^{\Delta T}\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T \{M^{\Delta T}\} dA. \quad (3.83)$$

L'énergie cinétique de la plaque est calculée en fonction des composantes du vecteur vitesse :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho_{ps} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV, \quad (3.84)$$

où  $\rho_{ps}$  est la densité de la plaque sandwich. Sachant que l'élément de volume est donné par:

$$dV = dzdA \quad (3.85)$$

Si on néglige l'énergie cinétique du mouvement membranaire on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho_{ps} (\dot{w}_0^{b^2} + \dot{w}_0^{s^2} + 2\dot{w}_0^b \dot{w}_0^s) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho_{ps} z^2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0^{b^2}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0^{b^2}}{\partial y} \right) dV \quad (3.86)$$

En intégrant sur l'épaisseur de la plaque on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho^* \int_A (\dot{w}_0^{b^2} + \dot{w}_0^{s^2} + 2\dot{w}_0^b \dot{w}_0^s) dA + \frac{1}{2} I_b \int_A \left( \frac{\partial \dot{w}_0^{b^2}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0^{b^2}}{\partial y} \right) dA, \quad (3.87)$$

les termes  $\rho^*$  et  $I_b$  caractérisent la densité et le moment d'inertie équivalents de la plaque sandwich. Dans le cas d'un stratifié ils s'expriment par :

$$\rho^* = (2\rho_p h_p + \rho_{am} h_a), \quad (3.88)$$

$$I_b = 2I_p + I_a + \frac{1}{2}\rho_p h_p (h_p + h_a)^2, \quad (3.89)$$

où,  $I_p$  est le moment d'inertie du stratifié, alors que  $I_a$  est le moment d'inertie de l'âme, donnés par :

$$I_p = \rho_p \frac{h_p^3}{12}, \quad (3.90)$$

$$I_a = \rho_{am} \frac{h_a^3}{12}. \quad (3.91)$$

Alors que dans le cas d'un FGM,  $\rho^*$  et  $I_b$  sont exprimés en fonction de la densité effective  $\rho_{eff}(z)$  :

$$\rho^* = 2 \int_{-\frac{h_a}{2}-h_p}^{-\frac{h_a}{2}} \rho_{eff}(z) dz + \rho_{am} h_a \quad (3.92)$$

$$I_b = I_a + 2 \int_{-\frac{h_a}{2}-h_p}^{-\frac{h_a}{2}} \rho_{eff}(z) z^2 dz. \quad (3.93)$$

### III-5-7 Etude dynamique du panneau solaire

En pratique, des solutions approchées du problème continu sont obtenues en le réduisant à un problème discret avec un nombre fini de degrés de liberté.

### III-5-7-1 Equations de mouvement

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement du panneau à partir des expressions des énergies cinétique et potentielle. Soit le lagrangien  $L$  tel que :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = E_c(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q, t), \quad (3.94)$$

où  $E_c$  et  $U$  sont respectivement l'énergie cinétique et potentielle qui sont fonctions des coordonnées, de leurs dérivées  $(q, \dot{q})$  et du temps  $(t)$ , pour les systèmes conservatifs, le principe d'Hamilton s'énonce :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (3.95)$$

Les conditions d'extremum de cette fonctionnelle sont les équations d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = F_i(t), \quad (3.96)$$

du moment que l'énergie potentielle étant la somme de l'énergie de déformation  $E_d$  et du potentiel des forces de surface et de volume ( $W$ ).

$$U = E_d + W \quad (3.97)$$

Pour les petits mouvements des corps élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment respectivement comme forme quadratique des vitesses et des déplacements.

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (3.98)$$

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i K_{ij} q_j = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (3.99)$$

#### a) Equations de mouvement forcé

Les équations de mouvement forcé en absence d'amortissement s'écrivent alors :

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F(t)\}, \quad (3.100)$$

avec :

- [M] : matrice masse du panneau solaire,
- [K] : matrice de rigidité du panneau solaire,
- {F(t)} : vecteur forces extérieures dues à l'effet thermique,
- { $\ddot{q}(t)$ } : vecteur accélération généralisée.

### ***b) Equations de mouvement libre***

L'étude des vibrations libres n'est que la détermination des solutions propres du système d'équations précédent sans le second membre.

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \quad (3.101)$$

les solutions de ce système sont appelées modes propres, le mouvement étant harmonique, les solutions sont du type  $q_i = x_i e^{j\omega t}$  ce qui permet d'écrire :

$$([K] - \omega^2[M])\{x\} = 0, \quad (3.102)$$

où  $\omega$  étant la fréquence propre du système.

# Chapitre IV

## **Discrétisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques du problème thermique et thermo-élastique**

*Le passage d'un système différentiel à un système algébrique nécessite une discrétisation par la méthode des éléments finis. Les performances et la flexibilité de la version  $p$  de la MEF (Bardell 1989,1992 ; Houmat 1997,2001 ; Hamza-Cherif 2005, 2006, Hamza-Cherif et al. 2007) nous amène à l'utiliser pour discrétiser notre problème. Nous présenterons dans ce chapitre en détails les étapes de discrétisation et du développement de deux éléments finis hiérarchiques pour l'analyse thermique et mécanique.*

### **IV-1 Développement d'un élément fini de type $p$ pour le problème thermique**

#### IV-1-1 Forme discrétisée des équations de la chaleur

En se basant sur le principe de pondération, et en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin, l'équation de la chaleur peut être écrite sous la forme faible suivante (Hutton 2004) :

$$\int_{\Omega} \left[ (k_{ij} T_{,j})_{,i} + \rho C \dot{T} \right] w \, d\Omega = 0, \quad (4.1)$$

Après intégration par parties du premier terme de l'intégrale et en appliquant l'intégrale de Green-Gauss à l'équation précédente, nous aurons l'expression finale de cette forme faible :

$$\int_{\Omega} (w_{,j}) (k_{ij} T_{,j})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \rho C \dot{T} w d\Omega = \int_{\Gamma_q} (k_{ij} T_{,j}) n_i w d\Gamma. \quad (4.2)$$

où  $w$  est une fonction de pondération.

D'après l'équation (3.21), la température  $T(x, y, z)$  peut être écrite en fonction de  $T_0, \alpha_0$  et  $\beta_0$  :

$$T(x, y, z) = [R]\{\theta\} \quad (4.3)$$

avec :

$$[R] = [1 \quad Z_L \quad Z_Q] \quad (4.4)$$

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} T_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

De la même façon on peut exprimer le gradient de température

$$T(x, y, z)_{,j} = [S][L]\{\theta\} \quad (4.6)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & Z_L & 0 & 0 & Z_Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Z_L & 0 & 0 & Z_Q \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{zz}^{(l)}}{k_{zz}^{(k)}} & 0 & 0 & Z_{Q,z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où  $[L]$  est l'opérateur de différentiation

$$[L]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La fonction  $w$  est traitée de la même façon que  $T$ , soit donc :

$$w(x, y, z) = [R]\{\emptyset\} = [1 \quad Z_L \quad Z_Q] \begin{Bmatrix} T_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

on peut aussi écrire :

$$w(x, y, z)_j = [S][L]\{\emptyset\} \quad (4.10)$$

En injectant (4.10), (4.9), (4.6) et (4.3) dans l'équation (4.2) nous aurons la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_A \{\emptyset\}^T \int_Z [R]^T \rho_{(z)} c_{(z)} [R] \{\dot{\theta}\} dz dA + \int_A \{\emptyset\}^T [L]^T \int_Z \{S\}^T [K] [S] [L] \{\theta\} dz dA \\ & + \int_{\Gamma_{cv}} \{\emptyset\}^T h_c [R]^T [R] \{\theta\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{rd}} \sigma \varepsilon \{\emptyset\}^T [R]^T [R] \{\theta\}^3 [R] \{\theta\} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_{cv}} h_c T_c \{\emptyset\}^T [R]^T d\Gamma + \int_{\Gamma_{rd}} F_\varepsilon \sigma \varepsilon T_r^4 \{\emptyset\}^T [R]^T d\Gamma - \int_{\Gamma_{fq}} f^q \{\emptyset\}^T [R]^T d\Gamma \quad (4.11) \end{aligned}$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_A \{\emptyset\}^T [\bar{C}] \{\theta\} dA + \int_A \{\emptyset\}^T [L]^T [\bar{K}_1] [L] \{\theta\} dA + \int_{\Gamma_{cv}} h_c \{\emptyset\}^T [\bar{K}_2] \{\theta\} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{rd}} \{\emptyset\}^T [\bar{K}_3] \{\theta\} d\Gamma = \int_{\Gamma_{cv}} h_c T_c \{\emptyset\}^T [R]^T d\Gamma + \int_{\Gamma_{rd}} \sigma \varepsilon T_r^4 \{\emptyset\}^T [R]^T d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{fq}} f^q \{\emptyset\}^T [R]^T d\Gamma \quad (4.12) \end{aligned}$$

Avec :

$$[\bar{K}_1] = \int_z [S]^T [k]_{(k)} [S] dz \quad (4.13)$$

$$[\bar{K}_2] = [R]^T [R] \quad (4.14)$$

$$[\bar{K}_3] = [R]^T [ [R] \{ \theta \} ]^3 [R] \quad (4.15)$$

$$[\bar{C}] = \int_z \rho_{(z)} c_{(z)} [R]^T [R] dz = \int_z \rho_{(z)} c_{(z)} [\bar{K}_2] dz \quad (4.16)$$

Sachant que l'élément de volume dans le cas d'une plaque s'exprime par :

$$dV = dA dz \quad (4.17)$$

En utilisant les fonctions de forme on peut exprimer les trois fonctionnelles  $T_0$ ,  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  de la façon suivante :

$$\{ \theta \} = [N] \{ \bar{\theta} \} \quad (4.18)$$

où :

$[N]$  : matrice des fonctions de forme,

$\{ \bar{\theta} \}$  : vecteur des coordonnées généralisées.

En traitant de la même façon la fonction de pondération  $w$ , nous aurons :

$$\{ \phi \} = [N] \{ \bar{\phi} \} \quad (4.19)$$

Injectons ces deux équations dans (4.12) nous obtenons la forme discrétisée de l'équation de la chaleur en régime transitoire :

$$[C_{cp}] \{ \dot{\bar{\theta}} \} + [ [K_{cd}] + [K_{cv}] + [K_{rd}(\bar{\theta})] ] \{ \bar{\theta} \} = \{ Q \} \quad (4.20)$$

Le système d'équations obtenu est un système d'équations différentielles nonlinéaires du premier ordre.

où :

- $[K_{cd}]$  : matrice de conduction,
- $[K_{cv}]$  : matrice de convection,
- $[K_{rd}]$  : matrice de rayonnement,
- $[C_{cp}]$  : matrice de capacitance,
- $\{Q\}$  : vecteur charge thermique, exprimé par :

$$\{Q\} = \{Q_{cv}\} + \{Q_{rd}\} - \{Q_q\} - \{Q_B\} \quad (4.21)$$

avec :

- $\{Q_{cv}\}$  : vecteur charge thermique convectif,
- $\{Q_{rd}\}$  : vecteur charge thermique radiatif,
- $\{Q_q\}$  : vecteur charge thermique relatif à la source de chaleur,
- $\{Q_B\}$  : vecteur charge thermique relatif à la température imposée.

#### IV-1-2 Choix de l'élément et sélection des fonctions de forme

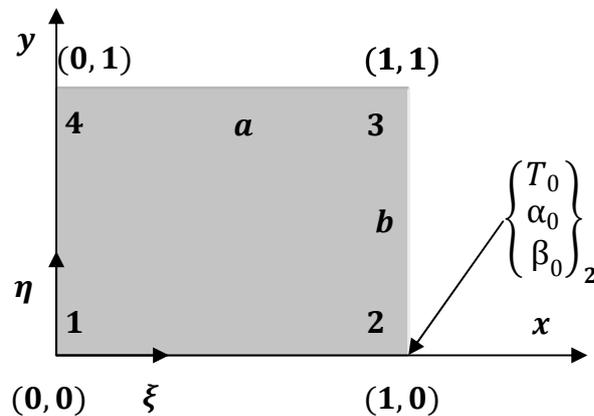
La méthode des éléments finis consiste à discrétiser le modèle physique en élément finis dont la forme (rectangulaire, triangulaire,...) est adaptée selon la géométrie du modèle physique. Ces éléments sont connectés entre eux aux niveaux des nœuds et des bords à fin d'assurer la continuité d'une variable quelconque qui peut être une température ou un déplacement par exemple. La précision de la solution obtenue dépend essentiellement du nombre de degrés de liberté utilisé.

L'élément développé dans cette étude est un élément fini de type p rectangulaire à quatre nœuds (voir figure 4.1), les degrés de liberté aux nœuds sont respectivement  $T_0$ ,  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ .

Dans la version p, en plus des degrés de liberté aux nœuds, l'élément admet des degrés de liberté aux bords et à l'intérieur de l'élément.

Dans la méthode des éléments finis, la solution est approximée dans le domaine discrétisé par des fonctions appelées fonctions de forme ou fonctions

d'interpolation, ces fonctions permettent de trouver la valeur d'une variable à l'intérieur de l'élément par interpolation des valeurs du vecteur généralisé.



**Figure 4.1** : Elément hiérarchique rectangulaire de type p pour l'analyse thermique.

Le choix de ces fonctions dépend essentiellement de l'élément considéré c'est-à-dire de sa géométrie et du nombre de nœuds considérés. Lorsque les degrés de liberté sont indépendants, seule la continuité de la variable est suffisante (continuité  $C^0$ ). Lorsque le problème traité est bidimensionnel, les fonctions de forme dépendent explicitement de  $x$  et  $y$ . Les fonctions considérées dans notre cas seront construites sur la base d'un élément linéaire unidimensionnel à deux nœuds.

Les fonctions de forme considérées dans notre cas sont les suivantes (Houmat 2001 et Hamza-Cherif et al. 2007) :

$$\begin{cases} f_1 = 1 - \xi \\ f_2 = \xi \\ f_{r+2} = \sin r\pi\xi, \quad \text{où } r = 1, \dots \end{cases} \quad (4.22)$$

Les deux premières fonctions de forme sont celles de la méthode des éléments finis version  $h$  (polynômes de Legendre), alors que les autres fonctions sont les fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques. Ces fonctions permettent d'enrichir le champ de température à l'intérieure et aux bords de l'élément.

Le champ de température dans ce cas peut être exprimé ainsi :

$$\begin{Bmatrix} T_0(\xi, \eta, t) \\ \alpha_0(\xi, \eta, t) \\ \beta_0(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{P_x} \sum_{j=1}^{P_y} T_{ij} f_i(\xi) f_j(\eta) \\ \sum_{i=1}^{q_x} \sum_{j=1}^{q_y} \alpha_{ij} f_i(\xi) f_j(\eta) \\ \sum_{i=1}^{r_x} \sum_{j=1}^{r_y} \beta_{ij} f_i(\xi) f_j(\eta) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

ce qui permet d'exprimer (4.19) de la façon suivante :

$$\{\theta\} = \begin{bmatrix} [N_T] & 0 & 0 \\ 0 & [N_\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & [N_\beta] \end{bmatrix} \{\bar{\theta}\} \quad (4.24)$$

avec :

$$\{\bar{\theta}\} = [T_{11} \ T_{12} \ \dots \ T_{1P_1} \ \dots \ T_{P_x P_y} \ \dots \ \alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \dots \ \alpha_{1q_1} \ \dots \ \alpha_{q_x q_y} \ \dots \ \beta_{11} \ \beta_{12} \ \dots \ \beta_{1r_1} \ \dots \ \beta_{r_x r_y}] \quad (4.25)$$

### IV-1-3 Détermination des différentes matrices élémentaires

Les différentes matrices de l'équation (4.24) sont déterminées à partir de la forme intégrale donnée par l'équation (4.12).

#### IV-1-3-1 Matrices de conduction, de convection et de rayonnement

La matrice de conduction est obtenue directement de (4.12) :

$$[K_{cd}] = \int_A [B]^T [\bar{k}_1] [B] dx dy \quad (4.26)$$

avec

$$[B] = [L][N] \quad (4.27)$$

de la même façon, la matrice de convection est obtenue:

$$[k_{cv}] = \int_{\Gamma_{cv}} h_c [N]^T [\bar{k}_2] [N] d\Gamma \quad (4.28)$$

La matrice de rayonnement est donnée par :

$$[K_{rd}(\bar{\theta})] = \int_{\Gamma_{cv}} \sigma \epsilon [N]^T [\bar{k}_3(\bar{\theta})] [N] d\Gamma \quad (4.29)$$

#### IV-1-3-2 Vecteurs charges thermiques

De la même façon les différents vecteurs charges thermiques sont obtenus. Le vecteur charge thermique relatif à la convection est donné par :

$$\{Q_{cv}\} = \int_{\Gamma_{cv}} h_c T_c [N]^T [R]^T d\Gamma \quad (4.30)$$

le vecteur charge de rayonnement s'exprime ainsi :

$$\{Q_{rd}\} = \int_{\Gamma_{cv}} \sigma \epsilon T_f^4 [N]^T [R]^T d\Gamma \quad (4.31)$$

alors que le vecteur charge relatif à la source de chaleur

$$\{Q_q\} = \int_{\Gamma_{cv}} f^q [N]^T [R]^T d\Gamma \quad (4.32)$$

Le vecteur charge relatif dû à une température imposée vaut :

$$\{Q_B\} = [K]\{f^T\} \quad (4.33)$$

### IV-1-3-3 Matrice de capacitance

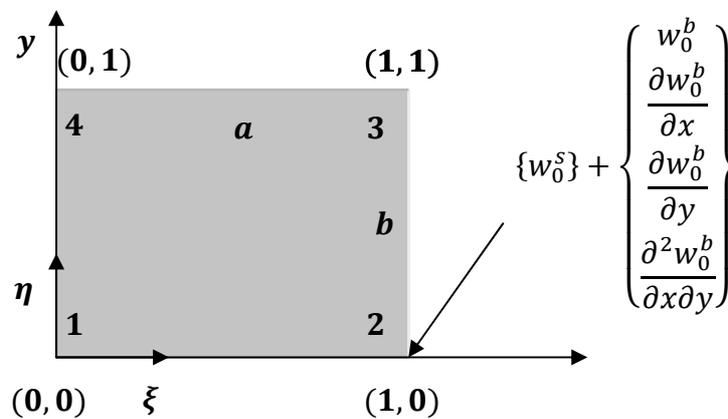
La matrice de capacitance est obtenue directement de (4.11) :

$$[C_{cp}] = \int_A [N]^T [\bar{C}] [N] dx dy \quad (4.34)$$

## IV-2 Développement d'un élément fini de type $p$ pour l'analyse thermo-élastique

### IV-2-1 Choix de l'élément

L'élément développé dans cette étude est un élément fini de type  $p$  rectangulaire à quatre nœuds (voir figure 4.2), les degrés de liberté aux nœuds sont respectivement les déplacements transversaux ( $w_0^b$  et  $w_0^s$ ) et les rotations  $w_{0,x}^b$ ,  $w_{0,y}^b$  et  $w_{0,xy}^b$ .



**Figure 4.2 :** Élément hiérarchique rectangulaire de type  $p$  pour l'analyse thermo-élastique.

### IV-2-2 Sélection des fonctions de forme

Un système de coordonnées adimensionnelles est utilisé pour décrire la géométrie de l'élément :

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{a} \\ \eta = \frac{y}{b} \end{cases} \quad 0 \leq \xi; \eta \leq 1 \quad (4.34)$$

Les fonctions de forme utilisées pour décrire le champ de déplacement de la plaque sandwich sont les fonctions trigonométriques. Les deux groupes de fonctions de forme utilisés sont (Houmat 1997,2001):

➤ Pour la continuité  $C^0$

$$f = [f_1, f_2, f_{r+2}] \quad (4.35)$$

➤ Pour la continuité  $C^1$

$$g = [g_1, g_2, g_3, g_4, g_{r+4}] \quad (4.36)$$

Avec:

$$\begin{cases} g_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ g_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ g_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ g_4 = -\xi^2 + \xi^3 \\ g_{r+4} = \delta_r [-\xi + (2 + (-1)^r)\xi^2 - (1 + (-1)^r)\xi^3 + \sin(\delta_r \xi)] \end{cases} \quad (4.37)$$

Le champ de déplacement dans la plaque peut être exprimé par les fonctions de forme hiérarchiques:

$$\begin{Bmatrix} w_0^s(\xi, \eta, t) \\ w_0^b(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{s_x} \sum_{j=1}^{s_y} Z_{ij} f_i(\xi) f_j(\eta) \\ \sum_{i=1}^{t_x} \sum_{j=1}^{t_y} W_{ij} g_i(\xi) g_j(\eta) \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

la relation (4.38) peut être écrite sous la forme :

$$\{q\} = [N]\{\bar{q}\}, \quad (4.39)$$

où :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_{w_0^s}] & 0 \\ 0 & [N_{w_0^b}] \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\{\bar{q}\} = \{Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{(M+2)(N+2)}, \dots, W_{11}, W_{12}, W_{(M+4)(N+4)}, \dots\}^T \quad (4.41)$$

### IV-2-3 Détermination des matrices de rigidité

A partir de l'énergie de déformation, la matrice de rigidité  $[K_{ps}]$  est déterminée. Elle est égale à :

$$[K_{ps}] = [K_f] + [K_s] \quad (4.42)$$

où :

- $[K_{ps}]$  : matrice de rigidité de la plaque sandwich,
- $[K_f]$  : matrice de rigidité de flexion,
- $[K_s]$  : matrice de rigidité de cisaillement.

#### IV-2-3-1 Matrice de rigidité de flexion

Le terme de l'énergie de déformation relatif à la flexion est donné à partir de l'expression (Eq. 3-83) de l'énergie de déformation de la plaque sandwich:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T [D] \{\chi\} dA \quad (4.43)$$

Sachant qu'on peut exprimer  $\{\chi\}$  en fonction de la matrice des fonctions de forme et le vecteur des déplacements généralisés :

$$\{\chi\} = [B_\chi] \{\bar{q}\} \quad (4.44)$$

avec :

$$[B_\chi] = [A_\chi] [N] \quad (4.45)$$

où  $[A_\chi]$  est la matrice de différentiation, donnée par :

$$[A_\chi] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ 0 & -2 \frac{1}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

En remplaçant  $\{\chi\}$  donné par la relation (4.44) dans (4.43) , il résulte :

$$U_f = \frac{1}{2} ab \int_A \{\bar{q}\}^T [B_\chi]^T [D] [B_\chi] \{\bar{q}\} d\xi d\eta, \quad (4.47)$$

or,

$$U_f = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [K_f] \{\bar{q}\}, \quad (4.48)$$

la matrice de rigidité  $[K_f]$  est donnée par :

$$[K_f] = ab \int_A [B_\chi]^T [D] [B_\chi] d\xi d\eta. \quad (4.49)$$

#### IV-2-3-2 Matrice de rigidité de cisaillement

Le terme de l'énergie de déformation relatif au cisaillement est donné à partir de l'expression (Eq. 3-83) de l'énergie de déformation de la plaque sandwich:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T [S] \{\gamma\} dA. \quad (4.50)$$

Sachant qu'on peut exprimer  $\{\gamma\}$  par la matrice des fonctions de forme et le vecteur des déplacements généralisés :

$$\{\gamma\} = [B_\gamma] \{\bar{q}\}, \quad (4.51)$$

avec :

$$[B_\gamma] = [A_\gamma] [N], \quad (4.52)$$

où  $[A_\gamma]$  est la matrice de différentiation, donnée par :

$$[A_\gamma] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

En remplaçant  $\{\gamma\}$  donné par la relation (4.51) dans (4.50) , il résulte :

$$U_s = \frac{1}{2} ab \int_A \{\bar{q}\}^T [B_\gamma]^T [S] [B_\gamma] \{\bar{q}\} d\xi d\eta, \quad (4.54)$$

or, on peut écrire  $U_s$  sous la forme suivante :

$$U_s = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [K_s] \{\bar{q}\}, \quad (4.55)$$

la matrice de rigidité  $[K_s]$  est donnée par :

$$[K_s] = ab \int_A [B_\chi]^T [S] [B_\chi] d\xi d\eta. \quad (4.56)$$

#### IV-2-4 Détermination de la matrice masse

A partir de l'énergie cinétique, la matrice masse  $[M_{ps}]$  est donnée sous la forme suivante :

$$[M_{ps}] = [M_1] + [M_2] \quad (4.57)$$

où :

- $[M_{ps}]$  matrice masse de la plaque sandwich,
- $[M_1]$  matrice masse relative au mouvement transversal,
- $[M_2]$  matrice masse relative au mouvement de rotation.

Le terme de l'énergie cinétique relatif au mouvement transversal est donné à partir de l'expression (Eq. 3.87) de l'énergie cinétique de la plaque sandwich:

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \rho^* \int_A (\dot{w}_0^{b2} + \dot{w}_0^{s2} + 2\dot{w}_0^b \dot{w}_0^s) dA \quad (4.58)$$

on peut exprimer  $E_{C1}$  en fonction du vecteur vitesse  $\{\dot{q}\}$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \rho^* \int_A \{\dot{q}\}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{1 \quad 1\} \{\dot{q}\} dA, \quad (4.59)$$

En introduisant la matrice des fonctions de forme, il résulte :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \rho^* \int_A \{\bar{q}\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [N] \{\bar{q}\} dA \quad (4.60)$$

or  $E_{C1}$  est de la forme :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [M_1] \{\bar{q}\}, \quad (4.61)$$

ce qui permet de déterminer la matrice masse  $[M_1]$  :

$$[M_1] = ab\rho^* \int_A [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [N] d\xi d\eta. \quad (4.62)$$

Le terme de l'énergie cinétique relatif au mouvement de rotation est donné à partir de l'expression (Eq. 3.87) de l'énergie cinétique de la plaque sandwich:

$$E_{C2} = \frac{1}{2} I_b \int_A \left( \frac{\partial \dot{w}_0^{b2}}{\partial x^2} + \frac{\partial \dot{w}_0^{s2}}{\partial y^2} \right) dA \quad (4.63)$$

Sachant qu'on peut l'exprimer ainsi :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} abI_b \int_A \{\bar{q}\}^T [B_2]^T [B_2] \{\bar{q}\} d\xi d\eta \quad (4.64)$$

Avec :

$$[B_2] = [A_2][N], \quad (4.65)$$

où  $[A_2]$  est la matrice de différentiation, donnée par :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

or  $E_{C2}$  est de la forme :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [M_2] \{\bar{q}\}, \quad (4.67)$$

ce qui permet de déterminer la matrice masse  $[M_2]$  :

$$[M_2] = \frac{1}{2} ab l_b \int_A [B_2]^T [B_2] d\xi d\eta \quad (4.68)$$

#### IV-2-5 Détermination du vecteur force dû à l'effet thermique

A partir de l'énergie de déformation le vecteur force dû à l'effet thermique  $\{F(t)\}$  est déterminé:

$$U_{\Delta T} = \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T \{M^{\Delta T}\} dA, \quad (4.69)$$

en utilisant les équations (4.44), (4.45) et (4.46), on aura :

$$U_{\Delta T} = \frac{1}{2} ab \int_A \{\bar{q}\}^T [B_\chi]^T \{M^{\Delta T}\} d\xi d\eta, \quad (4.70)$$

ce qui permet de déterminer  $\{F(t)\}$

$$\{F(t)\} = ab \int_A [B_\chi]^T \{M^{\Delta T}\} d\xi d\eta. \quad (4.71)$$

# Chapitre V

## **Méthodologies de résolution numérique et d'élaboration d'un programme de calcul**

*L'objectif de ce chapitre est de décrire les méthodes numériques utilisées pour résoudre les problèmes formulés auparavant. Un schéma de résolution est développé pour l'élaboration d'un programme de calcul.*

### **V-1 Démarche d'un schéma de résolution**

L'analyse statique et dynamique du panneau solaire sous l'effet de charges thermiques nécessite préalablement la détermination des différents flux solaire, terrestre et albédo. Ces flux dépendent principalement de la position relative du satellite par rapport au soleil et la terre. Dans ce sens, la détermination des paramètres orbitaux s'avèrent indispensable. La résolution des équations de mouvement du satellite devient donc la première étape à résoudre, le schéma de résolution est donné ultérieurement dans la suite de ce chapitre. Une fois ces flux déterminés, ils constituent les conditions aux limites du problème thermique dont la résolution de l'équation de la chaleur constitue la clé pour l'analyse du problème thermomécanique. Le panneau solaire modélisé par une plaque hybride composée d'un empilement de couches de propriétés différentes est soumis à ces flux de chaleur son comportement thermique en est dépendant. Une fois la variation de température dans la plaque hybride déterminée il est possible maintenant d'analyser le comportement mécanique du panneau solaire, bien sûr en résolvant les équations d'équilibre d'une plaque sandwich considérée comme modèle mathématique pour le panneau solaire. Dans la suite, le schéma de calcul nécessaire à l'élaboration d'un programme de calcul est explicité, voir figure 5.1.

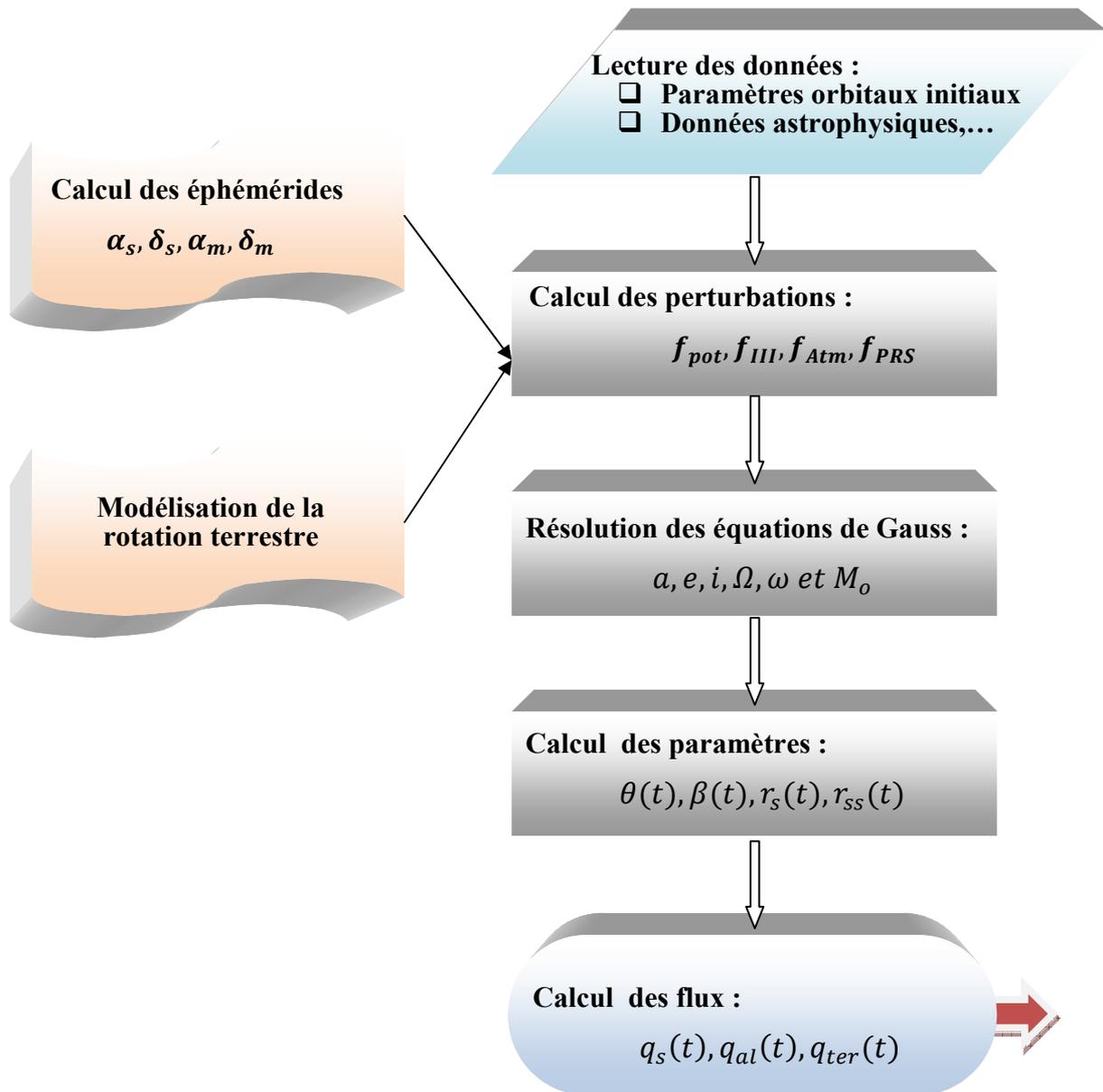


Figure 5.1 : Schéma de calcul global.

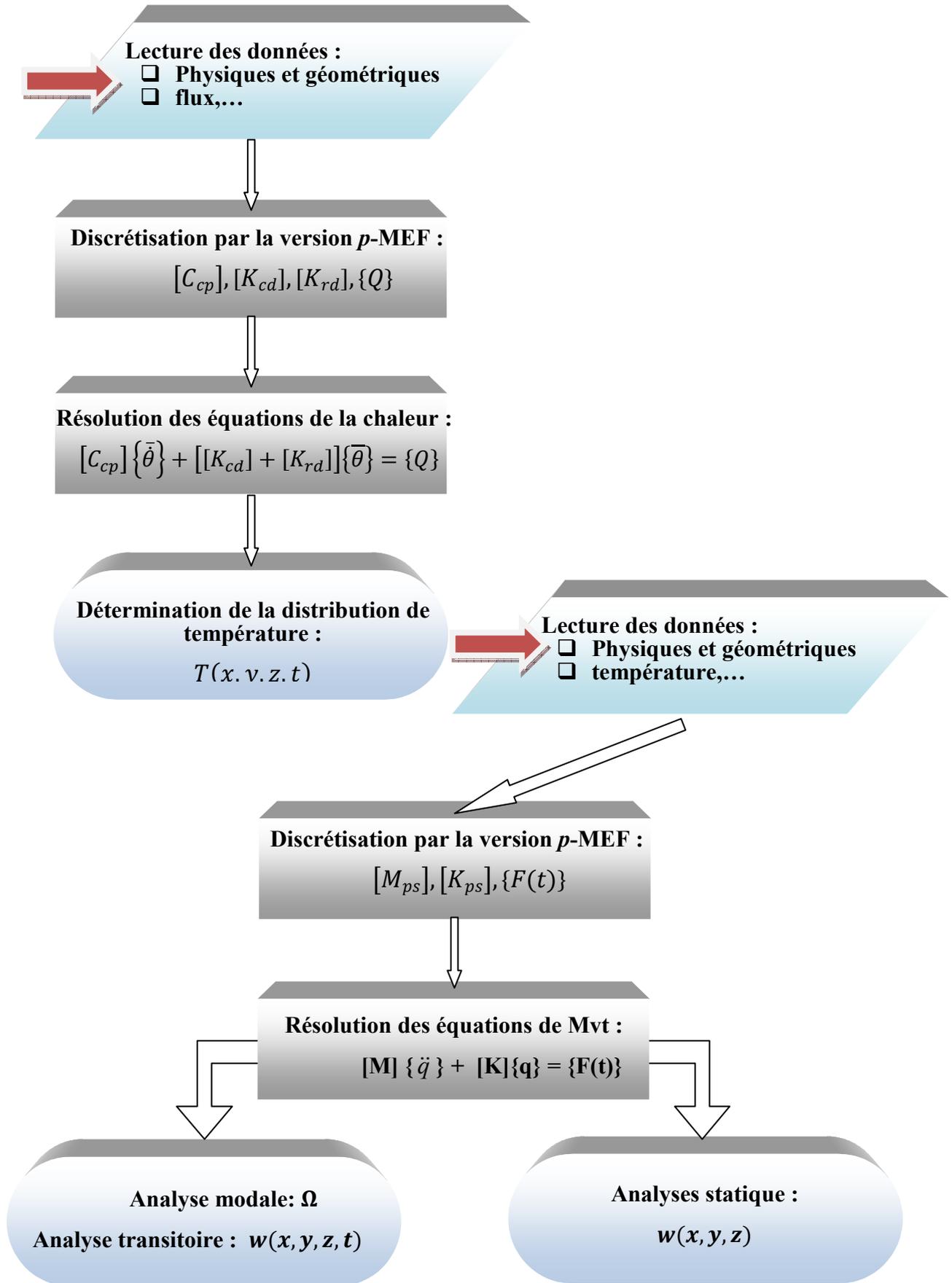


Figure 5.1 : suite.

## **V-2 Intégrations numériques en orbitographie**

On ne peut dissocier les efforts qui ont été faits pour décrire l'évolution du satellite artificiel, du travail visant à mieux déterminer les forces qui perturbent son mouvement. Historiquement l'utilisation de modèles de forces de plus en plus complets se retrouve dans les projets visant à calculer les coefficients du potentiel terrestre. Cela n'empêche pas qu'une modélisation précise du mouvement ait d'autres applications (positionnement terrestre et analyse de missions, par exemple). On peut regrouper les méthodes d'intégration en trois grandes catégories : les méthodes analytiques, les méthodes numériques et les méthodes mixtes analytiques-numériques.

Pour résoudre le problème analytiquement il faut simplifier le modèle de forces de perturbations de telle sorte à pouvoir intégrer les équations de mouvement. Cette procédure est connue sous le nom de perturbations générales. Les méthodes numériques sont utilisées plutôt dans le cas où il n'y a pas de simplifications dans le modèle de forces. Cette procédure est connue sous le nom de perturbations spéciales.

### **a) Méthodes analytiques**

Ce sont les premières méthodes qui ont été utilisées et qui ont produit les meilleurs modèles de potentiel terrestre jusqu'en 1973 [Kozai 1961, 1969, Lundquist et Veis 1966, Gaposchkin et Lambeck 1969, Gaposchkin 1973]. Elles reposent essentiellement sur les travaux de Brouwer et de Kozai pour le traitement des perturbations dues aux harmoniques zonaux (Brouwer 1959, Kozai 1962a), des perturbations lunisolaires (Kozai 1966) et de la pression de radiation solaire directe (Kozai 1961). Le développement de Kaula permet d'intégrer l'effet des harmoniques tesseraux non résonnants au premier ordre (Kaula 1966).

#### **➤ Avantages :**

- on obtient une information très riche sur l'influence des différentes perturbations et sur les effets des différents paramètres sur le comportement du mouvement,
- une fois la théorie établie, les calculs pour obtenir une position à une date donnée à partir de conditions initiales sont très rapides,
- une théorie analytique peut être valable sur une très longue durée.

➤ **Inconvénients :**

- la construction d'une théorie analytique est très lourde,
- beaucoup de perturbations sont très difficiles ou même impossibles à prendre en compte avec une bonne précision : résonances, perturbations luni-solaires (effets à longues périodes), pression de radiation solaire (dans le cas où le satellite passe à l'ombre de la Terre), freinage atmosphérique...
- aucune théorie n'est valable pour toutes les configurations : faibles et fortes excentricité, faibles et fortes inclinaisons, inclinaison critique...

**b) Méthodes numériques**

L'intégration purement numérique a été utilisée depuis le milieu des années 1960, mais ne s'est imposée complètement qu'environ 10 ans plus tard. Depuis, tous les modèles géodynamiques (détermination globale des coefficients du potentiel et des coordonnées de stations) ont utilisé exclusivement cette méthode : modèles GRIM (GRGS/France et DGFI/Allemagne), GEM (Goddard Space Flight Center/USA) et TEG (Université du Texas/USA).

➤ **Avantages :**

- la mise en œuvre est moins lourde que pour les méthodes analytiques,
- on peut traiter toutes les perturbations avec une grande précision presque indépendamment de leur complexité mathématique,
- il existe des formulations efficaces pour toutes les configurations, (coordonnées rectangulaires ou éléments orbitaux non singuliers).

➤ **Inconvénients :**

- ces méthodes ne permettent pas d'obtenir directement des informations qualitatives sur le comportement du système,
- elles sont très coûteuses en temps de calcul, ce coût dépendant de la longueur de l'intervalle d'intégration,
- la précision obtenue dépend fortement de la longueur de l'intervalle d'intégration et se dégrade rapidement lorsque cette longueur croît. L'utilisation de l'intégration numérique est donc délicate sur de longues durées.

**c) Méthodes mixtes analytiques-numériques**

Dans ces méthodes, on intègre numériquement un système différentiel ne générant plus aucune variation à courtes périodes. Ce système différentiel est construit à partir du système différentiel initial à l'aide d'une théorie analytique éventuellement complétée par des quadratures numériques pour certaines

perturbations. Historiquement, les méthodes mixtes ont été introduites pour combler la déficience des méthodes analytiques dans le cas des résonances profondes [Gedeon, Douglas et Palmiter 1967]. Aujourd'hui, on les considère plutôt comme des remèdes à certaines faiblesses de l'intégration numérique dans le cas des études sur de grands intervalles de temps. En effet, l'élimination des courtes périodes permet d'utiliser un long pas de calcul lors de l'intégration numérique. Cela réduit à la fois le coût en temps de calcul et les effets des erreurs d'arrondis et de troncatures. Suivant le soin que l'on apporte à leur mise en œuvre et le contexte dans lequel on les utilise, ces méthodes peuvent combiner les avantages des méthodes analytiques et numériques. Nous avons dit qu'elles peuvent remédier à une grande partie des inconvénients du numérique pur. Elles conservent cependant une partie de la lourdeur de construction liée aux méthodes analytiques. Quant au problème de la précision, il faut remarquer que les méthodes analytiques échouent essentiellement pour l'intégration des effets à longues périodes (résonances, perturbations luni-solaires). Or il s'agit justement ici d'intégrer numériquement ces effets. Après quelques succès au début des années 1970 [Wagner 1973], cette méthode n'a pas suivi les progrès accomplis dans la précision des observations. Cependant elle n'a pas été vraiment remplacée pour les analyses à longues périodes qui deviennent pourtant de plus en plus prometteuses. Les travaux de Balmino, Borderies, Exertier et Barlier [Borderies 1976, Exertier 1988, 1990] ont permis de faire nettement progresser cette méthode et ont prouvé son fort potentiel.

### V-2-1 Méthodes d'intégration numériques multi-pas

Pour résoudre numériquement le problème d'intégration d'orbite d'un satellite artificiel, on utilise soit les équations du mouvement Eq. (2.23), soit les équations de Gauss Eq. (2.32). En pratique, on utilise le deuxième cas, du moment que la résolution du système d'équations (2.23) nous donne la position et la vitesse du satellite sans nous informer directement sur l'évolution de l'orbite ou du plan orbital, [Vallado et McClain 1997]. Alors que le système d'équations de Gauss, nous permet d'étudier la variation des éléments orbitaux dans le temps.

Le système d'équations de Gauss s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \{\dot{y}_i\} = \{f(y_i, t)\} \\ \{y(t)\} = \{y\}_0 \\ \{\dot{y}(t)\} = \{\dot{y}\}_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $y(t)$  correspond alors au vecteur des paramètres orbitaux du satellite dans le repère inertiel,

$$\{y(t)\} = \{a, e, i, \Omega, \omega, M_o\}^T \quad (5.2)$$

et le second membre  $f(\dot{y}_i, t)$  dépend des forces perturbatrices agissant sur le satellite (potentiel gravitationnel terrestre, forces surfaciques, etc.).

On intègre de manière numérique le système d'équations donné par (5.2). Pour cela, on dispose de deux types de méthodes discrètes différentes (voir Zarrouati 1997, Barriot 1989, et Balmino 1974) : (i) Méthodes à un pas, ou (ii) Méthodes multi-pas).

En orbitographie les méthodes multi-pas sont plus utilisées que les méthodes à un pas. L'idée des méthodes à pas multiple est d'utiliser non seulement l'évaluation  $f_i$  mais aussi un certain nombre de valeurs passées  $f_{i-1}, \dots$ . Il existe deux catégories de méthodes multipas : (i) une méthode consistant à remplacer la fonction  $f(y_i, t)$  de l'équation (5.1) par un polynôme d'interpolation, suivie d'une intégration, ou bien (ii) une méthode consistant à approcher la dérivée de  $f(y_i, t)$  en un point par l'intermédiaire de développements de Taylor. Les méthodes numériques multi-pas nécessitent l'utilisation d'une autre méthode d'intégration à un pas « starter » pour amorcer le calcul, la plus utilisée est la méthode de Runge-Kutta.

### **V-2-1-1 Méthode d'intégration de Tchebychev**

Dans cette étude les fonctions trigonométriques de Tchebychev sont utilisées à la place des fonctions polynomiales, vue le caractère périodique des perturbations. Ces fonctions sont introduites pour la première fois par Richardson (Richardson et al. 1998) dans la résolution des équations différentielles du premier ordre dans le calcul de propagation d'orbite.

Pour déterminer les éléments osculateurs, on discrétise l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  sur lequel on veut étudier la position du satellite. On pose donc :  $t_{i+1} = t_i + h$  pour tout  $i = 0, \dots, N - 1$ , où  $N - 1$  correspond au nombre d'intervalles de temps discrétisant l'arc d'orbite étudié et  $h$  est appelé le pas de discrétisation. Nous avons alors :  $h = (t_f - t_0)/N$  et  $t_N = T_f$ .

La solution dans le cas du système d'équations (5.1) à l'instant  $t_{i+1}$  est donnée par :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(z) dz \quad (5.3)$$

Le principe des méthodes numériques utilisées dans ce type de problème est d'approximer  $f(z)$  par une série de fonctions, dans notre cas c'est les fonctions trigonométriques de Tchebychev. Le but est alors de chercher une solution approchée  $y_i$  de la solution de l'équation à résoudre, en chaque point  $t_i$ , de telle sorte que :  $y_i = y(t_i)$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Introduisons la variable  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) pour discrétiser le pas de temps  $h$  (voir figure 5.2) de tel sorte que :

$$t_{i+1} = t_i + \xi h, \quad (5.4)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$y(t_i + \xi h) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_i + \xi h} f(z) dz, \quad (5.5)$$

d'après (5.4), on voit bien que la solution est achevée lorsque  $\xi$  est égale à 1.

Faisant le changement de variable suivant :

$$z = t_i + \frac{h}{2}(\alpha + 1), \quad (5.6)$$

ceci nous permet d'écrire :

$$y(t_i + \xi h) = y(t_i) + \int_{-1}^{2\xi-1} f(\alpha) d\alpha, \quad (5.7)$$

où  $\alpha$  est une variable comprise entre -1 et 1. La fonction  $f(\alpha)$  peut être approximée par une série convergente, les fonctions trigonométriques de Tchebychev sont utilisées dans ce cas :

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k g_k(\alpha), \quad (5.8)$$

les fonctions de Tchebychev sont définies par :

$$g_k(\cos \phi) = \cos(k\phi), \quad (5.9)$$

alors que les coefficients  $C_k$  sont donnés par :

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\alpha)g_k(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha, \quad (5.10)$$

et qui peuvent être approximés par :

$$C_k \approx \sum_{k=0}^n a_k g_k(\alpha), \quad (5.11)$$

avec :

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n f(x_j) g_k(\cos \theta_j). \quad (5.12)$$

injectons (5.9) dans (5.12), on aura :

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n f(x_j) \cos(k\theta_j), \quad (5.13)$$

où le terme  $\theta_j$  est le pas de temps exprimé sous forme angulaire par :

$$\theta_j = \frac{(n-j)\pi}{n}. \quad (5.14)$$

Le point  $x_j$  est appelé point nodal de l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$ , exprimé en fonction du pas de temps  $\theta_j$  par :

$$x_j = t_i + \frac{h}{2}(1 + \cos \theta_j) \quad (5.15)$$

exprimé en fonction de  $\xi$ ,  $x_j$  s'exprime par :

$$x_j = t_i + h\xi_j \quad (5.16)$$

A partir de l'équation (5.3) on peut obtenir la solution au point  $x_j$  :

$$y(t_i + \xi_j h) = y(t_i) + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^{2\xi_j-1} g_k(\alpha) d\alpha \quad (5.17)$$

Utilisant la forme récursive des polynômes de Tchebychev, l'intégrale dans l'équation (5.17) s'écrit ainsi :

$$\int g_k(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{g_{k+1}(\alpha)}{k+1} - \frac{g_{k-1}(\alpha)}{k-1} \right], \quad k \geq 2 \quad (5.18)$$

injectons cette dernière équation dans (5.17), on obtient :

$$y(x_j) = y(t_i + \xi_j h) = y(t_i) + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^n R_{jk} a_k, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.19)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{j0} = \cos \theta_j \\ R_{j1} = \frac{1}{4} [\cos(\theta_j) - 1] \\ R_{jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos((k+1)\theta_j) + (-1)^k}{k+1} - \frac{\cos((k-1)\theta_j) + (-1)^k}{k-1} \right], \quad k \geq 2 \end{array} \right. \quad (5.20)$$

L'équation (5.19) prend la forme simplifiée en l'écrivant au point nodal  $\xi_j = 1$ , en exprimant  $\theta_j$  par l'équation (5.14), ce qui nous donne :

$$y(t_i + h) = y(t_i) - h \sum_{k=0,2,4,\dots}^n \frac{a_k}{(k+1)(k-1)}, \quad (5.21)$$

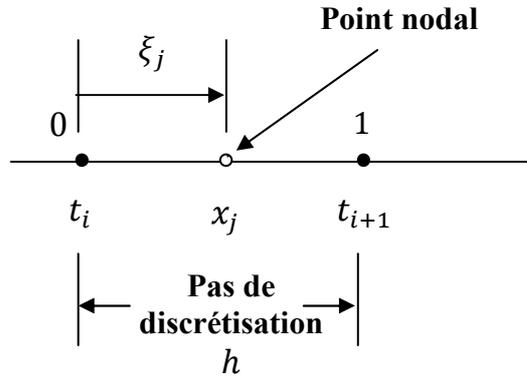


Figure 5.2 : Discrétisation du temps et point nodal.

### V-2-2 Méthode d'intégration de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta ( Tannehill et al. 1997) est une méthode à un pas, utilisée pour amorcer la méthode d'intégration de Tchebychev. Cette méthode est de la forme :

$$y(t_i + h) = y(t_i) + h\Phi(x, t, h), \quad (5.22)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, t, h) = \sum_{i=1}^q a_i k_i(x, t, h) \\ k_1(x, t, h) = f(x, t) \\ k_i(x, t, h) = f\left(x + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j^{(i)} k_j(x, t, h), t + \alpha_i h\right) \end{array} \right. \quad (5.23)$$

L'idée est d'intégrer en utilisant des valeurs en des points particuliers, avec des poids d'intégration particuliers  $k_i$ . Les termes  $a_i, \alpha_i$  et  $\beta_j^{(i)}$  sont des constantes ajustées pour obtenir l'ordre souhaité.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisée dans la suite de l'étude. Le schéma de calcul se présente alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, t, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x, t) \\ k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}k_1, t + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}k_2, t + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 = f(x + hk_3, t + h) \end{array} \right. \quad (5.24)$$

### **V-3 Intégration numérique en analyse dynamique transitoire**

Dans le chapitre précédent les équations de mouvement du panneau solaire ont été déterminées en utilisant les équations de Lagrange. Les matrices de rigidité et masse ainsi que le vecteur forces extérieures sont formés en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchiques.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \quad (5.25)$$

Le système obtenu est un système d'équations différentielles linéaires du deuxième ordre, sa résolution nécessite l'utilisation d'une méthode numérique. Il existe un grand nombre de méthodes d'intégration plus ou moins adaptées à un type de problème, par exemple les méthodes d'intégration explicite conviennent mieux aux problèmes de propagation d'ondes (cas des fluides). Pour les problèmes de dynamique de structures les plus utilisées sont: les méthodes d'intégration directe et la méthode de superposition modale.

En pratique le choix de telle ou telle méthode d'intégration dépend de sa convergence et de sa stabilité, en plus de l'élément fini utilisé, donc

indirectement, du problème traité. Dans le cas de la méthode des éléments finis hiérarchiques se basant sur l'enrichissement de l'élément, les méthodes implicites sont plus adaptées dans ce cas (Bathe 1996).

La plus part des méthodes d'intégration directe sont des méthodes pas à pas dont l'équilibre est réalisé à chaque pas de temps  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$ ,  $3\Delta t$ ,..., c'est-à-dire que la solution à l'instant  $t + \Delta t$  est déterminée implicitement à partir de la solution précédente. Parmi ces méthodes on peut citer : Méthode de Newmark (Newmark 1959), méthode de  $\theta - \text{wilson}$  (Bate et Wilson 1968) et la méthode de  $\alpha - \text{HHT}$  développée par Hilber (Hilber et al. 1977),...

Dans la suite de l'étude, la méthode de Newmark est explicitée, et utilisée pour la résolution du problème traité.

### V-3-1 Méthode d'intégration de Newmark

Cette méthode est utilisée par beaucoup de chercheurs, on peut citer les travaux de Parhi (Parhi et al. 2001) dans l'analyse dynamiques des plaques composites sous l'effet hygrothermique, de Lee et Han (Lee et Han 2006) dans l'analyse des vibrations libres et forcées des plaques et coques composites. Elle est utilisée aussi par Li (Li et al. 2006) dans l'analyse dynamique des structures spatiales. Notons que la plus part des logiciels de calcul de structures (ANSYS, ABAQUS,..) utilisent l'intégration de Newmark.

C'est une méthode implicite à un pas, stable et converge rapidement dans la plus part des cas.

Elle se présente sous la forme suivante :

$$\{q_{i+1}\} = \{q_i\} + h\{\dot{q}_i\} + \frac{1}{2}h^2[(1 - 2\alpha)\{\ddot{q}_i\} + 2\alpha\{\ddot{q}_{i+1}\}] \quad (5.26)$$

$$\{\dot{q}_{i+1}\} = \{\dot{q}_i\} + h[(1 - \delta)\{\ddot{q}_i\} + \delta\{\ddot{q}_{i+1}\}] \quad (5.27)$$

où :

$\alpha, \delta$  : paramètres d'intégration de Newmark,

$\{q_i\}$  : vecteur des déplacements généralisés à l'instant  $t_i$ ,

$\{\dot{q}_i\}$  : vecteur des vitesses généralisées à l'instant  $t_i$ ,

$\{\ddot{q}_i\}$  : vecteur des accélérations généralisées à l'instant  $t_i$ ,

$\{q_{i+1}\}, \{\dot{q}_{i+1}\}, \{\ddot{q}_{i+1}\}$  : vecteurs cités précédemment à l'instant  $t_{i+1}$ ,

$h$  : pas de temps.

L'objectif est la détermination du vecteur des déplacements généralisés  $\{q_{i+1}\}$  en utilisant les équations d'équilibre à l'instant  $t_{i+1}$ , d'où:

$$[M]\{\ddot{q}_{i+1}\} + [K]\{q_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} \quad (5.28)$$

pour cela réarrangeant (5.26) et (5.27) en vue de déterminer  $\{\ddot{q}_{i+1}\}$

$$\{\ddot{q}_{i+1}\} = a_0(\{q_{i+1}\} - \{q_i\}) - a_1\{\dot{q}_i\} - a_2\{\ddot{q}_i\} \quad (5.29)$$

injectons (5.29) dans (5.28) on obtient  $\{q_{i+1}\}$  :

$$(a_0[M] + [K])\{q_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} + [M](a_0\{q_i\} + a_1\{\dot{q}_i\} + a_2\{\ddot{q}_i\}), \quad (5.30)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\alpha h^2} \quad (5.31)$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha h} \quad (5.32)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (5.33)$$

une fois  $\{q_{i+1}\}$  calculé on peut déterminer  $\{\ddot{q}_{i+1}\}$  en utilisant l'équation (5.29).

D'après Zienkiewicz (Zienkiewicz et Taylor 2005), la solution du système (5.28) est inconditionnellement stable si les paramètres d'intégration vérifient les conditions suivantes :

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2 \quad (5.34)$$

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

$$\frac{1}{2} + \alpha + \delta > 0 \quad (5.36)$$

## V-4 Intégration numérique en analyse thermique transitoire

Les équations de la chaleur en régime transitoire (Eq. 4.20) se réduisent à un système d'équations différentielles nonlinéaires du premier ordre de la forme :

$$[C_{cp}] \{\bar{\theta}\} + [[K_{rd}(\bar{\theta})] + [K_{cd}]] \{\bar{\theta}\} = \{Q_{rd}\} - \{Q_q\} \quad (5.37)$$

En général les méthodes utilisées dans ce type de problème sont les méthodes des différences finis explicites, implicites et la méthode- $\theta$  ainsi que les cas particuliers de cette méthode : méthode de Crank–Nicolson, les méthodes d'Euler explicite et implicite. Dans le cas nonlinéaire la méthode de Newton-Raphson, ou la méthode de prédiction-corrrection peuvent être utilisées en conjonction avec les méthodes citées auparavant (Schäfer 2006).

Dans cette étude la méthode PTI développée par Zhong (Zhong et Williams 1994) est utilisée pour résoudre le système d'équations donné par l'expression (5.37). D'un côté, c'est une méthode explicite et inconditionnellement stable; et d'un autre côté, elle permet de réduire considérablement le temps de calcul avec un gain sur la précision des résultats obtenus (Gu YX ; Chen B S ; Zhang H W and Grandhi RV 2002). La méthode prédicteur –correcteur est utilisée en conjonction avec la méthode PTI.

### V-4-1 Méthode PTI

Le principe de la méthode consiste à transformer le système d'équations (5.37) sous la forme suivante :

$$\{\bar{\theta}\} = [H]\{\bar{\theta}\} + \{r\} \quad (5.38)$$

[H] est une matrice constante définie par :

$$[H] = -[C_{cp}]^{-1}[K_{cd}] \quad (5.39)$$

alors que le vecteur  $\{r\}$  est exprimé par :

$$\{r\} = \{r\}_1 + \{r\}_2 + \{r\}_3 \quad (5.40)$$

avec

$$\{r\}_1 = [C_{cp}]^{-1} \{Q_{rd}\} \quad (5.41)$$

$$\{r\}_2 = -[C_{cp}]^{-1} \{Q_q\} \quad (5.42)$$

$$\{r\}_3 = -[C_{cp}]^{-1} \{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\})\} \quad (5.43)$$

$$\{\bar{Q}_{rd}\} = [K_{rd}(\bar{\theta})] \{\bar{\theta}\} \quad (5.44)$$

où  $\{r\}_1$  et  $\{r\}_2$  sont les termes linéaires alors que  $\{r\}_3$  représente le terme non linéaire ou terme radiatif.

Pour cela exprimons les termes linéaires de la façon suivante :

$$\{Q_{rd}\} = \{Q_{rd}\}_0 + \{Q_{rd}\}_1(t - t_i) \quad (5.45)$$

$$\{Q_q\} = \{Q_q\}_0 + \{Q_q\}_1(t - t_i) \quad (5.46)$$

avec

$$\{Q_q\}_0 = \{Q_q(t_i)\} \quad (5.47)$$

$$\{Q_{rd}\}_0 = \{Q_{rd}(t_i)\} \quad (5.48)$$

$$\{Q_q\}_1 = \frac{\{Q_q(t_{i+1})\} - \{Q_q(t_i)\}}{h} \quad (5.49)$$

$$\{Q_{rd}\}_1 = \frac{\{Q_{rd}(t_{i+1})\} - \{Q_{rd}(t_i)\}}{h} \quad (5.50)$$

La solution générale de (5.38) est composée de la solution sans second membre  $\{\bar{\theta}_1\}$  et avec second membre  $\{\bar{\theta}_2\}$  :

$$\{\bar{\theta}\} = \{\bar{\theta}_1\} + \{\bar{\theta}_2\} \quad (5.51)$$

avec

$$\{\bar{\theta}_1\} = \{\bar{\theta}\}^0 \exp([H]t) \quad (5.52)$$

$$\{\bar{\theta}_2\} = \int_0^t \exp([H](t-s))\{r(s)\} ds \quad (5.53)$$

le vecteur  $\{\bar{\theta}\}^0$  caractérise les conditions initiales à l'instant  $t_0 = 0$ .

A l'instant  $t_i = ih$ , et d'après les équations précédentes, la solution est alors :

$$\{\bar{\theta}\}^i = \{\bar{\theta}\}^0 \exp([H]t_i) + \int_0^{t_i} \exp([H](t_i-s))\{r(s)\} ds \quad (5.54)$$

de même à l'instant  $t_{i+1}$ , la solution peut être exprimée par :

$$\{\bar{\theta}\}^{i+1} = \{\bar{\theta}\}^0 \exp([H]t_{i+1}) + \int_0^{t_{i+1}} \exp([H](t_{i+1}-s))\{r(s)\} ds \quad (5.55)$$

Décomposons l'intégrale entre  $(0 \rightarrow t_i)$  et  $(t_i \rightarrow t_{i+1})$  on aura :

$$\begin{aligned} \{\bar{\theta}\}^{i+1} &= \{\bar{\theta}\}^0 \exp([H]t_{i+1}) + \int_0^{t_i} \exp([H](t_{i+1}-s))\{r(s)\} ds \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp([H](t_{i+1}-s))\{r(s)\} ds \end{aligned} \quad (5.56)$$

Introduisons le pas de temps  $h(= t_{i+1} - t_i)$ , on aura :

$$\begin{aligned} \{\bar{\theta}\}^{i+1} = \exp([H]h) & \left( \{\bar{\theta}\}^0 \exp([H]t_i) + \int_0^{t_i} \exp[[H](t_i - s)]\{r(t_i)\} ds \right) \\ & + \int_0^h \exp[[H](h - s)]\{r(t_i + s)\} ds \end{aligned} \quad (5.57)$$

Par identification à (5.54), on voit bien que l'expression précédente peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{\bar{\theta}\}^{i+1} = [A]\{\bar{\theta}\}^i + \int_0^h \exp[[H](h - s)]\{r(t_i + s)\} ds \quad (5.58)$$

avec

$$[A] = \exp([H]h) \quad (5.59)$$

Injectons l'équation (5.40) dans (5.58), on obtient la solution générale à l'instant  $t_{i+1}$  :

$$\{\bar{\theta}\}^{i+1} = [A] \left[ \{\bar{\theta}\}^i + \{B\}^i \right] - \{B\}^i - \{C\}^i + \int_0^h \exp[[H](h - s)]\{r(t_i + s)\}_3 ds \quad (5.60)$$

$$\{B\}^i = [H]^{-1}[C_{cp}]^{-1} \left\{ \{Q_{rd}\}_0 + \{Q_q\}_0 \right\} + [H]^{-1}[H]^{-1} \left\{ \{Q_{rd}\}_1 + \{Q_q\}_1 \right\} \quad (5.61)$$

$$\{C\}^i = -h[H]^{-1}\{Q_q\}_1 \quad (5.62)$$

La solution obtenue reste difficile à résoudre à cause du terme non linéaire et de la matrice  $[A]$  (forme exponentielle). Pour cela utilisant la méthode de prédiction-corrrection pour évaluer le terme non linéaire dans l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$ , dont le principe est donné ci-dessous (figure 5.3) :

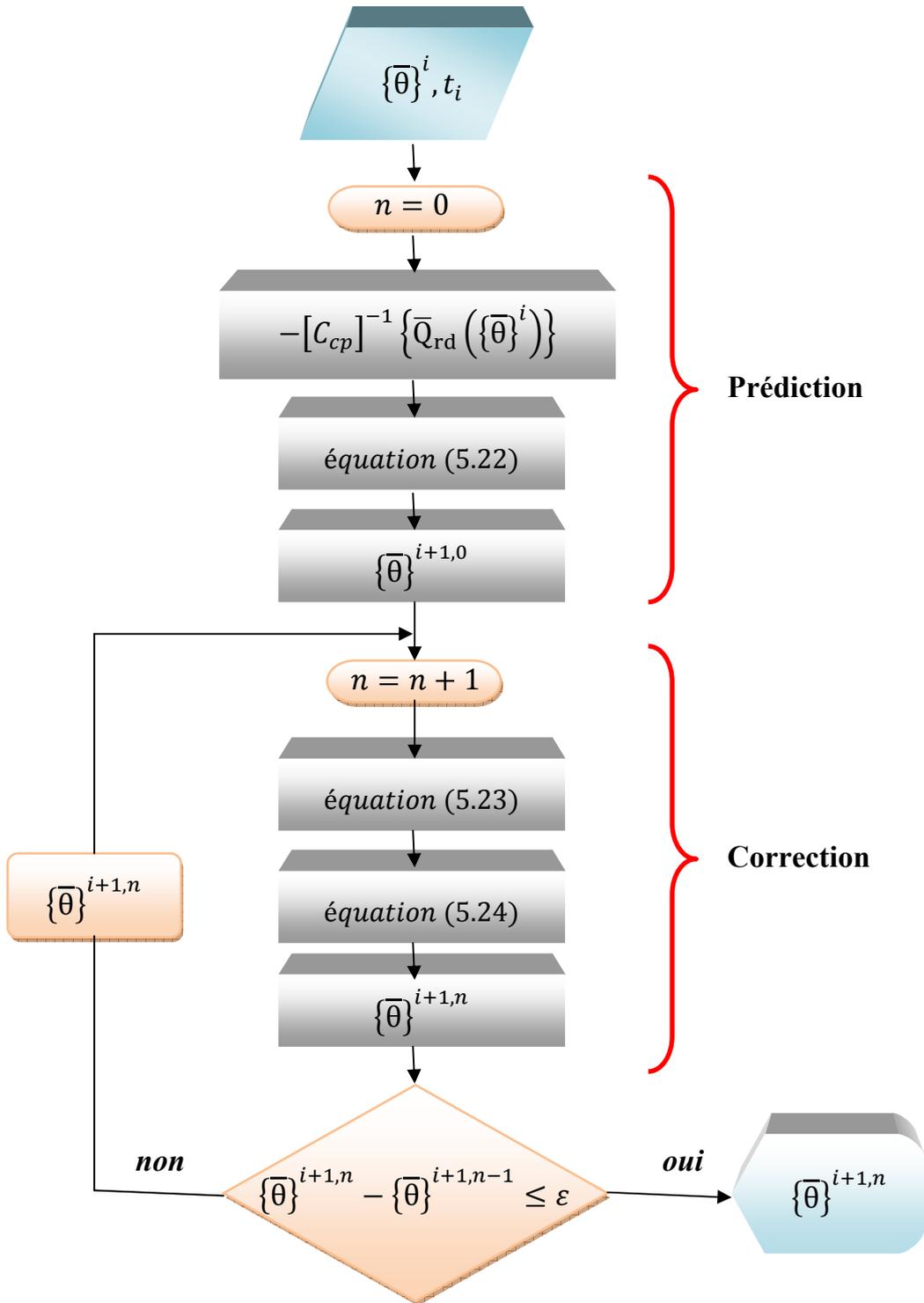


Figure 5.3 : Schéma de calcul utilisé dans la méthode de prédiction-corrrection.

$$\begin{aligned} \{B\}^i &= [H]^{-1}[C_{cp}]^{-1} \left\{ \{Q_{rd}\}_0 + \{Q_q\}_0 + \{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\}^i)\}_0 \right\} \\ &+ [H]^{-1}[H]^{-1} \left\{ \{Q_{rd}\}_1 + \{Q_q\}_1 \right\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\}^i)\}_0 = [K_{rd}(\{\bar{\theta}\}^i)] \{\{\bar{\theta}\}^i\} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \{B\}^i &= [H]^{-1}[C_{cp}]^{-1} \left\{ \{Q_{rd}\}_0 + \{Q_q\}_0 + \{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\}^{i+1,n})\}_0 \right\} \\ &+ [H]^{-1}[H]^{-1} \left\{ \{Q_{rd}\}_1 + \{Q_q\}_1 + \{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\}^{i+1,n})\}_1 \right\} \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\}^{i+1,n})\}_0 = [K_{rd}(\{\bar{\theta}\}^{i+1,n})] \{\{\bar{\theta}\}^{i+1,n}\} \quad (5.66)$$

$$\{\bar{Q}_{rd}(\{\bar{\theta}\}^{i+1,n})\}_1 = \frac{[K_{rd}(\{\bar{\theta}\}^{i+1,n-1})] \{\{\bar{\theta}\}^{i+1,n-1}\} - [K_{rd}(\{\bar{\theta}\}^i)] \{\{\bar{\theta}\}^i\}}{h} \quad (5.67)$$

Finalement pour pouvoir déterminer la solution  $\{\bar{\theta}_1\}$  il faut déterminer la matrice  $[A]$ , donc du point de vue numérique la difficulté réside dans le calcul de l'exponentiel de la matrice  $[H]$ , pour contrer cette difficulté utilisant l'algorithme  $2^m$  (Moler et al. 1978) basé sur le développement en série de Taylor de  $[A]$ .

Pour cela introduisant un nouveau pas de discrétisation  $\tau$  et faisant le changement suivant :

$$\exp([H]h) = [\exp([H]\tau)]^{2^m} \quad (5.68)$$

avec

$$\tau = \frac{h}{2^m} \quad (5.69)$$

où  $m$  est un entier pris égale à 20 (Moler et al. 1978).

Vu que l'intervalle de temps  $\tau (= h/1048576)$  est très petit, cela nous permet de développer en séries de Taylor le terme  $[\exp([H]\tau)]$  avec une très grande précision, d'où :

$$\exp([H]\tau) \approx [I] + [H_a] \quad (5.70)$$

avec

$$[H_a] = [H]\tau + \frac{([H]\tau)^2}{2!} + \dots \quad (5.71)$$

Où  $[I]$  est la matrice identité.

Notons que  $[H_a]$  est très petit devant  $[I]$  ce qui ne nous permet pas de les additionner directement pour calculer la matrice  $[A]$ .

Nous savons que :

$$[[I] + [H_a]]^{2^m} = [[I] + 2[H_a] + [H_a][H_a]]^{2^{m-1}} \quad (5.72)$$

Posons ensuite :

$$[H_a] = 2[H_a] + [H_a][H_a] \quad (5.73)$$

Et répétons le principe  $m$  fois, on pourra calculer la matrice  $[H_a]$  qui va être additionnée par la suite à la matrice identité  $[I]$ .

L'algorithme (figure 5.4) suivant schématise le calcul de  $[A]$  :

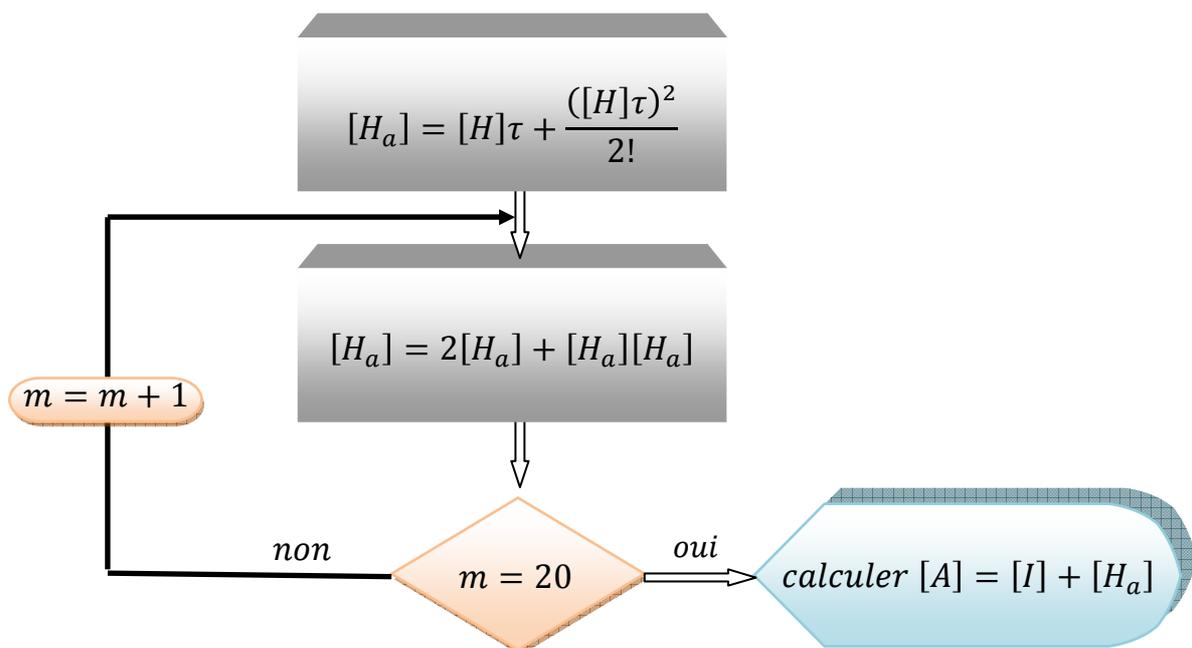


Figure 5.4 : Schéma de calcul utilisé dans le calcul de la matrice  $[A]$ .

## V-5 Calcul des paramètres de fréquence

Une fois les matrices masse et de rigidité formées, les paramètres de fréquence seront déterminés en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{x\} = 0 \quad (5.74)$$

Une transformation du problème généralisé en un problème standard est effectuée.

$$[-\omega^2[I] + [B]]\{x\} = 0 \quad (5.75)$$

avec

$$[B] = [M]^{-1}[K] \quad (5.76)$$

La matrice  $[M]$  est une matrice symétrique ce qui permet de la décomposer en utilisant la méthode de Choleski.

$$[M] = [L][L]^T \quad (5.77)$$

$[L]$  est une matrice triangulaire inférieure, en injectant (5.77) dans (5.74) il résulte :

$$[[L]^{-T}[L]^{-1}[K] - \omega^2[I]]\{x\} = 0 \quad (5.78)$$

La matrice  $[B]$  est ainsi donnée par :

$$[B] = [L]^{-T}[L]^{-1}[K] \quad (5.79)$$

La matrice  $[B]$  est obtenue en deux étapes :

- 1 Résoudre le système  $[L][D] = [K]$  (pour  $[D] = [L]^{-1}[K]$ )
- 2 Résoudre le système  $[L]^T[D] = [B]$  (pour  $[B] = [L]^{-T}[L]^{-1}[K]$ )

Le système d'équations (5.78) a les mêmes valeurs propres que le système d'équations (5.74). Le problème est maintenant standard, du fait que la matrice  $[B]$  est symétrique, les méthodes de Householder et QR peuvent être appliquées.

# Chapitre VI

## Validations, comparaisons et analyse de cas

*Nous présenterons dans ce chapitre une analyse thermo-élastique détaillée d'un panneau solaire soumis à un gradient thermique provoqué par les conditions de l'environnement en orbite. La première partie de ce chapitre met en évidence la validité du programme développé, ainsi une étude comparative est faite avec des travaux de différents auteurs. La deuxième partie fait l'objet d'une étude thermo-élastique d'un panneau solaire dans les conditions de l'environnement en orbite. Les cas étudiés sont relatifs à des cas concrets de satellites : NOAA-14, GOES-12, NAVSTAR-44 et KOMPSAT en vue de tester et de valider le code de calcul réalisé et de proposer des solutions à fin d'atteindre les objectifs fixés au chapitre I.*

### VI-1 Validations et comparaisons des résultats

#### VI.1.1 Thermique :

Pour la validation du programme, une plaque stratifiée à 3 couches d'épaisseurs  $t_1 = 0.013\text{m}$  ;  $t_2 = 0.05\text{m}$  et  $t_3 = 0.1\text{m}$  est considérée, voir figure 6.1. La distribution de température dans chaque couche du composite est déterminée en considérant le régime stationnaire. Ainsi, les résultats trouvés sont comparés aux résultats du logiciel ANSYS. La figure 6.1 indique les points considérés dans la comparaison.

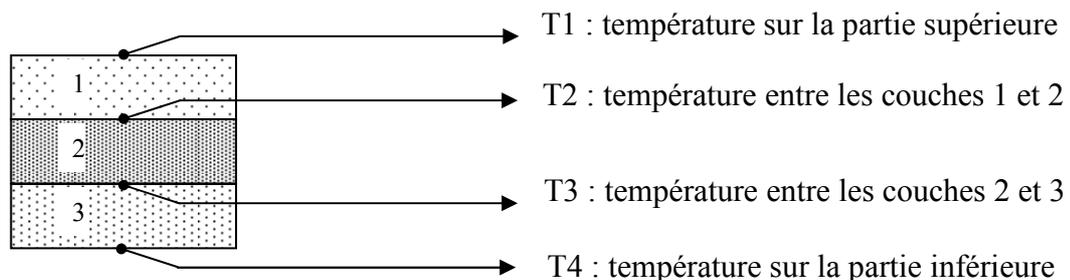


Figure 6.1 : Stratifié à trois couches

Les conditions aux limites appliquées et les propriétés thermomécaniques du composite sont données par le tableau 6.1:

**Tableau 6.1 :** Conditions aux limites et les propriétés thermomécaniques.

Cas	Face supérieure			Face inférieure			Couche		
	$h_c$ $Wm^{-2}K^{-1}$	$T_c$ $C^\circ$	$f^q$ $Wm^{-2}$	$h_c$ $Wm^{-2}K^{-1}$	$T_c$ $C^\circ$	$f^q$ $Wm^{-2}$	1	2	3
							$k_{zz}$ $WmK^{-1}$	$k_{zz}$ $WmK^{-1}$	$k_{zz}$ $WmK^{-1}$
1	40	20	—	20	-20	—	28.6	28.6	0.96
2	40	20	—	20	-20	—	0.063	0.063	0.014
3	—	—	40	20	-20	—	28.6	28.6	0.96
4	—	—	40	20	-20	—	0.063	0.063	0.014

Le tableau 6.2 montre que les résultats obtenus sont identiques aux résultats du logiciel ANSYS, notons que le nombre de fonctions de forme utilisées dans cette comparaison est de 8.

**Tableau 6.2 :** Température aux interfaces dans un stratifié à 3 couches et comparaison avec ANSYS.

Température	Convection sur les deux faces				Source de chaleur sur la face supérieure/ convection sur la face inférieure			
	Cas1		Cas2		Cas3		Cas4	
	MEF P	ANSYS	MEF P	ANSYS	MEF P	ANSYS	MEF P	ANSYS
T1	15.915	15.915	19.914	19.915	-11.208	-11.208	447.714	447.714
T2	13.702	13.702	16.474	16.745	-11.750	-11.750	410.571	410.571
T3	5.191	5.191	4.553	4.533	-13.833	-13.833	267.714	267.714
T4	-11.829	-11.830	-19.829	-19.829	-17.999	-18	-18	-18

## VI.1.2 Vibrations libres d'un stratifié

L'analyse suivante concerne l'analyse des vibrations libres d'une plaque mince en matériaux composites soumise à différentes conditions aux limites. Deux types de matériaux sont utilisés dans cette comparaison : Verre/époxy et Graphite/époxy dont les propriétés mécaniques sont données par le tableau 6.3 (Qatu 1991) :

**Tableau 6.3:** Propriétés mécaniques des matériaux considérés.

Matériau	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
<b>Verre/Epoxy</b>	60.7	24.8	12.0	0.23
<b>Graphite/Epoxy</b>	138	8.96	7.1	0.3

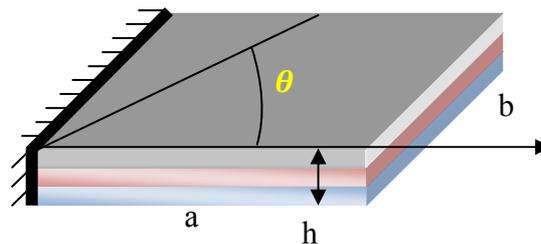
Les cas traités concernent une plaque composite en stratifiées, la plaque considérée est une plaque mince, carrée et d'épaisseur ( $h = 0.05 a$ ), encadrée d'un côté et libre sur les autres côtés, voir figure 6.2. Le premier cas est une plaque formée de trois couches de même épaisseur dont les angles d'orientation des fibres sont respectivement ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). Le deuxième cas est une plaque à cinq couches de même épaisseurs et avec l'empilement suivant ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ).

En vue d'analyser la convergence de la solution, un élément fini de type  $p$  rectangulaire est utilisé et cela en augmentant le nombre de fonctions de forme. Les tableaux 6.4 et 6.5 montrent bien que la convergence de la solution des six premiers modes est atteinte pour un nombre de fonctions de forme égale à 16. On constate aussi que les résultats obtenus sont identiques aux résultats de la solution analytique donnée par Narita (Narita et Leissa 1992) en se basant sur la théorie classique des plaques, et de l'analyse tridimensionnelle par la méthode des éléments finis hiérarchiques (version  $p$ ) réalisée par Zhu (Zhu et al. 2006).

Notons que le paramètre de fréquence utilisé dans ces deux cas est donné par :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} a^2 \omega \quad (6.1)$$

$$D_0 = \frac{E_1 h^2}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (6.2)$$



**Figure 6.2 :** Stratifié à trois couches encastred d'un coté.

**Tableau 6.4:** Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) avec les conditions aux limites : E-L-L-L.

Nbr de fonctions de forme	mode					
	1	2	3	4	5	6
6	3.47035	6.88035	18.81105	21.90158	27.26402	35.94798
7	3.46955	6.87741	18.68144	21.85042	27.21726	35.92954
8	3.46922	6.87602	18.68045	21.84681	27.20026	35.87242
9	3.46900	6.87565	18.67284	21.84430	27.19830	35.86520
10	3.46889	6.87527	18.67265	21.84366	27.19548	35.84264
11	3.46680	6.87514	18.67128	21.84311	27.19499	35.83916
12	3.46875	6.87498	18.67121	21.84288	27.19408	35.82817
13	3.46870	6.87491	18.67078	21.84265	27.19383	35.82624
14	3.46868	6.87482	18.67074	21.84254	27.19340	35.82012
15	3.46865	6.87478	18.67054	21.84239	27.19325	35.81894
16	3.46862	6.87472	18.67052	21.84229	27.19299	35.81520
solution	3.46862	6.87472	18.67052	21.84229	27.19299	35.81520
Narita et Leissa 1992	3.468	6.874	18.67	21.84	27.19	42.15
Zhu et al. 2006	3.473	6.771	18.33	21.40	26.40	35.93

**Tableau 6.5:** Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite (0°/90°/0°/90°/0°) avec les conditions aux limites : E-L-L-L.

Nbr de fonctions de forme	mode					
	1	2	3	4	5	6
6	3.28618	6.77004	19.76346	21.03336	26.38472	35.57385
7	3.28546	6.76674	19.66290	20.95333	26.34017	35.55591
8	3.28516	6.76557	19.66152	20.95015	26.32340	35.50069
9	3.28496	6.76516	19.65552	20.94617	26.32159	35.49366
10	3.28485	6.76485	19.65525	20.94562	26.31891	35.47192
11	3.28477	6.76472	19.65412	20.94491	26.31847	35.46852
12	3.28472	6.76458	19.65400	20.94473	26.31763	35.45796
13	3.28469	6.75452	19.65362	20.94451	26.31741	35.45607
14	3.28466	6.76444	19.65355	20.94442	26.31703	35.45019
15	3.28465	6.76440	19.65337	20.94430	26.31688	35.44904
16	3.28464	6.76435	19.65332	20.94429	26.31667	35.44544
solution	3.28464	6.76435	19.65332	20.94429	26.31667	35.44544
Narita et Leissa 1992	3.284	6.764	19.65	20.94	26.32	42.17
Zhu et al. 2006	3.293	6.667	19.34	20.59	25.62	35.59

Le troisième exemple est une plaque composite trois couches (30°/-30°/30°) avec les conditions aux limites L-L-L-L. Une plaque carré de longueur  $a$  et d'épaisseur ( $h = \frac{1}{100}a$ ) est considérée. Le paramètre de fréquence utilisé est le suivant :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho}{E_1} \frac{a^2}{h}} \omega \quad (6.3)$$

Le tableau 6.6 montre que la convergence est assurée en faisant augmenter le nombre de fonctions de forme, 16 fonctions de forme sont suffisantes pour assurer la convergence des six premiers modes. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des travaux de Qatu (Qatu et Leissa 1991) et Messina (Messina et Soldatos 1999). La première référence utilise la théorie classique des plaques, alors que dans la deuxième référence une théorie d'ordre élevé est développée.

Les résultats présentés dans le tableau 6.7 concerne une plaque avec trois couches ( $\theta$ /- $\theta$ / $\theta$ ) avec les orientations suivantes (0°, 15°, 30° et 45°). Les résultats obtenus sont identiques aux résultats de Qatu et de Messina.

**Tableau 6.6:** Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite (30°/-30°/30°) avec les conditions aux limites : L-L-L-L.

Nbr de fonctions de forme	mode					
	1	2	3	4	5	6
6	3.15729	4.21840	5.96581	7.47300	9.05900	12.49620
7	3.15605	4.20084	5.93025	7.39631	8.96133	12.48204
8	3.15495	4.20081	5.92995	7.39510	8.95146	12.37449
9	3.15483	4.19996	5.92833	7.39082	8.94768	12.37351
10	3.15471	4.19995	5.92829	7.39068	8.94632	12.36596
11	3.15469	4.19983	5.92807	7.39005	8.94578	12.36580
12	3.15466	4.19983	5.92806	7.39002	8.94548	12.36446
13	3.15466	4.19980	5.92801	7.38987	8.94535	12.36442
14	3.15465	4.19980	5.92801	7.38986	8.94526	12.36406
15	3.15464	4.19979	5.92799	7.38981	8.94522	12.36405
16	3.15464	4.19979	5.92798	7.38981	8.94518	12.36393
solution	3.1547	4.1998	5.9280	7.3898	8.9452	12.3639
Qatu et Leissa1991	3.1547	4.1999	5.9282	7.3898	8.9459	12.3680
Messina et Soldatos 1999	3.1547	4.1998	5.9281	7.3898	8.9854	12.3680

**Tableau 6.7:** Comparaison et convergence des six premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite (30°/-30°/30°) avec les conditions aux limites : L-L-L-L.

$\theta$		mode					
		1	2	3	4	5	6
0°	Résultats obtenus	2.9261	4.1227	6.5313	7.2217	8.7318	11.5009
	Qatu et Leissa1991	2.9262	4.1227	6.5314	7.2219	8.7320	11.5040
	Messina et Soldatos 1999	2.9261	4.1227	6.5314	7.2218	8.7320	11.5040
15°	Résultats obtenus	3.0016	4.1371	6.3437	7.2704	8.8317	11.6653
	Qatu et Leissa1991	3.0017	4.1372	6.3438	7.2706	8.8321	11.6680
	Messina et Soldatos 1999	3.0016	4.1372	6.3438	7.2705	8.8320	11.6680
30°	Résultats obtenus	3.1547	4.1998	5.9280	7.3898	8.9452	12.3639
	Qatu et Leissa1991	3.1547	4.1999	5.9282	7.3898	8.9459	12.3680
	Messina et Soldatos 1999	3.1547	4.1998	5.9281	7.3898	8.9854	12.3680
45°	Résultats obtenus	3.2313	4.2631	5.6853	7.4613	8.9572	13.4863
	Qatu et Leissa1991	3.2313	4.2632	5.6855	7.4614	8.9581	13.4920
	Messina et Soldatos 1999	3.2314	4.2631	5.6855	7.4614	8.9580	13.4920

### VI.1.3 Vibrations libres d'une plaque sandwich

Les exemples traités concernent deux plaques sandwich sur appuis simples. La première en aluminium de dimensions (1.83mx1.22m) et dont les propriétés mécaniques et les épaisseurs de l'âme et des deux peaux sont données par le tableau 6.8.

**Tableau 6.8:** Propriétés mécaniques de la plaque sandwich avec les deux peaux en aluminium.

couche	E (GPa)	G (GPa)	$\nu_{12}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Epaisseur (mm)
Peau	68.984	25.924	0.3	2768	0.4064
		Gxy=0			
Ame	0.1379	Gxz=0.13445 Gyz=0.05171	0	121.8	6.35

Les résultats obtenus des cinq premiers modes sont comparés aux résultats de la méthode des éléments finis (Bardell et al 1997), de la méthode des bandes finies (Yuan et Daw 2002) et de la méthode des éléments finis en utilisant la théorie d'ordre élevée en tenant compte de l'effet de cisaillement transversal (Kumar Khare et al. 2005). On constate que les résultats sont identiques, voir tableau 6.9.

**Tableau 6.9:** Fréquences propres (en Hz) d'une plaque sandwich avec les deux peaux en aluminium.

Modes	Présente analyse	Bardell et al. 1997	Yuan et Dawe 2002	Kumar Khare et al. (2005)*	Kumar Khare et al. (2005)**
1	23.532	23.05	23.41	23.599	23.487
2	45.255	43.91	44.64	45.464	44.960
3	72.407	71.06	71.50	73.755	72.550
4	81.458	78.37	79.26	82.657	80.564
5	94.130	90.85	92.19	95.223	93.437

\*Théorie de premier ordre, \*\* Théorie d'ordre élevé

L'exemple suivant traite le cas d'une plaque sandwich composite formée de cinq couches sur des appuis simples. La plaque considérée est une plaque mince de dimensions (1m x 1m) et d'épaisseur  $h=10\text{mm}$ . Les stratifiés sont faits en graphite époxy T300/934 dont les propriétés mécaniques sont données par le tableau 6.10.

Le paramètre de fréquence utilisé dans ce cas est donné par :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \frac{b^2}{h} \omega \quad (6.4)$$

Différentes orientations des couches sont considérées en faisant varier en même temps le rapport  $h_a/h_p$ . Les tableaux 6.11 et 6.12 montrent que les résultats obtenus sont semblables aux résultats de Whitney (Whitney et Pagano 1970), Reddy (Reddy 1984) et Swaminathan (Swaminathan et Patil 2008). La théorie du premier ordre est utilisée dans la première référence alors que la théorie d'ordre élevée est utilisée dans les deux autres.

**Tableau 6.10:** Propriétés mécaniques de la plaque sandwich avec les deux peaux en aluminium

couche	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Epaisseur (mm)
Peau	131	10.34	6.895	6.895	6.205	0.23	1627	1
Ame	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$	0	97	10

**Tableau 6.11:** Comparaison des cinq premiers modes d'une plaque sandwich sur appuis simples.

Mode	Présente analyse	Whitney et Pagano (1970)
1	16.309	16.217
2	45.16	44.707
3	65.204	64.504
4	96.598	94.909
5	110.767	108.904

**Tableau 6.12:** Comparaison du premier mode d'une plaque sandwich sur appuis simples.

Empilement	$\frac{a}{b}$	$\frac{h_a}{h_p}$	Présente analyse	Whitney et Pagano (1970)	Reddy (1984)	Swaminathan et Patil (2008)**
(0°/90°/âme/0°/90°)	1	10	16.309	16.217	15.952	16.309*
(30°/-30°/âme/30°/-30°)	1	10	19.790	19.722	19.160	18.400
(30°/-30°/âme/30°/-30°)	2	10	9.892	9.834	9.346	8.73
(45°/-45°/âme/45°/-45°)	1	4	20.467	20.357	20.216	20.08
(30°/-30°/âme/30°/-30°)	1	4	19.462	19.368	19.248	19.11
(15°/-15°/âme/15°/-15°)	1	4	17.252	17.196	17.119	16.974

\*Kumar Khare et al. (2005), \*\* Théorie d'ordre élevée

## VI-2 Analyse dynamique d'un panneau solaire en phase de pénombre

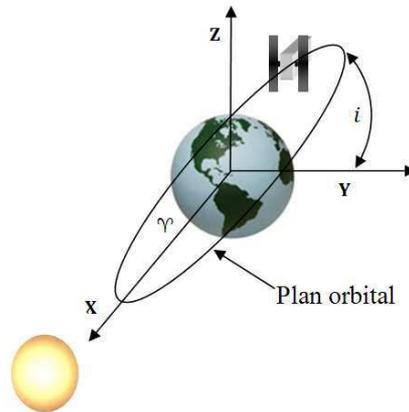
La phase de transition ombre-enseuillement est une phase critique pour la majorité des satellites. L'analyse thermo-élastique permet de quantifier la déformation du panneau solaire en cette phase. Dans ce but, l'analyse est divisée en deux parties. La première partie est consacrée à l'étude du panneau solaire d'un modèle de satellite proposé par Johnston (Johnston et Thornton 2000). L'orbite est considérée circulaire avec une altitude de 600 km dont le plan orbital est confondu avec l'écliptique. Le satellite est en mode de navigation optimal, le panneau solaire est toujours orienté vers le soleil. Une comparaison des résultats trouvés avec les résultats de la littérature est faite. Dans la deuxième partie, l'aluminium 6061 est remplacé par un matériau composite. Deux types de matériaux sont proposés, un stratifié et un FGM. L'objectif de cette deuxième partie est d'étudier l'influence de ces derniers sur le comportement dynamique de toute la structure.

## VI-2-1 Comparaison avec les résultats de Johnston

Pour valider le programme réalisé nous avons comparé les résultats trouvés avec les résultats des travaux de Johnston (Johnston et Thornton 2000) concernant le comportement dynamique d'un panneau solaire en phase de transition de la phase ombre à la phase soleil. Le mouvement orbital du satellite est supposé képlérien. Les paramètres orbitaux (voir figure 6.3) nécessaires à la suite de l'étude sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 6978 \text{ km} \\ e = 0 \\ i = 23.27^\circ \\ \omega = 0^\circ \\ \Omega = 0^\circ \\ v = 0^\circ \end{array} \right.$$

La date considérée est le J2000.0.



**Figure 6.3 :** Paramètres orbitaux.

Le panneau solaire du satellite est modélisé par une plaque sandwich de longueur 9m et de largeur 3m, composée d'une âme en nids d'abeilles, fabriquée en aluminium 5056 et de deux peaux minces fabriquées en aluminium 6061, voir

figure 6.4. Les cellules photovoltaïques sont fixées sur la surface orientée vers le soleil, alors que la partie inférieure est protégée par une couche de protection. Le tableau 6.13 donne les caractéristiques géométriques et physiques des matériaux composant le panneau solaire.

Dans cette étude comparative on suppose que le flux radiatif terrestre et le flux albédo sont nuls, seul le flux solaire est considéré. Initialement et à l'instant  $t=0$  le satellite est supposé se trouver dans l'ombre en phase d'éclipse, aucun rayon lumineux n'est intercepté par le panneau solaire ( $q_s = 0$ ) et à l'instant  $t = 10$  s le satellite entre dans la phase pénombre pour passer à la phase ensoleillement (ou phase chaude).

L'analyse consiste en trois étapes :

1. détermination du flux solaire,
2. détermination du gradient thermique dans le panneau solaire,
3. détermination de la réponse dynamique du panneau solaire.

La figure 6.5 donne la variation de l'angles  $\eta$  en fonction du temps, pendant une orbite complète d'une période de 96.68 mn. Les deux points d'intersection A et B montrent que le satellite traverse les trois phases : ensoleillement, pénombre et ombre. La phase d'éclipse est d'environ 35.75 mn, alors que la phase de pénombre est d'une durée de 8.5 s, voir figure 6.6. Le résultat trouvé concernant la phase pénombre est identique au résultat donné par Johnston.

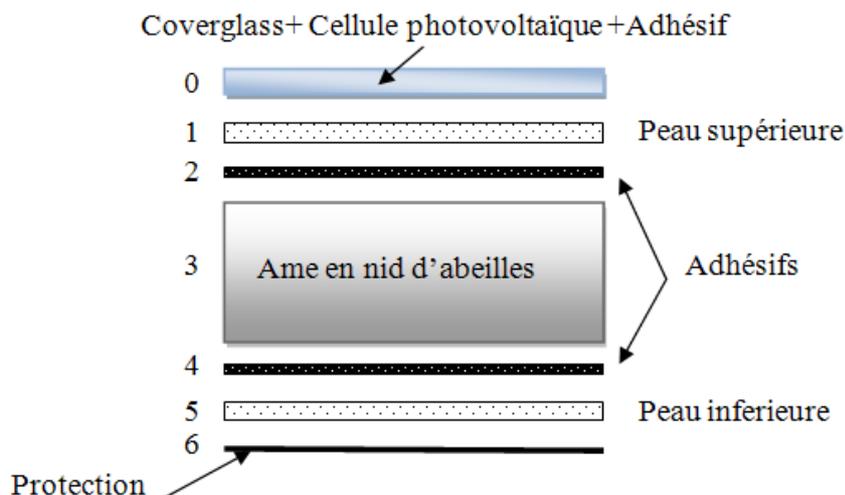
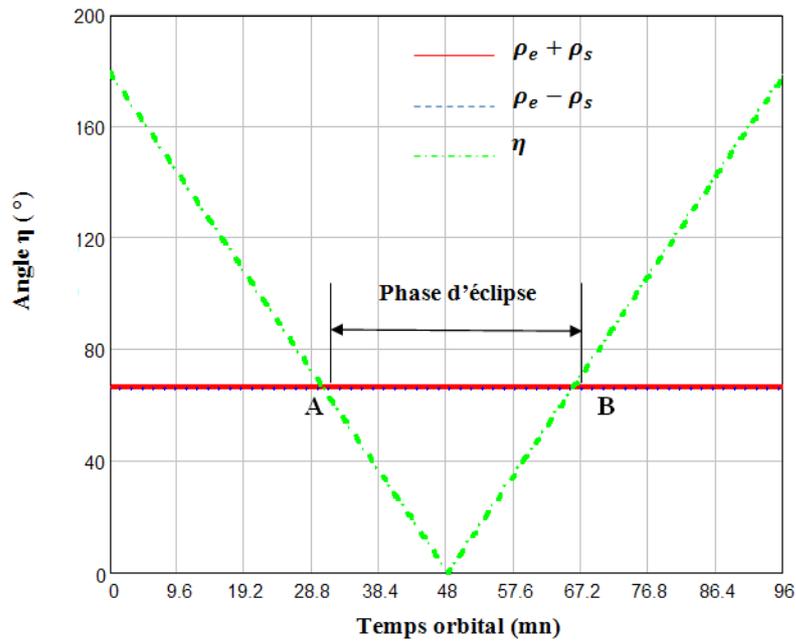


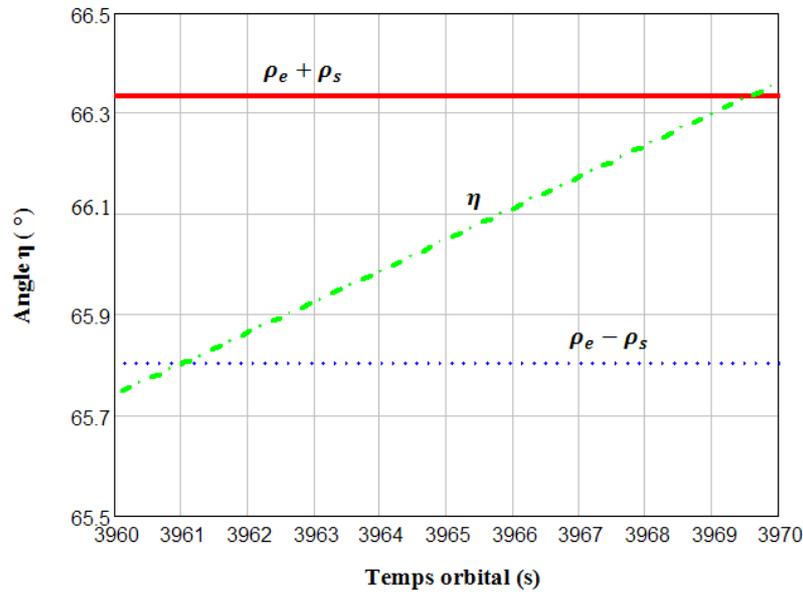
Figure 6.4 : Coupe transversale du panneau solaire.

**Tableau 6.13:** Propriétés mécaniques et thermomécaniques du panneau solaire.

Couche	0	1	2	3	4	5	6
Matériau		Alum. 6061	Epoxy	Alum. 5056	Epoxy	Alum. 6061	Peinture blanche Z93
Densité (kg/m <sup>3</sup> )		2700	1150	30	1150	2700	
Capacitance (J /kg K)		896	750	920	750	896	
Conductivité (Wm/K)		167	0.4	1.2	0.4	167	
Epaisseur (mm)		0.254	0.127	25.4	0.127	0.254	
Emissivité $\epsilon$	0.81						0.86
Coef. d'absorption $\alpha$	0.79						
Mod. d'élasticité E (GPa)		68.9	6	0.31	6	68.9	
Coefficient de Poisson $\nu$		0.33	0.3	0.3	0.3	0.33	
Mod. Cisaillement G (GPa)		26.0	2.31	0.11	2.31	26.0	
Coef. Dilat. Thermique (10 <sup>-6</sup> m/mK)		23.6	54	23.76	54	23.6	



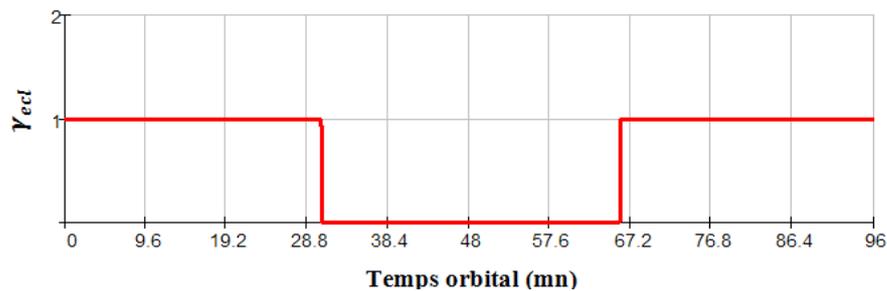
**Figure 6.5 :** Variation de l'angle  $\eta$  en fonction du temps orbital.



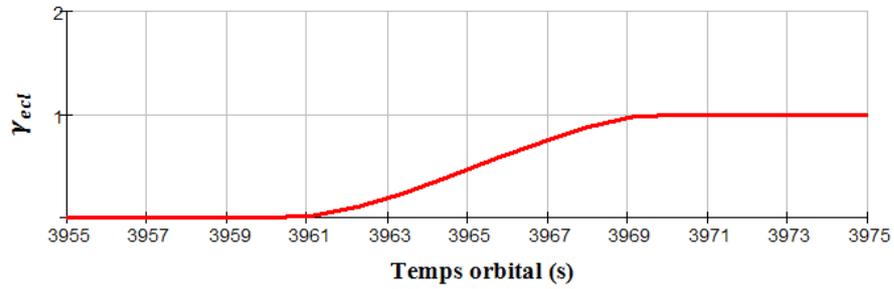
**Figure 6.6 :** Variation de l'angle  $\eta$  en fonction du temps orbital dans la phase pénombre.

La figure 6.7 donne la variation du facteur d'éclipse pendant une orbite complète. La figure 6.8 montre aussi la transition douce entre le soleil et l'ombre du satellite et le passage rapide de quelques secondes dans la pénombre.

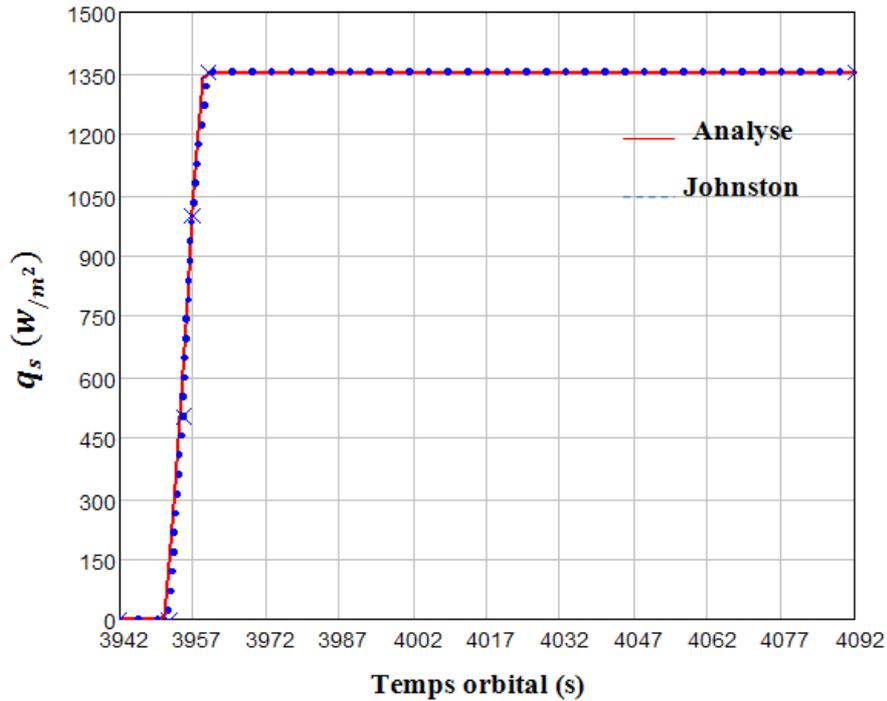
La figure 6.9 donne la variation du flux solaire  $q_s$  en fonction du temps orbital. On voit que le flux atteint une valeur maximale de  $1350 \text{ Wm}^{-2}$  en un temps très court qui est le temps de la traversée de la pénombre. L'intensité de ce flux est proportionnelle à la surface visible du soleil.



**Figure 6.7 :** Variation du facteur d'éclipse  $\gamma_{ecl}$  durant une orbite.



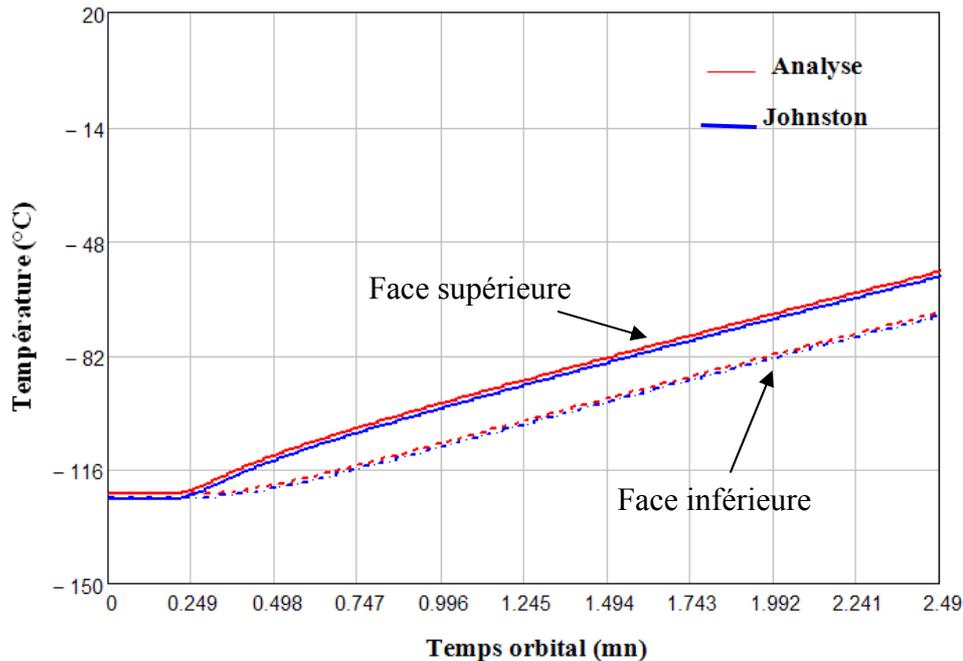
**Figure 6.8 :** Variation du facteur d'éclipse  $\gamma_{ecl}$  en phase de pénombre.



**Figure 6.9 :** Variation du flux solaire  $q_s$  en phase de transition.

Une fois le flux solaire déterminé, il est possible de calculer la variation de la température dans le panneau solaire. La figure 6.10 illustre cette variation en fonction du temps orbital en phase de pénombre. On voit bien que la température aux parois croît très rapidement, d'une température initiale égale à  $-123\text{ }^{\circ}\text{C}$  à une température de  $-60.31\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour la face supérieure et  $-71.82\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour la face

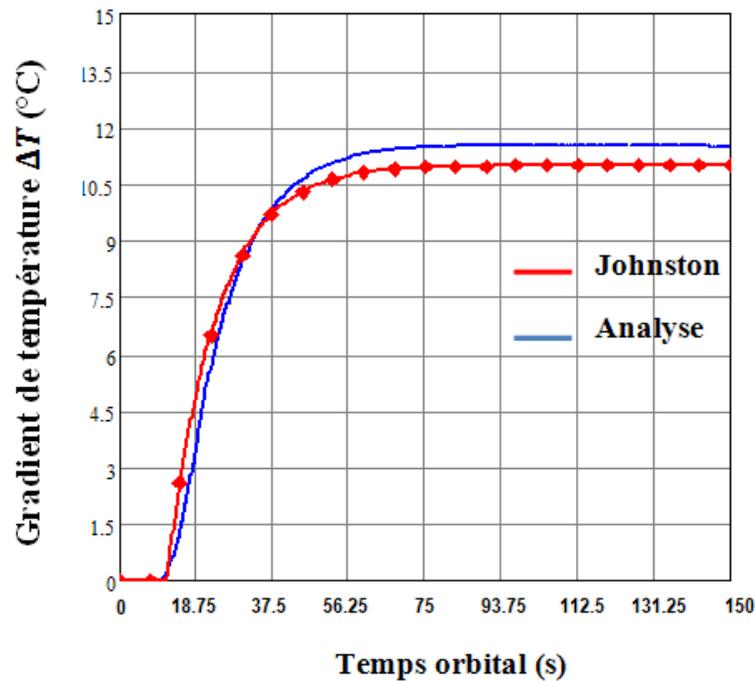
inférieure et cela en un temps très court d'environ 2.5 mn. La figure 6.11 donne la variation du gradient de température dans le panneau solaire en fonction du temps. Cette différence de température entre la face supérieure et la face inférieure croit exponentiellement jusqu'à atteindre une valeur constante de 11.5 °C à partir de l'instant  $t=75s$ .



**Figure 6.10 :** Variation de la température des deux faces du panneau solaire en phase de pénombre.

Les figures 6.9, 6.10 et 6.11 montrent aussi que les résultats de l'analyse sont identiques aux résultats de Johnston.

Une fois le gradient thermique déterminé le problème peut être résolu en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchiques. La plaque sandwich est modélisée par un élément rectangulaire en utilisant 16 fonctions de forme hiérarchiques. Le panneau solaire est considéré encastré sur sa largeur au corps principal du satellite, voir figure 6.12.



**Figure 6.11 :** Variation du gradient de température dans le panneau solaire en phase de pénombre.

La figure 6.13 donne la variation du déplacement transversal du point A du panneau solaire en fonction du temps orbital en phase de pénombre. Dans l'analyse présentée par Johnston le panneau solaire est modélisé par une poutre de rigidité équivalente égale à la rigidité des deux peaux, (âme et colle adhésif négligés). Le déplacement transversal de la poutre est donné sous forme d'une expression analytique. En ce qui nous concerne, nous avons considéré deux cas d'analyse : le premier concerne un modèle de plaque en considérant les mêmes hypothèses formulés par Johnston (noyau et adhésif négligés). La figure 6.13 montre que les résultats trouvés (analyse 1) sont identiques aux résultats de la littérature. Dans le deuxième cas traité (analyse 2), nous avons pris en considération l'âme et l'adhésif. Nous constatons que le déplacement transversal est légèrement supérieur au premier cas et cela est dû au fait que le couple thermique provoqué par le gradient thermique est sensiblement influencé par le coefficient de dilatation thermique de l'âme et l'adhésif, malgré que ces deux derniers ont des rigidités très faible devant la rigidité des deux peaux.

La figure (analyse 2) montre que le déplacement est nul pour les dix premières secondes du moment que le gradient est nul pendant cette période. On voit bien l'influence du gradient thermique sur le déplacement transversal lorsqu'on dépasse les dix premières secondes, ainsi, le déplacement croît exponentiellement jusqu'à atteindre une valeur maximale de -0.46 m en 75 seconde et qui est due au moment de flexion provoqué par le gradient thermique. Après, le déplacement se stabilise à cette valeur maximale. Notons que la réponse du système est quasi statique, elle s'effectue avec de très faibles oscillations, d'amplitude 3.2 mm. La figure 6.14 donne la déformée du panneau solaire après 150 seconde. La figure montre une flexion dans les deux plans, mais plus prononcée suivant la longueur du panneau.

### VI-2-2 Peaux en matériaux composites

Dans cette partie de l'étude, nous proposons de remplacer l'aluminium 6061 par un matériau composite. Deux propositions sont faites : un stratifié en graphite-époxy (T300-934) et un FGM composé d'aluminium (2024) et de carbure de silicium (SiC). Le tableau 6.14 suivant donne les propriétés des deux matériaux composites (Silverman 1995).

Les stratifiés utilisés sont constitués d'une superposition de quatre couches, deux empilements sont considérés :

1.  $[0/90]_s$
2.  $[45/-45]_s$ .

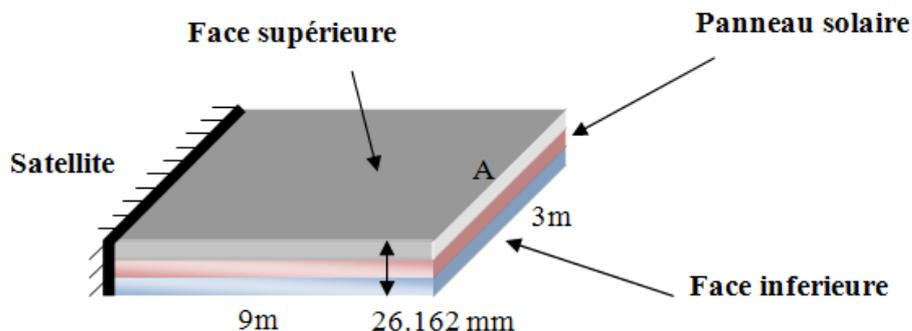


Figure 6.12 : Modélisation du panneau solaire

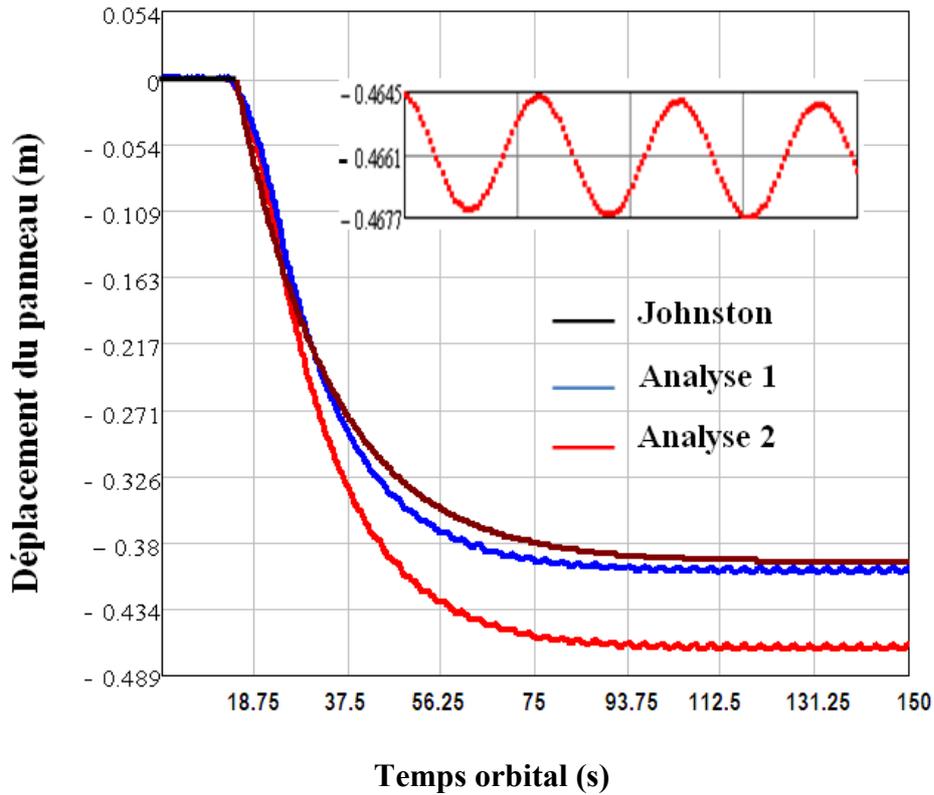


Figure 6.13 : Déplacement transversal du point A du panneau solaire.

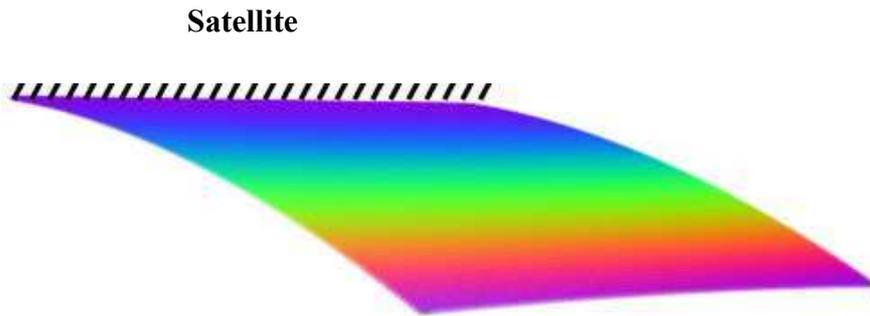


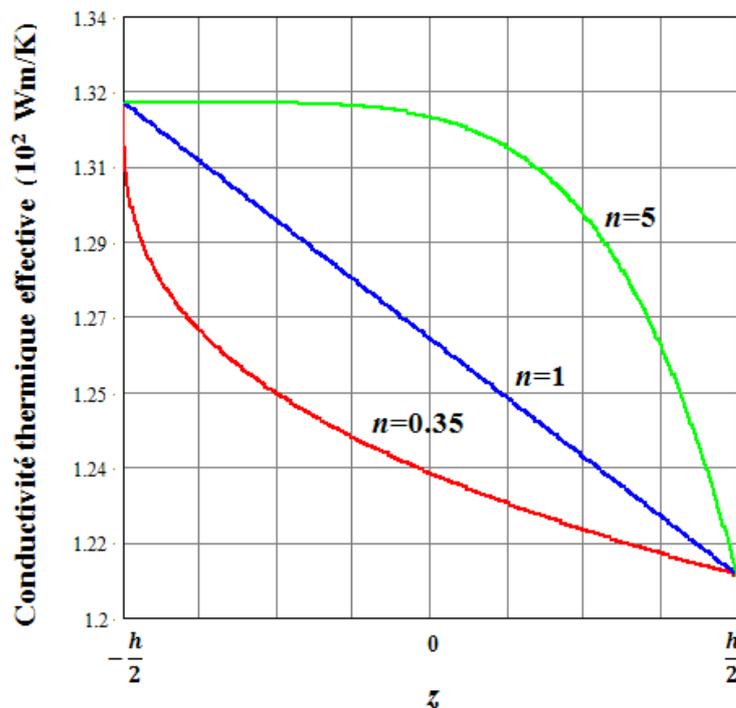
Figure 6.14 : Déformée du panneau solaire

Dans le cas du FGM (Al/SiC), les propriétés des peaux varient entre les propriétés de l'aluminium à l'interface ( $z = -h/2$ ) et les propriétés du carbure de silicium à l'interface ( $z = h/2$ ) selon la loi de mélange donnée par l'équation

(3-57). La figure 6.15 suivante donne à titre d'exemple, la variation de la conductivité thermique effective du FGM pour différentes valeurs du coefficient  $n$ . Les trois valeurs de  $n$  (0.35, 1 et 5) considérés dans cette étude sont choisis de telle sorte à mettre en relief l'homogénéité des propriétés du FGM. Pour  $n = 0$ , les propriétés des deux constituants sont proportionnelles. En vue d'obtenir la même légèreté qu'un stratifié, l'épaisseur du FGM est réduite de moitié. Le tableau 6.15 suivant donne une comparaison des masses surfaciques des différents matériaux utilisés dans cette analyse.

**Tableau 6.14:** Propriétés mécaniques des matériaux considérés

Matériau	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	Capacitance (J /kg K)	Conductivité (Wm/K)	E <sub>11</sub> /E <sub>22</sub> /G <sub>12</sub> /ν <sub>12</sub> (GPa)	Coef. Dil. thermique (10 <sup>-6</sup> m/mK) α <sub>1</sub> /α <sub>2</sub>
T300/934	1460	1300	5.73	141.6/10.7/3.88/0.268	0.006/30.04
SiC	3210	750	132	430/430/188/0.14	3.4/3.4



**Figure 6.15 :** Variation de la conductivité thermique effective du FGM pour différentes valeurs du coefficient  $n$ .

**Tableau 6.15:** Masse surfacique des différents matériaux.

Matériaux	$N$	Epaisseur (mm)	Masse surfaique (Kg/m <sup>2</sup> )
<b>Al 6061</b>	–	0.254	0.701
<b>T300-934</b>	–	0.254	0.371
		0.35	0.127
<b>Al/SiC</b>	1	0.127	0.380
	5	0.127	0.398

En appliquant le flux solaire comme condition aux limites sur les faces du panneau, nous pouvons déterminer la distribution de la température dans le sandwich. La figure suivante donne la variation de la température des deux faces du sandwich pour les différents matériaux utilisés. On remarque que la variation est presque identique pour les peaux en aluminium et les peaux en FGM, ceci est dû au fait que la conductivité thermique du SiC est proche de celle du Al 6061, en plus, de la faible épaisseur des peaux du sandwich. Par contre, on voit que la variation de la température dans le T300/934 est différente par rapport aux deux autres matériaux à cause de sa faible conductivité.

Néanmoins, la variation du gradient de température dans les différents modèles étudiés ne présente qu'une légère différence au début de la phase de transition. Après, le gradient se stabilise à une valeur de 11.5 °C. Ceci s'explique par le fait que l'échange thermique dans le panneau solaire est fortement conditionné par le transfert de chaleur dans l'âme (épaisseur de l'âme égale à dix fois l'épaisseur de la peau), voir figure 6.17.

Une fois le gradient de température déterminé, il est possible de calculer par la suite la réaction mécanique du panneau solaire. La figure 6.18 donne la variation du déplacement transversal du point A du panneau en fonction du temps orbital en phase de pénombre. On voit bien l'intérêt d'utiliser les matériaux composites au lieu de l'aluminium, du moment que les résultats trouvés montrent une nette diminution de la flèche, qui est égale à  $-0.46$  m dans le cas de l'aluminium. Les

résultats obtenus mettent en évidence le choix de l'orientation des fibres. L'utilisation du croisé  $[0/90]_S$  a permis de réduire le déplacement à  $-0.12m$ .

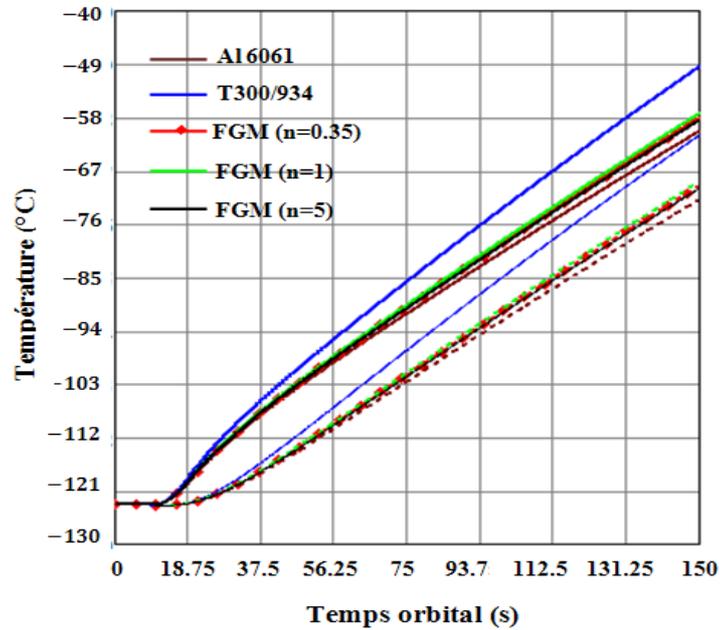


Figure 6.16 : Variation de la température des deux faces du sandwich pour les différents matériaux utilisés.

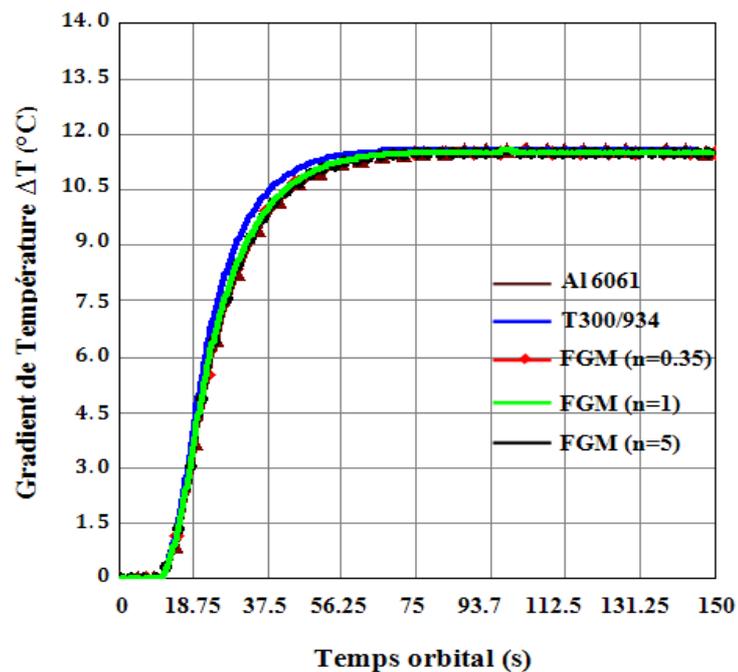


Figure 6.17 : Variation du gradient de température dans le panneau solaire pour les différents matériaux utilisés

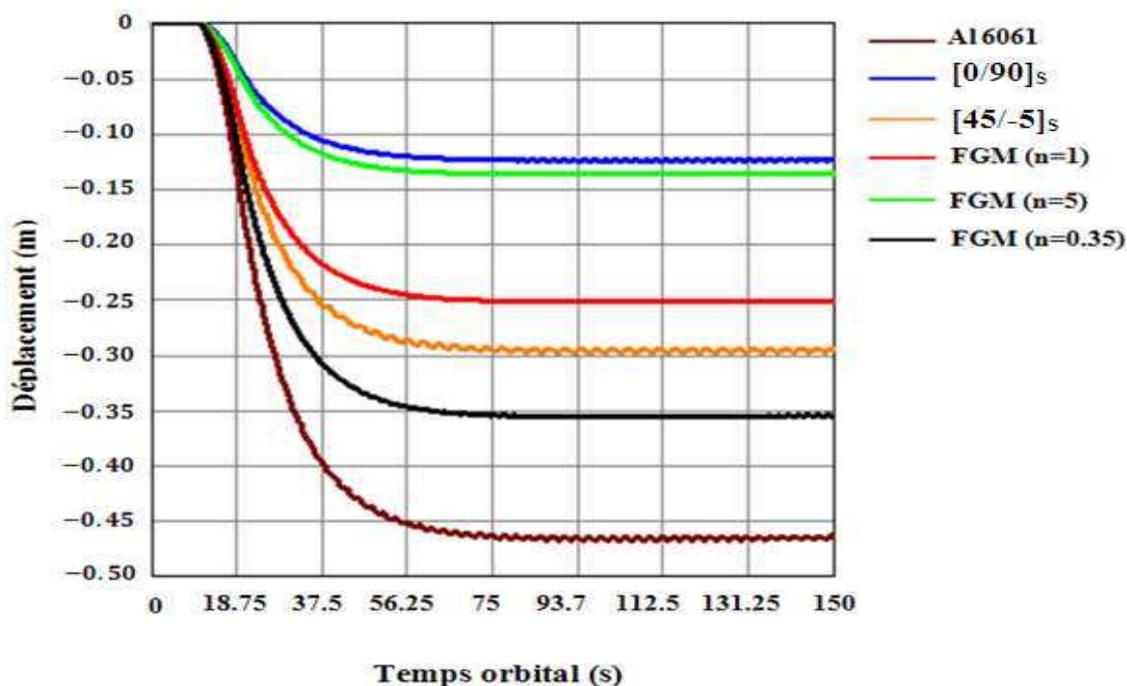


Figure 6.18 : Déplacement transversal du point A du panneau.

Par contre l'empilement  $[45/-45]_s$  donne une valeur de -0.29m. La même chose concernant les peaux en FGM, les résultats obtenus prouvent que le choix du coefficient d'homogénéité  $n$  est déterminant. Pour  $n$  égale à 5 le déplacement est réduit à -0.13m, alors qu'il vaut -0.35m dans le cas où  $n = 0.35$  et à -0.25m si  $n$  est pris égale à 1. Cette diminution est due essentiellement à deux facteurs : module d'élasticité et coefficient de dilatation thermique.

## VI-3 Influence de la Propagation d'orbite sur la variation du flux reçu par le panneau solaire

Le mouvement du satellite est affecté par plusieurs phénomènes; le vent solaire, les champs magnétiques, les forces gravitationnelles terrestres et l'atmosphère qui n'est pas totalement vide de particules. En effet, le mouvement n'est pas parfaitement elliptique (ou circulaire), de ce fait, il est impératif de déterminer

l'influence de ces perturbations sur la variation du flux thermique reçu par le panneau solaire. Lorsque toutes les forces qui agissent sur le satellite sont connues avec une précision acceptable, il est possible de calculer son accélération, et donc sa position et sa vitesse, à tout instant. Le code de calcul développé (prédiction d'orbite) a pour objectif l'extrapolation d'orbite en utilisant un fichier de donnée TLE (voir site NORAD). Le modèle de forces de perturbation développé dans cette étude est basé sur : un champ gravitationnel de degré 8, de l'attraction gravitationnelle de la lune et du soleil, de la pression de radiation solaire et des forces de frottement avec l'atmosphère.

### VI-3-1 Comparaison avec la littérature

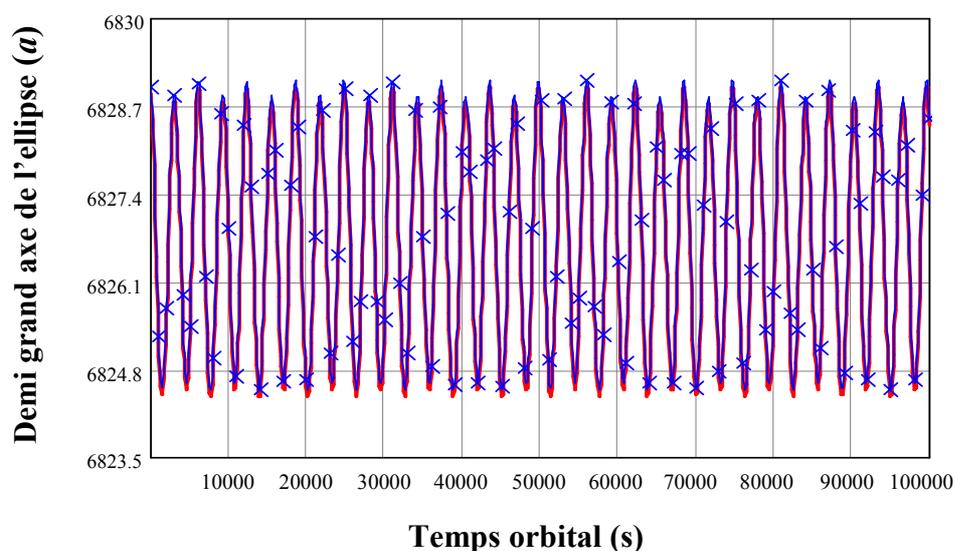
Pour valider le programme réalisé, une étude comparative est présentée dans cette section. La comparaison concerne la variation des paramètres orbitaux du satellite NOAA-14, sur une période d'une journée. Les éléments orbitaux sont donnés par le tableau 6.16 (Tapley et *al.* 2004).

**Tableau 6.16:** Paramètres orbitaux du satellite NOAA-14.

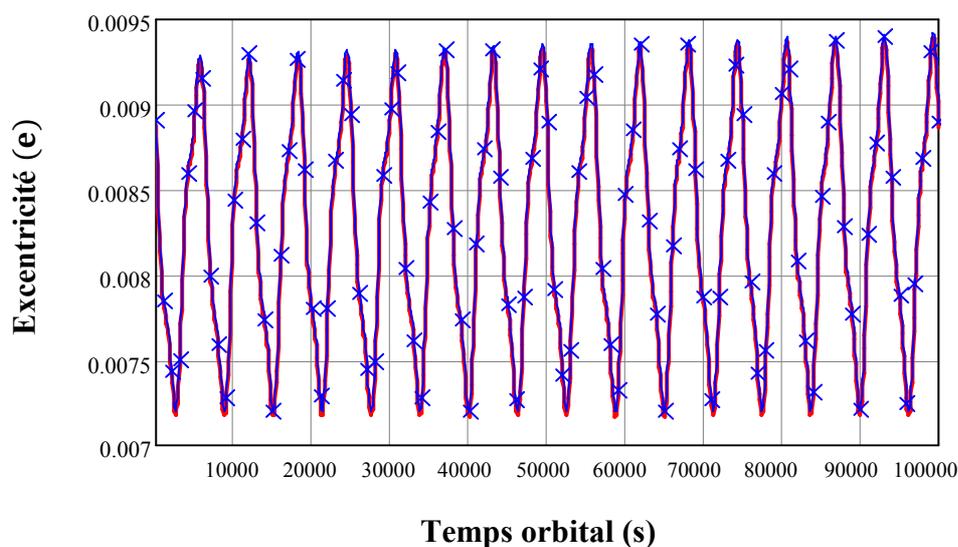
Demi grand axe de l'ellipse (a)	6828.973 km
Excentricité (e)	0.00901733
Inclinaison (i)	28.4740°
Argument du périégée ( $\omega$ )	-44.5558°
Ascension droite ( $\Omega$ )	35.9118°
Anomalie moyenne (M)	43.8860°
Date du début de prédiction	17/07/1997 à 21h 42mn 49.634s
Date finale de prédiction	19/07/1997 à 00h 4h 46mn 40s

Les figures 6.19, 6.20, 6.21, 6.22 et 6.23 donnent la variation du demi grand axe, de l'excentricité, de l'inclinaison, de l'argument du périégée et de l'ascension droite sur un intervalle de temps égale à 27.7777h. Les trois premiers paramètres orbitaux varient périodiquement avec de faibles amplitudes, et ne présentent

aucune variation séculaire. Par contre, l'ascension droite montre une variation séculaire proportionnelle au temps, égale à  $-6.9^\circ/24\text{h}$ . La variation de l'argument du périégée présente la combinaison d'une variation périodique et séculaire. Les cinq figures montrent que les résultats trouvés (courbes en rouge) sont identiques aux résultats de la littérature (courbes en bleu), donnés par Tapley (Tapley et al. 2004).



**Figure 6.19 :** Variation du demi grand axe ( $a$ ) du satellite NOAA-14



**Figure 6.20 :** Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite NOAA-14

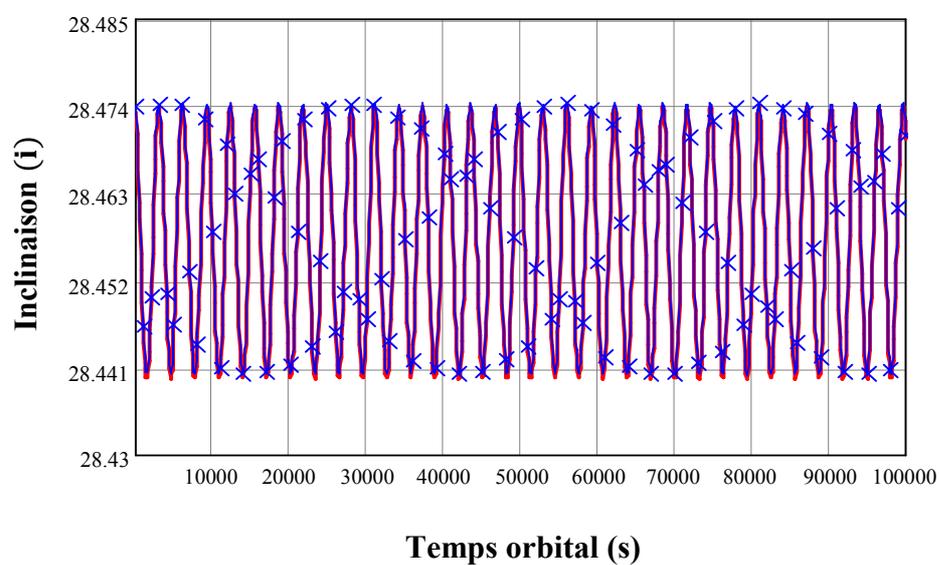


Figure 6.21 : Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite NOAA-14

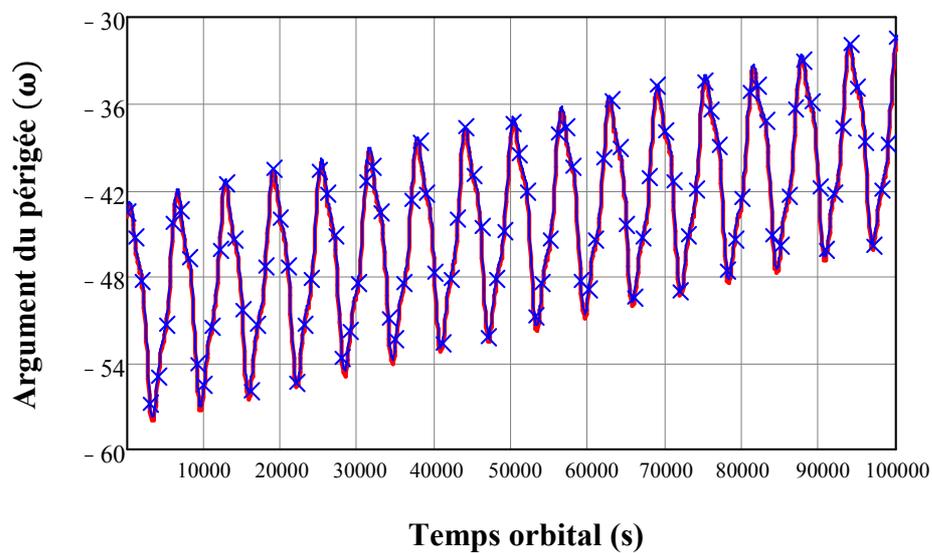
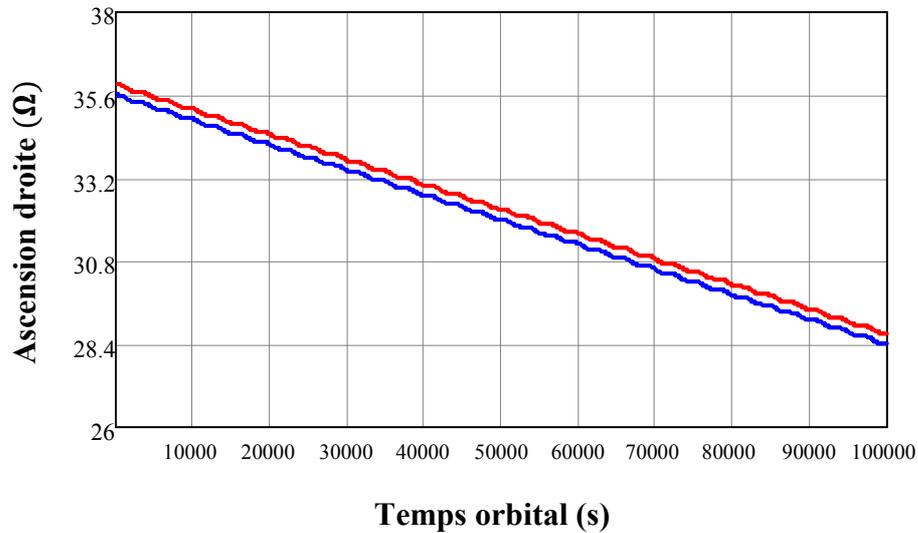


Figure 6.22 : Variation de l'Argument du périgée ( $\omega$ ) du satellite NOAA-14



**Figure 6.23** : Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite NOAA-14

## VI-3-2 Extrapolation d'orbite

La prédiction d'orbite concerne trois types de satellites avec différents paramètres orbitaux. L'extrapolation de leurs positions s'effectue sur plusieurs périodes de révolution autour de la terre. Les satellites considérés sont :

1. KOMPSAT (NORAD ID: 26032)
2. GOES-12 (NORAD ID: 26871)
3. NAVSTAR-44 (NORAD ID: 25030).

L'objectif de cette partie d'étude est d'analyser l'influence des variations périodiques et séculaires des paramètres orbitaux sur le flux reçu par le panneau solaire.

### VI-3-2-1 KOMPSAT

Le Satellite coréen (KOMPSAT) est mis en orbite en 1999 à partir de la station Vandenberg. L'Orbite est héliosynchrone avec une altitude de 685 km (basse altitude) et une période orbitale de 98.46 minute. Après une lecture de ses données TLE ( $a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0$ ) à une date  $t_0$  (date du début de la prédiction), selon le

tableau 6.17, il est possible de prédire sa position à une date donnée (date finale de prédiction).

**Tableau 6.17:** Paramètres orbitaux et caractéristiques du satellite KOMPSAT.

Demi grand axe de l'ellipse (a)	7095.9589 km
Excentricité (e)	0.00280211
Inclinaison (i)	98.2744°
Argument du périégée ( $\omega$ )	178.2455°
Ascension droite ( $\Omega$ )	251.6763°
Anomalie moyenne (M)	2.7681°
Date du début de prédiction	21/12/1999 à 08h 15mn 37.687s
Date finale de prédiction	02/02/2000 à 07h 14mn 9.6s
Poids	798 kg
Coefficient aérodynamique	1.5
Section	3.6045 m <sup>2</sup>

En général les perturbations orbitales provoquées par les différentes forces gravitationnelles et non gravitationnelles sont de natures périodiques et/ou séculaires. Les variations périodiques sont divisées en variations à courte période, de période inférieure à la période orbitale, et à longue période sur une durée de l'ordre de quelques dizaines de jours. Les variations séculaires sont proportionnelles aux temps.

***Variation des paramètres orbitaux sur une révolution :***

Dans notre cas, les figures 6.24(a), 6.25(a), 6.26(a), 6.27(a) et 6.28(a) donnent la variation des paramètres orbitaux pour une orbite complète. Les résultats trouvés montrent une variation périodique de courte période du demi grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison. La période du demi grand axe est égale à une demi-révolution, et d'amplitude allant de 7077.7 km à 7095.9 km. La variation de l'excentricité présente aussi des variations périodiques moyennes, et de courtes

périodes mais égales à une révolution. Avec une amplitude inférieure à  $0.01^\circ$ , la variation de l'inclinaison reste très faible comparée aux deux autres paramètres.

***Variation des paramètres orbitaux durant une journée (16 révolution):***

Sur une période de 24h, le demi grand axe, l'excentricité et l'inclinaison présente des variations périodiques sans variations séculaires. Par contre l'ascension droite ( $\Omega$ ) présente une variation séculaire d'environ  $1.2^\circ/\text{jour}$ .

***Variation des paramètres orbitaux durant 10 jours (159 révolution):***

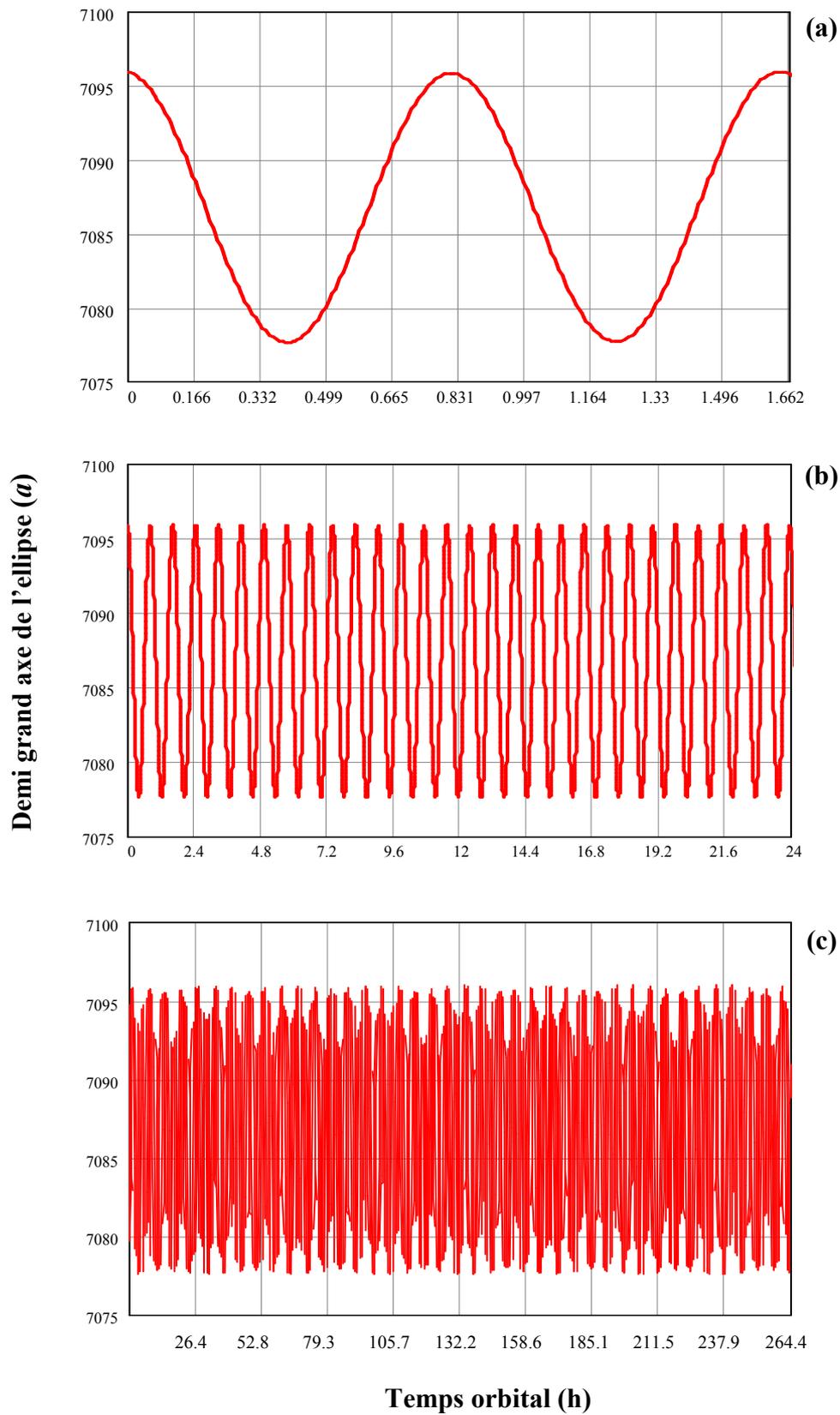
À moyen terme le demi grand axe ne présente aucunes variations (voir figure 6.24(c)). Par contre, l'excentricité et l'inclinaison présentent une légère variation séculaire (voir figures 6.25(c) et 6.26(c)). Sur une période de 10 jours, l'ascension droite montre une variation séculaire proportionnelle au temps, égale à  $11.5^\circ/264.4\text{h}$ . Cette variation provoque la rotation du plan orbital ce qui entraîne le déplacement du nœud ascendant sur le plan équatorial.

La figure 6.29 donne la trajectoire du satellite KOMPSAT durant une période de 264.4 heures dans le repère terrestre. La figure montre la dégradation de l'orbite durant cette période de temps. La variation séculaire de l'ascension provoque la rotation du plan orbital ce qui entraîne le déplacement du nœud ascendant sur le plan équatorial. La courbe en rouge indique l'orbite au début de la prédiction et la courbe en bleu indique l'orbite en fin de prédiction.

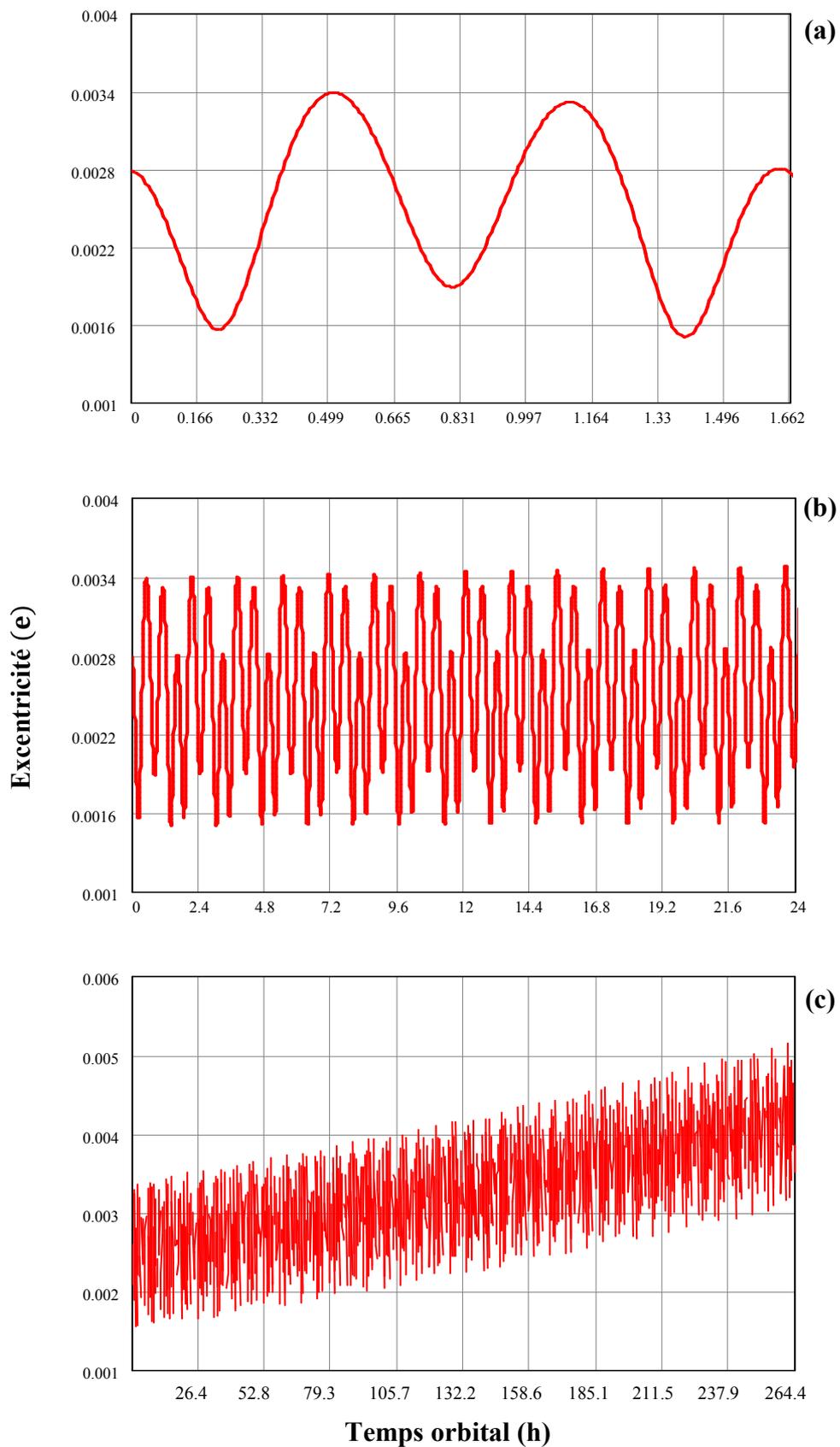
Concernant le flux total reçu par le panneau solaire durant une orbite complète, on remarque que la variation périodique des paramètres orbitaux sur une révolution n'induit aucune fluctuation du flux (voir figure 6.30). Par contre, à moyen terme on distingue une différence très nette des deux flux correspondant aux deux époques considérées dans cette étude (début et fin de la prédiction). Cela est dû à la rotation du plan orbital.

## **VI-3-2-2 GOES-12**

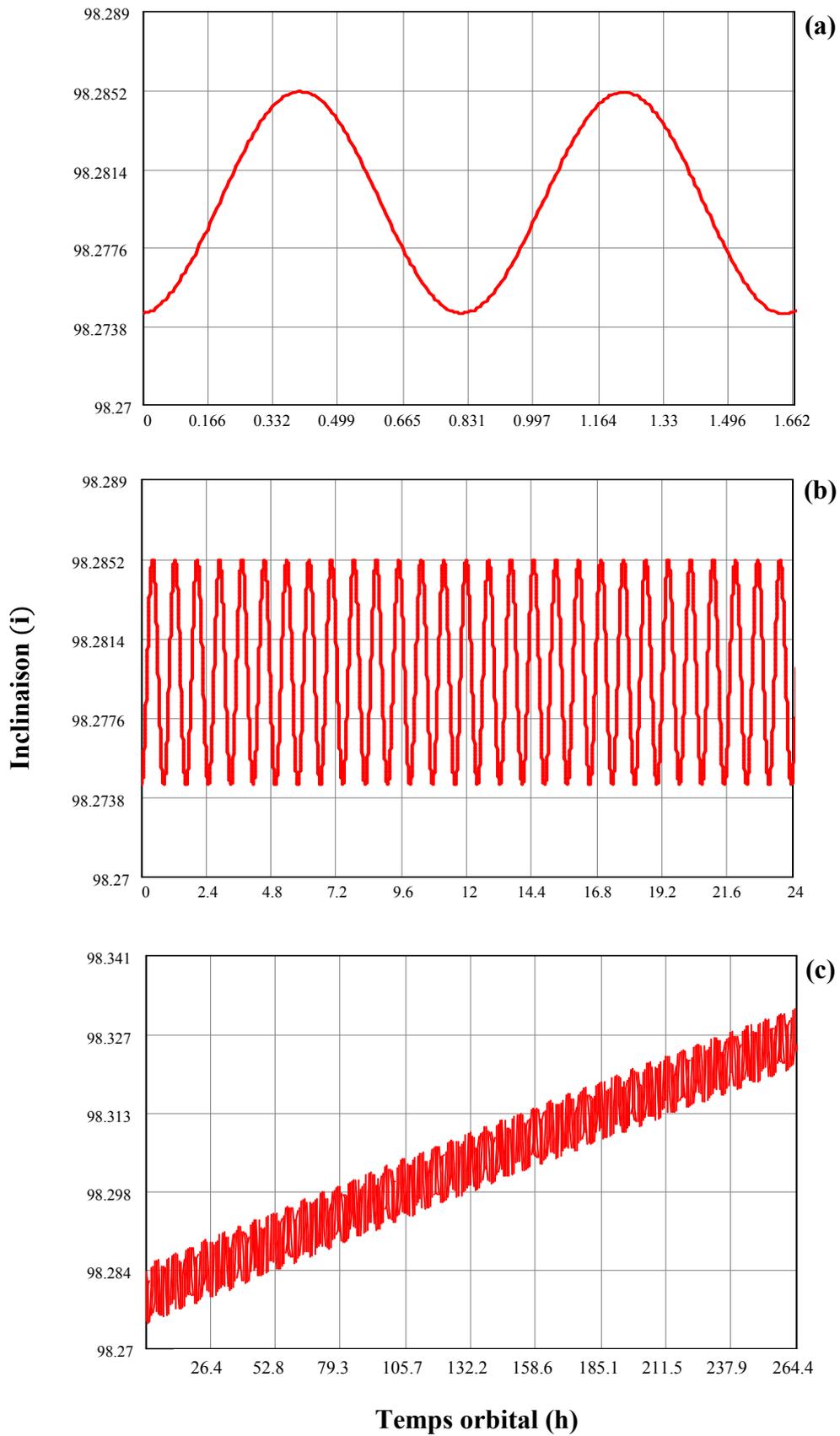
Le Satellite GOES 12 est un satellite géostationnaire, de fabrication américaine. Il est mis en orbite le 23 juillet 2001 à partir de la station Cape Canaveral. L'altitude du satellite est d'environ 35786 km et dont la période orbitale est égale à la période de rotation de la terre (soit 23h56min13.67s). L'orbite du satellite est presque confondue avec le plan équatorial. Après une lecture de ses données TLE ( $a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0$ ) à une date  $t_0$  (date du début de la prédiction), selon le



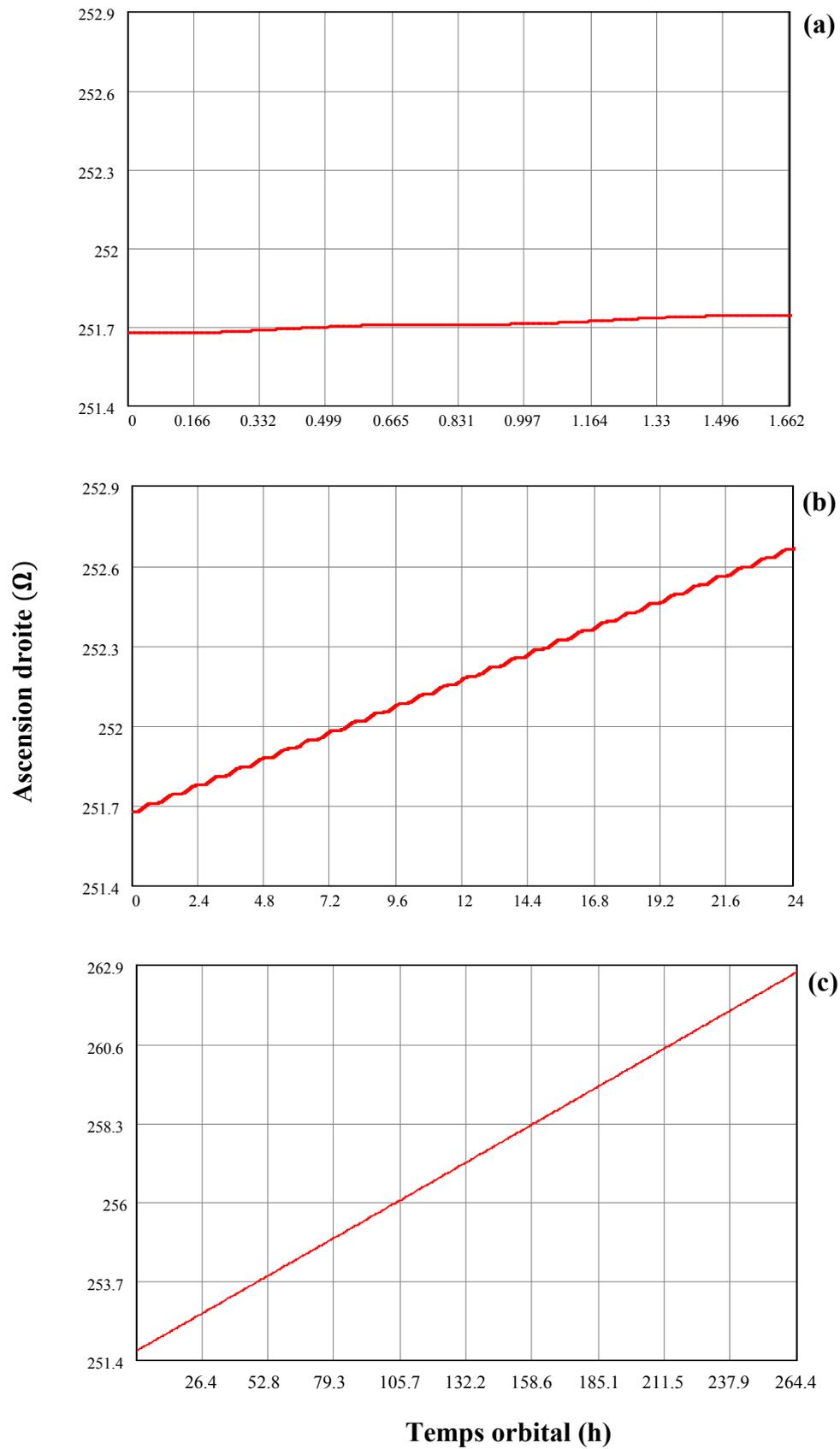
**Figure 6.24** : Variation du demi grand axe ( $a$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h



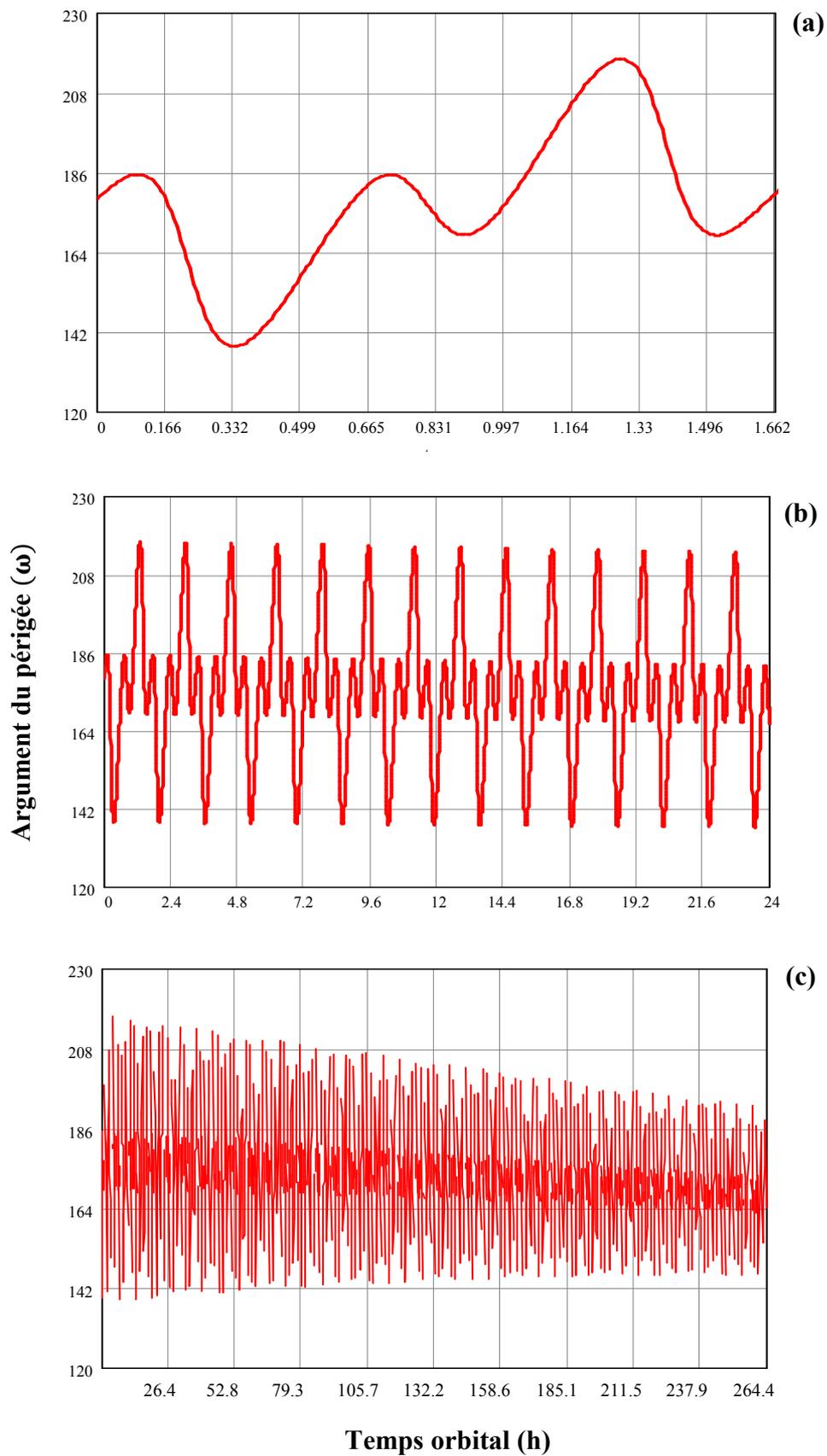
**Figure 6.25 :** Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h



**Figure 6.26 :** Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h



**Figure 6.27 :** Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h



**Figure 6.28 :** Variation de l'argument du périgée ( $\omega$ ) du satellite KOMPSAT durant : (a) 1.662h, (b) 24h, (c) 264.4h

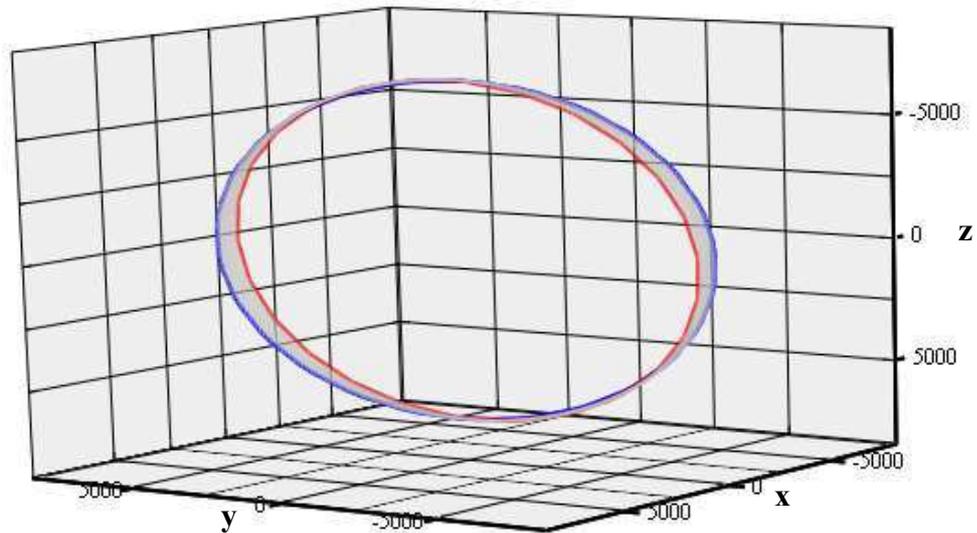


Figure 6.29 : Trajectoire du satellite KOMPSAT durant 264.4h

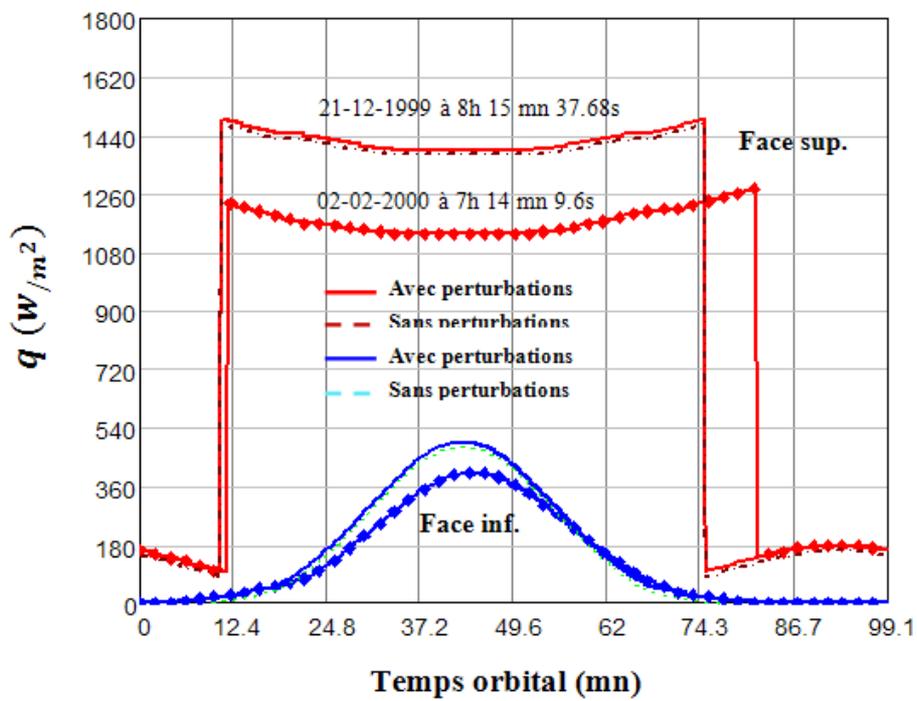


Figure 6.30 : Variation du flux total  $q$  durant une orbite complète du satellite KOMPSAT

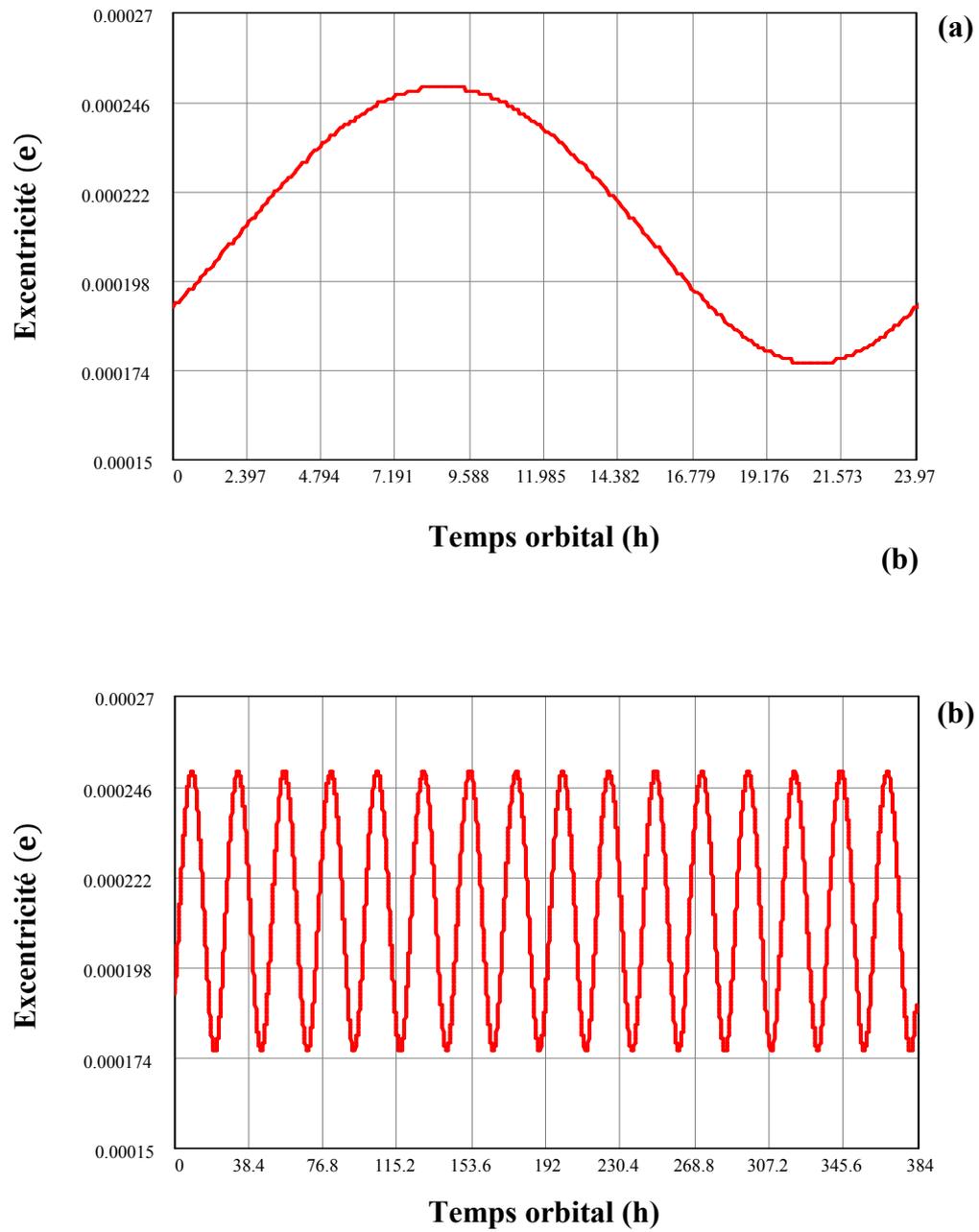
tableau 6.18, il est possible de prédire sa position à une date donnée (date finale de prédiction).

Les figures 6.31, 6.32, 6.33 et 6.35 donnent la variation des paramètres orbitaux sur un intervalle de temps de 10 jours, ce qui correspond à 16 révolutions. Les résultats trouvés montrent une variation périodique de période égale à une rotation du satellite du demi grand axe, de l'excentricité et de l'argument du périégée. Notons que l'inclinaison ne présente aucune fluctuation. Par contre l'ascension droite présente une légère variation séculaire d'environ  $0.0286^\circ$  par jour qui se traduit par une très faible dérive du plan de l'orbite.

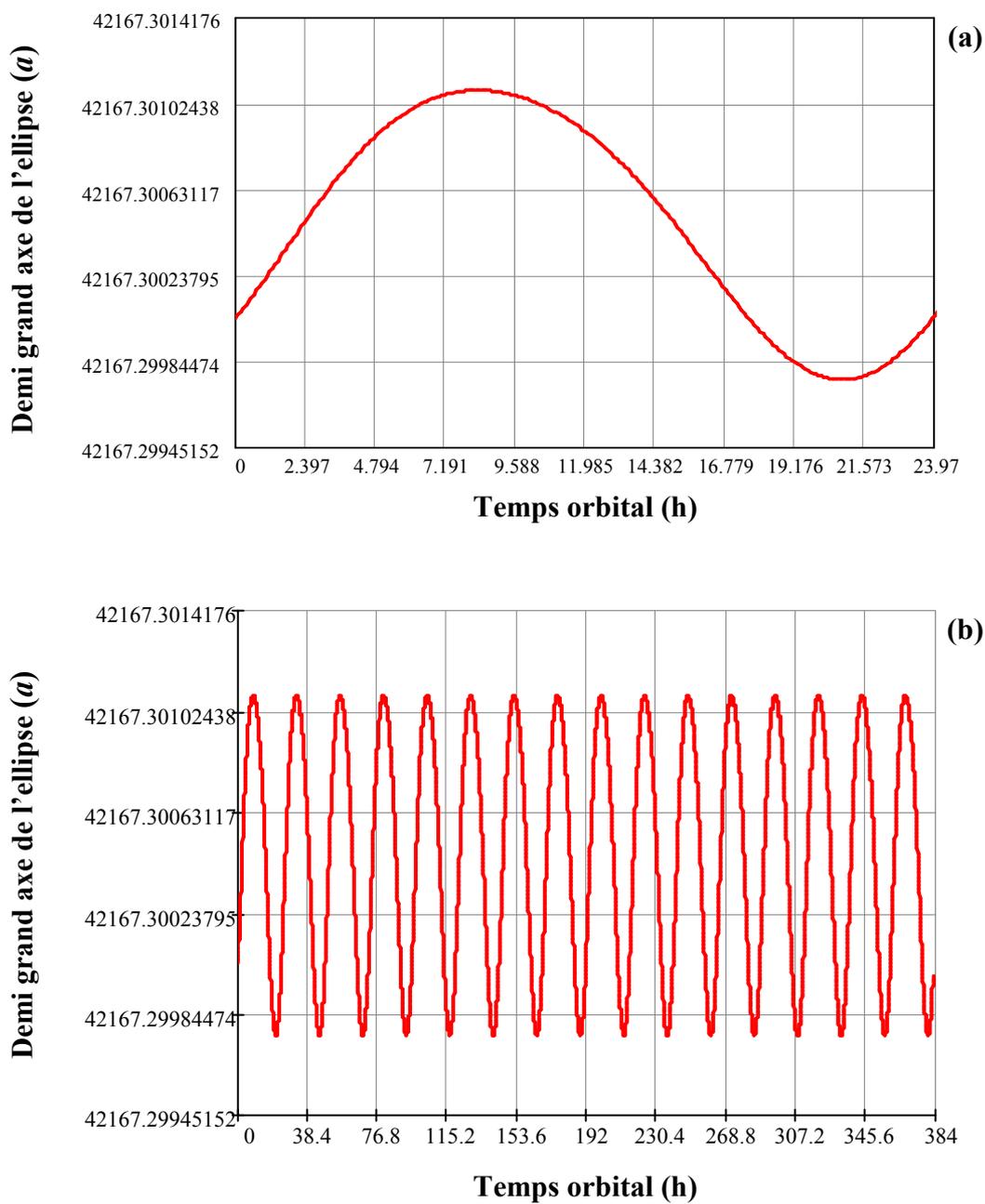
**Tableau 6.18:** Paramètres orbitaux et caractéristiques du satellite GOES-12.

Demi grand axe de l'ellipse	42167.3 km
Excentricité (e)	0.0001886
Inclinaison (i)	$0.3632^\circ$
Argument du périégée ( $\omega$ )	$72.4543^\circ$
Ascension droite ( $\Omega$ )	$98.8806^\circ$
Anomalie moyenne (M)	$233.3423^\circ$
Date du début de prédiction	05/12/2002 à 04h 59mn 46.986s
Date finale de prédiction	21/12/2002 à 04h 59mn 46.986s
Poids	2105 kg
Coefficient aérodynamique	1.99
Section	$12.96 \text{ m}^2$

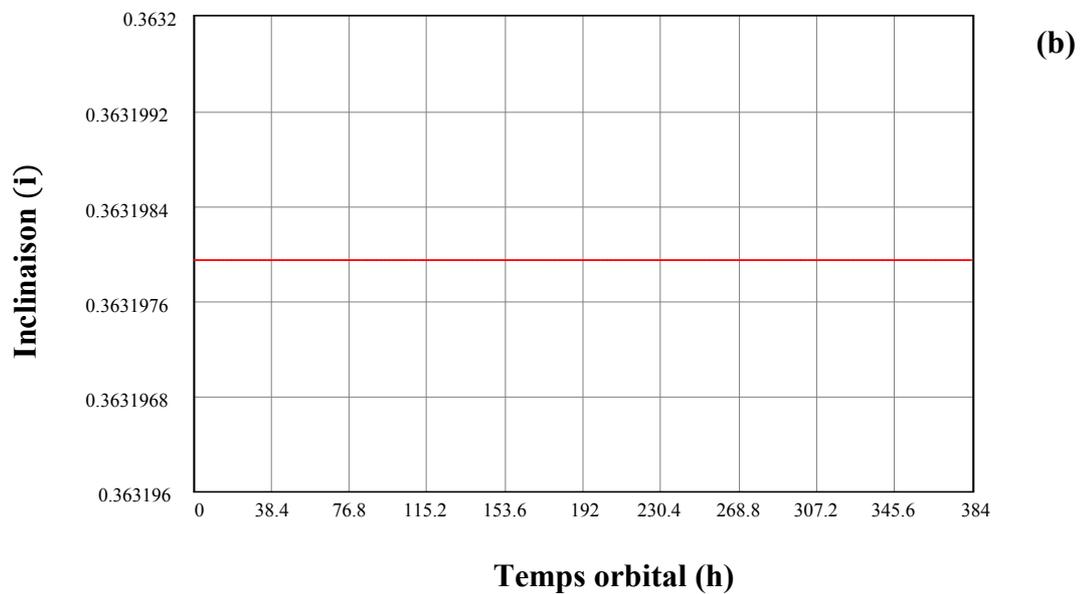
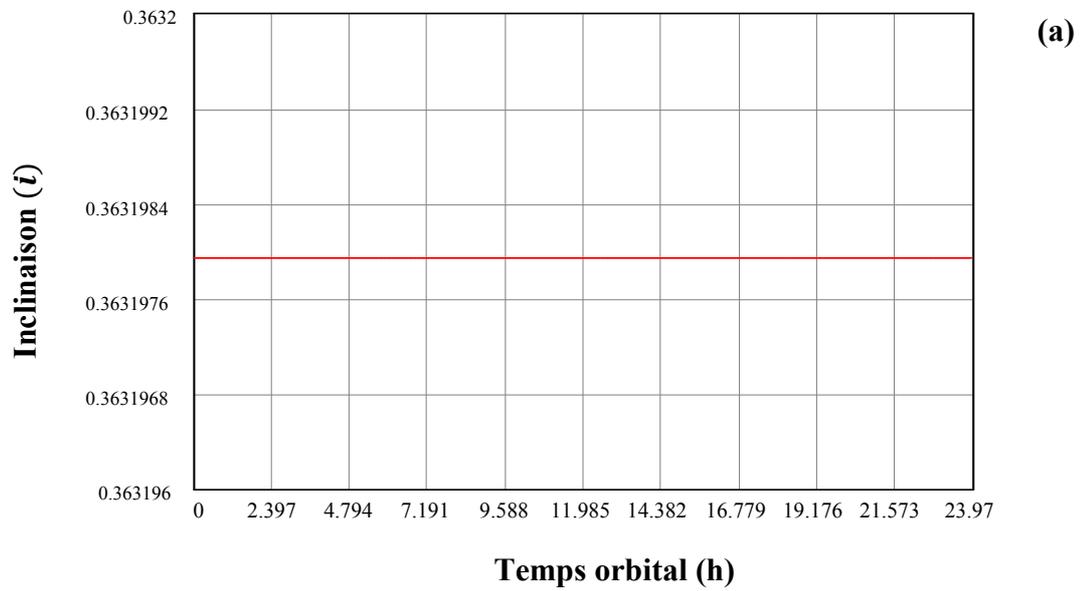
La position du satellite dans le repère terrestre est illustrée sous forme de trajectoire d'orbite (voir figure 6.36). On remarque que le plan orbital ne présente aucune précession. Du moment que le flux total reçu par le panneau dépend essentiellement de l'inclinaison et de l'argument du périégée, alors dans ce cas, les perturbations n'induiront aucune variation du flux (voir figure 6.37).



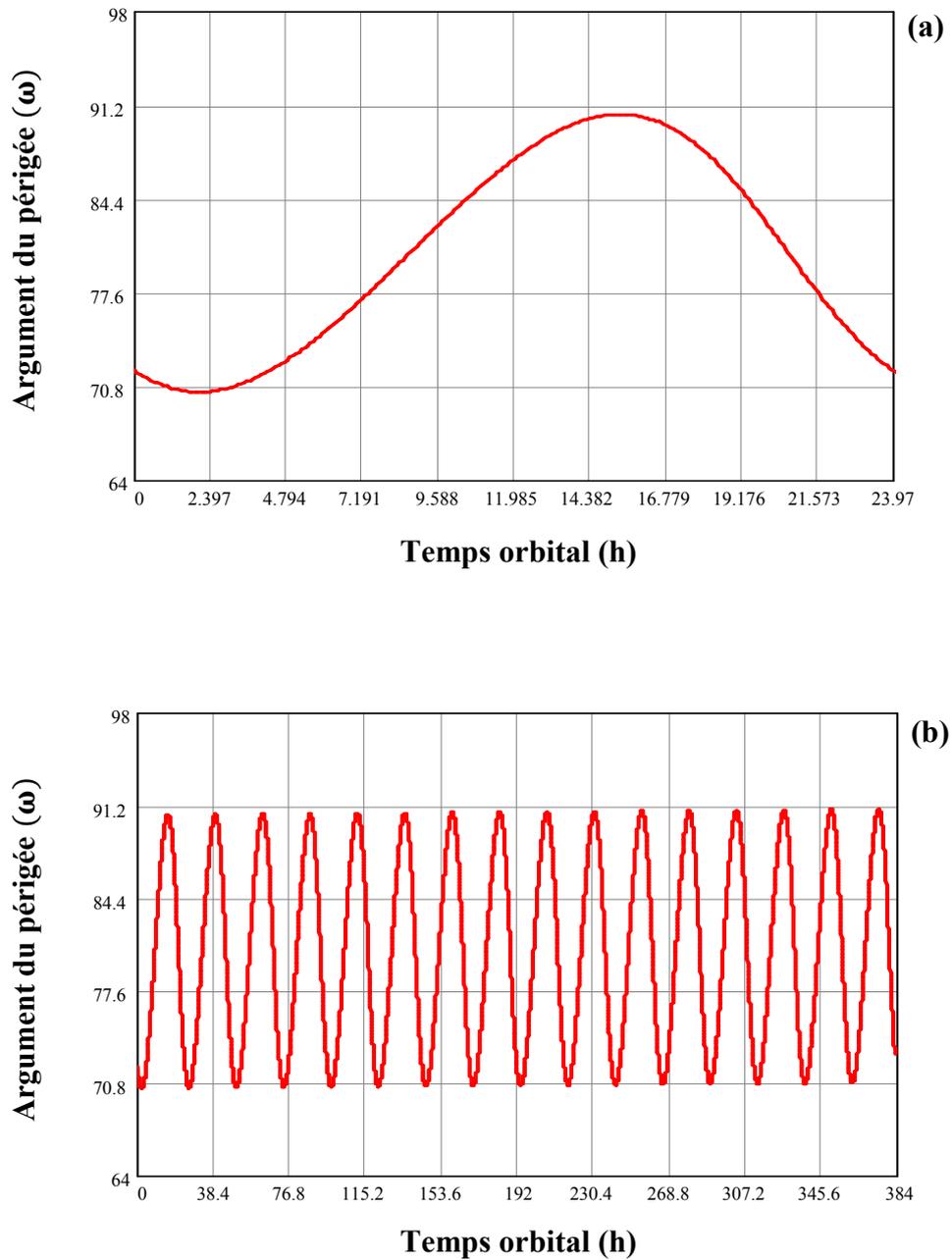
**Figure 6.31** : Variation de l'excentricité (e) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h



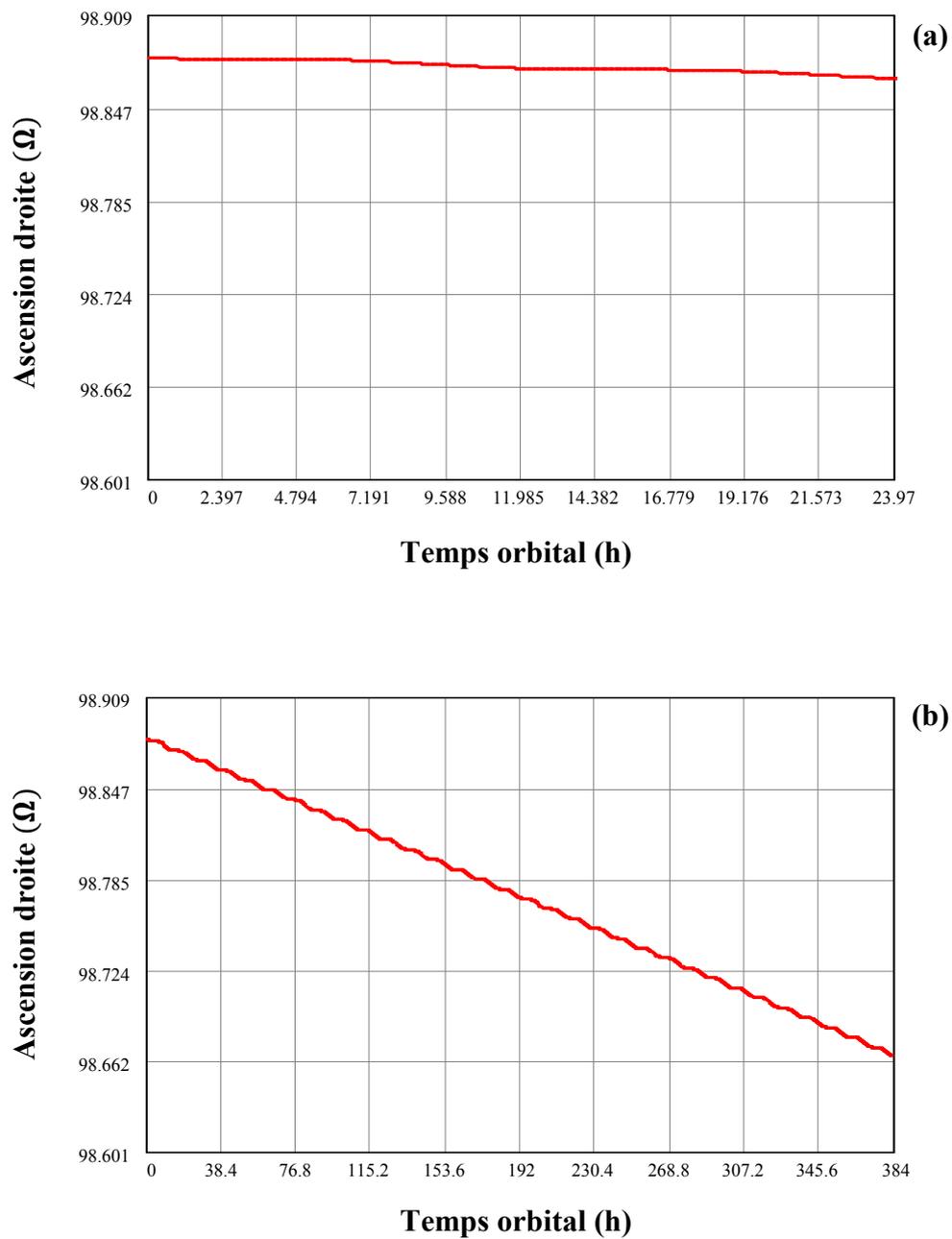
**Figure 6.32 :** Variation du demi grand axe (a) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h



**Figure 6.33** : Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h



**Figure 6.34 :** Variation de l'argument du périgée ( $\omega$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h



**Figure 6.35 :** Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite GOES-12 durant : (a) 23.97h, (b) 384h

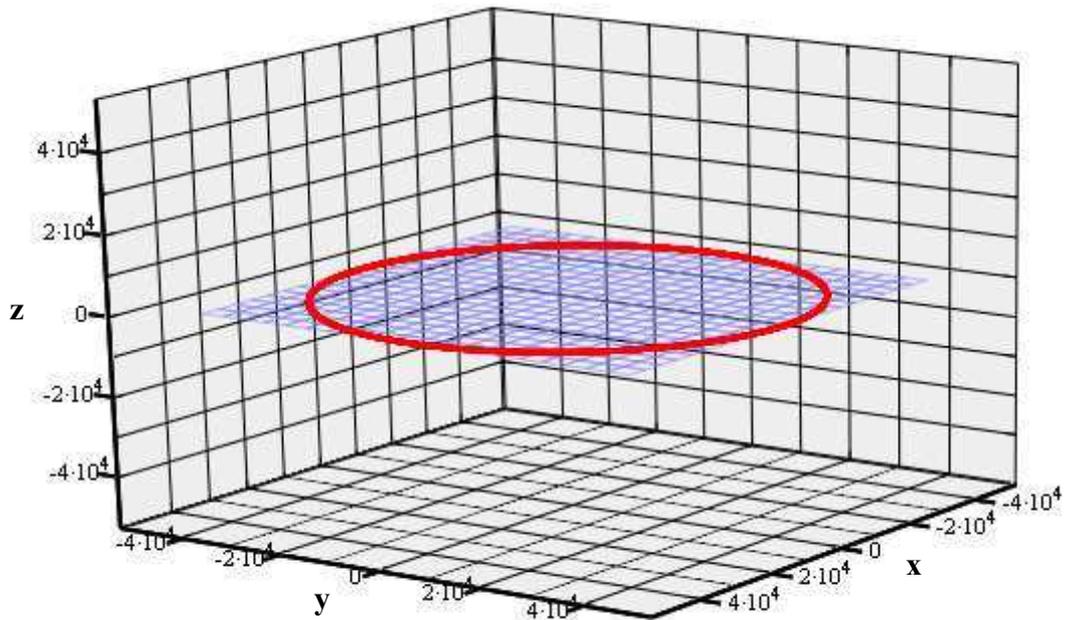


Figure 6.36 : Trajectoire du satellite GOES-12 durant 384h

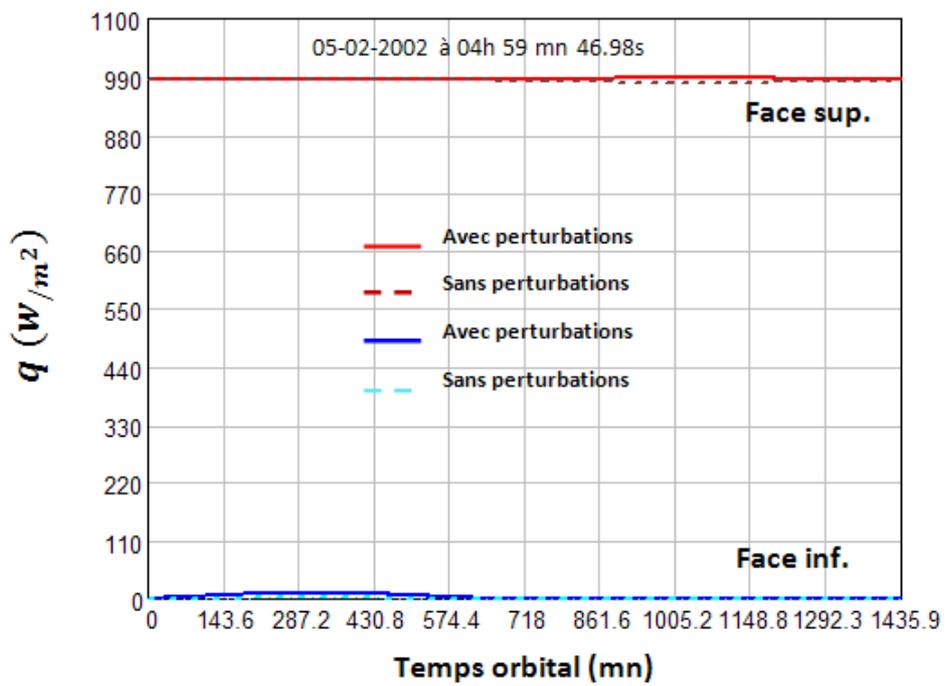


Figure 6.37 : Variation du flux total  $q$  durant une orbite complète du satellite GOES-12

### VI-3-2-3 NAVSTAR-44

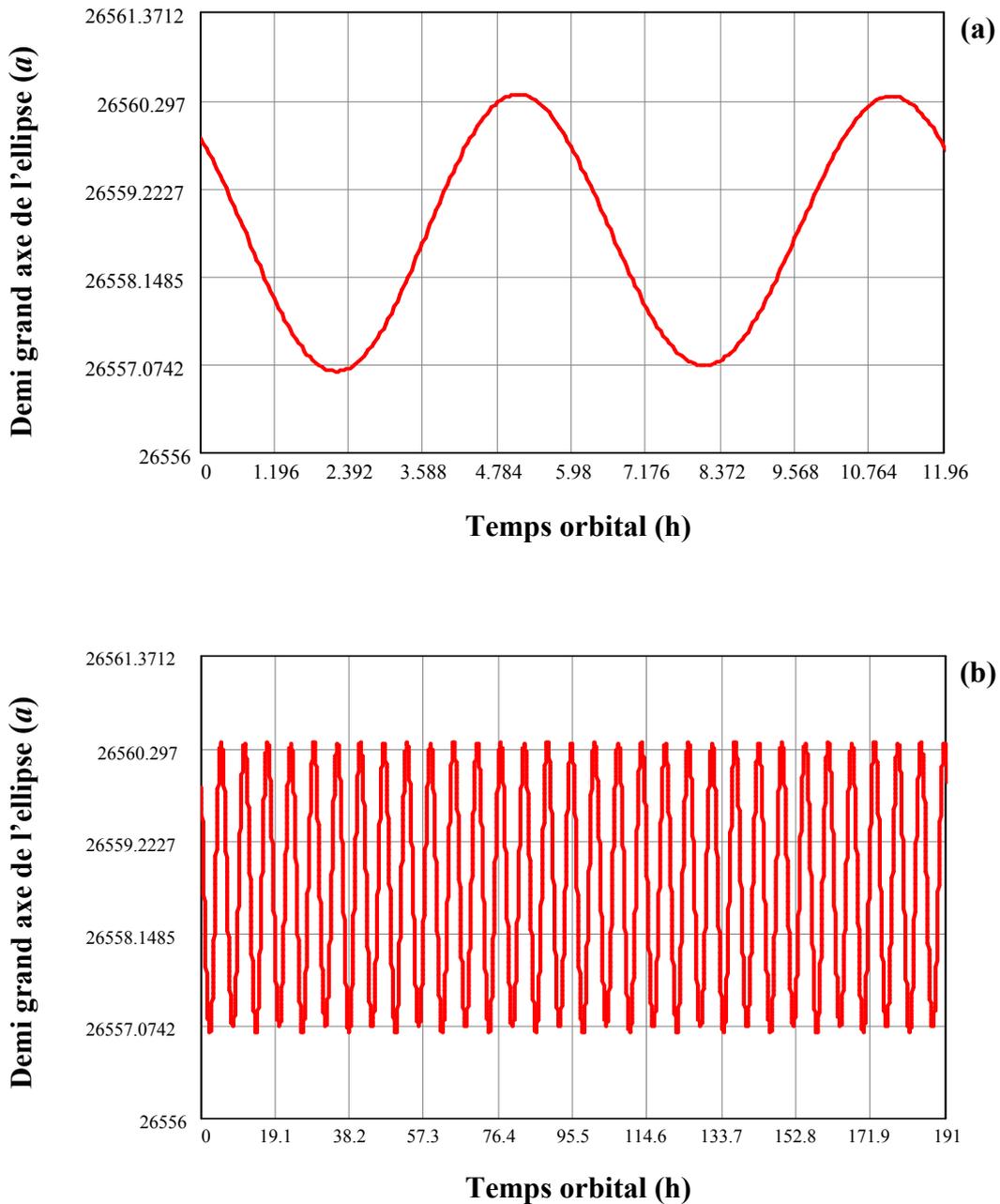
Le service de positionnement par satellite GPS est constitué de 24 satellites NAVSTAR. Les satellites sont placés sur des orbites d'altitude moyenne 20182 km, inclinées à 55°, parcourue en 11 h 58 min. Chaque satellite retrouve la même position dans l'espace au bout d'un jour sidéral. Selon le tableau 6.19, il est possible de prédire sa position à une date donnée (date finale de prédiction).

**Tableau 6.19:** Paramètres orbitaux et caractéristiques du satellite NAVSTAR-44.

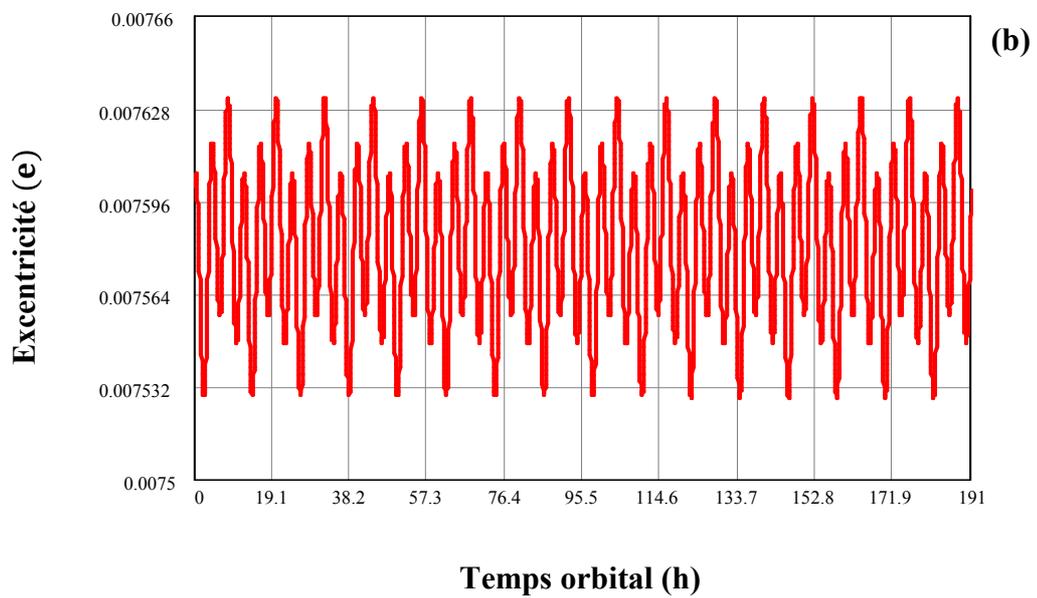
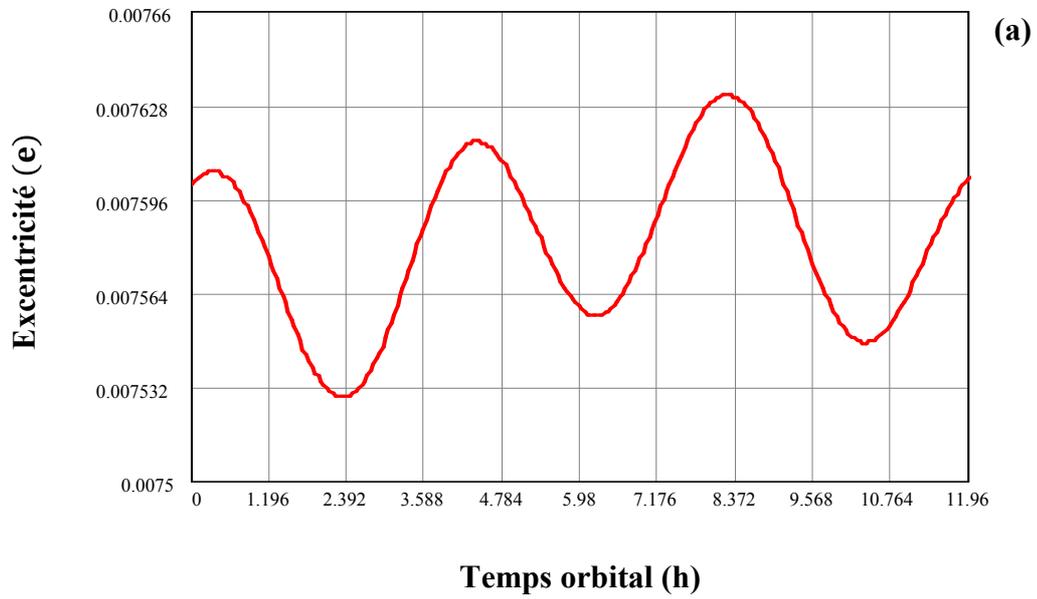
Demi grand axe de l'ellipse	26559.9 km
Excentricité (e)	0.0076000
Inclinaison (i)	54.9000 °
Argument du périégée ( $\omega$ )	105.1500 °
Ascension droite ( $\Omega$ )	174.7700 °
Anomalie moyenne (M)	277.5900°
Date du début de prédiction	27/03/2000 à 00h 0mn 0s
Date finale de prédiction	03/04/2000 à 23h 0mn 0s
Poids	1150 kg
Coefficient aérodynamique	2
Section	44 m <sup>2</sup>

Sur une révolution du satellite, l'inclinaison et le demi grand axe présentent des variations périodiques de période égale à une demi-révolution (voir figures 6.38 et 6.40). La variation de l'excentricité présente aussi des variations périodiques moyenne, et de courte période mais égale à une révolution, voir figure 6.39. Sur une période de 191h, le demi grand axe, l'excentricité et l'inclinaison présente des variations périodiques, mais sans les variations séculaires. Par contre l'ascension droite ( $\Omega$ ) présente une variation séculaire très faible de l'ordre -0.04°/ jour. La figure 6.43 donne la trajectoire du satellite NAVSTAR-44 durant une période de 191 heures dans le repère terrestre. La figure montre que l'orbite du satellite est

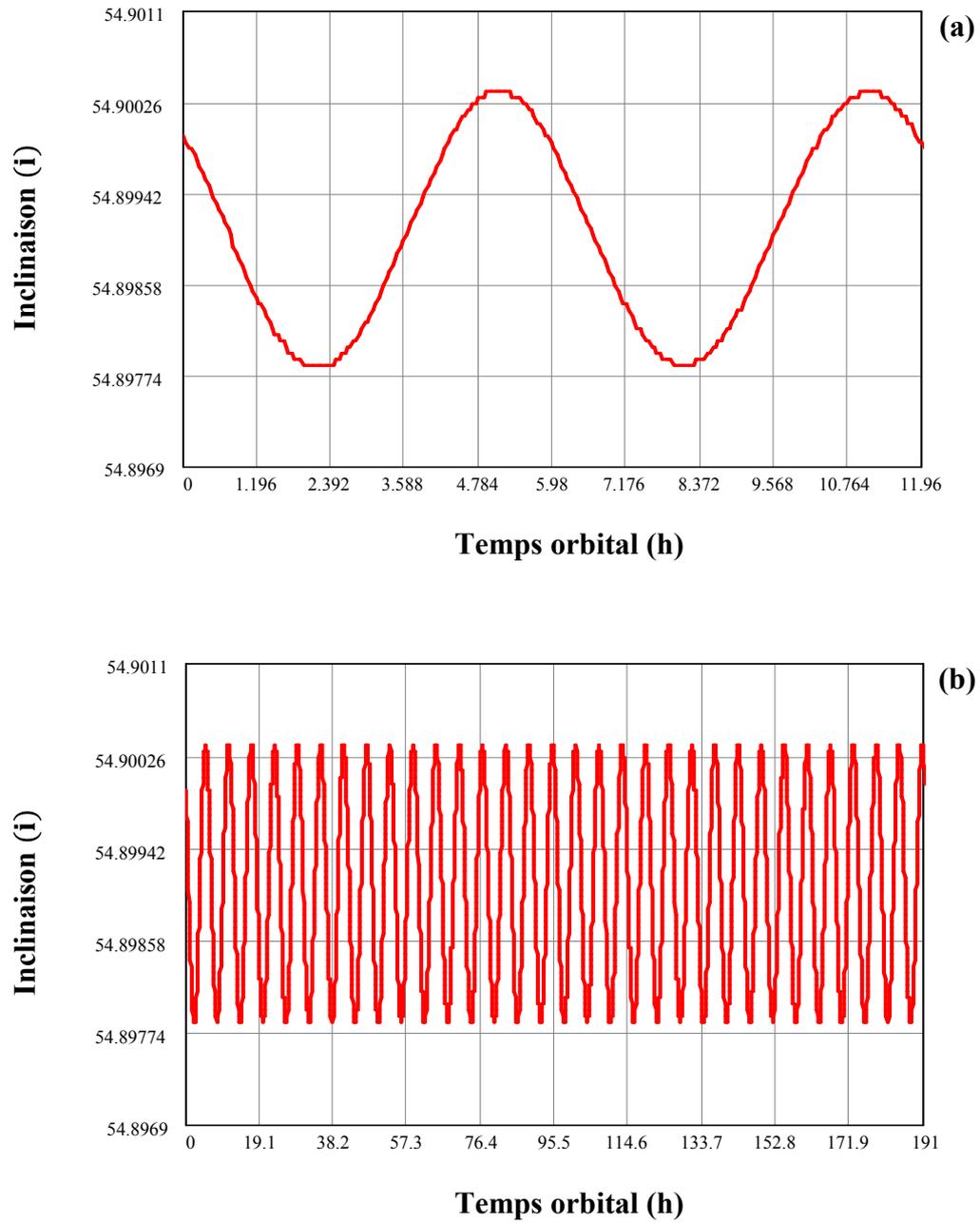
conservée durant cet intervalle de temps. Concernant le flux total reçu par le panneau solaire durant une orbite complète, on remarque que la variation périodique des éléments métriques ( $a, e, i$ ) et la faible dérive du plan orbital n'induiront aucune fluctuation du flux.



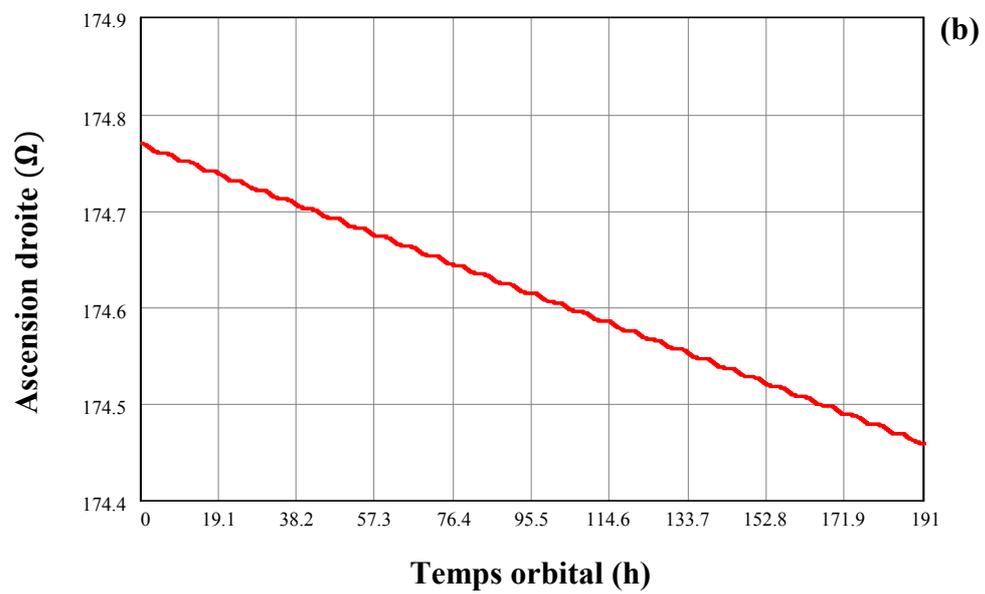
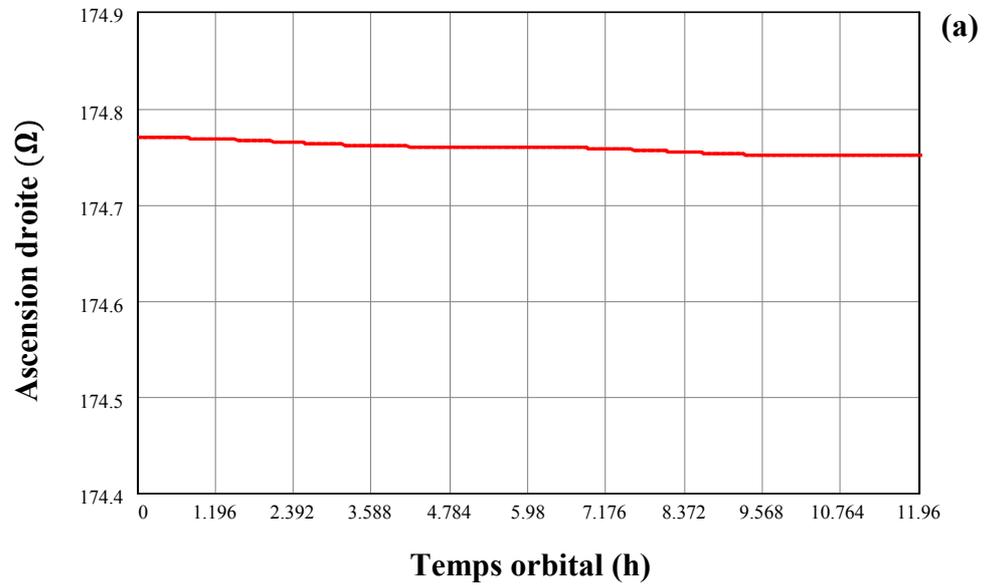
**Figure 6.38 :** Variation de l'excentricité ( $e$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h



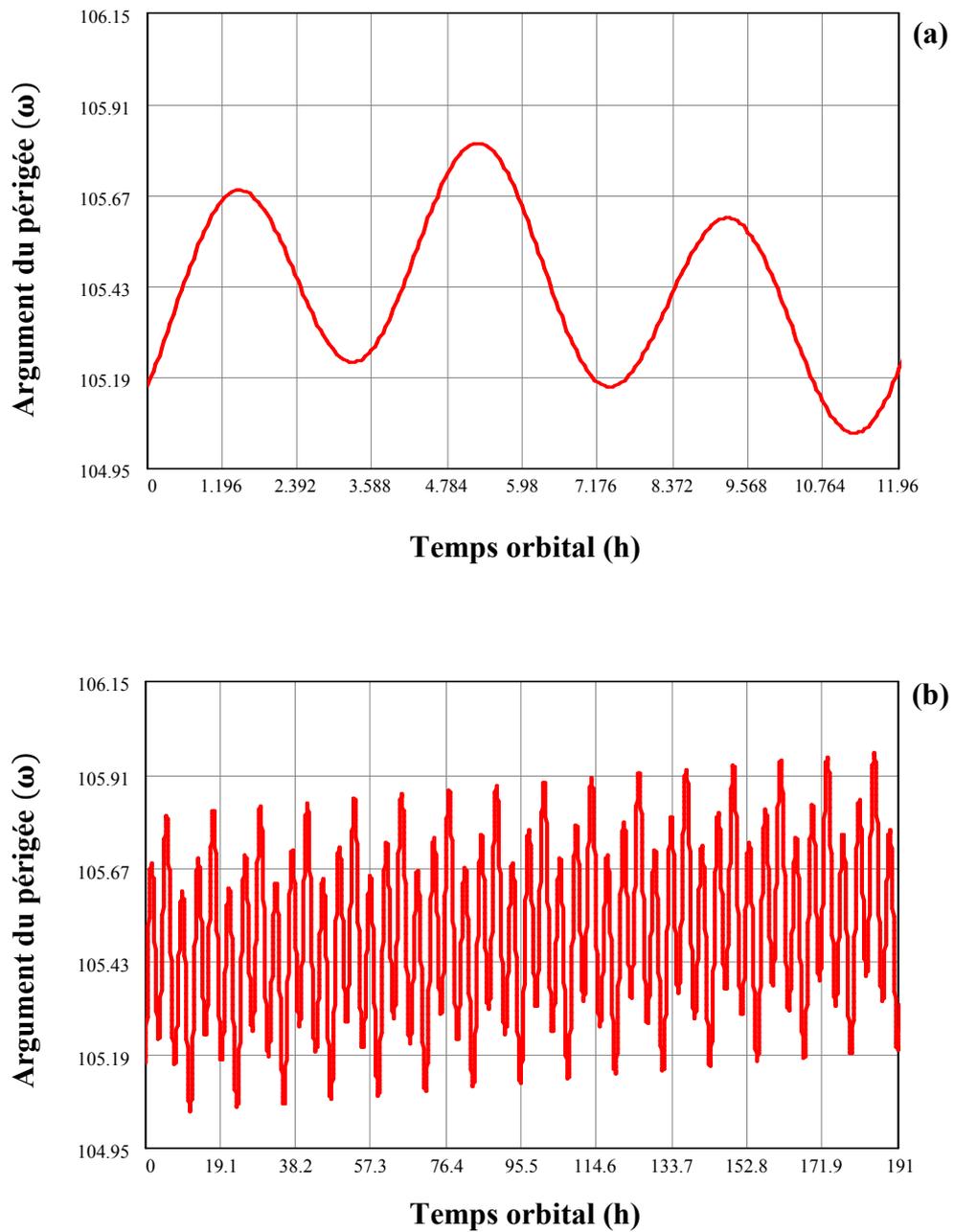
**Figure 6.39** : Variation de l'excentricité (e) du satellite NAVSTAR-44 durant :  
(a) 11.96h, (b) 191h



**Figure 6.40** : Variation de l'inclinaison ( $i$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h



**Figure 6.41** : Variation de l'ascension droite ( $\Omega$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h



**Figure 6.42 :** Variation de l'argument du périgée ( $\omega$ ) du satellite NAVSTAR-44 durant : (a) 11.96h, (b) 191h

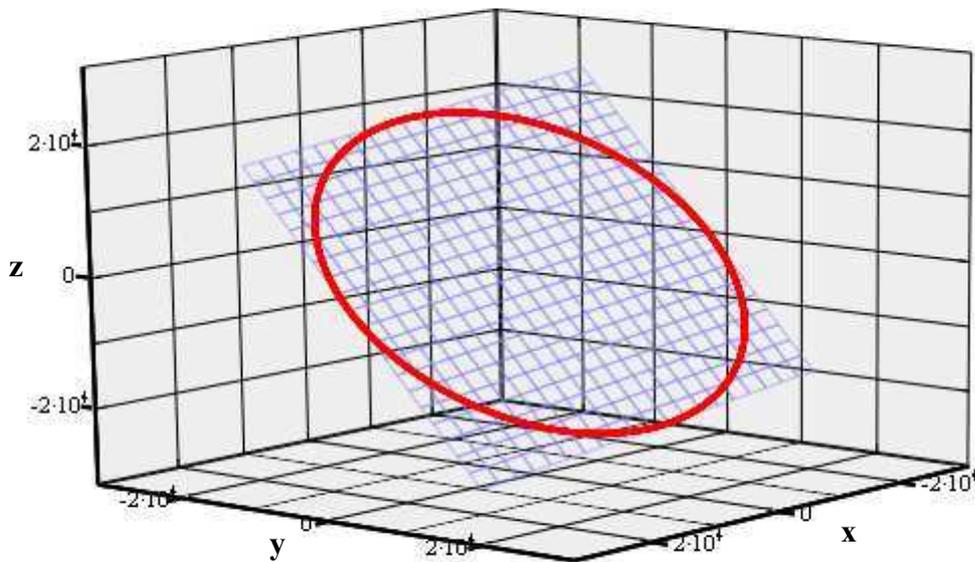


Figure 6.43 : Trajectoire du satellite NAVSTAR-44 durant 191h

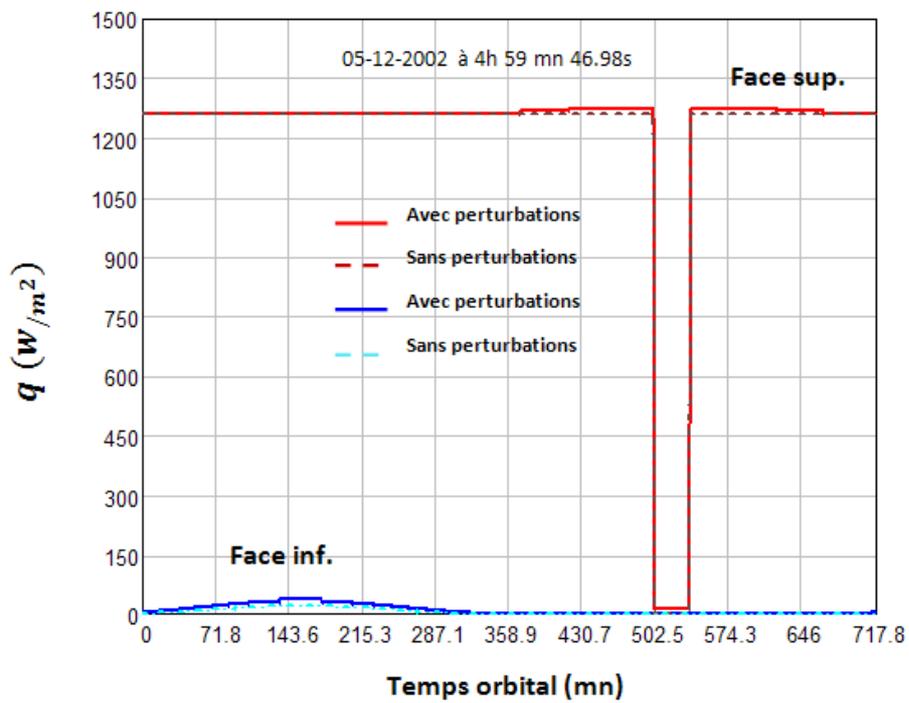


Figure 6.44 : Variation du flux total  $q$  durant une orbite complète du satellite NAVSTAR-44

### VI-3-3 Flux reçus par le panneau solaire

Les figures 6.30, 6.37 et 6.44 donnent la variation du flux total  $q$  reçu par les deux faces du panneau solaire des différents cas traités. D'après ces figures on voit bien que la variation du flux diffère d'un satellite à un autre. Cette différence est due à plusieurs paramètres : inclinaison du plan orbital, altitude du satellite, époque considérée, etc. Concernant le satellite KOMPSAT, au début de la prédiction (21 – 12 – 1999 à 08h 15mn 37.687s) le satellite se trouve dans l'ombre (phase d'éclipse). Le seul flux reçu est le flux terrestre. Après 10 minutes le satellite passe à la zone chaude entraînant ainsi une variation rapide du flux jusqu'à atteindre sa valeur maximale qui est de l'ordre de  $1489 \text{ Wm}^{-2}$ . Par la suite, on remarque une légère chute du flux due principalement à la diminution du flux radiatif terrestre. Mais, en fin de la phase chaude le flux atteint sa valeur maximale, suivi d'une variation brusque jusqu'à atteindre sa valeur minimale qui est de l'ordre de  $83 \text{ Wm}^{-2}$ . D'après les résultats trouvés et qui sont illustrés sur la figure 6.30, on déduit que les variations à courtes périodes (sur une révolution) des éléments orbitaux provoquées par les forces de perturbations n'ont pas d'effets sur le flux. Dans le deuxième cas traité, GOES-12 ne traverse aucune phase d'ombre (voir figure 6.37). Le flux reçu par la face supérieure garde une valeur constante durant le mouvement orbital qui est égale à  $983 \text{ Wm}^{-2}$ . Alors que le flux reçu par la face inférieure est nul (flux albédo et terrestre négligeables). Les forces de perturbations n'ont aucun effet sur la variation du flux. Le troisième cas traité concerne le satellite NAVSTAR-44. Sur la figure 6.44, on voit que le satellite passe par une zone d'ombre, le temps de passage est d'environ 35.41mn, un temps très court comparé à la période de révolution du satellite qui est de 717.9585mn. Le flux reste constant tout au long de l'orbite (égale à  $1261 \text{ Wm}^{-2}$ ) à l'exception de la phase ombre dans laquelle le flux est nul (absence du flux terrestre et albédo). Dans les trois cas traités, on remarque que les perturbations périodiques des différents éléments orbitaux n'affectent pas la variation du flux. Par contre, les effets séculaires qui induiront une dérive du plan orbital peuvent modifier à long terme le flux reçu par le panneau solaire si une correction d'orbite n'est pas faite.

## VI-4 Comportement thermo-élastique du panneau solaire du satellite KOMPSAT

Le cas traité concerne le panneau solaire du satellite KOMPSAT. Ce dernier est lancé en orbite en 1999 pour une mission bien définie qui est l'observation de la terre. Pour se ressourcer en énergie électrique, le satellite est équipé de deux panneaux solaires de longueur 2.67m et de largeur 1.35m. Les performances de ces deux panneaux solaires dépendent principalement de leur comportement thermo-élastique dans les conditions extrémales, caractérisées par un flux solaire maximal. Notons que ces conditions ne se réunissent que si l'époque coïncide avec le solstice d'hiver (au moment où la déclinaison du soleil atteint sa valeur maximale) et le plan orbital est confondu avec l'écliptique. Dans la suite de cette étude les perturbations du mouvement orbital ne sont pas prises en compte (orbite képlérienne).

### VI-4-1 Flux reçus par le panneau solaire

Le panneau solaire est modélisé par une plaque sandwich composée d'une âme en nids d'abeilles fabriquée en aluminium 5052H38 et de deux peaux minces fabriquées en aluminium 2024T3, voir figure 6.45. Les cellules photovoltaïques sont fixées sur la surface orientée vers le soleil, alors que la partie inférieure est protégée par une couche de protection. Le tableau 6.20 donne les caractéristiques géométriques et physiques des matériaux qui composent le panneau solaire (Shin et al. 2001).

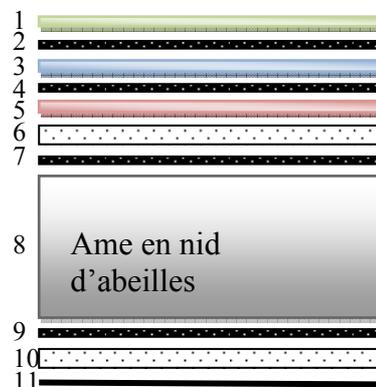
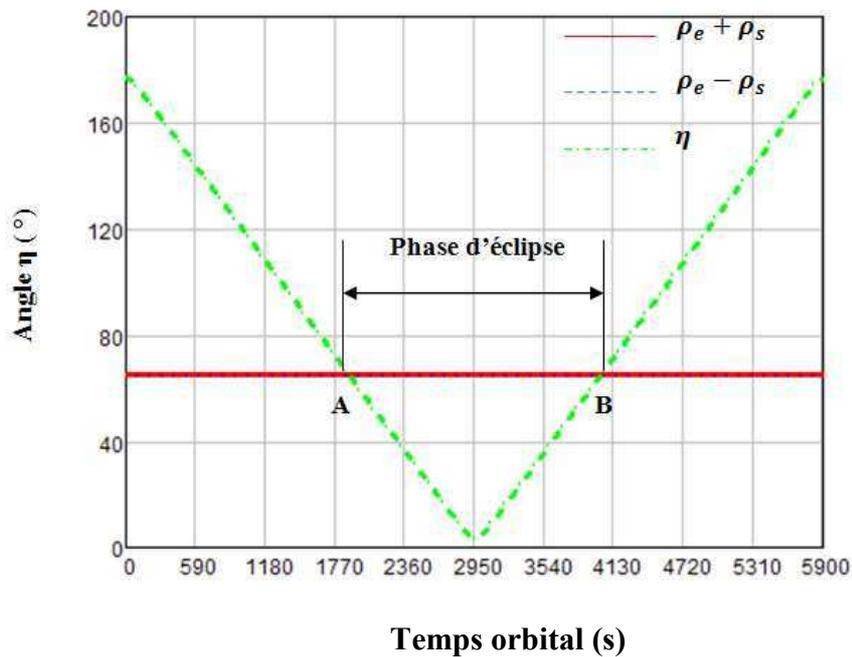


Figure 6.45 : Coupe transversale du panneau solaire du satellite KOMPSAT.

Tableau 6.20: Propriétés mécaniques et thermo-mécaniques du panneau solaire du satellite KOMPSAT.

couche	Matériau	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	Capac (J/kg K)	Conduc (Wm/K)	Epais. (mm)	Coef. Absorption/Emissivité		E <sub>11</sub> /E <sub>22</sub> /G <sub>12</sub> /ν <sub>12</sub> (GPa)	Coef. Dil. (10 <sup>-6</sup> m/mK)
						Solstice d'été	Solstice d'hiver		
1	Coverglass	2620	737	1.4	0.2	0.74/0.8	0.72/0.8		
2	Adhésifs 1	1100	1030	0.15	0.1				
3	Cellule phot.	2820	712	148	0.2				
4	Adhésifs 1	1100	1030	0.15	0.1				
5	Kapton	1420	1030	0.35	0.05				
6	Alum. 2024	2768	921	121	0.25			72.4/72.4/27.22/0.33	23.22
7	Adhésif 2	1800	1105	0.15	0.13			6/6/2.31/0.3	54
8	Alum.5052	48	921	2.10	15.24			0.41/0.24/0.15/0.3	23.76
9	Adhésif 2	1800	1105	0.15	0.13			6/6/2.31/0.3	54
10	Alum. 2024	2768	921	121	0.25			72.4/72.4/27.22/0.33	23.22
11	Peinture Z93	1750	1256	0.20	0.15	0.37/0.87	0.19/0.87		

La figure 6.46 donne la variation de l'angles  $\eta$  en fonction du temps, pendant une orbite complète d'une période de 98.45 mn. Les deux points d'intersection A et B montrent que le satellite traverse les trois phases : ensoleillement, pénombre et ombre. La phase d'éclipse est composée de deux éclipses partielles et d'une éclipse totale. La première phase d'éclipse partielle commence à l'instant  $t=31.55$  mn et dure environ 8 seconde, alors que la deuxième phase de pénombre commence à l'instant  $t=66.83$ mn et dure environ 8 seconde. Par conséquent la phase d'éclipse est d'environ 35.41mn.



**Figure 6.46 :** Variation de l'angle  $\eta$  en fonction du temps orbital.

La figure 6.47 donne la variation du flux terrestre radiatif  $q_t$  en fonction du temps orbital pendant une orbite complète pour les deux faces du panneau solaire. On voit bien que le flux radiatif varie le long de l'orbite. Lorsque le satellite est au milieu de la phase d'éclipse, la face supérieure du panneau solaire est en face de la terre ( $\phi = 0$ ). Dans cette position le flux radiatif reçu par cette face du panneau atteint sa valeur maximale qui est de l'ordre de  $180 \text{ Wm}^{-2}$ , alors que le flux reçu par la face inférieure est nul du moment que cette face est cachée. L'inverse se produit lorsque le satellite est au milieu de la phase ensoleillement, la phase supérieure du panneau est en face du soleil ce qui fait que le flux radiatif reçu est

nul, par contre la face inférieure est en face de la terre donc le flux est maximale et atteint une valeur de  $180 \text{ Wm}^{-2}$ .

La figure 6.48 donne la variation du flux solaire  $q_s$  en fonction du temps orbital pendant une orbite complète pour les deux faces du panneau solaire. En phase ensoleillement le flux atteint sa valeur maximale pour la face supérieure du panneau solaire, cette valeur est constante durant toute la phase ensoleillement du moment que le panneau est en mode de navigation optimal qui est de l'ordre de  $1393 \text{ Wm}^{-2}$ . En phase d'éclipse, les rayons lumineux du soleil sont interceptés par la terre. Dans ce cas, le flux solaire varie brusquement et atteint une valeur nulle. La face inférieure du panneau solaire n'intercepte aucun rayon lumineux du soleil, le flux reçu par cette dernière est nul durant le mouvement orbital.

La figure 6.49 donne la variation du flux albédo  $q_{al}$  en fonction du temps orbital pendant une orbite complète pour les deux faces du panneau solaire. La figure 6.49 montre que le flux albédo reçu par la face supérieure est nul tout au long de l'orbite à l'exception des deux phases comprises entre 9.5mn et 24mn pour la première phase et 74mn et 90mn pour la deuxième phase où le flux albédo atteint une valeur de  $16 \text{ Wm}^{-2}$ . Par contre la face inférieure reçoit le maximum d'énergie albédo lorsque la face inférieure du panneau solaire est en face de la terre. Le flux albédo reçu par la face inférieure atteint la valeur maximale de  $341 \text{ Wm}^{-2}$ .

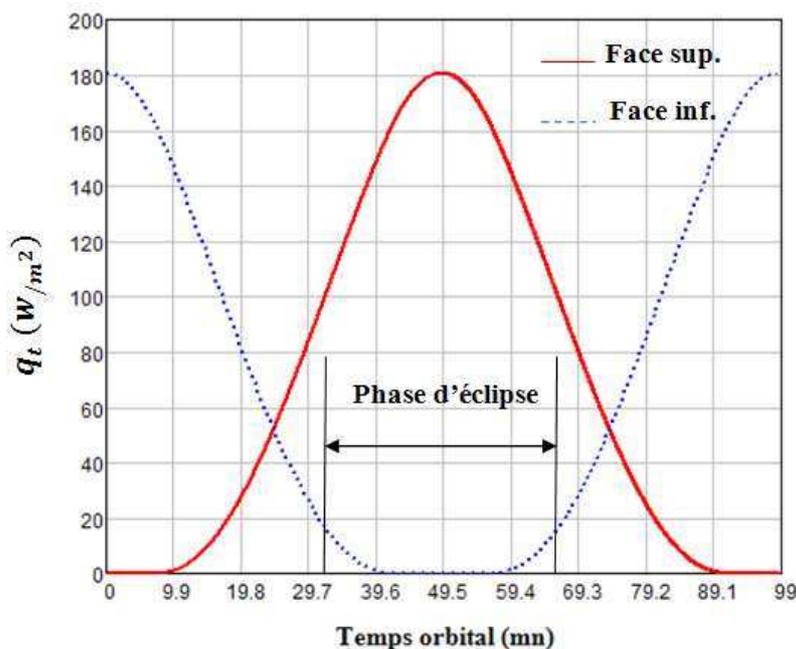
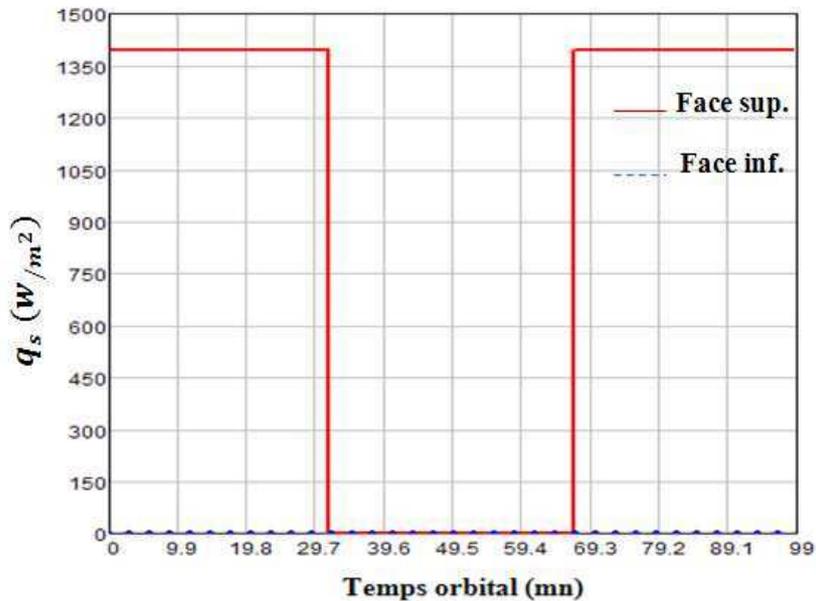


Figure 6.47 : Variation du flux radiatif terrestre  $q_t$  durant une orbite complète.



**Figure 6.48 :** Variation du flux solaire  $q_s$  durant une orbite complète.

La figure 6.50 donne la variation du flux total  $q$  reçu par les deux faces du panneau en fonction du temps orbital pendant une orbite. On voit bien que le flux reçu par la face supérieure est uniforme et qu'il est égale à  $1396 Wm^{-2}$  durant presque toute la phase ensoleillement. A l'instant  $t = 9.9 mn$ , le flux croit jusqu'à atteindre sa valeur maximale qui est de l'ordre de  $1492 Wm^{-2}$  en fin de phase ensoleillement, puis il est suivi d'un changement brusque jusqu'à la valeur de  $90 Wm^{-2}$  en un temps très court qui dure environ 8 secondes et qui correspond à la phase de transition entre le chaud et le froid. Le même scénario se répète mais dans le sens inverse une fois que le satellite quitte la phase froide vers la phase chaude. En ce qui concerne le flux reçu par la face inférieure du panneau solaire, on remarque que la variation du flux est continue, le flux est nul en phase d'éclipse et atteint sa valeur maximale ( $523 Wm^{-2}$ ) au milieu de la phase ensoleillement. D'après la figure 6.50 on voit que les résultats trouvés sont identiques aux résultats de la littérature (Shin et *al.* 2001). Dans cette étude, les auteurs ont utilisés le code TRASYS pour la simulation de l'environnement thermique en orbite.

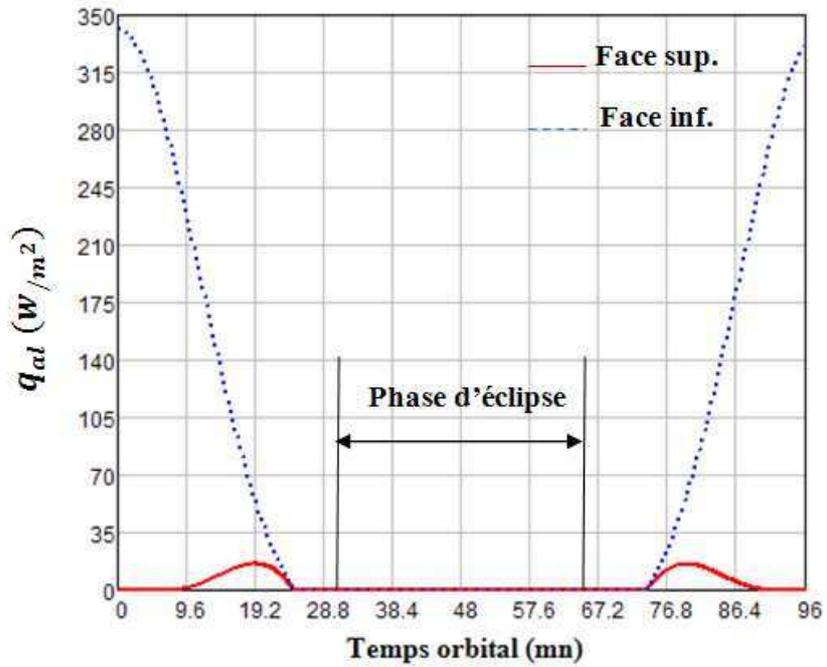


Figure 6.49 : Variation du flux albedo  $q_{al}$  durant une orbite complète.

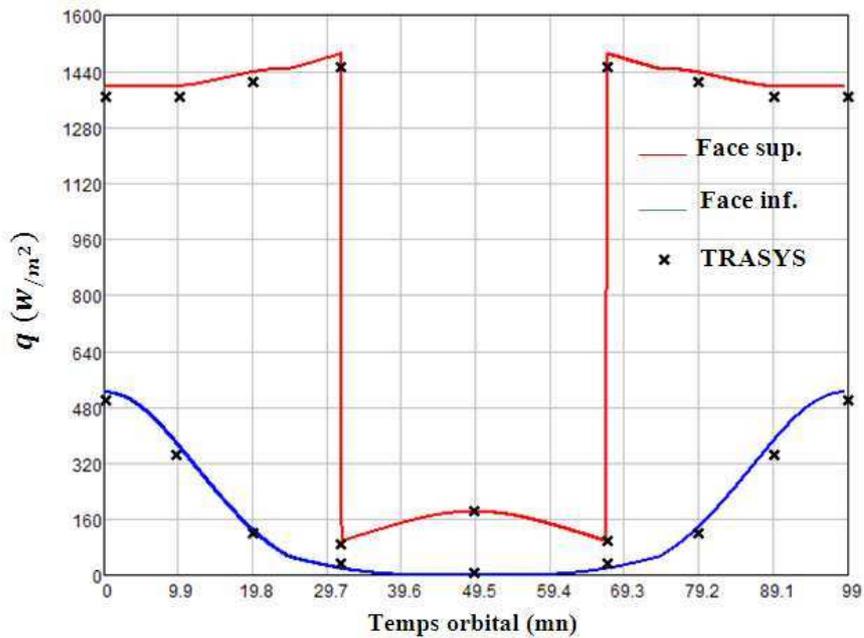
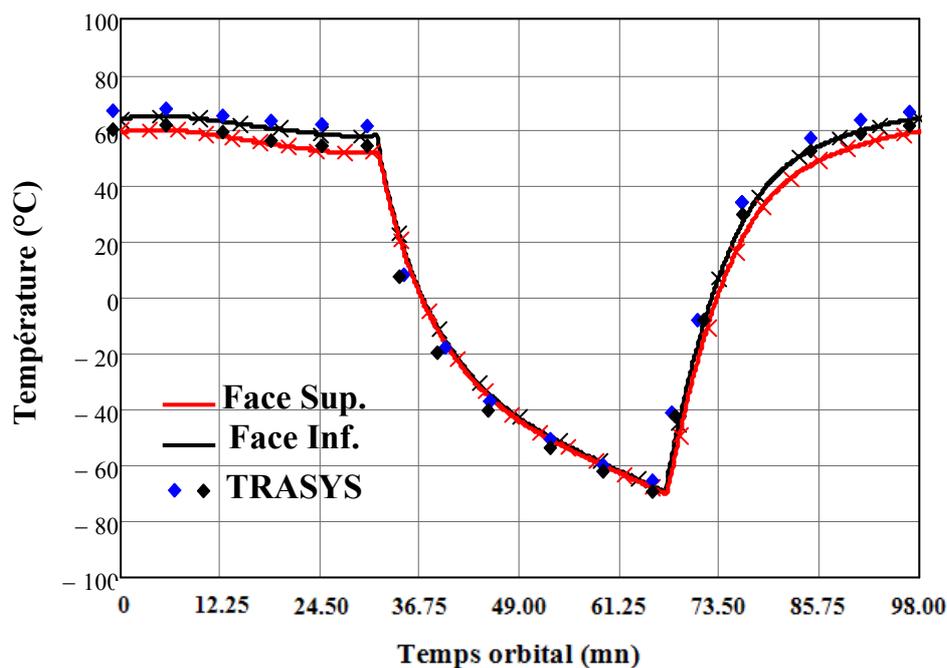


Figure 6.50 : Variation du flux total  $q$  durant une phase complète.

## VI-4-2 Analyse thermique

Une fois le flux reçu par les deux faces du panneau solaire du satellite déterminé, il est introduit comme une condition aux limites pour le modèle thermique. En appliquant la méthode des éléments finis hiérarchiques (en utilisant un élément rectangulaire avec 8 fonctions de forme hiérarchiques) il est possible de calculer la variation de la température dans le panneau solaire. La figure 6.51 illustre cette variation durant une orbite. On voit bien sur les deux graphes que la température maximale est atteinte au milieu de la phase ensoleillement et cela pour les deux faces du panneau solaire, elle est de l'ordre de  $60.17^{\circ}\text{C}$  pour la face inférieure et de  $65.09^{\circ}\text{C}$  pour la face supérieure. Ensuite cette température diminue en se dirigeant vers la phase froide, au début de la phase d'éclipse les deux températures sont égales à  $51.97^{\circ}\text{C}$  et  $58.18^{\circ}\text{C}$  pour les deux faces du panneau solaire. Une fois le satellite est dans la phase froide la température du panneau solaire diminue progressivement et l'écart de température entre les deux faces diminue jusqu'à devenir nul en fin de phase froide (les deux courbes en noir et en rouge sont confondues). Les températures des deux faces sont identiques et prennent la valeur minimale de  $-69.61^{\circ}\text{C}$ . Une fois le satellite entre dans la phase chaude la température du panneau solaire croît progressivement et l'écart de température entre les deux faces croît en même temps jusqu'à atteindre les valeurs maximales des températures en milieu de la phase chaude.



**Figure 6.51** : Variation de la température des deux faces du panneau solaire durant une orbite complète.

La détermination de la variation de la température dans les différentes couches du panneau solaire nous permet de déterminer le gradient thermique dans la plaque sandwich, nécessaire à l'analyse thermo-élastique. La figure 6.52 illustre la variation du gradient thermique dans la plaque sandwich. Notons que les quatre premières couches du panneau solaire ne sont pas considérées dans l'analyse thermo-élastique pour leurs faibles rigidités (Johnston et Thornton 2000, Shin et al. 2001). Le gradient de température entre les deux faces de la plaque sandwich varie le long de l'orbite, cette variation est marquée par des changements brusques et des changements progressifs à cause de la nature du flux thermique reçu par le panneau solaire. Au milieu de la phase chaude le gradient est de  $3.07^{\circ}\text{C}$ , une fois que le satellite se dirige vers la phase froide le gradient thermique croit jusqu'à atteindre une valeur maximale égale à  $3.96^{\circ}\text{C}$  en fin de la phase chaude. Puis, suivi d'une variation brusque en un temps très court de l'ordre de 35 secondes environ pour atteindre une valeur stable de  $0.96^{\circ}\text{C}$ . En fin de phase froide, ce gradient diminue jusqu'à atteindre une valeur de  $0.32^{\circ}\text{C}$ . Suivi après d'un autre changement brusque une fois que le satellite sort de la phase froide en un temps très court de 56 seconde. Le gradient croit brusquement pour prendre la valeur de  $3.29^{\circ}\text{C}$ .

### VI-4-3 Analyse thermo-élastique

Une fois le gradient thermique déterminé le problème peut être résolu en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchiques. La plaque sandwich est modélisée par un élément rectangulaire en utilisant 16 fonctions de forme hiérarchiques. Le panneau solaire est considéré encasté au corps principal du satellite (Johnston et Thornton 2000). La figure 6.54 donne la variation du déplacement transversal du point A du panneau solaire en fonction du temps orbital durant une révolution du satellite. La figure montre que le déplacement maximal ( $-30.86\text{mm}$ ) est obtenu en fin de la phase ensoleillement. Après, le déplacement diminue rapidement une fois le satellite en phase froide jusqu'à atteindre une valeur de  $-2.5\text{ mm}$  à la fin de cette phase. Suivi d'une augmentation rapide du déplacement transversal ( $-25\text{mm}$ ) en un temps très court de l'ordre de quelques secondes.

#### VI-4-4 Peaux en matériaux composites

Dans cette partie de l'étude, nous proposons de remplacer l'aluminium 2024T3 par un matériau composite. Les mêmes propositions faites au chapitre précédent sont retenues dans cette partie.

En appliquant le flux solaire comme condition aux limites sur les faces du panneau, nous pouvons déterminer la distribution de la température dans le sandwich. La figure 6.52 donne la variation de la température de la face supérieure du sandwich pour les différents matériaux utilisés.

On remarque que la variation est identique pour les différents matériaux dans les deux phases d'ensoleillement. Après, et en phase froide, une légère différence est observée en fin de phase froide :  $-74.72\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour les FGM,  $-72.2\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le stratifié et  $-69.61\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour l'aluminium. Cette différence s'explique par le fait que l'aluminium est un bon conducteur thermique relativement aux deux autres matériaux.

Néanmoins, la variation du gradient de température dans les différents modèles étudiés ne présente qu'une légère différence en phases de transition, ne dépassant pas  $0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ , voir figure 6.53.

Une fois le gradient de température déterminé, il est possible de calculer par la suite, la réaction mécanique du panneau solaire. La figure 6.54 donne la variation du déplacement transversal du point A du panneau en fonction du temps orbital. On voit bien l'intérêt d'utiliser les matériaux composites au lieu de l'aluminium, du moment que les résultats trouvés montrent une nette diminution de la flèche, qui est égale à  $-30.86\text{ mm}$  dans le cas de l'aluminium. Les résultats obtenus mettent en évidence le choix de l'orientation des fibres. L'utilisation du croisé  $[0/90]_S$  a permis de réduire le déplacement à  $-6.6\text{ mm}$ . Par contre l'empilement  $[45/-45]_S$  donne une valeur de  $-18.02\text{ mm}$ . La même chose concernant les peaux en FGM, les résultats obtenus prouvent que le choix du coefficient d'homogénéité n est déterminant. Pour n égale à 5 le déplacement est réduit à  $-8.5\text{ mm}$ , alors qu'il vaut  $-23.3\text{ mm}$  dans le cas où n = 0.35 et à  $-15.8\text{ mm}$  si n est pris égale à 1. Cette diminution est due essentiellement à deux facteurs : module d'élasticité et coefficient de dilatation thermique.

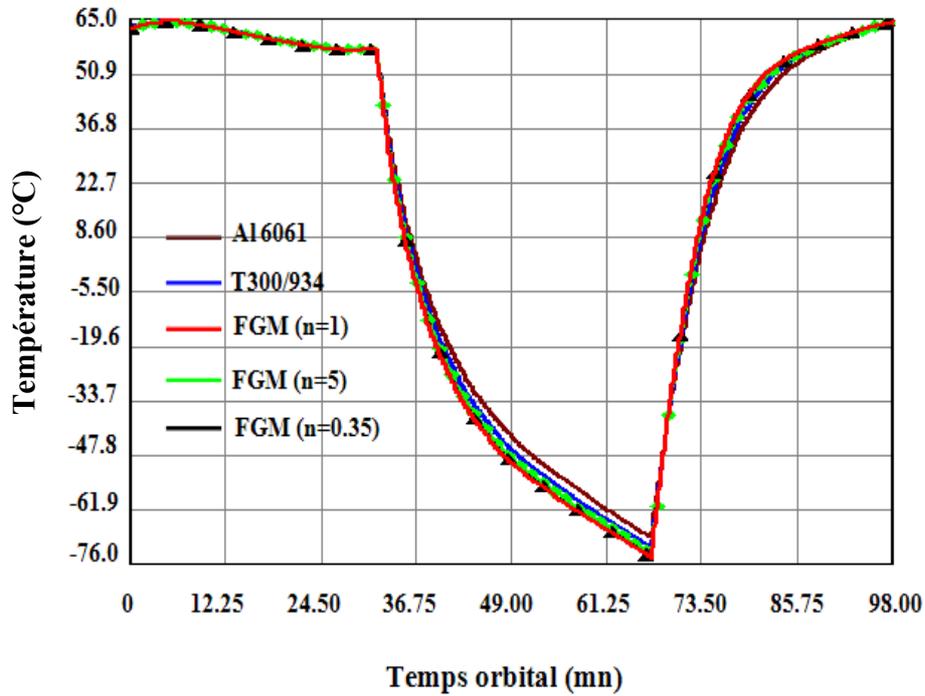


Figure 6.52 : Variation de la température de la face supérieure du sandwich en fonction des différents matériaux utilisés.

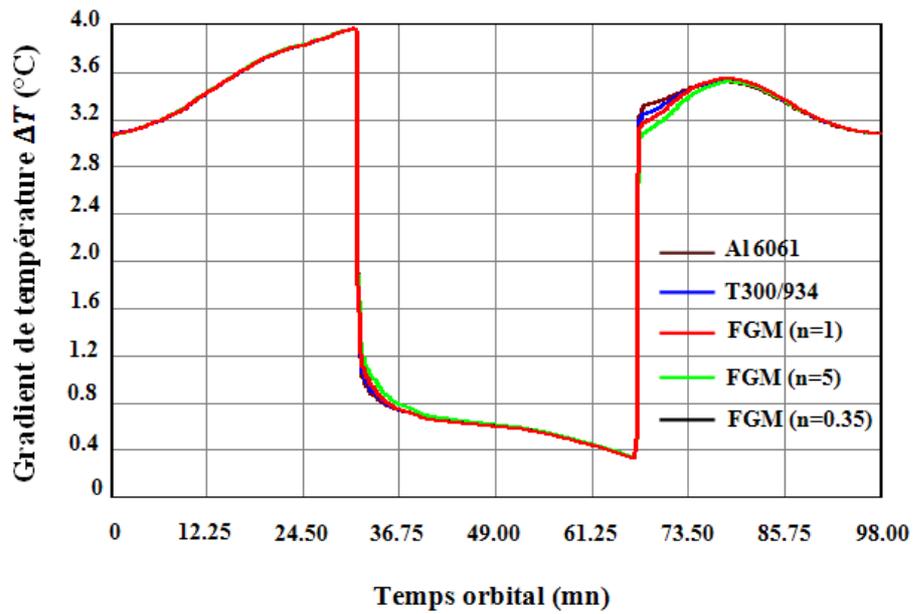


Figure 6.53 : Variation du gradient de température en fonction des différents matériaux utilisés.

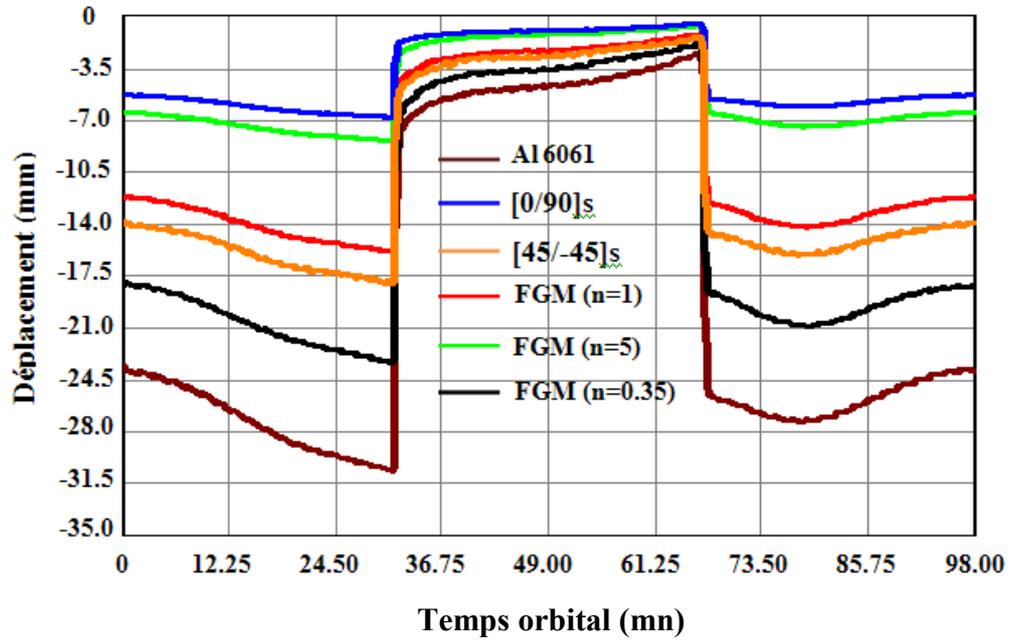


Figure 6.54 : Variation du déplacement transversal durant une révolution du satellite.

# Chapitre VII

## Conclusions et perspectives

Les conditions sévères de l'environnement spatial sous variation cyclique de température ont exposé de nombreux satellites au phénomène d'instabilité provoqué par le gradient thermique au sein des panneaux solaires. Les incidents des satellites HST et UARS ont montré que les connaissances sur les causes de ce phénomène ne sont pas totalement ficelées, c'est pour cette raison que de nombreuses études ont été lancées afin de les appréhender. En espérant contribuer à la résolution du problème, nous avons décidé de réaliser cette étude dont l'objectif était de modéliser le comportement thermo-élastique d'un panneau solaire soumis aux conditions de l'environnement thermique en orbite. Nous avons apporté au travers de ce travail de thèse les grands axes de réponse concernant le comportement thermo-élastique d'un panneau solaire. Il s'agit tout d'abord d'une synthèse des travaux existants, et d'une mise au point d'un code de calcul capable de prédire dans les conditions réalistes de l'environnement spatial:

- les éphémérides du satellite,
- les différents flux reçus par le panneau solaire,
- le gradient thermique au sein du panneau,
- les fréquences propres et modes propres,
- la réponse dynamique du panneau.

Nous avons pu mettre en évidence les particularités et originalités de ce travail de recherche au cours des différents chapitres constituant cette thèse.

Nous allons cependant ci-dessous reprendre les conclusions principales relatives aux différentes facettes de ce travail de recherche, ainsi que les perspectives de

recherches principales pouvant constituer des extensions intéressantes de ce travail. L'ensemble des simulations numériques étudiées nous a permis de valider nos développements par rapport à des résultats présents dans la littérature. En effet, nous avons pu mettre en évidence les potentialités du code lors de l'étude des satellites NAVSTAR, GOES et KOMPSAT.

La première partie de ce manuscrit était dédiée à une analyse bibliographique. L'étude a été clôturée par un bilan des travaux réalisés par différents auteurs. En résumant les résultats de différentes études faites, nous avons pu déduire les points suivants:

- les flux albédo et terrestre ne sont pas pris en compte dans la majorité des travaux réalisés,
- le mouvement du satellite est considéré képlérien, avec une orbite circulaire,

La négligence de ces flux ainsi que les différentes perturbations orbitales constitue une défaillance des modèles développés jusque-là.

Partant de ce constat, nous avons développé un modèle plus réaliste tenant compte:

- des paramètres d'orientation de la terre,
- du mouvement perturbé du satellite,
- des flux albédo et terrestre.

Nous avons pu mettre en évidence l'importance de ces flux lors de l'étude du satellite KOMPSAT. Les résultats obtenus montrent l'influence de ces flux sur la variation du flux total reçu par les deux faces du satellite. En tenant compte de ces flux, la valeur maximale reçue par le panneau solaire est augmentée de 10%, ce qui peut être considéré comme une source d'erreur non négligeable dans les modèles disponibles dans la littérature, surtout que cette valeur est atteinte aux moments d'entrée et de sortie du satellite de l'ombre.

En tenant compte des perturbations orbitales, le module numérique que nous avons développé dans cette partie de l'étude est capable de prédire avec exactitude l'orientation des deux faces du panneau par rapport au soleil et la terre. Ce qui peut être considéré comme un atout pour le code de calcul que nous avons élaboré. L'analyse des résultats de l'étude effectuée sur les satellites, NAVSTAR, GOES et

KOMPSAT montrent que les variations périodiques des paramètres orbitaux durant une révolution n'influent pas sur le flux reçu par le panneau solaire. Par contre, les variations séculaires du plan orbital peuvent modifier ce dernier.

Pour la formulation thermique et mécanique nous nous sommes basés sur la méthode des éléments finis hiérarchiques. En ce qui concerne le problème thermique, l'utilisation de la théorie TLT en conjonction avec la méthode des éléments finis hiérarchiques nous a permis de développer une formulation originale d'un élément surfacique 2D à la place d'un élément volumique 3D traditionnellement utilisé dans l'analyse d'un problème thermique tridimensionnel. Nous avons développé un élément fini de type  $p$ , rectangulaire à quatre nœuds. Trois degrés de liberté par nœud sont utilisés pour représenter la variation quadratique de la température dans une couche du panneau. Les fonctions de forme utilisées sont composées des fonctions  $C^0$  de la MEF et d'un ensemble de fonctions hiérarchiques trigonométriques permettant d'enrichir le champ de température à l'intérieur et aux bords de l'élément. Une étude comparative a été effectuée dans les cas suivants ; régime stationnaire (plaque multicouche avec différentes conditions aux limites) et régime transitoire avec une forte non-linéarité due au rayonnement. Les résultats obtenus sont identiques aux résultats du logiciel ANSYS et de la littérature.

Concernant le problème mécanique, le panneau solaire est modélisé par une plaque sandwich en nids d'abeilles, discrétisé par un élément fini hiérarchique rectangulaire à quatre nœuds. Les fonctions de forme utilisées dans cette étude sont composées des fonctions hiérarchiques trigonométriques. Une étude comparative avec les différents travaux de la littérature nous a permis de mettre en évidence le formalisme développé. De manière générale nous pouvons dire que les éléments développés permettent de limiter l'augmentation du nombre de degrés de liberté total et donc celui du temps de calcul, sans oublier la convergence rapide de la solution.

De nombreuses simulations sont venues illustrer ces différents développements : on retiendra tout d'abord quelques cas simples de validations, permettant de vérifier indépendamment le bon fonctionnement des trois modules réalisés.

Mais, les principales simulations ont été concentrées sur deux cas de satellites. Le premier concerne un modèle de satellite avec un panneau, proposé par Johnston et Thornton, alors que le deuxième cas concerne le satellite KOMPSAT.

Dans l'analyse du premier cas, les résultats que nous avons obtenus concernant la phase de transition du satellite, montrent que le gradient thermique varie d'une façon exponentielle et atteint une valeur maximale en un temps très court. Ce changement brusque du gradient thermique induit une déformation quasi statique, s'effectuant avec de faibles oscillations du panneau solaire, ce qui peut être considéré comme une source de perturbation non négligeable pour le satellite. Nous avons montré à travers cette analyse que l'intégration des matériaux composites à la place de l'aluminium peut contribuer à l'amélioration du comportement thermo-élastique du panneau solaire (réduction des déformations du panneau solaire), notamment les FGM qui présentent certains avantages par rapport aux composites multicouches. On peut citer les problèmes de délaminage et de dégazage « outgassing » des matériaux composites à matrices polymères.

L'exemple le plus représentatif de cette étude est celui du satellite KOMPSAT (situé sur une orbite circulaire héliosynchrone à une altitude de 685 km et en mode de navigation optimal). Le panneau solaire d'une longueur de 2.67m et de largeur 1.35m est modélisé par une plaque sandwich en nids d'abeilles, encastrée d'un côté au satellite. Nous avons présenté une analyse thermo-élastique détaillée du panneau en faisant changer à chaque fois le matériau des deux peaux : aluminium, stratifié et FGM, en vue de voir leurs influences sur le comportement thermique et mécanique du panneau. Les résultats issus du module environnement thermique mettent en évidence les flux terrestre et albédo, surtout en phase d'éclipse (flux solaire nul) et au moment où le satellite est en pleine phase chaude (milieu de la phase ensoleillement). Les résultats de l'analyse thermique nous montrent que le gradient atteint sa valeur maximale en fin de phase ensoleillement et sa valeur minimale à la fin de la phase d'éclipse, avec un changement brusque durant les phases de transition. Nous avons remarqué que la distribution de la température est pratiquement indépendante du choix du matériau des deux peaux. Ceci s'explique par le fait que l'échange thermique dans le panneau solaire est fortement conditionné par le transfert de chaleur dans l'âme. Par contre, le comportement mécanique dépend du choix du matériau des deux peaux. On voit bien l'intérêt d'utiliser les matériaux composites au lieu de l'aluminium, du moment que les résultats trouvés montrent une nette diminution de la flèche durant une révolution du satellite.

Une des extensions les plus intéressantes que ce travail pourrait connaître concerne la prise en compte de l'effet de l'oxygène atomique dont les conséquences sont la dégradation des couches de protection, et qui peut affecter

directement l'équilibre thermique du panneau solaire. L'influence du frottement atmosphérique à basse altitude est aussi une question intéressante, sachant que ce frottement peut induire un flux thermique aérodynamique. Il serait important de prendre en compte les interactions avec l'environnement orbital.

Du point de vue plus applicatif de nombreux points peuvent encore être amélioré dans le modèle thermique, en effet, le rayonnement interne entre les surfaces de l'âme et les peaux peut être considéré.

En fin, une démarche possible serait de tenir compte :

- du couplage réversible thermomécanique,
- du comportement en fatigue dû aux contraintes thermiques,
- des forces de perturbation dans le modèle mécanique,
- des grands déplacements dans le modèle mécanique.

# Références bibliographiques

- Abd El-Salam and Sehna L (2004) "A second order analytical atmospheric drag theory based on the TD88 thermospheric density model", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **90**:361-389.
- Allegri G, Corradi S, Marchetti M and Scaglione S (2007) "Analysis of the effects of simulated synergistic LEO environment on solar panels", *Acta Astronautica*, **60**(3):175-185.
- Asker JR (1990) "Hubble beset by radiation effects, solar array vibrations, but controllers expect early resolution of both problems", *Aviation Week and Space Technology*, June 18, **26**.
- Bainum P, Hamsath N and Krishna R (1989) "The dynamics and control of large space structures after the onset of thermal shock", *Acta Astronautica*, **19**(1): 1-8.
- Bardell NS (1989) "The Application of Symbolic Computing to Hierarchical Finite Element Method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**:1181-1204.
- Bardell NS (1992a) "Free Vibration Analysis of a Flat Plate Using the Hierarchical Finite Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, **151**:263-289.
- Bardell NS (1992b) "The Free Vibration of Skew Plates Using the Hierarchical Finite Element Method", *Computers and Structures*, **45**(5):841-874.
- Bargmann H (1974) "Recent developments in the field of thermally induced waves and vibrations", *Nuclear Engineering and Design*, **27**(3):372-385.
- Bar-Sever Y and Kuang D (2004) "New empirically derived solar radiation pressure model for global positioning system satellites", *Jet propulsion Laboratory, Pasadena, California, Interplanetary Network Progress Report*, 42-159.
- Beletsky VV (1970) "An estimate of the character of the interaction between the airstream and a satellite", *Kosm. Issled.*, **8**:206.

- Bhangale RK and Ganesan N (2006) "Free vibration of simply supported functionally graded and layered magheto-electro-elastic plates by finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, **294**:1016-1038.
- Bird GA (1994) "Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows", *Clarendon, Oxford*.
- Boley BA (1956) "Thermally induced vibration of beams", *Journal of Aeronautical Sciences*, **32(2)**:179-181.
- Bowman BR and Moe K (2005) "Drag coefficient variability at 175-500 km from the orbit decay analysis of spheres", *American Astronautical Society Publications Office, Paper AAS 2005-257, San Diego*.
- Bowman BR, Marcos FA, Moe K and Moe MM (2007) "Determination of drag coefficient values for CHAMP and GRACE satellites using orbit drag analysis", *American Astronautical Society Publications Office, Paper AAS 2007-259, San Diego*.
- Capitaine N (1990) "The celestial pole coordinates", *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **48**:127-143.
- Capitaine N, Guinot B and McCarthy D (2000) "Definition of the celestial ephemeris origin and of UT1 in the international reference frame", *Astronomics and Astrophysics*, **355**:398-405.
- Capitaine N, Chapront J, Lambert S, and Wallace P (2003) "Expressions for the celestial intermediate pole and celestial ephemeris origin consistent with the IAU 2000A precession-nutation model", *Astron. Astrophys.*, **400**:1145-1154.
- Chambers BC, Jensen CL and Coyner JV (1981) "An accurate and efficient method for thermal/thermoelastic performance analysis of large space structures", *Proceedings of the AIAA 16<sup>th</sup> Thermophysics Conference, AIAA*, :1-7.
- Cho JR and Oden JT (2000) "Functionally graded material : a parametric study on thermal-stress characteristics using the crank-Nicolson-Galerkin scheme", *Comput. Meth appl. Mech. Eng*, **188**:17-38.
- Chung BTF and Naraghi MHN (1981) "Some exact solutions for radiation view factors from spheres", *Journal of AIAA*, **19**: 1077-1081.
- Cook GE (1965) "Satellite drag coefficients", *Planet space science*, **13**:929-946.
- Cook GE (1966a) "Drag coefficients of spherical satellites", *Annal de Géophysique.*, **22**:53-64.
- Cook GE (1966b) "Perturbations of near-circular orbits by the earth's gravitational potential", *Planet Space Science*, **14**:433-444.

- Donahue J and Frisch H (1969) "Thermoelastic instability of open section booms", *NASA*, TND-5310.
- Duffett-Smith P (1995) "Practical astronomy with your calculator", *University of Cambridge*.
- ESA (2000) "Space engineering: space environment", *ESA Publications Division*, ECSS-E-10-04.
- Fellippa CA, Park KC and Ferhat C (2001) "Partitioned analysis of coupled mechanical systems", *Computers Methods in Applied mechanics and Engineering*, **190**:3247-3270.
- Flatley TW (1975) "Nutationally destabilizing thermo-elastic effects on Explorer 45 (SSA-A)", *NASA/GSFC*, X-732-77-138.
- Fliegel H, Feess W, Layton W and Rhodus N (1985) "The GPS radiation force model", *In Proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System*, 113-119.
- Fliegel H and Gallini T (1989) "Radiation pressure models for block II GPS satellites", *In Proceedings of the Fifth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, 789-798.
- Fliegel H, Gallini T and Swift E (1992) "Global positioning system radiation force model for geodetic applications", *J. Geophysics Research*, **97**:559-568.
- Fortescu P and Stark J (1995) "Spacecraft systems engineering", *Wiley*.
- Foster CL, Tinker ML, Nurre GS and Till WA (1995) "The solar array-induced disturbance of the Hubble space telescope pointing system", *NASA*, TP-3556.
- Frisch H (1967) "Thermal bending plus twist of a thin-walled cylinder of open section with application to gravity gradient booms", *NASA*, TN D-4069.
- Frisch H (1970) "Coupled thermally-induced transverse plus torsional vibrations of a thin-walled cylinder of open section", *NASA*, TR R-333.
- Gaposchkin EM (1994) "Calculation of satellite drag coefficients", *NASA, Technical Report 998 ESC-TR-93-293*.
- Graham JD (1970) "Solar induced bending vibrations of a flexible member", *AIAA Journal*, **8**(11):2031-2036.
- Gu YX ; Chen B S ; Zhang H W and Grandhi RV (2002) " A sensitivity analysis method for linear and nonlinear transient heat conduction with precise time integration", *Structural and multidisciplinary optimization*, **24**(1) : 23-37.

- Guinot B (1979) "Basic problems in the kinematics of the rotation of the earth, in time and earth's rotation", *McCarthy D. and Pilkington D (eds), Reidel Publishing Company*, :7-18.
- Hamza-Cherif SM (2005) "Free vibration analysis of rotating flexible beams by using the fourier p-version of the finite element method", *International Journal of Computational Methods*, **2**(2):259-269.
- Hamza-Cherif SM (2006) "Free vibration analysis of rotating cantilever plates using the p-version of the finite element method", *Structural Engineering and Mechanics*, **22**(2):151-167.
- Hamza-Cherif SM, Houmat A and Hadjoui A (2007) "Transient heat conduction in functionally graded materials", *International Journal of Computational Methods*, **4**(4):603-619.
- Harrison IK and Swinerd GG (1995) "A free molecular aerodynamic investigation using multiple satellite analysis", *Planet Space Science*, **44**(2):178-180.
- Hedin AE (1983) "A revised thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data : MSIS-83", *J. Geophysic Research*, **88**:170-180.
- Hedin AE (1987) "MSIS-86 thermospheric model", *Journal of Geophysics Research*, **92**:4649-4662.
- Hedin AE (1991) "Extension of the MSIS thermospheric model into the middle and lower atmosphere", *J. Geophysic Research*, **96**:1159-1172.
- Hedin AE, Hinton BB and Schmitt GA (1973) "Role of gas-surface interactions", *Journal of Geophysics Research*, **78**:4651-4668.
- Heiskanen WA and Moritz H (1967) "Physical geodesy", *Freeman and company*.
- Houmat A (1997) "An Alternative Hierarchical Finite Element Method Formulation Applied to Plate Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, **206**(2):201-215.
- Houmat A (2001) "A Sector Fourier *p*-ELEMENT applied to free vibration analysis of sector plates", *Journal of Sound and Vibration*, **243**(2):269-282.
- Houmat A (2001) "A Sector Fourier *p*-Element for free vibration analysis of annular sectorial membranes", *Computers and Structures*, **79**:1147-1152.
- Hutton DV (2004) "Fundamentals of finite element analysis", *McGraw-Hill*.
- Imbro DR, Moe MM and Moe K (1975) "On fundamental problems in the deduction of atmospheric densities from satellite drag", *Journal of Geophysics Research*, **80**:3077-3086.
- Jianping P and Harik IE (1993) "Thermal stresses in spherical shells", *Journal of Aerospace Engineering*, **61**(1):106-110.

- Jiji LM (2006) "Heat convection", *Springer-Verlag*.
- Johnston JD and Thornton EA (1998) "Thermally-induced attitude dynamics of a spacecraft with a flexible appendage", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**(4):581-587.
- Johnston JD and Thornton EA (2000) "Thermally induced dynamics of satellite solar panels", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **37**(5):604-613.
- Jones JP (1966) "Thermoelastic vibrations of a beam", *Journal of the Acoustical Society of America*, **39**(3):500-506.
- Lambert S and Bizouard C (2002) "Positioning the terrestrial ephemeris origin in the internaional terrestrial frame", *Astronomics and Astrophysics*. **394**:317-321.
- Lambertson M, Underwood S, Woodruffs C and Garber A (1993) "Upper atmosphere research satellite attitude disturbances during shadow entry and exit", *AAS*, :93-319.
- Lebègue G (1991) "Conflit du Golfe : la leçon des satellites militaires", *Revue Aérospatiale*, Juin, n°79.
- Lee W-H and Han S-C (2006) "Free and forced vibration analysis of laminated composite plates and shells using a 9-node assumed shell strain element" *Computational Mechanics*, **39**: 41-58.
- Lewis RW, Nithiarasu P and Seetharamu KN (2004) "Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow", *John Wiley and Son*.
- Li W, Xiang Z, Chen L and Xue M (2007) "Thermally flutter analysis of large-scale space structures based on finite element method" *International Journal for numerical methods in Engineering*, 69(5):887-907.
- Lieske JH, Lederle T, Fricke W and Morando B (1977) "Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants", *Astronomics and Astrophysics*, **58**:1-16.
- Malla RB, Nash WA and Lardner TJ (1988) "Thermal effects on very large structures", *Journal of Aerospace Engineering*, **1**(3):171-189.
- Manolis GD and Beskos DE (1980) "Thermally induced vibrations of beams structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **21**(3):337-355.
- Marshall J, Antreasian P, Rosborough G and Putney B (1991) "Modeling radiation forces acting on satellites for precision orbit determination", *Advance in Astronautic Sciences*, **76**:73-96.

- Marshall J and Luthcke S (1994a) "Modeling radiation forces on TOPEX/Poseidon for precision orbit determination", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **31**(1):99-105.
- Marshall J and Luthcke S (1994b) "Radiation forces model performance for TOPEX/Poseidon precision orbit determination", *Journal of Astronautical Sciences*, **42**(2) : 229-246.
- Mathews PM, Herring TA and Buffet BA (2002) "Modeling of nutation-precession : New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the earth's interior", *Journal of Geophysics and Research*, **107**(B4):1029-1039.
- McCarthy D and Petit G (2003) "International earth rotation service. IERS conventions (2003) ", *IERS Technical Note N° 32*.
- McInnes CR (1999) "Solar sailing : technology, dynamics and mission applications", *Praxis Publishing*, **115**:38-39.
- Miracle DB and Donaldson SL (2001) "Composites", *ASM International*.
- Moe K (2004) "Satellite drag coefficients at 150 to 500 km", *14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference*, 8 Paper AAS 04-178, Maui Hawaii, USA.
- Moe K, Moe MM, Wallace SD (1997) "Drag coefficients of spheres in free-molecular flow", in *Spaceflight Mechanics 1996, Advances in the Astronautical Sciences Series, Univelt Inc., USA*, **93**(I):391-406.
- Moe K and Moe MM (2005) "Gas-surface interactions and satellite drag coefficients", *Plan. Space Sci.*, **53**:793-801.
- Moe K and Bowman BR (2005) "The effects of surface composition and treatment on drag coefficients of spherical satellites", *American Astronautical Society Publications Office, San Diego*, Paper AAS 2005-258.
- Moler CB, Van Loan CF (1978) "Nineteen Dubious ways to compute the exponential of a matrix", *SIAM Review*, **20**:801-836.
- Moore P (1979) "Perturbations of a spheroidal satellite due to direct solar radiation pressure", *Celestial Mechanics*, **20**:125-142.
- Montenbruck O (1989) "Practical ephemeris calculations", *Springer-Verlag*.
- Montenbruck O and Gill E (2000) "satellite orbits", *Springer-verlag*.
- Montenbruck O and Gill E (2001) "Satellite orbits : Models, methods, and applications", *Springer-verlag*.
- Musen P, Bryant R and Bailie A (1960) "Perturbations in perigee height of vanguard I", *Science*, **131**:935-936.

- Namburu RR and Tamma KK (1991) "Thermally induced structural dynamics response of flexural configurations influenced by linear/nonlinear thermal effects", *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS 32<sup>nd</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA*, :2667-2679.
- Nerem RS, Chao BF, Au AY, Chan JC, Klosko SM, Pavlis NK and Williamson RG (1993) "time variations of the earth's gravitational field from satellite laser ranging to LAGEOS", *Geophys. Res. Lett.*, **20**(7):595-598.
- Nerem RS, Lerch FJ, Marshall JA, Pavlis EC, Putney BH, Tapley BD, Eanes RJ, Ries JC, Schutz BE, Shum CK, Watkins MM, Klosko SM, Chan JC, Luthcker SB, Patel GB, Pavlis NK, Williamson RG, Rapp RH, Biancale R and Nouel F (1994) "Gravity model development for Topex/Poseidon ; joint gravity model 1 and 2", *Journal of Geophysics Research*, **99**:24421-24447.
- Noack J, Rolfes R and Tessler J (2003) "New layerwise theories and finite elements for efficient thermal analysis of hybrid structures", *Computers and Structures*, **81**:2525-2538.
- Nowinski JL (1978) "Theory of thermoelasticity with application", *Sijthoff and Noordhoff*.
- Özsisik MN (1993) "Heat conduction", *Wiley*.
- Pardini C, Anselmo L, Moe MM and Moe K (2008) "Drag and energy accommodation coefficients during sunspot maximum", *Presented at COSPAR*.
- Parkinson R, Jones H and Shapiro I (1960) "Effects of solar radiation pressure on earth satellite orbits", *Science*, **131**:920-921.
- Petit G (2000) "Report of the BIPM/IAU joint committee on relativity for space-time reference systems and metrology". *In proc. Of IAU colloquium 180, Johnston K. McCarthy D. Luzum B. and Kaplan H. (eds), U.S. Naval observatory, Washington*, :275-282.
- Polidam RS (1991) "Hubble space telescope overview", *29<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, AIAA*, Paper 91-0402.
- Kaula WM (1966) "Theory of satellite geodesy", *Blaisdell Waltham Mass.*
- Kim kH, Moon YJ, Cho KS, Kim HD and Park JY (2006) "Atmospheric drag effects on the KOMPSAT-1 satellite during geomagnetic superstorms", *Earth Planets Space*, **58**:e25-e28.
- King-Hele D (1964) "Theory of satellite orbits in an atmosphere". *Butterworth*.
- King-Hele D (1987) "Satellite orbits in an atmosphere : theory and applications", *Blackie and Son*.

- Koppenwallner G (2008) "Comment on special section : New perspectives on the satellite drag environments of earth, mars and venus", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **45**(6):1324-1327.
- Koskela PE (1962) "Orbital effects of solar radiation pressure on an earth satellite", *Journal of the Astronautical Sciences*, IX(3):71-82.
- Kozai Y (1961) "Effects of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report*, **56**:25-33.
- Kubo-Oka T (1999) "Long term effect of solar radiation on the orbit of an octagonal satellite orbiting around the moon", *Adv. Space Research*, **23**(4):727-731.
- Reddy JN and Chin CD (1998) "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *Journal of Thermal Stresses*, **21**:593-626.
- Reiter GS and Moe K (1969) "Surface-particule-interaction measurements using paddlewheel satellites", *Rarefied Gas Dynamic Proceedings*.
- Richardson DL, Schmidt D and Mitchell J (1998) "Improved Chebyshev Methods for the numerical integration of first order differential integration", *AAS 98-208, 1998 Space flight Mechanics Meeting. Monterrey, CA, Advances in the Astronautical Sciences*, **99**(II):1533-1543.
- Rolfes R and Teßmer J (2001) "2D finite element formulation for 3D temperature analysis of layered hybrid structures", *NAFEMS Seminar : Numerical simulation of Heat Transfer, Germany*.
- Saltsburg H, Smith JN, Rogers M (Eds.) (1967) "Fundamentals of Gas-Surface interactions", *Academic Press*, 346-391, 406-414, and 448-521.
- Savoia M and Reddy JN (1995) "Three dimensional thermal analysis of laminated composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, **32**(5):593-608.
- Sawyer K (1990) "Hubble space telescope flutter will require solar-panel fix", *The Washington Post*, Nov., 11:A6.
- Schamberg R (1959a) "A new analytic representation of surface interaction for hyperthermal free molecule flow", *Rand Corp.*, RM-2313, *Santa Monica*.
- Schamberg R (1959b) "Analytic representation of surface interaction for free molecular flow with application to drag of various bodies", *In Aerodynamics of the Upper Atmosphere, Rand Corp.*, R-339, 12:1-41, *Santa Monica*.
- Schäfer M (2006) "Computational engineering-introduction to numerical methods", *Springer-Verlag*.
- Seidelman PK (1982) "1980 IAU nutation : the final report of the IAU working group on nutation", *Journal of Celestial Mechanics*, **27**:79-106.

- Sentman LH (1961a) "Free molecule flow theory and its application to the determination of aerodynamic forces", *Lockheed Missile and Space Company*, LMSC-448514, Sunnyvale, CA.
- Sentman LH (1961b) "Comparison of the exact and approximate methods for predicting free-molecular aerodynamic coefficients", *J. Amer. Rocket Soc.*, **31**:1576-1579.
- Shen HS and Li SR (2008) "Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties", *Composites : part B*, **39**:332-344.
- Shiau LC and Kuo SY (2006) "Free vibration of thermally buckled composite sandwich plates", *Journal of Vibration and Acoustics, ASME*, **128**(1) :1-7.
- Shin K-B, Kim C-G, Hong C-S and Lee H-H (2001) "Thermal distortion analysis of orbiting solar array including degradation effects of composite materials", *Composite: part B*, **32**:271-285.
- Silverman EM (1995) "Space environmental effects on spacecraft : LEO materials selection guide", *NASA, Contractor Report* 4661.
- Song O and Yoon I (2003) "Thermally induced bending vibration of composite spacecraft booms subjected to solar heating", *Journal of Thermal Stresses*, **26**:829-843.
- Souchay J, Loysel B, Kinoshita H and Folgueira M (1999) "Corrections and new developments in rigid earth nutation theory : III. Final tables REN-2000 including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects", *Astronomics and Astrophysics*, **135**:111-131.
- Sterne TE (1960) "An introduction to celestial mechanics", *Inter-Science Publishers*.
- Stroud RC and Mayers J (1971) "Dynamic response of rapidly heated plate elements", *AIAA Journal*, **9**(1):76-83.
- Tannehill JC, Anderson DA and Pletcher RH (1997) "Computational fluid dynamics and heat transfer", *Taylor and Francis*.
- Tapley BD, Watkins MM, Ries JC, Davis GW, Eanes RJ, Poole S, Rim HJ, Schutz BE, Shum CK, Nerem RS, Lerch FJ, Pavlis EC, Klosko SM, Pavlis NK and Williamson RG (1996) "The JGM-3 gravity model", *J. Geophys resaerch*, **101**(B12):28029-28049.
- Tapley BD, Schutz BE and Born GH (2004) "Statistical orbit determination", *Elsevier*.
- Tapley BD, Schutz BE, Ries JC and Shum CK (1990) "Precision orbit determination for TOPEX", *Adv. Space Research*, **10**:239-247.

- Thorton E (1996) "Thermal structures for aerospace applications", *AIAA Education Series, AIAA INC.*
- Vallado A and McClain D (1997) "Fundamentals of astrodynamics and applications", *McGraw-Hill.*
- Wakashima K and Tsukamoto H (1991) "Mean-field micromechanics model and its application to the analysis of thermomechanical behavior of composite material", *Material Science and Engineering, Serie A*, **146**:291-316.
- Wakashima K and Tsukamoto HA (1992) "Unified micromechanical approach toward thermechanical tailoring of metal matrix composites", *Int. journal of Iron and steel Institute of Japan*, **32**(8):883-892.
- Williamson RG (1996) "The JGM-3 Gravity model", *Journal of Geophysics Research*, **101**(B12):28029-28049.
- Wright RL (1981) "Evolution and design characteristics of micro wave radiometer spacecraft", *NASA, Refernce Publications* N° 1079:51-65.
- Xia XK and Shen HS (2008) "Vibration of post-buckled sandwich plates with FGM face sheets in a thermal environment", *Journal of Sound and Vibration*, **314**:254-274.
- Xu G (2008) "Orbits", *Springer-Verlag.*
- Xue M-D, Duan J and Xiang Z-H (2007) "Thermally-induced bending-torsion coupling vibration of large scale space structures" *Computational Mechanics*, **40**(4):707-723.
- Yang WH, Cheng HE and Cai A (2004) "Thermal analysis for forlded solar array of spacecraft in orbit", *Applied Thermal Engineering*, **24**:595-607.
- Zebehely V (1967) "Theory of orbits", *Academic Press.*
- Zhong WX and Williams FW (1994) "A precise time step integration method" *J. Mech. Eng. Sci*, **208**: 427-430.
- Ziebart M and Darc P (2001) "Analytical solar radiation pressure modelling for GLONASS using a pixel array", *Journal of Geodesy*, **75**:587-599.
- Ziebart M (2004) "Generalized analytical solar radiation pressure modeling algorithm for spacecraft of complex shape", *Journal of spacecraft and rockets*, **41**(5) :840-849.
- Zienkiewicz OC and Taylor RL (2005) "The finite elemnt method for solid and structural mechanics", *Elsevier.*
- Zimbelman DF, Dennehy CJ, Welch RV and Born GH (1991) "A technique for optimal temperature estimation for modeling sunrise/sunset thermal snap disturbance", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **28**(4):448-456.

Zuppari G (2005) "DSMC implementation of the schamberg model : comparison with the maxwell model, rarefied gas dynamics", *American Institute of Physics*, CP762, Melville, :632-637.

## **Références Internet**

IERS	<a href="http://www.iers.org">www.iers.org</a>
NASA	<a href="http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery">www.nasa.gov/multimedia/imagegallery</a>
ITRF2000	<a href="http://lareg.ensg.ign.fr/ITRF/ITRF2000">lareg.ensg.ign.fr/ITRF/ITRF2000</a>
ESA	<a href="http://www.esa.int/esaCP/index.html">www.esa.int/esaCP/index.html</a>
ABAQUS	<a href="http://www.simulia.com/products/abaqus_fea.html">www.simulia.com/products/abaqus_fea.html</a>
MSC/NASTRAN /PATRAN	<a href="http://www.mscsoftware.com">www.mscsoftware.com</a>
ANSYS	<a href="http://www.ansys.com">www.ansys.com</a>
GSFC	<a href="http://www.nasa.gov/goddard">www.nasa.gov/goddard</a>
CNES	<a href="http://www.cnes.fr/">www.cnes.fr/</a>
ONERA	<a href="http://www.onera.fr/">www.onera.fr/</a>
GRGS	<a href="http://grgs.obs-mip.fr">grgs.obs-mip.fr</a>
NORAD	<a href="http://celestrak.com/NORAD/elements/">celestrak.com/NORAD/elements/</a>

# Annexe A

## Annexes relatives au chapitre II

### A-1 Coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ du CIP et déplacement $s(t)$ du CEO

Les différents coefficients polynomiaux  $x_i, y_i, s_i$  ainsi que les coefficients  $a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}, d_{kj}, e_{kj}, f_{kj}$  et  $N_{jm}$  sont donnés par les tableaux A.1-4 (Capitaine et al., 2003).

**Tableau A.1** : Coefficients polynomiaux.

	$t^0$	$t^1$	$t^2$	$t^3$	$t^4$	$t^5$
$X(t)$	-16616.99	2004191742.88	-427219.05	-198620.54	-46.05	5.98
$Y(t)$	-6950.78	-25381.99	-22407250.99	1842.28	-1113.06	0.99
$s + XY/2$	94.0	3808.35	-119.94	72574.09	27.70	15.61
$L_0$	218°31617	481267°88088	-1°3972			
$l$	134°96340251	171791592.2178	31.8792	0.051635	-0.00024470	
$l'$	357°52910918	129596581.0481	-0.5532	0.000136	-0.00001149	
$F$	93°27209062	1739527262.8478	-12.7512	-0.001037	0.00000417	
$D$	297°85019547	1602961601.2090	-6.3706	0.006593	-0.00003169	
$\Omega$	125°96340251	-6962890.5431	7.4722	0.007702	-0.00005939	
$l_{Me}$	4.402608842	2608.7903141574				
$l_{Ve}$	3.176146697	1021.3285546211				
$l_E$	1.753470314	628.3075849991				
$l_{Ma}$	6.203480913	334.0612426700				
$l_{ju}$	0.599546497	52.9690962641				
$l_{Sa}$	0.874016757	21.3299104969				
$l_{Ur}$	5.481293872	7.4781598567				
$l_{Ne}$	5.311886287	3.8133035638				
$p_a$	0.024381750	0.00000538691				

Tableau A.2 : Les 20 premiers termes du développement de  $(t)$  en  $\mu\text{as}$ .

$a_{0j}$	$b_{0j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
-6844318.44	1328.67	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-523908.04	-544.76	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-90552.22	111.23	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82168.76	-27.64	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58707.02	470.05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28288.28	-34.69	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-20557.78	-20.84	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15406.85	15.12	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11991.74	32.46	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8584.95	4.42	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6245.02	-6.68	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5095.50	7.19	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4910.93	0.76	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2521.07	-5.97	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2511.85	1.07	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2372.58	5.93	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2307.58	-7.52	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2053.16	5.13	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1898.27	-0.72	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a_{1j}$	$b_{1j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
-3328.48	205833.15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
197.53	12814.01	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41.19	2187.91	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-35.85	-2004.36	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59.15	501.82	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-5.82	448.76	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-179.56	164.33	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.67	288.49	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23.85	-214.50	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.87	-154.91	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.14	-119.21	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.17	-74.33	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.47	70.31	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.42	58.94	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.95	57.12	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.08	-54.19	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.92	36.78	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.68	-31.01	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.74	29.60	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.60	-27.59	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Suite du tableau A.2.

$a_{2j}$	$b_{2j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
2038.00	82.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
155.75	-2.70	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26.92	-0.45	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24.43	0.46	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-17.36	-0.50	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8.41	0.01	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.08	-1.36	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.59	0.17	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.57	-0.06	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.54	0.60	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.86	0.00	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.52	-0.07	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.46	0.04	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.75	-0.02	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.75	0.00	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.71	-0.01	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.69	0.02	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.61	0.02	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.54	-0.04	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.56	0.00	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a_{3j}$	$b_{3j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
1.76	-20.39	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1.27	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.22	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	0.20	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Tableau A.3 :** les 20 premiers termes du développement de  $(\mathbf{t})$  en  $\mu\text{as}$ .

$c_{0j}$	$d_{0j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
1538.18	9205236.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-458.66	573033.42	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
137.41	97846.69	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-29.05	-89618.24	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-17.40	22438.42	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31.80	20069.50	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36.70	12902.66	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-13.20	-9592.72	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-192.40	7387.02	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.92	-6918.22	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40	-5331.13	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.90	-3323.89	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.50	3143.98	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.80	2636.13	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6.60	2554.51	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.00	-2423.59	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.80	1645.01	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1387.00	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.90	1323.81	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.30	-1233.89	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$c_{1j}$	$d_{1j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
153041.82	878.89	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11714.49	-289.32	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2024.68	-50.99	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1837.33	47.75	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1312.21	-28.91	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-632.54	0.78	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
459.68	-67.23	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
344.50	1.46	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
258.14	-7.03	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
192.06	29.80	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
139.64	0.15	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-113.94	-1.06	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
109.81	3.18	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-56.37	0.13	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-56.17	-0.02	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-53.05	-1.23	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-51.60	0.17	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45.91	-0.11	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-42.45	0.02	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40.82	-1.03	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Suite du tableau A.3.

$c_{2j}$	$d_{2j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
121.15	-2301.27	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.98	-143.27	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	-24.46	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	22.41	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.19	-5.61	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.57	-1.83	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	-5.02	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.04	-3.23	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.48	2.40	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.10	1.73	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	1.33	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.04	0.83	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.05	-0.79	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.03	-0.66	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.64	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.04	0.61	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.41	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	0.35	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.33	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.31	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$c_{3j}$	$d_{3j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
-15.23	-1.62	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.16	-0.01	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.20	0.00	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.18	0.00	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.13	0.00	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau A.4 : les 20 premiers termes du développement de  $+XY/2$  en  $\mu as$ .

$e_{0j}$	$f_{0j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
-2640.73	0.39	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-63.53	0.02	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11.75	-0.01	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11.21	-0.01	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.57	0.00	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.02	0.00	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.98	0.00	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.72	0.00	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.41	0.01	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.26	0.01	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.63	0.00	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.63	0.00	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.46	0.00	0	1	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.45	0.00	0	1	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.36	0.00	0	0	4	-4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	0.12	0	0	1	-1	1	0	-8	12	0	0	0	0	0	0
-0.32	0.00	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.28	0.00	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	0.00	1	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.26	0.00	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{1j}$	$f_{1j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
-0.07	3.57	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.71	-0.03	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	0.48	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Suite du tableau A.4.

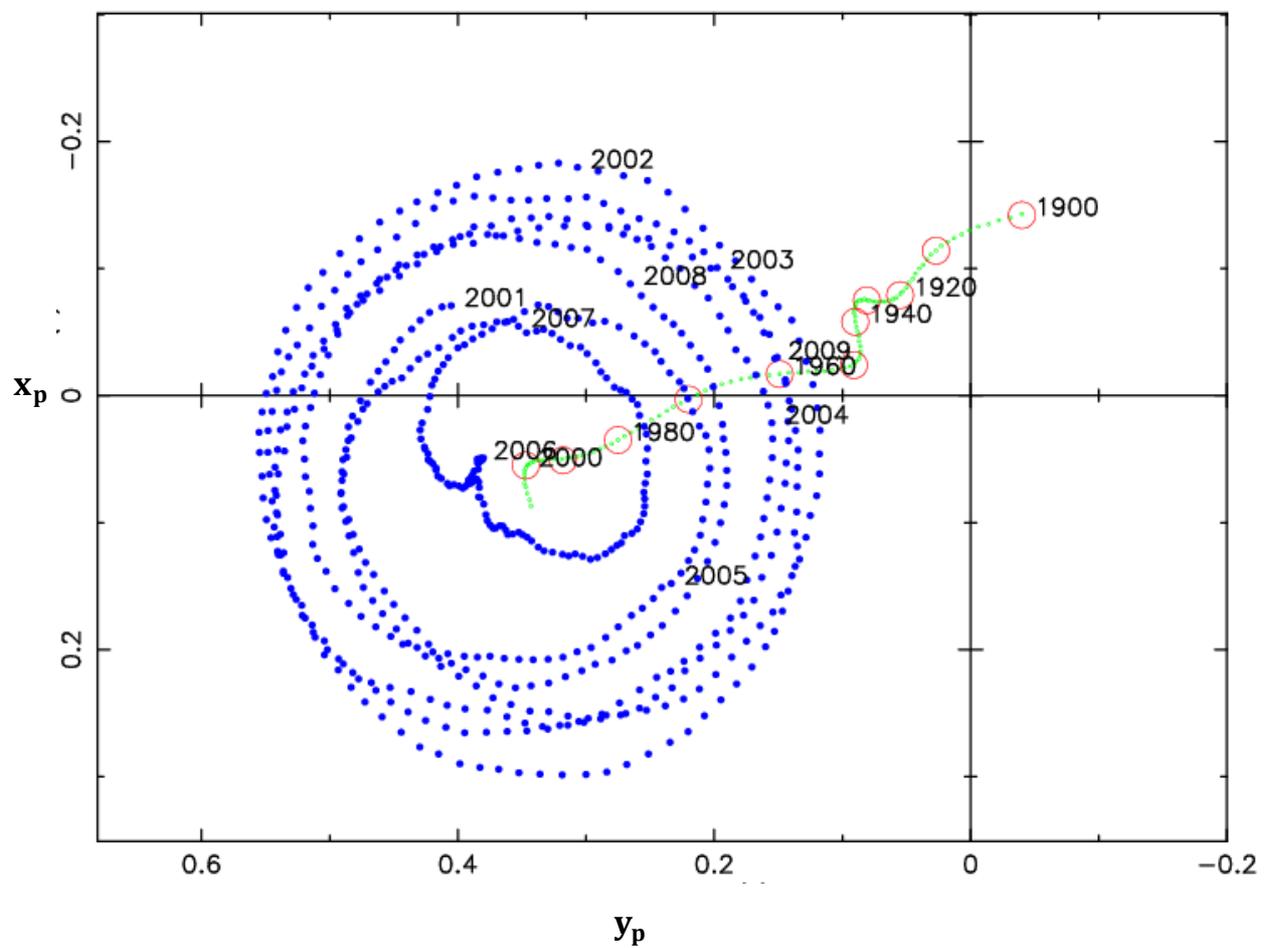
$e_{2j}$	$f_{2j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
743.53	-0.17	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56.91	0.06	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9.84	-0.01	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8.85	0.01	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6.38	-0.05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3.07	0.00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.23	0.00	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.67	0.00	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.30	0.00	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.93	0.00	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.68	0.00	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.55	0.00	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.53	0.00	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	0.00	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	0.00	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.26	0.00	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.25	0.00	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.22	0.00	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.21	0.00	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.20	0.00	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$e_{3j}$	$f_{3j}$	$N_{j1}$	$N_{j2}$	$N_{j3}$	$N_{j4}$	$N_{j5}$	$N_{j6}$	$N_{j7}$	$N_{j8}$	$N_{j9}$	$N_{j10}$	$N_{j11}$	$N_{j12}$	$N_{j13}$	$N_{j14}$
0.30	-23.51	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.03	-1.39	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.24	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	0.22	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## A-2 Coordonnées $x_p$ et $y_p$ du CIP dans le repère terrestre

Les coordonnées  $x_p$  et  $y_p$  du CIP dans le repère terrestre depuis 1900 jusqu'à 2009 sont données par la figure A.1, selon l'IERS.



**Figure A.1** : Mouvement du pôle dans le repère terrestre (IERS).

### A-3 Passage du repère RFS au repère RTN

Le passage d'un système de coordonnées cartésien à un autre système cartésien s'effectue à travers trois rotations successives.

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

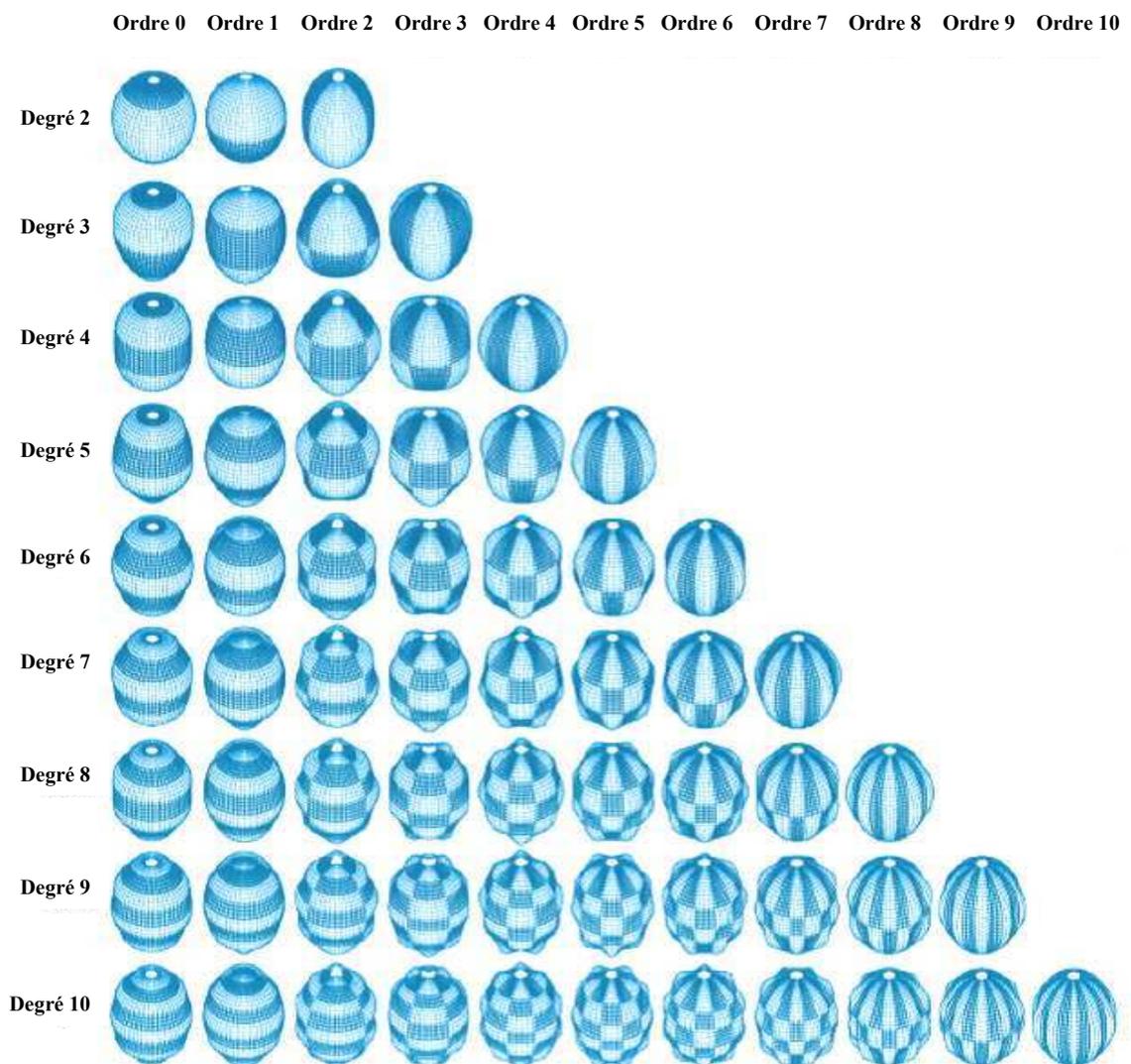
### A-4 Harmoniques sphériques et potentiel gravitationnel terrestre

Les polynômes de Legendre associés de degré  $n=3$  et d'ordre  $m=3$  sont donnés par le tableau A.5

**Tableau A.5 :** Fonctions de Legendre  $P_{nm}(\sin(\varphi))$  de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .

Degré	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 0$	1			
$n = 1$	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$		
$n = 2$	$\frac{3 \sin^2(\varphi) - 1}{2}$	$3 \sin(\varphi) \cos(\varphi)$	$3 \cos^2(\varphi)$	
$n = 3$	$\frac{5 \sin^3(\varphi) - 3 \sin(\varphi)}{2}$	$\cos(\varphi) \frac{15 \sin^2(\varphi) - 3}{2}$	$15 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi)$	$15 \cos^3(\varphi)$

Le potentiel gravitationnel terrestre  $U$  est modélisé grâce aux harmoniques sphériques (voir figure A.2) par l'expression (2.45) (Lambeck 1988).



**Figure A.2 :** Fonctions harmoniques sphériques (GRGS).

Le tableau A-6 suivant donne les coefficients de Stokes normalisés selon le modèle JGM-3 (Tapley et al. 1996), pour  $n = m = 20$ .

**Tableau A.6 :** Modèle gravitationnel JGM-3 (20x20).

$n$	$m$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
2	0	-.48416538D-03	.00000000D+00
2	1	-.18698764D-09	.11952801D-08
2	2	.24392607D-05	-.14002664D-05
3	0	.95717059D-06	.00000000D+00
3	1	.20301372D-05	.24813080D-06
3	2	.90470634D-06	-.61892285D-06
3	3	.72114494D-06	.14142040D-05
4	0	.53977707D-06	.00000000D+00
4	1	-.53624355D-06	-.47377237D-06
4	2	.35067016D-06	.66257135D-06
4	3	.99086891D-06	-.20098735D-06
4	4	-.18848137D-06	.30884804D-06
5	0	.68658988D-07	.00000000D+00
5	1	-.62727370D-07	-.94194632D-07
5	2	.65245910D-06	-.32333435D-06
5	3	-.45183705D-06	-.21495419D-06
5	4	-.29512339D-06	.49741427D-07
5	5	.17483158D-06	-.66939294D-06
6	0	-.14967156D-06	.00000000D+00
6	1	-.76103580D-07	.26899819D-07
6	2	.48327472D-07	-.37381592D-06
6	3	.57020966D-07	.88894738D-08
6	4	-.86228033D-07	-.47140511D-06
6	5	-.26711227D-06	-.53641016D-06
6	6	.95016518D-08	-.23726148D-06
7	0	.90722942D-07	.00000000D+00
7	1	.28028652D-06	.94777318D-07
7	2	.32976023D-06	.93193697D-07
7	3	.25050153D-06	-.21732011D-06
7	4	-.27554096D-06	-.12414151D-06
7	5	.16440038D-08	.18075335D-07
7	6	-.35884263D-06	.15177808D-06
7	7	.13795171D-08	.24128594D-07
8	0	.49118003D-07	.00000000D+00
8	1	.23333752D-07	.58499275D-07
8	2	.80070664D-07	.65518559D-07
8	3	-.19251764D-07	-.86285837D-07
8	4	-.24435806D-06	.69857075D-07
8	5	-.25498410D-07	.89090297D-07
8	6	-.65859354D-07	.30892064D-06
8	7	.67262702D-07	.74813197D-07
8	8	-.12397061D-06	.12044101D-06
9	0	.27385061D-07	.00000000D+00
9	1	.14223026D-06	.21909618D-07
9	2	.22620642D-07	-.32174985D-07
9	3	-.16106428D-06	-.74545464D-07
9	4	-.82017367D-08	.20068093D-07
9	5	-.16325062D-07	-.54271473D-07

Suite Tableau A.6

$n$	$m$	$\overline{C}_{nm}$	$\overline{S}_{nm}$
9	6	.62833187D-07	.22267731D-06
9	7	-.11815885D-06	-.96899386D-07
9	8	.18798427D-06	-.30154441D-08
9	9	-.47724822D-07	.96585578D-07
10	0	.54130446D-07	.00000000D+00
10	1	.83758832D-07	-.13155407D-06
10	2	-.93557926D-07	-.51415891D-07
10	3	-.71967367D-08	-.15417988D-06
10	4	-.84335352D-07	-.78485346D-07
10	5	-.49519741D-07	-.50292694D-07
10	6	-.37418834D-07	-.79464218D-07
10	7	.82084063D-08	-.31491358D-08
10	8	.40467842D-07	-.91916683D-07
10	9	.12540250D-06	-.37736478D-07
10	10	.10038233D-06	-.23809404D-07
11	0	-.50161315D-07	.00000000D+00
11	1	.16107078D-07	-.27892153D-07
11	2	.18429795D-07	-.98452117D-07
11	3	-.30560698D-07	-.14880309D-06
11	4	-.40024108D-07	-.63596530D-07
11	5	.37435875D-07	.49828632D-07
11	6	-.14607814D-08	.34173161D-07
11	7	.47061825D-08	-.89777235D-07
11	8	-.61406031D-08	.24572255D-07
11	9	-.31455516D-07	.42040714D-07
11	10	-.52129309D-07	-.18302278D-07
11	11	.46226946D-07	-.69592514D-07
12	0	.36382341D-07	.00000000D+00
12	1	-.54191701D-07	-.42011776D-07
12	2	.13985738D-07	.31047770D-07
12	3	.38978521D-07	.24576581D-07
12	4	-.68419698D-07	.29543256D-08
12	5	.31107076D-07	.76387883D-08
12	6	.33244195D-08	.39368833D-07
12	7	-.18603107D-07	.35570829D-07
12	8	-.25702477D-07	.16666794D-07
12	9	.41793078D-07	.25324580D-07
12	10	-.61693847D-08	.30986263D-07
12	11	.11320827D-07	-.63442255D-08
12	12	-.23492752D-08	-.10959427D-07
13	0	.39946429D-07	.00000000D+00
13	1	-.52966868D-07	.39876816D-07
13	2	.56039125D-07	-.62699341D-07
13	3	-.21817132D-07	.98208999D-07
13	4	-.14709372D-08	-.12613849D-07
13	5	.58253125D-07	.65845649D-07
13	6	-.35311989D-07	-.60583315D-08
13	7	.27063649D-08	-.77110579D-08
13	8	-.98871788D-08	-.97289372D-08
13	9	.24753630D-07	.45359258D-07
13	10	.40892147D-07	-.37098943D-07
13	11	-.44739075D-07	-.48328921D-08

Suite Tableau A.6

$n$	$m$	$\overline{C}_{nm}$	$\overline{S}_{nm}$
13	12	-.31410021D-07	.88106349D-07
13	13	-.61211341D-07	.68408786D-07
14	0	-.21803862D-07	.00000000D+00
14	1	-.19023752D-07	.27471826D-07
14	2	-.36978966D-07	-.29891075D-08
14	3	.36809436D-07	.20313404D-07
14	4	.17120660D-08	-.20688044D-07
14	5	.29899462D-07	-.16857911D-07
14	6	-.19400982D-07	.24129594D-08
14	7	.36851133D-07	-.42223646D-08
14	8	-.34866853D-07	-.14888415D-07
14	9	.32376639D-07	.28698213D-07
14	10	.38838489D-07	-.14646503D-08
14	11	.15356539D-07	-.39038503D-07
14	12	.85046646D-08	-.30921728D-07
14	13	.32166747D-07	.45200081D-07
14	14	-.51783436D-07	-.50135706D-08
15	0	.31659511D-08	.00000000D+00
15	1	.12019048D-07	.81732671D-08
15	2	-.21746273D-07	-.31733040D-07
15	3	.52403065D-07	.15159862D-07
15	4	-.42162691D-07	.78270997D-08
15	5	.13450896D-07	.89823350D-08
15	6	.33463386D-07	-.37752532D-07
15	7	.59912701D-07	.60561923D-08
15	8	-.31989552D-07	.22270914D-07
15	9	.13026722D-07	.37876414D-07
15	10	.10311331D-07	.14956329D-07
15	11	-.95174492D-09	.18716337D-07
15	12	-.32728992D-07	.15719777D-07
15	13	-.28288961D-07	-.42943959D-08
15	14	.53044811D-08	-.24442485D-07
15	15	-.19227533D-07	-.47043718D-08
16	0	-.54302321D-08	.00000000D+00
16	1	.27533499D-07	.33708199D-07
16	2	-.22395294D-07	.26206613D-07
16	3	-.35100789D-07	-.23241520D-07
16	4	.41218977D-07	.46056697D-07
16	5	-.13495264D-07	-.16788507D-08
16	6	.14321055D-07	-.34445359D-07
16	7	-.78129662D-08	-.85101433D-08
16	8	-.21537842D-07	.52475750D-08
16	9	-.22776715D-07	-.38923887D-07
16	10	-.12128710D-07	.12064636D-07
16	11	.19265835D-07	-.29747575D-08
16	12	.19697743D-07	.69145093D-08
16	13	.13837330D-07	.99393105D-09
16	14	-.19125929D-07	-.38860161D-07
16	15	-.14460511D-07	-.32699103D-07
16	16	-.37529425D-07	.35911038D-08

Suite Tableau A.6

$n$	$m$	$\overline{C}_{nm}$	$\overline{S}_{nm}$
17	0	.18108375D-07	.00000000D+00
17	1	-.26388862D-07	-.29852856D-07
17	2	-.17378597D-07	.91967493D-08
17	3	.74225615D-08	.81946524D-08
17	4	.75202561D-08	.23381995D-07
17	5	-.17058053D-07	.53532066D-08
17	6	-.13466610D-07	-.28274837D-07
17	7	.24011120D-07	-.58835544D-08
17	8	.37624562D-07	.37609560D-08
17	9	.32904900D-08	-.28585766D-07
17	10	-.43040778D-08	.18038444D-07
17	11	-.15725519D-07	.11020868D-07
17	12	.28689129D-07	.20744070D-07
17	13	.16603067D-07	.20304809D-07
17	14	-.14060794D-07	.11375705D-07
17	15	.53318558D-08	.53871007D-08
17	16	-.30061017D-07	.37240886D-08
17	17	-.34064109D-07	-.19733215D-07
18	0	.72691846D-08	.00000000D+00
18	1	.42100167D-08	-.39075893D-07
18	2	.12828249D-07	.13586360D-07
18	3	-.37596676D-08	-.31090563D-08
18	4	.53092291D-07	.14596999D-08
18	5	.73144220D-08	.24650351D-07
18	6	.13377840D-07	-.15660996D-07
18	7	.65285877D-08	.62802630D-08
18	8	.31066116D-07	.24701341D-08
18	9	-.19183124D-07	.36144387D-07
18	10	.55661560D-08	-.45953868D-08
18	11	-.76424754D-08	.21171514D-08
18	12	-.29603020D-07	-.16192465D-07
18	13	-.63799330D-08	-.34979730D-07
18	14	-.80028322D-08	-.13078375D-07
18	15	-.40535567D-07	-.20249427D-07
18	16	.10670914D-07	.69654369D-08
18	17	.36003192D-08	.45103761D-08
18	18	.26206061D-08	-.10810058D-07
19	0	-.35185503D-08	.00000000D+00
19	1	-.69675014D-08	.15804851D-09
19	2	.31435052D-07	-.43295480D-08
19	3	-.98999933D-08	-.98821208D-09
19	4	.15826787D-07	-.56619377D-08
19	5	.12058224D-07	.27204444D-07
19	6	-.23850062D-08	.17951660D-07
19	7	.73677859D-08	-.86648482D-08
19	8	.31052189D-07	-.10462609D-07
19	9	.30304662D-08	.64515567D-08
19	10	-.33377490D-07	-.70901793D-08

Suite Tableau A.6

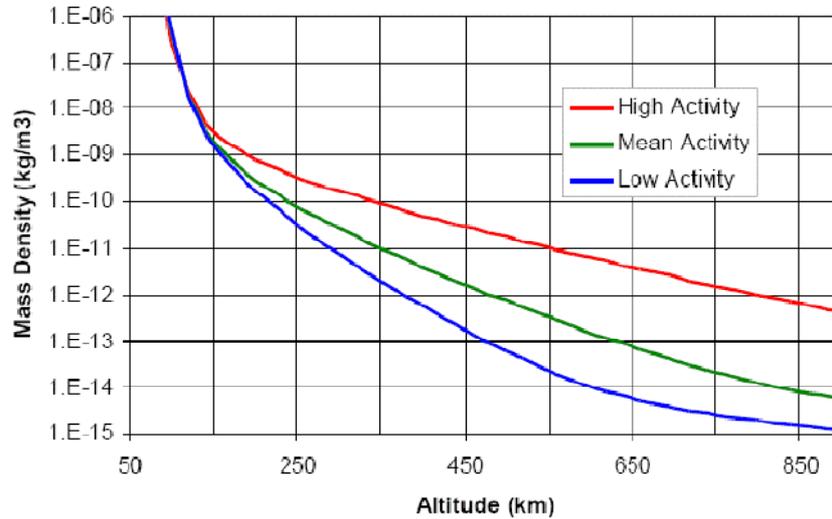
$n$	$m$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
19	11	.16080720D-07	.11000317D-07
19	12	-.29886557D-08	.93096799D-08
19	13	-.74465515D-08	-.28398304D-07
19	14	-.45294321D-08	-.13113453D-07
19	15	-.17838459D-07	-.14105916D-07
19	16	-.21421212D-07	-.69574509D-08
19	17	.29105753D-07	-.15152537D-07
19	18	.34714340D-07	-.94385775D-08
19	19	-.23708582D-08	.47796091D-08
20	0	.18789987D-07	.00000000D+00
20	1	.83477675D-08	.62445294D-08
20	2	.20030448D-07	.14884470D-07
20	3	-.59349949D-08	.35571151D-07
20	4	.54571747D-08	-.22410101D-07
20	5	-.11452318D-07	-.69350776D-08
20	6	.11565401D-07	-.42341732D-09
20	7	-.20301510D-07	-.12995889D-09
20	8	.49222031D-08	.40671618D-08
20	9	.18043913D-07	-.58648714D-08
20	10	-.32549035D-07	-.57601832D-08
20	11	.14562763D-07	-.18929751D-07
20	12	-.64092154D-08	.18154221D-07
20	13	.27323491D-07	.70325130D-08
20	14	.11894377D-07	-.14472234D-07
20	15	-.25832738D-07	-.76580241D-09
20	16	-.12063705D-07	.33001884D-09
20	17	.44347248D-08	-.13703405D-07
20	18	.14916632D-07	-.98369292D-09
20	19	-.29626245D-08	.10959650D-07
20	20	.40445841D-08	-.12346618D-07

Lorsque l'origine du repère coïncide avec le centre de masse de la terre, on a :

$$\bar{C}_{00} = 1 \text{ et } \bar{C}_{10} = \bar{C}_{11} = \bar{S}_{11} = 0$$

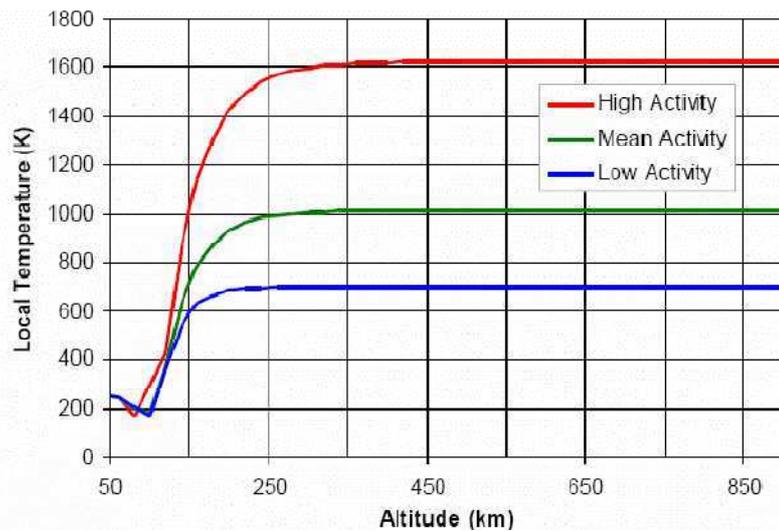
### A-5 Densité, température et composition de l'atmosphère

La densité de l'atmosphère à l'altitude du satellite est donnée par la figure suivante, selon le modèle MSISE-90.



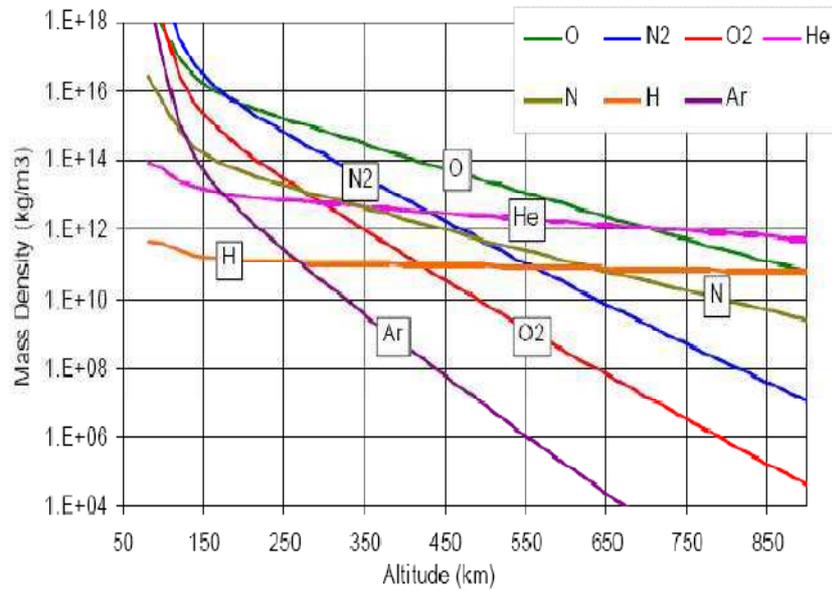
**Figure A.3 :** Variation de la densité de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude et de l'activité solaire (ESA 2000).

La température atmosphérique est donnée par le modèle MSISE-90 présentée par la figure suivante :



**Figure A.4 :** Variation de la température de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude et de l'activité solaire (ESA 2000).

Les constituants de l'atmosphère sont principalement H, He, N, N<sub>2</sub>, O, O<sub>2</sub> et Ar dont la densité de ces gaz est donnée par la figure suivante, selon le modèle MSISE-90.



**Figure A.5 :** Variation de la composition de l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude (ESA 2000).

## A-6 Valeurs numériques

Les valeurs numériques utilisées dans ce travail sont données par le tableau suivant :

**Tableau A-7 : Valeurs numériques.**

Symbole	Valeur	Désignation	Référence	Unités
$\sigma$	$7.292115 \cdot 10^{-5}$	Vitesse de rotation de la terre	IAG1999	rd s <sup>-1</sup>
$\sigma$	$5.670400 \cdot 10^{-8}$	Constante de Stefan-Boltzmann	CODATA2006	Wm <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>
$a_{\odot}$	6378136.6	Rayon équatorial de la terre	IAG 1999	m
$a_{\oplus}$	$6.958 \cdot 10^8$	Rayon du soleil	ELP2000	m
$f$	0.3	Facteur albédo		
$\epsilon_0$	23° 26'21".4119	Obliquité de l'écliptique à J2000.0	IAU1976	
$\mu$	$3.986004418 \cdot 10^{14}$	Constante gravitationnelle terrestre	IAG1999	m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>
$\mu_s$	$1.32712442076 \cdot 10^{20}$	Constante gravitationnelle solaire	IAG 1999	m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>
$\mu_l$	$4.902799 \cdot 10^{15}$	Constante gravitationnelle lunaire	IERS 1996	m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>
$r_s$	149597870651	Distance terre-soleil	ELP2000	m
$G$	$6.67428 \cdot 10^{-11}$	Constante de gravitation	CODATA2006	m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> kg <sup>-1</sup>
$c$	299792458	Vitesse du son	CODATA2006	ms <sup>-1</sup>
$\Phi_0$	1366.1	Constante solaire	ASTM2000	Wm <sup>-2</sup>
$R$	8314.5	Constante des gaz parfaits		kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$T_p$	250	Température de la terre	ASTM2000	K
<b>JD2000.0</b>	24515545.0	Date julienne		JD
<b>UA</b>	149597870691	Unité astronomique	IERS 1996	m
<b>mas</b>	$4.8481 \cdot 10^{-9}$	Milli-arc-seconde	IERS 1996	rd

## Annexe B

### Annexe relative au chapitre III

#### B-1 Matrices de transformation

Les termes  $k_{ij}^k$  en fonction de  $\bar{k}_{ij}^k$  sont exprimés par :

$$\begin{aligned} k_{xx}^k &= \bar{k}_{11}^k m^2 + \bar{k}_{22}^k n^2 \\ k_{yy}^k &= \bar{k}_{11}^k n^2 + \bar{k}_{22}^k m^2 \\ k_{xy}^k &= (\bar{k}_{22}^k - \bar{k}_{11}^k) mn \end{aligned} \quad (B.1)$$

Le passage du repère de la fibre au repère du pli s'effectue grâce à la matrice de transformation  $[T]$  qui est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn & 0 & 0 \\ n^2 & m^2 & -2mn & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Le vecteur thermo-élastique dans le repère du pli, s'exprime en fonction de la matrice de transformation  $[T_1]$ , et qui est donnée par :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

## Annexe C

## Annexe relative au chapitre IV

## C-1 Fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques

La figure suivante donne la représentation des six premières fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.

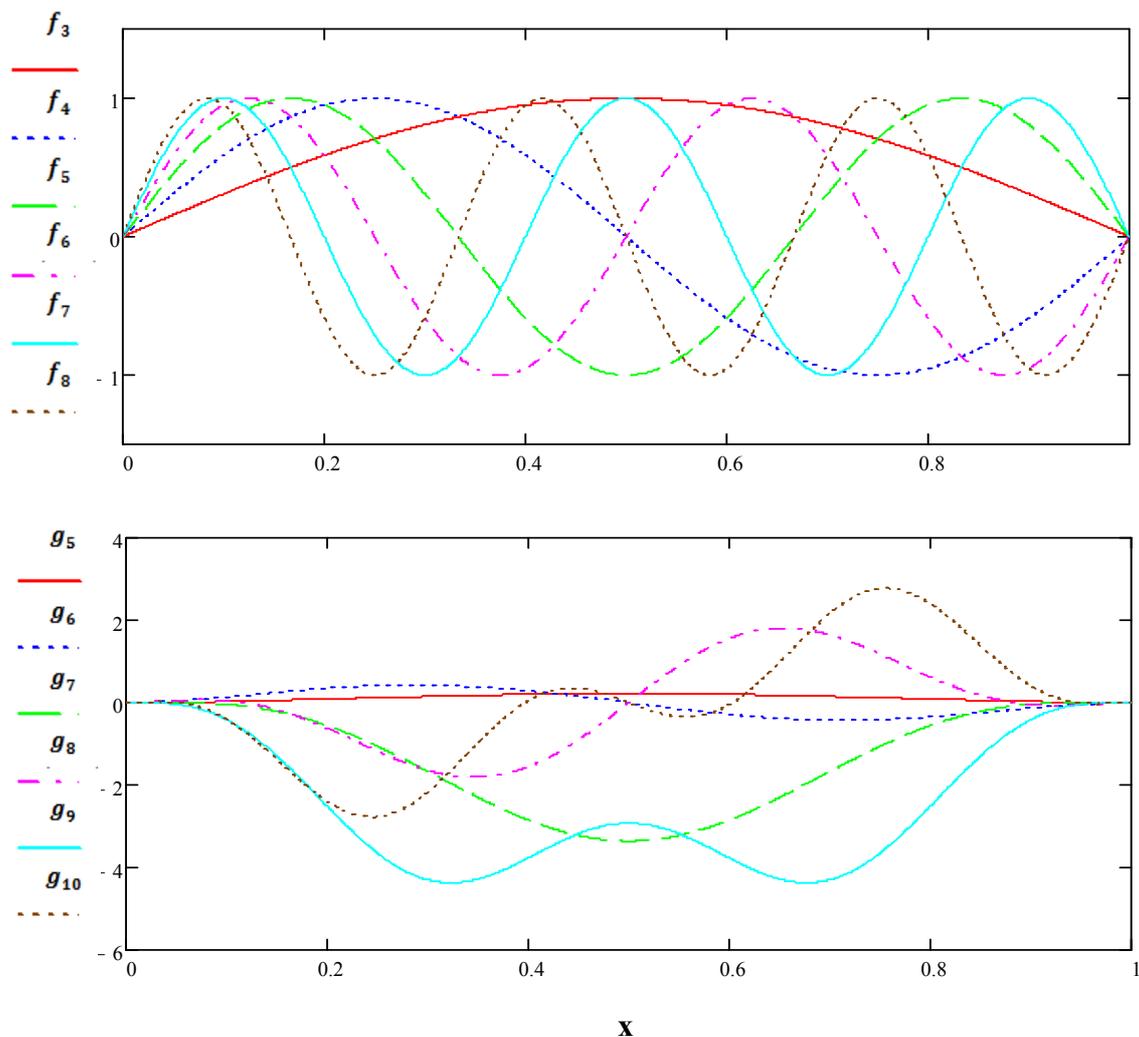


Figure C.1 : Les six premières fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.