

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou-Bekr Belkaid de Tlemcen
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Civil

THÈSE

Présentée par

Abdelaziz Yazid

En vue de l'obtention du Diplôme

de Doctorat

Spécialité « Génie Civil »

**Contribution à la modélisation numérique
des singularités au voisinage des fissures.
Elaboration d'un code de calcul.**

Soutenue devant le jury composé de :

M. Allal Mohamed Amine	MC	Université de Tlemcen	Président du jury
M. Megnounif Abdellatif	MC	Université de Tlemcen	Examineur
M. Berga Abdelmadjid	MC	Centre universitaire de Bechar	Examineur
M. Hamouine Abdelmadjid	Pr	Centre universitaire de Bechar	Directeur de thèse
M. Abou-Bekr Nabil	MC	Université de Tlemcen	Co-directeur de thèse

Décembre 2008

Dédicace

Cette thèse est dédiée :

A ma mère et mon père

A ma femme et mon fils : Walid

A toute ma famille

A tous mes amis

A tous mes professeurs

Et à tous ceux qui portent l'Algérie dans leurs cœurs...

Abdelaziz Y azid

Remerciements

Je suis très reconnaissant à Monsieur *Hamouine Abd el madjid* pour l'attention avec laquelle il a dirigé ce travail, ainsi que pour ses conseils précieux et les encouragements qu'il m'a constamment prodigués, qu'il trouve ici mes remerciements les plus sincères.

Que soit particulièrement remercié Monsieur *Abou-bekr Nabil* pour les fructueuses discussions que j'ai eu, avec lui, ainsi que pour les diverses observations qu'il a portées à ce travail.

Que Monsieur *Allal Mohamed Amine* trouve ici l'expression de mes respectueux remerciements pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

C'est aussi avec un grand plaisir que j'exprime ma reconnaissance à Monsieur *Megnounif Abdellatif* et à Monsieur *Berga Abd el madjid* qui ont accepté de juger ce travail, qu'ils en soient remerciés.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur *Khenfer MM* et à Monsieur *Chahine E* pour m'avoir fait profiter de leurs connaissances techniques.

Mes amicales pensées à tous les membres du département Génie Civil de l'université de Tlemcen.

Je suis également très reconnaissant envers mes parents qui se sont constamment préoccupés de ma scolarité et soutenus pendant toutes mes études universitaires.

Abdelaziz Yazid

Résumé

Résumé

L'objet de cette thèse est de contribuer au développement de l'application de la méthode des éléments finis à la modélisation sans remaillage de la fissuration. Elle vise à développer des outils numériques basés sur les concepts de la mécanique de la rupture afin de mettre au point un code de simulation numérique des singularités au voisinage des fissures. Un outil qui doit permettre de surmonter certaines des difficultés liées à la méthode standard des éléments finis. En conséquence, un ensemble d'applications a été envisagé afin de valider et d'exploiter le code réalisé.

Mots Clés : Singularité - Fissures - Eléments finis à quart de point double - Eléments finis étendus (X-FEM)- Courbes de niveau - Mécanique de la rupture.

Abstract

The object of this thesis is to contribute to the development of the application of finite element method to model cracking without remeshing. It aims at developing numerical tools based on the concepts of fracture mechanics in order to develop a code of numerical simulation of the singularities in the vicinities of the cracks. A tool that must make it possible to surmount some of the difficulties related to the standard finite elements method. Consequently, tests have been performed to validate and to exploit the realized code.

Key Words: Singularity - Cracks - A double quarter point finite elements - Extended finite elements (X-FEM) - Level set method - Fracture mechanics.

ملخص :

تهدف هذه الدراسة إلى المساهمة في تطوير طريقة العناصر المنتهية لنمذجة التشققات . فهي تسعى إلى إيجاد أدوات رقمية اعتماداً على مبدأ ميكانيك الإنكسار لوضع الأساس لبرنامج النمذجة الرقمية للإنفرادية بجوار الشقوق . أداة ستسمح بتجنب بعض العراقيل التي تصادف الطريقة التقليدية للعناصر المنتهية . وكننتيجة ، فقد اجريت مجموعة من الإختبارات للتحقق واستغلال البرنامج المنجز .

كلمات مفتاحية:

الإنفرادية ، الشقوق ، العناصر المنتهية المضاعفة ذات ربع نقطة، العناصر المنتهية الموسعة، منحنيات المستوى ، ميكانيك الإنكسار .

Table des matières

Table de figures	I
Liste de symboles	VI
Introduction Générale	01

Chapitre 1 : Analyse mécanique des fissures

1. Introduction	05
2. Eléments de la mécanique de rupture	
2.1. Objet de la mécanique de rupture	05
2.2. Aperçu historique.....	05
2.3. Mécanique linéaire, Non linéaire de rupture	06
2.4. Modes de rupture	06
2.5. Critères de rupture	07
2.6. Champs mécaniques au voisinage de la fissure	07
3. Approches mécaniques	
3.1. Approche locale	08
3.2. Approche globale.....	08
3.3. Facteurs d'intensité des contraintes	09
3.4. Polynôme de calibration	11
4. Limites de la M.L.R	
4.1. Approche d'Irwin	13
4.2. Approche de Dugdale-Barenblatt	14
4.3. Formes de la zone plastique	14
4.4. Critères de validité de la ténacité.....	14
4.5. Equivalence entre K_{IC} et G_{IC}	15
5. Paramètres élasto-plastique	
5.1. Intégrale de contour	15
5.2. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)	17
6. Zones de dominance des différents paramètres	17
7. Propagation des fissures	
7.1. Critères de stabilité	17
7.2. Critères de bifurcation	18
8. Formulation	
8.1. Equations gouvernantes	19
8.1. Forme faible.....	20
9. Conclusion	20

Chapitre 2 : Modélisation numérique des singularités

1. Introduction	22
2. Présentation de la méthode des éléments finis	
2.1. Principe de M.E.F	22
2.2. Principales étapes d'analyse par la M.E.F	23

2.3. Formulation des éléments finis quadratiques	23
3. Techniques de discrétisation de la fissure	
3.1. Discrétisation à l'aide d'éléments finis classiques	25
3.2. Discrétisation à l'aide d'éléments finis enrichis	25
3.3. Discrétisation à l'aide d'éléments finis classiques dégénérés	25
4. Modélisation des singularités par l'approche Q-FEM	
4.1. Bref aperçu historique	26
4.2. Formulation mathématique	28
4.2.1. Formulation des éléments finis quadratiques standards	28
4.2.2. Formulation des éléments finis quadratiques à quart de point.....	29
5. Modélisation des singularités par l'approche DQ-FEM	29
6. Modélisation des singularités par l'approche X-FEM	
6.1. Méthode X-FEM : état d'art.....	30
6.1.1. Travaux de base.....	30
6.1.2. Synthèse des travaux de recherche.....	30
6.2. Méthode X-FEM : concepts de base	31
6.2.1. Partition d'unité.....	31
6.2.2. Principe.....	32
6.2.3. Enrichissement.....	34
6.3. Intégration numérique	35
6.4. Choix du nombre de point d'intégration	36
6.5. Sélection des nœuds d'enrichissement	36
7. Conclusion	37

Chapitre 3 : Conception et description du code OMEGA

1. Eléments de conception	
1.1. Extraction des facteurs d'intensité des contraintes	39
1.1.1. Technique d'extrapolation.....	39
1.1.2. Technique DCT	39
1.1.3. Technique QPDT.....	39
1.1.4. Intégrale d'interaction.....	40
1.2. Implantation numérique	43
1.3. Système discret des équations.....	43
1.4. Représentation de la fissure par la méthode Level sets.....	44
1.4.1. Méthode Level sets	44
1.4.2. Représentation de la fissure	45
1.5. Principe du « Nœud fictif »	45
2. Description du code OMEGA	
2.1. Présentation générale	46
2.2. Fonctions du Code OMEGA	47
2.2.1. Approche FEM	47
2.2.2. Approche S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM	48
2.2.2. Approche X-FEM	49
2.3. Structure de fichier des données.....	50
2.4. Structure de fichier « Résolution »	50
2.5. Structure du bloc « Extraction »	52
3. Liste des fonctions	53
4. Conclusion	54

Chapitre 4 : Validation et exploitation

Partie I : Approche numérique-analytique

1. Introduction	57
2. Modélisation par l'approche S-FEM	
2.1. Modélisation d'un milieu non-fissuré	57
2.2. Modélisation d'un milieu fissuré.....	59
3. Modélisation par l'approche Q-FEM (QPE standard)	
3.1. Comparaison OMEGA- SAP.....	61
3.2. Influence de la longueur d'élément fini de pointe QPE	63
3.3. Comparaison des différentes techniques d'évaluation	65
3.4. Comparaison avec éléments finis enrichis.....	67
4. Modélisation par l'approche Q-FEM (DOPE)	
4.1. Comparaison QPE et DOPE.....	69
4.2. Influence de la longueur d'élément fini de pointe DOPE	71
4.3. Techniques d'évaluation	72
4.3.1. DCT et QPDT	72
4.3.1. Extrapolation	74
4.4. Implantation DOPE-SAP.....	76
5. Modélisation par l'approche X-FEM	
5.1. Validation.....	79
5.2. Influence du nombre de nœuds.....	82
5.3. Influence de la taille du domine	83
6. Couplage avec la méthode des courbes de niveau	84
6.1. Couplage FEM/LSM	86
6.2. Couplage QPE/LSM	87
6.3. Couplage DOPE/LSM	88
6.4. Couplage X-FEM/LSM	89
7. Discussion	90
8. Conclusion	90

Partie II : Approche numérique- expérimentale

1. Introduction	93
2. Un aperçu sur les composites fibreux	93
3. Classification des composites fibreux	
3.1. Les composites à fibres courtes	93
3.2. Les composites à fibres longues.....	93
4. Propriétés des constituants	
4.1. Matrice	94
4.1. Fibres.....	94
5. Paramètres influençant les propriétés des composites	94
6. Rupture des composites: Fibres-Ciment	
6.1. Module élastique	95
6.2. Apparition de l'endommagement des composites renforcés de fibres	96
6.3. Mécanisme de rupture.....	96
6.4. Application de la mécanique de la rupture aux ciments de fibres	97
7. Approche numérique de la résistance	
7.1. Détails expérimentaux.....	98
7.2. Courbe charge - ouverture.....	98

7. 3. Courbe K_R	99
7.4. Comportement de l'éprouvette CT.....	100
7.5. Effet des rainures	102
7.6. Effet de la longueur des fibres et d'état d'humidité	103
7.7. Discussion.....	104
8. Conclusion.....	105
Conclusion Générale	106
Références Bibliographiques	109

Table de figures

Figures

Fig. I.1 : Comparaison entre approches différentes : classique et MLR	05
Fig. I.2 : Modes de rupture.....	06
Fig. I. 3 : Zones délimitant la fissure	07
Fig. I. 4 : Etat de contraintes au voisinage de la fissure	09
Fig. I. 5 : Fissure de longueur $2a$ dans une plaque infinie.....	11
Fig. I. 6 : Répartition des contraintes élastiques et élasto-plastiques	13
Fig. I. 7 : Modèle de Dugdale - Barenblatt.....	14
Fig. I. 8 : Variations caractéristiques de la ténacité K_{Ic}	15
Fig. I. 9 : Corps avec frontière interne soumise aux charges	19
Fig. II. 1 : Géométrie de l'élément fini classique quadratique	23
Fig. II. 2 : Maillage classique de la demi- éprouvette CT	25
Fig. II. 3 : Maillage par éléments finis enrichis d'une éprouvette S.E.N.....	25
Fig. II. 4 : Principe de l'élément fini dégénéré	26
Fig. II. 5 : Élément fini quadratique à quart de point	26
Fig. II. 6 : Élément fini quadrilatéral déformé à quart de point	26
Fig. II. 7 : Élément fini triangulaire naturel à quart de point	26
Fig. II. 8 : Configuration droite des éléments finis à quart de point à 20 nœuds.....	27
Fig. II. 9 : Configuration courbe des éléments finis à quart de point à 20 nœuds	27
Fig. II. 10 : Géométrie des éléments QPE et DQPE.....	29
Fig. II. 11 : Représentation des maillages avec et sans fissure.....	32
Fig. II. 12 : Schéma d'enrichissement des nœuds.....	35
Fig. II. 13 : Subdivision en triangles associés aux éléments coupés par la fissure	35
Fig. II. 14 : Un exemple de décomposition	36
Fig. II. 15 : Choix de sélection des nœuds d'enrichissement	37
Fig. III. 1 : Extraction par la technique DCT et QPDT	40
Fig. III. 2 : Intégrale de contour J	41
Fig. III. 3 : Sélection des éléments et Fonction du poids q	42
Fig. III. 4 : Techniques d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes	42
Fig. III. 5 : Représentation de la fissure par la courbe de niveau (LSM)	45
Fig. III. 6 : Technique d'extrapolation standard	45
Fig. III. 7 : Technique d'extrapolation modifiée.....	46
Fig. III. 8 : Différente approche du code « OMEGA »	46

Fig. III. 9 : Etapes d'analyse par le code « OMEGA »	47
Fig. III. 10 : Schéma structural de l'approche FEM du code OMEGA	47
Fig. III. 11 : Schéma structural des approches S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM du code OMEGA	48
Fig. III. 12 : Schéma structural de l'approche X-FEM du code OMEGA	49
Fig. III. 13 : Structure de fichier des données « Input DATA »	50
Fig. III. 14 : Structure du bloc « Résolution »	51
Fig. III. 15 : Structure du bloc « Fonctions_P »	52
Fig. III. 16 : Structure du bloc « Intégrale_P »	52
Fig. III. 17 : Structure du bloc « FIC_CQ »	52
Fig. III. 18 : Structure du bloc « FIC_X »	53
Fig. IV. 1 : Géométrie des éprouvettes testées	57
Fig. IV. 2 : Géomètre de la plaque non-fissurée	57
Fig. IV. 3 : Maillage et condition aux limites de l'éprouvette CN	59
Fig. IV. 4 : Influence de la longueur de l'élément de pointe sur le facteur d'intensité de contraintes obtenu à l'aide du code SAP ($a/w = 0.3$)	59
Fig. IV. 5 : Influence de la longueur de l'élément de pointe sur le facteur d'intensité de contraintes obtenu à l'aide du code SAP ($a/w = 0.5$)	60
Fig. IV. 6 : Maillage et condition aux limites de l'éprouvette DEN	61
Fig. IV. 7 : Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenu à l'aide du code OMEGA et du logiciel SAP	61
Fig. IV. 8 : Ecart entre les résultats analytiques et les résultats obtenus par le code OMEGA (Q-FEM) et par le logiciel SAP pour l'éprouvette CN	62
Fig. IV. 9 : Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenu à l'aide du code OMEGA et du logiciel SAP	62
Fig. IV. 10 : Ecart entre les résultats analytiques et les résultats obtenus par le code OMEGA (Q-FEM) et par le logiciel SAP pour l'éprouvette DEN	63
Fig. IV. 11 : Influence de la longueur de l'élément de pointe sur le facteur d'intensité de contraintes obtenu à l'aide du code OMEGA ($a/w = 0.3$)	64
Fig. IV. 12 : Influence de la longueur de l'élément de pointe sur le facteur d'intensité de contraintes obtenu à l'aide du code OMEGA ($a/w = 0.5$)	64
Fig. IV. 13 : Facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette CN	65
Fig. IV. 14 : Ecart entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette CN	66
Fig. IV. 15 : Facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette DEN	66
Fig. IV. 16 : Ecart entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette DEN	67
Fig. IV. 17 : Maillage et conditions aux limites de l'éprouvette SEN	67
Fig. IV. 18 : Comparaison des valeurs du code OMEGA (QPE) avec ceux de Benzley	68
Fig. IV. 19 : Ecart entre les valeurs du code OMEGA (QPE) et ceux de Benzley	68
Fig. IV. 20 : Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par les éléments QPE et DQPE	69

Fig. IV. 21 : Ecarts entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE pour l'éprouvette CN	69
Fig. IV. 22: Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenus par les éléments QPE et DQPE.....	70
Fig. IV. 23: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE pour l'éprouvette DEN.....	70
Fig. IV. 24: Influence de la longueur de l'élément de pointe sur le facteur d'intensité de contraintes obtenu à l'aide des éléments DQPE ($a/w = 0.5$).....	71
Fig. IV. 25: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments DQPE.....	72
Fig. IV. 26: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE ..	73
Fig. IV. 27: Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenu par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments DQPE	73
Fig. IV. 28: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette DEN et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE ..	74
Fig. IV. 29: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation ...	74
Fig. IV. 30: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par la technique d'extrapolation.....	75
Fig. IV. 31: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation et par nœuds fictifs	75
Fig. IV. 32: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par la technique d'extrapolation et nœuds fictifs	76
Fig. IV. 33: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié	77
Fig. IV. 34: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié.....	77
Fig. IV. 35: Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié.....	78
Fig. IV. 36 : Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette DEN et les facteurs de correction obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié.....	78
Fig. IV. 37 : Maillage et conditions aux limites de l'éprouvette SEN analysée par l'approche X-FEM	79
Fig. IV. 38 : Facteurs de correction obtenus pour la maille (24x48) nœuds.....	79
Fig. IV. 39 : Ecarts entre les facteurs de correction analytiques et facteurs de correction obtenus par l'approche X-FEM pour la maille (24x48) nœuds	80
Fig. IV. 40 : Schéma de la propagation de la fissure.....	81
Fig. IV. 41 : Facteurs de correction normalisés obtenus pour différentes mailles	82
Fig. IV. 42 : Ecarts entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par l'approche X-FEM pour différentes mailles	82
Fig. IV. 43 : Schéma numérique des différentes approches	85
Fig. IV. 44 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (S-FEM)	86
Fig. IV. 45 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (Q-FEM)	87
Fig. IV. 46 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (DQ-FEM)	88
Fig. IV. 47 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (X-FEM).....	89

Fig. IV.48 : Comportements en traction des matrices fragiles renforcées de fibres.....	96
Fig. IV. 49 : Géométrie de l'éprouvette CT	98
Fig. IV. 50 : Courbe charge - déplacement d'une éprouvette entaillée CT	99
Fig. IV. 51 : Courbe charge - déplacement d'une éprouvette entaillée soumise à des chargements et des déchargements	99
Fig. IV. 52 : Courbes K_R en fonction de Δa correspondant à différentes longueurs de fibres.....	100
Fig. IV. 53 : Courbes K_R en fonction de Δa correspondant à différents états d'humidité.....	100
Fig. IV. 54 : Maillage de la demi -éprouvette CT.....	100
Fig. IV. 55 : Comparaison des résultats numériques trouvés avec ceux de la méthode de collocation	101
Fig. IV. 56 : Ecart entre les facteurs de correction trouvés et les facteurs de correction donnés par la méthode de collocation.....	101
Fig. IV. 57 : Influence des rainures sur le facteur de correction.....	102
Fig. IV. 58 : Caractéristiques des ciments renforcés pour différentes longueurs de fibres	103
Fig. IV. 59 : Caractéristiques des ciments renforcés pour différents états d'humidité.....	104
<u>Tableaux</u>	
Tab. IV. 1 : Valeurs des déplacements obtenues par le code OMEGA et par le logiciel SAP (Eléments finis à quatre nœuds : Déformations planes)	58
Tab. IV. 2 : Valeurs des déplacements obtenues par le code OMEGA et par le logiciel SAP (Eléments finis à huit nœuds : Déformations planes)	58
Tab. IV. 3 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis classiques ($a/w=0.3$)	60
Tab. IV. 4 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis classiques ($a/w=0.5$)	60
Tab. IV. 5 : Facteurs de correction normalisés obtenus avec le code OMEGA et le logiciel SAP pour l'éprouvette CN	62
Tab. IV. 6 : Facteurs de correction normalisés obtenus avec le code OMEGA et le logiciel SAP pour l'éprouvette DEN	63
Tab. IV. 7 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis QPE ($a/w=0.3$)	64
Tab. IV. 8 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis QPE ($a/w=0.5$)	65
Tab. IV. 9 : Facteurs de correction normalisés obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette CN	66
Tab. IV. 10 : Facteurs de correction normalisés obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette DEN	67
Tab. IV. 11 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par les éléments QPE et DQPE.....	70
Tab. IV. 12 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette DEN obtenus par les éléments QPE et DQPE.....	71
Tab. IV. 13 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis DQPE ($a/w=0.5$)	71
Tab. IV. 14 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments DQPE	72

Tab. IV. 15 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette DEN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments DQPE	73
Tab. IV. 16 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation DQPE.....	75
Tab. IV. 17 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation et par nœuds fictifs	76
Tab. IV. 18 : Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié	77
Tab. IV. 19 : Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié.....	78
Tab. IV. 20 : Facteurs de correction normalisés obtenus pour la maille (24x48) nœuds	80
Tab. IV. 21 : Facteurs de correction normalisés obtenus pour différentes mailles.....	83
Tab. IV. 22 : Facteurs de correction normalisés pour différents domaines ($a/w=0.2$)	83
Tab. IV. 23 : Facteurs de correction normalisés pour différents domaines ($a/w=0.35$)	83
Tab. IV. 24 : Facteurs de correction normalisés pour différents domaines ($a/w=0.50$)	83
Tab. IV. 25 : Caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes fibres et du ciment.....	95
Tab. IV. 26 : Valeurs du facteur de correction de l'éprouvette CT	102
Tab. IV. 27 : Valeurs du rapport de l'épaisseur	102
Tab. IV. 28 : Pourcentage de la teneur en eau et les valeurs des constantes élastiques du composite à différents états d'humidité	103

Liste des symboles

- E : Module de Young
 ν : Coefficient de Poisson
 σ : Contrainte normale
 a : Longueur de la fissure
 l : Longueur de l'élément à la pointe de la fissure
 r : Distance du front de la fissure
 u, v : Les composantes des déplacements
 B : Epaisseur de l'éprouvette
 F_i : Fonctions d'enrichissement $i=1,2,3,4$
 H : Fonction de Heaviside
 G : Module de cisaillement
 K_i : Facteur d'intensité de contrainte du mode $i = 1, 2, 3$
 J : Intégrale de Rice
 N_i : Fonctions de forme
 P : Charge appliquée
 Y : Facteur de correction
 W : Largeur de l'éprouvette
 I : L'énergie interne du système
 W_{ext} : Travail des forces extérieures
 W_e : L'énergie de déformation
 W_d : L'énergie dissipée
 $\{\epsilon\}$: Vecteur de déformations
 σ : Contrainte normale
 τ : Contrainte de cisaillement
 Γ : Contour d'intégration
 $[D]$: Matrice des propriétés du matériau
 $[F]$: Vecteur de force
 $[K]$: matrice de rigidité
 $[J]$: Matrice Jacobienne

Terminologie

Mécanique de la rupture : La mécanique de la rupture a pour objet d'étudier le comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Elle vise à déterminer des critères de ruine définissant les propriétés de résistance à l'extension des fissures.

Mécanique linéaire de la rupture : La mécanique linéaire de la rupture, aussi appelée mécanique de la rupture fragile, s'applique aux matériaux ayant un comportement élastique obéissant à la loi de Hooke.

Fissuration : La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements.

Critères de rupture : Formuler un critère de rupture, c'est définir les conditions permettant de prévoir l'évolution de la fissure existant dans une structure. Il est d'une importance fondamentale pour l'optimisation des matériaux ainsi que pour la prévision du comportement dans les conditions réelles d'utilisation.

Facteurs d'intensité des contraintes : Les facteurs d'intensité des contraintes traduisent la discontinuité des déplacements aux bords des fissures et servent d'appuis à une grande majorité des critères d'instabilité.

Facteurs de correction : C'est des facteurs correctifs tenant compte de la géométrie de la fissure, de la longueur de fissure et des constantes élastiques ainsi que du mode de sollicitation. En pratique, ils sont déterminés numériquement (éléments finis, collocation) et ils sont donnés sous forme de polynômes de calibration (ou de correction).

Zone de singularité : Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, il a été constaté que les contraintes présentent une singularité en $r^{-1/2}$, c'est à dire que lorsque « r » converge vers « 0 » les contraintes tendent, d'un point de vue mathématique, vers l'infini.

Plasticité confinée : est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique est négligeable devant la longueur de la fissure. La taille de cette zone peut être estimée par deux méthodes: l'approche d'Irwin et celle de Dugdale-Barenblatt. Les deux approches conduisent à des corrections simples du facteur d'intensité des contraintes.

L'intégrale de contour J : Il est utilisé comme paramètre caractéristique de l'état de contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans les matériaux dont le comportement est non linéaire.

Méthode des éléments finis : L'analyse par la méthode des éléments finis consiste à discrétiser un milieu continu par subdivision, du système à étudier, en éléments finis de formes simples de manière à approximer le mieux possible sa géométrie.

Méthode des éléments finis étendus : Cette méthode consiste à enrichir par des fonctions singulières et par une fonction discontinue la base d'une méthode d'éléments

finis classique définie sur un maillage du domaine non fissuré. Elle permet alors de modéliser la propagation d'une fissure en utilisant un maillage fixe indépendant de la géométrie de la fissure.

Fonction de Heaviside : La fonction de saut de Heaviside est une fonction discontinue à travers la surface de la fissure et elle est constante de chaque côté de la fissure : +1 d'un côté et -1 de l'autre.

Méthode des éléments finis dégénérés à simple singularité : Cette technique consiste à reproduire une singularité d'ordre $r^{-1/2}$ à travers des configurations géométriques spéciales des éléments finis isoparamétriques quadratiques en rapprochant les nœuds milieux des côtés adjacents à la pointe de la fissure au quart de la distance depuis le fond de la fissure.

Méthode des éléments finis dégénérés à double singularité : Sur la base du principe des éléments finis à simple singularité, une modification géométrique a été proposée afin d'obtenir des éléments finis à double singularité. Cette modification consiste à rapprocher, au quart de la distance, les nœuds intermédiaires des deux cotés opposés.

Méthode des courbes de niveau : La méthode des Level sets (LSM) est un schéma numérique développé par Osher et Sethian pour modéliser le mouvement des interfaces. Elle est basée sur la représentation de la matière par des courbes de niveau d'une fonction $\varphi(x, t)$ où t est un paramètre décrivant l'évolution spatiale de la frontière.

Introduction Générale

Depuis de nombreuses années, la mécanique de la rupture s'est imposée comme un outil indispensable dans la prévention de ruptures aux conséquences catastrophiques. Elle se propose de déterminer l'influence des défauts sur le comportement mécanique des matériaux visant à développer des critères de ruine. Cette discipline est basée sur des facteurs d'intensité des contraintes traduisant la discontinuité des déplacements aux bords des fissures et servant d'appuis à une grande majorité des critères d'instabilité. En réalité, les géométries et les chargements des pièces sont souvent complexes de sorte que la détermination analytique "exacte" des facteurs d'intensité des contraintes est laborieuse. Les problèmes physiques rencontrés conduisent pour la plupart à des systèmes d'équations aux dérivées partielles complexes, avec des conditions aux limites et des conditions initiales spécifiques. D'où l'intérêt d'avoir recours à des méthodes numériques tels que l'analyse par la méthode des éléments finis.

La méthode d'analyse par éléments finis a connu au cours de ces dernières décennies un développement très intéressant, et son emploi est généralisé à des problèmes liés à des domaines complexes et diversifiés. Cependant, bien qu'elle soit utilisée dans la grande majorité des codes de simulation industriels; elle présente un certain nombre de difficultés dans la simulation de certains problèmes à géométrie très complexe ou à géométrie évoluant dans le temps :

- la nécessité d'adapter le maillage à la ligne de fracture ;
- un raffinement drastique du maillage au voisinage du front de la fissure ;
- la nécessité d'opération de remaillage pour suivre la propagation des fissures.

L'objectif de ce travail est de développer des outils numériques basés sur les concepts de la mécanique de la rupture afin de mettre au point un code de simulation numérique des singularités au voisinage des fissures permettant de surmonter certaines des difficultés liées à la méthode standard des éléments finis. Un outil doit permettre un calcul économique et adéquat des champs des déformations, en particulier, des facteurs d'intensité des contraintes, pour différentes géométries et différentes conditions aux limites, qui peuvent par la suite être introduits dans les différents critères de rupture ou lois de propagation de la fissure. Le plan de cette thèse est le suivant :

➤ Dans le premier chapitre, nous rappellerons le modèle physique de la mécanique linéaire de la rupture. Les concepts de modes de rupture, l'approche locale et globale de la rupture ainsi que les critères de rupture et de la croissance d'une fissure seront introduits. Les champs des déplacements et des contraintes au front des fissures seront établis, en mettant en évidence le caractère singulier. Par la suite, nous exposerons l'analyse mécanique d'une fissure et de la singularité qu'elle engendre dans les champs mécaniques, en insistant sur le domaine de validité des critères de rupture.

➤ Le deuxième chapitre décrit la modélisation par éléments finis des singularités au voisinage des fissures fixes et mobiles. Deux approches différentes sont exposées :

□ Une approche qui vise, par une modification géométrique des éléments finis standards, à éviter le problème de la singularité au voisinage des fissures à l'aide d'éléments finis dégénérés à simple singularité. Une nouvelle modification géométrique de ces éléments a permis de mettre en œuvre un nouveau type d'éléments finis baptisé « éléments finis dégénérés à double singularité » DQPE. Une idée originale de couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode de courbe de niveau LSM a donné naissance à trois nouvelles techniques de modélisation de la propagation des fissures sans avoir recours à des opérations de remaillage (S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM).

□ Une deuxième approche dite X-FEM qui permet de modéliser la propagation d'une fissure en utilisant un maillage fixe indépendant de la géométrie de la fissure. Cette technique, dont la genèse est récente, consiste à enrichir l'espace des fonctions de base associées au maillage du solide non fissuré par des fonctions de base complémentaires représentant les discontinuités. Ainsi, et sur la base d'une analyse critique de l'état de l'art, un schéma d'implantation numérique de cette nouvelle technique est proposé afin d'améliorer son aptitude à reproduire la singularité exigée par l'analyse élastique.

Le troisième chapitre retrace une présentation succincte de la conception du code élaboré «OMEGA». Il passe en revue les éléments clés nécessaires à l'implantation des différentes approches de modélisation sans remaillage (S-FEM, Q-FEM, DQ-FEM et X-FEM). La structure et le rôle des différentes fonctions constituant le code ainsi que les concepts de programmation associés au développement des différentes approches ont été discutés. En conséquence, les limites de cet outil, ainsi, que les perspectives de son application ont été également explorées.

➤ Dans le quatrième chapitre, des exemples d'applications ont été testés afin de mettre en valeur l'aptitude du code réalisé à modéliser fidèlement la singularité au voisinage des fissures et à suivre son évolution en permettant un maillage fixe indépendant de la géométrie de la fissure. Les différentes opportunités offertes par cet outil ont été également étudiées. En outre, et sur la base d'un programme expérimental, une étude a été envisagée afin d'approcher numériquement la résistance à la fissuration des ciments renforcés de fibres de cellulose en fonction de la longueur des fibres et de l'état d'humidité du matériau: l'approximation du matériau élastique, linéaire, isotrope, et homogène a été choisie pour l'étude des éprouvettes CT (Compact-Tension).

Enfin, les résultats du présent travail avec leur interprétation, ainsi que les principales remarques seront présentés avec des conclusions et des recommandations.

Chapitre I :
Analyse mécanique des fissures

1. Introduction

Dans l'approche mécanique classique, les structures sont dimensionnées de façon que les contraintes appliquées restent inférieures à la limite d'élasticité. On utilise en général un coefficient de sécurité pour prévenir tout risque de rupture fragile. Cette approche est à deux variables : contraintes appliquées et limite d'élasticité. Elle fait abstraction de l'existence d'éventuels défauts dans le matériau.

L'approche basée sur la mécanique de la rupture est à trois variables : la contrainte appliquée, la ténacité qui remplace la limite d'élasticité et une variable additionnelle qui est la taille du défaut. Cette discipline utilise deux approches différentes: approche statique et approche énergétique. Ces deux approches sont équivalentes dans certaines conditions.

Le schéma de la figure I.1 compare l'approche classique basée sur la limite d'élasticité du matériau à l'approche utilisant le concept de ténacité issu de la mécanique de la rupture.

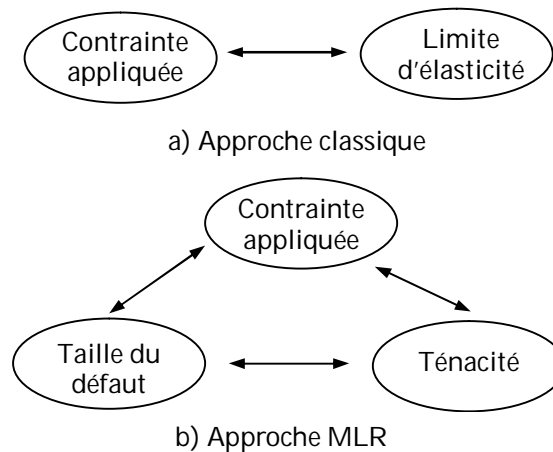


Figure I.1 : Comparaison entre deux approches différentes : classique et MLR

2. Éléments de la mécanique de la rupture

2.1. Objet de la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objet d'étudier le comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Elle vise à déterminer des critères de rupture définissant les propriétés de résistance à l'extension des fissures.

La mécanique de la rupture a été largement étudiée dans la bibliographie. Les références [01-03] sont des exemples d'ouvrages généraux qui passent en revue des analyses plus complètes et plus détaillées.

2.2. Aperçu historique

La mécanique de la rupture a été introduite en tant que science par Griffith [04]. Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité ont été entrepris par Westergaard [05]. Des études, menées notamment par Sneddon [06] et Irwin [07], ont permis de définir les facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. Par la suite, le développement de cette discipline s'étend aux problèmes non linéaires matériellement et géométriquement, aux propagations des fissures sous sollicitations dynamiques, à la rupture dans les matériaux multicouches, et aux techniques numériques de résolution.

2.3. Mécanique linéaire, Non linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture, aussi appelée mécanique de la rupture fragile, s'applique aux matériaux ayant un comportement élastique obéissant à la loi de Hooke. Même si des corrections liées à la présence d'une zone plastifiée ont été proposées, ses analyses ne sont valables que pour des structures dont le comportement est globalement élastique. Elle définit plusieurs concepts qui sont utilisés pour caractériser la ténacité du matériau lorsque la zone plastique est faible par rapport à la taille de la fissure. Dans le cas contraire, la mécanique élasto-plastique permet une extension de la théorie précédente en utilisant comme paramètres: L'intégral de contour J , l'analyse par la courbe R et l'étude de l'ouverture de la fissure CTOD (Crack-Tip-Opening-Displacement).

2.4. Modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Sous l'effet d'une sollicitation externe, les lèvres de la fissure se déplacent l'une par rapport à l'autre. Ce déplacement relatif peut se faire selon trois modes (Figure I.2) :

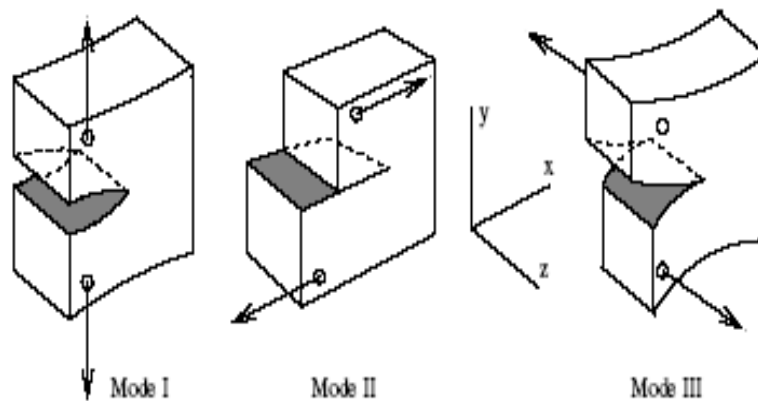


Figure I.2 : Modes de rupture

Mode I (Mode d'ouverture): Les deux lèvres de la fissure se déplacent l'une par rapport à l'autre perpendiculairement à leur plan.

$$K_I = \sigma_y \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \quad (1.1)$$

Mode II (Mode de cisaillement plan): Les deux lèvres de la fissure se déplacent dans le plan de celle-ci et dans une direction perpendiculaire au fond de fissure.

$$K_{II} = \tau_{xy} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \quad (1.2)$$

Mode III (Mode de cisaillement anti-plan): Les deux lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan mais suivant une direction parallèle au fond de fissure.

$$K_{III} = \tau_{yz} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \quad (1.3)$$

Note I.1: A une échelle microscopique, la fissure se propage toujours en mode mixte qui est la combinaison des deux ou trois modes principaux, mais à l'échelle macroscopique, on revient à un mode principal.

2.5. Critères de rupture

Formuler un critère de rupture, c'est définir les conditions permettant de prévoir l'évolution de la fissure existant dans une structure. Il est d'une importance fondamentale pour l'optimisation des matériaux ainsi que pour la prévision du comportement dans les conditions réelles d'utilisation.

Le nombre de critères de rupture est très important, les résultats obtenus sont aussi variés que nombreux, mais la plus part de ces critères repose sur les facteurs d'intensité des contraintes. La connaissance de ces facteurs est fondamentale puisqu'ils peuvent être induits dans les différents critères d'instabilité.

2.6. Champs mécaniques au voisinage de la fissure

D'un point de vue mécanique, on peut distinguer dans un milieu fissuré (Figure I.3) trois zones successives [08]:

1)- Zone d'élaboration : cette zone se trouve à la pointe de la fissure, sa taille est en général très faible.

2)- Zone singulière: dans cette zone, les composantes du champ de contraintes présente une singularité $r^{-1/2}$ en milieu élastique linéaire.

3)- Zone externe: cette zone se raccorde d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites.

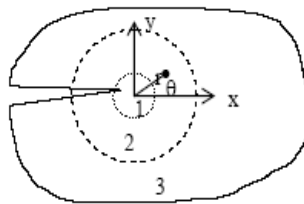


Figure I.3 : Zones délimitant la fissure

3. Approches mécaniques

En mécanique de rupture, deux approches différentes sont possibles:

a)- Une approche locale (ou statique) qui analyse les champs de contraintes et de déformations au voisinage du front de fissure.

b)- Une approche globale (ou énergétique) qui établit une étude du comportement global de structure fissurée sur le plan énergétique.

Note 1.2 : Plus récemment, de nouvelles approches tentent de relier le comportement local à l'échelle microscopique au comportement global lors de la rupture d'un matériau e.g. [09]. Ces approches micro-macro deviennent parfois nécessaires lorsqu'on atteint les limites d'utilisation des autres approches classiques.

3.1. Approche locale

Dans l'approche basée sur le concept des facteurs d'intensité des contraintes de la mécanique linéaire de rupture, la rupture se produit lorsque le facteur d'intensité des contraintes K atteint la valeur critique K_C qui correspond à la ténacité du matériau. Dans cette approche, le facteur K est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est caractérisée par la ténacité K_C .

3.2. Approche globale

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau. Cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith [04] fut le premier à aborder le problème de la rupture en termes énergétiques en supposant que la création de surfaces est un phénomène consommateur d'énergie. Il s'ensuit que l'instabilité de fissure se produit lorsque l'énergie emmagasinée dépassera l'énergie nécessaire pour la création de nouvelles surfaces.

Physiquement, pour que la fissure se propage, il faut fournir au matériau une énergie. Il y a propagation de fissure lorsque :

$$G \geq 2\gamma_s \quad (1.4)$$

avec :

G : L'énergie unitaire de propagation ou taux de restitution d'énergie

γ_s : L'énergie dissipée pour la création de nouvelles surfaces libres.

La propagation catastrophique de la fissure est caractérisée par une valeur critique de l'énergie unitaire de propagation G_C .

Finalement, les critères de rupture se traduisent par les expressions suivantes:

$$\text{- à l'amorçage } G = G_C, \quad G_C = R = 2\gamma_s \quad (1.5)$$

$$\text{- lors de la propagation } G \geq R \quad (1.6)$$

R représente l'énergie de propagation de la fissure, c'est aussi une résistance à la propagation.

Pour le cas où $G > R$, une partie de l'énergie disponible servirait d'énergie de séparation, l'excès d'énergie se transforme en énergie cinétique et la propagation de la fissure peut devenir instable. Dans le cas contraire, si à tout moment $G = R$, on assiste à une propagation stable de la fissure et la rupture est dite contrôlée.

3.3. Facteurs d'intensité des contraintes

Introduits par Irwin [07], les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. La forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau de comportement élastique - linéaire est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (1.7)$$

Les coordonnées (r, θ) sont repérées par rapport à l'extrémité de la fissure (Figure I.4). Les fonctions adimensionnelles f_{ij} et g_{ij} dépendent du mode de sollicitation, et g_{ij} de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré.

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, on constate que les contraintes présentent une singularité en $r^{-1/2}$, c'est à dire que lorsque « r » converge vers « 0 » les contraintes tendent, d'un point de vue mathématique, vers l'infini. Les autres termes d'ordre plus élevé sont alors négligeables.

La zone la plus critique est donc le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure et on ne considère alors que les termes $r^{-1/2}$, autrement dit que les champs de contraintes asymptotiques qui sont donc de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.8)$$

K_k est le facteur d'intensité des contraintes en mode k , avec $k=I, II$ ou III . La fonction $f_{ij}(\theta)$ donne la répartition angulaire ; son expression en contraintes et déformations planes est exposée dans plusieurs ouvrages de mécanique de la rupture.

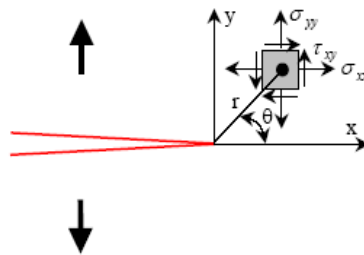


Figure I.4: Etat de contraintes au voisinage de la fissure

En mode I:

$$u(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.9)$$

$$v(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.10)$$

$$w(r, \theta) = 0 \quad (1.11)$$

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.12)$$

$$\sigma_{yy}(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{zz}(r,\theta) = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.14)$$

$$\tau_{xy}(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \quad (1.15)$$

$$\tau_{xz}(r,\theta) = \tau_{yz}(r,\theta) = 0 \quad (1.16)$$

En mode II:

$$u(r,\theta) = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.17)$$

$$v(r,\theta) = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.18)$$

$$w(r,\theta) = 0 \quad (1.19)$$

$$\sigma_{xx}(r,\theta) = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \left(2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.20)$$

$$\sigma_{yy}(r,\theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \quad (1.21)$$

$$\sigma_{zz}(r,\theta) = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.22)$$

$$\tau_{xy}(r,\theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.23)$$

$$\tau_{xz}(r,\theta) = \tau_{yz}(r,\theta) = 0 \quad (1.24)$$

En mode III:

$$u(r,\theta) = v(r,\theta) = 0 \quad (1.25)$$

$$w(r,\theta) = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \quad (1.26)$$

$$\sigma_{xx}(r,\theta) = \sigma_{yy}(r,\theta) = \sigma_{zz}(r,\theta) = \tau_{xy}(r,\theta) = 0 \quad (1.27)$$

$$\tau_{xz}(r,\theta) = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \quad (1.28)$$

$$\tau_{yz}(r,\theta) = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \quad (1.29)$$

$$\text{Avec : } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Note 1.3: Les facteurs d'intensité des contraintes caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure [10]. Dans certains cas, il est nécessaire de tenir compte également des premiers termes non singuliers e.g. [11].

Note I.4: Lorsque la structure fissurée est sollicitée dans les trois modes simultanément, le principe de superposition est appliqué en élasticité linéaire.

$$\sigma_{ij}^{(Total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (I.30)$$

En terme de coordonnées polaires, et sous chargement mode mixte, l'expression des contraintes circonférencelles et de cisaillement est de forme :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \{ 3 \cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \{ -3 \sin(\theta/2) - 3 \sin(3\theta/2) \} \quad (I.31)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \{ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \{ \cos(\theta/2) + 3 \cos(3\theta/2) \} \quad (I.32)$$

3.4. Polynôme de calibration

Dans le cas particulier d'une plaque infinie (Figure I.5), on montre que :

$$K_I = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (I.33)$$

$$K_{II} = \tau_{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (I.34)$$

Ces relations s'écrivent pour un milieu fini de la manière suivante :

$$K_I = Y_I(a/w) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (I.35)$$

$$K_{II} = Y_{II}(a/w) \tau \sqrt{\pi a} \quad (I.36)$$



Figure I.5: Fissure de longueur $2a$ dans une plaque infinie

$Y_I(a/w)$ et $Y_{II}(a/w)$ des facteurs correctifs tenant compte de la géométrie de la fissure, de la longueur de fissure et des constantes élastiques ainsi que du mode de sollicitation. En pratique, $Y_I(a/w)$ et $Y_{II}(a/w)$ sont déterminés numériquement (éléments finis, collocation) et ils sont donnés sous forme de polynômes de calibration (ou de correction).

Les polynômes de calibration normalisés sont tels que:

$$Y(a/w) = \frac{K_I}{\frac{F}{B w} \sqrt{\pi a}} \quad (I.37)$$

avec :

K_I : facteur d'intensité des contraintes en mode I

F : charge appliquée

w : largeur de l'éprouvette

B : épaisseur de l'éprouvette

a : longueur d'entaille

Il existe une approche qui consiste à supposer que toute situation peut se ramener au problème moyennant cinq termes correctifs, c'est-à-dire que le facteur d'intensité de contraintes peut s'écrire sous la forme :

$$K_I = Y_1.Y_2.Y_3.Y_4.Y_5. \sigma \sqrt{\pi a} \quad (I.38)$$

avec:

Y_1 est un facteur tenant compte de la surface libre à l'origine de la fissure.

Y_2 tient compte de l'existence d'une surface libre vers laquelle se dirige la fissure.

Y_3 considère la forme réelle de la fissure.

Y_4 tient compte du gradient de contrainte.

Y_5 est introduit pour tenir compte de la taille de la zone plastique.

Les expressions analytiques des polynômes de calibration de certaines éprouvettes entaillées d'un matériau isotrope sont données par :

a) - Eprouvette DEN (Double-Edge-Notched)

$$Y\left(\frac{a}{w}\right) \approx \left[1 + 0.122 \cos\left(\frac{\pi a}{2w}\right)\right] \left[\frac{2w}{\pi a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{2w}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (I.39)$$

b) - Eprouvette SEN (Single-Edge -Notched)

$$Y\left(\frac{a}{w}\right) \approx \left(\frac{2w}{\pi a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{2w}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{0.752 + 2.02 \frac{a}{w} + 0.37 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2w}\right)\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2w}\right)} \quad (I.40)$$

c) - Eprouvette CN (Central-Notched)

$$Y\left(\frac{a}{w}\right) \approx \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{w}\right)^4\right] \left[\cos\left(\frac{\pi a}{2w}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (I.41)$$

4. Limites de la M.L.R

L'analyse élastique des contraintes et des déplacements montre qu'au voisinage du front de fissure, la contrainte croît infiniment. Or d'après les théories de la plasticité elle ne peut pas être supérieure à trois fois la limite d'élasticité. Il apparaît donc une zone plastique en avant de fissure.

Deux cas de plasticité sont possibles :

- Plasticité confinée : est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique est négligeable devant la longueur de la fissure. La taille de cette zone peut être estimée par deux méthodes: l'approche d'Irwin [12] et celle de Dugdale-Barenblatt [13]. Les deux approches conduisent à des corrections simples du facteur d'intensité des contraintes.

- Plasticité étendue : est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure. Plus loin de l'extrémité de la fissure (zone de champs semi-lointains), la distribution des contraintes et des déformations peut être approchée par la solution asymptotique proposée par Hutchinson [14] et Rice et Rosengren [15].

4.1. Approche d'Irwin

Irwin [12] propose une correction pour tenir compte de cette zone plastique. Il suppose que l'on peut remplacer la fissure de longueur « a » avec la zone plastique par une fissure fictive de longueur « $a + r_E$ » avec ($r_E \ll a$) (Figure I.6).

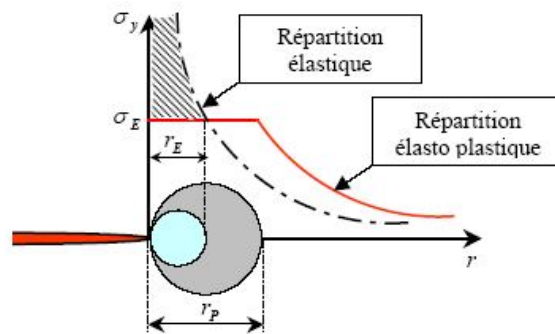


Figure I.6: Répartition des contraintes élastiques et élasto-plastiques

En contraintes planes :

$$r_E = \frac{(K_{IC}/\sigma_E)^2}{2\pi} \quad (I.42)$$

En état de déformations planes, la triaxialité des contraintes augmente la limite de proportionnalité par un facteur $\sqrt{3}$, de sorte que le rayon de la zone plastique devient :

$$r_E = \frac{(K_{IC}/\sigma_E)^2}{6\pi} \quad (I.43)$$

avec:

σ_E : Limite de l'élasticité

Ainsi dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, le facteur d'intensité des contraintes, après correction, devient:

$$K_{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi (a + r_E)} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (I.44)$$

Donc, la validité du critère de rupture se trouve limitée par :

- l'existence de la zone plastique à la pointe de la fissure ;
- l'effet tridimensionnel des éprouvettes.

4.2. Approche de Dugdale-Barenblatt

Dugdale [13] considère la zone plastique de longueur ρ comme une zone où s'exerce, sur les lèvres d'une fissure fictive, une pression P égale à la limite d'élasticité σ_E du matériau (Figure I.7).

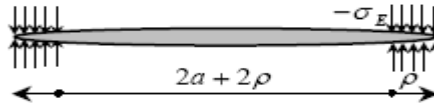


Figure I.7 : Modèle de Dugdale - Barenblatt

Cette pression engendre un coefficient de contrainte qui s'ajoute à celui du champ de contrainte à l'infini :

$$\rho = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 \quad (1.45)$$

Le modèle de Dugdale-Barenblatt conduit, après correction de zone plastique, à un facteur d'intensité des contraintes effectif donné par :

$$K_{eff} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos \left(\frac{\pi \sigma^\infty}{2 \sigma_E} \right)}} \quad (1.46)$$

4.3. Formes de la zone plastique

Les modèles précédents donnent des estimations de taille de zone plastique r_p à $\theta = 0$, c'est à dire $r_p(\theta = 0)$. Pour avoir $r_p(\theta)$ lorsqu'on fait varier l'angle, il faut appliquer un critère de plasticité. Les deux critères les plus utilisés pour le calcul sont ceux de Von Mises et de Tresca. Ces deux critères s'écrivent dans l'espace des contraintes principales :

$$\text{Von Mises : } (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_E^2 \quad (1.47)$$

$$\text{Tresca : } \text{Max}(\sigma_i - \sigma_j) = \sigma_E \quad (1.48)$$

4.4. Critères de validité de la ténacité

La mécanique linéaire de la rupture est d'autant plus applicable que la zone plastifiée est petite, ce qui impose aux pièces d'avoir des dimensions très supérieures à la taille de cette zone. La détermination de K_{IC} exige certaines conditions sur la géométrie de l'éprouvette afin de respecter la théorie d'élasticité en déformation plane. Le facteur d'intensité de contrainte demeure indépendant de la longueur de la fissure et de l'épaisseur de l'éprouvette si les conditions suivantes sont respectées :

$$\left(a, \frac{w}{2}, B \right) > 2.5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_E} \right)^2 \quad (1.49)$$

où a , w et B sont respectivement la longueur de fissure, l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette, et σ_E la limite d'élasticité du matériau.

Lorsque l'épaisseur augmente (Figure I.8), on observe une transition d'un état de contrainte vers un état de déformations planes, le facteur d'intensité des contraintes critique diminue et n'évolue plus au-delà d'une certaine épaisseur : c'est cette valeur minimale stabilisée du K_{IC} qui définit la ténacité du matériau.

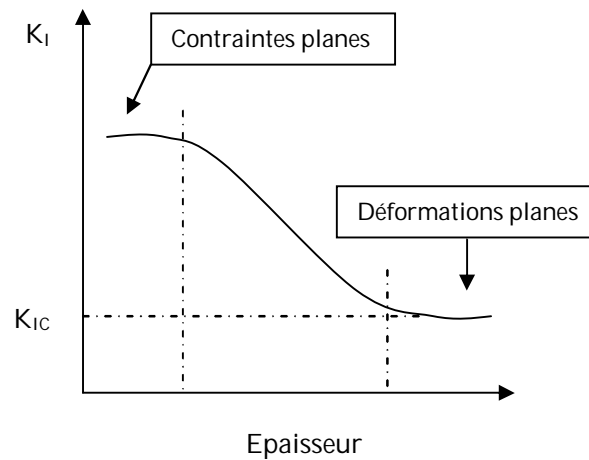


Figure I.8: Variations caractéristiques de la ténacité K_{IC}

4.5. Equivalence entre K_{IC} et G_{IC}

Pour un matériau isotrope, G et K sont liés par:

$$\text{en contrainte plane} \quad G = \frac{K_I^2}{E} \quad (1.50)$$

$$\text{en déformation plane} \quad G = \frac{K_I^2 (1-\nu^2)}{E} \quad (1.51)$$

Dans le cas de la présence simultanée des trois modes de sollicitations I , II et III , l'expression du taux de restitution d'énergie est de la forme suivante :

$$G = \frac{(1-\nu^2)(K_I^2 + K_{II}^2) + (1+\nu)K_{III}^2}{E} \quad (1.52)$$

Où K_{II} et K_{III} sont respectivement les facteurs d'intensité des contraintes en mode de cisaillement plan et anti-plan.

5. Paramètres élasto-plastique

5.1. Intégrales de contour

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie [16]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale J de Rice [15], l'intégrale duale I de Bui [17], l'intégrale hybride s'appuyant sur le super-élément de Tong et Pian [08] ou encore les intégrales T et A proposées par Bui et Proix [18] et mises en oeuvre et étudiées par Zhang [08].

L'intégrale de contour J utilisée comme paramètre caractéristique de l'état de contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans les matériaux dont le comportement est non linéaire, a connu un grand succès. Rice [15], qui proposa ce paramètre, assimile le comportement élasto-plastique à un comportement élastique non linéaire. En appliquant la théorie de la déformation pour analyser un solide fissuré, Il a démontré que le taux de restitution d'énergie non linéaire noté J , peut être déterminé à partir d'une intégrale de contour indépendante du contour d'intégration.

Le paramètre J est défini à partir de l'intégrale de contour suivante :

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x}) ds \quad (1.53)$$

Où Γ est un contour d'intégration entourant l'extrémité de la fissure, ds l'élément de longueur sur Γ , T_j et u_j les composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement en un point de Γ . La densité d'énergie de déformation W est définie quant à elle par :

$$W = \int_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.54)$$

Où σ_{ij} et ε_{ij} sont les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations au point courant sur le contour Γ .

Cette intégrale présente de nombreuses caractéristiques intéressantes [19]:

- D'une part, cette intégrale est indépendante du choix du contour d'intégration Γ . En effet, en prenant deux contours d'intégration distincts, on montre que la différence des expressions de J correspondantes est nulle.

- Rice a montré que J est égale au travail d'ouverture des lèvres lors d'une extension de fissure.

- De même, J est égale à la variation d'énergie potentielle π lors de l'extension de fissure.

- J quantifie l'intensité des champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure.

- Sous hypothèse de chargement proportionnel (dans ce cas, le comportement d'un matériau élasto-plastique peut être assimilé à celui d'un matériau élastique non-linéaire), J permet l'extension de la théorie de Griffith aux matériaux élasto-plastiques .

- J peut s'exprimer également, lors d'un essai de déchirure sur éprouvette, à partir de l'aire sous la courbe expérimentale force-déplacement. En effet, cette aire correspond à l'énergie reçue par l'éprouvette.

L'ensemble de ces propriétés, numériques et analytiques, explique le statut de quasi-monopole dont dispose l'intégrale J pour la définition de critères d'amorçage et de propagation en mécanique de la rupture non-linéaire.

Note 1.5: Pour un matériau élastique non linéaire, la définition de J est équivalente à celle du taux de restitution d'énergie G , défini par Griffith, correspondant à la variation d'énergie élastique liée à une extension de fissure.

5.2. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)

En élastoplasticité, la pointe de la fissure s'émousse et certains auteurs [20] ont proposé d'utiliser l'ouverture de fissure comme paramètre de mécanique de la rupture. Le CTOD, ou écartement de fissure δ , a ainsi été défini à partir des déplacements de la pointe de fissure, mesurés à l'intersection de la frontière de la zone plastique avec les lèvres de la fissure.

Il est ensuite possible de relier le CTOD au taux de restitution d'énergie, ou encore à l'intégrale J en utilisant la solution asymptotique *HRR* [21]:

$$\delta = d_n (\sigma_o, n) \frac{J}{\sigma_o} \quad (1.55)$$

Où d_n est un coefficient de proportionnalité sans dimension, et qui dépend fortement du coefficient d'érouissage n , et peu de la limite d'élasticité σ_o .

6. Zones de dominance des différents paramètres

Le solide fissuré est subdivisé en plusieurs zones de dominance, et on peut alors être confronté à plusieurs situations [22] :

En élasticité linéaire, les zones *I* et *II* n'existent pas, et on peut déterminer la rupture uniquement à l'aide de K . Le paramètre G peut également être utilisé, et s'avère très précis lorsqu'il est calculé par des méthodes d'intégrales surfaciques. De plus, la fissure reste aiguë.

En plasticité confinée, la fissure subit un léger émoussement, la zone *I* apparaît, mais reste de petite taille (≈ 2 CTOD). Il apparaît une zone de plasticité (zone *II*) dominée par le paramètre J . La zone *III* reste valide. On peut continuer à utiliser K à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes équivalents, et des méthodes élastiques équivalentes [23] (Irwin, Dugdale-Barenblatt).

En plasticité étendue, la fissure s'émousse encore. La zone de dominance de K disparaît, et les zones *I* et *II* s'agrandissent. Les méthodes élastiques équivalentes ne sont plus valables, et la méthode élasto-plastique incrémentale est nécessaire pour le calcul des paramètres G ou J . Lorsque la plasticité s'étend encore, la rupture ne peut plus être caractérisée à l'aide d'un seul paramètre, et on rentre dans la zone de dominance de J .

Enfin, il peut arriver que la zone de grande déformation recouvre toutes les autres. Il n'est alors plus possible d'utiliser les différents paramètres J ou K pour caractériser la rupture.

7. Propagation des fissures

7.1. Critères de stabilité

Il existe deux types de propagation [24]:

- La propagation stable : après son amorçage, la fissure s'arrête, nécessitant plus d'énergie pour reprendre sa propagation. Ce mode de propagation n'est a priori pas dangereux.

- La propagation instable : après son amorçage, la fissure poursuit sa progression en l'absence de toute modification des paramètres de la sollicitation. Cette instabilité conduit alors à la ruine de la structure. L'analyse de la stabilité de propagation est fondée sur le bilan énergétique :

$$I = W_{ext} + W_e + W_d \quad (1.56)$$

où

I est l'énergie interne du système

W_{ext} représente le travail des forces extérieures

W_e est l'énergie de déformation

W_d est l'énergie dissipée lors d'une extension de fissure

Alors, pour une fissure de longueur a donnée, et un incrément de propagation da , la propagation sera

$$\text{Stable si } \frac{d^2I}{da^2}(a) < 0 \quad (1.57)$$

$$\text{Instable si } \frac{d^2I}{da^2}(a) > 0 \quad (1.58)$$

Pour étudier la stabilité d'une propagation de fissures, plusieurs méthodes ont été proposées. Parmi ces méthodes, la notion de courbe de résistance revient souvent.

7.2. Critères de bifurcation

Afin de prédire la direction de propagation des fissures trois critères courants sont possibles :

- Critère de la contrainte normale maximale : ce critère postule que la propagation prend place dans une des deux directions principales du tenseur du champ de contrainte en front de fissure, qui est celle où la traction est maximale [25].

- Critère du taux de restitution d'énergie maximal : ce critère postule que la propagation prend place dans la direction qui est telle que la restitution d'énergie pour un incrément de fissure est maximale [26].

- Critère de la densité d'énergie de déformation minimale : ce critère postule que la propagation prend place dans la direction où l'énergie de déformation est la plus faible [27].

Note 1.6: Plusieurs études comparatives ont été effectuées sur ces différents critères [28,29]. Elles montrent une bonne corrélation au niveau de l'angle de déviation et du chargement critique.

Dans cette thèse, nous utilisons le premier critère. Il est prouvé que la direction prédite par ce critère est la même que pour le critère du taux de restitution d'énergie maximal dans le cadre des problèmes de mécanique de la rupture élastique linéaire.

La contrainte circonférencelle dans la direction de la propagation de fissure est une contrainte principale. Par conséquent, l'angle critique θ_c définissant la direction radiale de la propagation peut être déterminée en plaçant la contrainte de cisaillement dans l'équation (1.32) égale à zéro. Après quelques manipulations, on obtient l'expression suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2} K_I \sin(\theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos(\theta) - 1) \right] = 0 \quad (1.59)$$

Ceci mène à l'équation définissant l'angle de la propagation de fissure θ_c :

$$K_I \sin(\theta_c) + K_{II} (3 \cos(\theta_c) - 1) = 0 \quad (1.60)$$

La résolution de cette équation donne :

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (1.61)$$

8. Formulation

8.1. Equations gouvernantes

Nous considérons la déformation statique d'un corps élastique linéaire, homogène et isotrope qui subit des petites déformations et des petits déplacements. Il occupe un domaine Ω limité par la frontière Γ . Il est soumis aux forces volumiques \bar{b} dans Ω , aux tractions de surface \bar{t} sur Γ_t et le déplacement \bar{u} est imposé sur Γ_u (avec $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ et $\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma$). Les grandeurs à déterminer pour résoudre ce type de problème sont le champ vectoriel de déplacement u , le champ tensoriel symétrique de déformation de Green-Lagrange ε et le champ tensoriel symétrique de contrainte de Cauchy σ .

Si on introduit une discontinuité géométrique Γ_c (Figure I.9), les équations d'équilibre et les conditions aux limites seront :

$$\nabla \cdot \sigma + \bar{b} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (1.62)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (1.63)$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^+ \quad (1.64)$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^- \quad (1.65)$$

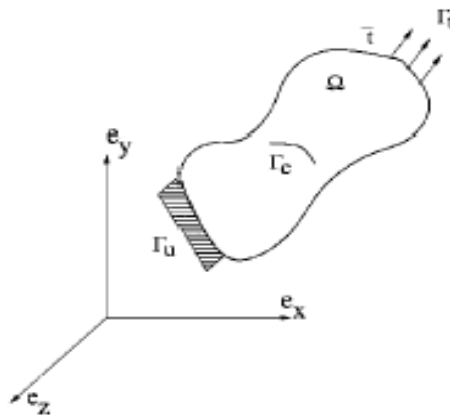


Figure I.9 : Corps avec frontière interne soumise aux charges

Dans notre travail, nous considérons de petites déformations. Les relations de compatibilité sont de forme :

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \nabla_s u \quad (1.66)$$

∇_s : est la part symétrique de tenseur gradient, les conditions aux limites sont :

$$u = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_u \quad (1.67)$$

la relation constitutive est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = C \varepsilon \quad (1.68)$$

Où C est le tenseur de Hooke.

8.2. Forme faible

L'espace des champs admissibles de déplacement est défini par :

$$U = \left\{ v \in V: v = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_u \text{ } v \text{ discontinu sur } \Gamma_c \right\} \quad (1.69)$$

Où l'espace V est lié à la régularité de la solution. Les détails sur le domaine contenant une frontière interne peut être trouvé dans les références [30,31]. On note que l'espace V tient compte des fonctions discontinues à travers la ligne de la fissure. L'espace de la fonction d'essai est défini comme:

$$U_0 = \left\{ v \in V: v = 0 \text{ sur } \Gamma_u \text{ } v \text{ discontinu sur } \Gamma_c \right\} \quad (1.70)$$

La forme faible des équations d'équilibre est donnée par:

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{b} \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{t} \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in U_0 \quad (1.71)$$

Le problème est de trouver $u \in U$ tels que:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{b} \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{t} \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in U_0 \quad (1.72)$$

9. Conclusion

Ce premier chapitre passe en revue l'analyse des fissures d'un point de vue mécanique. Les concepts de base du modèle physique de la mécanique de la rupture ainsi que les critères d'amorçage et d'accroissement des fissures ont été exposés. L'analyse des champs des déformations et des contraintes au voisinage des fissures a fait l'objet d'une étude détaillée, en mettant en évidence les paramètres déterminants et leurs domaines de validité. Cette analyse a permis d'orienter l'étude vers une modélisation plus réaliste des singularités au voisinage des fissures fixes et mobiles.

Les problèmes résolus dans cette thèse sont des problèmes de propagation de fissures sous chargement quasi-statique dans un milieu en état de contrainte plane ou de déformation plane, de comportement élastique homogène et isotrope et sous l'hypothèse des petites perturbations.

Chapitre II :
Modélisation numérique des singularités

1. Introduction

L'analyse de la nocivité des fissures repose pour une grande part sur la comparaison précise des grandeurs caractéristiques atteintes dans une configuration donnée de géométrie et de chargement aux valeurs caractéristiques correspondantes du matériau. Ce type de comparaison est en particulier mis en oeuvre de façon répétitive pour la simulation pas à pas de la propagation d'une fissure sous une histoire de chargement donnée.

Pour des solides fissurés infinis ou de forme extérieure simple, il existe de nombreuses solutions analytiques ou semi-analytiques e.g. [32]. Cependant, en réalité, les géométries et les chargements des pièces sont souvent complexes de sorte que la détermination analytique "exacte" des grandeurs caractéristiques est laborieuse. D'où l'intérêt d'avoir recours à des méthodes numériques tels que l'analyse par la méthode des éléments finis. Cette méthode, qui a donné de très nombreux résultats dans les problèmes de la mécanique des milieux continus, s'adapte bien aux problèmes de rupture. Cependant, l'utilisation des éléments finis standards, aux voisinages des fissures, rencontre quelques difficultés d'application à cause du caractère singulier du champ de déformations.

En effet, pour modéliser les fissures par la méthode des éléments finis standards, il est nécessaire de conformer la fissure à la ligne ou à la surface de la discontinuité. Ceci devient une difficulté importante pour le traitement des problèmes mobiles où la maille doit être réactualisée à chaque étape. La re-projection de la solution est une opération qui, non seulement peut être coûteuse, mais qui peut aussi avoir un impact fâcheux sur la qualité des résultats. Pendant ces dernières décennies, plusieurs approches ont été proposées afin de modéliser les problèmes de propagation des fissures : méthode des éléments finis à quart de point [33,34], méthode des éléments finis enrichis [35,36], méthode de collocation de frontière [37], méthode d'équation intégrale [38], méthode de force de corps [39], méthode d'éléments de frontière [40], méthode de dislocation [41-43] et les méthodes sans maillage, en particulier la méthode Element free Galerkin [44-46].

Récemment, de nouvelles techniques de modélisation sans re-maillage de la propagation des fissures ont été développées. Celles-ci incluent l'incorporation d'un mode discontinu sur un élément de niveau [47], la technique de la maille mobile [48], et la technique d'enrichissement des éléments finis basée sur la partition d'unité [49].

2. Présentation de la méthode des éléments finis

Puisque la méthode des éléments finis a été utilisée dans cette étude, une exposition succincte de la méthode est donnée dans ce chapitre en se limitant toutefois aux éléments utilisés pour établir le modèle.

2.1. Principe de la méthode standard des éléments finis

L'analyse par la méthode des éléments finis consiste à discrétiser un milieu continu par subdivision, du système à étudier, en éléments finis de formes simples de manière à approximer le mieux possible sa géométrie [51-53].

Le calcul par la méthode des éléments finis donne, pour une structure discrétisée dans le plan (x,y) , les déplacements u_x et u_y de chacun des nœuds introduits dans la structure ainsi que les contraintes et les déformations aux points de *Gauss*.

2.2. Principales étapes d'analyse

Les principales étapes d'analyse par la méthode standard des éléments finis sont :

1. Discrétisation du milieu continu et sélection d'une approximation nodale.
2. Evaluation de la matrice de rigidité et du vecteur force élémentaires $[k]$ et $\{f\}$.
3. Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur force globaux $[K]$ et $\{F\}$.
4. Introduction des conditions aux limites.
5. Résolution du système d'équations $[K]\{U\}=\{F\}$.
6. Post-traitement.

2.3. Formulation des éléments finis quadratiques

La géométrie d'un élément isoparamétrique plan (Figure II.1) est transformée en un élément de référence carré dans le plan (ξ, η) , à travers les équations suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (11.1)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (11.2)$$

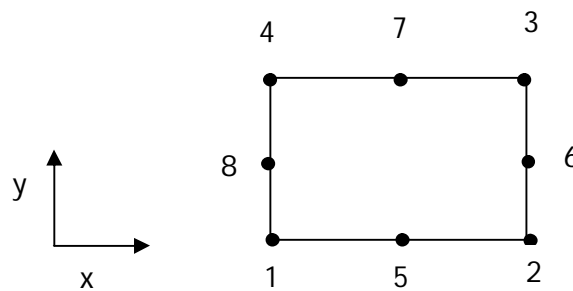


Figure II.1 : Géométrie de l'élément fini classique quadratique

Les déplacements sont interpolés par :

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad (11.3)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (11.4)$$

N_i sont les fonctions de forme .

Le vecteur de déformation est donné par:

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (11.5)$$

avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (11.7)$$

Tel que $[J]$ c'est la matrice jacobienne, elle a pour expression:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} & \frac{\partial y_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} & \frac{\partial y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

Les contraintes sont liées aux déformations par la loi de Hooke :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u_n\} \quad (11.9)$$

$[D]$ est la matrice des propriétés des matériaux. Pour le cas d'un matériau isotrope, cette matrice est donnée par :

- En contraintes planes

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

- En déformations planes

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

La matrice de rigidité est donnée par:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (11.12)$$

3. Techniques de discrétisation de la fissure

En ce qui concerne les techniques de discrétisation de la fissure, plusieurs voies sont possibles :

3.1. Discrétisation à l'aide d'éléments finis classiques

Cette technique consiste à étudier la structure fissurée en utilisant les éléments finis classiques dont la formulation est suffisamment exposée dans la littérature. La figure II.2 illustre un exemple de maillage d'une demi-éprouvette CT (Compact Tension) à l'aide des éléments finis classiques [53].

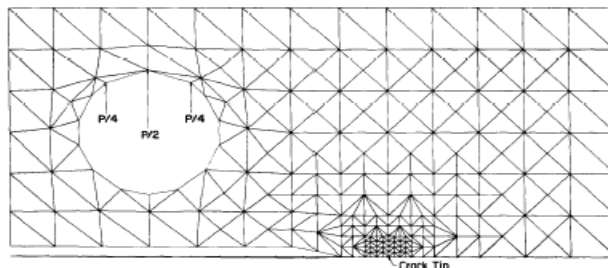


Figure II.2 : Maillage classique de la demi-éprouvette CT

3.2. Discrétisation à l'aide d'éléments finis enrichis

Dans cette technique et pour représenter analytiquement la singularité, la structure fissurée est modélisée à l'aide d'éléments finis enrichis par l'introduction des fonctions particulières.

On entend par le terme "enrichi" le fait que le champ de déplacement global, relatif à l'élément fini à la proximité du front de fissure, est amélioré par la prise en considération du champ de déplacement local au voisinage de la fissure. Ces éléments sont utilisés en pointe de fissure, le reste de la structure étant modélisé à l'aide des éléments finis classiques (Figure II.3) [35].

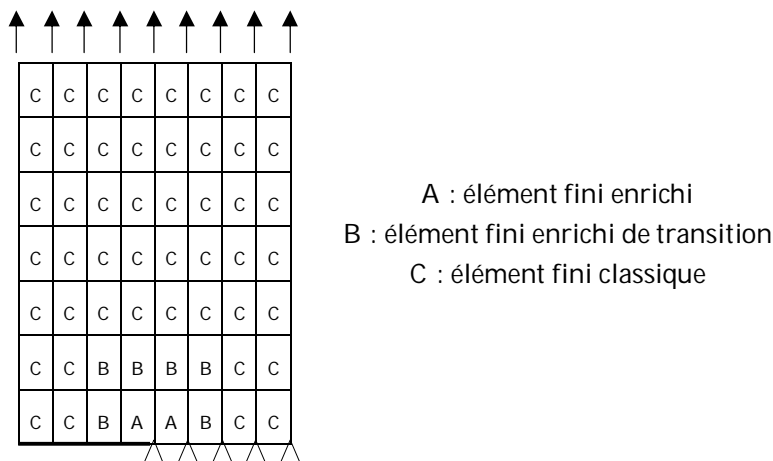


Figure II.3: Maillage par éléments finis enrichis d'une éprouvette SEN

3.3. Discrétisation à l'aide d'éléments finis dégénérés

Cette technique consiste à reproduire une singularité d'ordre $r^{-1/2}$ à travers des configurations géométriques spéciales des éléments finis isoparamétriques quadratiques en rapprochant les nœuds milieux des côtés adjacents à la pointe de la fissure au quart de la distance depuis le fond de la fissure (Figure II.4).

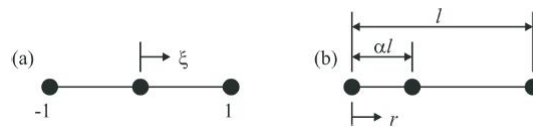


Figure II.4: Principe de l'élément fini dégénéré

4. Modélisation des singularités par l'approche Q-FEM

4.1. Bref aperçu historique

Henshell [33] et Barsoum [34] ont démontré la possibilité de produire une singularité d'ordre $r^{-1/2}$ à travers des configurations géométriques spéciales des éléments iso-paramétriques quadratiques en rapprochant les nœuds milieux des côtés adjacents à la pointe de la fissure au quart de la distance depuis le fond de la fissure (Figure II.5).

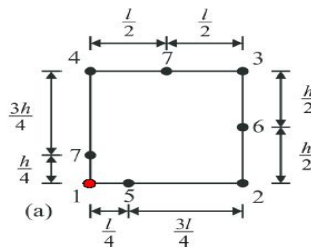


Figure II.5: Élément fini quadratique à quart de point

De même, il a été démontré que les éléments finis triangulaires obtenus à partir des éléments finis quadrilatéraux à huit nœuds, en confondant les trois nœuds d'un côté en un nœud unique, reproduisent une singularité d'ordre $r^{-1/2}$ au voisinage des fissures (Figure II.6).

Fresse [54] a montré que les éléments finis triangulaires naturels (Figure II.7) et les éléments finis quadrilatéraux déformés fournissent des résultats identiques.

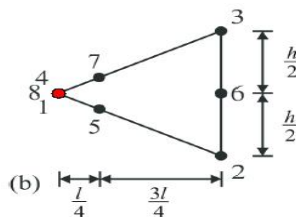


Figure II.6. Élément fini quadrilatéral déformé à quart de point

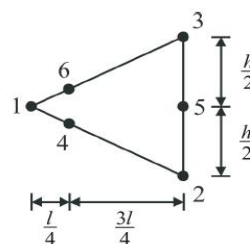


Figure II.7. Élément fini triangulaire naturel à quart de point

Un autre type d'éléments finis triangulaires à quart de point a été obtenu à travers des éléments finis à neuf nœuds. Manu [55] a montré que ce type d'élément reproduit, aussi, une singularité d'ordre $r^{-1/2}$ en rapprochant le nœud au quart de la distance du front de la fissure.

Hibbitt [56] a prouvé que, dans les éléments finis rectangulaires, la singularité est présente le long des arêtes, alors qu'elle est omniprésente à l'intérieur des éléments triangulaires. L'extension des éléments finis quadratiques (QPE) à des éléments finis iso-paramétriques cubiques a été proposée par Pu [57]. Yamada [58] a étendu le concept des éléments finis à huit nœuds à des éléments finis à 12 nœuds. Dans les références [59,60], il a été conclu qu'il est impossible de recommander une taille optimale des éléments singuliers (QPE) convenable pour toutes les situations.

L'effet du rapport l/a (longueur de l'élément fini singulier (QPE) sur la longueur totale de la fissure) a fait aussi l'objet de plusieurs études [61,62]. De bons résultats semblent être obtenus pour un rapport l/a égal à $1/10$. Une recommandation additionnelle est qu'au moins un nombre de quatre éléments finis (en mode pur) et de huit éléments finis (en mode mixte) doivent entourer la pointe de la fissure.

Pour les analyses tridimensionnelle, Barsoum [63] a démontré la possibilité d'extension du concept d'éléments finis à quart de point à travers une configuration droite des éléments finis (QPE) à 20 nœuds (Figure II.8).

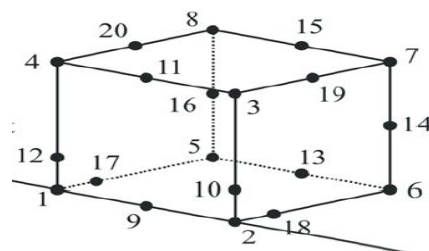


Figure II.8: Configuration droite des éléments finis à quart de point à 20 nœuds

Les études [64-66] ont considéré une configuration courbe des éléments finis (QPE) à 20 nœuds (Figure II.9).

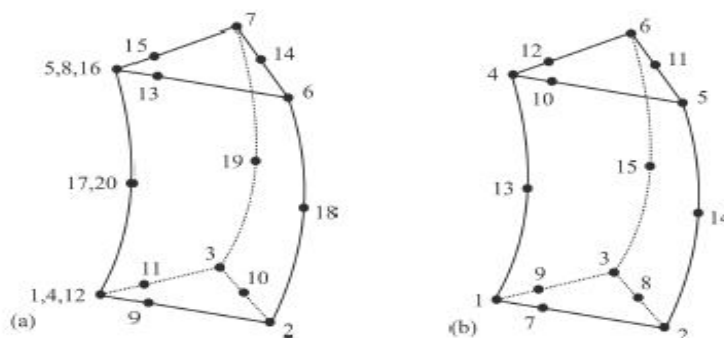


Figure II.9: Configuration courbe des éléments finis à quart de point à 20 nœuds

Une évaluation des éléments finis à quart de point a été proposée par Barsoum [67] pour les analyses bi et tridimensionnelle. Deux sources d'erreurs de modélisation ont été discutées :

- a)- le type d'élément singulier (triangle - rectangle),
- b)- la configuration d'élément singulier (droite, courbe).

Il note que :

- 1)- Il est préférable d'utiliser des éléments triangulaires,
- 2)- les côtés des éléments ne doivent pas être courbés.

4.2. Formulation mathématique

Pour des raisons de simplicité, on cherche la singularité effective sur la ligne 1-2 (Figure II.5).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (II.13)$$

avec :

$$u = N_1(\xi, \eta) u_1 + N_2(\xi, \eta) u_2 + N_5(\xi, \eta) u_5 \quad (II.14)$$

$$x = N_1(\xi, \eta) x_1 + N_2(\xi, \eta) x_2 + N_5(\xi, \eta) x_5 \quad (II.15)$$

Les fonctions de forme exprimées le long de la ligne 1-2 sont :

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \quad (II.16)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \quad (II.17)$$

$$N_5 = (1 - \xi^2) \quad (II.18)$$

4.2.1. Formulation des éléments finis quadratiques standards

Dans un élément fini quadratique standard, on aura $x_1 = 0$, $x_2 = L$ et $x_5 = L/2$ (avec L est la longueur de l'élément fini standard à la pointe de la fissure).

D'après l'équation (II.15) :

$$x = \frac{(\xi + 1)L}{2} \quad (II.19)$$

$$\text{D'où : } \xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (II.20)$$

D'après l'équation (II.13), la déformation dans la direction des « x » est de forme :

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{2} \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{6}{L} \right) u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{8x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) u_2 + \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) u_5 \quad (II.21)$$

4.2.2. Formulation des éléments finis quadratiques à quart de point

Dans un élément fini quadratique à quart de point, on aura $x_1 = 0$, $x_2 = L$ et $x_3 = L/4$ (avec L est la longueur de l'élément fini à quart de point à la pointe de la fissure).

D'après l'équation (II.15) :

$$x = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) L + (1 - \xi^2) \frac{L}{4} \quad (II.22)$$

On obtient une équation de 2ème degré de forme :

$$\xi^2 + 2 \xi + \left(1 + \frac{4x}{L}\right) = 0 \quad (II.23)$$

La résolution de cette équation donne :

$$\xi = \left(-1 + 2 \sqrt{\frac{x}{L}}\right) \quad (II.24)$$

D'après l'équation (II.13), la déformation dans la direction des « x » est de forme :

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L}\right) u_1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{xL}} + \frac{4}{L}\right) u_2 + \left(\frac{2}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L}\right) u_3 \quad (II.25)$$

5. Modélisation des singularités par l'approche DQ-FEM

Lors de ces dernières années, des différentes études ont été effectuées pour développer les éléments finis à quart de point et élargir leur domaine d'application e.g [68-72] . Ces efforts sont motivés par l'efficacité de l'élément fini à quart de point à reproduire la singularité et par leur simplicité d'intégration dans des programmes de calcul sans modifications majeurs.

Sur la base du principe des éléments finis à simple singularité (QPE), une modification géométrique peut être proposée afin d'obtenir des éléments finis à double singularité (DQPE). Cette modification consiste à rapprocher, au quart de la distance, les nœuds intermédiaires des deux cotés opposés (Figure II.10).

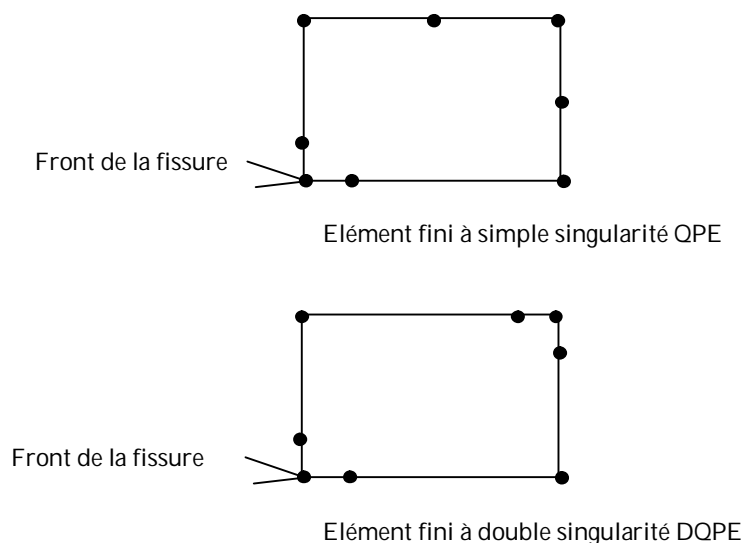


Figure II.10 : Géométrie des éléments finis QPE et DQPE

6. Modélisation par les éléments étendus

6.1. Méthode X-FEM : état d'art

6.1.1. Travaux de base

Belytschko [49] a présenté une méthode pour enrichir les approximations d'éléments finis de sorte que les problèmes de fissuration puissent être résolus avec un remaillage minimal. La méthode permet aux fissures d'être arbitrairement alignées sur la maille. L'idée essentielle de cette technique est d'ajouter des fonctions discontinues d'enrichissement à l'approximation d'élément fini pour prendre en compte la présence des fissures. Elle exploite la propriété de partition d'unité des éléments finis identifiée par Melenk [73] et Duarte [74], et qui permet à des fonctions locales d'enrichissement d'être facilement incorporées dans une approximation d'élément fini. Moes [75] et Dolbow [76-77] ont introduit une technique beaucoup plus élégante en adaptant un enrichissement qui inclut le champ asymptotique proche du front de la fissure et une fonction de Heaviside $H(x)$. La fonction de saut de Heaviside est une fonction discontinue à travers la surface de la fissure et elle est constante de chaque côté de la fissure : $+1$ d'un côté et -1 de l'autre. Son utilisation représente une amélioration principale par rapport à la technique de Belytschko [49] où un algorithme de tracer présenté par Fleming [46] est employé pour aligner la discontinuité avec la géométrie de la fissure. Cette nouvelle méthodologie numérique s'est développée par la suite sous le nom de la méthode X-FEM (eXtended-Finite-Element-Method).

Sukumar [78] a étendu le concept de la méthode X-FEM au cas des fissures statiques en trois dimensions. Une fonction discontinue a été utilisée pour modéliser l'intérieur de la surface de la fissure, et des fonctions des champs de déplacement asymptotiques bi-dimensionnelles ont été employées pour l'enrichissement en bout des fissures. Daux [79] a introduit une nouvelle fonction dite « fonction de jonction $J(x)$ » pour la représentation des fissures à branches multiples. Il a employé les champs asymptotiques proche du front de la fissure, la fonction discontinue $H(x)$ et une nouvelle fonction discontinue $J(x)$ pour prendre en compte la jonction. Cette technique a été utilisée pour modéliser les géométries compliquées tels que les fissures à branches multiples, les vides et les fissures émanant des trous. Belytschko [80] a généralisé la méthodologie de représentation sans remaillage des discontinuités mobiles par la méthode des éléments finis étendus exposé dans les références [49,75,76].

Stolarska [81] a présenté un algorithme qui couple la méthode d'éléments finis étendus avec la méthode de courbe de niveau LSM (Level-Set-Method) [82] pour la résolution du problème elasto-statique de fissuration en fatigue. La méthode LSM a été employée afin de localiser l'endroit de la fissure. Alors, que la méthode XFEM a été employée pour le calcul des champs des contraintes et des déplacements nécessaires à la détermination du taux de propagation de la fissure. Cette technique de couplage X-FEM/LSM a eu un succès inédit; elle a été utilisée pratiquement par la plus des travaux d'analyse par X-FEM. Une étude complète de la représentativité de la technique LSM est exposé en détail dans la référence [83].

6.1.2. Synthèse des travaux de recherche

Le succès inédit de cette nouvelle méthode, en particulier après l'apparition du concept de couplage XFEM/LSM, a poussé de nombreux auteurs à rechercher les performances

de cette méthode et à élargir son domaine d'application. Ces divers travaux de recherche peuvent être enveloppés dans les grands axes suivants :

- *Etude de robustesse et de convergence* : précision et convergence [84-86], analyse et évaluation des facteurs d'intensité des contraintes [87-93].

- *L'élargissement de la technique à divers champs de comportement* : élasto- plasticité [94-97], problèmes dynamiques [98-105], espace temps [106-108] et grandes déformations [109-112].

- *Exploration des différents sujets de modélisation* : trous et inclusion [113], fissure plane et non plane [114-117], micro et macro-fissure [118,119], dislocation et interfaces [120-122], fissures cohésives [123-129], contact et frottement [130-134] et endommagement [135-137].

- *Différents types de structures* : matériaux orthotropes [138-141], matériaux composites [142], microstructure [143] et plaques [144-147].

- *L'élargissement du domaine d'utilisation* : mécanique des fluides [148-151], transformation de phase [152-154], matériaux FGMs [155-157].

Note II.1: Pour une présentation synthétique, le lecteur pourra se reporter à la référence [158], où nous avons exposé un état de l'art complet sur la modélisation de la fissuration par la méthode X-FEM.

6.2. Méthode X-FEM : concepts de base

6.2.1. Partition d'unité

Considérons un domaine discrétisé par un ensemble N de n nœuds. Sur cet ensemble de nœuds s'appuie un ensemble de fonctions de forme N_i .

$$\bar{u} = \sum_{i \in N} N_i(x) u_i \quad (11.26)$$

\bar{u} est une approximation éléments finis standard de u . Il est possible de démontrer qu'à la condition que les N_i constituent une partition de l'unité dans le domaine Ω , c'est à dire :

$$\sum_{i \in N} N_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (11.27)$$

on peut enrichir l'approximation de u de la façon suivante :

$$\bar{u} = \sum_{i \in N} N_i(x) u_i + \sum_{i \in N^e} N_i(x) \phi(x) u_i^e \quad (11.28)$$

où ϕ est la fonction d'enrichissement et N^e l'ensemble des nœuds auxquels on choisit de placer des degrés de liberté enrichis u_i^e . L'idée d'exploiter le fait que les fonctions de forme constituent une partition de l'unité peut être illustrée de la façon suivante : si on prend $N^e = N$, que l'on met les degrés de liberté classiques u_i à 0 et les degrés de liberté enrichis u_i^e à 1, alors on reproduit exactement dans le domaine entier la fonction d'enrichissement ϕ :

$$u = \sum_{i \in N} N_i(x) \phi(x) = \phi(x) \quad (II.29)$$

6.2.2. Principe

La méthode des éléments finis étendus X-FEM consiste à enrichir par des fonctions singulières et par une fonction discontinue la base de la méthode classique d'éléments finis définie sur un maillage du domaine non fissuré. Elle permet alors de modéliser la propagation d'une fissure en utilisant un maillage fixe indépendant de la géométrie de la fissure.

Afin d'introduire la notion d'enrichissement discontinu, base de l'approximation X-FEM, considérons le cas simple suivant d'un maillage éléments finis conforme à la fissure et un élément fini "sain" [75].

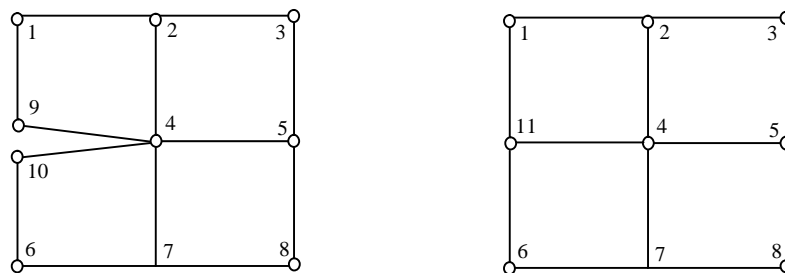


Figure II. 11. Représentation des maillages avec et sans fissure

On peut définir deux variables a et b par :

$$a = \frac{u_9 + u_{10}}{2} \quad (II.30)$$

$$b = \frac{u_9 - u_{10}}{2} \quad (II.31)$$

qui représentent en fait la valeur moyenne et l'écart par rapport à cette valeur moyenne des déplacements u_9 et u_{10} de part et d'autre de la discontinuité. En faisant de même pour deux autres variables c et d relatives aux déplacements verticaux, nous pouvons exprimer u_9 , u_{10} et v_9 , v_{10} en fonction de a , b , c et d tel que :

$$u_9 = a + b \quad (II.32)$$

$$u_{10} = a - b \quad (II.33)$$

$$v_9 = c + d \quad (II.34)$$

$$v_{10} = c - d \quad (II.35)$$

Ensuite en remplaçant u_9 , u_{10} et v_9 , v_{10} en terme de a , b , c et d dans l'approximation éléments finis, on obtient :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + N_9(a + b) + N_{10}(a - b) \quad (II.36)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + N_9(c + d) + N_{10}(c - d) \quad (11.37)$$

Si on introduit une fonction de Heaviside telle que :

$$H(x,y) = -1 \quad \text{pour } y < 0 \quad (11.38)$$

$$H(x,y) = +1 \quad \text{pour } y > 0 \quad (11.39)$$

on peut alors écrire :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + N_9(a + H b) + N_{10}(a + H b) \quad (11.40)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + N_9(c + H d) + N_{10}(c + H d) \quad (11.41)$$

Puisque la fonction de Heaviside sera positive pour les fonctions de forme situées dans les quadrants des y positifs, ce qui est le cas de la fonction de forme N_9 .

Ensuite, en regroupant les termes a , c et Hb et Hd on a :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + a(N_9 + N_{10}) + H b(N_9 + N_{10}) \quad (11.42)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + c(N_9 + N_{10}) + H d(N_9 + N_{10}) \quad (11.43)$$

Si l'on regarde maintenant de plus près l'allure des fonctions de forme aux nœuds 9 et 10, ainsi qu'aux nœuds 11 dans le cas du modèle sans fissure, on remarque une chose intéressante : la fonction de forme N_{11} peut être remplacée par la somme des fonctions de forme N_9 et N_{10} du modèle "sain". On a alors comme expression pour les déplacements :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + u_{11} N_{11} + H b N_{11} \quad (11.44)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + v_{11} N_{11} + H d N_{11} \quad (11.45)$$

ou encore sous forme compacte :

$$u = \sum_{i \in I} u_i N_i(x) + \sum_{i \in L} H(x) a_i N_i(x) \quad (11.46)$$

Où I est l'ensemble des nœuds du domaine, et L l'ensemble des nœuds à enrichir le long de la discontinuité. Cette forme est très proche de celle que l'on aurait prise pour étudier le modèle "sain". La seule différence est l'ajout d'un degré de liberté en plus par dimension. C'est d'ailleurs ce degré de liberté qui par la suite permettra de prendre en compte la discontinuité dans le champ de déplacement.

6.2.3. Enrichissement

D'une façon générale, l'approximation de la solution globale dans la méthode des éléments finis standards peut être écrite de la manière suivante :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (11.47)$$

Où u_i est le vecteur de déplacement du nœud « i » et N_i est la fonction de forme bilinéaire associée au nœud « i ». L'idée essentielle proposée par Belytschko [49] est d'ajouter des fonctions discontinues d'enrichissement à l'approximation d'élément fini pour prendre en compte la présence des fissures.

Dans le cas de l'élasticité isotrope, les fonctions d'enrichissement au bout de la fissure sont:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right\} \quad (11.48)$$

Note II.2: La première fonction est discontinue à travers les faces de la fissure tandis que les trois dernières fonctions sont continues.

L'approximation prend la forme de l'enrichissement suivant:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \left(u_i + \sum_{j=1}^{ne(i)} a_{ji} F_j(r, \theta) \right) \quad (11.49)$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \left(v_i + \sum_{j=1}^{ne(i)} b_{ji} F_j(r, \theta) \right) \quad (11.50)$$

où (r, θ) est le système des coordonnées polaires. $N_i(x)$ sont les fonctions de forme des éléments finis. Les coefficients d'enrichissement a_{ji} et b_{ji} sont associés aux nœuds et $ne(i)$ est le nombre de coefficients pour le nœud i .

Note II.3: Le nombre de coefficients pour le nœud i est choisi égal à *quatre* pour tous les nœuds autour du bout de fissure et à *zéro* pour tous les autres nœuds.

Note II.4: Quand des segments multiples de fissure sont nécessaires d'être enrichis avec les champs proches de fissure, un algorithme de tracer présenté par Fleming [46] est employé pour aligner la discontinuité avec la géométrie de la fissure.

Moes [75] a adapté un enrichissement qui inclut le champ asymptotique proche du front de la fissure et une fonction de Heaviside $H(x)$. De nouveaux degrés de liberté sont ajoutés pour le saut de fissure, et de nouveaux degrés de liberté sont ajoutés pour l'ouverture de bout de fissure.

Les fonctions de la méthode des éléments finis standards seront changés en formules suivantes:

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K1} \phi_k \left(\sum_{l=1}^4 c_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K2} \phi_k \left(\sum_{l=1}^4 c_k^{l2} F_l^2(x) \right) \quad (11.51)$$

Ici, u_i est le vecteur de déplacement nodal associé à la partie continue de la solution des éléments finis, b_i est le vecteur de degrés de liberté nodaux enrichis associés à la fonction discontinue particulière (Heaviside, fonction de distance, fonction signe, etc.) lorsque l'élément est complètement coupé, c_i est le vecteur de degrés de liberté nodaux enrichis associés aux fonctions asymptotiques linéaires liées au front de fissure.

Avec J est l'ensemble de nœuds cerclés et K est l'ensemble de nœuds carrés (Figure II.12). K_1 et K_2 sont respectivement les ensembles de nœuds à enrichir pour le premier et le deuxième front de la fissure. $H(x)$ est la fonction de Heaviside et $F_1^l(x)$ et $F_2^l(x)$ sont des fonctions au voisinage du front de la fissure.

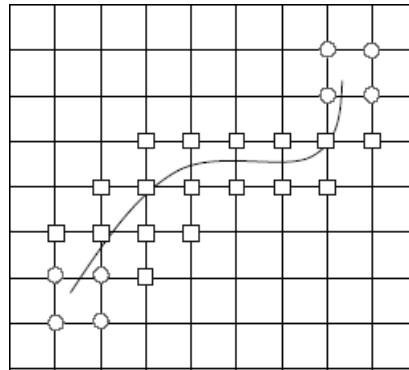


Figure II.12 : Schéma d'enrichissement des nœuds

6.3. Intégration numérique

La difficulté majeure dans le cas des éléments finis étendus consiste à pouvoir effectuer l'intégration numérique correctement de part et d'autre de la fissure. En effet, la matrice contenant les fonctions de forme n'est plus identique des deux côtés de cette discontinuité compte tenu de la présence d'un terme H dans les équations d'équilibre. Afin d'éviter l'introduction d'erreurs voire même de dépendance dans les matrices éléments finis, chaque élément fini est divisé en sous-domaines qui ne coupent pas la discontinuité (souvent en triangles). C'est sur ceux-ci qu'est effectuée l'intégration.

Cette division peut être illustrée par la figure suivante:

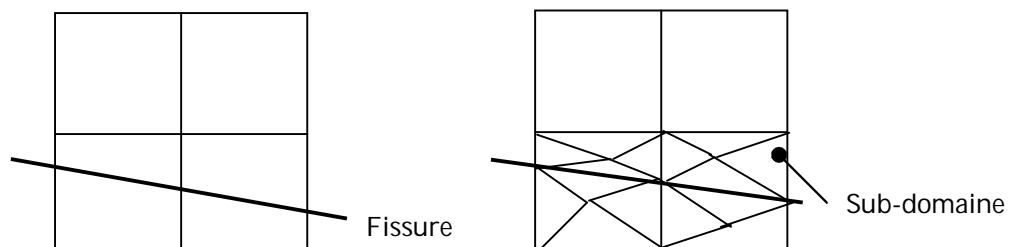


Figure II.13. Subdivision en triangles associés aux éléments coupés par la fissure

La forme faible discrète est construite avec une boucle sur tous les éléments, car le domaine est rapproché par :

$$\overline{\Omega}_e = \bigcup_{s=1}^{m_e^s} \overline{\Omega}_s \tag{II.52}$$

Où m_e est le nombre d'éléments, et Ω_e est le sub-domaine de l'élément. Pour des éléments coupés par une fissure, le sub-domaine d'élément est défini pour former une union d'un ensemble de sub-polygones dont les frontières s'alignent avec la géométrie de la fissure :

$$\overline{\Omega}_e = \bigcup_{s=1}^m \overline{\Omega}_s \quad (II.53)$$

Où m est le nombre de sub-polygones de l'élément.

Note II .5: Il faut préciser que cette division n'est effectuée que pour l'intégration numérique, c'est-à-dire qu'elle n'introduit pas de degré de liberté supplémentaire.

6.4. Choix du nombre de point d'intégration

Les éléments coupés par la fissure sont décomposés en sous-triangles sur lesquels une intégration à 3 *points* de *Gauss* est utilisée. Pour les éléments quadrangulaires qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques, une intégration à 12 *points* est effectuée pour les éléments triangulaires et 16 *points* pour les éléments quadrilatères.

Sur les éléments non coupés par la fissure et pour lesquels tous les degrés de liberté sont classiques, le nombre de points de *Gauss* utilisé est standard : pour des éléments du premier degré, on prend 1 *point* pour les triangles, 4 *points* pour les quadrilatères. La figure II.14 illustre un exemple de décomposition.

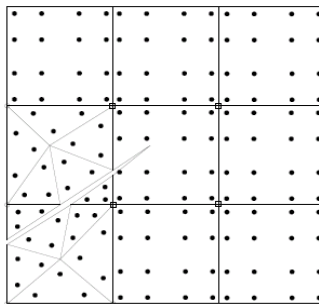


Figure II.14 : Un exemple de décomposition

6.5. Sélection des nœuds d'enrichissement

Le choix des nœuds d'enrichissement H est basé sur un critère de tolérance (ρ). En considérons A_s est l'aire du support d'un côté de la fissure et A_i est l'aire de l'autre côté de la fissure (Figure II.15), un nœud est enrichi si :

$$\frac{\min(A_s, A_i)}{A_s + A_i} > \rho \quad (II.54)$$

avec la valeur de ρ égale à 10^{-04} est prise en pratique.

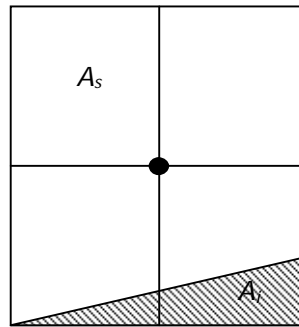


Figure II.15 : Choix de sélection des nœuds d'enrichissement

7. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de modéliser par éléments finis la singularité aux voisinages des fissures fixes et mobile. Deux types d'approches principales ont été exposés :

- Une approche qui consiste à utiliser les éléments finis dégénérés à simple singularité initialement développés par Barsoum. Une modification géométrique de ces éléments a permis de mettre en œuvre un nouveau type d'éléments finis dite « éléments finis à quart de point à double singularité » DQPE. Une idée originale de couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode de courbe de niveau LSM va donner naissance à trois nouvelles techniques de modélisation de la propagation des fissures sans avoir recours à des opérations de remaillage (S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM).

- Une deuxième approche dite X-FEM, basé sur la partition de l'unité, a permis l'émergence d'une nouvelle méthode dite « Méthode des éléments finis étendus ». Cette méthode permet l'introduction dans la base éléments finis de fonctions physiques en offrant la possibilité de représenter la structure indépendamment du maillage. Une étude de l'état de l'art a permis de mettre en œuvre des outils numériques nécessaires à une optimisation de l'implantation de cette nouvelle méthode dans un code de calcul.

Enfin, le principe, la formulation, les critères de convergence ainsi que les limites d'application de ces deux approches ont été explorées de façon à orienter l'étude vers une implantation adéquate.

Chapitre III :
Conception et description du code OMEGA

1. Eléments de conception

1.1. Extraction des facteurs d'intensité des contraintes

1.1.1. Technique d'extrapolation

C'est la technique la plus simple à mettre en oeuvre (et aussi la moins précise). Elle consiste à exploiter directement les déplacements nodaux situés aux nœuds les plus proches d'une pointe de fissure. Ainsi, pour une longueur de fissure donnée, les valeurs $K_I(r)$ et $K_{II}(r)$ sont calculés en divers points distants du fond de la fissure. Une extrapolation jusqu'au fond de la fissure ($r=0$) fournit les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes.

Il est possible d'obtenir le facteur d'intensité des contraintes à l'aide des relations suivantes:

$$K_I = \frac{E \sqrt{2\pi}}{(k+1)(1+\nu)} \frac{v}{\sqrt{r}} \quad (III.1)$$

$$K_{II} = \frac{E \sqrt{2\pi}}{(k+1)(1+\nu)} \frac{u}{\sqrt{r}} \quad (III.2)$$

avec:

r : Distance du front de la fissure

ν : Coefficient de Poisson

u, v : Les composantes des déplacements

$$\text{En contraintes planes : } k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (III.3)$$

$$\text{En déformations planes : } k = 3-4\nu \quad (III.4)$$

1.1.2. Technique DCT

Sur la base de la méthode DCT (Displacement-Correlation-Technique), le calcul des facteurs d'intensité des contraintes peut être obtenu en utilisant les champs des déplacements en arrière du fond de fissure ($\theta = \pm \pi$) à l'aide des formules suivantes [68]:

$$K_I = \frac{2G}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} (4v_2 - v_3 - 4v_4 - v_5) \quad (III.5)$$

$$K_{II} = \frac{2G}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} (4u_2 - u_3 - 4u_4 - u_5) \quad (III.6)$$

Avec :

G : Module de cisaillement

l : Longueur de l'élément de pointe

1.1.3. Technique QPDT

La technique QPDT (Quarter -Point - Displacement-Technique) propose les expressions suivantes [68] :

$$K_I = \frac{2G}{k+1} \sqrt{\frac{8\pi}{l}} \left[\frac{v_2 - v_4}{2} \right] \quad (III.7)$$

$$K_{II} = \frac{2G}{k+1} \sqrt{\frac{8\pi}{l}} \left[\frac{u_2 - u_4}{2} \right] \quad (III.8)$$

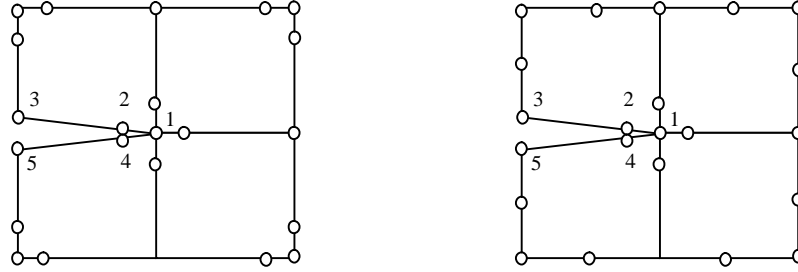


Figure III.1: Extraction par la technique DCT et QPDT

1.1.4. Intégrale d'interaction

Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés en utilisant les formes de domaine des intégrales d'interaction [159,160]. Pour le cas général des problèmes de mode mixte la relation entre la valeur de l'intégral J et les facteurs d'intensité de contraintes est de forme :

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (III.9)$$

Où E^* est défini par:

$$\text{En contrainte plane : } E^* = E \quad (III.10)$$

$$\text{En déformation plane : } E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (III.11)$$

Considérons deux états d'équilibre du corps fissuré :

Un état réel $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$ noté « 1 » et un état auxiliaire $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ noté « 2 ».

L'intégral J des deux états superposés est :

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{ij} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (III.12)$$

En réarrangeant les termes, nous obtenons:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (III.13)$$

où $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$ sont les intégrales J des états 1 et 2 respectivement. $I^{(1,2)}$ est l'intégrale d'interaction des deux états:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (III.14)$$

où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation mutuelle définie par:

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}) \quad (\text{III.15})$$

Nous écrivons la relation (III.12) pour la superposition des états et développons :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (\text{III.16})$$

Finalement, nous obtenons :

$$I^{(1+2)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (\text{III.17})$$

Si l'état auxiliaire est celui du mode I pur avec $K_I^{(2)} = 1$ et $K_{II}^{(2)} = 0$, le facteur d'intensité des contraintes du mode I de l'état réel s'obtient directement :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1, \text{mode } I)} \quad (\text{III.18})$$

De même, si l'état auxiliaire est celui du mode II pur avec $K_{II}^{(2)} = 1$ et $K_I^{(2)} = 0$, le facteur d'intensité des contraintes du mode II de l'état réel est donné par :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1, \text{mode } II)} \quad (\text{III.19})$$

Nous considérons une certaine intégrale sur le contour fermé de la figure III.2 où l'intégrande est celui de l'intégrale de l'équation (III.14) pondéré par une fonction q :

$$I = \int_{\Gamma} \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) q m_j d\Gamma \quad (\text{III.20})$$

où m est la normale extérieure au contour fermé qui vaut n sur Γ_2 et $-n$ sur Γ_1 . La fonction q est choisie telle que :

$$q = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \text{arbitraire} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

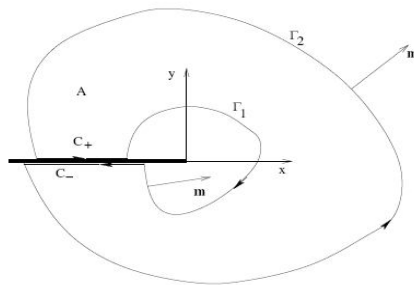


Figure III.2: Intégrale de contour J

D'une part, puisque $q=0$ sur Γ_2 et que l'intégrande est nul sur C^+ et C^- , l'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur Γ_1 :

$$I = \int_{\Gamma_1} \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) m_j d\Gamma = -J \quad (\text{III.22})$$

D'autre part, par le théorème de la divergence,

$$I = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) q + \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA \quad (III.23)$$

On peut facilement montrer que le premier terme de l'intégrande est nul en élasticité linéaire et par conséquent, la forme en domaine de l'intégrale J est :

$$J = - \int_A \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (III.24)$$

De la même manière, l'intégrale d'interaction évaluée sur un domaine est donnée par :

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (III.25)$$

La figure III.3 illustre respectivement la sélection des éléments autour de la fissure pour le calcul de l'intégrale d'interaction et les valeurs de la fonction poids q .

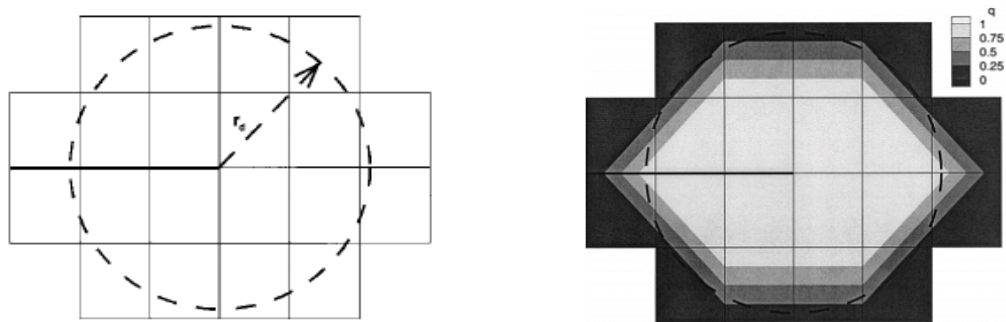


Figure III.3 : Sélection des éléments et fonction du poids q

La figure III.4 résume les techniques d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes utilisées respectivement pour les approches Q-FEM, DQ-FEM et X-FEM.

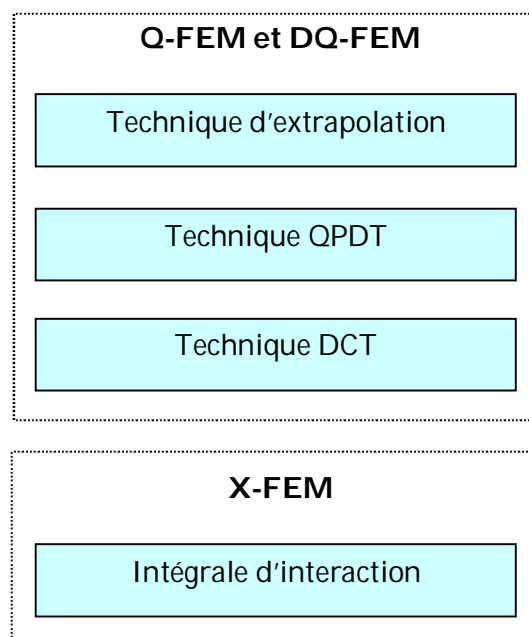


Figure III.4 : Techniques d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes

1.2. Implantation numérique

D'une façon générale, l'implantation de la méthode des éléments finis étendus X-FEM dans un code de calcul conduit à l'algorithme suivant:

1. Lecture des données sur la géométrie initiale de la discontinuité (fissure, inclusion etc.).
2. Sélection des éléments et des nœuds à enrichir, du type d'enrichissement, et de la loi de progression de la discontinuité.
3. Incrémentation du nombre de degrés de liberté par nœud.
4. Analyse géométrique de la discontinuité partition de l'élément, détermination des coordonnées des nouveaux points d'intégration, enrichissement des fonctions de forme.
5. Calcul de la matrice de rigidité K et du vecteur des forces f ; et assemblage.
6. Résolution et post-traitement.

1.3. Système discret des équations

Le système discret des équations linéaires à résoudre est de forme suivante:

$$Kd=f \quad (III.26)$$

Où d est le vecteur d'inconnues nodales, K la matrice globale de rigidité et f le vecteur des forces externes. La matrice de rigidité ainsi que le vecteur des forces sont calculés localement élément par élément et l'assemblage global est fait de façon classique. De manière plus détaillée, on peut exprimer la matrice de rigidité et le vecteur des forces comme :

$$k_{ij}^e = \begin{bmatrix} k_{ij}^{uu} & k_{ij}^{ua} & k_{ij}^{ub} \\ k_{ij}^{au} & k_{ij}^{aa} & k_{ij}^{ab} \\ k_{ij}^{bu} & k_{ij}^{ba} & k_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (III.27)$$

$$f_i^e = \{ f_i^u \quad f_i^a \quad f_i^{ub1} \quad f_i^{b2} \quad f_i^{b3} \quad f_i^{b4} \}^T \quad (III.28)$$

Où les sous matrices et vecteurs sont définis comme :

$$k_{ij}^{rs} = \int_{\Omega_e} (B_i^r)^T D B_j^s d\Omega \quad (r, s=u, a, b) \quad (III.29)$$

$$f_i^u = \int_{\partial\Omega_f^i \cap \partial\Omega_e} N_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} N_i b d\Omega \quad (III.30)$$

$$f_i^a = \int_{\partial\Omega_f^i \cap \partial\Omega_e} N_i H \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} N_i H b d\Omega \quad (III.31)$$

$$f_i^{b\alpha} = \int_{\partial\Omega_i^k \cap \partial\Omega^e} N_i \Phi_{\alpha} \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i \Phi_{\alpha} b d\Omega \quad (\alpha=1-4) \quad (III.32)$$

B_i^u , B_i^a et B_i^α sont les matrices des dérivées des fonctions de forme données par :

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (III.33)$$

$$B_i^a = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad (III.34)$$

$$B_i^b = [B_i^{b1} \ B_i^{b2} \ B_i^{b3} \ B_i^{b4}] \quad (III.35)$$

$$B_i^\alpha = \begin{bmatrix} (N_i \phi)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i \phi)_{,x} \\ (N_i \phi)_{,y} & (N_i \phi)_{,x} \end{bmatrix} \quad (\alpha=1-4) \quad (III.36)$$

1.4. Représentation de la fissure par la méthode Level sets

1.4.1. Méthode Level sets

La méthode des Level sets est un schéma numérique développé par Osher et Sethian [161] pour modéliser le mouvement des interfaces. Elle est basée sur la représentation de la matière par des courbes de niveau d'une fonction $\varphi(x, t)$ où t est un paramètre décrivant l'évolution spatiale de la frontière.

Une frontière $\Gamma(t) \subset \mathfrak{R}^3$ en mouvement peut être représentée par la fonction de niveau $\varphi : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ où :

$$\Gamma(t) = \{ x \in \mathfrak{R}^3 : \varphi(x, t) = 0 \} \quad (III.37)$$

On peut prendre par exemple pour fonction φ la fonction distance signée :

$$\varphi(x, t) = \pm \min_{x \in \varphi(t)} \| x - \bar{x} \| \quad (III.38)$$

L'évolution de la frontière est alors d'écrite par l'équation d'évolution de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F \| \nabla \phi \| = 0 \quad \text{avec } \varphi(x, 0) \text{ donné.} \quad (III.39)$$

où $F(x, t)$ est la vitesse de déplacement de la frontière en $x \in \Gamma(t)$ dans la direction de la normale extérieure.

1.4.2. Représentation de la fissure

A chaque nœud, deux nombres sont associés: le premier (φ) indique la distance à la fissure. Le deuxième (ψ) indique la position du nœud par rapport au front de la fissure.

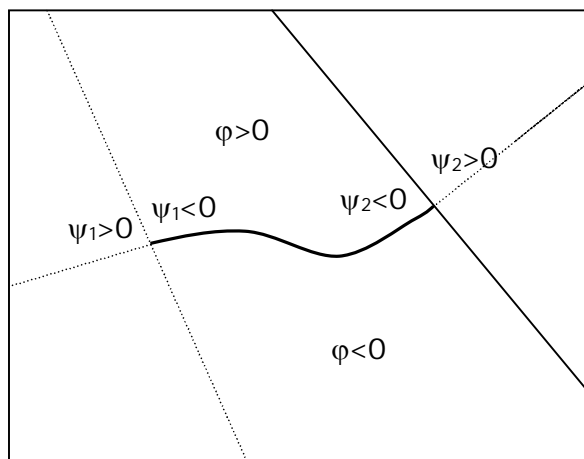
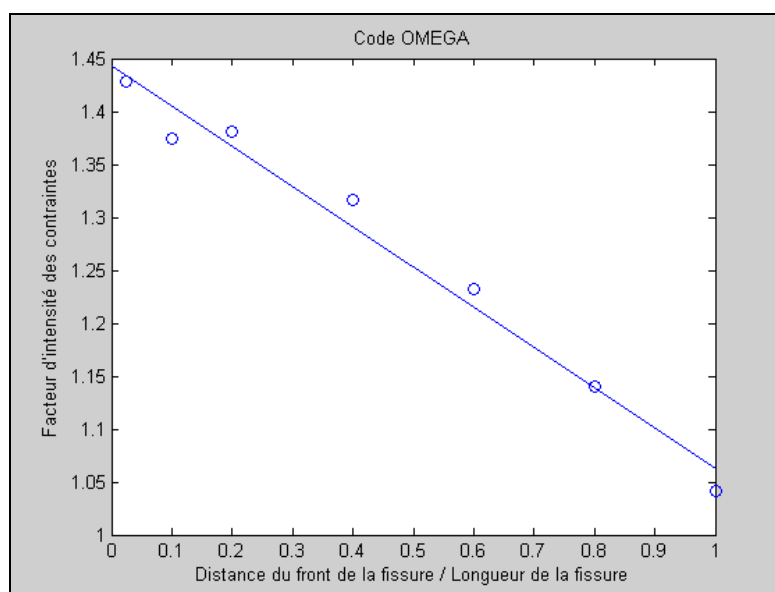


Figure III.5 : Représentation de la fissure par la courbe de niveau (LSM)

1.5. Principe du « Nœud fictif »

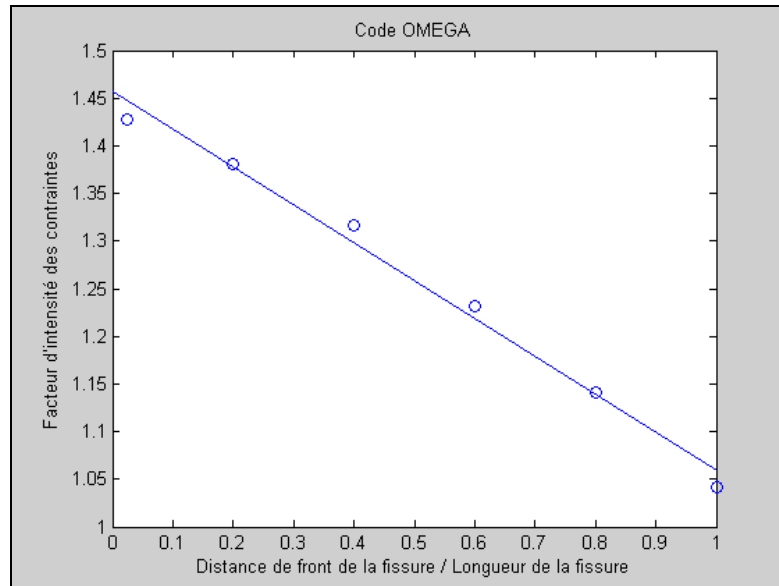
Ce principe a été proposé pour améliorer les résultats d'extrapolation des valeurs des facteurs d'intensité des contraintes obtenues par les éléments finis à double singularité DQPE. Un nœud fictif est *un nœud compté en pré-traitement et négligé en post-traitement*.

Les figures III.6 et III.7 mettent en évidence l'apport de ce principe sur la précision des valeurs des facteurs d'intensité des contraintes.



$$K \text{ numérique} = 1.44 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}, K \text{ théorique} = 1.486 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Figure III.6: Technique d'extrapolation standard



$$K \text{ numérique} = 1.46 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}, K \text{ théorique} = 1.486 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Figure III.7: Technique d'extrapolation modifiée

2. Description du code OMEGA

2.1. Présentation générale

Le code OMEGA est un outil, réalisé sous MATLAB [162-164], qui permet des analyses par éléments finis relatif aux problèmes de fissuration de sorte que ces problèmes puissent être résolus sans remaillage. Il permet également aux fissures d'être arbitrairement alignées sur la maille. Diverses possibilités d'analyse sont offertes :

- Une analyse par des éléments finis standards (S-FEM).
- Une analyse par des éléments finis dégénérés à simple singularité (Q-FEM).
- Une analyse par des éléments finis dégénérés à double singularité (DQ-FEM).
- Une analyse par des éléments finis étendus (X-FEM).

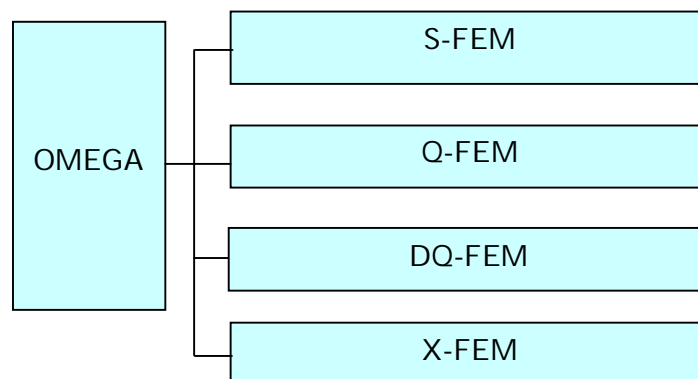


Figure III.8 : Différentes approches du code « OMEGA »

2.2. Fonctions du code OMEGA

L'ensemble des fonctions du code OMEGA est regroupé en trois grandes catégories :

- Pré-traitement : Introduction des données de base nécessaires.
- Traitement : Maillage et résolution par une approche donnée.
- Post-traitement : Extraction des facteurs d'intensité des contraintes et réalisation du graphisme.

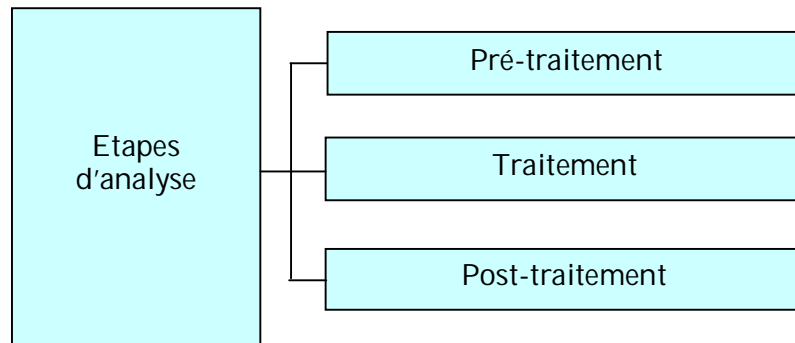


Figure III.9: Etapes d'analyse par le code « OMEGA »

2.2.1. Approche FEM

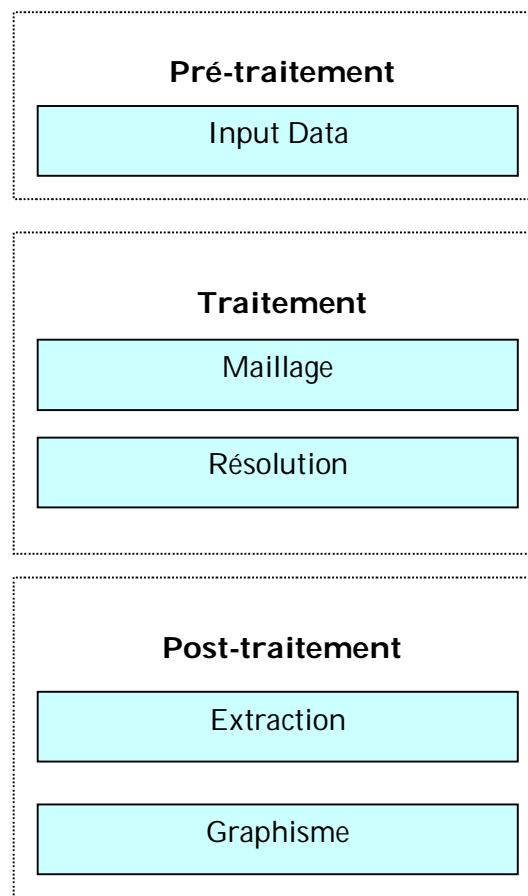


Figure III.10 : Schéma structural de l'approche FEM

2.2.2. Approche S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM

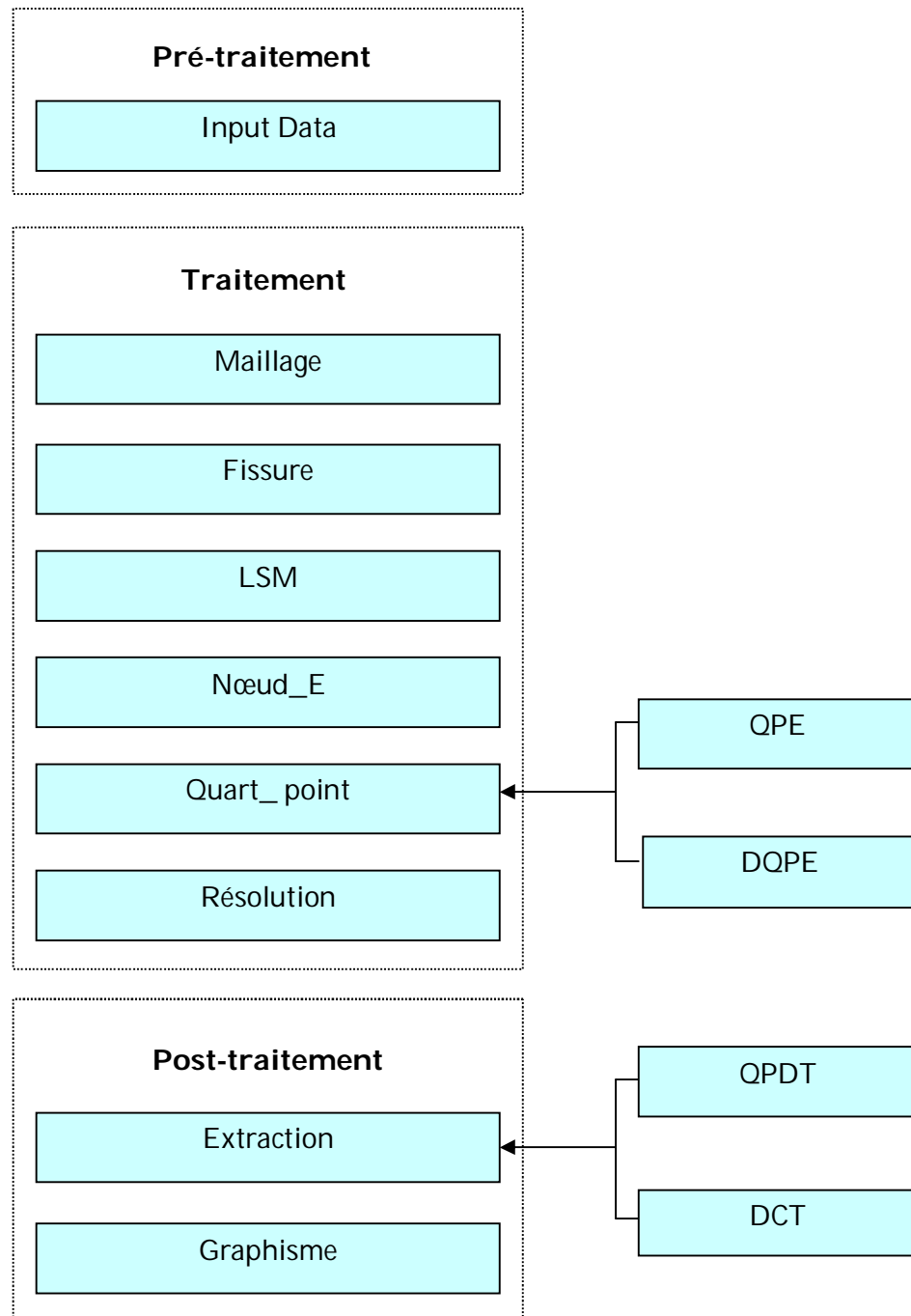


Figure III.11 : Schéma structural des approches S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM du code OMEGA

2.2.3. Approche X-FEM

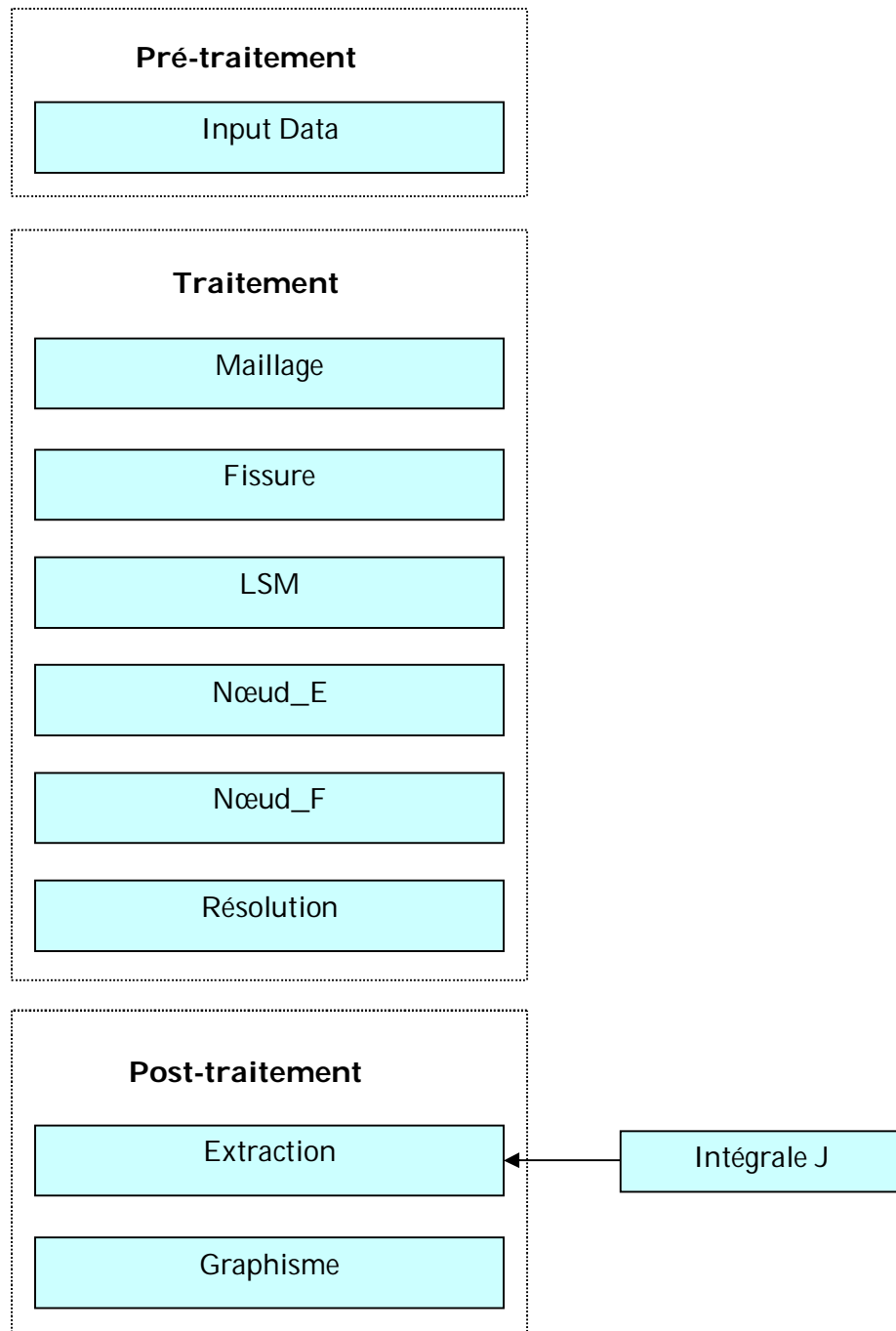


Figure III.12 : Schéma structural de l'approche X-FEM du code OMEGA

2.3. Structure du fichier des données

Ce fichier permet d'introduire les données de base nécessaires à la résolution d'un problème par une des quatre approches numériques constituant le code OMEGA.

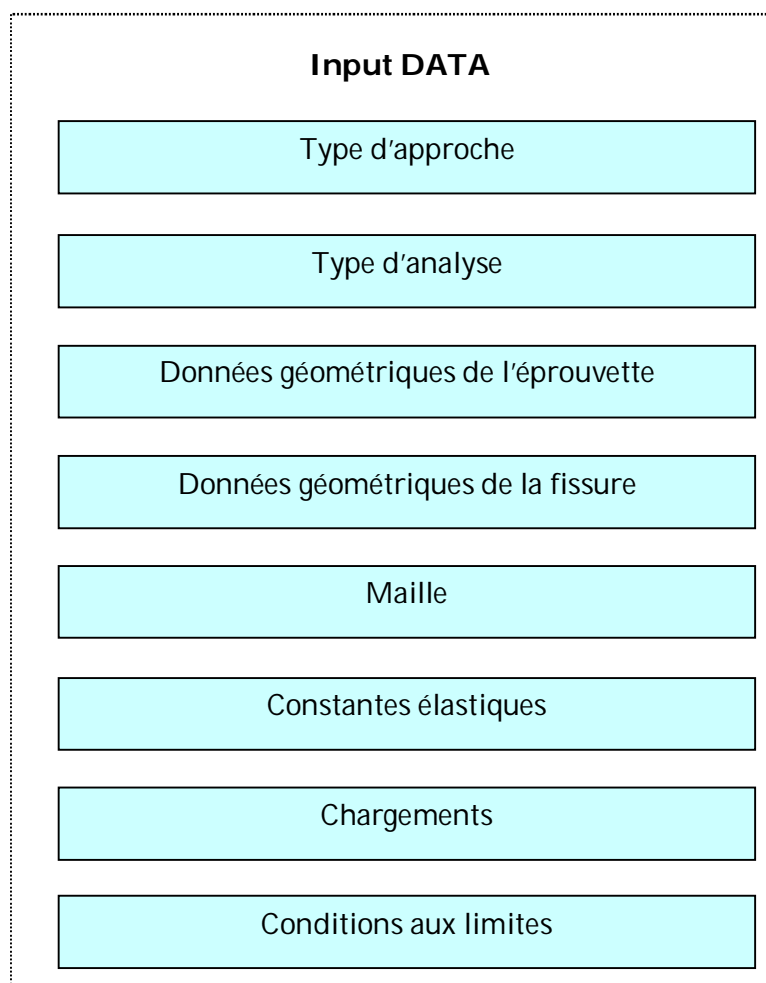


Figure III.13 : Structure du fichier des données « Input DATA »

2.4. Structure du bloc « Résolution »

Ce bloc permet la construction et la résolution du système d'équations d'un problème donné. Il est composé essentiellement de deux sous blocs :

- Résolution_C : pour une résolution par l'approche S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM.
- Résolution_X : pour une résolution par l'approche X-FEM.

Le bloc de Résolution_X comporte, par rapport au bloc standard, deux fonctions supplémentaires :

Fonctions_P : Introduction des fonctions d'enrichissement des éléments finis intérieurs (Fonc_H) et des éléments finis du front de la fissure (Fonc_F).

Intégral_P : Intégration des éléments finis intérieurs (Int_H) et des éléments finis du front de la fissure (Int_F).

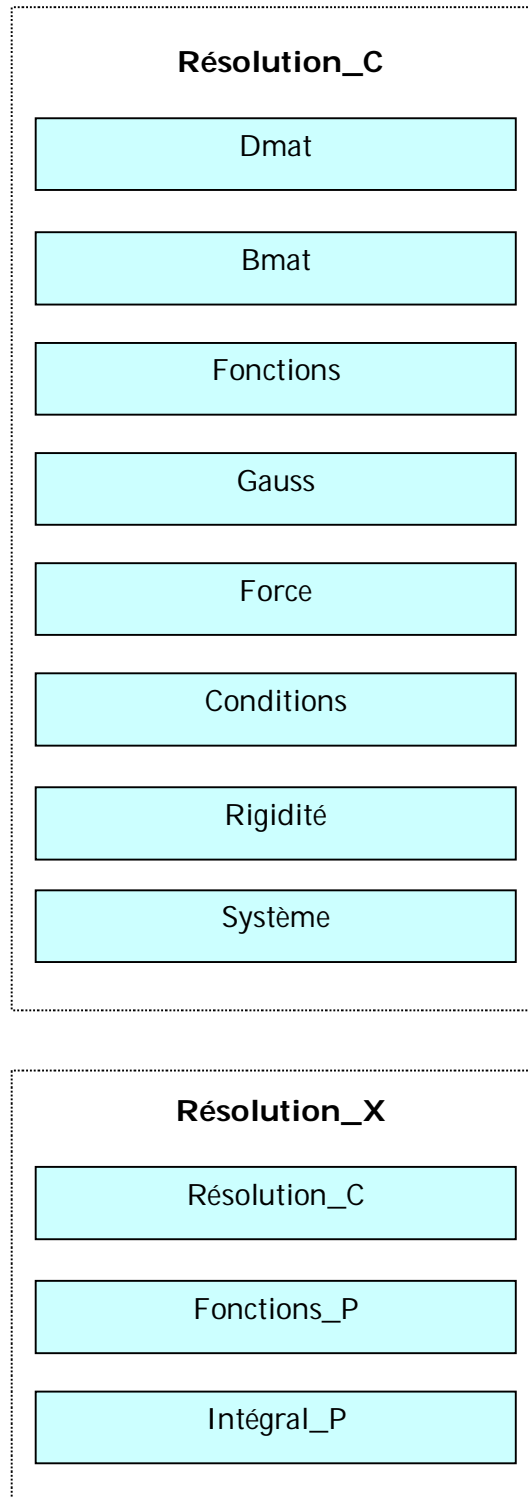


Figure III.14: Structure du bloc « Résolution »

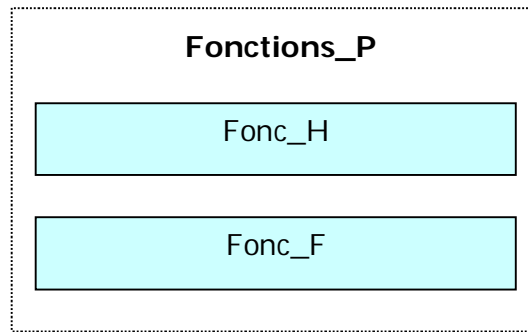


Figure III.15: Structure du bloc « Fonctions_P »

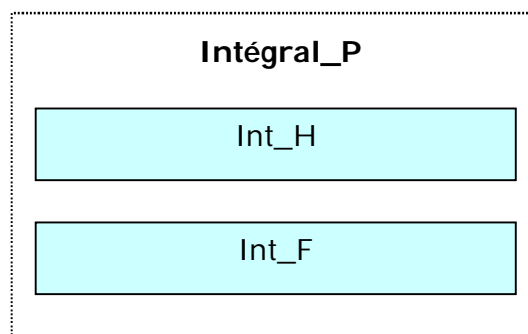


Figure III.16: Structure du bloc « Intégral_P »

2.5. Structure du bloc « Extraction »

Ce bloc permet l'extraction des facteurs d'intensité des contraintes. Il comporte principalement deux sous blocs:

FIC_CQ : Extraction des facteurs d'intensité des contraintes par la technique d'extrapolation (S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM) et les techniques DCT et QPDT (Q-FEM et DQ-FEM).

FIC_X : Extraction des facteurs d'intensité des contraintes par la technique de l'Intégral J (X-FEM).

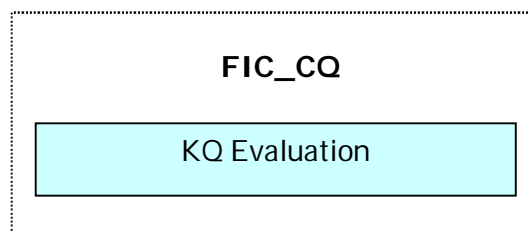


Figure III.17: Structure du bloc « FIC_CQ »

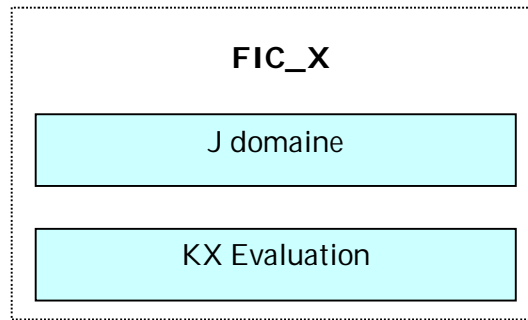


Figure III.18: Structure du bloc « FIC_X »

3. Liste des fonctions

La liste suivante passe en revue les différentes fonctions principales constituant le code ainsi que leurs rôles :

Bmat : Evaluation de la matrice B .

Conditions : Application des conditions aux limites.

Dmat : Evaluation de la matrice D .

FIC_CQ : Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes pour l'approche S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM.

FIC_X : Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes pour l'approche X-FEM.

Fissure : Evaluation du module et de l'angle d'inclinaison de la fissure.

Fonc_F : Introduction de l'enrichissement des éléments finis du front de la fissure.

Fonc_H : Introduction de l'enrichissement des éléments finis intérieurs.

Fonctions : Evaluation des fonctions de forme.

Fonctions_P : Introduction des fonctions d'enrichissement des éléments finis.

Force : Evaluation des forces nodales.

Gauss : Détermination du quadrature de *Gauss*.

Graphisme : Réalisation d'un nombre de graphes.

Input Data : Introduction des données.

Int_F : Intégration des éléments finis du front de la fissure.

Int_H : Intégration des éléments finis intérieurs.

Intégral_P : Intégration des éléments finis particuliers.

J domaine : Evaluation du domaine J .

KQ Evaluation : Extraction des facteurs d'intensité des contraintes par les techniques DCT et QPDT.

KX Evaluation : Extraction des facteurs d'intensité des contraintes par la technique J domaine.

LSM : Evaluation des courbes de niveau.

Maillage : Réalisation d'un maillage automatique uniforme.

Nœud_E : Extraction des nœuds à enrichir.

Nœud_F : Extraction des nœuds fantômes (X-FEM).

Quart_Point : Introduction des éléments finis dégénérés (QPE et DQPE).

Résolution_C : Résolution par l'approche S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM.

Résolution_X : Résolution par l'approche X-FEM.

Rigidité : Construction de la matrice de rigidité globale [K].

Système : Résolution du système d'équations.

4. Conclusion

Dans ce troisième chapitre, l'aspect implantation au sein d'un code de calcul par éléments finis a été exposé. La structure et le rôle des différentes fonctions ainsi que les concepts de programmation associés au développement des différentes approches ont été discutés. A ce niveau, un travail d'implantation numérique des approches S-FEM, Q-FEM, DQ-FEM et X-FEM a été mis en oeuvre. L'optimisation du code et l'amélioration de ses performances d'analyse ont été également effectués.

L'outil réalisé doit permettre des analyses par éléments finis relatif aux problèmes de fissuration de sorte que ces problèmes puissent être résolus sans remaillage. Il doit également permettre aux fissures d'être arbitrairement alignées sur la maille. La validation et l'exploitation des opportunités offertes par cet outil seront envisagées dans le prochain chapitre. Il est cependant important de noter que, dans le cadre de cette thèse, seule une utilisation indépendante des approches numériques a été visée. Il est tout à fait possible de réaliser un couplage enveloppant plusieurs approches afin de traiter des problèmes plus complexes.

Chapitre IV :
Validation et exploitation

Partie I: Approche Numérique-Analytique

1. Introduction

Dans la perspective de valider et d'exploiter le code OMEGA, un ensemble d'applications numériques a été envisagé. L'idée de base est de déterminer numériquement les facteurs de correction de certaines éprouvettes entaillées d'un matériau isotrope et de les comparer avec les valeurs données par la solution analytique. Les éprouvettes entaillées testées sont :

- L'éprouvette Central-Notched CN (Figure IV.1a).
- L'éprouvette Single-Edge-Notched SEN (Figure IV.1b).
- L'éprouvette Double-Edge-Notched DEN (Figure IV.1c).

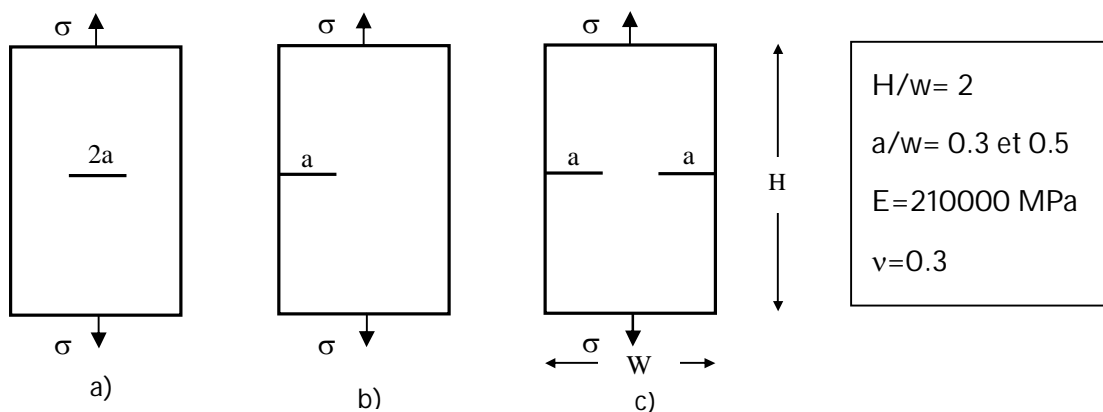


Figure IV.1 : Géométrie des éprouvettes testées

Note IV.1 : Certaines éprouvettes ayant une symétrie propre, il a été possible d'éviter leur étude dans leur ensemble.

2. Modélisation des singularités par l'approche S-FEM

2.1. Modélisation d'un milieu non-fissuré

Afin de confronter les résultats du code OMEGA (approche S-FEM) à ceux du logiciel SAP (Structural Analysis Programs) [165] pour le cas de problèmes de milieux continus, une plaque non-fissurée a fait l'objet d'une analyse numérique. Les dimensions, le maillage ainsi que les conditions aux limites sont illustrés sur la figure IV.2. Les résultats de cette étude sont regroupés dans les tableaux IV.1 et IV.2.

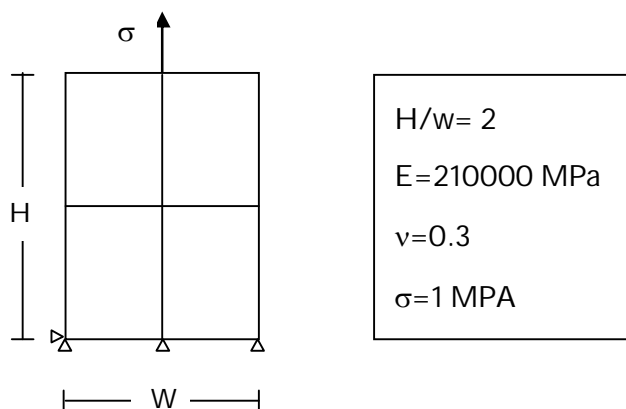


Figure IV.2 : Géométrie de la plaque non-fissurée

	Code OMEGA (S-FEM)		Logiciel SAP	
	Ux	Uy	Ux	Uy
1	.000000	.000000	.000000	.000000
2	.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.1360E-04	.3717E-04	.1360E-04	.3717E-04
5	.0000E+00	.3395E-04	.0000E+00	.3395E-04
6	-.1360E-04	.3717E-04	-.1360E-04	.3717E-04
7	-.2601E-05	.4374E-04	-.2601E-05	.4374E-04
8	.0000E+00	.9733E-04	.0000E+00	.9733E-04
9	.2601E-05	.4374E-04	.2601E-05	.4374E-04

Tableau IV.1 : Valeurs des déplacements obtenues par le code OMEGA (S-FEM) et par le logiciel SAP (Eléments finis à quatre nœuds : Déformations planes)

	Code OMEGA (S-FEM)		Logiciel SAP	
	Ux	Uy	Ux	Uy
1	.000000	000000	.000000	000000
2	.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.000000	.000000	.000000
5	.000000	.000000	.000000	.000000
6	.6897E-05	.1718E-04	.6897E-05	.1718E-04
7	.0000E+00	.1563E-04	.0000E+00	.1563E-04
8	-.6897E-05	.1718E-04	-.6897E-05	.1718E-04
9	.6605E-05	.3225E-04	.6605E-05	.3225E-04
10	.4734E-05	.3582E-04	.4734E-05	.3582E-04
11	.0000E+00	.3485E-04	.0000E+00	.3485E-04
12	-.4734E-05	.3582E-04	-.4734E-05	.3582E-04
13	-.6605E-05	.3225E-04	-.6605E-05	.3225E-04
14	.1083E-04	.4751E-04	.1083E-04	.4751E-04
15	.0000E+00	.6622E-04	.0000E+00	.6622E-04
16	-.1083E-04	.4751E-04	-.1083E-04	.4751E-04
17	-.9502E-05	.4051E-04	-.9502E-05	.4051E-04
18	-.3459E-05	.6671E-04	-.3459E-05	.6671E-04
19	.0000E+00	.1162E-03	.0000E+00	.1162E-03
20	.3459E-05	.6671E-04	.3459E-05	.6671E-04
21	.9502E-05	.4051E-04	.9502E-05	.4051E-04

Tableau IV.2 : Valeurs des déplacements obtenues par le code OMEGA (S-FEM) et par le logiciel SAP (Eléments finis à huit nœuds : Déformations planes)

D'après les tableaux précédents, on constate que la comparaison des résultats du code OMEGA (S-FEM) avec ceux du logiciel SAP montre une parfaite coïncidence. Cette constatation permet de valider, et de mettre en valeur, l'aptitude du code OMEGA à analyser un problème de milieu continu.

Note IV.2: Il est important de souligner que l'objectif de cette application est d'établir une approche comparative entre le code OMEGA et le logiciel SAP. C'est pour cette raison qu'un maillage aussi grossier a été accepté.

2.2. Modélisation d'un milieu fissuré

Cette application s'est portée sur l'analyse de l'éprouvette CN en utilisant le logiciel SAP [166]. L'objectif est de calculer les facteurs d'intensité des contraintes à l'aide d'éléments finis standards à huit nœuds de différentes longueurs. Le maillage ainsi que les conditions aux limites sont illustrés sur la figure IV.3.

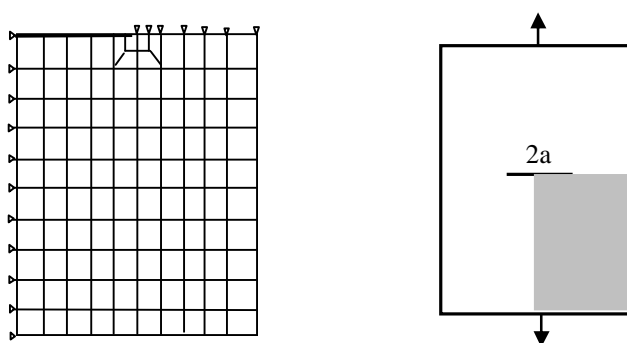


Figure IV.3 : Maillage et conditions aux limites de l'éprouvette CN

Les figures IV.4 et IV.5 regroupent les résultats de calcul des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenus avec le logiciel SAP pour différentes longueurs d'éléments finis classiques.

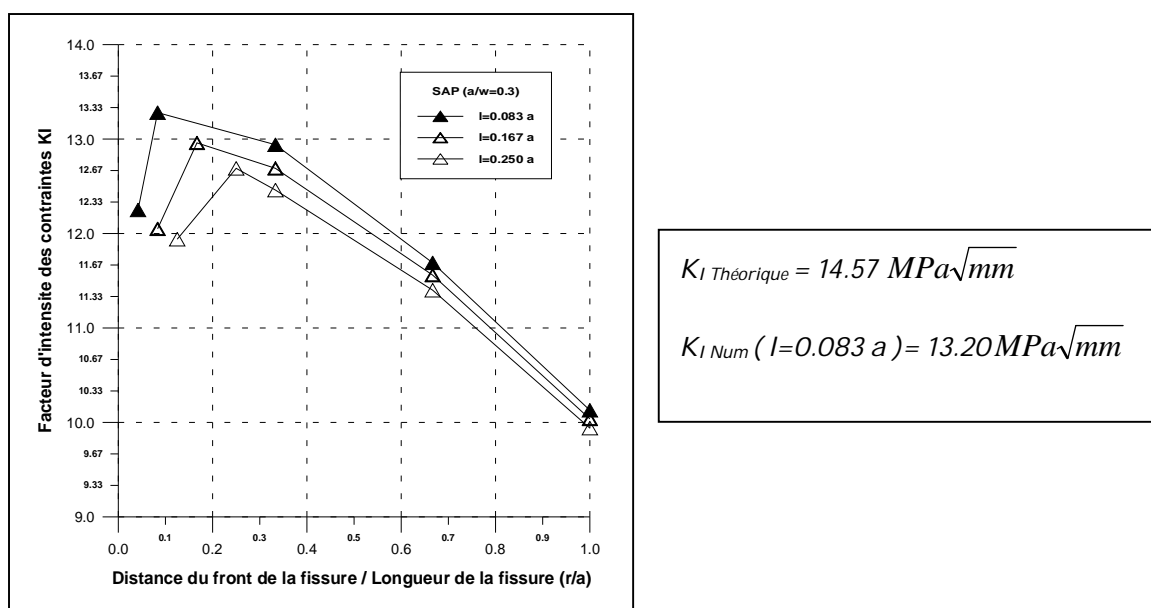
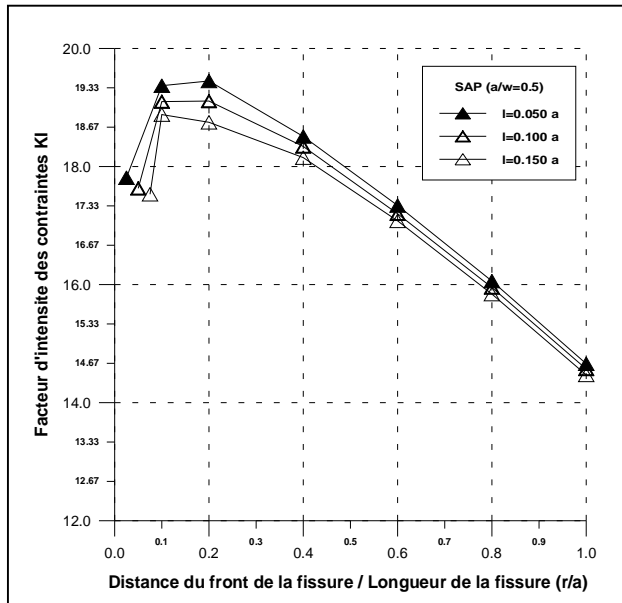


Figure IV. 4 : Influence de la longueur de l'élément fini de pointe sur les facteurs d'intensité des contraintes obtenus à l'aide du logiciel SAP ($a/w = 0.3$)

r/a	0.0417	0.0833	0.125	0.1667	0.25	0.3333	0.6667	1
l=0.083a	12.25	13.28	-	-	-	12.94	11.69	10.129
l=0.167a	-	12.05	-	12.96	-	12.69	11.56	10.037
l=0.250a	-	-	11.94	-	12.69	12.46	11.4	9.94

Tableau IV.3 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis classiques (a /w=0.3)



$$K_I \text{ Théorique} = 21.51 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

$$K_I \text{ Num} (l=0.050 a) = 19.77 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Figure IV.5 : Influence de la longueur de l'élément fini de pointe sur les facteurs d'intensité des contraintes obtenus à l'aide du logiciel SAP (a/w =0.5)

r/a	0.025	0.05	0.075	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
l=0.050a	17.81	-	-	19.37	19.45	18.51	17.34	10.06	14.66
l=0.100a	-	17.63	-	19.1	19.11	18.34	17.2	15.95	14.57
l=0.150a	-	-	17.53	18.88	18.75	18.15	17.08	15.84	14.47

Tableau IV.4 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis classiques (a /w=0.5)

La lecture de ces deux graphes permet de mettre en évidence les constatations suivantes :

- A des distances proche du front de la fissure, l'approche numérique par éléments finis standards, donne une très mauvaise estimation de la valeur du facteur d'intensité des contraintes.
- L'utilisation de la technique d'extrapolation de la courbe jusqu'au front de la fissure permet d'améliorer relativement les résultats.
- Dans ce type d'approche numérique, la discrétisation du milieu est très sensible à toute variation du maillage.

- Afin de donner des résultats satisfaisants, la discrétisation par l'approche S-FEM devrait se faire en mailles assez fines pour que la convergence des résultats soit acceptable.

- La discrétisation par l'approche S-FEM doit être choisie après qu'il fut constaté qu'un maillage de plus en plus fin n'améliore plus les résultats d'une manière significative. En conséquence, elle nécessite un temps de traitement et d'exploitation très importants.

3. Modélisation des singularités par l'approche Q-FEM

3.1. Comparaison OMEGA- SAP

Dans cette application [166], les deux éprouvettes CN (Figure IV.3) et DEN (Figure IV.6) sont analysées successivement à l'aide du code OMEGA (Q-FEM) et du logiciel SAP [165]. Elles ont été conduites en gardant le même type du maillage et en utilisant la technique de l'extrapolation pour évaluer les facteurs d'intensité des contraintes.

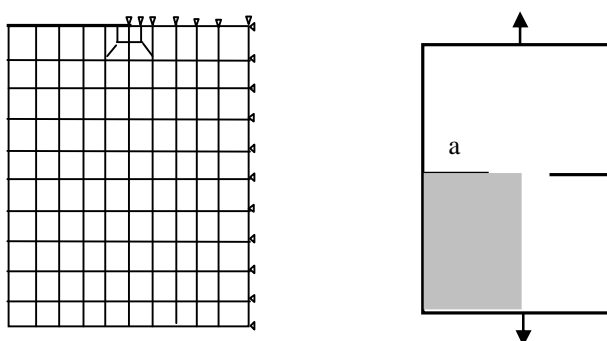


Figure IV.6 : Maillage et conditions aux limites de l'éprouvette DEN

Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures IV.7 et IV.8. Ils sont comparés à ceux de la littérature [32].

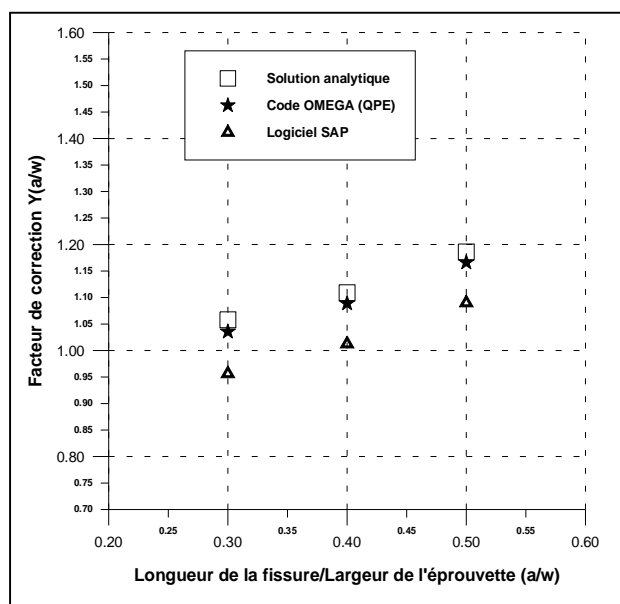


Figure IV.7 : Facteur de correction de l'éprouvette CN obtenu à l'aide du code OMEGA (Q-FEM) et du logiciel SAP

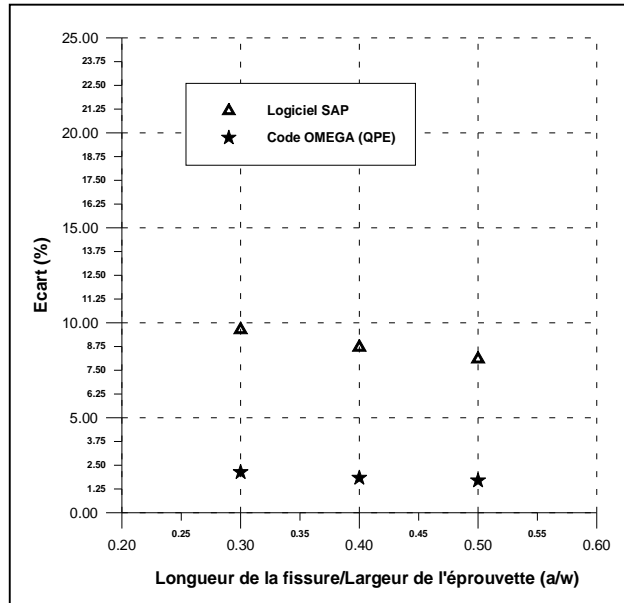


Figure IV. 8 : Ecarts entre les résultats analytiques et les résultats obtenus par le code OMEGA (Q-FEM) et par le logiciel SAP pour l'éprouvette CN

a/w	Y _{SAP}	Y _{OMEGA}
0.3	0.9037	0.9787
0.4	0.9129	0.9817
0.5	0.9190	0.9831

Tableau IV.5 : Facteurs de correction normalisés obtenus avec le code OMEGA (Q-FEM) et le logiciel SAP pour l'éprouvette CN

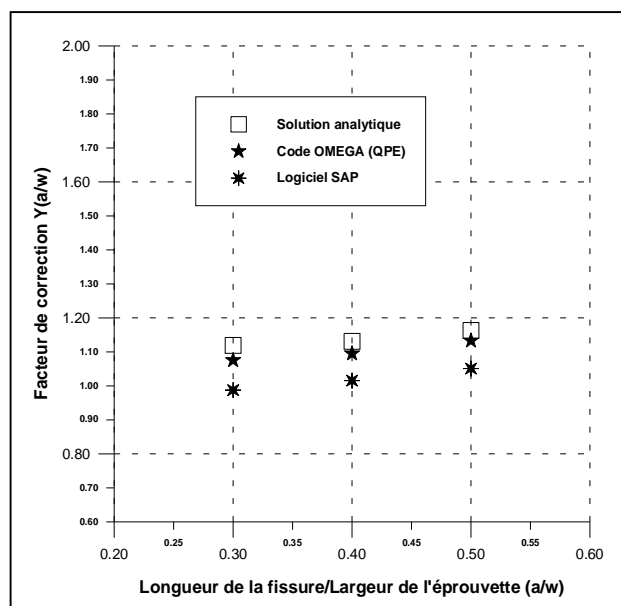


Figure IV. 9 : Facteur de correction de l'éprouvette DEN obtenu à l'aide du code OMEGA (Q-FEM) et du logiciel SAP

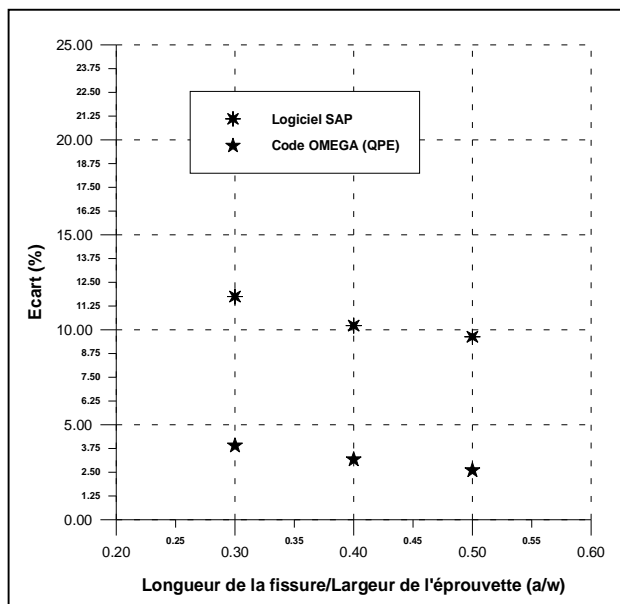


Figure IV. 10 : Ecart entre les résultats analytiques et les résultats obtenus par le code OMEGA (Q-FEM) et par le logiciel SAP pour l'éprouvette DEN

a/w	Y _{SAP}	Y _{OMEGA}
0.3	0.8825	0.9609
0.4	0.8978	0.9683
0.5	0.9037	0.9740

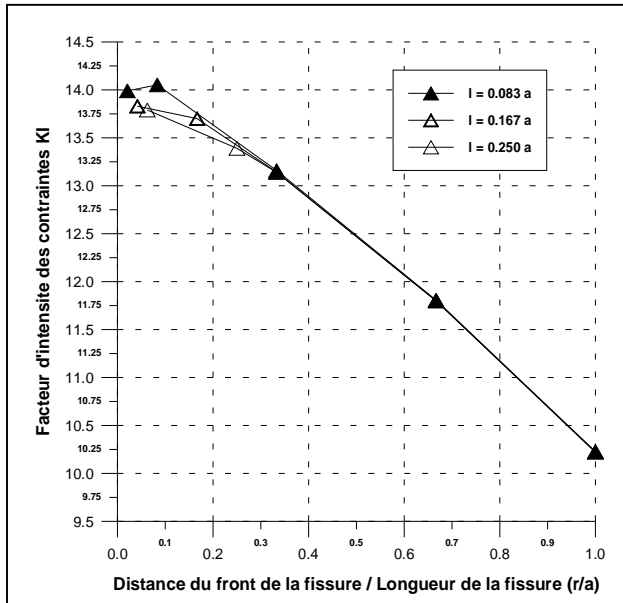
Tableau IV.6 : Facteurs de correction normalisés obtenus avec le code OMEGA (Q-FEM) et le logiciel SAP pour l'éprouvette DEN

D'après les résultats de cette étude, on constate que les résultats numériques obtenus avec le code OMEGA (Q-FEM) sont très proche des résultats donnés par la solution théorique (environ 4 %). Par contre, les résultats numériques obtenus avec le logiciel SAP sont sensiblement loin de la solution théorique (environ 10 %).

3.2. Influence de la longueur de l'élément fini de pointe

Afin d'avoir une idée sur la convergence du code OMEGA (Q-FEM), une étude numérique [166] c'est centré sur l'analyse de l'éprouvette CN en utilisant, à pointe de la fissure, des éléments finis de différentes longueurs. Une comparaison des résultats obtenus à l'aide du code OMEGA (Q-FEM) avec les résultats obtenus à l'aide du logiciel SAP a été réalisée.

Les figures IV.11 et IV.12 résument respectivement les variations des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure pour différentes longueurs des éléments finis à simple singularité (a/w=0.3 et 0.5) obtenus avec le code OMEGA (Q-FEM).



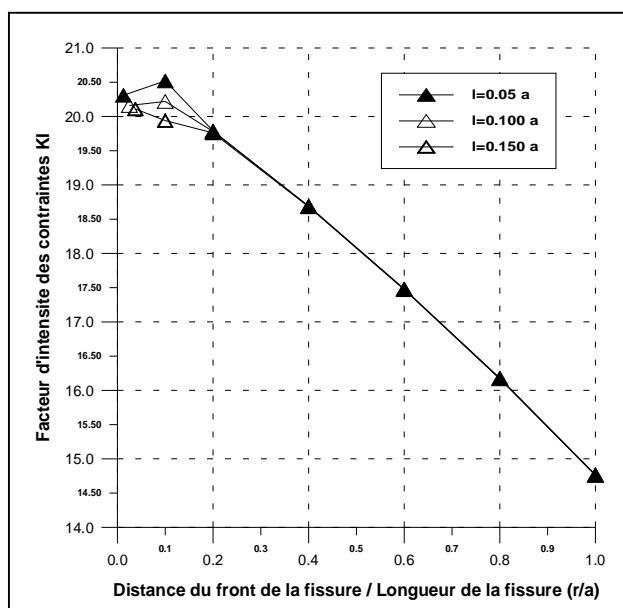
$$K_{I \text{ Théorique}} = 14.57 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

$$K_{I \text{ Num}} (l=0.083 a) = 14.30 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Figure IV.11 : Influence de la longueur de l'élément fini de pointe sur les facteurs d'intensité des contraintes obtenus à l'aide du code OMEGA (Q-FEM : a/w =0.3)

r/a	0.0208	0.0417	0.0625	0.0833	0.1667	0.25	0.3333	0.6667	1
l=0.083a	13.99	-	-	14.053	-	-	13.159	11.806	10.227
l=0.167a	-	13.83	-	-	13.7	-	13.141	11.798	10.225
l=0.250a	-	-	13.79	-	-	13.39	13.14	11.8	10.22

Tableau IV.7 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis à simple singularité (a /w=0.3)



$$K_{I \text{ Théorique}} = 21.51 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

$$K_{I \text{ Num}} (l=0.050 a) = 20.86 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Figure IV.12 : Influence de la longueur de l'élément fini de pointe sur les facteurs d'intensité des contraintes obtenus à l'aide du code OMEGA (Q-FEM : a/w =0.5)

r/a	0.0125	0.025	0.0375	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$l=0.05a$	20.31	-	-	20.52	19.79	18.69	17.48	16.18	14.77
$l=0.100a$	-	20.16	-	20.22	19.78	18.69	17.48	16.17	14.76
$l=0.150a$	-	-	20.11	19.94	19.76	18.68	17.47	16.17	14.76

Tableau IV.8 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis à simple singularité ($a/w=0.5$)

D'après les résultats de cette étude, on constate principalement deux remarques très importantes :

- Une reproduction très proche de la valeur théorique des facteurs d'intensité des contraintes au front de la fissure. L'utilisation de la technique d'extrapolation permet d'améliorer sensiblement les résultats obtenus.
- Une très faible sensibilité des résultats à la variation de la taille des éléments du front de la fissure.

3.3. Comparaison des différentes techniques d'évaluation

Pour pouvoir comparer les différentes techniques d'évaluation, les deux éprouvettes CN et DEN ont fait l'objet d'une analyse numérique [167]. Les facteurs d'intensité des contraintes ont été estimés par trois manières différentes :

- L'extrapolation de la courbe $K_I=f(r)$ jusqu'au fond de la fissure.
- L'utilisation de la formule basée sur la technique DCT.
- L'utilisation de la formule basée sur la technique QPDT.

Les figures IV.13 et IV.15 comparent les résultats obtenus par les différentes techniques d'évaluation avec les résultats analytiques [32].

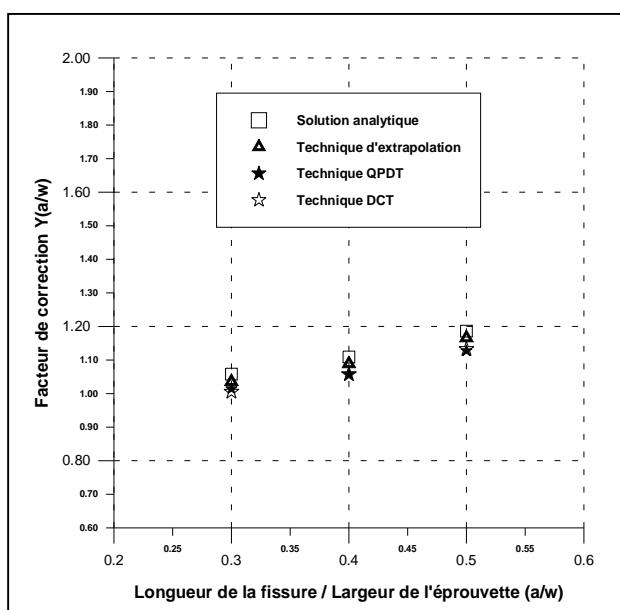


Figure IV.13 : Facteur de correction obtenu par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette CN

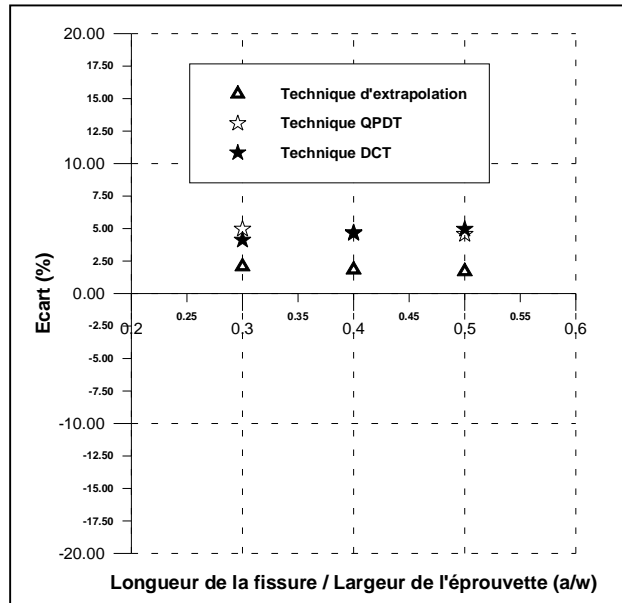


Figure IV.14 : Ecart entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette CN

a/w	Y _{EXTRAP.}	Y _{DCT}	Y _{QPDT}
0.3	0.9787	0.9499	0.9564
0.4	0.9817	0.9531	0.9537
0.5	0.9831	0.9546	0.9507

Tableau IV.9 : Facteurs de correction normalisés obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette CN

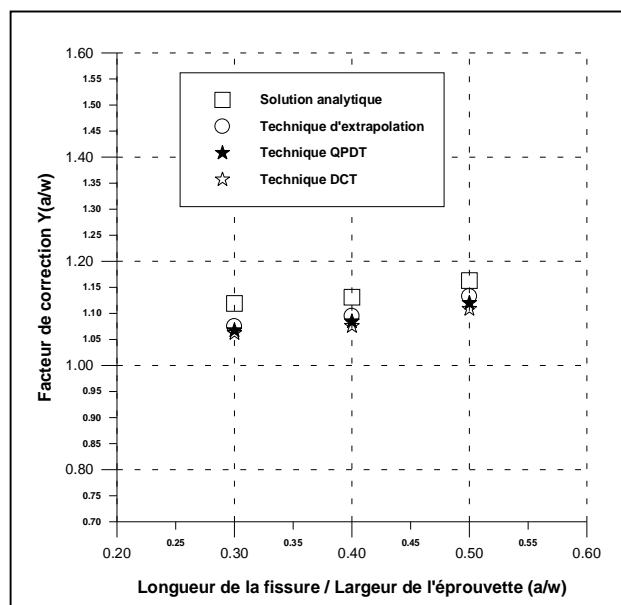


Figure IV.15 : Facteur de correction obtenu par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette DEN

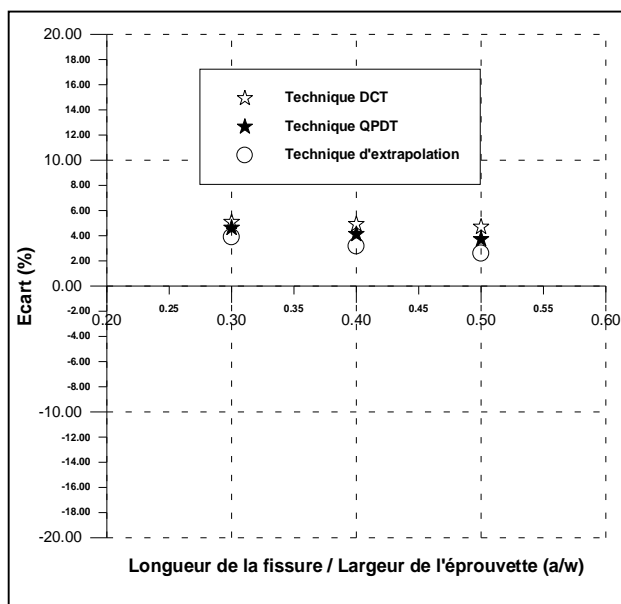


Figure IV.16 : Ecart entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette DEN

a/w	Y _{EXTRAP.}	Y _{DCT}	Y _{QPDT}
0.3	0.9610	0.9538	0.9492
0.4	0.9683	0.9587	0.9509
0.5	0.9740	0.9628	0.9530

Tableau IV.10 : Facteurs de correction normalisés obtenus par différentes techniques d'évaluation pour l'éprouvette DEN

Cette analyse permet de constater que les valeurs obtenues avec les techniques d'évaluation (DCT et QPDT) sont très proches ; elles sont un petit peu inférieures à ceux de la technique de l'extrapolation. Cette différence peut s'expliquer par le fait que certaines recommandations n'ont pas été prises en considération (Type d'éléments finis, nombre d'éléments finis de pointe).

3.4. Comparaison avec les éléments finis enrichis

Les résultats de l'étude de l'éprouvette SEN (Figure IV.17) sont comparés à ceux de l'approche de Benzley [35] où des éléments finis classiques enrichis ont été utilisés (Figure IV.18) :

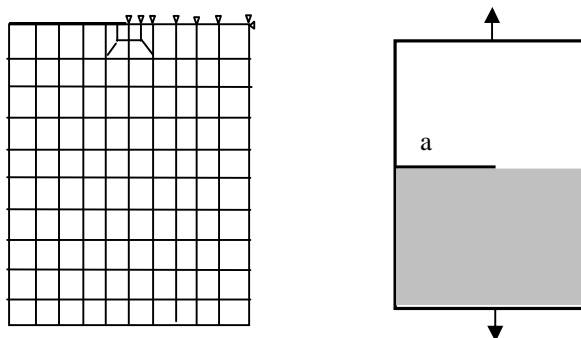


Figure IV.17 : Maillage et conditions aux limites de l'éprouvette SEN

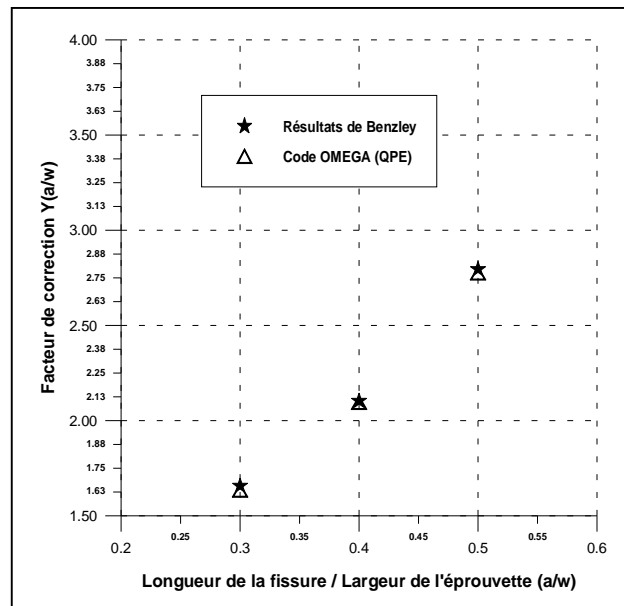


Figure IV.18 : Comparaison des valeurs du code OMEGA (Q-FEM) avec ceux de Benzley

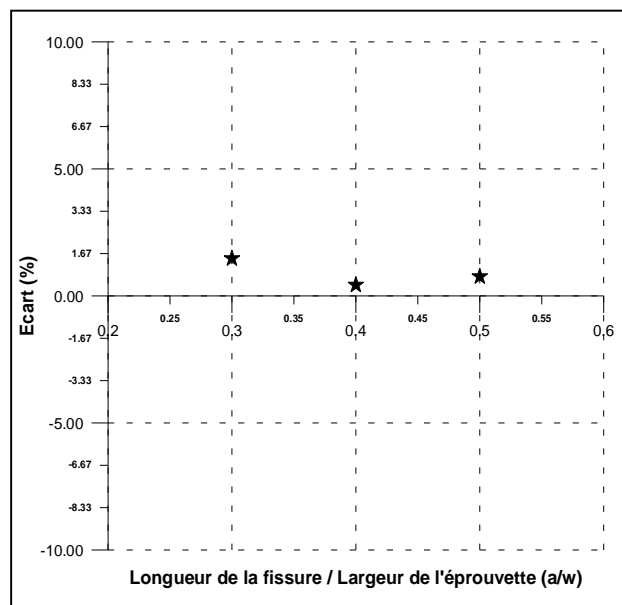


Figure IV.19 : Ecart entre les valeurs du code OMEGA (Q-FEM) et ceux de Benzley

Cette étude numérique met en évidence la bonne concordance entre nos résultats, obtenus avec les éléments finis dégénérés à simple singularité, et ceux de Benzley obtenus avec les éléments finis enrichis. Ceci confirme que les éléments finis constituant l'approche Q-FEM du code OMEGA donnent des résultats similaires à ceux des éléments finis enrichis. Cependant, ils sont avantageux aux éléments finis enrichis en ce qui concerne la facilité d'implantation.

4. Modélisation des singularités par l'approche DQ-FEM

4.1. Comparaison QPE et DQPE

Afin de tester l'efficacité de l'approche DQ-FEM du code OMEGA, une étude numérique c'est centré sur l'analyse des éprouvettes CN et DEN. Les éléments finis dégénérés à simple et à double singularité (QPE et DQPE) ont été utilisés successivement à la pointe de la fissure. Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures IV.20 et IV.22.

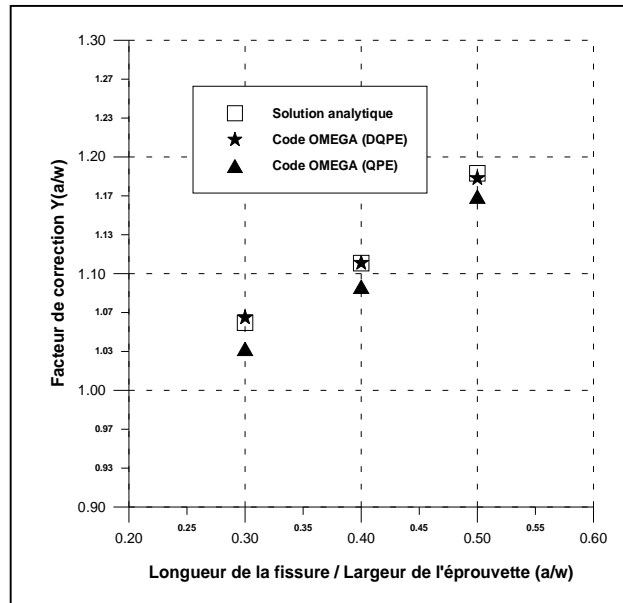


Figure IV.20: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE

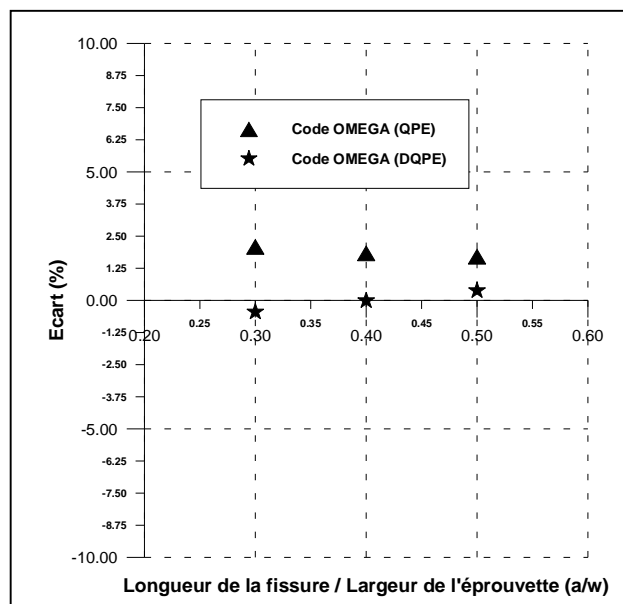


Figure IV.21: Ecart entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE pour l'éprouvette CN

a/w	Y _{QPE}	Y _{DQPE}
0.3	0.9787	1.0041
0.4	0.9817	1.0001
0.5	0.9831	0.9964

Tableau IV.11 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE

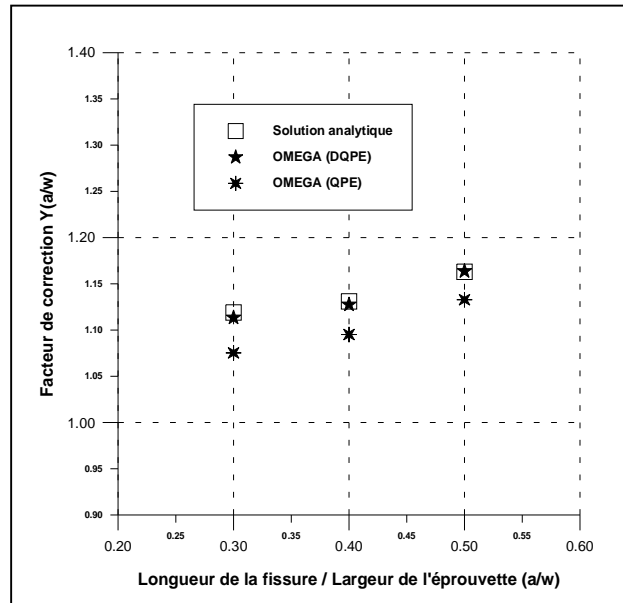


Figure IV.22: Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE

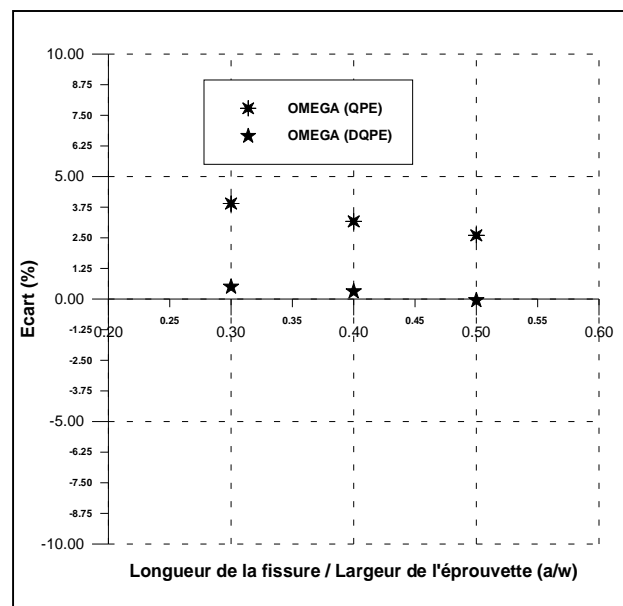


Figure IV.23: Ecart entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE pour l'éprouvette DEN

a/w	Y _{QPE}	Y _{DQPE}
0.3	0.9610	0.9950
0.4	0.9683	0.9969
0.5	0.9740	1.0005

Tableau IV.12 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette DEN obtenus par les éléments finis dégénérés QPE et DQPE

D'après les résultats de cette application, il est possible de constater la très bonne concordance des résultats obtenus à l'aide des éléments finis dégénérés à double singularité DQPE avec les résultats théoriques. De même, il est possible de confirmer la nette amélioration portée par ces éléments par apport aux résultats obtenus avec les éléments finis dégénérés à simple singularité QPE.

4.2. Influence de la longueur de l'élément fini de pointe

L'éprouvette CN a été analysée en utilisant les éléments finis dégénérés à double singularité DQPE. Deux différentes longueurs d'éléments finis de pointe ont été utilisées ($l=0.050a$ et $l=0.075a$). La figure IV.24 retrace les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure.

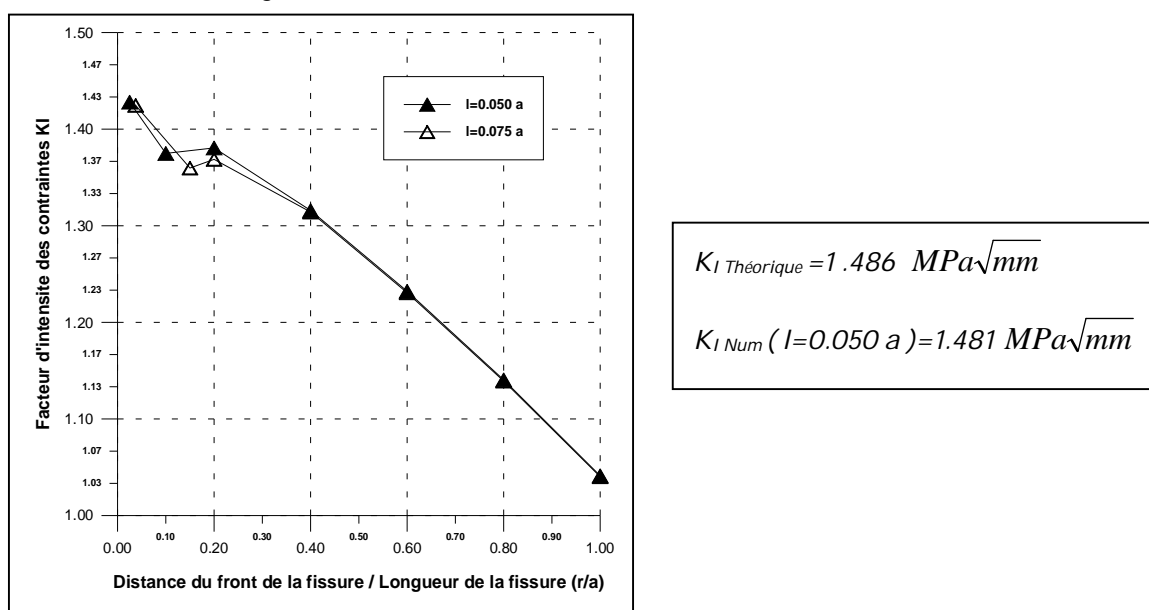


Figure IV.24 : Influence de la longueur de l'élément de pointe sur le facteur d'intensité de contraintes obtenu à l'aide des éléments DQPE (a/w =0.5)

	0.025	0.0375	0.1	0.15	0.2	0.4	0.6	0.8	1
l=0.050a	1.428	-	1.3740	-	1.3806	1.3158	1.2322	1.1405	1.0412
l=0.075a	-	1.4247	-	1.3597	1.3687	1.3142	1.2306	1.1392	1.0402

Tableau IV.13 : Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes le long de la fissure obtenues par des éléments finis DQPE (a /w=0.5)

Cette étude permet de mettre en évidence les constatations suivantes :

- Une très faible sensibilité des résultats à la variation de la taille des éléments finis dégénérés à double singularité (DQPE) du front de la fissure. Cette constatation a été également observée avec les éléments finis dégénérés à simple singularité (QPE).

- Au voisinage immédiat de la pointe de la fissure, les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes sont plus proche de la solution théorique que ceux données par les éléments finis dégénérés à simple singularité (QPE).

- Une sou-estimation de la solution est observée au niveau du nœud ($x=L$) ; ce phénomène influencera l'extraction des facteurs d'intensités des contraintes par la technique d'extrapolation.

4. 3. Techniques d'évaluation

4.3.1. DCT et QPDT

Les figures IV.25 et IV.27 illustrent les résultats d'évaluation des facteurs de correction des éprouvettes DEN et CN obtenus par différentes techniques d'extraction : la technique QPDT et la technique DCT ont été utilisées pour extraire les facteurs d'intensité des contraintes en utilisant les éléments finis à double singularité DQPE.

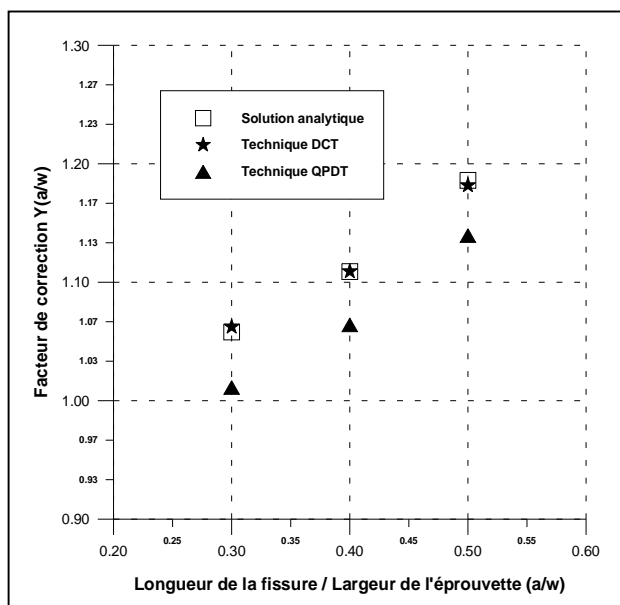


Figure IV.25: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE

a/w	Y_{DCT}	Y_{QPDT}
0.3	1.0041	0.9557
0.4	1.0001	0.9594
0.5	0.9964	0.9607

Tableau IV.14 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE

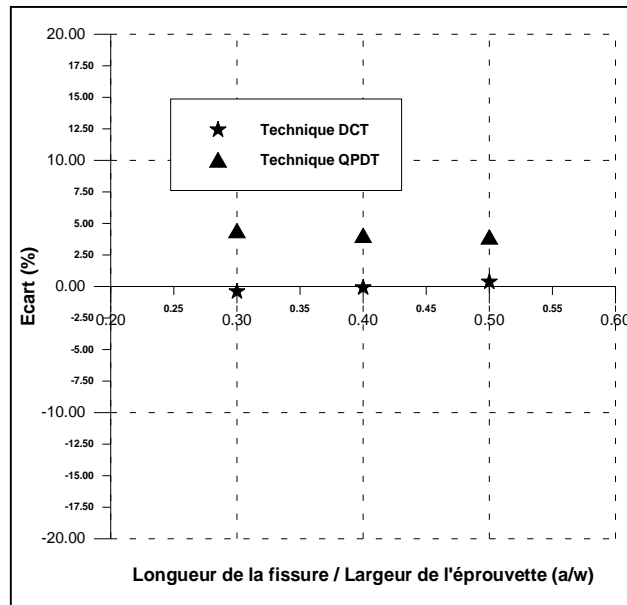


Figure IV.26: Ecart entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE

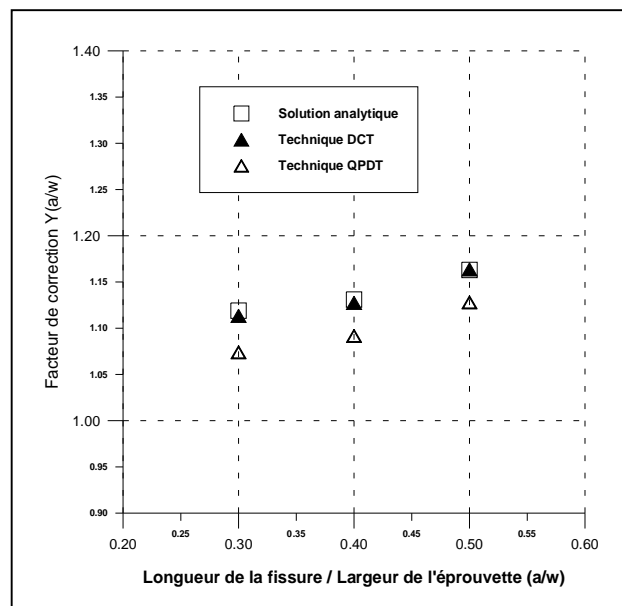


Figure IV.27: Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE

a/w	Y _{DCT}	Y _{QPDT}
0.3	0.9950	0.9600
0.4	0.9970	0.9653
0.5	1.0005	0.9700

Tableau IV.15 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette DEN obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE

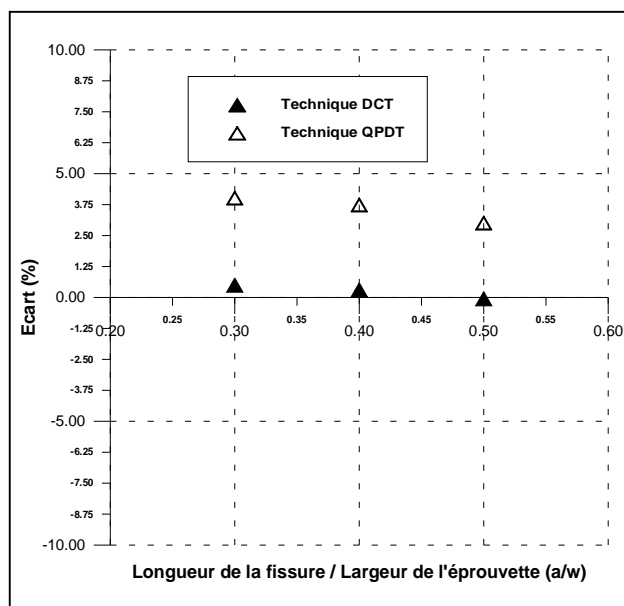


Figure IV.28: Ecart entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette DEN et les facteurs de correction obtenus par différentes techniques d'évaluation en utilisant les éléments finis DQPE

D'après cette application, on peut constater que, pour la même modélisation par éléments DQPE, la technique DCT est plus efficace que celle de la technique QPDT.

4.3.2. Extrapolation

La technique d'extrapolation a été utilisée pour extraire les facteurs d'intensité des contraintes en utilisant successivement les éléments finis à simple et double singularité (QPE et DQPE). Les résultats de cette analyse sont reportés sur la figure IV.29. La figure IV.31 illustre l'apport de l'application du principe « *nœud fictif* » sur la technique d'extrapolation.

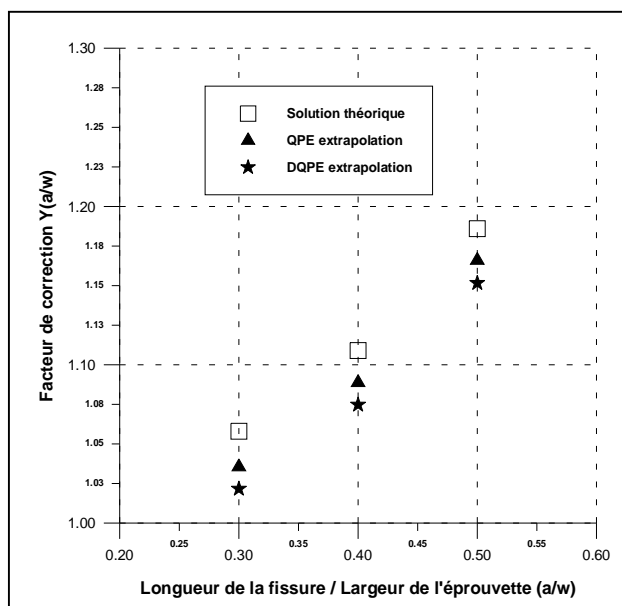


Figure IV.29 : Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation

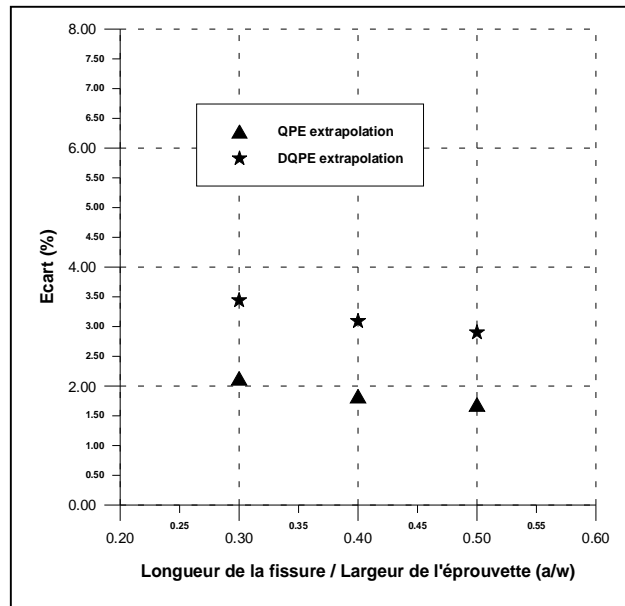


Figure IV.30: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par la technique d'extrapolation

a/w	$Y_{QPE \text{ EXTRAP.}}$	$Y_{DQPE \text{ EXTRAP.}}$
0.3	0.9787	0.9656
0.4	0.9817	0.9691
0.5	0.9831	0.9710

Tableau IV.16 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation

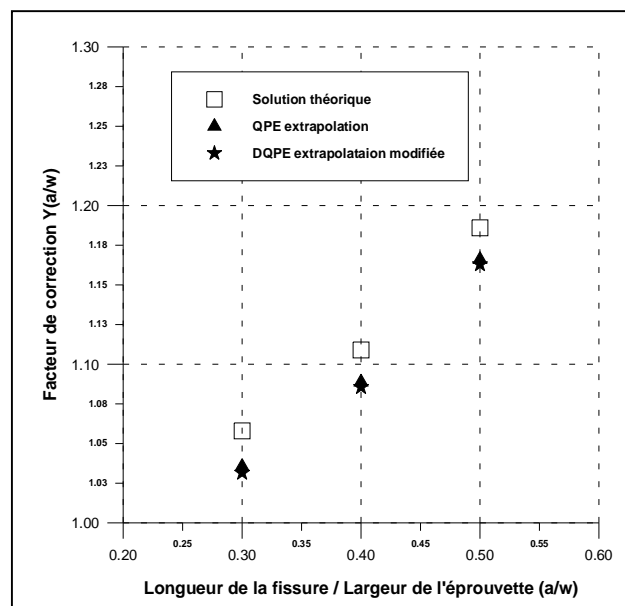


Figure IV.31: Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation et nœuds fictifs

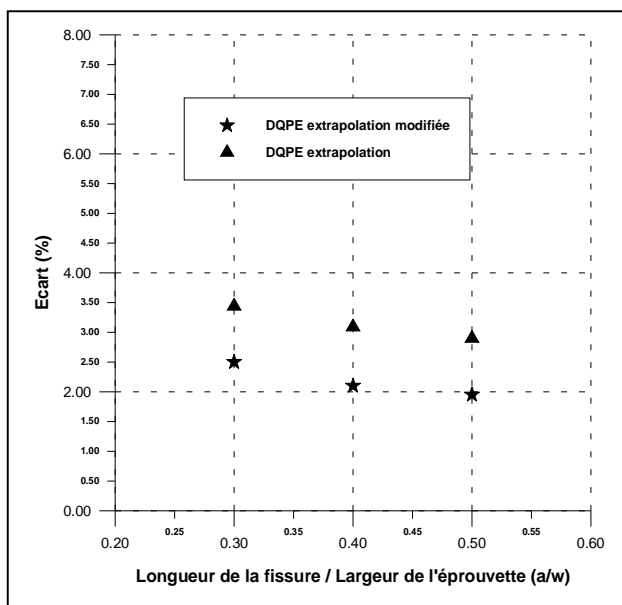


Figure IV.32: Ecarts entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par la technique d'extrapolation et nœuds fictifs

a/w	Y _{DQPE EXTRA.}	Y _{DQPE EXTRA. MOD.}
0.3	0.9656	0.9750
0.4	0.9691	0.9788
0.5	0.9710	0.9805

Tableau IV.17 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par la technique d'extrapolation et nœuds fictifs

A l'inverse des résultats obtenus par les techniques DCT et QPDT, la technique d'extrapolation fournit des résultats meilleurs pour une modélisation par éléments finis à simple singularité QPE. Reste que une nette amélioration peut être portée à la technique d'extrapolation pour l'approche DQ-FEM en utilisant le principe du nœud fictif.

4.4. Implantation DQPE-SAP

Un atout principal des éléments finis à double singularité DQPE est la facilité d'intégration de ces éléments dans des programmes standards d'analyse par éléments finis sans modification majeure. Cette caractéristique permet de profiter des opportunités offertes par ces programmes très avancés. Comme un exemple d'application, les éléments DQPE ont été implantés dans le logiciel SAP. Les figures IV.33 et IV. 35 montrent les changements obtenus dans les résultats d'analyse par le SAP des éprouvettes fissurées (CN et DEN).

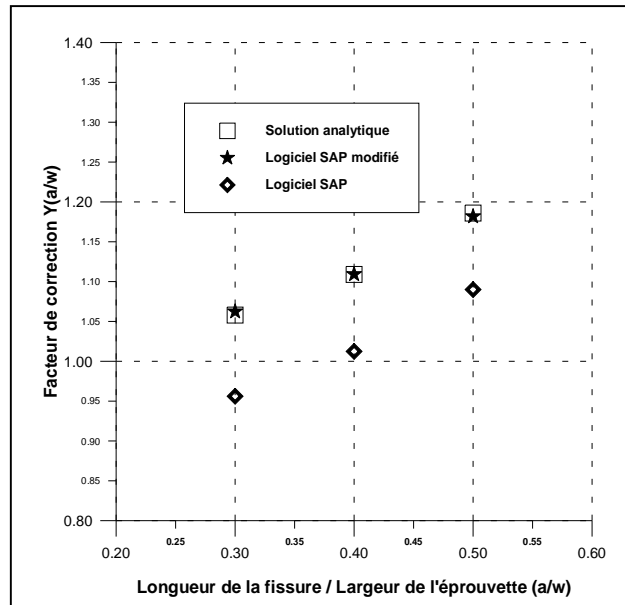


Figure IV.33 : Facteurs de correction de l'éprouvette CN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié

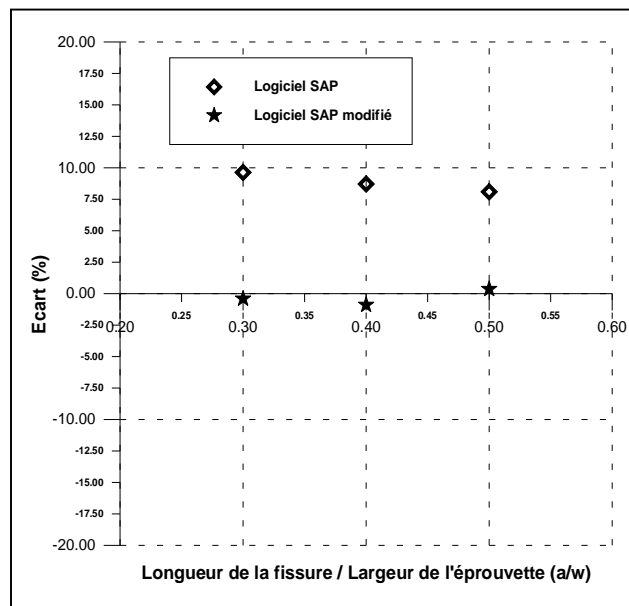


Figure IV.34 : Ecart entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette CN et les facteurs de correction obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié

a/w	Y _{SAP}	Y _{SAP MOD.}
0.3	0.9036	1.0041
0.4	0.9129	1.0001
0.5	0.9190	0.9964

Tableau IV.18: Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette CN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié

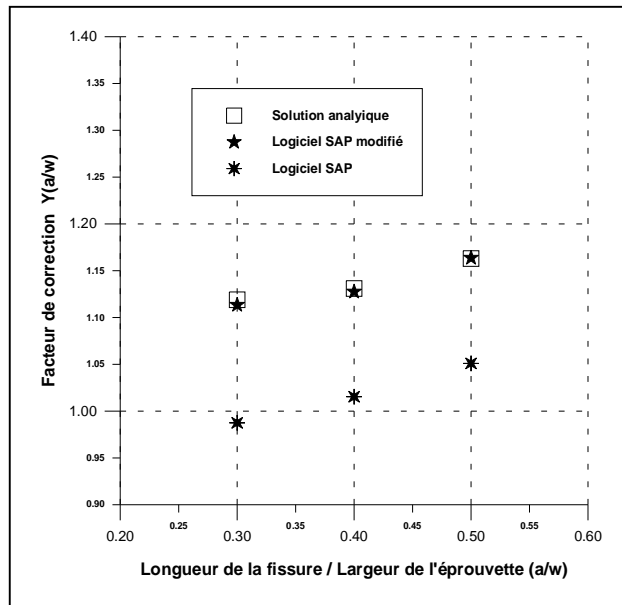


Figure IV.35 : Facteurs de correction de l'éprouvette DEN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié

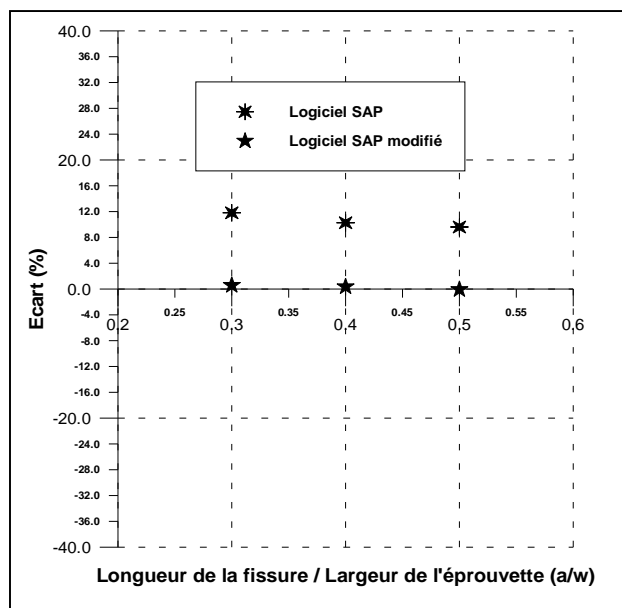


Figure IV.36 : Ecart entre les facteurs de correction analytiques de l'éprouvette DEN et les facteurs de correction obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié

a/w	Y_{SAP}	$Y_{SAP\ MOD.}$
0.3	0.9037	1.0005
0.4	0.8978	0.9969
0.5	0.8825	0.9950

Tableau IV.19 : Facteurs de correction normalisés de l'éprouvette DEN obtenus par le logiciel SAP et par SAP modifié

5. Modélisation par éléments finis étendus

5.1. Validation

L'éprouvette SEN étudiée est une éprouvette fissurée de dimensions ($H=200\text{mm}$ et $W=100\text{mm}$) soumise à une contrainte normale de traction valant ($\sigma=1\text{ MPa}$). Elle a été discrétisée par une maille uniforme (24×48) nœuds d'éléments finis à quatre nœuds. Les valeurs des facteurs de correction sont obtenues *sans remaillage de l'éprouvette* pour un rapport a/w (longueur de la fissure / la largeur de l'éprouvette) variant de 0.2 à 0.45. La figure IV. 38 compare les résultats obtenus numériquement avec ceux de la solution théorique [32].

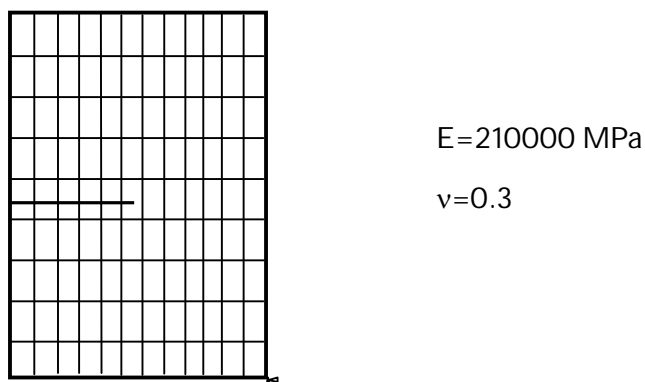


Figure IV. 37 : Maillage et conditions aux limites de l'éprouvette SEN analysée par l'approche X-FEM

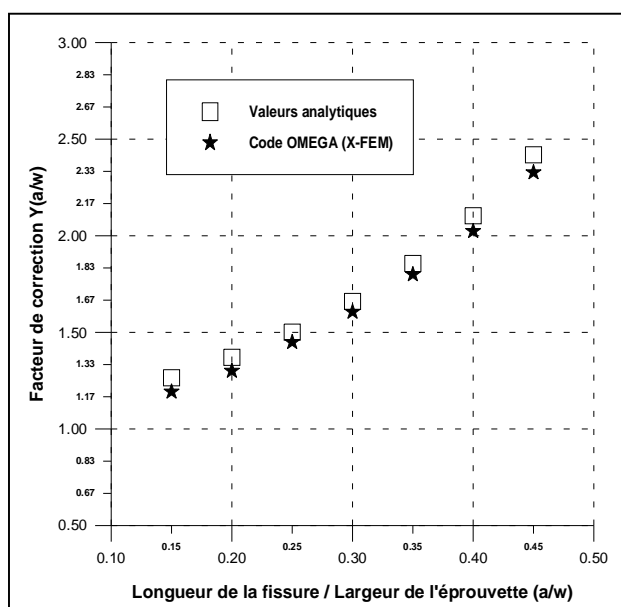


Figure IV.38 : Facteurs de correction obtenus pour la maille (24x48) nœuds

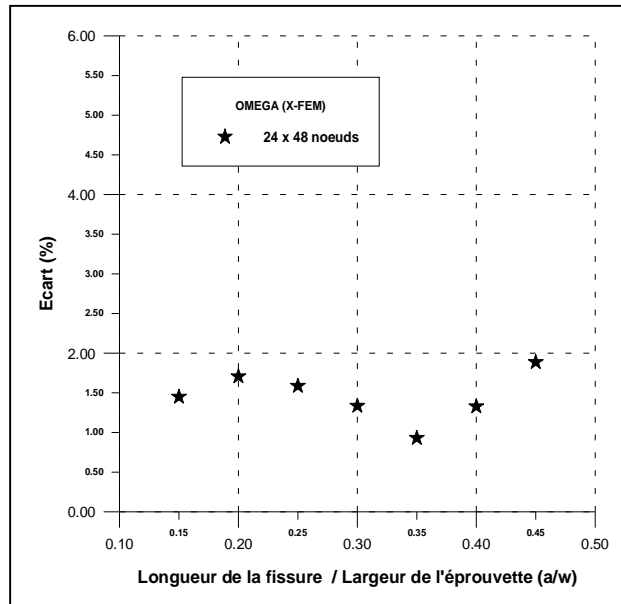


Figure IV.39 : Ecarts entre les facteurs de correction analytiques et facteurs de correction obtenus par l'approche X-FEM pour la maille (24x48) nœuds

a/w	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
Y_{norm}	0.9855	0.9829	0.9841	0.9867	0.9907	0.9867	0.9811

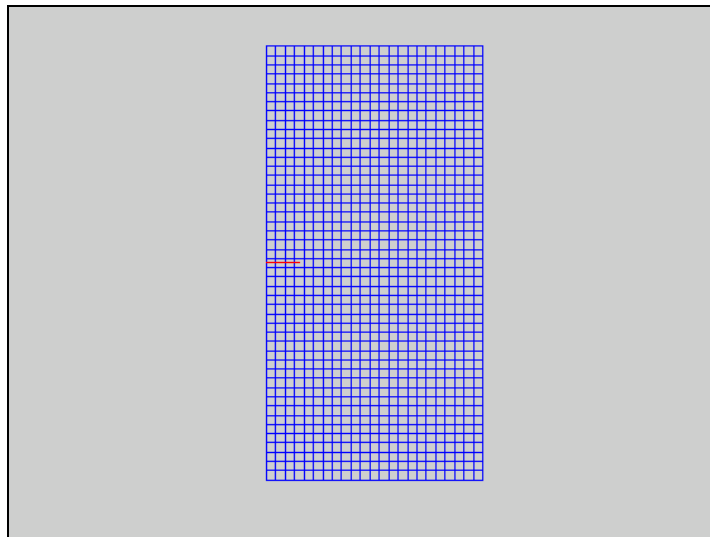
Tableau IV .20 : Facteurs de correction normalisés obtenus pour la maille (24x48) nœuds

D'après la figure IV.38, la confrontation des résultats permet de constater la bonne concordance entre les résultats obtenus par le code OMEGA (X-FEM) et ceux donnés par la solution théorique (un écart inférieur à 2%).

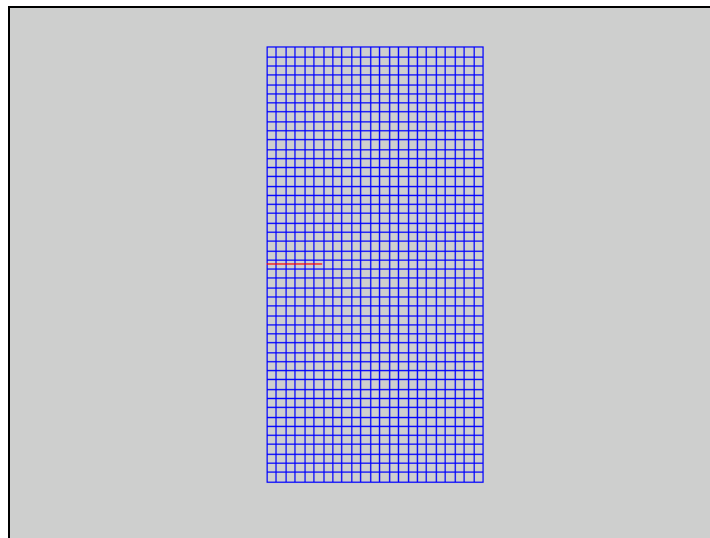
En plus de la bonne concordance des résultats, il est très nécessaire de souligner les deux remarques très importantes suivantes :

- L'analyse a été réalisée sans avoir recouru à un remaillage de l'éprouvette. La maille initiale a été maintenue malgré la variation du rapport (a/w).
- La fissure coupe les éléments finis constituant la maille.

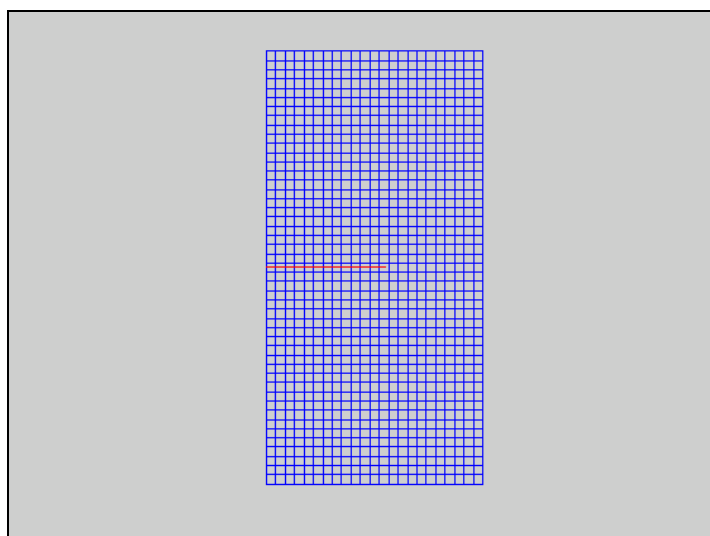
La figure IV.40 montre un schéma de modélisation sans remaillage de la propagation d'une fissure.



$a/w=0.15$



$a/w=0.25$



$a/w=0.55$

Figure IV.40 : Schéma de la propagation de la fissure

5.2. Influence du nombre de nœuds

Dans cette application, l'influence du nombre de nœuds sur la solution X-FEM a été étudiée. L'éprouvette SEN a fait l'objet d'analyse en utilisant trois différentes mailles d'éléments finis étendus. Les résultats de cette étude sont reportés sur la figure IV.41.

Il est possible de constater que la solution X-FEM est sensible à la taille de la maille d'éléments finis. On note également que le raffinement du maillage conduit à des meilleurs résultats.

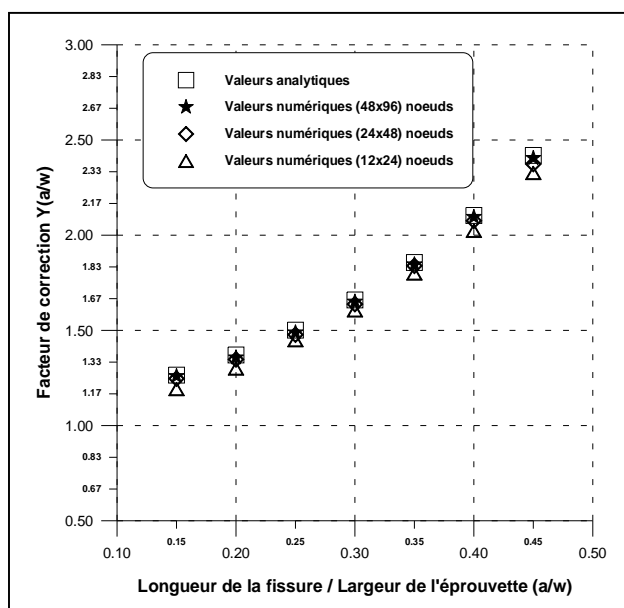


Figure IV. 41 : Facteurs de correction normalisés obtenus pour différentes mailles

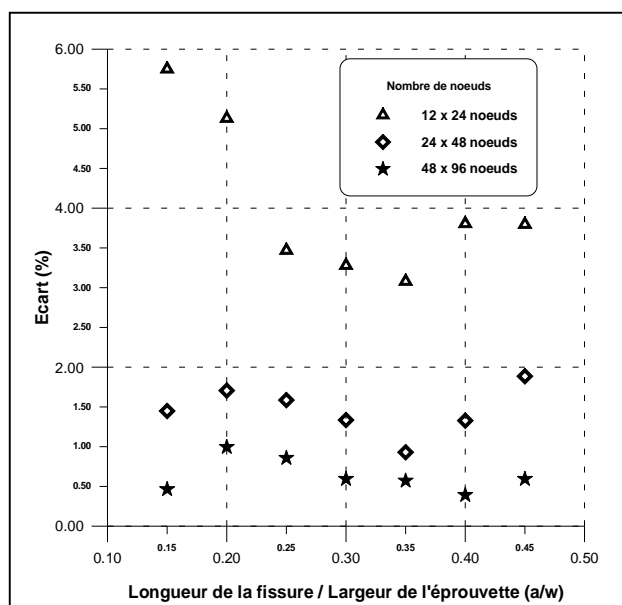


Figure IV.42 : Ecarts entre les facteurs de correction analytiques et les facteurs de correction obtenus par l'approche X-FEM pour différentes mailles

a/w	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
Y _{12x24}	0.9425	0.9487	0.9653	0.9672	0.9692	0.9619	0.9620
Y _{24x48}	0.9855	0.9829	0.9841	0.9867	0.9907	0.9867	0.9811
Y _{48x96}	0.9954	0.9901	0.9914	0.9941	0.9943	0.9961	0.9941

Tableau IV .21 : Facteurs de correction normalisés obtenus pour différentes mailles

5.3. Influence la taille du domaine

Les tableaux IV .22, IV.23 et IV.24 regroupent les valeurs des facteurs de correction normalisés pour trois différents domaines de deux modes de discrétisation. Pour chacune des discrétisations, la taille du domaine est paramétré par le rapport r/h avec r est le rayon du domaine et h est la racine carrée de l'aire de l'élément du front de la fissure. On peut constater que, pour les trois longueurs des fissures, la solution X-FEM est influencée par la taille du domine. On notera également que le raffinement du maillage améliore les résultats obtenus.

r /h	12 x 24	24 x 48
1.5	0.9780	0.9953
2	0.9701	0.9857
2.5	0.9647	0.9822

Tableau IV.22 : Facteurs de correction normalisés pour différents domaines ($a/w=0.2$)

r /h	12 x 24	24 x 48
1.5	0.9741	1.0025
2	0.9695	0.9903
2.5	0.9685	0.9899

Tableau IV.23 : Facteurs de correction normalisés pour différents domaines ($a/w=0.35$)

r /h	12 x 24	24 x 48
1.5	0.9603	0.9919
2	0.9494	0.9790
2.5	0.9469	0.9751

Tableau IV.24 : Facteurs de correction normalisés pour différents domaines ($a/w=0.50$)

6. Couplage avec la méthode des courbes de niveau

Dans le cadre de cette thèse, l'idée de couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode des courbes de niveau (LSM) a donné naissance à des différentes approches de modélisation. Cette combinaison permet de suivre la propagation d'une fissure sans avoir recours à des opérations de remaillage. Le code OMEGA offre quatre types de couplage :

- Couplage des éléments finis standards avec la technique LSM (approche S-FEM).
- Couplage des éléments finis QPE avec la technique LSM (approche Q-FEM).
- Couplage des éléments finis DQPE avec la technique LSM (approche DQ-FEM).
- Couplage des éléments finis étendus avec la technique LSM (approche X-FEM).

A titre d'exemple, le couplage de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) avec la technique des courbes de niveau (LSM) peut se résumer de la manière suivante:

- mise à jour de φ et ψ_i et reconstruction de ψ au voisinage de la pointe de fissure,
- sélection des nœuds à enrichir au voisinage de la pointe de fissure. Pour chaque élément de cette zone, on exécute les tests suivants :

si $\psi < 0$ et $\varphi_{\max} \varphi_{\min} \leq 0$ alors enrichissement H des nœuds,

si $\psi_{\max} \psi_{\min} \leq 0$ et $\varphi_{\max} \varphi_{\min} \leq 0$ alors enrichissement $\{F_i(r, \theta)\}$ des nœuds,

- calcul des fonctions d'enrichissement H et $\{F_i(r, \theta)\}$,
- calcul X-FEM,
- post-traitement.

φ_{\max} et ψ_{\max} (resp. φ_{\min} et ψ_{\min}) représentent les valeurs nodales maximales (resp. minimales) de φ et ψ sur l'élément.

La figure IV.43 montre les schémas numériques des différentes approches (S-FEM, Q-FEM, DQ-FEM et X-FEM) constituant le code OMEGA. De même, des exemples de modélisation de la propagation des fissures sans remaillage sont illustrés sur les figures IV.44, IV.45, IV.46 et IV.47.

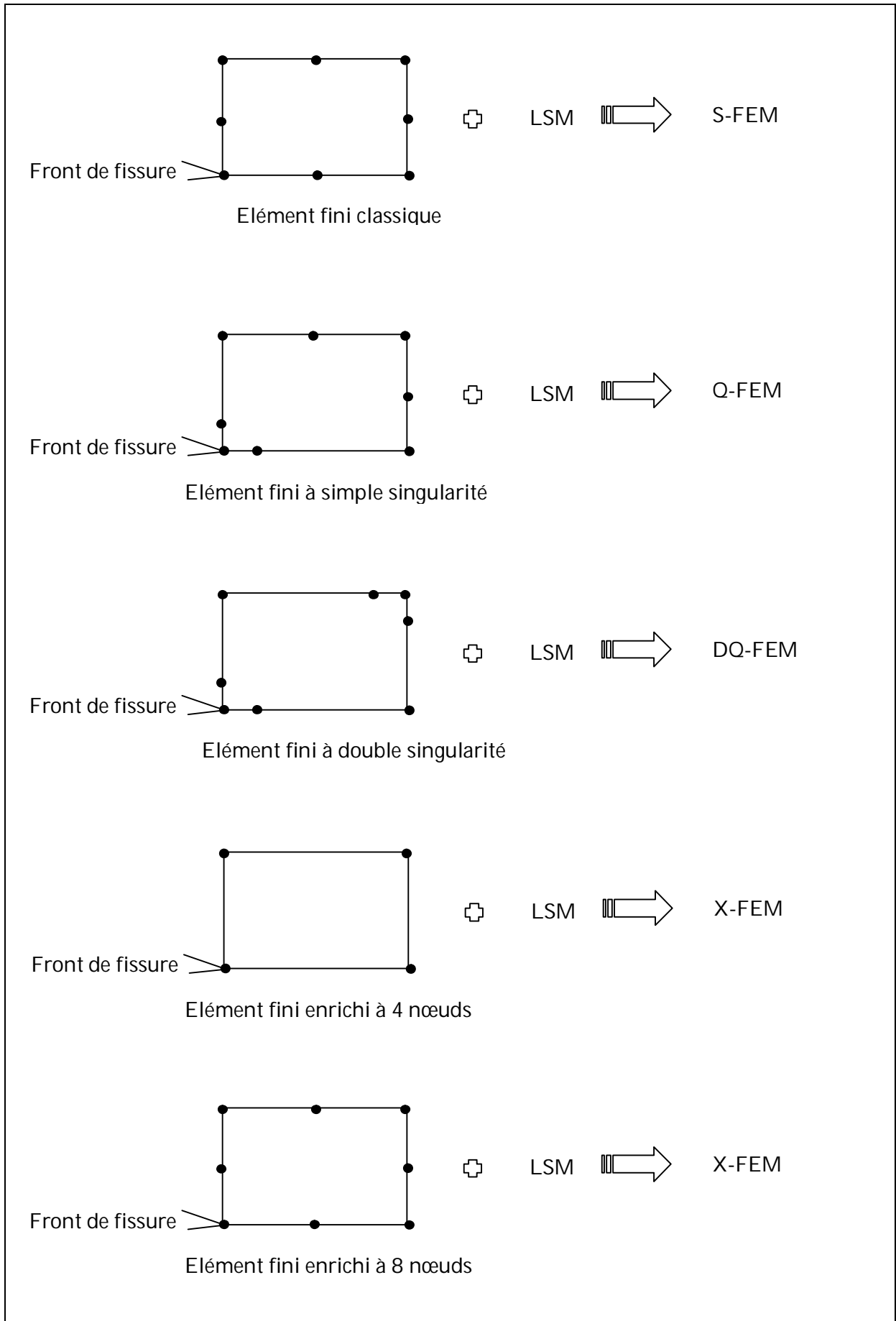
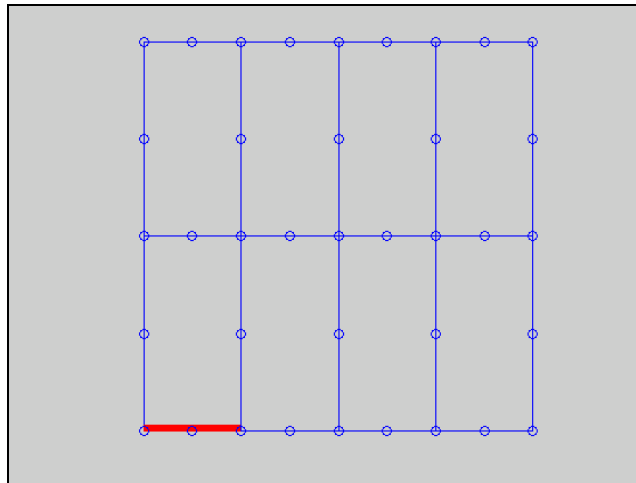
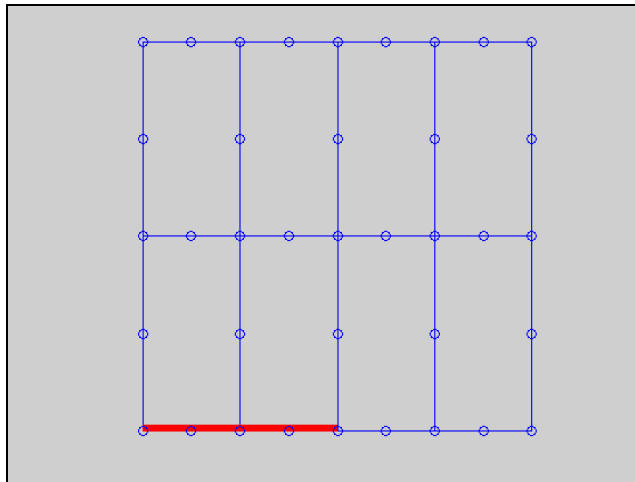


Figure IV.43 : Schéma numérique des différentes approches

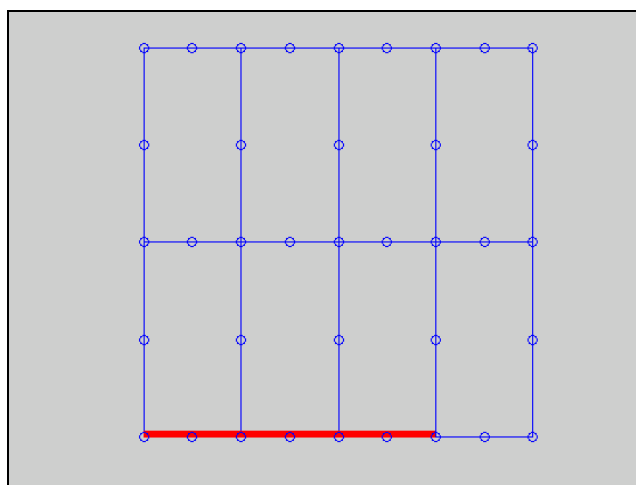
a). Couplage FEM/LSM



$a/w=0.25$



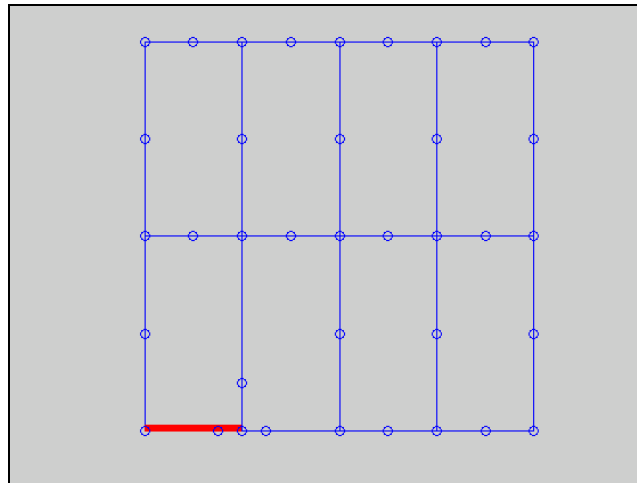
$a/w=0.25$



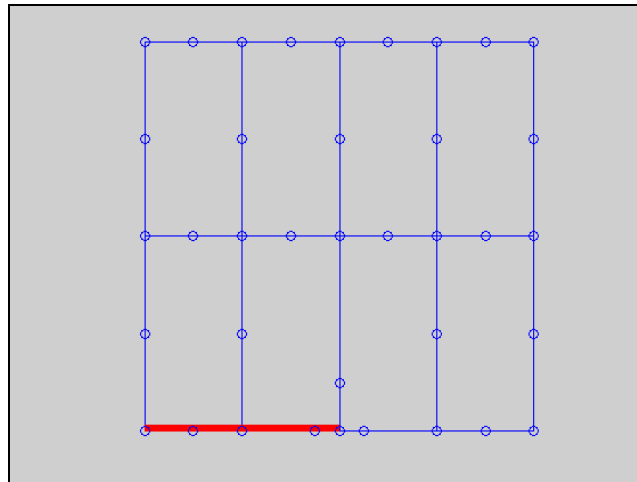
$a/w=0.75$

Figure IV.44 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (S-FEM)

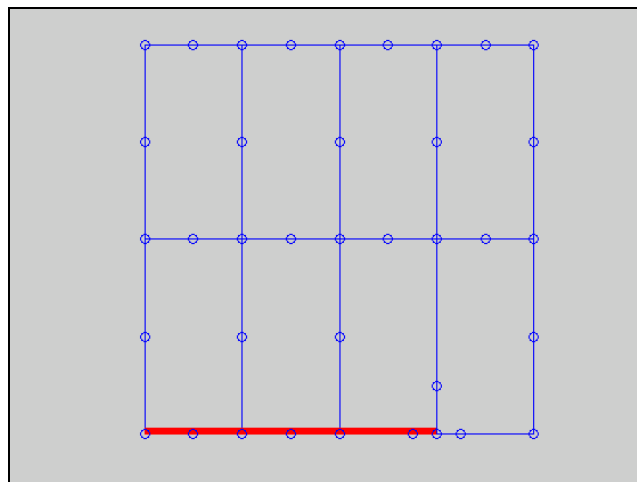
b). Couplage QPE/LSM



$a/w=0.25$



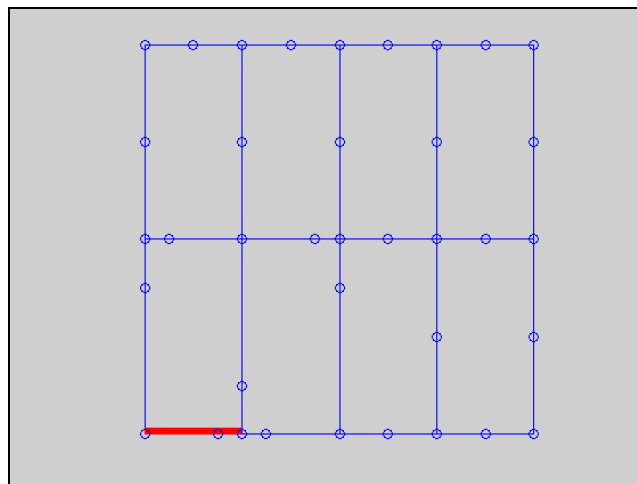
$a/w=0.25$



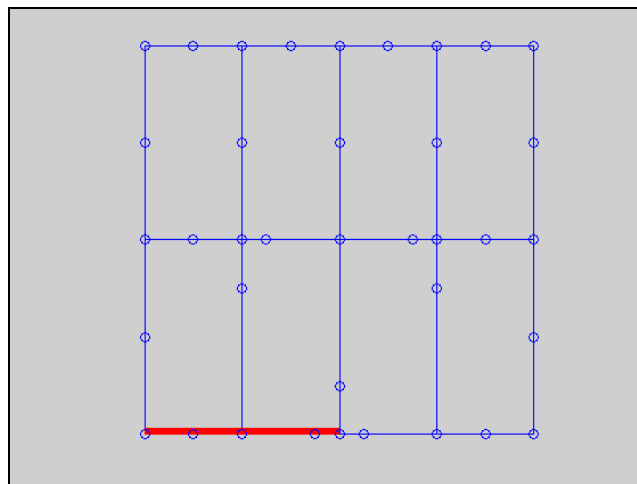
$a/w=0.75$

Figure IV.45 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (Q-FEM)

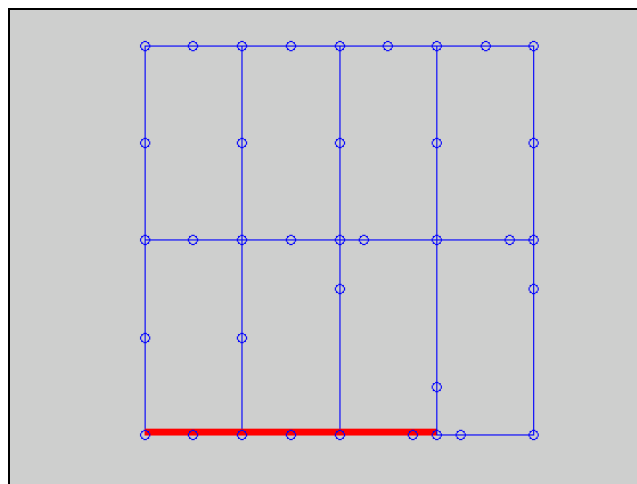
c). Couplage DQPE/LSM



$a/w=0.25$



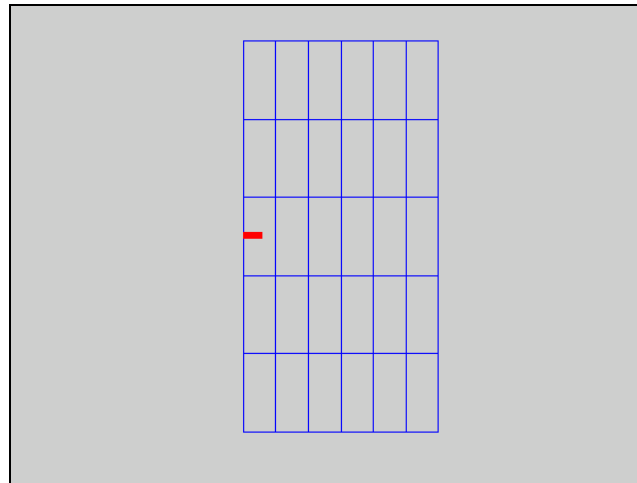
$a/w=0.5$



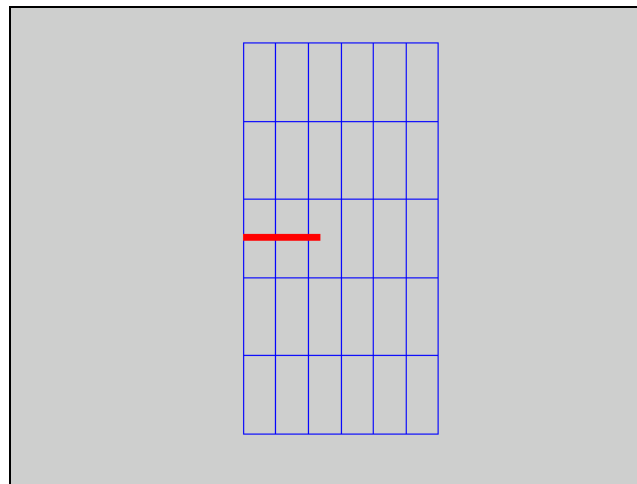
$a/w=0.75$

Figure IV.46 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remailage (DQ-FEM)

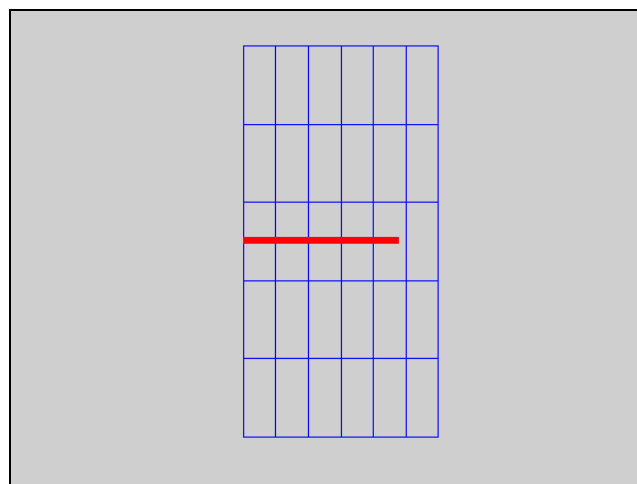
d). Couplage X-FEM/LSM



$a/w=0.1$



$a/w=0.4$



$a/w=0.8$

Figure IV.47 : Suivi de la propagation d'une fissure sans remaillage (X-FEM)

7. Discussion

Au terme de cette étude, une comparaison des différentes approches de modélisation (S-FEM, Q-FEM, DQ-FEM et X-FEM) permet de mettre en évidence un certain nombre d'observations :

1- Les quatre approches permettent de s'acquitter de la lourde tâche du remaillage lors de l'étude de propagation de fissures.

2- L'approche S-FEM nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis au voisinage immédiat des fissures. En effet, les éléments finis standards, basés sur une approximation polynomiale, donnent une mauvaise estimation des champs des déformations au bout de la fissure.

3- Les deux approches Q-FEM et DQ-FEM modélisent fidèlement la singularité aux voisinages des fissures et ne demandent pas l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis. Les éléments finis QPE et DQPE constituant ces deux approches reproduisent correctement les champs des déformations au voisinage immédiat des fissures.

4- L'approche X-FEM n'impose pas aux fissures d'être conformes aux frontières. Elle permet aux fissures d'être arbitrairement aligné sur la maille.

5- Dans la modélisation par les approches S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM, les frontières des éléments finis doivent coïncider avec la fissure.

6- La grande flexibilité offerte par l'approche X-FEM a un prix qui se paie dans sa mise en œuvre. Des modifications majeures sont nécessaires afin d'implanter cette approche dans un code de calcul.

7- Pour les approches S-FEM, Q-FEM et DQ-FEM, il est facile de les intégrer, sans grandes difficultés, dans des programmes standards d'analyse par éléments finis.

Note IV.2 : Il est tout à fait possible de profiter des avantages de ces approches et de contourner leurs limites en proposant des schémas numériques de combinaison. Ainsi, il est très intéressant de prévoir un couplage des éléments finis étendus avec les éléments finis dégénérés (QPE et DQPE) ou avec les éléments finis standards.

8. Conclusion

Sur la base de cette étude, Il est possible de confirmer l'aptitude de code réalisé à modéliser fidèlement la singularité aux voisinages des fissures et à suivre son évolution sans avoir recours à des opérations de remaillage. L'ensemble d'exemples testés a permis d'explorer l'efficacité de l'outil de base et de porter, par voie de conséquence, un certain nombre d'améliorations.

Si l'approche numérique par éléments finis dégénérés à simple singularité a montré son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes de fissures immobiles, elle est moins adaptée pour réaliser les analyses successives d'un problème de fissuration. En effet, comme les frontières internes changent d'une analyse à l'autre, une opération de maillage doit être recommencée à chaque étape. Si une telle approche est envisageable pour certains cas simples, il semble irréaliste de procéder de cette manière pour le cas de problème complexe évoluant dans le temps. L'idée de coupler cette technique avec la méthode des courbes de niveaux (LSM) permet de dévier cet obstacle. De plus,

l'introduction d'une nouvelle configuration de l'élément fini dégénéré constituant cette approche permet d'améliorer les résultats d'analyse. Une étude comparative de l'efficacité des techniques d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes (DCT, QPDT et extrapolation) a montré que les résultats obtenus sont identiques pour le cas de la modélisation par éléments finis dégénérés à simple singularité. Cependant, les résultats obtenus avec la technique DCT sont plus adéquats pour le cas de la modélisation par éléments finis dégénérés à double singularité.

Par une technique d'enrichissement adaptée du champ de déplacement, la technique X-FEM permet de représenter correctement la singularité aux voisinages d'une fissure placée de manière arbitraire sur un maillage. Elle permet, en conséquence, de simplifier les processus de maillage et de remaillages lors de la propagation. Cependant, l'implantation de cette méthode au sein d'un code de calcul soulève plusieurs difficultés. Un effort d'implantation numérique doit être fourni.

En résumé, le code réalisé offre le choix d'analyser un problème de fissuration, sans remaillage, par diverses approches et ouvre des perspectives de combinaison de ces approches afin de traiter les problèmes les plus complexes. En quelques mots le code OMEGA étend les possibilités d'analyse par éléments finis sans en perdre ses avantages.

Partie II: Approche Numérique- Expérimentale

1. Introduction

Sur la base d'un programme expérimental de calcul de la ténacité des ciments renforcés de fibres cellulosesques, une étude numérique par éléments finis est envisagée afin d'étudier la résistance à la propagation de fissure en fonction de la longueur des fibres et en fonction de l'état d'humidité du matériau.

L'éprouvette CT (Compact-Tension), qui a été utilisée dans l'étude expérimentale, sera étudiée numériquement. L'approximation du matériau homogène, élastique linéaire et isotrope a été choisie dans l'étude de la résistance à la propagation de la fissure.

2. Un aperçu sur les composite fibreux

Un matériau composite résulte de l'association de deux ou plusieurs constituants de natures différentes non miscibles, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [168,169].

Les matériaux composites se différencient, non seulement, par la nature de leurs composants: matrice (ciment, métaux, plastiques...), éléments de renforcement (fibres courtes et longues, agrégats...), mais aussi par l'orientation et la distribution de ces derniers.

Les matériaux fibres-ciment constituent une classe un peu particulière de composites, ce sont des matériaux à faible valeur ajoutée. De plus, la géométrie du renfort, son faible volume et sa disposition dans la matrice en font un matériau moins hétérogène que la plupart des autres composites. Ainsi les objectifs du renforcement et les mécanismes physiques qui les servent sont très différents.

L'incorporation de fibres dans les matrices à base de ciment est réalisée afin d'améliorer la résistance à la traction et de diminuer la fragilité. L'hypothèse importante est que les fibres permettent de retarder l'initiation des fissures et de contrôler la propagation une fois qu'elles apparaissent.

3. Classification des composites fibreux

Il est possible de classer les composites fibreux en deux catégories principales:

3.1. Les composites à fibres courtes

Ils sont renforcés par des fibres préalablement coupées en petites dimensions de l'ordre du millimètre. Généralement ce genre de fibres n'a aucune orientation préférentielle, cependant le composite peut présenter une direction préférentielle.

La difficulté de réalisation de ce type de matériaux consiste à maîtriser l'orientation et la dispersion des fibres de manière homogène et à éviter la formation d'amas.

3.2. Les composites à fibres longues

Ils sont renforcés par des fibres continues. L'orientation et l'arrangement, individuelles ou en paquets, permettent de définir plusieurs structures géométriques :

- a)- structure unidirectionnelle (1D)
- b)- structure bidirectionnelle (2D)
- c)- structure tridirectionnelle (3D)

Dans le cas des matériaux fibreux, l'orientation des fibres détermine l'anisotropie du matériau composite. Cet aspect constitue une des caractéristiques fondamentales des composites : La possibilité de contrôler l'anisotropie du produit fini par une conception et une fabrication adaptées aux propriétés souhaitées [170].

4. Propriétés des constituants

4.1. Matrice

Le ciment se présente sous la forme de poudre fine, qui combinée à l'eau, donne des hydrates stables qui lui confèrent une résistance mécanique. La réaction d'hydratation du ciment conduit donc à la formation d'une pâte qui durcit progressivement à l'air ou dans l'eau. Un durcissement qui s'accompagne de variations dimensionnelles très importantes [171].

Ce phénomène, dont l'amplitude est supérieure à la déformation à rupture du ciment durci peut conduire, s'il est contrarié, à la ruine du matériau. C'est pourquoi le ciment est généralement utilisé comme liant, les inclusions limitant le retrait [172].

Le principal type de ciment est le ciment portland, obtenu par calcination de calcaire et d'argile. Le produit de calcination (le clinker) est finement broyé pour donner le ciment. Les principaux constituants du ciment portland sont [173] :

C3S	Silicate tricalcique	3CaO, SiO ₂
C2S	Silicate bicalcique	2CaO, SiO ₂
C3A	Aluminate tricalcique	3CaO, Al ₂ O ₃
C4AF	Alumine - ferrite tetracalcique	4CaO, Al ₂ O ₃ , Fe ₃ O ₃

4.2. Fibres

Différents types de fibres peuvent être utilisés pour renforcer le ciment :

- les fibres minérales ou naturelles (amiante, cellulose...),
- les fibres synthétiques (verre...),
- les fibres plastiques (Nylon, polypropylène, polyester...),
- les fibres métalliques (acier) etc.

Le tableau IV.25 compare certaines caractéristiques géométriques et mécaniques de quelques types de fibres et du ciment [174], il met en évidence la nature très variée des produits proposés.

5. Paramètres influençant les propriétés des composites

L'étude de la structure des matériaux composites fibreux a montré que l'anisotropie et l'hétérogénéité qui résultent de leur conception, conduit à les caractériser par un grand nombre de paramètres. Ces paramètres augmentent les dispersions dans les résultats et empêchent, bien souvent, des comparaisons entre les différents travaux. Il apparaît donc primordial, dans une optique d'optimisation au stade de l'élaboration, de connaître avec précision la valeur des différents paramètres: Fraction volumique, longueur, diamètre, dispersion et orientation des fibres, porosité et adhérence fibre-matrice dont certains sont

difficilement mesurables. Si l'ensemble de ces paramètres concourent à déterminer les propriétés des matériaux composites, les modélisations descriptives ne tiendront compte que de certains paramètres à cause de la complexité des phénomènes mis en jeu.

Fibres	Diamètre µm	Long. mm	Densité	Résistance en traction MPa	Module d'Young GPa	Allong. à la rupture %
cellulose	14 à 45	1 à 3	1.50	150 à 500	20 à 40	8 à 12
Amiante	0.02 à 20	5	2.5 à 3.4	3000	100 à 200	2 à 3
Acier	5 à 500	20 à 80	7.8	1000 à 3000	200	3 à 4
Verre	5 à 20	40 à 70	2.6	150 à 300	80	2 à 3.5
Polypropyl.	10 à 200	25 à 75	0.9	400 à 750	5 à 10	15 à 25
Carbone	5 à 9	Variable	1.7 à 2	2000 à 3000	250 à 400	0.5 à 1.5
Kevlar 49	10		1.45	3600	130	2
Ciment	200		2.5	5 à 13	10 à 30	0.1 à 0.5

Tableau IV.25 : Caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes fibres et du ciment

6. Rupture des composites: Fibres-Ciment

6.1. Module élastique

La loi des mélanges nous permet d'exprimer, en fonction des caractéristiques des constituants, les propriétés du matériau composite. Ainsi le module du composite s'écrit :

$$E_c = (1 - V_f) E_m + \eta_l \eta_\theta V_f E_f \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

V_f : taux volumique des fibres

η_l, η_θ : coefficients de l'efficacité

E_f : module élastique des fibres

E_m est plus précisément le module de la matrice correspondant à son état dans le composite, qui est différent du module de cette même matrice seule. Comme la porosité est une fonction croissante du volume des fibres et qu'elle influence largement le module élastique, une loi empirique du type :

$$E_m = E_o (1 - P)^3 \quad (\text{IV.2})$$

semble être acceptée par la majorité des auteurs [175].

avec:

E_o : Module à porosité nulle

P : Porosité

6.2. Apparition de l'endommagement des composites renforcés de fibres

La déformation à rupture du ciment est inférieure à celle des fibres (Tableau IV.25). C'est donc dans la matrice que le composite s'endommagera d'abord. Les fibres, par transfert de charge à l'interface, peuvent permettre de décharger la matrice et donc de retarder sa fissuration. Cependant, ce phénomène est conditionné par le rapport E_f/E_m et par la résistance au cisaillement de l'interface.

6.3. Mécanisme de rupture

Les composites fibres-ciment peuvent être classés en trois catégories, en fonction de leur comportement en traction (Figure IV. 48).

Le comportement type *A* se caractérise par une surcharge trop importante sur les fibres, et il y a rupture, ou déchaussement. Ce phénomène est conditionné par l'inégalité suivante:

$$\min (\sigma_f^u V_f, 2 V_f l \tau / d) < \sigma_{mu} (1 - V_f) + \sigma_f^* V_f \quad (IV.3)$$

avec :

σ_f^* : Contrainte dans les fibres pour la déformation de rupture ε_{mu} de la matrice. Dans le domaine élastique $\sigma_f^* = E_f \varepsilon_{mu}$

σ_{fu} : contrainte à rupture en traction des fibres,

V_f : taux volumique des fibres,

σ_{mu} : contrainte à rupture de la matrice,

l et d : longueur et diamètre des fibres,

τ : cisaillement maximum à l'interface.

Le comportement type *B* se caractérise par le fait que les fibres sont capables de supporter une déformation supplémentaire, ce qui entraîne une fissuration multiple de la matrice [176].

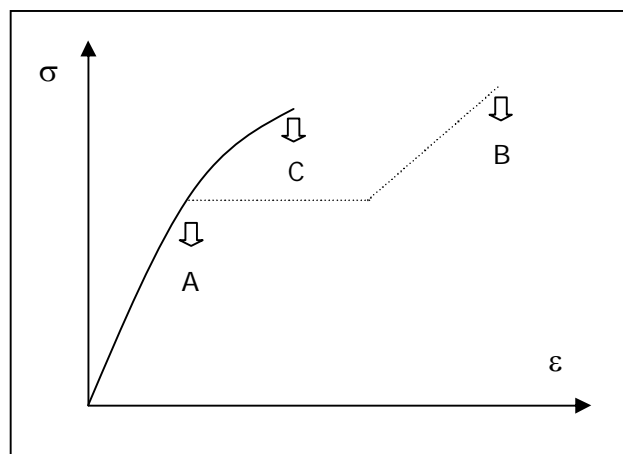


Figure IV.48 : Comportements en traction des matrices fragiles renforcées de fibres

Les ciments-fibres qui suivent ce type de comportement sont généralement renforcés par des fibres longues ou par des films avec un volume suffisamment important pour supporter la surcharge à la rupture de la matrice.

Le plateau (Figure IV.48) montre que l'on assiste à un phénomène de multi-fissuration de la matrice à contrainte constante, ou très légèrement croissantes, en fonction de la répartition des défauts dans le ciment.

Le comportement type *C* se manifeste généralement dans le cas des composites renforcés par des fibres courtes.

Après rupture de la matrice, la réponse au chargement est donnée par un film de fibres qui résiste à la charge et forme un pont à travers la fissure. Cette réponse est donnée principalement par la contribution des fibres résistantes (réponse élastique) et les fibres qui glissent (réponse par frottement). Quand le maximum de charge est atteint, on a encore des forces de frottement à l'interface fibre-matrice et la rupture du composite aura lieu lorsque les fibres qui traversent les fissures de la matrice se cassent ou se déchaussent.

Des études [177,178] sur des ciments renforcés par des films de différents modules montrent que le plateau de déformation diminue et qu'on se rapproche du comportement type *C* au fur et à mesure que le module du renfort augmente. Il faut vraisemblablement interpréter ce phénomène par :

- Une diminution de l'ouverture de chaque fissure à cause de la rigidité des fibres.
- Une grande difficulté pour les micro-fissures à se propager.

Dans le cas du comportement type *C*, la rupture du composite en deux blocs a lieu en même temps que la multifissuration et non successivement comme dans le cas type *B*.

Cette constatation peut être confirmée dans les études [179] sur les ciments renforcés avec différentes longueurs de fibres et qui ont un comportement type *C*.

Krenchel [180] a suggéré que l'efficacité d'un renforcement est liée à l'espacement entre les fibres et à la surface spécifique des fibres. L'importance de ces deux paramètres est en partie prouvée par la nécessité du traitement de défibrage de l'amiante et du processus de raffinage des fibres de cellulose ce qui se traduit par une diminution de l'écart moyen entre les fibres et par l'augmentation de la surface spécifique des fibres.

6.4. Application de la mécanique de la rupture aux ciments de fibres

Les concepts de la mécanique de la rupture élastique linéaire ont été appliqués pour la première fois par Kaplan [181] aux bétons et ensuite ont été étendus par d'autres [182-184] aux pâtes de ciment, mortier et aux bétons renforcés de fibres courtes disposées au hasard.

Les courbes *R* peuvent être caractéristiques de ces matériaux, à deux conditions :

- la "pseudo ductilité" observée en traction doit être très faible voire inexistante [185]. Cette condition exclut tous les matériaux ayant un comportement type *B*, c'est-à-dire à multifissuration importante.

- Les dimensions de l'éprouvette utilisée doivent être suffisamment grandes par rapport à la taille de la zone de microfissuration [186].

En satisfaisant ces conditions, on peut admettre que les courbes R sont représentatif des matériaux comme l'amiante-ciment ou la cellulose-ciment et tous les autres ciments renforcés de fibres ayant une courbe de traction quasiment linéaire élastique [187].

7. Approche numérique de la résistance

Sur la base des travaux expérimentaux de Khenfer [188,189], une étude numérique a été envisagée afin d'évaluer la résistance à la fissuration des ciments renforcés de fibres cellulosiques : L'étude a été conduite tout d'abord sur des ciments renforcés de différentes longueurs de fibres de cellulose (1.39, 2.35 et 3.14 mm). Par la suite, des applications ont été effectuées sur des ciments renforcés de fibres de cellulose à l'état sec, ambiant et saturé ($H=0,8$, et 25%) [190].

7.1. Détails expérimentaux

L'étude de la résistance à la propagation de la fissure s'est centrée sur un seul essai avec une géométrie d'éprouvette figée. Le choix de l'essai a été guidé dans le souci de proposer un test sélectif mettant bien en évidence le rôle des fibres.

Les essais de rupture sont conduits sur des éprouvettes Compact-Tension (CT) à vitesse de déplacement constante (Figure IV.49). Pour éliminer les risques de bifurcation de la fissure et sa division en multiples fissures, des rainures ont été usinées de part et d'autre de l'éprouvette. Le fond de l'entaille initiale est obtenu avec une scie fine, ce qui assure un rayon de courbure suffisamment faible en fond de la fissure.

Le déplacement a été enregistré par un capteur d'ouverture positionné à l'extrémité de l'éprouvette. La mesure du déplacement à cet endroit, et non aux points d'application de la charge, modifie la valeur de la complaisance, mais pas sa variation ($\delta c/\delta a$).

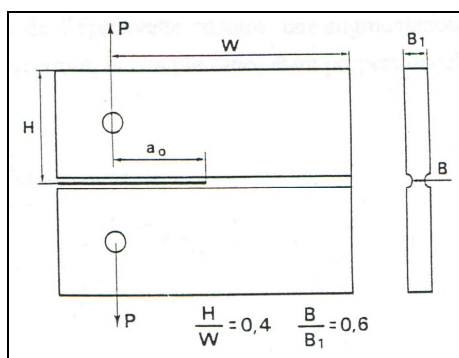


Figure IV.49 : Géométrie de l'éprouvette CT

7.2. Courbe charge - déplacement

Lors d'un essai continu, on distingue trois domaines sur la courbe charge-déplacement présentée sur la figure IV.44 :

- 1- Un domaine linéaire
- 2- Un domaine non - linéaire, correspondant à une propagation stable de la fissure à charge croissante.
- 3- Après le maximum de la charge, une propagation toujours stable de la fissure à charge décroissante.

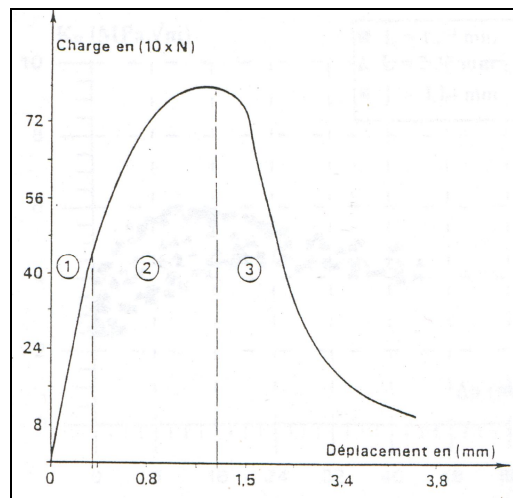


Figure IV .50: Courbe charge - déplacement d'une éprouvette entaillée CT

Un rechargement de l'éprouvette montre une augmentation linéaire de la charge en fonction du déplacement, la complaisance étant proportionnelle à l'inverse de la pente (Figure IV.51).

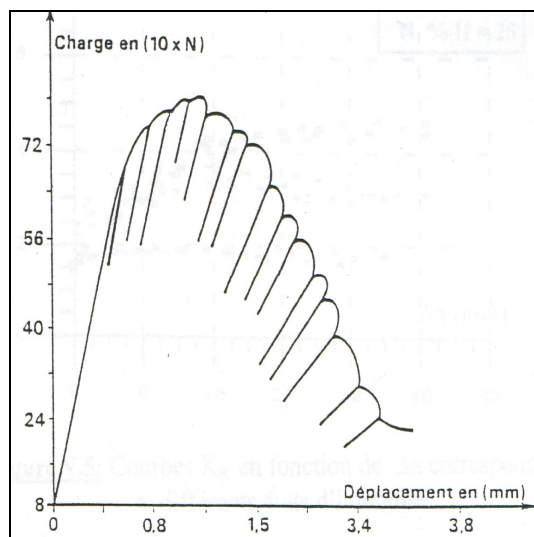


Figure IV.51: Courbe charge- déplacement d'une éprouvette entaillée soumise à des chargements et des déchargements

7.3. Courbe K_R

Il a été choisi de tracer les courbes de résistance à la propagation de la fissure en terme de facteur d'intensité de contraintes (Figure IV.52 et IV.53). Pour chaque courbe R , deux valeurs du coefficient d'intensité de contrainte ont été déterminées :

- la valeur du coefficient à l'amorçage de la fissure K_A ,
- la valeur maximale atteinte K_R .

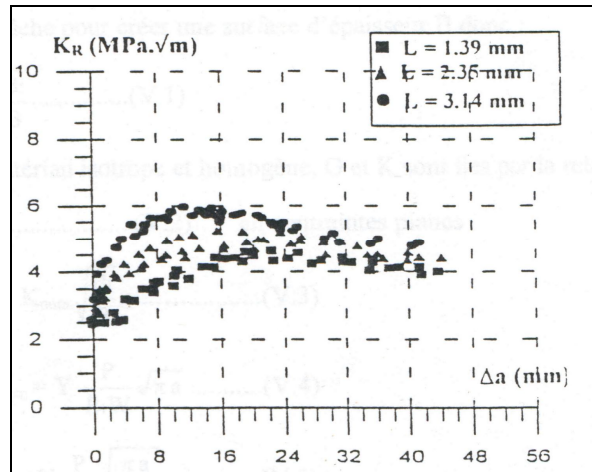


Figure IV.52: Courbes K_R en fonction de Δa correspondant à différentes longueurs de fibres

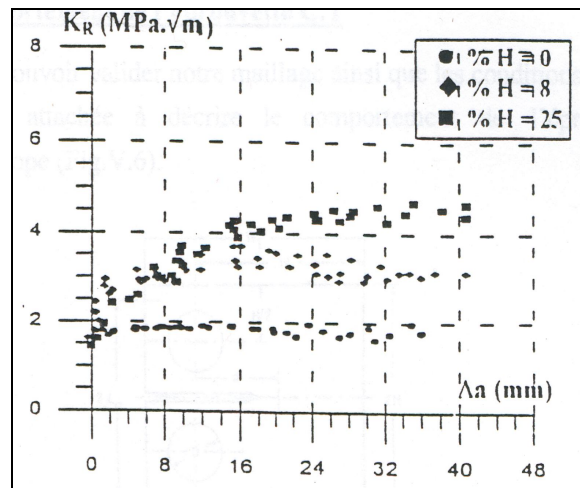


Figure IV.53: Courbes K_R en fonction de Δa correspondant à différents états d'humidité

7.4. Comportement de l'éprouvette CT

Afin de pouvoir valider notre maillage ainsi que les conditions aux limites, cette étude s'est attachée à décrire le comportement de l'éprouvette CT d'un matériau isotrope. La symétrie de cette éprouvette a permis de faire l'étude sur la demi-éprouvette. Elle a été discrétisée par des éléments à huit nœuds (Figure IV.54).

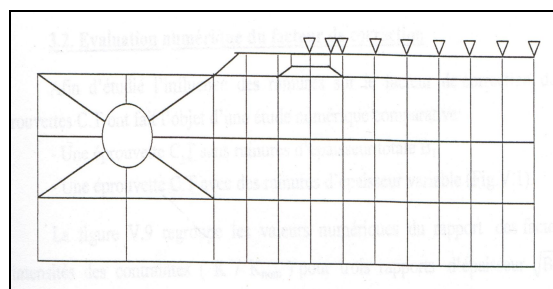


Figure IV.54 : Maillage de la demi-éprouvette CT

Les résultats de cette analyse sont reportés sur la figure IV.55. Ils sont comparés à ceux de la méthode de collocation [191].

Il apparaît, clairement, que nos valeurs corroborent celles de la méthode de collocation [191], ce qui permet de valider notre maillage ainsi que les conditions aux limites.

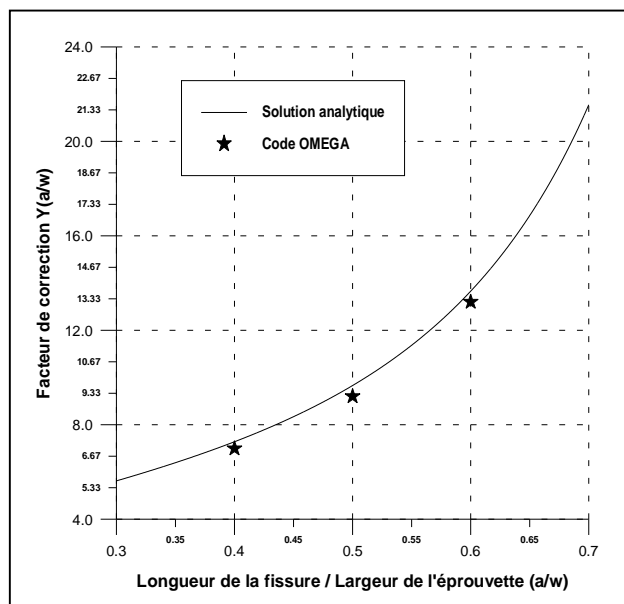


Figure IV.55 : Comparaison des résultats numériques trouvés avec ceux de la méthode de collocation

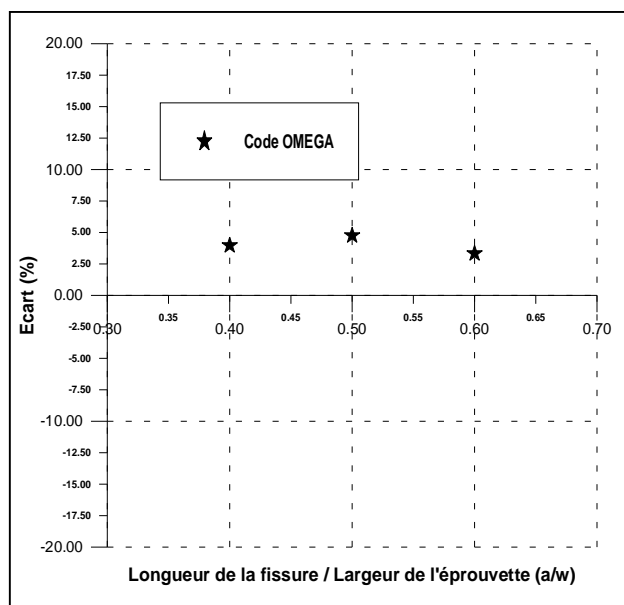


Figure IV.56 : Ecart entre les facteurs de correction trouvés et les facteurs de correction donnés par de la méthode de collocation

a/w	Y
0.4	0.9603
0.5	0.9524
0.6	0.9667

Tableau IV.26 : Valeurs du facteur de correction de l'éprouvette CT

7.5. Effet des rainures

Pour une raison expérimentale, l'éprouvette CT testée présente des rainures. Il est donc nécessaire d'ajouter une correction au calcul des facteurs d'intensité des contraintes pour tenir compte de la réduction d'épaisseur due à la rainure. A cet effet, l'influence de ces rainures sur les facteurs d'intensité des contraintes a fait l'objet d'une analyse numérique.

Deux types d'éprouvettes (CT) ont été étudiés :

- une éprouvette CT sans rainures d'épaisseur totale B_1 (10mm).
- une éprouvette CT avec des rainures d'épaisseur variable ($B = 7, 8, 9$ mm).

	B1(mm)	B (mm)	$(B_1 / B)^{1/2}$
Rapport 1	10	9	1.054
Rapport 2	10	8	1.118
Rapport 3	10	7	1.195

Tableau IV. 27 : Valeurs du rapport de l'épaisseur

La figure IV.57 représente les facteurs de correction obtenus numériquement pour les différentes éprouvettes rainurées. Elle montre que le facteur de correction est influencé par l'existence des rainures, il est de plus en plus important pour des rapports d'épaisseur élevés.

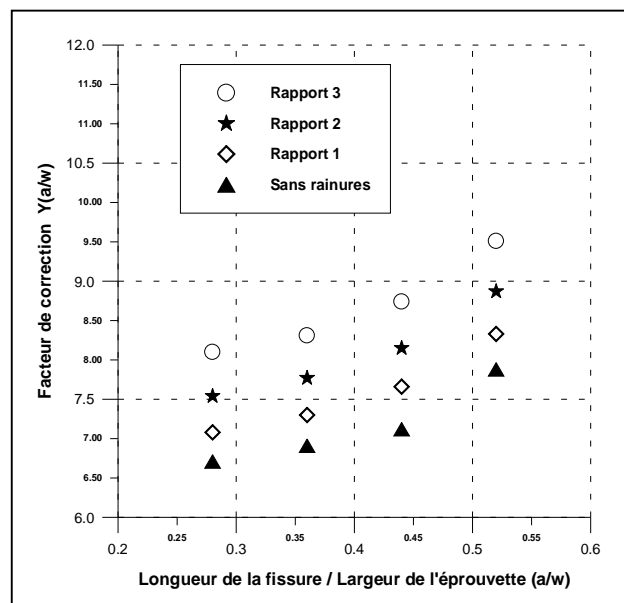


Figure IV.57: Influence des rainures sur le facteur de correction

7.6. Effet de la longueur des fibres et d'état d'humidité

L'étude de la résistance à la propagation de la fissure a été conduite tout d'abord sur des ciments renforcés de différentes longueurs de fibres de cellulose (1.39, 2.35 et 3.14 mm). Par la suite, des applications ont été effectuées sur des ciments renforcés de fibres de cellulose à l'état sec, ambiant et saturé.

Dans toute cette étude, les constantes élastiques des matériaux sont tirés du travail [188] :

- Pour les ciments renforcés par différentes longueurs de fibres $E = 18 \text{ GPa}$, $\nu = 0.12$
- Le pourcentage d'humidité absolue, ainsi que les constantes élastiques, correspondant à chaque état d'humidité sont montrés dans le tableau IV.28.

Etat d'humidité	Pourcentage d'humidité %	Constantes élastiques GPa
Sec	0	17
Ambiant	8	18
Sature	25	15

Tableau IV.28: Pourcentage de la teneur en eau et les valeurs des constantes élastiques du composite à différents états d'humidité

Les résultats numériques de cette étude sont reportés sur les figures ci-dessous. Ils sont comparés aux résultats expérimentaux.

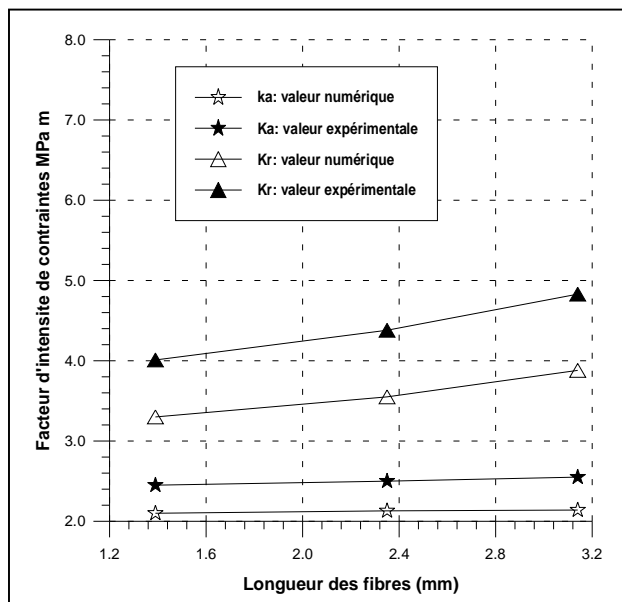


Figure IV.58 : Caractéristiques des ciments renforcés pour différentes longueurs de fibres

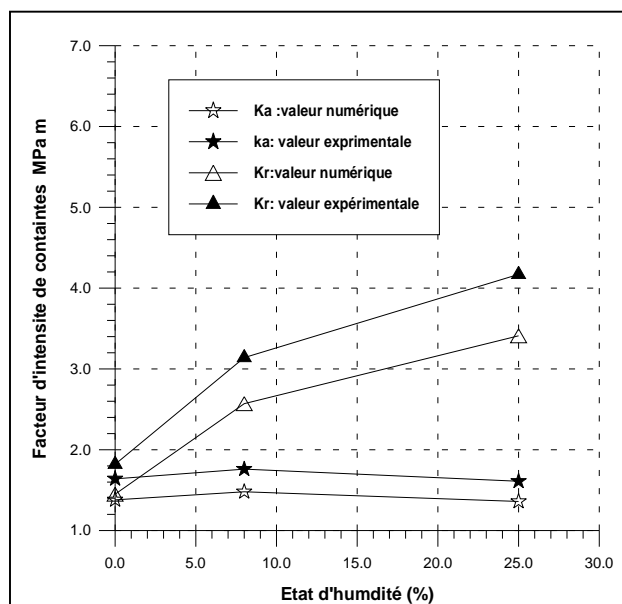


Figure IV.59: Caractéristiques des ciments renforcés pour différents états d'humidité

7.7. Discussion

Les résultats de ces applications numériques mettent en valeur deux aspects principaux :

1)- L'augmentation de la longueur des fibres ou de la teneur en eau n'a pas une grande influence sur les valeurs du facteur K_A . Par contre, cette augmentation se traduit par un accroissement des valeurs du facteur K_R . Cette constatation s'explique par le fait que :

a)- Dans le cas des ciments renforcés de fibres longues, la fissure ne se propage que par rupture des fibres ; ce qui nécessite une grande énergie. Alors que, pour les composites renforcés de fibres courtes, la fissure ne trouve pas de difficulté à se propager, elle tend à éviter les fibres courtes qui opposent à sa propagation, en les contournant.

b)- L'initiation à la propagation de la fissure n'est pas sensible à l'état d'humidité car elle se manifeste dans la matrice sans intervention des fibres. Par contre, l'eau a un effet sur la propagation de la fissure ; qui se traduit par un plus fort accroissement de la résistance à la fissuration avec l'avancé de la fissure, celui-ci est causé par le gonflement des fibres par l'eau, qui leur offre une grande ductilité de telle sorte que le mécanisme de déchaussement des fibres de la matrice devient de plus en plus lent, et par conséquent la fissure se propage lentement au cours du temps.

2)- Les valeurs numériques des facteurs d'intensité, en particulier de K_R , sont relativement inférieures aux valeurs expérimentales.

Cet écart est dû essentiellement à deux facteurs principaux :

a)- L'étude numérique suppose que le matériau est homogène et isotrope alors que en pratique des hétérogénéités et des anisotropies microscopiques existent au sein du matériau. De plus, elle se trouve limitée par l'existence d'une zone plastique à la pointe de la fissure.

b)- Au stade du calcul des facteurs K_R , l'éprouvette compact-tension (CT) a en réalité un comportement non linéaire contrairement au modèle numérique qui admette la linéarité.

Note IV .3 : Une étude numérique similaire a été conduite sur des plâtres renforcés de fibres cellulósiques pour différents états d'humidité [192]. Des résultats semblables à cette étude ont été constatés.

8. Conclusion

Au terme de cette étude comparative, la confrontation des différents résultats permet de constater la très bonne concordance des résultats numériques avec les résultats analytiques. Cependant ces résultats sont relativement inférieurs aux résultats expérimentaux. Néanmoins, cette différence peut être jugée acceptable dans le cadre des erreurs de l'approche, en particulier, de l'existence des hétérogénéités et des anisotropies du matériau et de la complexité des paramètres mis en jeu.

D'une façon générale, on note que les résultats numériques trouvés sont comparables aux résultats expérimentaux : Ils révèlent que la longueur de la fibre incorporée et l'état de l'humidité du matériau n'ont aucune influence sur l'initiation de la propagation de la fissure, mais elle se traduit par un plus fort accroissement de la résistance à la fissuration avec l'avancée de la fissure.

Conclusion Générale

La modélisation numérique des singularités au voisinage des fissures par la méthode des éléments finis nécessite une description explicite du support géométrique. Il est nécessaire que le maillage se conforme à cette géométrie ce qui pose des problèmes de pré-traitement lorsqu'il s'agit de surface dont la topologie est complexe. Ces problèmes sont d'autant plus difficiles à appréhender si la géométrie des interfaces évolue au cours du temps.

L'objectif principal de ce travail est de développer des outils numériques basés sur les concepts de la mécanique de la rupture afin de mettre au point un code de simulation numérique de la propagation des fissures sans remaillage. Une simulation qui doit permettre de modéliser fidèlement la singularité au voisinage des fissures et de surmonter certaines des difficultés liées à la méthode standard des éléments finis.

Dans cette perspective, deux approches de modélisation de la fissuration sans remaillage ont été exposées:

➤ Une première approche visant à éviter, par une modification géométrique, le problème de singularité au voisinage des fissures, a donné lieu à la méthode des éléments finis dégénérés à quart de point. Dans le cadre de cette thèse, une nouvelle modification géométrique de ces éléments a permis de mettre en œuvre un nouveau type d'éléments finis DQPE « éléments finis à quart de point à double singularité ». La facilité d'intégrer les éléments finis dégénérés dans des programmes de calcul classiques ainsi que leurs critères de convergence font que leur présence dans les analyses de la mécanique de la rupture est indispensable. De plus, une idée originale de couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode de courbe de niveau (LSM) a permis la mise au point de nouvelles techniques de modélisation numérique de la fissuration sans avoir recours à des opérations de remaillage. La comparaison des différentes techniques d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes (DCT, QPDT et extrapolation) a indiqué que les résultats obtenus par ces techniques sont identiques pour le cas de la modélisation par éléments finis dégénérés à simple singularité. Cependant, la technique DCT offre les résultats les plus adéquats pour le cas de la modélisation par éléments finis dégénérés à double singularité. Il est à noter que la présence des éléments finis à double singularité DQPE ne se limite pas à la représentation de la singularité dans le domaine de l'élasticité linéaire, leur extension à d'autres types de singularités et à d'autres domaines d'application est tout à fait possible.

➤ Une seconde approche basée sur la partition de l'unité a permis l'émergence d'une nouvelle méthode dite « Méthode des éléments finis étendus ». Dans cette méthode, les éléments coupés par une fissure sont remplacés par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de celle-ci. Elle permet d'enrichir les approximations d'éléments finis de sorte que les problèmes de fissuration puissent être

résolus sans remaillage. La méthode permet, également, aux fissures d'être arbitrairement résolus sans remaillage. Sur la base d'une analyse critique de l'état de l'art relatif à cette nouvelle technique, un schéma d'implémentation numérique a été proposé afin d'améliorer l'aptitude de la méthode X-FEM à reproduire la singularité exigée par l'analyse élastique.

Sur la base des différentes approches de modélisation numérique sans remaillage (S-FEM, Q-FEM, DQ-FEM et X-FEM), un code de calcul sous MATLAB baptisé « OMEGA » a été mis en œuvre. Un ensemble d'applications a permis de valider et de confirmer l'aptitude du code à représenter fidèlement la singularité au voisinage des fissures et à suivre son évolution sans avoir recours à des opérations de remaillage. De même, il a été possible d'explorer certaines opportunités offertes par cet outil et d'améliorer un certain nombre de ses performances. Il est cependant très important de rappeler que, dans le cadre de cette thèse, seule une utilisation indépendante des approches de modélisation a été visée. Il est tout à fait possible de réaliser un couplage regroupant diverses approches afin d'étudier les problèmes les plus complexes :

- un couplage des éléments finis standards avec les éléments finis étendus,
- un couplage des éléments finis dégénérés à quart de point (à simple ou à double singularité) avec les éléments finis étendus.

En outre, et sur la base d'un programme expérimental, des tests ont été envisagés afin d'approcher numériquement la résistance à la fissuration d'un composite fibreux à base de ciment renforcé de fibres de cellulose : L'influence de certains paramètres tels que la longueur des fibres et l'état d'humidité du matériau ont été étudiés. D'une manière générale, la confrontation des différents résultats a permis de constater la très bonne concordance des résultats numériques avec les résultats analytiques. Cependant ces résultats sont relativement inférieurs aux résultats expérimentaux. Néanmoins, cette différence peut être jugée acceptable dans le cadre des erreurs des calculs et des hypothèses de l'approche numérique.

Enfin, nous espérons que cette étude contribuera à une plus large diffusion des concepts traités pour les analyses élastiques et élasto- plastique de la mécanique de la rupture et ouvre des perspectives à leur extension à d'autres domaines de simulation numérique.

Références Bibliographiques

- [01]- Anderson T « Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications » Taylor & Francis (2005).
- [02]- Janssen N « Fracture Mechanics » Taylor & Francis Group (2004).
- [03]- Nestor P « Fracture mechanics » Kluwer Academic Publishers (2004).
- [04]- Griffith A « The phenomena of rupture and flow in solids » Phil. Trans. of the Royal society, London 221 (1920) pp. 163-198.
- [05]- Westergaard H « Bearing pressures and cracks » Trans. ASME J. Appl. Mech. (1939).
- [06]- Sneddon I « The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid » Proc. Roy. Soc. London 187A (1946) pp. 229-260.
- [07]- Irwin G « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate » Trans. A.S.M.E , J. Appl. Mech 24 (1957) pp.361-385.
- [08]- Zhang X « Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture » Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand II (1992).
- [09]- Guidault P, Allix O, Champaney L, Cornuault C « A multiscale extended finite element method for crack propagation » Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) pp. 381–399.
- [10]- Erdogan F « Stress intensity factors » J. of Appl. Mech 50 (1983) pp. 992-1002.
- [11]- Hancock J, Reuter W, Parks D « Constraint and toughness parameterized by T Constraint Effects in Fracture » ASTM STP 1171, E.M. Hacket (1993) pp. 21-40.
- [12]- Irwin G « Structural aspects of brittle fracture » Applied Materials Research (1964) pp. 65-81.
- [13]- Dugdale G « The mechanical theory of equilibrium cracks in brittle fracture » Advanced Applied Mechanics (1962) pp. 7-55.
- [14]- Hutchinson J « Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material » J. Mech. Phys. Solids, Pergamon Press 16 (1968) pp. 13-31.
- [15]- Rice J « A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks » Trans. A.S.M.E. , J. Appl. Mech, 35 (1968) pp. 379-386.
- [16]- Eshelby J « The continuum theory of lattice defects » Solid Stat. Physics, 2 (1968) pp. 79-144.
- [17]- Bui H « Dualité entre les intégrales de contour » Compte Rendu Acad. Sciences, T. 276, Paris, (1973).
- [18]- Bui H , Proix J « Découplage des modes mixtes de rupture en thermoélasticité par des intégrales indépendantes du contour » Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures, Bastia, (1985) pp. 631-643.
- [19]- Marie S « Approche énergétique de la déchirure ductile » Thèse de doctorat, université de Poitiers (1999).
- [20]- Wells A « Application of fracture mechanics at and beyond general yielding » British welding J., 10 (1963) pp. 563-570.
- [21]- Shih C « Relationship between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks, J. of Mech. Phys. Solids, 29 (1981) pp. 305-326.
- [22]- Marchal Y « Mechanics and physics of the ductile fracture of thin plates » Thèse de doctorat de l'université de Louvain-la-Neuve (1997).
- [23]- Baouch D « Validation numérique des paramètres de fissuration en élastoplasticité » Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal Clermont II (1998).

- [24]- Bouchard O « Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multi-matériaux » Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (2000).
- [25]- Erdogan F, Sih G « On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear » J. Basic Engng., 85 (1963) pp. 519-527.
- [26]- Nuismer R « An energy release rate criterion for mixed mode fracture » International Journal of Fracture 11 (1975) pp. 245 - 250.
- [27]- Sih G « Macdonald B. Fracture mechanics applied to engineering problems—strain energy density fracture criterion » Engng. Fract. Mech. 6 (1974) pp. 361-386.
- [28]- Maitil S, Smith R « Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress-strain field. Part II: pure shear and uniaxial compressive loading » Int. J. Fract. 24 (1984) pp. 5-22.
- [29]- Elouard A « Etude numérique par éléments finis de la fissuration avec remaillage automatique – Application à la mécanique des chaussées » Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1993).
- [30]- Babuska I, Rosenzweig M « A finite element scheme for domains with corners » Numerical Mathematics 20 (1972) pp. 1-21.
- [31]- Grisvard P « Elliptic Problems in Nonsmooth Domains » Pitman Publishing, Inc: Boston (1985).
- [32]- Tada H, Paris P « The stress analysis of cracks handbook » ASME Press (2000).
- [33]- Henshell R, Shaw K « Crack tip finite elements are unnecessary » Int. J. Numer. Meth. Eng. 9 (1975) pp. 495–507.
- [34]- Barsoum R « Application of quadratic isoperimetric finite elements in liner fracture mechanics » Int. J. Fract. 10 (1974) pp. 603-605.
- [35]- Benzley S « Representation of singularities with isoparametric finite elements » Int. J. Numer. Meth. Eng. 8 (1974) pp. 537–45.
- [36]- Gifford J, Hilton P « Stress intensity factors by enriched finite elements » Eng. Fract. Mech. 10 (1978) pp. 485–96.
- [37]- Newman J « An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries » Technical Report TN D-6376, NASA (1971).
- [38]- Sneddon I « Integral transform methods. In: Methods of analysis and solutions of crack problems » Nordho International: Leyden (1973).
- [39]- Nisitani H « Body force method for determination of the stress intensity factors » J. Aeronaut Soc. Ind. 37 (1985) pp. 21–41.
- [40]- Cruse T « Boundary element analysis in computational fracture mechanics » Kluwer: Dordrecht (1988).
- [41]- Vitek V « Plane strain stress intensity factors for branched cracks » Int. J. Fract. 13 (1977) pp. 481–501.
- [42]- Obata M, Nemat S, Goto Y « Branched cracks in anisotropic elastic solids » J. Appl. Mech. Trans. ASME 56 (1989) pp. 858–64.
- [43]- Chen Y, Hasebe N « New integration scheme for the branch crack problem » Eng. Fract. Mech. 52 (1995) pp. 791–801.

- [44]- Belytschko T, Lu Y, Gu L « Element-free Galerkin methods » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 37 (1994) pp. 229–56.
- [45]- Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P « Mesh less methods: an overview and recent developments » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 139 (1996) pp. 3–47.
- [46]- Fleming M, Chu YA, Moran B, Belytschko T « Enriched element- free Galerkin methods for crack tip fields » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 40 (1997) pp. 1483–504.
- [47]- Oliver J « Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models » *Comput. Mech.* 17 (1995) pp. 49–61.
- [48]- Rashid M « The arbitrary local mesh refinement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 154 (1998) pp. 133–50.
- [49]- Belytschko T, Black T « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 45 (1999) pp. 601–20.
- [50]- Zienkiewicz O, Taylor R « The finite element method for solid and structural mechanics » Butterworth-Heinemann (2005).
- [51]- Singiresu S « The finite element method in engineering » Butterworth-Heinemann (2004).
- [52]- Qun L, Jiafu L « Finite element method: Accuracy and improvement » Elsevier Science (2007).
- [53]- Chan S, Tuba I, Wilson W « On the finite element method in linear fracture mechanics ». *Engng. Fracture Mech.* 2 (1970) pp. 1-17.
- [54]- Fresse C, Tray D «The natural isoparametric triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis » *Int. J. Fract.* , 12 (1976) pp.768-770.
- [55]- Manu C « Complete quadratic isoparametric finite elements in fracture mechanics analysis » *Int. J. Num. Meth. Engng.* 21 (1985) pp. 1547-1553.
- [56]- Hibbit H « Some properties of singular isoparametric elements » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 11 (1977) pp.180-184.
- [57]- Pu S, Hussain W « Collapsed 12 node triangular elements as crack tip elements for elastic fracture » *Tech. Rep ARLCB – TR-77047* (1977).
- [58]- Yamada Y « Reconsideration on singularity or crack tip elements » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 14 (1979) pp.1525-1544.
- [59]- Ingraffea A, Manu C « Stress intensity factor computation in three dimensions with quarter point elements » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 15 (1980) pp.1427-1445.
- [60]- Harrop L « The optimum size of quarter-point crack tip element » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 17 (1981) pp.1101-1103.
- [61]- Lynn P, Ingraffea A « Transition elements to be used with quarter-point crack tip element » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 11, (1977) pp.1031-1036.
- [62]- Saouma V, Schwemmer D « Numerical evaluation of quarter-point crack tip element » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 20 (1984) pp.1629-1641.
- [63]- Barsoum R « Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements » *Internat. Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977) pp.85-98.
- [64]- Hussain M, Coffin L, Zaleski K « Three dimensional singular elements. *Computers & Structures* 13 (1981) pp. 595-599.

- [65]- Manu C « Quarter-point elements for curved crack fronts » *Computers & Structures* 17 (1983) pp. 227-231.
- [66]- Koers R « Use of modified standard 20-node isoparametric brick elements for representing stress/strain fields at a crack tip for elastic and perfectly plastic material » *Int. J. Fracture*, 40 (1989) pp. 79-110.
- [67]- Barsoum R « An assessment of the quarter - point elements in pressure vessel fracture analysis » *Stru. Mech. in Reactor Technology Conf. Paris* (1981).
- [68]- Barry D, Truman K « An evaluation of fracture mechanics quarter point displacement techniques used for computing stress intensity factors » *Engineering Structures* 21 (1999) pp. 406-415.
- [69]- Gustavo V, Planas J « K_I evaluation by the displacement extrapolation technique » *Engineering Fracture Mechanics* 66 (2000) pp. 243-255.
- [70]- Gray L, Phan A « Improved quarter point crack tip element » *Engineering fracture Mechanics* 70(2003) pp. 269-283.
- [71]- Alashoaibi A, Arifin K « Finite element simulation of stress intensity factors in elastic-plastic crack growth » *J.Zhejiang Univ Science A* 7 (2006) pp.1336-1342.
- [72]- Yavari A, Moyer J, Sarkani S « A reappraisal of transition elements in linear elastic fracture mechanics » *International Journal of Fracture* 100(1999) pp. 227–248.
- [73]- Melenk J, Babuska I « The partition of unity finite element method: basic theory and applications » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 139 (1996) pp. 289–314.
- [74]- Duarte C, Oden J « hp clouds- a mesh less method to solve boundary-value problems » *Technical Report, TICAM* (1995).
- [75]- Moes N, Dolbow J, Belytschko T « A finite element method for crack growth without remeshing » *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 46 (1999) pp. 131–50.
- [76]- Dolbow J « An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics » *PhD thesis, Northwestern University* (1999).
- [77]- Dolbow J, Moes N, Belytschko T « Discontinuous enrichment infinite elements with a partition of unity method » *Finite Elements in Analysis and Design* 36 (2000) pp.235–260.
- [78]- Sukumar N, Moes N, Moran B, Belytschko T « Extended finite element method for three-dimensional crack modelling » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 48 (2000) pp. 1549–70.
- [79]- Daux C, Moes N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T « Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method » *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 48 (2000) pp. 1741–60.
- [80]- Belytschko T, Moes N, Usui S, Parimi C « Arbitrary discontinuities in finite elements » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 50 (2001) pp.993–1013.
- [81]- Stolarska M, Chopp D, Moes N, Belytschko T «Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method » *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 51 (2001) pp. 943–60.
- [82]- Osher S, Sethian J « Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations » *J.Comput. Phys.* 79 (1988) pp. 12–49.
- [83]- Duflot M « Study of the representation of cracks with level sets » *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 70 (2007) pp. 1261-1302.
- [84]- Stazi F, Budyn E, Chessa J, Belytschko T « An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks » *Comput. Mech.* 31 (2003) pp. 38–48.

- [85]- Laborde P, Pommier J, Renard Y, Salaun M « High order extended finite element method for cracked domains » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 64 (2005) pp. 354–81.
- [86]- Chahine E, Laborde P, Renard Y « A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM » *C R Acad Sci Paris, Ser I* 342 (2006) pp. 527–32.
- [87]- Menouillard T, Elguedj T, Combescure A « Mixed-mode stress intensity factors for graded materials » *Int. J. Solids Struct.* 43 (2006) pp. 1946–59.
- [88]- Liu X, Xiao Q, Karihaloo B « XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 59 (2004) pp. 1103–18.
- [89]- Nagashima T, Omoto T, Tani S « Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 56 (2003) pp. 1151–73.
- [90]- Xiao Q, Karihaloo B « Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field » *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 25 (2003) pp. 719–29.
- [91]- Béchet E, Minnebo H, Moes N, Burgardt B « Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 64 (2005) pp. 1033–56.
- [92]- Xiao Q, Karihaloo B « Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 66 (2006) pp. 1378–410.
- [93]- Dumstorff P, Meschke G « Crack propagation criteria in the framework of X-FEM-based structural analyses » *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31 (2007) pp. 239–59.
- [94]- Shamloo A, Azami A, Khoei A « Modeling of pressure-sensitive materials using a cap plasticity theory in extended finite element method » *J. Mater. Process. Technol.* 164 (2005) pp. 1248–57.
- [95]- Elguedj T, Gravouil A, Combescure A « Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) pp. 501–15.
- [96]- Prabel B, Combescure A, Gravouil A, Marie S « Level set XFEM non-matching meshes: application to dynamic crack propagation in elastic–plastic media » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 69 (2007) pp. 1553–69.
- [97]- Khoei A, Biabanaki S, Anahid M « Extended finite element method for three-dimensional large plasticity deformations on arbitrary interfaces » *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 (2008) 1100–1114.
- [98]- Chen H, Gerlach C, Belytschko T « Dynamic crack growth with XFEM » In: 6th USACM, Dearborn (2001).
- [99]- Belytschko T, Hao Chen H, Xu J, Zi G « Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 58 (2003) pp. 1873–905.
- [100]- Réthoré J, Gravouil A, Combescure A « An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 63 (2005) pp. 631–59.
- [101]- Zi G, Chen H, Xu J, Belytschko T « The extended finite element method for dynamic fractures » *Shock Vib.* 12 (2005) pp. 9–23.
- [102]- Song J, Pedro M, Areias A, Belytschko T « A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes » *Int. J. Numer. Meth. Engrg* 67 (2006) pp. 868–893.
- [103]- Svahn P, Torbjon E, Runesson K « Discrete crack modeling in a new X-FEM format with emphasis on dynamic response » *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31 (2007) pp. 261–83.

- [104]- Combescure A, Gravouil A, Grégoire D, Réthoré J « X-FEM a good candidate for energy conservation in simulation of brittle dynamic crack propagation » *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 (2008) 309–318.
- [105]- Rozycki P, Moes N, Bechet E, Dubois C « X-FEM explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries » *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 (2008) 349–363.
- [106]- Chessa J, Belytschko T « Arbitrary discontinuities in space–time finite elements by level sets and X-FEM » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 61 (2004) pp. 2595–614.
- [107]- Réthoré J, Gravouil A, Combescure A « A combined space–time extended finite element method » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 64 (2005) pp. 260–84.
- [108]- Chessa J, Belytschko T « A local space–time discontinuous finite element method » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) pp. 1325–43.
- [109]- Hansbo A, Hansbo P « A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 193 (2004) pp. 3523–40.
- [110]- Legay A, Wang H, Belytschko T « Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 64 (2005) pp. 991–1008.
- [111]- Areias P, Belytschko T « A comment on the article ' A finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) pp. 1275–6.
- [112]- Oliver J, Huespe A, Sanchez P « A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195(2006) pp. 4732–52.
- [113]- Sukumar N, Chopp D, Moes N, Belytschko T « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190 (2001) pp. 6183–200.
- [114]- Moes N, Gravouil A, Belytschko T « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets part I: mechanical model » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 53 (2002) pp. 2549–68.
- [115]- Gravouil A, Moes N, Belytschko T « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets part II: level set update » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 53 (2002) pp. 2569–86.
- [116]- Sukumar N, Chopp D, Moran B « Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation » *Eng. Fract. Mech.* 70 (2003) pp. 29–48.
- [117]- Chopp D, Sukumar N « Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method » *Int. J. Eng. Sci.* 41 (2003) pp. 845–69.
- [118]- Patzak P, Jirasek M « Process zone resolution by extended finite elements » *Eng. Fract. Mech.* 70 (2003) pp. 957–77.
- [119]- Mariano P, Stazi F « Strain localization due to crack–microcrack interactions: X-FEM for a multifield approach » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 193 (2004) pp. 5035–62.
- [120]- Sukumar N, Huang Z, Prévost J, Suo Z « Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 59 (2004) pp. 1075–102.
- [121]- Hettich T, Ramm E « Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) pp. 4753–67.
- [122]- Belytschko T, Gracie R « On XFEM applications to dislocations and interfaces » *International Journal of Plasticity* 23 (2007) pp. 1721–1738.

- [123]- Zi G, Belytschko T « New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 57 (2003) pp. 2221–40.
- [124]- Asferg J, Poulsen, P, Nielsen L « Cohesive crack tip element for XFEM » In: Carpinteri A, editor. *International conference on fracture (ICF 11)*, CD-ROM. 564 (2005).
- [125]- Moes N, Belytschko T « Extended finite element method for cohesive crack growth » *Eng. Fract. Mech.* 69 (2002) pp. 813–33.
- [126]- Remmers J, de Borst R, Needleman A « A cohesive segments method for the simulation of crack growth » *Comput. Mech.* 31 (2003) pp. 69–77.
- [127]- Xiao Q, Karihaloo B, Liu X « Incremental-secant modulus iteration scheme and stress recovery for simulating cracking process in quasi-brittle materials using XFEM » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 69 (2007) pp. 2606–35.
- [128]- Comi C, Mariani S, Perego U « An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation » *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31 (2007) pp. 213–38.
- [129]- Mariani S, Perego U « Extended finite element method for quasibrittle fracture » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 58 (2003) pp. 103–26.
- [130]- Dolbow J, Moes N, Belytschko T « An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190 (2001) pp. 6825–46.
- [131]- Khoei A, Nikbakht M « Contact friction modeling with the extended finite element method (XFEM) » *J. Mater. Process. Technol.* 177 (2006) pp. 58–62.
- [132]- Khoei A, Nikbakht M « An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems » *Int. J. Mech. Sci.* 49 (2007) pp. 183–99.
- [133]- Vitali E, Benson D « An extended finite element formulation for contact in multi-material arbitrary Lagrangian–Eulerian calculations » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 67 (2006) pp. 1420–44.
- [134]- Ribeaucourt R, Baietto-Dubourg M, Gravouil A « A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled XFEM/LATIN method » *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 196 (2007) pp. 3230–47.
- [135]- Khoei A, Shamloo A, Anahid M, Shahim K « The extended finite element method (X-FEM) for powder forming problems » *J. Mater. Process. Technol.* 177 (2006) pp. 53–7.
- [136]- Khoei A, Shamloo A, Azami A « Extended finite element method in plasticity forming of powder compaction with contact friction » *Int. J. Solids Struct.* 43 (2006) pp. 5421–48.
- [137]- Bordas S, Moran B « Enriched finite elements and level sets for damage tolerance assessment of complex structures » *Eng. Fract. Mech.* 73 (2006) pp. 1176–201.
- [138]- Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A « Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method » *Thin-Wall Struct* 44 (2006) pp. 1031–8.
- [139]- Nobile L, Carloni C « Fracture analysis for orthotropic cracked plates » *Comp. Struct.* 68 (2005) pp. 285–93.
- [140]- Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A « Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partition of unity methods » *Finite Elem. Anal. Des.* 42 (2006) pp. 1165–7.
- [141]- Asadpoure A, Mohammadi S « Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 69 (2007) pp. 2150–72.

- [142]- Hettich T, Hund A, Ramm E « Modeling of failure in composites by X-FEM and level sets within a multiscale framework » *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 (2008) pp.414–424.
- [143]- Sukumar N, Srolovitz J, Baker T, Prévost J « Brittle fracture in polycrystalline microstructures with the extended finite element method » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 56 (2003) pp. 2015–37.
- [144]- Dolbow J, Moes N, Belytschko N « Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method » *Int. J. Solids Struct.* 37 (2000) pp. 7161–83.
- [145]- Liang J, Huang R, Prévost J, Suo Z « Evolving crack patterns in thin films with the extended finite element method » *Int. J. Solids Struct.* 40 (2003) pp. 2343–54.
- [146]- Huang R, Prévost J, Huang Z, Suo Z « Channel-cracking of thin films with the extended finite element method » *Eng. Fract. Mech.* 70 (2003) pp. 2513–26.
- [147]- Pedro M, Aries A, Belyschoko T « Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 62 (2005) pp. 384–415.
- [148]- Wagner G, Moes N, Liu W, Belytschko T « The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 51 (2001) pp. 293-313.
- [149]- Wagner G, Ghosal S, Liu W « Particulate flow simulations using lubrication theory solution enrichment » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 56 (2003) pp. 1261- 1289.
- [150]- Chessa J, Belytschko T « An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 58 (2003) pp. 2041-2064.
- [151]- Chessa J, Belytschko T « An enriched finite element method for two-phase fluids » *Journal of Applied Mechanics* 70 (2003) pp. 10-17.
- [152]- Chessa J, Smolinski P, Belytschko T « The extended finite element method (XFEM) for solidification problems » *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 53 (2002) pp. 1959–77.
- [153]- Merle R, Dolbow J « Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method » *Comput. Mech.* 28 (2002) pp. 339–50.
- [154]- Ji H, Chopp D, Dolbow J « A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations » *Int. J. Num. Meth. Eng.* 54 (2002) pp. 1209–33.
- [155]- Dolbow J, Gosz M « On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials » *Int. J. Solids Struct.* 39 (2002) pp. 2557–74.
- [156]- Dolbow J, Nadeau J « On the use of effective properties for the fracture analysis of microstructured materials » *Eng. Fract. Mech.* 69 (2002) pp. 1607–34.
- [157]- Kim J, Paulino G « The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors » *Int. J. Solids Struct.* 40 (2003) pp. 3967–4001.
- [158]- Abdelaziz Y, Hamouine A « A survey of the extended finite element » *Computers and Structures. Available on line* December (2008).
- [159]- Yau J, Wang S, Corten H « A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity » *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980) pp. 335-341.
- [160]- Shih C, Asaro R « Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: part I small scale yielding » *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988) pp. 299 - 316.
- [161]- Osher S, Sethian J « Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations » *J.Comput. Phys.* 79 (1988) pp. 12–49.
- [162]- Desmond J « MATLAB guide » SIAM (2005).

- [163]- Youn W «The finite element method using MATLAB» CRC Press (1997).
- [164]- Kattan P « MATLAB Guide to Finite Elements: An Interactive Approach » Springer (2007).
- [165]- Edward L « Structural analysis programs » version 5.10 (1990).
- [166]- Abdelaziz Y, Abou-bekr N, Hamouine A « Numerical modelling of the crack tip singularity » Inter. J. Mater. Scien. 2(2007) pp.65-72.
- [167]- Abdelaziz Y, Hamouine A, Abou-bekr N « Numerical evaluation of the stress intensity factors » Inter. J. Mater. Scien. 2 (2007) pp.1-8.
- [168]- Daniel G « Matériaux composites » Editions Hermes, Paris (1997) .
- [169]- Maurice R « Technologie des composites » Editions Hermes, Paris (1998).
- [170]- Berthelut J « Matériaux composites » Editions Masson, Paris (1996).
- [171]- Pliskin L « La fabrication du ciment » Editions Eyrolles (1995).
- [172]- Aticin P « Les différents types de retrait du béton » Vol. 215, (1998) pp.41-51.
- [173]- Dreux G « Nouveau guide du béton » Edition Eyrolles (1995)
- [174]- Khenfer M« Caractérisation structurale et rhéologique des ciments et plâtres renforcés de fibres de cellulose » Thèse de l'université de Bordeaux I (1990).
- [175]- Mindess S « Mechanical performance of cementitious systems structure and performance of cements » Applied Science Publishers, edited by P.Barnes (1967).
- [176]- Aveston J and Cooper G « Single and multiple fracture » Conf. Pruc. Nat. Phys. Lab, IPC Sci, and Tech. press ltd (1971) pp. 15-26.
- [177]- Birchal J and Howard A « Flexural strength and porosity of cement »Nature 289 (1981) pp.388-389.
- [178]- Hughes D and Hannant D « Brittle matrices reinforced with polyalkene films of varying elastic module » J. of mat. Sci 17 (1982) pp 508-516.
- [179]- Khenfer M and Morlier P « Effet de longueur des fibres sur les propriétés mécanique et physiques des ciments renforcés de fibres de cellulose » Jour. Mat. and Structures, Vol 24 (1991) pp 185-190.
- [180]- Krenchell L « Fibre spacing and specific fibre surface » RILEM NEVILLE (A), ed, Fibre - reinforced cement and concrete, Rilem Symposium London : The const. Press. Ltd Lancaster (1975) pp. 459.
- [181]- Kaplan M « Crack propagation and the fracture of concrete » Journal American Concrete Institute (1961) pp.591.
- [182]- Laws V « The efficiency of fibrous reinforcement of brittle matrices » J.of Phy. D: Applied Physics, Vol 4 , (1971) pp.1737- 1746.
- [183]- Brown J « Measuring the fracture toughness of cement paste and mortar » Magazine Conc. Res. 24 (1972) pp.185-196.
- [184]- Radjy F and Hansen T « Fracture of hardened cement paste and concrete » Cem.Conc. Res 3 (1973) pp.343.

- [185]**- Majumdar A « Fracture processes in fibre reinforced cement sheets » Applications of fracture mechanics to cementitious composites NATO-ARW, ed by SP. SHAH, (1984) pp.157-185.
- [186]**- Li V « Fracture resistance parameters for cementitious materials and their experimental determinations » Application of fracture mechanics to cementitious composites. NAO-ARW, ed by S.P SHAH, (1984) pp 431-449.
- [187]**- Mai Y « Fracture measurements of cementitious composites » Application of fracture mechanics to cementitious composite NAO-ARW, ed. by S.P SHAN (1984) pp.399-429.
- [188]**- Khenfer M, Bali A, Molier P« The effect of water and fiber length on the fracture resistance of cellulose fiber cement » Concrete Science and Engineering 2 (2000) pp. 56-62.
- [189]**- Khenfer M, Molier P « Cellulose fibers reinforced plaster » Materials and structures 32 (1999) pp. 52-58.
- [190]**- Abdelaziz Y, Khenfer M et Hamouine A « Approche numérique de la résistance à la fissuration des ciments de fibres cellulosiques » Revue des Composites et des Matériaux Avancés 16 no 2 (2006) pp. 243-254.
- [191]**- Chan S, Tuba I « On the finite element method in linear fracture mechanics » Eng. Fract. Mech. Vol 2 (1970) pp.1-17.
- [192]**- Abdelaziz Y, Khenfer M, Hamouine A « Evaluation numérique de la résistance à la fissuration d'un composite: Fibres - Plâtre » Revue des Composites et des Matériaux Avancés 17 no 3 (2007) pp.297-306.