



UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID –TLEMCEM-  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



## Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat  
En  
Génie Mécanique

Présenté par :

**Chorfi Sidi Mohammed**

## Thème

**Développement d'éléments finis courbés version- $p$  pour les  
coques à double courbure et de formes géométriques  
arbitraires**

Soutenu le / /2011 devant le jury composé de

<i>Président</i>	Mr. MEFTAH Khouane	MCA	UAB. Tlemcen
<i>Directeur de thèse</i>	Mr. HOUMAT Abderrahim	Professeur	UAB. Tlemcen
<i>Examineur</i>	Mr. HADJOUI Abdelhamid	Professeur	UAB. Tlemcen
<i>Examineur</i>	Mr. KERDAL Djamel Eddine	Professeur	USTO. Oran
<i>Examineur</i>	Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL. Bel Abbes
<i>Invité</i>	Mr. CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	UAB. Tlemcen

*Année universitaire 2010-2011*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## ملخص

إن التطور التكنولوجي الحالي سمح بإنجاز مشاريع أكثر فأكثر تعقيدا وتكلفة، خاضعة لقيود أمنية أكثر صرامة، فيشيع استخدام قوابع أحادية أو ازدواجية الإنحناء في المنشئات الهندسية (الميكانيكية، المدنية، بناء السفن، الطيران، الخ). وأمام التعقيد الهندسي لمعظم المنشئات القوقعية فإن العناصر المنتهية تبقى أداة المحاكات الأكثر شيوعا. وتبقى الطريقة الأعم ذات الأكبر عدد من التطبيقات، فهي تشكل الأساس لعدد كبير جدا من البرامج العددية التجارية والأكاديمية :

...NASTRAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, ABAQUS

في السنوات الأخيرة برز الإصدار  $P$  من طريقة العناصر المنتهية فارضا نفسه بأداء وتقارب جيدين ليسجل مرحلة مهمة في تطور الحسابات بالعناصر المنتهية. وقد بذلت العديد من الدراسات على إصدار  $P$  ليذرج في برامج حاسوبية مرتكزة أساسا على هذه الطريقة أو كخيار مكمل في البرامج الحاسوبية الموجودة للإصدار  $h$  الأول. إستنادا على نظرية القوابع السمكية، مزج بين إصدار  $P$  من طريقة العناصر المنتهية مع طريقة مزج الدوال لتوليد نوع جديد من العناصر القوقعية إصدار  $P$ . يتم التمثيل الهندسي للقوابع بصرف النظر عن درجة تقرب العنصر. وقد طور برنامج كمبيوترى على أساس هذا النوع من العناصر واختباره مع التحقق من صحة النتائج بنجاح. فقد أتاح أداء البرنامج ومثانته من دراسة طائفة واسعة من الهياكل القوقعية في سلوكها الاهتزازي الخطي واللا خطي، والتي تكون من مواد متماثلة التكوين أو متدرجة وظيفيا ذات أشكال هندسية إعتباطية، أحادية أو ازدواجية الإنحناء لتعرض الكثير من النتائج في شكل جداول ورسوم بيانية.

**كلمات مفتاحية :** قوقعة ذات شكل هندسي إعتباطي، قوقعة أحادية الإنحناء، قوقعة مزدوجة الإنحناء، طريقة العناصر المنتهية إصدار  $P$ ، عنصر منتهي قوقعي، مادة متماثلة التكوين، مادة متدرجة وظيفيا، إهتزاز حر، إهتزاز خطي، إهتزاز لا خطي.

## Abstract

The current evolution of technology leads to complete projects more and more complex, costly, and subject to more severe security constraints. Shells with single or double curvature are commonly used in structural engineering (Mechanical, Civil, shipbuilding, aeronautics, etc.).

In front of the geometric complexity of most shell structures, the use of the finite element simulation tool is the most common. It remains the most universal method which has the largest number of applications and forms the basis of a very large number of commercial and academic numerical codes: NASTRAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, ABAQUS...

The  $p$ -version of the finite element method has emerged in recent years by its robustness and good convergence to mark a milestone in the development of finite element calculations. Several researches on the  $p$ -version have been made and implemented in computer codes based on this method or integrated into the existing codes of the standard  $h$ -version.

Based on the thick shell theory, the  $p$ -version of the finite element method is combined with the blending function method to generate a new type  $p$  version shell element. A geometric representation of the shell is made independently of the element degree of approximation. A computer code based on this type of element is developed, tested, and validated successfully. The performance and robustness of the developed code were used to examine a wide variety of shell structures with linear and nonlinear vibration behavior, single and double curvature, isotropic and functionally graded materials, and arbitrary geometrical shapes. Many results are presented in tables and graphs.

**Keywords:** shell of arbitrary geometry; single curved shell; double curved shell; the  $p$ -version of finite element method; shell finite element; isotropic material; functionally graded material; free vibration; linear vibration; nonlinear vibration.

## Résumé

L'évolution actuelle de la technologie amène à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Les coques à simple ou à double courbure sont d'usage courant en ingénierie structurale (génie mécanique, civil, construction navale, aéronautique, etc.).

Devant la complication géométrique de la plupart des structures en coques, le recours aux éléments finis s'avère l'outil de simulation le plus répandu. Elle reste la méthode la plus universelle qui regroupe le plus grand nombre d'applications et qui constitue la base d'un très grand nombre de codes de calcul numérique commerciaux et académiques : NASTRAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, ABAQUS ...

La version- $p$  de la méthode des éléments finis s'est imposée ces dernières années par sa robustesse et sa bonne convergence pour marquer une étape importante dans le développement des calculs par éléments finis. Plusieurs travaux de recherche sur la version- $p$  ont été réalisés et implantés dans des codes de calcul basés sur cette méthode ou sous intégrés dans les codes existants de la version- $h$  standard.

En se basant sur la théorie des coques épaisses, la version- $p$  de la méthode des éléments finis est combinée avec la méthode des fonctions de mélange afin de générer un nouveau type d'élément coque version- $p$ . Une représentation géométrique des coques est réalisée d'une manière indépendante du degré d'approximation de l'élément. Un code de calcul basé sur ce type d'élément est développé, testé, et validé avec succès. La performance et la robustesse du code élaboré ont permis l'étude d'une large panoplie de structures coques à comportement vibratoire linéaire et non linéaire, à simple et à double courbure, à matériau isotrope et fonctionnellement gradué, et de formes géométriques arbitraires. Beaucoup de résultats sont présentés sous forme de tableaux et de graphes.

**Mots clés :** coque à géométrie arbitraire; coque a simple courbure; coque a double courbure; version- $p$  de la méthode des éléments finis; éléments finis de type coque; matériau isotrope; matériau a gradient fonctionnel; vibration libre; vibration linéaire; vibration non linéaire.

## Sommaire

<i>Sommaire</i> .....	i
<i>Liste des figures</i> .....	v
<i>Liste des tableaux</i> .....	ix
<i>Liste des symboles</i> .....	x
<i>Introduction générale</i> .....	1

### *Chapitre 1 : Bibliographie*

1.1 Introduction .....	6
1.2 Théories des coques.....	6
1.3 Vibration des coques.....	8
1.3.1 Vibration des coques à double courbure.....	9
1.3.2 Vibration des coques de formes géométriques arbitraires .....	11

### *Chapitre 2 : Elasticité Tridimensionnelle En Coordonnées Curvilignes*

2.1 Introduction .....	13
2.2 Coordonnées curvilignes [Lamé (1859)] .....	13
2.3 Les coefficients Métriques .....	15
2.4 Élément de volume.....	16
2.5 Les vecteurs unitaires de la base curviligne .....	16
2.6 Les relations déformation- déplacement en coordonnées curvilignes .....	19
2.7 Relations contrainte- déformation .....	23
2.8 Energie cinétique.....	24
2.9 Energie de déformation.....	24

### *Chapitre 3 : Géométrie différentielle des surfaces*

3.1 Introduction .....	25
3.2 Quelques relations essentielles de la théorie des surfaces .....	25
3.2.1 Système de coordonnées .....	25
3.2.2 Première forme quadratique .....	26
3.2.3 Deuxième forme quadratique .....	27

3.2.4 L'équation caractéristique de Gauss	28
3.2.5 Conditions de Codazzi-Mainardi	30
3.3 Relations entre le tenseur métrique et les rayons de courbures	30
3.4 Relations déformations-déplacements	31
3.5 Expressions des énergies	32

---

**Chapitre 4 : Théorie des coques modérément épaisses**

---

4.1 Introduction	33
4.2 Théories des coques	33
4.3 Hypothèses de la théorie de Reissner-Mindlin	33
4.4 Champs de déplacements	34
4.5 Relations déformations-déplacements	35
4.6 Relations contraintes-déformations	36
4.7 Facteur de correction du cisaillement transverse $k$	36
4.8 Energie cinétique	37
4.9 Energie de déformation	37

---

**Chapitre 5 : Formulation par la version  $p$  de la méthode des éléments finis**

---

5.1 Introduction	40
5.2 Sélection des fonctions de forme	40
5.2.1 Espaces polynomiaux	40
5.2.1.1 Espace ou famille Serendipity $S^p(\Pi)$	40
5.2.1.2 Espace ou famille de Lagrange $S^{p,q}(\Pi)$	41
5.2.1.3 Espace ou famille mixte $\tilde{S}^{p,q}$	41
5.2.2 Polynômes de Legendre-déplacés	41
5.2.3 Fonctions de forme hiérarchiques	41
5.3 Modélisation du panneau à double courbure en MFG	44
5.3.1 Carreaux de Coons	44
5.3.2 Définition de l'élément quadrangulaire	44
5.4 Passage des coordonnées globales aux coordonnées locales	47
5.5 Equations de mouvement	48
5.6 Passage au système matriciel condensé	49
5.7 Dérivation des matrices	50

---

**Chapitre 6 : Formulation MFG**


---

6.1 Introduction	53
6.2 Modèles d'homogénéisations	55
6.3 Bibliographie sur les coques MFG	55
6.4 Formulation	56
6.4.1 Propriétés du mélange	56
6.4.2 Modélisation du panneau MFG à double courbure	58
6.4.3 Relations contraintes déformations	58
6.4.4 Energie cinétique	58
6.4.5 Energie de déformation	59
6.4.6 Equation de mouvement et dérivation des matrices masse et rigidité	61

---

**Chapitre 7 : Organisation de la programmation**


---

7.1 Introduction	63
7.2 Environnement de la programmation	63
7.3 Organigramme général du programme principal	63
7.4 Description des sous-programmes	70
7.4.1 S.P. INPUT	70
7.4.2 S. P. GAUSS	71
7.4.3 S. P. FGM	71
7.4.4 S. P. ELEMS	71
7.4.5 Préparation du passage au système condensé	71
7.4.6 S.P. CONNECT	71
7.4.7 S. P. STIFF, STIFF 1, STIFF 2, STIFF 3, STIFF 4, STIFF 5 , STIFF 6 et KPS	72
7.4.8 S.P. JMATRIX	72
7.4.9. Application des conditions aux limites	72
7.4.10 S. P. INVERT	72
7.4.11 S.P. JACOBI	72
7.4.12 S.P. SORT	72
7.4.13 S. P. MAXAMP	73
7.4.14 S. P. MODE	73
7.4.15 Remarque sur le calcul non linéaire	73
7.4.16 Affichage des résultats	73



---

**Chapitre 8 : Applications numériques**


---

8.1 Introduction -----	74
8.2 Convergence et validation -----	76
8.2.1 Domaine rectangulaire -----	76
8.2.1.1 Convergence-----	77
8.2.1.2 Validation -----	79
8.2.2 Domaine courbé-----	80
8.2.2.1 Convergence-----	82
8.2.2.2 Validation-----	84
8.3 Exemples d'application -----	85
8.3.1 Vibration linéaire -----	85
8.3.1.1 Influence de la condition aux limites -----	86
8.3.1.2 Influence de la nuance MFG-----	87
8.3.1.3 Influence de l'épaisseur-----	88
8.3.1.4 Influence de la profondeur de la coque -----	90
8.3.1.5 Influence du rapport d'ellipse-----	92
8.3.1.6 Influence du rapport de courbures -----	95
8.3.2 Vibration non linéaire -----	97
8.3.2.1 Influence de la condition aux limites -----	97
8.3.2.2 Influence de la nuance MFG-----	98
8.3.2.3 Influence de l'épaisseur-----	100
8.3.2.4 Influence de la profondeur de la coque -----	101
8.3.2.5 Influence du rapport d'ellipse-----	102
8.3.2.6 Influence du rapport de courbures -----	105
8.3.2.7 Vibration des modes supérieurs -----	107
<b>Conclusions et perspectives</b> -----	109
<b>Références</b> -----	111
<b>Annexe 1</b> -----	122
<b>Annexe 2</b> -----	125
<b>Annexe 3</b> -----	130
<b>Annexe 4</b> -----	131

## Liste des figures

<b>Fig. 1</b> Mosquée du Dôme du Rocher (مسجد قبة الصخرة) -----	4
<b>Fig. 2</b> Centrale nucléaire-----	4
<b>Fig. 3</b> Airbus A380-----	5
<b>Fig 4</b> Navette spatiale Discovery de la NASA -----	5
<b>Fig. 2.1</b> Vecteur position -----	14
<b>Fig. 2.2</b> Coordonnées curvilignes -----	14
<b>Fig. 2.3</b> Vecteur déplacement-----	20
<b>Fig. 3.1</b> Surface $\Sigma$ et sa base orthonormée $(\vec{i}_\alpha, \vec{i}_\beta, \vec{i}_n)$ -----	25
<b>Fig.3.2</b> Rayon de courbure $1/\varphi$ d'une courbe $\Lambda$ -----	27
<b>Fig. 4.1</b> : Surface moyenne d'une coque -----	33
<b>Fig. 5.1</b> : Famille de <i>Serendipity</i> -----	40
<b>Fig. 5.2</b> : Famille de <i>Lagrange</i> -----	41
<b>Fig. 5.3</b> : Panneau de coque à géométrie arbitraire et système des coordonnées-----	44
<b>Fig. 5.4</b> : Élément quadrangulaire-----	45
<b>Fig. 5.5</b> : Coordonnées globales et coordonnées locales-----	47
<b>Fig. 6.1</b> Exemple de coques sphériques MFG en biomécanique -----	53
<b>Fig. 6.2</b> Microstructure d'un matériau fonctionnellement gradué [Tu et al. (1996)] -----	54
<b>Fig. 6.3</b> Microstructure d'un joint en matériau fonctionnellement gradué [Heikinheimo et al. (1996)].-----	54
<b>Fig. 6.4</b> Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une coque MFG-----	57
<b>Fig. 6.5</b> Élément fini version $p$ pour les structures coques MFG -----	58
<b>Fig. 8.1</b> Coque paraboloid hyperbolique ayant une projection rectangulaire-----	74
<b>Fig. 8.2</b> Coque cylindrique en hydrocarbure-----	75
<b>Fig. 8.3</b> Coques sphériques en énergétique -----	75
<b>Fig. 8.4</b> Coque paraboloid hyperbolique ayant une projection circulaire (coque selle)-----	75
<b>Fig. 8.5</b> Coque à double courbure ayant une projection elliptique en génie civil (Centre national des arts du spectacle, Beijing, République Populaire de Chine) -----	76
<b>Fig. 8. 6</b> Coque à double courbure ayant une projection rectangulaire -----	77
<b>Fig 8.7</b> Courbes de convergence des paramètres de fréquences $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$ des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG encastree à double courbure ayant une projection rectangulaire ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 1.0, a/R_\alpha = 0.2$ & $k = 5/6$ ). 78	78
<b>Fig 8.8</b> Courbes de convergence des paramètres de fréquences $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$ des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG libre à double courbure ayant une projection rectangulaire ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 1.0, a/R_\alpha = 0.2$ & $k = 5/6$ ).-----	79

**Fig. 8.9** Coque à double courbure avec projection elliptique ----- 81

**Fig. 8.10** Coque à double courbure avec deux cotés courbés et deux cotés droits ----- 82

**Fig. 8.11** Vue de dessus du maillage proposé ----- 82

**Fig 8.12** Courbes de convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG encastree à double courbure ayant une projection elliptique ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.01, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ) -- 83

**Fig 8.13** Courbes de convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG libre à double courbure ayant une projection elliptique ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.01, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ) 84

**Fig. 8.14** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  MFG1 (coque encastree) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ). ----- 86

**Fig. 8.15** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  MFG1 (coque libre) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ) ----- 86

**Fig. 8.16** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  (mode 1) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ) ----- 87

**Fig. 8.17** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  (mode 2) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ) ----- 88

**Fig. 8.18** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  (mode 3) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ) ----- 88

**Fig. 8.19** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=0$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )----- 89

**Fig. 8.20** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=1$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )----- 89

**Fig. 8.21** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=4$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )----- 90

**Fig. 8.22** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=10$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )----- 90

**Fig. 8.23** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=0$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ) ----- 91

**Fig. 8.24** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=1$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ) ----- 91

**Fig. 8.25** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=4$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ) ----- 92

**Fig. 8.26** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=10$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ) ----- 92

<b>Fig. 8.27</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=0$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$ & $k = 5 / 6$ ) -----	93
<b>Fig. 8.28</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=1$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$ & $k = 5 / 6$ ) -----	93
<b>Fig. 8.29</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=4$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$ & $k = 5 / 6$ ) -----	94
<b>Fig. 8.30</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=10$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$ & $k = 5 / 6$ ) -----	94
<b>Fig. 8.31</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ) ( $a / b = 2, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ )-----	95
<b>Fig. 8.32</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ) ( $a / b = 2, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ )-----	95
<b>Fig. 8.33</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=4$ ) ( $a / b = 2, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ ).-----	96
<b>Fig. 8.34</b> Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ) ( $a / b = 2, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ ).-----	96
<b>Fig. 8.35</b> Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG1). ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / b = 2.0, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ ) -----	97
<b>Fig. 8.36</b> Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque simplement appuyée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG1). ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / b = 2.0, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ ) -----	98
<b>Fig. 8.37</b> Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG2) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / b = 2.0, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ ) -----	99
<b>Fig. 8.38</b> Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG3). ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / b = 2.0, h / a = 0.1, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ ) -----	99
<b>Fig. 8.39</b> Influence de l'épaisseur sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ). ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / b = 2.0, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ )-----	100
<b>Fig. 8.40</b> Influence de l'épaisseur sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ). ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / b = 2.0, a / R_\alpha = 0.2$ & $k = 5 / 6$ )-----	100

**Fig. 8.41** Influence de l'épaisseur sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 101

**Fig. 8.42** Influence de la courbure sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 2.0 \& k = 5/6)$ ----- 102

**Fig. 8.43** Influence de la courbure sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 2.0 \& k = 5/6)$ ----- 102

**Fig. 8.44** Influence de la courbure sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 2.0 \& k = 5/6)$ ----- 103

**Fig. 8.45** Influence du rapport d'ellipse sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection curviligne ( $n=0$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 104

**Fig. 8.46** Influence du rapport d'ellipse sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection curviligne ( $n=1$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 104

**Fig. 8.47** Influence du rapport d'ellipse sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection curviligne ( $n=10$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 105

**Fig. 8.48** Influence du rapport de courbures sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).  
 $(a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 105

**Fig. 8.49** Influence du rapport de courbures sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 $(a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 106

**Fig. 8.50** Influence du rapport de courbures sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 $(a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 106

**Fig. 8.51** Vibration non linéaire des trois premiers modes d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.05, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 107

**Fig. 8.52** Vibration non linéaire des trois premiers modes d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.05, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 108

**Fig. 8.53** Vibration non linéaire des trois premiers modes d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 $(R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.05, a/R_\alpha = 0.2 \& k = 5/6)$ ----- 108

## Liste des tableaux

<b>Tableau 5.1</b> : Représentation des fonctions de forme nodales et de leurs dérivées premières	42
<b>Tableau 5.2</b> : Représentation des six premières fonctions de forme internes et de leurs dérivées premières	43
<b>Tableau 8.1</b> Propriétés du mélange MFG [Zhao et al. (2009)].	76
<b>Tableau 8.2</b> Convergence et comparaison des paramètres de fréquences linéaires $\Omega_L = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une coque MFG peu profonde simplement appuyée ayant une projection rectangulaire ( $a/b = 1, a/h = 10$ ).	80
<b>Tableau 8.3</b> Comparaison des paramètres de fréquence $\Omega_L = \omega ab \sqrt{(\rho_m h / D_m)}$ des trois premiers modes Symétriques- Symétriques d'un panneau elliptique MFG libre ( $a/b=2, h/a=0.01$ ).	85
<b>Tableau A.3</b> Convergence des paramètres de fréquences $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$ des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG1 encastrée à double courbure ayant une projection rectangulaire ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 1.0, a/R_\alpha = 0.2$ & $k = 5/6$ ).	130
<b>Tableau A.4</b> Convergence des paramètres de fréquences $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$ des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG1 encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.01, a/R_\alpha = 0.2$ and $k = 5/6$ ).	131

## Liste des symboles

$i, j, k=1, 2, 3$

$h_i$  : facteurs scalaires

$x_i$  : coordonnées cartésiennes

$\vec{i}_i$  : vecteurs unitaires

$\mathbf{J}$  : Jacobien

$\theta_i, \xi_i$  : coordonnées curvilignes

$\vec{e}_i$  : vecteurs unitaires

$\vec{r}, \vec{R}$  : les vecteurs position avant et après déformation respectivement

$\vec{a}_i, \vec{b}_i$  : bases curvilignes

$|\vec{a}_i|$  : module du vecteur  $\vec{a}_i$

$\vec{u}$  : vecteur déplacement

$E_{ij}$  : tenseur de déformation finie de Green-Lagrange

$\varepsilon_{ij}$  : composantes physiques du tenseur de déformation

$\gamma_{ij}$  : déformations angulaires

$g_{ij}, G_{ij}$  : le tenseur métrique de la configuration initiale et la configuration finale respectivement

$ds$  : élément de longueur

$dv$  : élément de volume

$\lambda, \mu$  : coefficients de Lamé

$E$  : module d'élasticité

$\nu$  : coefficient de Poisson.

$\vec{i}_{,\beta}, \vec{i}_{,n}, \vec{i}_{,\alpha}$  : vecteurs unitaires

$\times$  : produit vectoriel

$\cdot$  : produit scalaire

$\Sigma$  : surface

$\Lambda$  : courbe

$\Xi$  : plan

L, M, N : constantes

$\vec{N}$  : vecteur normale

$\varphi$  : courbure

$\phi$  : angle

$1/K$  : courbure Gaussienne

$ds$  : élément de longueur

$ds_\alpha$  : élément de longueur suivant la direction  $\alpha$

$ds_\beta$  : élément de longueur suivant la direction  $\beta$

$dS$  : élément de surface

$\varepsilon$  : tenseur des déformations

$\sigma$  : tenseur des contraintes

$\mathbf{C}$  : matrice des constantes élastiques

$Q_{ij}$  : constantes élastiques

$H$  : fonctionnelle de Hamilton

$h$  : épaisseur

$E_c$  : énergie cinétique

$E_d$  : énergie de deformation

$E_p$  : énergie potentielle

$t$  : temps

$C, D$  : constantes

$P_C$  et  $P_M$  : propriétés du céramique et du métal.

$\nu$  : coefficient de Poisson.

$\nu_C$  : coefficient de Poisson du céramique.

$\nu_M$  : coefficient de Poisson du métal.

$\rho$  : masse volumique.

$\rho_C$  : masse volumique du céramique.

$\rho_M$  : masse volumique du métal.

$G$  : module d'élasticité transverse

$k$  : facteur de correction de cisaillement transverse

$G_M$  : module d'élasticité transverse du métal

$G_C$  : module d'élasticité transverse du céramique

$A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , et  $D_{ij}$  : constantes d'intégration suivant l'épaisseur.



$a, b$  : longueurs diamétrales

$W_{\max}$  : amplitude spécifique maximale

$\Omega_L$  : paramètre de fréquence linéaire

$\Omega_{NL}$  : paramètre de fréquence non linéaire

DDL : Degré de liberté

MEF : Méthode des Eléments Finis

MFG : Matériaux Fonctionnellement Gradués

FG : Fonctionnellement Gradué

S-S : Symétrique-Symétrique

S. P. : Sous-Programme

CAO : Conception Assistée par Ordinateur

## **Introduction générale**

Les coques sont des solides déformables dont la géométrie est assimilable à une surface avec une épaisseur. Leurs propriétés structurales remarquables ont été mises à contribution depuis l'antiquité dans la construction génie civil et navale.

En génie civil, l'utilisation des coques remonte à la construction des ponts, cathédrales, basiliques et mosquées (fig. 1). Ainsi, les coques étaient utilisées dans la construction des voûtes cylindriques ou sphériques en maçonnerie. Nombre de ces structures ont été érigées avec peu de théorie mathématique, mais avec connaissance saine du jeu des forces, du comportement structural et de l'art de construire. Avec l'avènement du béton armé et de nouveaux matériaux les formes et les applications se sont considérablement diversifiées : barrages voûtes à courbure simple ou double, toitures de salle d'expositions, d'arènes, de piscines, d'usines, châteaux d'eaux, réservoirs, silos, etc....

Les structures en coques ne sont pas l'exclusivité du génie civil ; elles sont employées également en constructions aéronautique, navale, automobile et mécanique, ainsi qu'en génie chimique et nucléaire (fig.2). Dans la technologie automobile, les corps des voitures sont des assemblages de coques donnant des formes aérodynamiques attrayantes aux véhicules; en biomécanique, les artères sont des coques donnant l'écoulement.

De nos jours, les coques constituent les éléments structuraux de base dans la construction aéronautique (fig.3) et aérospatiale. Les éléments structuraux de coque sont en grande partie présents dans la navette spatiale de la NASA (fig.4), là où les deux propulseurs pleins de fusée et le grand réservoir des combustibles liquides, sont des grandes substances sous forme de coque.

Qu'il s'agisse d'une navette spatiale, d'un réservoir sous pression, d'un navire ou d'un château d'eau, les coques ont néanmoins la particularité commune d'être parmi les structures les plus délicates à étudier.

Le constructeur reste confronté aux deux impératifs usuels suivants : savoir concevoir, planifier et construire la structure de manière rationnelle et économique, et savoir analyser la structure pour la dimensionner avec précision et sécurité. Dans le domaine des coques, survient fréquemment une troisième exigence essentielle : savoir choisir des formes aérodynamiques et esthétiques pour donner à la construction un aspect attrayant. Négliger l'une de ces composantes revient à aller au devant de déboires certains.

Des solutions analytiques approchées existent pour certains problèmes, en général pour le cas de géométries très régulières et de conditions de chargement simples. Cependant, les problèmes pratiques auxquels sont confrontés les ingénieurs aujourd'hui sont plus complexes et nécessitent en général une résolution approchée par une méthode numérique. Parmi les nombreuses méthodes numériques développées ces dernières années, la méthode des éléments finis est sans aucun doute la méthode la plus utilisée et celle qui offre le plus de solutions pour un très grand nombre d'applications.

La définition géométrique des structures constitue un des points clés d'une analyse par éléments finis, et devant la complication géométrique de la plupart des structures en coques, l'opération de discrétisation des éléments reste une étape délicate. En effet, pour garantir la convergence, une discrétisation doit être conforme, c'est-à-dire assurer la parfaite continuité des fonctions représentatives aux frontières. Le plus souvent, la représentation de la géométrie d'une coque par un maillage d'éléments finis de la version- $h$  standard introduit nécessairement des approximations géométriques. Entre les nœuds, l'approximation polynomiale de la géométrie ne suit généralement pas la forme réelle de la surface moyenne de la coque. Pour ne pas compromettre les propriétés de convergence de cette version de la méthode des éléments finis, il faut raffiner le maillage. Une autre version de la méthode des éléments finis s'est imposée avec une qualité remarquable : peu de degrés de liberté et une convergence exponentielle [Szabo & Babuska (1991)]. Il suffit d'augmenter le degré d'interpolation  $p$  tout en gardant le maillage fixe. Toutefois cette version- $p$  présente certaines limitations. Elle convient bien pour des géométries simples, mais face à des géométries complexes le passage par un assemblage de plusieurs éléments  $p$  est inévitable, d'où la naissance de la version  $h$ - $p$  de la méthode des éléments finis (pour plus de détails voir Chorfi [2004]). Même avec cette version, et en dehors des géométries simples, la surface du domaine maillé est seulement approchée. Aujourd'hui encore, la mise au point d'un élément de coque robuste et précis pour les géométries arbitraires reste un défi, surtout lorsqu'on s'écarte du domaine linéaire et encore lorsqu'on confronte le problème de la vibration.

Dans cette thèse, pour surmonter ce problème et représenter la géométrie de manière exacte, la version- $p$  de la méthode des éléments finis est combinée avec la méthode des fonctions de mélange afin de générer des éléments coques destinés aux problèmes des coques de géométries arbitraires.

Huit chapitres se présentent :

Le premier chapitre fait état d'une revue bibliographique qui apporte des éléments sur le développement réalisé par des recherches dans trois domaines durant ces dernières décennies, dans : (i) théories des coques ; (ii) vibration des coques à double courbure ; (iii) vibration des coques à géométrie arbitraire.

Le deuxième chapitre fait appel à l'analyse tensorielle pour décrire l'élasticité tridimensionnelle du milieu continu. Cette formulation a été établie en coordonnées curvilignes afin de permettre l'adoption des géométries arbitraires.

Le troisième chapitre présente le fondement de la théorie des surfaces, ainsi cette théorie est combinée avec la géométrie différentielle pour préparer le passage d'un domaine 3D à un domaine 2D.

Dans le quatrième chapitre, une théorie à cinq coordonnées généralisées de Reissner-Mindlin est formulée afin de déterminer les énergies cinétique et de déformation.

Le cinquième chapitre est consacré à la formulation p de la méthode des éléments finis.

Le sixième chapitre, est dédié à la formulation relative à un matériau fonctionnellement gradué.

Le septième chapitre est réservé à l'organisation de la programmation, ainsi un organigramme général du code développé avec description des sous programmes seront présentés dans ce chapitre.

Dans le chapitre huit et après une étape de validation menée avec une étude de convergence, plusieurs exemples de coques à simple et double courbure de différentes formes géométriques sont présentés. L'influence des caractéristiques géométriques, physiques et des conditions aux limites sur le comportement vibratoire linéaire et non linéaire est analysée.



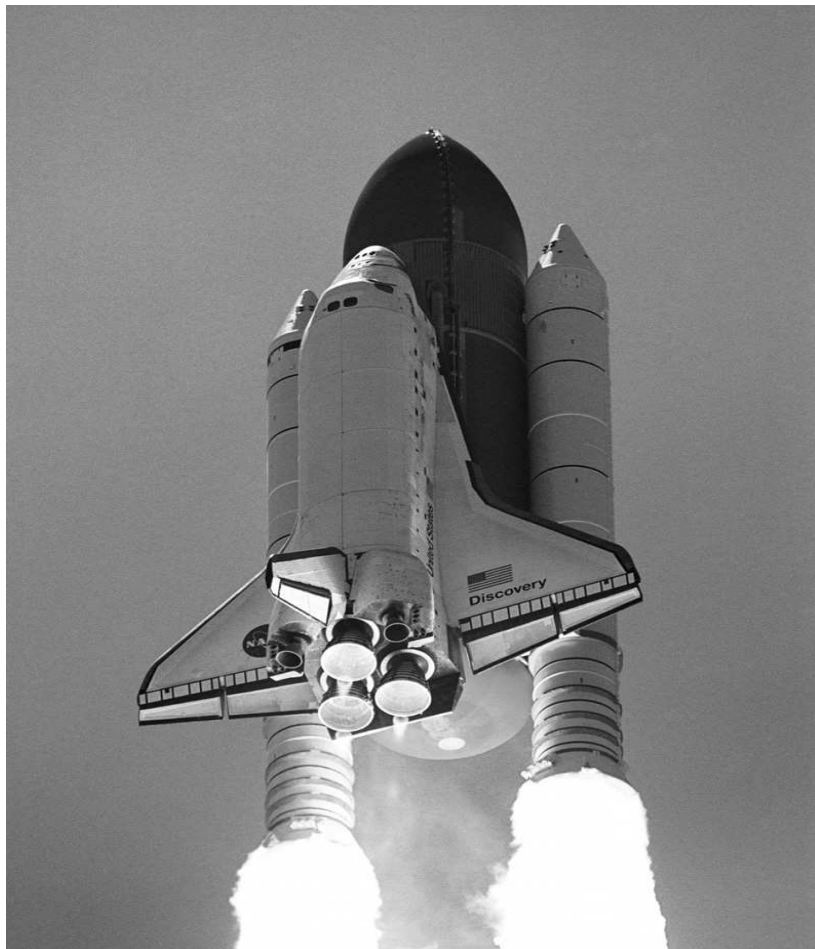
**Fig. 1** Mosquée du Dôme du Rocher [S1 (2011)] (مسجد قبة الصخرة).



**Fig. 2** Centrale nucléaire [S2 (2011)].



**Fig. 3** Airbus A380 [S3 (2011)].



**Fig 4** Navette spatiale Discovery de la NASA [S4 (2011)].

# 1. Bibliographie

## 1.1 Introduction

Une coque est un solide qui occupe dans l'espace un volume compris entre deux surfaces de sorte que l'épaisseur soit petite devant les autres dimensions. Cette particularité géométrique a délivrés plusieurs théories.

## 1.2 Théories des coques

Novozhilov [1964] attribue les premières formulations dans ce domaine aux travaux de Cauchy [1828]. La formulation est basée sur l'idée d'exprimer les déplacements et les contraintes en série de puissance de  $z$  (la distance par rapport à la surface moyenne). Mais selon Kraus [1967], la première théorie recevable dans le domaine des coques a été formulée par Love [1888 ; 1941], fondée sur les travaux antérieurs de Aron [1874] et Kirchhoff [1850] et basée sur les hypothèses suivantes :

- La coque est mince.
- Les déplacements sont petits.
- La contrainte normale transverse est négligeable.
- Les normales à la surface moyenne non déformée de la coque restent normales à la surface moyenne de la coque déformée et ne changent pas de longueur.

Une autre manière d'énoncer cette dernière hypothèse est de supposer que les points qui se trouvent sur la normale à la surface moyenne avant déformation se trouvent encore sur la normale de la surface moyenne après déformation, et que les distances le long de cette normale demeurent inchangées. On dit aussi d'une manière concise qu'il y a « conservation de l'élément normal ».

Par la suite, en abandonnant tout ou une partie des hypothèses précédentes, diverses théories ont été proposées [Leissa (1973) ; Kraus (1967) ; Gerald et Demosthenes (2003)], Donnell [1933; 1938], Flugge [1934; 1962], Lur'ye [1937], Mushtari [1938a; 1938b], Reissner [1941], Byrne [1944], Vlasov [1944; 1949], Timoshenko [1959], Sanders [1959], Goldenveizer [1961], Naghdi et Berry [1964], Novozhilov [1964], etc....

Ces théories ne sont pas nécessairement indépendantes comme l'a fait remarquer Leissa [1973], certaines de ces théories sont des généralisations à d'autres, voire des duplications. D'après la littérature, elles sont classifiées selon :

- le degré d'approximation de certaines théories est d'ordre un, d'autres théories sont d'ordre supérieur.
- la présence ou non des termes non linéaires : en abandonnant la deuxième hypothèse de Love une étendue des théories linéaires a donné naissance à d'autres théories dites théories non linéaires (Sanders [1951], Koiter [1966], Simmonds et Danielson [1970 ; 1972], et Pietraszkiewicz [1984 ; 1989]).
- la profondeur de la coque [Soedel (2004)] : selon le rapport épaisseur-profondeur, certaines théories sont des théories de coques profondes d'autres sont des théories de coques peu profondes.
- l'épaisseur de la coque : ces théories sont classées en quatre groupes : théories de coques minces, très minces, épaisses et modérément épaisses.
- la présence ou non des déformations transverses : certaines théories considèrent la déformation transverse d'autres théories la négligent.

Parfois même elles sont regroupées selon

- la célébrité : certaines théories sont connues d'autres sont moins connues. Pour ce dernier groupe Leissa [1973] a cité quelques théories asymptotiques.

Parfois, on trouve des difficultés à distinguer le critère de classification de ces théories. Kraus [1967] a classifié trois groupes :

- le premier groupe des théories est celui des théories de coques minces (théories de Love et Sanders)
- le deuxième groupe des théories est d'ordre supérieur
- le troisième groupe des théories est celui des théories non linéaires.

Suite à l'apparition des matériaux composites, de nombreuses théories sont apparues (Ambartsumyan [1953 ; 1964], Dong, Pister et Taylor [1962], Reddy [1984]....). En effet, elles ne sont que des extensions des théories précédentes. Par exemple, la théorie de Dong, Pister et Taylor [1962] est une extension de la théorie de Donnell [1933], la théorie de Reddy [1984] est une extension de la théorie de Sanders [1959]. Plus de détails au sujet des théories de coques composites se trouvent dans Reddy [2004].

Souvent, quelques théories de coques se présentent sous forme de résultats numériques dans des tableaux ou des graphes de comparaison ou de validation. Ceci mène fréquemment à des petites comparaisons entre deux ou plusieurs théories. Cependant, des travaux de recherche exhaustifs consacrés à la comparaison des théories des coques sont très rares.



Néanmoins, dans le domaine de vibration linéaire des coques cylindriques composites, Soldatos [1984] a dédié une comparaison entre les solutions analytiques issues des théories de Donell [1933], Flügge [1962], Sanders [1959] et Love [1944]. Ce sont des théories qui s'inscrivent dans la même classe des théories de coques minces où le cisaillement transverse est négligé. Mais du point de vue profondeur de coque, la théorie de Donell [1933] est une théorie des coques peu profondes, les trois autres sont des théories des coques profondes. Bien que les résultats de la théorie de Sanders [1959] et de Love [1944] soient très proches, les résultats de la théorie de Donnell [1933] ne sont fiables que pour les coques peu profondes. Soldatos [1984], et d'un point de vue numérique, a donné l'avantage à la théorie de Flügge [1962]. Qatu [1992] lorsqu'il a discuté l'article de Soldatos [1984] a fait remarquer que les erreurs dans les résultats de la théorie de Donell [1933] s'amplifient de plus en plus pour les hautes fréquences.

Cette même discussion au sujet du rapport de la profondeur de la coque et de son influence sur la validité de la théorie utilisée a été examinée par Leissa [1971]. Il a proposé une limite  $a/R \leq 0.4$  ( $a$  est la longueur mesurée sur le côté de la coque,  $R$  est le rayon de courbure). Cependant dans d'autres articles, Leissa et Narita [1984] et Narita et Leissa [1986] ont recommandé  $a/R \leq 0.5$ . L'influence de ce rapport sur le comportement vibratoire linéaire et non linéaire des coques à géométries arbitraires est discutée dans le dernier chapitre de cette thèse.

### 1.3 Vibration des coques

Les coques sont très utilisées dans le domaine de l'aéronautique, de l'automobile, du génie civil, dans l'industrie de stockage, ..., et elles sont souvent soumises aux charges dynamiques qui causent des vibrations. Vu l'importance du problème, il a été discuté dès l'apparition des premières théories des coques (Love [1888]). Cette importance peut être davantage déduite des nombreuses revues bibliographiques consacrées à ce sujet :

- Evensen [1974] a couvert les travaux de recherches sur les panneaux cylindriques isotropes de 1955 à 1971.
- Leissa [1973] a dédié un rapport à la NASA qui par la suite est devenu une référence bibliographique indispensable dans le domaine de vibration des coques. Il a cité plus de 500 articles, 25 sur la vibration non linéaire.
- Qatu [1992], en commençant par les travaux de recherches des années 70, il a discuté plus de 180 références sur la vibration des coques peu profondes.

- Liew et al. [1997], en débutant de la même année (1970), les coques peu profondes ont encore fait l'objet d'une seconde revue bibliographique, mais cette fois-ci avec plus de 160 publications comme références.
- Moussaoui et Benamar [2002] ont réalisé une synthèse bibliographique avec plus de 175 références sur les problèmes de vibration non linéaire des coques.
- Amabili et Païdoussis [2003] ont dédié une revue sur la vibration des panneaux et des coques cylindriques. Une grande partie de cette revue est réservée à l'interaction fluide-structure.
- Alhazza khaled et Abdulsalam [2004], avec plus de 260 références, ont offert une mise à jour des développements dans le domaine des calculs vibratoires des coques et des plaques.
- Les coques composites, comme sous-titre dans les articles précédents, ont également fait l'objet de revues bibliographiques consacrées à leur sujet, par exemple les revues de Kapania [1989] et de Mirza [1991].
- Qatu et al. [2010] ont discuté plus de 199 publications sur les coques composites entre les années 2000 et 2009.

Bien que le nombre de travaux de recherche dans le domaine des coques soit multiplié, ces revues prétendent offrir une synthèse bibliographique conséquente à la vibration des coques. Dans cette optique et face à l'étendue des développements des travaux de recherche dans ce domaine, on s'est restreint dans ce chapitre aux travaux les plus récents sur les coques à double courbure et les coques de formes géométriques arbitraires.

### 1.3.1 Vibration des coques à double courbure

Dans une coque à double courbure, les deux courbures principales sont non nulles (voir le chapitre sur la géométrie surfacique) ; elles sont de même signe ou de signe contraire (coque sphérique et parabolôïde de révolution, par exemple). Si l'une des courbures principales est nulle, la coque est dite à simple courbure (cylindre et cône par exemple). Si les deux courbures principales sont nulles, c'est le cas d'une plaque.

Les coques à double courbure sont considérées comme le type le plus difficile des coques à analyser, et les travaux sur les coques à double courbure sont considérablement faibles par comparaison aux travaux sur les coques à simple courbure [Alhazza K. et A. (2004) ; Singh et Kumar (1996)].

En utilisant la version- $p$  de la méthode des éléments finis, la vibration non linéaire d'un panneau peu profond à double courbure a été analysée par Ribeiro [2003]. En se basant sur la théorie de Sanders et en tenant compte de l'amortissement. Ravi et al. [2005] ont étudié l'instabilité dynamique d'un panneau composite à double courbure chargé sur les bords. Chaudhuria et al. [2005] ont établi une solution analytique et ont analysé l'effet des conditions aux limites sur les fréquences de vibration d'un panneau composite à double courbure. Amabili [2005] a fait une étude remarquable sur la vibration non linéaire forcée des coques simplement appuyées à double courbure. Il a considéré deux théories non linéaires, la théorie de Donnell et la théorie de Novozhilov avec une force d'excitation harmonique normale à la surface dans un voisinage spectral du mode fondamental. Pour la résolution de l'équation du mouvement, il a utilisé deux méthodes : la méthode de la longueur d'arc et l'intégration temporaire directe. Il a même entamé les problèmes de chaos et d'instabilité sous chargement statique et dynamique.

Adam [2007] a utilisé une théorie de premier ordre pour le problème de vibration non linéaire de coque peu profonde à double courbure stratifiée. En plus de l'influence de la géométrie, il a analysé l'influence de l'amplitude d'une charge dynamique sur les bords. Naidu et Sinha [2007] ont présenté une étude sur la vibration non linéaire de panneaux composites à double courbure dans un environnement hydrau-thermique. La théorie employée dans cette étude est une théorie de premier ordre. Comme résultats numériques, ils ont présenté une étude paramétrique dans laquelle ils ont fait varier l'épaisseur et la courbure des coques cylindriques, sphériques et hyperboliques paraboloides.

En se basant sur une théorie d'ordre supérieur, Panda et Singh [2009] ont développé un élément quadrilatéral de neuf nœuds pour le problème de la vibration non linéaire des panneaux sphériques composites. Les résultats incluent ceux du panneau cylindrique, comme cas particulier du panneau sphérique.

Le problème de la vibration non linéaire des coques composites à double courbure dans un environnement hydrau-thermique apparaît de nouveau dans le travail de Kundu et Han [2009]. En utilisant la méthode de la longueur d'arc, leur étude s'est étalée pour couvrir les problèmes de vibration forcée et de l'instabilité dynamique.

Amabili et Reddy [2010] ont présenté récemment une théorie non linéaire d'ordre supérieur désignée à la vibration des coques stratifiées modérément épaisses. Bien que leur formulation soit basée sur un panneau à double courbure, comme exemple de validation et de

comparaison ils ont considéré le cas de vibration forcée d'un cylindre stratifié simplement appuyé. En conclusion, ils ont souligné que pour une exactitude meilleure, des termes non linéaires découlant des déformations membranaires doivent être ajoutés aux termes non linéaires de la théorie de von Karman [1910 ; 1941].

L'apparition de nouveaux matériaux a donnée naissance à de nombreuses publications (voir Qatu [2010]). Dans le domaine des coques produites en Matériaux Fonctionnellement Gradués (MFG) quelques publications sont survenues vers la fin de cette dernière décennie. Pradyumna et Bandyopadhyay [2008] ont combiné une théorie d'ordre élevé avec la méthode des éléments finis pour calculer les fréquences propres d'un panneau en MFG à double courbure. L'élément développé est un élément à huit noeuds et neuf degrés de liberté par noeud. L'influence de plusieurs paramètres géométriques et conditions aux limites sur les fréquences linéaires des coques cylindriques, sphériques et hyperboliques est analysée. Le problème de panneau en MFG hyperbolique, et coques de révolution comme cas exceptionnel des coques à double courbure est traité par Tornabene et Viola [2009] dans le cas de vibration libre et Tornabene et Viola [2009] dans le cas de vibration forcée. Ils ont combiné la Méthode de quadrature différentielle généralisée avec une théorie de premier ordre. Biglari et Jafari [2010] ont établi la solution analytique de la vibration libre des panneaux sandwich à double courbure. Ils ont analysé l'influence du rayon de courbure et de l'épaisseur sur la vibration de panneaux sandwich cylindriques et sphériques.

Alijani et al [in press] ont présenté une étude sur la validité et l'exactitude de la technique multi-échelle pour les problèmes de vibration non linéaire libre et forcée des coques à double courbure. Après une large comparaison avec les deux méthodes utilisées précédemment par Amabili [2005], ils ont remis les résultats de plusieurs chercheurs en question en concluant que cette méthode donne des résultats erronés lorsque la non linéarité est du type assouplissant.

### **1.3.2 Vibration des coques de formes géométriques arbitraires**

Les travaux sur les coques de géométries arbitraires sont rares. Kurpa et al. dans une série d'article papier ont proposé la méthode fonction- $R$  pour décrire la géométrie arbitraire des plaques [2005a] et des coques [2005b ; 2010]. Cette méthode est couplée avec un procédé variationnel pour définir des solutions analytiques.

Houmat [2006] a utilisé la version- $p$  trigonométrique de la méthode des éléments finis pour étudier la vibration linéaire des membranes à géométrie arbitraire. Il est intéressant de noter

qu'en plus de la rapidité de convergence de l'élément- $p$  membranaire quadrangulaire, il a réussi à accomplir l'assemblage de deux éléments- $p$  à géométrie complexe. Dans un autre papier Houmat [2007] a développé un élément- $p$  triangulaire pour les problèmes de vibration des plaques.

En combinant la version- $p$  de la méthode des éléments finis avec la méthode des fonctions de mélange, Chorfi et Houmat [2009 ; 2010] ont présenté deux études sur la vibration non linéaire des coques à double courbure. La première est sur les matériaux isotropes et la deuxième est sur les MFG. Bien que la formulation soit générale afin d'accéder à la modélisation des coques de géométries arbitraires, comme application ils ont considéré l'exemple d'un panneau à double courbure ayant une projection elliptique. Ce problème a déjà été étudié par Lim et Liew [1995] en utilisant la méthode de Ritz, cependant les résultats non linéaires apparus pour la première fois dans ces deux publications pour dévoiler le comportement non linéaire des coques ayant une projection elliptique.

## 2. Elasticité tridimensionnelle en coordonnées curvilignes

### 2.1 Introduction

Dans de nombreux problèmes de la mécanique, la géométrie suggère l'utilisation de systèmes de coordonnées non rectilignes. Par exemple, il semble naturel d'étudier le comportement mécanique d'un objet axisymétrique ou sphérique en faisant appel à un système de coordonnées cylindriques ou sphériques, respectivement : la formulation des problèmes et leurs solutions sont sensiblement simplifiées. Ces deux systèmes ne sont que des cas spéciaux d'un système plus général qui est le système de coordonnées curvilignes.

### 2.2 Coordonnées curvilignes [Lamé (1859)]

Considérons une région  $\mathfrak{R}$  de l'espace référée à un système Cartésien  $OX_1, OX_2, OX_3$ . Les coordonnées d'un point  $P_1$  de cette région dans ce système, sont  $x_1, x_2$  et  $x_3$  (fig. 2.1). Si une transformation de coordonnées de ce système Cartésien vers un autre système est établie, alors les relations entre les deux sont :

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = y_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (2.1)$$

Les fonctions  $y_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont continues et dérivables sur la région  $\mathfrak{R}$  de l'espace. Les équations (2.1) peuvent être inversées pour donner les relations :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2, y_3) \\ x_2 = x_2(y_1, y_2, y_3) \\ x_3 = x_3(y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les fonctions  $x_i(y_1, y_2, y_3)$  sont continues et dérivables sur  $\mathfrak{R}$ . Le passage de (2.1) à (2.2) et vice versa exige un *Jacobien*  $J$  non nul.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

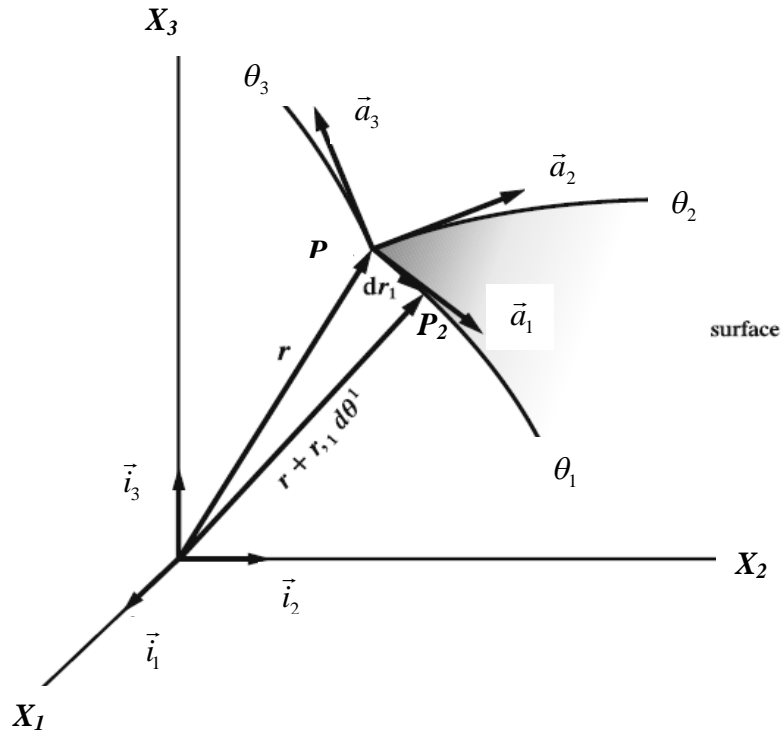


Fig. 2.1 Vecteur position.

Donc chaque point de la région  $\mathfrak{R}$  peut être exprimé en fonction de  $y_i$  au lieu de  $x_i$ . Comme signification géométrique de  $y_i$ ,  $y_i(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}$  est une équation de surface et en fonction de la valeur de cette constante nous obtenons une famille de surfaces (fig. 2.2). Les conditions exigent que l'intersection de chaque famille de surfaces soit en un seul et un seul point  $P_i$ , en d'autres termes, pour  $i=1,2,3$  nous avons trois familles de surfaces et l'intersection de deux surfaces donne une courbe notée  $\theta_i$  et appelée *coordonnée curviligne*[Green et Zerna (1968)].

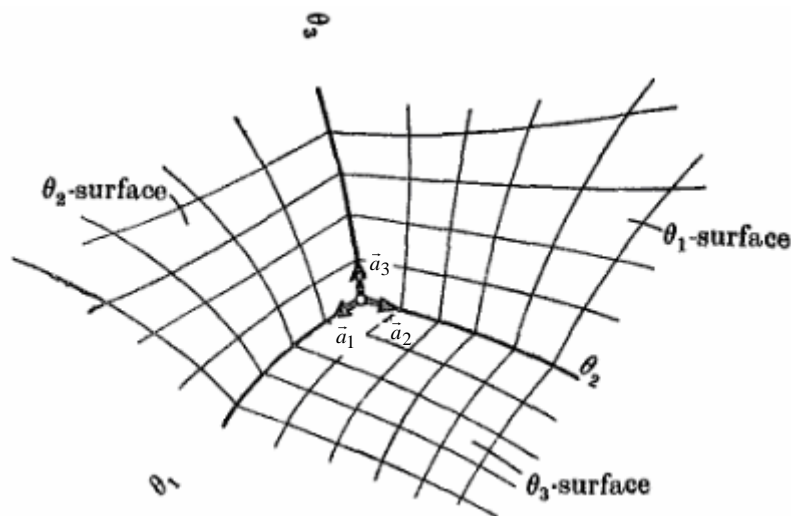


Fig. 2.2 Coordonnées curvilignes.

### 2.3 Les coefficients métriques

Une chose importante dans un système de coordonnées, est de savoir mesurer les longueurs, ces mesures sont assurées par les coefficients métriques. Soit un point quelconque  $P_1(x_1, x_2, x_3)$  référé à un système Cartésien, le vecteur position de ce point est donné par :

$$\vec{r} = x_1 \vec{i}_1 + x_2 \vec{i}_2 + x_3 \vec{i}_3 \quad (2.4)$$

Où  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  sont des vecteurs unitaires (fig. 2.2).  $P_2(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$  dans la figure est un point voisin de  $P_1$ . Le carré de la longueur  $P_1P_2$  est donné par :

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dx_i dx_i \quad (2.5)$$

Le vecteur  $d\vec{r}$  qui relie les deux points  $P_1$  et  $P_2$  est donné par :

$$d\vec{r} = dx_1 \vec{i}_1 + dx_2 \vec{i}_2 + dx_3 \vec{i}_3 \quad (2.6)$$

Donc

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (2.7)$$

La quantité dans (2.7) est indépendante du système d'axes. En utilisant les coordonnées curvilignes et en se servant des propriétés d'une fonctionnelle :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_3} d\theta_3 \quad (2.8)$$

Le vecteur  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_1}$  est un vecteur tangent à la courbe  $\theta_1$  au point  $P_1$ . Alors il est possible de définir une base vectorielle  $\vec{a}_i$  au point  $P_1$  en considérant les vecteurs tangents aux courbes de coordonnées (fig. 2.1) :

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_i} \quad (2.9)$$

Le produit scalaire de la nouvelle base vectorielle s'écrit :

$$g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_i = g_{ji} \quad (2.10)$$

où  $g_{ij}$  est le tenseur métrique et ses coefficients sont appelés les coefficients métriques [Borisenko et Tarapov (1968)].

Certains ouvrages [Wempner et Talaslidis (2003) ; Saada (1974)] utilisent les facteurs scalaires  $h_i$  qui sont reliés au tenseur métrique par la relation :

$$g_{ii} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = (h_i)^2 \quad (2.11)$$



## 2.4 Élément de volume

En coordonnées curvilignes, l'élément de volume de l'espace est donné par l'expression suivante :

$$dv = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \quad (2.12)$$

## 2.5 Vecteurs unitaires de la base curviligne

Soit  $\bar{e}_i$  les vecteurs unitaires de la base curviligne  $\bar{a}_i$ ,

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|} \quad (2.13)$$

La relation (2,11) permet d'écrire :

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{h_i} \quad (2.14)$$

D'autre part, la propriété d'orthogonalité est donnée par [Islam (2006); Sokolnikoff (1951)] :

$$\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = 0 ; i \neq j \quad (2.15)$$

De cette relation, nous pouvons facilement déduire :

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \theta_k} \cdot \bar{a}_j = -\bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial \theta_k} ; i \neq j \quad (2.16)$$

Le cas  $i \neq j \neq k$  va être développé séparément dans ce qui suit.

De la relation (2.9), nous pouvons établir la propriété suivante :

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta_j} \right) = \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial \theta_i} \quad (2.17)$$

La relation (2.16) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_3} \bar{a}_2 + \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \theta_3} \bar{a}_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \theta_1} \bar{a}_3 + \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial \theta_1} \bar{a}_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_3}{\partial \theta_2} \bar{a}_1 + \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_2} \bar{a}_3 = 0 \quad (2.20)$$

En soustrayant (2.20) de (2.19) et en tenant compte de l'équation (2.17) nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{a}_3}{\partial \theta_1} \bar{a}_2 - \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial \theta_2} \bar{a}_1 = 0 \quad (2.21)$$

La comparaison entre (2.21) et (2.18) en tenant compte de (2.17) entraîne :

$$\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \theta_3} \bar{a}_1 = \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial \theta_1} \bar{a}_2 = \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_2} \bar{a}_3 = 0 \quad (2.22)$$

Ou d'une manière plus générale

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \theta_k} \bar{a}_j = 0; i \neq j \neq k \quad (2.23)$$

La dérivation de l'équation (2.11) donne :

$$\bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \theta_k} = \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \theta_i} = h_i \frac{\partial h_i}{\partial \theta_k} \quad (2.24)$$

Ayant établi les relations (2.16), (2.23) et (2.24), les équations aux dérivées partielles  $\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \theta_j}$  peuvent être évaluées.

Comme exemple, considérons le vecteur  $\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1}$ . Les trois composantes de ce vecteur sont :

$$\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \bar{e}_1; \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \bar{e}_2; \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \bar{e}_3 \quad (2.25)$$

Ou encore, en utilisant (2.14)

$$\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \frac{\bar{a}_1}{h_1}; \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \frac{\bar{a}_2}{h_2}; \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \frac{\bar{a}_3}{h_3} \quad (2.26)$$

Pour  $i=1$  et  $k=1$  et en utilisant la relation (2.24), nous avons :

$$\bar{a}_1 \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} = h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} \quad (2.27)$$

En posant  $i=1, j=2,3$  et  $k=1$  dans la relation (2.16) puis  $i=1$  et  $k=2,3$  dans (2.24), nous aurons :

$$\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \bar{a}_2 = -\bar{a}_1 \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \theta_1} = -h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \theta_1} \bar{a}_3 = -\bar{a}_1 \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial \theta_1} = -h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \quad (2.29)$$

En injectant (2.27)-(2.29) dans (2.26), nous obtenons :

$$\frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}; -\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}; -\frac{h_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \quad (2.30)$$

Aussi, le vecteur  $\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial \theta_1}$  peut s'exprimer dans la base  $\vec{e}_i$  par ses composantes :

$$\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} \vec{e}_1 - \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \vec{e}_2 - \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \vec{e}_3 \quad (2.31)$$

Ou encore en utilisant (2.14)

$$\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} \frac{\vec{a}_1}{h_1} - \frac{h_1}{(h_2)^2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \vec{a}_2 - \frac{h_1}{(h_3)^2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \vec{a}_3 \quad (2.32)$$

La même démarche utilisée ici pour exprimer  $\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial \theta_1}$  est reprise pour les vecteurs  $\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \theta_j}$  restants,

$$\frac{\partial \vec{a}_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial h_2}{\partial \theta_2} \frac{\vec{a}_2}{h_2} - \frac{h_2}{(h_3)^2} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \vec{a}_3 - \frac{h_2}{(h_1)^2} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \vec{a}_1 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \vec{a}_3}{\partial \theta_3} = \frac{\partial h_3}{\partial \theta_3} \frac{\vec{a}_3}{h_3} - \frac{h_3}{(h_1)^2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \vec{a}_1 - \frac{h_3}{(h_2)^2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \vec{a}_2 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \vec{a}_2}{\partial \theta_3} = \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \frac{\vec{a}_2}{h_2} + \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \frac{\vec{a}_3}{h_3} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \vec{a}_3}{\partial \theta_1} = \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \frac{\vec{a}_3}{h_3} + \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \frac{\vec{a}_1}{h_1} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \frac{\vec{a}_1}{h_1} + \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \frac{\vec{a}_2}{h_2} \quad (2.37)$$

En utilisant (2.14) la déduction de  $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \theta_j}$  des équations (2.32)-(2.37) peut se faire facilement

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \frac{\vec{e}_2}{h_2} - \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \frac{\vec{e}_3}{h_3} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \frac{\vec{e}_2}{h_1} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \theta_3} = \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \frac{\vec{e}_3}{h_1} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \theta_1} = \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \frac{\vec{e}_1}{h_2} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \frac{\vec{e}_3}{h_3} - \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \frac{\vec{e}_1}{h_1} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \theta_3} = \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \frac{\bar{e}_3}{h_2} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \theta_1} = \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \frac{\bar{e}_1}{h_3} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \theta_2} = \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \frac{\bar{e}_2}{h_3} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \theta_3} = -\frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \frac{\bar{e}_1}{h_1} - \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \frac{\bar{e}_2}{h_2} \quad (2.46)$$

Il est intéressant de noter qu'en passant par la base Cartésienne  $\bar{i}_i$  (fig.2.1) et au lieu de passer par la base curviligne  $\bar{a}_i$ , Sadd [2005] a abouti aux mêmes résultats (2.38)-(2.46) dont la forme est plus dense

$$\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j} \bar{e}_j - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \theta_k} \bar{e}_k; i \neq j \neq k \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial \theta_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \theta_i} \bar{e}_j; i \neq j \quad (2.48)$$

La non sommation sur les indices répétés dans (2.48) est adoptée. En se servant de ces résultats nous pouvons évaluer les dérivées de tenseur.

## 2.6 Les relations déformation- déplacement en coordonnées curvilignes

Dans la figure 2.3, la configuration finale (déformée) et la configuration initiale d'un milieu continu sont référées aux deux systèmes curvilignes  $\xi_i$  et  $\theta_i$ , leurs bases curvilignes sont  $\bar{b}_i$  et  $\bar{a}_i$ , respectivement. Avant déformation, une particule quelconque du milieu est au point  $M$  de l'espace, la même particule occupera la position  $M^*$  après déformation.  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$  sont les vecteurs position de cette particule avant et après déformation, respectivement.

Le vecteur déplacement qui relie les deux points  $P$  et  $P^*$  est donné en fonction des vecteurs de position par

$$\vec{u} = \vec{R} - \vec{r} \quad (2.49)$$

La dérivation partielle de (2.49) par rapport aux coordonnées curvilignes donne

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_i} \quad (2.50)$$

De l'équation (2.9)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_i \tag{2.51}$$

Donc

$$\bar{b}_i = \bar{a}_i + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} \tag{2.52}$$

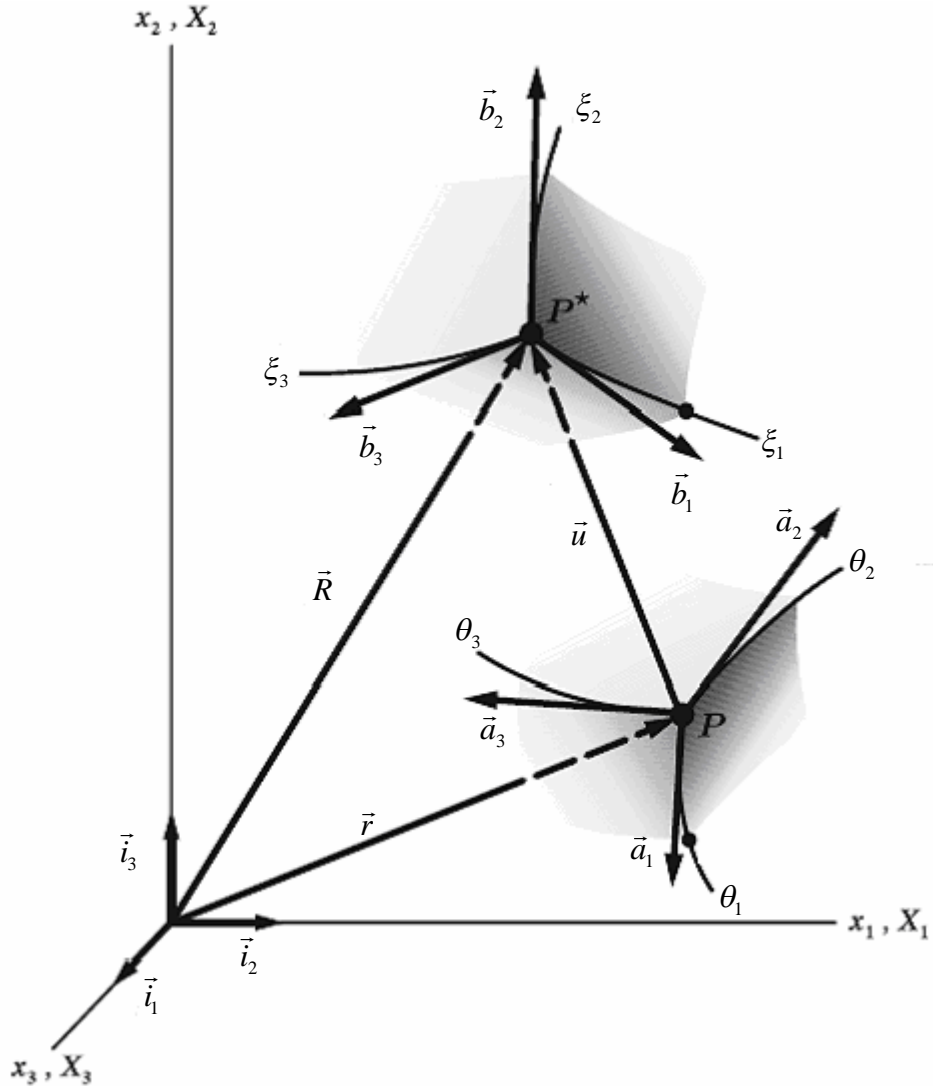


Fig. 2.3 Vecteur déplacement.

Le tenseur métrique  $G_{ij}$  de la configuration finale peut être exprimé en fonction du vecteur déplacement  $\bar{u}$  et du produit scalaire  $\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j$ . Ainsi,

$$G_{ij} = \bar{b}_i \cdot \bar{b}_j = \left( \bar{a}_i + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} \right) \cdot \left( \bar{a}_j + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} \right) \tag{2.53}$$

Donc

$$G_{ij} = \bar{a}_i \cdot \bar{a}_j + \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} + \bar{a}_j \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} \tag{2.54}$$

Le produit scalaire  $\bar{a}_i \bar{a}_j$  dans (2.54) est bien le tenseur métrique  $g_{ij}$  (voir l'équation (2.10)). De ce fait,

$$G_{ij} - g_{ij} = \bar{a}_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} + \bar{a}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} \quad (2.55)$$

La quantité  $G_{ij} - g_{ij}$  est dénotée  $2E_{ij}$  appelée *tenseur de déformation finie de Green-Lagrange*. (2.55) s'écrit :

$$2E_{ij} = +\bar{a}_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} + \bar{a}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_j} \quad (2.56)$$

Le vecteur déplacement  $\bar{u}$  s'exprime dans la base curviligne  $\bar{a}_i$  par

$$\bar{u} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2 + u_3 \bar{e}_3 = u_i \bar{e}_i \quad (2.57)$$

Où  $\bar{e}_i$  est le vecteur unitaire de  $\bar{a}_i$  correspondant. La substitution de (2.57) dans (2.56) donne :

$$2E_{ij} = +\bar{a}_i \frac{\partial (u_k \bar{e}_k)}{\partial \theta_j} + \bar{a}_j \frac{\partial (u_l \bar{e}_l)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial (u_m \bar{e}_m)}{\partial \theta_i} \frac{\partial (u_r \bar{e}_r)}{\partial \theta_j} \quad (2.58)$$

Le développement de (2.58) en se servant de (2.47) et (2.48) amène aux relations suivantes (Saada [1974]) :

$$\begin{aligned} E_{11} = & h_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{h_1 u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} + \frac{h_1 u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} E_{22} = & h_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{h_2 u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} + \frac{h_2 u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} E_{33} = & h_3 \frac{\partial u_3}{\partial \theta_3} + \frac{h_3 u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} + \frac{h_3 u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \right)^2 \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} E_{12} = & \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - u_2 \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \right) \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} E_{13} = & \frac{1}{2} \left( h_3 \frac{\partial u_3}{\partial \theta_1} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta_3} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} - u_3 \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \right) \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} E_{23} = & \frac{1}{2} \left( h_3 \frac{\partial u_3}{\partial \theta_2} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta_3} - u_2 \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} - u_3 \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \right) \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta_3} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ou encore en utilisant les composantes physiques du tenseur de deuxième ordre

$$\varepsilon_{ij} = \frac{E_{ij}}{h_i h_j} \quad (2.65)$$

En considérant les composantes physiques (2.65), et sous forme plus maniable, les équations (2.59)-(2.64) précédentes s'écrivent

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{31}^2) \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{32}^2) \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \quad (2.68)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{32} \quad (2.69)$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{21} \varepsilon_{23} \quad (2.70)$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{32} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{13} \quad (2.71)$$

avec

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} + \frac{u_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} + \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3} \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial \theta_3} + \frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} + \frac{u_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1} \quad (2.74)$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} \quad (2.75)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_1}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_3}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_3} \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_3}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta_3} - \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \theta_2} \quad (2.77)$$

$$\gamma_{ij} = 2 \varepsilon_{ij} \quad (2.78)$$

Il est intéressant de noter que Krauss [1967] et Ambartsumyan [1964] ont donné un autre schéma de dérivation de ces équations en passant directement par la géométrie différentielle surfacique, mais ils n'ont considéré que la partie linéaire.

## 2.7 Relations contrainte-déformation

Lorsque le milieu continu est homogène isotrope, la Loi de comportement, (loi de *Hooke* généralisée) s'écrit en fonction du tenseur de déformation

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.79)$$

Plus explicitement,



$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{33} \\ \sigma_{23} = 2\mu \gamma_{23} \\ \sigma_{13} = 2\mu \gamma_{13} \\ \sigma_{12} = 2\mu \gamma_{12} \end{cases} \quad (2.80)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les *coefficients* (ou les *constantes* dans certains ouvrages [Lai et al. (1999) ; Mase (1999)]) de Lamé pour un matériau isotrope.

Cette dernière relation est souvent exprimée en fonction du *coefficient de Poisson*  $\nu$  et du *module d'élasticité*  $E$ . Avec

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.81)$$

## 2.8 Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique associée au champ de déplacement est donné par :

$$Ec = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dv \quad (2.82)$$

Où  $\dot{u}_i$  désignent les dérivées des composantes du déplacement par rapport au temps,  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $dv$  est l'élément de volume.

## 2.9 Energie de déformation

L'énergie de déformation est donnée par:

$$Ed = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (2.83)$$

## 3. Géométrie différentielle des surfaces

### 3.1 Introduction

La géométrie différentielle est la branche de mathématiques dont les objets d'étude sont les variétés différentielles. Elle tient son nom du fait qu'elle est née de la possibilité d'une interprétation cinématique que le calcul infinitésimal apporte à l'étude des courbes. Elle trouve sa principale application en physique dans la théorie de relativité où elle permet par exemple une modélisation d'une courbe de l'espace-temps. En mécanique des milieux continus, elle est utile pour la description des déformations des corps élastiques. En théorie des surfaces, elle est utilisée pour étudier les propriétés locales (au voisinage d'un point) et intrinsèques des courbes et des surfaces de géométries arbitraires. Un sommaire des relations essentielles dans la théorie des surfaces est présenté dans cette partie. Plus de détails sont disponibles dans Kraus [1967], Struik [1950], Graustein [1935], et Lass [1950].

### 3.2 Quelques relations essentielles de la théorie des surfaces

Dans la théorie des surfaces, deux types de représentations paramétriques sont employées : la représentation vectorielle et la représentation scalaire [Ventsel et Krauthammer (2001)].

#### 3.2.1 Système de coordonnées

Une représentation paramétrique vectorielle est choisie pour décrire une surface  $\Sigma$  dans l'espace (Fig. 3.1). Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées curvilignes sur  $\Sigma$ .

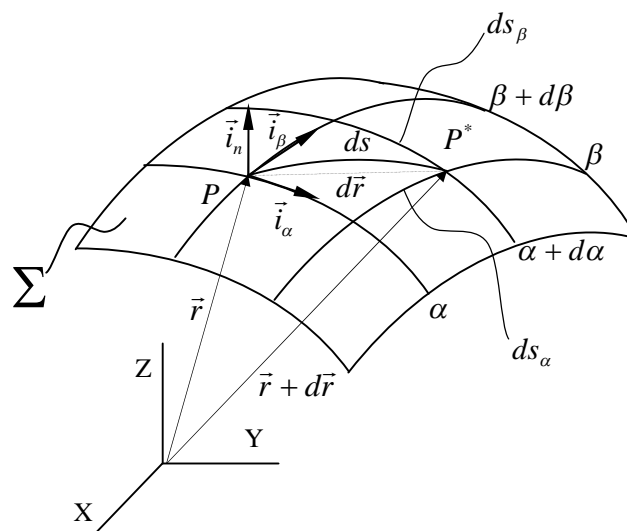


Fig. 3.1 Surface  $\Sigma$  et sa base orthonormée  $(\vec{i}_\alpha, \vec{i}_\beta, \vec{i}_n)$ .

### 3.2.2 Première forme quadratique

Considérons deux points adjacents  $P(\alpha, \beta)$  et  $P^*(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$  de la même surface  $\Sigma$ . Le vecteur  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$  est le vecteur position du point  $P$ .

Par commodité, la notation  $(\bullet)_{,\alpha}$  est utilisée pour désigner la dérivée partielle (par exemple  $\vec{r}_{,\alpha} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ ).

La différentielle

$$d\vec{r} = \vec{r}_{,\alpha} d\alpha + \vec{r}_{,\beta} d\beta \quad (3.1)$$

permet de calculer le carré de la longueur de l'élément de ligne sur la surface

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = A_\alpha^2 (d\alpha)^2 + 2 A_\alpha A_\beta \cos(\chi) (d\alpha d\beta) + A_\beta^2 (d\beta)^2 \quad (3.2)$$

avec

$$A_\alpha^2 = \vec{r}_{,\alpha} \cdot \vec{r}_{,\alpha} ; A_\alpha A_\beta \cos(\chi) = \vec{r}_{,\alpha} \cdot \vec{r}_{,\beta} ; A_\beta^2 = \vec{r}_{,\beta} \cdot \vec{r}_{,\beta} \quad (3.3)$$

et  $\chi$  est l'angle entre les deux vecteurs unitaires  $\vec{i}_\alpha$  et  $\vec{i}_\beta$ .

$$\chi = \cos^{-1}(\vec{i}_\alpha \cdot \vec{i}_\beta) \quad (3.4)$$

Les quantités  $A_\alpha$  et  $A_\beta$  sont les constantes de Lamé [Ventsel et Krauthammer (2001)]. A partir de (3.3) nous pouvons écrire

$$A_\alpha = |\vec{r}_{,\alpha}| \text{ et } A_\beta = |\vec{r}_{,\beta}| \quad (3.5)$$

Ces constantes sont liées aux longueurs des arcs associés (Fig. 3.1) par

$$ds_\alpha = A_\alpha d\alpha \text{ et } ds_\beta = A_\beta d\beta \quad (3.6)$$

Les paramètres de Lamé donnent l'accroissement de la longueur de l'élément d'arc associé à l'accroissement de la coordonnée.

L'élément d'aire de la surface est

$$dS = ds_\alpha ds_\beta = A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \quad (3.7)$$

Le côté droit de la relation (3.2) représente la première forme fondamentale de la surface [Ventsel et Krauthammer (2001) ; Leissa (1973)].

Dans le cas où les lignes de coordonnées sont orthogonales, alors

$$\vec{r}_{,\alpha} \cdot \vec{r}_{,\beta} = 0 \quad (3.8)$$

et la première forme fondamentale se réduit à

$$ds^2 = A_\alpha^2 (d\alpha)^2 + A_\beta^2 (d\beta)^2 \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Deuxième forme quadratique

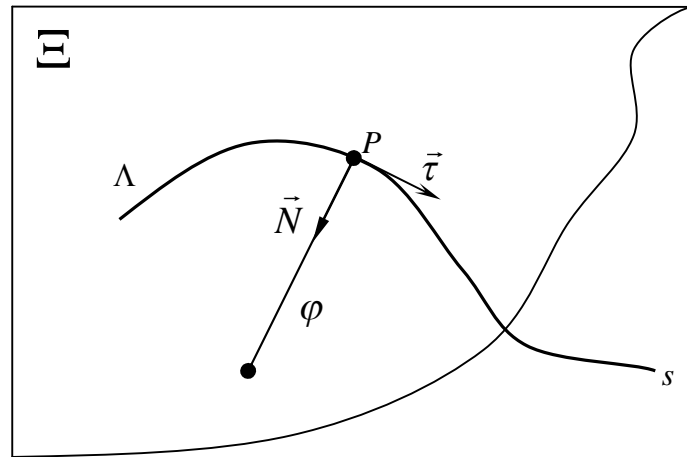
La première forme fondamentale de la surface concerne généralement ; la mesure des distances entre deux points le long d'un arc sur une surface ; aux secteurs de surface et aux angles entre deux courbes quelconques passant par un point. Ainsi, la première forme quadratique définit la géométrie intrinsèque de la surface. Cependant, elle n'implique pas la forme spécifique de la surface. Donc, la représentation de la surface par les constantes de Lamé n'est pas suffisante et la première forme fondamentale doit être complétée avec une autre forme pour décrire la géométrie intrinsèque et extrinsèque d'une surface. En effet ce problème est associé pour trouver une courbure à un point arbitraire de la surface.

Les vecteurs unitaires tangents aux coordonnées surfaciques sont donnés par

$$\vec{i}_\alpha = \frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A_\alpha} ; \vec{i}_\beta = \frac{\vec{r}_{,\beta}}{A_\beta} \quad (3.10)$$

$$\vec{i}_n = \frac{\vec{i}_\alpha \times \vec{i}_\beta}{\sin \chi} \quad (3.11)$$

Soit  $\Lambda$  la courbe plane d'abscisse curviligne  $s$  engendrée de l'intersection d'un plan  $\Xi$  de section normale avec la surface  $\Sigma$  (figure 3.2).



**Fig.3.2** Rayon de courbure  $\frac{1}{\varphi}$  d'une courbe  $\Lambda$ .

Au point  $P$  de cette courbe est construit le vecteur tangent  $\vec{\tau}$ ,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_{,\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \vec{r}_{,\beta} \frac{d\beta}{ds} \quad (3.12)$$

La formule de Frenet [Kreyszig (1993)] permet d'exprimer la dérivation du vecteur tangent en fonction de la courbure

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\varphi} \quad (1.13)$$

Dont  $\frac{1}{\varphi}$  est la courbure de la courbe  $\Lambda$  et  $\vec{N}$  la normale à la courbe.

La substitution de (3.12) dans (3.13) donne

$$\frac{\vec{N}}{\varphi} = \vec{r}_{,\alpha\alpha} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + 2\vec{r}_{,\alpha\beta} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right) \left( \frac{d\beta}{ds} \right) + \vec{r}_{,\beta\beta} \left( \frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \vec{r}_{,\alpha} \frac{d^2\alpha}{ds^2} + \vec{r}_{,\beta} \frac{d^2\beta}{ds^2} \quad (3.14)$$

Si  $\phi$  est l'angle entre la normale  $\vec{i}_n$  de la surface et la normale  $\vec{N}$  de la courbe, alors

$$\cos(\phi) = \vec{i}_n \cdot \vec{N} \quad (3.15)$$

Sachant que (  $\vec{i}_n \cdot \vec{r}_{,\alpha} = \vec{i}_n \cdot \vec{r}_{,\beta} = 0$  ), la multiplication des deux côtés de l'équation (3.14) par  $\vec{i}_n$  donne

$$\frac{\cos(\phi)}{\varphi} = \frac{L(d\alpha)^2 + 2M(d\alpha)(d\beta) + N(d\beta)^2}{ds^2} \quad (3.16)$$

avec

$$L = \vec{r}_{,\alpha\alpha} \cdot \vec{i}_n ; M = \vec{r}_{,\alpha\beta} \cdot \vec{i}_n ; N = \vec{r}_{,\beta\beta} \cdot \vec{i}_n \quad (3.17)$$

Le numérateur de l'équation (3.16) est la *seconde forme fondamentale* de la surface et  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sont ses coefficients.

### Remarque

Un procédé paramétrique vectoriel est utilisé ici pour déduire les formes fondamentales d'une surface arbitraire. Les mêmes formes fondamentales peuvent être dérivées en utilisant l'analyse tensorielle appliquée à la géométrie différentielle de surface [Wempner et Talaslidis (2003); Ciarlet (2000); Reddy (2004)].

### 3.2.4 L'équation caractéristique de Gauss

Le vecteur  $\vec{i}_n$  est une normale positive à la surface et  $\vec{N}$  est le vecteur opposé. Donc,  $\phi = \pi$ . En utilisant la première et la seconde forme, l'équation (3.16) s'écrit

$$\frac{1}{R} = \frac{L(d\alpha)^2 + 2M(d\alpha)(d\beta) + N(d\beta)^2}{A_\alpha^2 (d\alpha)^2 + 2 A_\alpha A_\beta \cos(\chi)(d\alpha d\beta) + A_\beta^2 (d\beta)^2} \quad (3.18)$$

En utilisant cette dernière formule, les courbures peuvent être obtenues en posant  $\alpha = \text{const}$  et  $\beta = \text{const}$  respectivement. Ainsi

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\frac{L}{A_\alpha^2} ; \frac{1}{R_\beta} = -\frac{N}{A_\beta^2} \quad (3.19)$$

où  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  sont les rayons de courbure suivant les directions  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement.

En utilisant le symbole de *Christoffel*  $\Gamma_{jk}^i$ , les dérivées secondes du vecteur position s'écrivent

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_{,\alpha\alpha} \\ \vec{r}_{,\alpha\beta} \\ \vec{r}_{,\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & L \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & M \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_\alpha \\ \vec{r}_\beta \\ \vec{i}_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Les coefficients du symbole de Christoffel sont exprimés par [Gol'denveizer (1961)]

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{A_\beta}{A_\alpha^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les dérivées de la base vectorielle sont obtenues en utilisant les relations (3.20) et (3.21) et sachant que  $\vec{i}_n \cdot \vec{i}_n = 1$  [Leissa (1973), Qatu (2004)] :

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_{\alpha,\alpha} \\ \vec{i}_{\beta,\alpha} \\ \vec{i}_{n,\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} & -\frac{A_\alpha}{R_\alpha} \\ \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} & 0 & 0 \\ \frac{A_\alpha}{R_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_\alpha \\ \vec{i}_\beta \\ \vec{i}_n \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_{\alpha,\beta} \\ \vec{i}_{\beta,\beta} \\ \vec{i}_{n,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} & 0 \\ -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} & 0 & -\frac{A_\beta}{R_\beta} \\ 0 & \frac{A_\beta}{R_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_\alpha \\ \vec{i}_\beta \\ \vec{i}_n \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

En outre, les identités suivantes peuvent être établies

$$(\vec{i}_{\alpha,\alpha})_{,\beta} = (\vec{i}_{\alpha,\beta})_{,\alpha} \quad (3.24)$$

$$(\vec{i}_{\beta,\alpha})_{,\beta} = (\vec{i}_{\beta,\beta})_{,\alpha} \quad (3.25)$$

$$(\vec{i}_{n,\alpha})_{,\beta} = (\vec{i}_{n,\beta})_{,\alpha} \quad (3.26)$$

La substitution des équations (3.22) et (3.23) dans (3.24) et (3.25) mène à la relation

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) = -\frac{A_\alpha A_\beta}{K} = -\frac{LN}{A_\alpha A_\beta} \quad (3.27)$$

Cette relation est connue sous le nom de *l'équation caractéristique de Gauss* et  $\frac{1}{K} = \frac{1}{R_\alpha R_\beta}$  est appelée *la courbure Gaussienne* [Kraus (1967)] ou *la courbure totale* [Ciarlet (2000)].

### 3.2.5 Conditions de Codazzi-Mainardi

La substitution des équations (3.22) et (3.23) dans (3.26) donne les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A_\alpha}{R_\alpha} \right) = \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{A_\beta}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) = -\frac{A_\alpha A_\beta}{R_\alpha R_\beta} \quad (3.29)$$

Les relations (3.28) sont connues sous le nom de *Conditions De Codazzi-Mainardi*.

L'équation (3.29) est *l'équation caractéristique de Gauss* [Leissa (1973) ; Kraus (1967)].

En substituant la coordonnée suivant l'épaisseur  $z$ , les conditions de Codazzi-Mainardi (3.28) et (3.29) peuvent être réarrangées pour devenir [Soedel (1986) ; Leissa(1973)]

$$\frac{\partial [A_\beta (1 + z/R_\beta)]}{\partial \alpha} = \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial [A_\alpha (1 + z/R_\alpha)]}{\partial \beta} = \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \quad (3.30)$$

Ces dernières relations (3.30) seront utilisées plus tard pour simplifier les relations déformations-déplacements.

### 3.3 Relations entre le tenseur métrique et les rayons de courbures

Les quantités  $g_{11}, g_{22}, g_{33}, A_\alpha, A_\beta, R_\alpha$  et  $R_\beta$  sont liées par *les équations de Lamb* [Leissa (1973)],

$$g_{11} = \left[ A_\alpha \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \right]^2 \quad (3.31)$$

$$g_{22} = \left[ A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \right]^2 \quad (3.32)$$

$$g_{33} = 1 \quad (3.33)$$

A partir des relations (3.31)-(3.33) et (2.11) nous pouvons déduire que

$$h_1 = A_\alpha \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right), h_2 = A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right), h_3 = 1. \quad (3.34)$$

### 3.4 Relations déformations-déplacements

En utilisant les équations (3.34) et (2.72) nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = & \frac{1}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_2}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)A_\beta(1+z/R_\beta)} \frac{\partial A_\alpha(1+z/R_\alpha)}{\partial \beta} \\ & + \frac{u_3}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial A_\alpha(1+z/R_\alpha)}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.35)$$

En substituant la relation de Codazzi-Mainardi (3.30) dans (3.35) et après quelques simplifications nous obtenons

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_2}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u_3}{R_\alpha} \right) \quad (3.36)$$

D'une manière similaire, nous obtenons les relations suivantes :

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{u_1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R_\beta} \right) \quad (3.37)$$

$$\epsilon_{21} = \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right), \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{u_2}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) \quad (3.38)$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{R_\alpha} \right), \quad \epsilon_{32} = \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{u_2}{R_\beta} \right) \quad (3.39)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \epsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \epsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad (3.40)$$

La substitution des relations (3.36)-(3.40) dans (2.66)-(2.71) donne les relations déformations-déplacements en fonction des coordonnées  $(\alpha, \beta, z)$ .

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_2}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u_3}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \right)^2 \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (3.41)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{u_1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R_\beta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \right)^2 \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right)^2 \quad (3.42)$$

$$\epsilon_{33} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{u_2}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) \\ & + \frac{1}{(1+z/R_\alpha)(1+z/R_\beta)} \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$



$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \frac{1}{A_\alpha} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (3.45)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{u_2}{R_\beta} \right) + \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \frac{1}{A_\beta} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (3.46)$$

Pour la partie non linéaire de ces relations, remarquons que seuls les termes en accord avec la théorie de von Karman [1910] sont retenus. Notons aussi que dans le cas de coques peu profondes les termes  $\frac{u_i}{R_\beta}$  et  $\frac{u_i}{R_\alpha}$  ( $i = 1,2,3$ ) sont négligés [Qatu (2010)].

### 3.5 Expressions des énergies

Les équations du mouvement peuvent être dérivées en calculant les contraintes et les énergies cinétiques stockées dans un élément infinitésimal. L'énergie de déformation produite par les contraintes  $\sigma_{ij}$  peut être exprimée par

$$d E_d = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23}) dV \quad (3.47)$$

L'élément de volume est exprimé par

$$dV = A_\alpha A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\alpha d\beta dz \quad (3.48)$$

Ce qui donne

$$E_d = \frac{1}{2} \int \int \int_{\alpha \beta z} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23}) A_\alpha A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\alpha d\beta dz \quad (3.49)$$

Pour un élément infinitésimal l'énergie cinétique  $E_c$  est

$$d E_c = \frac{1}{2} \rho ( \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 ) dV \quad (3.50)$$

où  $\dot{u}_i$  désignent les dérivées des composantes du déplacement par rapport au temps et  $\rho$  est la masse volumique.

Une intégration sur le volume permet d'écrire

$$E_c = \frac{1}{2} \int \int \int_{\alpha \beta z} \rho ( \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 ) A_\alpha A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\alpha d\beta dz \quad (3.51)$$

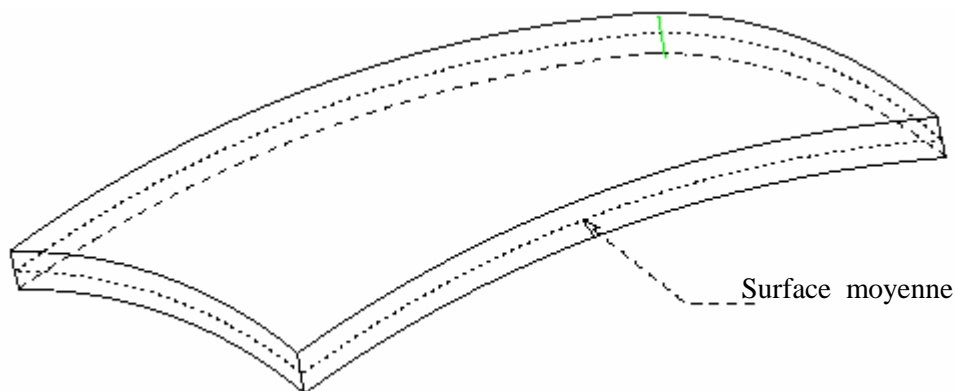
## 4. Théorie des coques modérément épaisses

### 4.1 Introduction

Les théories reposent sur des hypothèses. Dans la majorité des cas, que ce soit en physiques ou en mécanique, ces hypothèses sont faites pour pouvoir modéliser ou pour simplifier le calcul. Dans le cas des théories des coques, Alhazza [2002] et Qatu et al. [2010] ont fait une représentation mathématique de quelques théories afin de voir l'influence des hypothèses sur les équations fondamentales. Ce chapitre se focalisera sur la théorie utilisée dans cette thèse.

### 4.2 Théories des coques

Une coque occupe dans l'espace un volume compris entre deux surfaces courbées de sorte que la distance entre ces deux surfaces, appelée épaisseur et dénotée  $h$ , soit petite par rapport aux autres dimensions géométriques. Elle admet un plan de symétrie passant par le milieu de l'épaisseur appelé feuillet moyen ou surface moyenne (figure 4.1).



**Fig. 4.1** : Surface moyenne d'une coque.

A partir de cette particularité géométrique, nous réussissons à réduire le modèle tridimensionnel à de nombreux modèles bidimensionnels dont les différences proviennent principalement de la cinématique simplifiée utilisée dans l'épaisseur.

### 4.3 Hypothèses de la théorie de Reissner-Mindlin

Dans la théorie des coques, quatre hypothèses sont généralement admises [Qatu et al. (2010)] :

- **Hypothèse 1** : la coque est mince, donc l'épaisseur  $h$  de la coque est petite devant les autres dimensions,  $\frac{h}{R_\alpha}$  et  $\frac{h}{R_\beta} \ll 1$ .
- **Hypothèse 2** : les déplacements et les déformations sont petits.
- **Hypothèse 3** : les contraintes normales au feuillet moyen de la coque sont négligeables par rapport aux contraintes existant dans le plan moyen de la coque,  $\sigma_{zz} = 0$ .
- **Hypothèse 4** : un plan orthogonal au feuillet moyen avant déformation l'est encore après déformation.

Les Hypothèses 1-2-3-4 conduisent aux coques dites minces, ou de *Kirchhoff-Love*.

Les Hypothèses 1-2-3 conduisent à la théorie des coques d'épaisseur modérée dite *théorie des coques modérément épaisses* [Reddy (1984), Ribeiro (2003), Sheikh et al.(2001)], ou *théorie des coques épaisses* [Mizusawa (1996); Guo et Chu (2001)] tout court. Cette théorie apporte alors des résultats plus intéressants car le cisaillement transverse est pris en compte.

Remarquons que cette théorie est connue sous plusieurs autres appellations :

- théorie de Hencky [Craveur (1997)]
- théorie de premier ordre [Timarci et Soldatos (1995); Zenkour (2001)]
- théorie de Timoshenko-Mindlin [Plotnikova (2002)]
- théorie de Reissner- Mindlin [Ribeiro (2003)] ou de Reissner [Kabir (2002)]
- théorie de Naghdi et Berry [Alhazza (2002)].

Bien qu'il existe une différence dans le schéma de dérivation des équations découlant de ces théories, elles s'inscrivent toutes dans la même classe de théories dites théories de coques épaisses ou modérément épaisses [Alhazza (2002); Qatu et al. (2010)].

Nous utiliserons l'appellation « théorie de Reissner-Mindlin », dans la suite de cette étude.

#### 4.4 Champs de déplacements

Les trois premières hypothèses de Love sont retenues et supposons en plus de cela que les déplacements suivants les coordonnées surfaciques  $\alpha$  et  $\beta$  changent linéairement en fonction de l'épaisseur  $z$ , alors que les déplacements dans la direction de  $z$  sont indépendants de l'épaisseur de la coque. Ces hypothèses sont traduites par le système

$$\begin{cases} u_1(\alpha, \beta, z) = u(\alpha, \beta) + z\theta_\beta(\alpha, \beta) \\ u_2(\alpha, \beta, z) = v(\alpha, \beta) - z\theta_\alpha(\alpha, \beta) \\ u_3(\alpha, \beta, z) = w(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$  sont les rotations de la normale suivant les directions  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement,  $u$  et  $v$  sont les déplacements membranaires et  $w$  est le déplacement flexionnel de la surface moyenne de la coque.

#### 4.5 Relations déformations-déplacements

Dans la théorie de Reissner-Mindlin, les termes  $\frac{z}{R_\beta}$  et  $\frac{z}{R_\alpha}$  sont négligeables [Reissner (1941) ; Naghdi et Berry (1964), Alhazza (2002)]. En plus, si la constante de Lamé  $A_\alpha$  ne dépend pas de  $\beta$  et  $A_\beta$  ne dépend pas de  $\alpha$ , les relations déformations-déplacements (3.41)-(3.46) se réduisent à

$$\varepsilon_{11} = \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{22} = \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{u_3}{R_\beta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right)^2 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{33} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \quad (4.4)$$

$$\gamma_{12} = \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right) \quad (4.5)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A_\alpha} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A_\beta} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

La substitution du champ de déplacements (4.1) dans les relations (4.2)-(4.7) donne

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R_\alpha} + z \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} - z \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u_3}{R_\beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (4.10)$$

$$\gamma_{12} = \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + z \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \quad (4.11)$$

$$\gamma_{13} = \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \theta_\beta \quad (4.12)$$

$$\gamma_{23} = \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \theta_\alpha \quad (4.13)$$

#### 4.6 Relations contraintes-déformations

Dans le cas des coques épaisses à double courbure, les hypothèses 1-2-3 citées précédemment sont retenues en introduisant un facteur  $k$  de correction de cisaillement transverse.

Les relations contraintes-déformations sont exprimées par

$$\sigma = \mathbf{C} \varepsilon \quad (4.14)$$

où  $\varepsilon$  est le tenseur des déformations donné par (4.8)-(4.13) et  $\sigma$  est le tenseur des contraintes représenté vectoriellement par

$$\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T \quad (4.15)$$

et  $\mathbf{C}$  est la matrice des constantes élastiques donnée par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ & sym & & kQ_{44} & 0 \\ & & & & kQ_{55} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

où  $k$  désigne le facteur de correction du cisaillement transverse et  $Q_{ij}$  sont les constantes élastiques à déterminer expérimentalement et dépendantes de la nature de chaque matériau.

#### 4.7 Facteur de correction du cisaillement transverse $k$

La constante  $k$  est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement constantes sur l'épaisseur dans la théorie de Mindlin [1951]. Mindlin trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson  $\nu$  et variant de 0.76 pour  $\nu = 0$  à 0.91 pour  $\nu = 0.5$  dans le cas d'un matériau isotrope. En suivant cette observation et en choisissant à égalité la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d'une plaque isotrope infinie déterminée par la théorie tridimensionnelle d'élasticité et la théorie de Mindlin, le facteur  $k$  est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3 de sorte que  $k = 0.86$  si  $\nu = 0.300$  et  $k = \pi^2 / 12$  si  $\nu = 0.176$ .

Reissner [1945 ; 1952] suppose une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, pour obtenir la valeur de  $k = 5/6$ . Wittrick [1987] propose une approximation de  $k = \frac{5}{6-\nu}$  dans le cas d'une plaque simplement supportée. A ce jour, le facteur  $k$  est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger de son influence sur les résultats. Plus de discussion sur ce sujet est entamée par Liew et al. [1998].

## 4.8 Energie cinétique

En injectant (4.1) dans l'expression de l'énergie cinétique (3.51), nous obtenons

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int \int \int_{\alpha \beta z} \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + z^2 (\dot{\theta}_\alpha^2 + \dot{\theta}_\beta^2) + 2z (\dot{\theta}_\beta - \dot{\theta}_\alpha) \right) A_\alpha A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\alpha d\beta dz \quad (4.17)$$

Dans la théorie de Reissner-Mindlin les termes  $\frac{z}{R_\beta}$  et  $\frac{z}{R_\alpha}$  sont négligeables et l'intégration suivant l'épaisseur entre  $-\frac{h}{2}$  et  $\frac{h}{2}$  de l'expression précédente donne

$$E_c = \frac{1}{2} \rho h \int \int_{\alpha \beta} \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\theta}_\alpha^2 + \dot{\theta}_\beta^2) \right) A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \quad (4.18)$$

## 4.9 Energie de déformation

En négligeant les termes  $\frac{z}{R_\beta}$  et  $\frac{z}{R_\alpha}$  dans (3.49), l'expression de l'énergie de déformation se réduit à

$$E_d = \int \int \int_{\alpha \beta z} \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23}) A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta dz \quad (4.19)$$

Après une intégration suivant l'épaisseur et en tenant compte des relations (4.8)-(4.16), l'expression de l'énergie de déformation s'écrit

$$E_d = \int \int_{\alpha \beta} \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{2hQ_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{2hQ_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{2hQ_{11}}{A_\alpha R_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) w + \frac{2hQ_{12}}{A_\alpha R_\beta} w \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2hQ_{12}}{A_\beta R_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) w + \frac{2hQ_{11}}{A_\beta R_\beta} w \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{kQ_{66}h}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{R_\beta^2} w^2 + \frac{hQ_{11}}{R_\beta^2} w^2 + \frac{kQ_{66}h}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{2hQ_{12}}{R_\alpha R_\beta} w^2 \\
& - \frac{2kQ_{66}h}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha - \frac{2kQ_{66}}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha + \frac{2kQ_{66}h}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta + \frac{2kQ_{66}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta \\
& + kQ_{66}h(\theta_\alpha)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 + kQ_{66}(\theta_\alpha)^2 \\
& + kQ_{66}h(\theta_\beta)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \\
& + \frac{2Q_{66}h}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{66}h}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\beta^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \\
& + \frac{h}{4} \frac{Q_{11}}{A_\beta^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^4 + \frac{h}{4} \frac{Q_{11}}{A_\alpha^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^4 \\
& + \frac{h}{2} \frac{Q_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{66}h}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 ] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Pour des raisons de dérivation, l'expression de cette énergie sera écrite sous la forme

$$E_d = \bar{U} + \hat{U} + U + \hat{U} + \check{U} + \tilde{U} \quad (4.21)$$

où  $\bar{U}$ ,  $\hat{U}$  et  $U$  sont des énergies de déformations linéaires et  $\hat{U}$ ,  $\check{U}$  et  $\tilde{U}$  sont des énergies de déformations non linéaires.

L'énergie des déformations linéaires membranaires,  $\bar{U}$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\bar{U} = \int_{\alpha} \int_{\beta} [ & \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 \\
& + \frac{2hQ_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{2hQ_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) ] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \quad (4.22).
\end{aligned}$$

L'énergie due au couplage des déformations linéaires membranaires et flexionnelles,  $\hat{U}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{U} = \iint_{\alpha\beta} & \left[ \frac{2hQ_{11}}{A_\alpha R_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_w + \frac{2hQ_{12}}{A_\alpha R_\beta} w \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2hQ_{12}}{A_\beta R_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)_w + \frac{2hQ_{11}}{A_\beta R_\beta} w \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \right] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.23)$$

L'énergie due aux déformations linéaires flexionnelles et rotationnelles et au couplage entre les deux.  $U$  est donnée par

$$\begin{aligned} U = \iint_{\alpha\beta} & \left[ \frac{kQ_{66}h}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{R_\beta^2} w^2 + \frac{hQ_{11}}{R_\beta^2} w^2 + \frac{kQ_{66}h}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{2hQ_{12}}{R_\alpha R_\beta} w^2 \right. \\ & - \frac{2kQ_{66}h}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha - \frac{2kQ_{66}}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha \\ & \left. + \frac{2kQ_{66}h}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta + \frac{2kQ_{66}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta \right. \\ & + kQ_{66}h(\theta_\alpha)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 + kQ_{66}(\theta_\alpha)^2 \\ & \left. + kQ_{66}h(\theta_\beta)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right)^2 \right] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.24)$$

L'énergie due au couplage des déformations non linéaires flexionnelles et membranaires,  $\hat{U}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{U} = \iint_{\alpha\beta} & \left[ \frac{hQ_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{2Q_{66}h}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{66}h}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.25)$$

L'énergie des déformations non linéaires flexionnelles d'ordre trois,  $\tilde{U}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{U} = \iint_{\alpha\beta} & \left[ \frac{hQ_{12}}{A_\alpha^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\beta^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'énergie des déformations non linéaires flexionnelles d'ordre quatre,  $\tilde{\tilde{U}}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{U}} = \iint_{\alpha\beta} & \left[ \frac{h}{4} \frac{Q_{11}}{A_\beta^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^4 + \frac{h}{4} \frac{Q_{11}}{A_\alpha^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^4 + \frac{h}{2} \frac{Q_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{Q_{66}h}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.27)$$



## 5. Formulation par la version- $p$ de la méthode des éléments finis

### 5.1 Introduction

Une fois que les différentes relations ainsi que les expressions des énergies sont établies, l'étape principale d'une méthode d'éléments finis consiste à déterminer les matrices de masse et de rigidité en choisissant des fonctions de forme qui admettent les conditions de convergence. Ces fonctions de forme sont construites à partir de fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés telles que les polynômes de *Legendre*, polynômes d'*Hermite*, ou à partir des *fonctions trigonométriques*. Pour la modélisation cinématique de la coque à double courbure, de nouvelles fonctions de forme développées par Houmat [2004] seront exprimées en fonction des polynômes de *Legendre déplacés (shifted)*.

### 5.2 Sélection des fonctions de forme

Les fonctions de forme ou les fonctions d'interpolation sont les fonctions qui relient les déplacements généralisés aux déplacements d'un point quelconque de l'élément. En effet, elles assurent le passage du problème continu au problème discret. L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à représenter son champ de déplacement interne par des polynômes.

#### 5.2.1 Espaces polynomiaux

Pour un domaine carré  $\Pi = \{0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ , il existe trois espaces polynomiaux bidimensionnels fréquemment utilisés [Côté et Charron (2001)].

##### 5.2.1.1 Espace ou famille Serendipity $S^p$ (II)

Il correspond à l'ensemble des monômes  $\xi^i \eta^j$  avec  $i, j = 0, 1, \dots, p$  et  $i + j = 0, 1, \dots, p$ . y compris le monôme  $\xi \eta$  si  $p = 1$  et les monômes  $\xi^p \eta$  et  $\xi \eta^p$  si  $p \geq 2$ . En utilisant le triangle de pascal et pour un élément hiérarchique quadrangulaire cet espace polynomial peut être représenté comme suit:

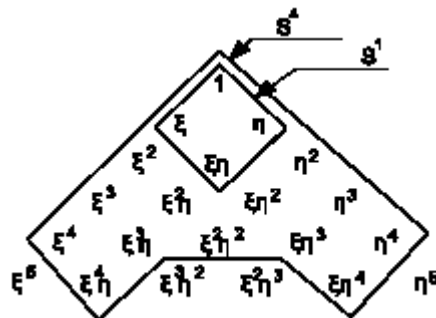


Fig. 5.1 : Famille de Serendipity.

### 5.2.1.2 Espace ou famille de Lagrange $S^{p,q}$ (II)

Il correspond à l'ensemble des monômes  $\xi^i \eta^j$  avec  $i = 0, 1, \dots, p$  et  $j = 0, 1, \dots, q$ . Cet espace polynomial peut être représenté comme suit:

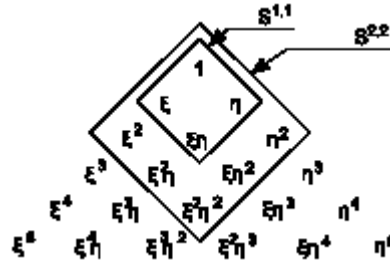


Fig. 5.2 : Famille de Lagrange.

### 5.2.1.3 Espace ou famille mixte $\tilde{S}^{p,q}$

Il est composé de l'ensemble des monômes communs aux deux espaces polynomiaux précédents; formellement  $\tilde{S}^{p,q} = S^p \cap S^{p,q}$ . Côté et Charron [2001] ont mené une comparaison entre la famille *Lagrange* et *Serendipity* dans le cas des vibrations des plaques en utilisant la version- $p$  de la MEF. Ils ont conclu une meilleure convergence de la famille *Lagrange* par rapport à la famille *serendipity*, et ils ont développé une autre famille polynomiale qui dérive de la famille *serendipity* appelée famille *serendipity- enrichie*.

Pour décrire la géométrie de la coque à double courbure, les fonctions de forme hiérarchiques sont déterminées dans l'espace de *Lagrange*.

### 5.2.2 Polynômes de Legendre-déplacés

Les fonctions de forme utilisées sont construites à partir des polynômes de *Legendre déplacés* [Houmat (2004)]. Contrairement aux polynômes de Legendre définis dans  $[-1, 1]$ , les polynômes de Legendre déplacés sont définis dans  $[0, 1]$ . Leur forme récurrente est la suivante :

$$\begin{cases} P_0^*(\xi) = 1 \\ P_1^*(\xi) = 2\xi - 1 \\ P_{i+1}^*(\xi) = \frac{1}{(i+1)} [(-2i-1 + (4i+2)\xi)P_i^*(\xi) - iP_{i-1}^*(\xi)] \quad , i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.1)$$

### 5.2.3 Fonctions de forme hiérarchiques

Pour un problème  $C^0$  continu et pour l'élément unidimensionnel, les fonctions de forme déterminées à partir des polynômes de Legendre déplacés sont:

- Fonctions de forme nodales ou externes :

$$\begin{cases} g_1(\xi) = 1 - \xi \\ g_2(\xi) = \xi \end{cases} \quad (5.2)$$

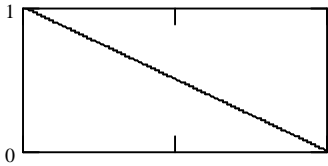
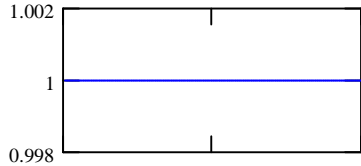
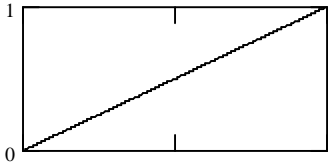
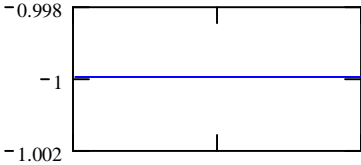
- Fonctions de forme internes :

$$g_{i+2}(\xi) = \int_0^\xi P_i^*(\alpha) d\alpha \quad \text{pour } i \geq 1 \quad (5.3)$$

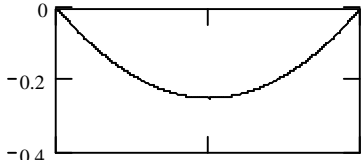
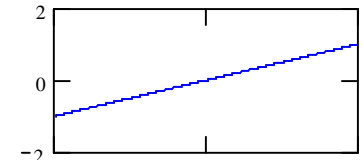
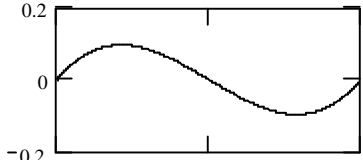
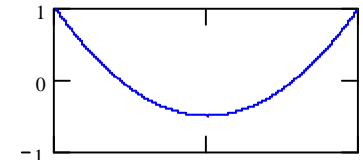
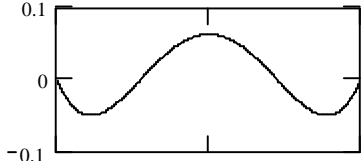
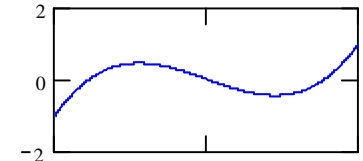
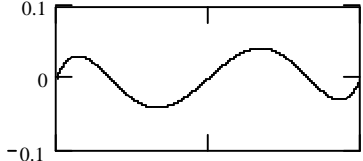
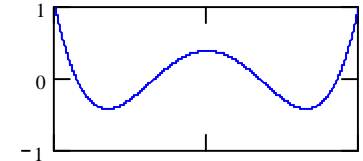
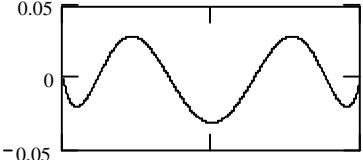
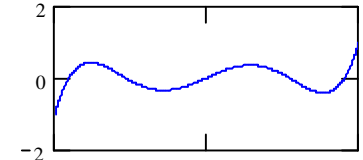
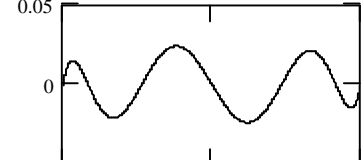
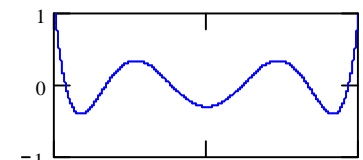
Les fonctions de forme externes  $g_1(\xi)$ ,  $g_2(\xi)$  permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les fonctions de forme internes  $g_{i+2}(\xi)$  permettent d'enrichir le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément.

Les tableaux (5.1) et (5.2) montrent les diagrammes des fonctions de forme hiérarchiques et leurs dérivées premières.

**Tableau 5.1** Représentation des fonctions de forme nodales et de leurs dérivées premières.

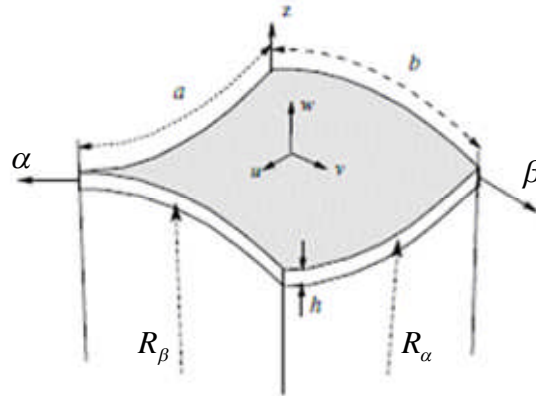
<b>i</b>	<b><math>g_i(\xi)</math></b>	<b><math>g'_i(\xi)</math></b>
1		
2		

**Tableau 5.2** Représentation des six premières fonctions de forme internes et leurs dérivées premières.

<b>i</b>	<b><math>g_i(\xi)</math></b>	<b><math>g_i'(\xi)</math></b>
3		
4		
5		
6		
7		
8		

### 5.3 Modélisation du panneau à double courbure

Considérons un élément d'une coque de géométrie arbitraire (Figure 5.3).  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  sont les deux rayons de courbure,  $a$  et  $b$  sont les longueurs mesurées sur les cotés, et  $h$  est l'épaisseur.



**Fig. 5.3 :** Panneau de coque à géométrie arbitraire et système des coordonnées.

#### 5.3.1 Carreaux de Coons

Au début des années 60, Coons [1964] a présenté une formulation mathématique puissante pour représenter les surfaces transfinies. Cette formulation a par la suite été améliorée [Coons (1987)], et est apparue comme une méthode très générale pour la représentation de surfaces. En effet, outre les surfaces complexes, bon nombre de surfaces simples peuvent être considérées comme des cas particuliers des carreaux de Coons (cylindre, surface réglée, surface de révolution, ...).

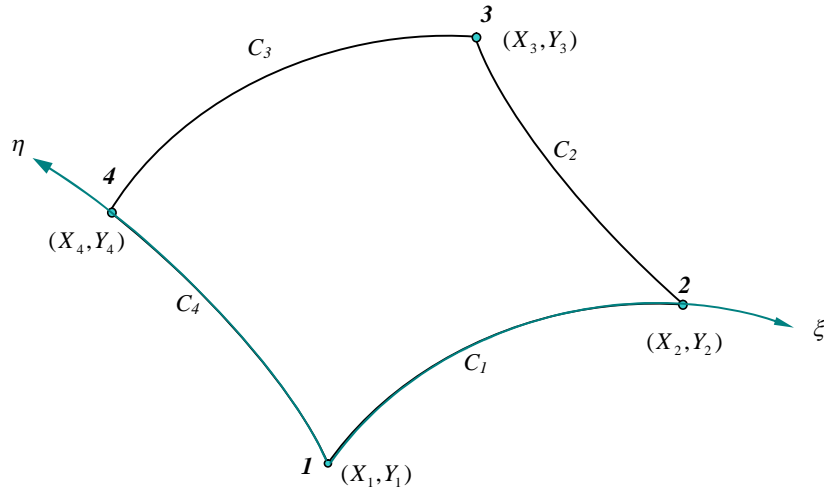
#### 5.3.2 Définition de l'élément quadrangulaire

L'élément utilisé pour la modélisation 2D de la coque à double courbure est un quadrangle à quatre courbes. Les coordonnées curvilignes d'un point peuvent être calculées à partir de ses coordonnées intrinsèques selon une formule de *mapping* [Gordon (1971) ; Kirfilyfalvi et Szabo. (1997)]. Un quadrangle est constitué d'un domaine limité par quatre courbes  $(C_1(\xi), C_2(\eta), C_3(\xi), C_4(\eta))$  (figure 5.4). Il peut être défini par ses quatre nœuds-sommets dont les coordonnées sont désignées par  $((X_i, Y_i) (i = 1, 2, 3, 4)$  qui sont des points de passage des quatre courbes. Deux nœuds-sommets consécutifs sont reliés par une courbe.

Les côtés courbés peuvent être exprimés sous la forme paramétrique suivante :

$$\alpha = \alpha_i(\xi), \beta = \beta_i(\xi), 0 \leq \xi \leq 1, \quad (i = 1, 3) \quad (5.4)$$

$$\alpha = \alpha_j(\eta), \beta = \beta_j(\eta), 0 \leq \eta \leq 1, \quad (j = 2, 4) \quad (5.5)$$



**Fig. 5.4** : Élément quadrangulaire.

Les coordonnées curvilignes adimensionnelles  $(\xi, \eta)$  d'un point sont évaluées via les *fonctions de transformation* du carreau transfini, appelées aussi *fonctions de mélange* [Gordon et Hall (1973)] :

$$\alpha(\xi, \eta) = -X_1(1-\eta)(1-\xi) - X_2(1-\eta)\xi - X_3\xi\eta - X_4(1-\xi)\eta + (1-\eta)\alpha_1(\xi) + \alpha_2(\eta)\xi + \alpha_3(\xi)\eta + \alpha_4(\eta)(1-\xi) \quad (5.6)$$

$$\beta(\xi, \eta) = -Y_1(1-\eta)(1-\xi) - Y_2(1-\eta)\xi - Y_3\xi\eta - Y_4(1-\xi)\eta + (1-\eta)\beta_1(\xi) + \beta_2(\eta)\xi + \beta_3(\xi)\eta + \beta_4(\eta)(1-\xi) \quad (5.7)$$

Le passage entre les deux systèmes de coordonnées est assuré par la relation différentielle

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice Jacobienne, donnée par

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} & \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} & \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

La matrice Jacobienne est unique et indépendante du degré d'approximation de l'élément.

Les termes de la matrice  $\mathbf{J}$  sont :

$$J_{1,1}(\xi, \eta) = (1-\eta) \frac{d\alpha_1}{d\xi} + \alpha_2 + \eta \frac{d\alpha_3}{d\xi} - \alpha_4 + (1-\eta)X_1 - (1-\eta)X_2 - \eta X_3 + \eta X_4 \quad (5.9)$$

$$J_{1,2}(\xi, \eta) = (1-\eta) \frac{d\beta_1}{d\xi} + \beta_2 + \eta \frac{d\beta_3}{d\xi} - \beta_4 + (1-\eta)Y_1 - (1-\eta)Y_2 - \eta Y_3 + \eta Y_4 \quad (5.10)$$

$$J_{2,1}(\xi, \eta) = -\alpha_1 + \xi \frac{d\alpha_2}{d\eta} + \alpha_3 + (1-\xi) \frac{d\alpha_4}{d\eta} + (1-\xi)X_1 + \xi X_2 - \xi X_3 - (1-\xi)X_4 \quad (5.11)$$

$$J_{2,2}(\xi, \eta) = -\beta_1 + \xi \frac{d\beta_2}{d\eta} + \beta_3 + (1-\xi) \frac{d\beta_4}{d\eta} + (1-\xi)Y_1 + \xi Y_2 - \xi Y_3 - (1-\xi)Y_4 \quad (5.12)$$

A partir de l'équation (5.7), la relation inverse est déduite

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

où

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{2,2} & -J_{1,2} \\ -J_{2,1} & J_{1,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} & -\frac{\partial \beta}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Le déterminant de  $\mathbf{J}$  est donné par

$$|\mathbf{J}| = J_{1,1}J_{2,2} - J_{1,2}J_{2,1} \quad (5.15)$$

Pour transformer les variables et le domaine sur lequel l'intégration sera effectuée, nous utilisons une procédure classique faisant intervenir le déterminant  $|\mathbf{J}|$  [Murnaghan (1951) ; zienkiewicz(1979)] :

$$d\alpha d\beta = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.16)$$

En utilisant la version- $p$  de la méthode des éléments finis, les déplacements et les rotations dans un élément seront exprimés par  $q$

$$u = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{5\varphi-4}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (5.17)$$

$$v = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{5\varphi-3}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (5.18)$$

$$w = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{5\varphi-2}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (5.19)$$

$$\theta_\alpha = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{5\varphi-1}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (5.20)$$

$$\theta_\beta = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{\theta_{5\varphi}}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (5.21)$$

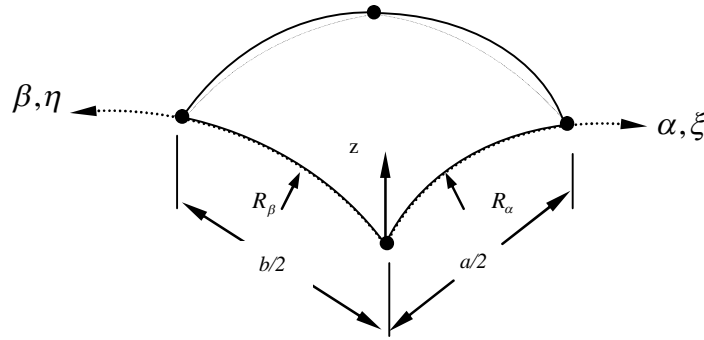
où  $p$  est le degré du polynôme d'interpolation et

$$\varphi = l + (k - 1)(p + 1) \quad (5.22)$$

$q_{\theta_{5\varphi-4}}(t)$  et  $q_{\theta_{5\varphi-3}}(t)$  sont les deux vecteurs des déplacements généralisés relatifs aux deux déplacements membranaires  $u$  et  $v$ , respectivement, tandis que  $q_{\theta_{5\varphi-2}}(t)$ ,  $q_{\theta_{5\varphi-1}}(t)$  et  $q_{\theta_{5\varphi}}(t)$  sont les vecteurs des déplacements généralisés relatifs au déplacement flexionnel  $w$  et aux deux rotations  $\theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$ , respectivement.

#### 5.4 Passage des coordonnées globales aux coordonnées locales

Les coordonnées adimensionnelles  $(\xi, \eta, z)$  et les coordonnées globales  $(\alpha, \beta, z)$  (figure 5.5) sont reliées par la relation de passage (5.13) avec  $(0 \leq \xi; \eta \leq 1)$



**Fig. 5.5** : Coordonnées globales et coordonnées locales.

En injectant la relation (5.16) dans les expressions des énergies (4.22)-(4.27), nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{U} = \int_0^1 \int_0^1 [ & \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 \\ & + \frac{2hQ_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{2hQ_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) ] A_\alpha A_\beta |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \hat{U} = \int_0^1 \int_0^1 [ & \frac{2hQ_{11}}{A_\alpha R_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) w + \frac{2hQ_{12}}{A_\alpha R_\beta} w \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{2hQ_{12}}{A_\beta R_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) w + \frac{2hQ_{11}}{A_\beta R_\beta} w \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) ] A_\alpha A_\beta |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.24)$$



$$\begin{aligned}
U = \int_0^1 \int_0^1 [ & \frac{kQ_{66}h}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{R_\beta^2} w^2 + \frac{hQ_{11}}{R_\beta^2} w^2 + \frac{kQ_{66}h}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{2hQ_{12}}{R_\alpha R_\beta} w^2 \\
& - \frac{2kQ_{66}h}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha - \frac{2kQ_{66}}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha \\
& + \frac{2kQ_{66}h}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta + \frac{2kQ_{66}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta \\
& + kQ_{66}h(\theta_\alpha)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 + kQ_{66}(\theta_\alpha)^2 \\
& + kQ_{66}h(\theta_\beta)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{Q_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right)^2 ] A_\alpha A_\beta |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U} = \int_0^1 \int_0^1 [ & \frac{hQ_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \\
& + \frac{2Q_{66}h}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{66}h}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) ] A_\alpha A_\beta |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U} = \int_0^1 \int_0^1 [ & \frac{hQ_{12}}{A_\alpha^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{hQ_{12}}{A_\beta^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{hQ_{11}}{A_\alpha^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{hQ_{11}}{A_\beta^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 ] A_\alpha A_\beta |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U} = \int_0^1 \int_0^1 [ & \frac{h}{4} \frac{Q_{11}}{A_\beta^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^4 + \frac{h}{4} \frac{Q_{11}}{A_\alpha^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^4 + \frac{h}{2} \frac{Q_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{Q_{66}h}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 ] A_\alpha A_\beta |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.28)
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left( J_{2,2} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{1,2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left( J_{1,1} \frac{\partial}{\partial \eta} - J_{2,1} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (5.30)$$

## 5.5 Equations de mouvement

Les équations de *Lagrange* permettent d'obtenir les équations du mouvement de la coque. Soit  $L$  la fonction de Lagrange définie à partir de l'énergie cinétique  $E_c$  et de l'énergie potentielle  $E_p$  alors :

$$L = E_c - E_p \quad (5.31)$$

où  $L$  est une fonction des coordonnées généralisées  $q$ , des vitesses généralisées  $\dot{q}$  et du temps  $t$ .

La fonctionnelle intégrale de la fonction de Lagrange entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ , appelée action est définie par:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (5.32)$$

qui doit être extrémale si  $\delta H = 0$  (théorème de *Hamilton* ou théorème de moindre action) [Dare (1967)]. Le calcul d'extrémalisation est réalisé en utilisant les équations d'Euler appliquées à la fonction de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial Ec}{\partial q_i} + \frac{\partial Ed}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.33)$$

Du moment que l'énergie potentielle étant la somme de l'énergie de déformation  $E_d$  et du potentiel des forces surfaciques et volumiques supposés nulles et en tenant compte de l'équation (4.21) l'équation de mouvement s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial(\bar{U})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\hat{U})}{\partial q_i} + \frac{\partial(U)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\hat{U})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\check{U})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\tilde{U})}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.34)$$

Sous forme matricielle,

$$\mathcal{M} \ddot{q}_i + \bar{\mathcal{K}} q_i + \hat{\mathcal{K}} q_i + \mathcal{K} q_i + \hat{\mathcal{K}} q_i + \check{\mathcal{K}} q_i + \tilde{\mathcal{K}} q_i = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.35)$$

où

$\ddot{q}_i$  est le vecteur des accélérations généralisées.

$\mathcal{M}$  est la matrice masse.

$\bar{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{K}}, \mathcal{K}, \check{\mathcal{K}}, \tilde{\mathcal{K}}$  sont les matrices de rigidité linéaires et non linéaires.

## 5.6 Passage au système matriciel condensé

Dans cette partie de la formulation, nous passons d'un système de cinq coordonnées généralisées à un système condensé à trois coordonnées généralisées. L'emploi de la méthode *d'équilibrage harmonique* [Evensen et Olson (1967; 1968); Nayfeh et Mook (1979); Mickens (1984)] avec une technique de condensation permettront le passage du domaine temporaire au domaine fréquentiel. En plus, la taille des matrices sera considérablement réduite d'où le gain important en temps de calcul.

Comme première étape de ce passage, les vecteurs des coordonnées généralisées  $q$  et des vitesses généralisées  $\dot{q}$  seront décomposés en deux vecteurs:

$$q = \begin{bmatrix} \bar{q}_\varphi \\ \mathbf{q}_\varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \bar{\dot{q}}_\varphi \\ \dot{\mathbf{q}}_\varphi \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

où

$\bar{q}$  est le vecteur des deux premières coordonnées généralisées membranaires  $u$  et  $v$ .

$\mathbf{q}$  est le vecteur des trois coordonnées généralisées  $w, \theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$ .

$\bar{\dot{q}}$  est le vecteur des deux premières vitesses généralisées membranaires  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$ .

$\dot{\mathbf{q}}$  est le vecteur des trois vitesses généralisées  $\dot{w}, \dot{\theta}_\alpha$  et  $\dot{\theta}_\beta$ .

## 5.7 Dérivation des matrices

La substitution de (5.36) dans le système matriciel (5.35) engendre les deux sous systèmes suivants :

$$\bar{\mathbf{M}}_{\phi,\varphi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{q}}_\varphi}{dt^2} + \bar{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} \bar{\mathbf{q}}_\varphi + [\hat{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} + \hat{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi}] \mathbf{q}_\varphi = \mathbf{0} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{M}_{\phi,\varphi} \frac{d^2 \mathbf{q}_\varphi}{dt^2} + [\mathbf{K}_{\phi,\varphi} + \bar{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} + \tilde{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi}] \mathbf{q}_\varphi + [\hat{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} + 2\hat{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi}] \bar{\mathbf{q}}_\varphi = \mathbf{0} \quad (5.38).$$

où

$$\bar{\mathbf{M}}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{2\phi-1,2\varphi-2} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{2\phi,2\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{M}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} M_{3\phi-2,3\varphi-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\phi-1,3\varphi-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\phi,3\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{2\phi-1,2\varphi-1} & \bar{K}_{2\phi-1,2\varphi} \\ \bar{K}_{2\phi,2\varphi-1} & \bar{K}_{2\phi,2\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{K}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} K_{3\phi-2,3\varphi-2} & K_{3\phi-2,3\varphi-1} & K_{3\phi-2,3\varphi} \\ K_{3\phi-1,3\varphi-2} & K_{3\phi-1,3\varphi-1} & K_{3\phi-1,3\varphi} \\ K_{3\phi,3\varphi-2} & K_{3\phi,3\varphi-1} & K_{3\phi,3\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{2\phi-1,3\varphi-2} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{2\phi,3\varphi-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{2\phi-1,3\varphi-2} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{2\phi,3\varphi-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\phi,\phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{3\phi-2,3\phi-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\check{\mathbf{K}}_{\phi,\phi} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{K}}_{3\phi-2,3\phi-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{\phi} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_{2\phi-1} \\ \bar{q}_{2\phi} \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{q}_{\phi} = \begin{Bmatrix} q_{3\phi-2} \\ q_{3\phi-1} \\ q_{3\phi} \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

$$\phi = j + (i-1)(p+1) \quad (i, j = 1, 2, \dots, p+1) \quad (5.49)$$

Lorsque le matériau est élastique linéaire et isotrope, et pour les éléments finis de coque obtenus par dégénérescence d'un élément tridimensionnel, les constantes élastiques dans (4.16) ont pour expression [Zienkiewicz. et Taylor (2000); Ribeiro (2003); Gmur (1997)]

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad Q_{33} = Q_{44} = Q_{55} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.50)$$

où  $E$  et  $\nu$  dénotent respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson.

En tenant compte de (5.50) les coefficients non nuls des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}$ ,  $\check{\mathbf{K}}$ ,  $\check{\mathbf{K}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  seront obtenus. Les expressions de ces coefficients sont données dans l'annexe 1.

En appliquons les conditions aux limites aux systèmes (5.37)-(5.38) en éliminant les lignes et colonnes correspondantes aux degrés de liberté restreints, nous aurons

$$\bar{\mathbf{M}} \frac{d^2 \bar{\mathbf{q}}}{dt^2} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}} + [\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + [\mathbf{K} + \check{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}] \mathbf{q} + [\hat{\mathbf{K}}^T + 2\check{\mathbf{K}}^T] \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.52)$$

Dans le cas où la coque est bloquée sur un ou plusieurs cotés, les déplacements membranaires seront négligeables devant les déplacements flexionnels. Donc l'inertie membranaire peut être négligée [Ribeiro (2003)]. De ce fait, l'équation (5.51) se réduit à

$$\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\mathbf{K}}^{-1} [\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}] \mathbf{q} \quad (5.53)$$

En injectant (5.53) dans (5.52), nous obtenons

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \left[ \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.54)$$

Les matrices  $\tilde{\mathbf{K}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}$  sont des fonctions linéaires de  $\mathbf{q}$ , tandis que les matrices  $\tilde{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}$  sont des fonctions quadratiques de  $\mathbf{q}$ .

Le mouvement est supposé périodique. Donc

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \cos \omega t \quad (5.55)$$

où  $\mathbf{Q}$  est l'amplitude, et  $\omega$  est la pulsation.

En substituant (5.55) dans (5.54), nous obtenons une fonction de la forme

$$\mathbf{F}(\omega, t) = \mathbf{0} \quad (5.56)$$

En appliquant la méthode de l'équilibrage harmonique et en intégrant sur la période, nous aurons

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{F}(\omega, t) \cos(\omega t) dt = \left[ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

Notons que dans ce système d'équations les matrices  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont des matrices non linéaires. En effet, elles sont fonction de l'amplitude  $\mathbf{Q}$ . Or, cette amplitude dépend de la pulsation  $\omega$ . Ceci donne un système impossible à résoudre. Afin de contourner cette difficulté nous supposons en premier temps que la coque vibre indépendamment de l'amplitude et nous déterminons la pulsation  $\omega_L$  (pulsation linéaire). Dans la deuxième étape, nous fixons une valeur pour l'amplitude et nous déterminons la nouvelle pulsation  $\omega_{NL}$  (pulsation non linéaire). Dans l'analyse de la vibration non linéaire des structures, c'est souvent le rapport  $\omega_{NL} / \omega_L$  qui est utilisé. Pour la détermination de ce rapport, il existe plusieurs méthodes numériques. La méthode de *linéarisation des modes* [Han et Petyt (1997)] qui est une méthode simple à implémenter sera utilisée. Une description de cette méthode itérative sera présentée dans le chapitre dédié à la programmation.

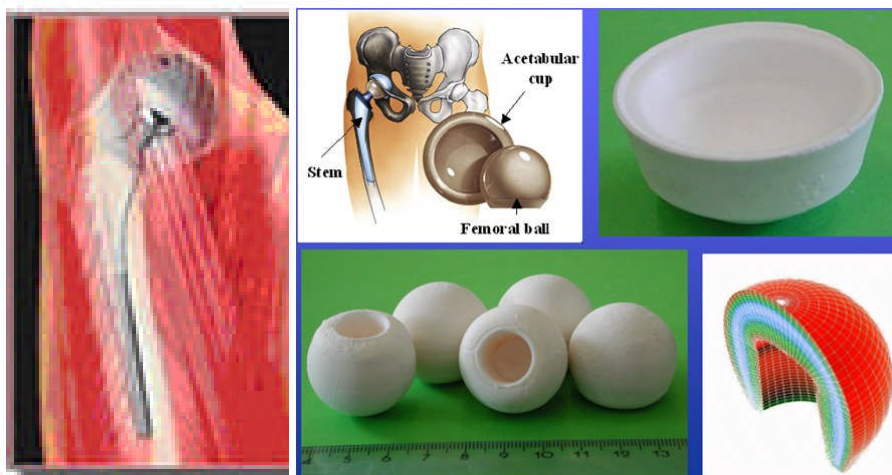
## 6. Formulation MFG

### 6.1 Introduction

Grâce aux récentes recherches, aussi bien publiques que privées, les matériaux composites ont trouvé une application plus large dans les secteurs industriels de l'aéronautique, de l'automobile, du sport et loisir, du génie civil et de la marine. Ces matériaux présentent des avantages de légèreté, de résistance mécanique, et de résistance à la corrosion. Ils permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application.

Cependant, les matériaux composites apportent également des problèmes internes spécifiques provoqués par leur structure et par l'environnement. Par exemple, une navette spatiale traverse l'atmosphère terrestre pour être exposée à un rayonnement solaire agressif. Cette même structure aérienne doit atterrir sur un sol de moins de 0° degré Celsius. Le fuselage en matériaux composite va subir des déformations, et la nature des choses fait que chaque matériau de la nuance va se comporter différemment. Ceci présente l'inconvénient du délaminage, dans les matrices ou dans les fibres, au voisinage des interfaces.

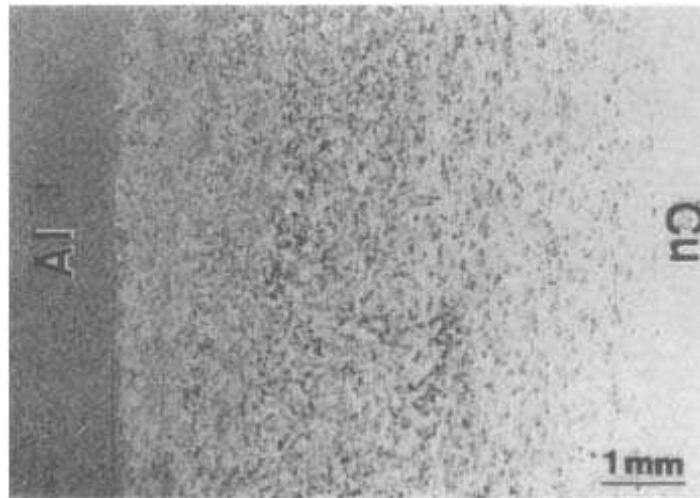
Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de *Matériaux Fonctionnellement Gradués* (MFG) ou matériaux à gradient fonctionnel, présente une attention considérable. Un exemple d'application médicale de tels matériaux est donné en figure 6.1



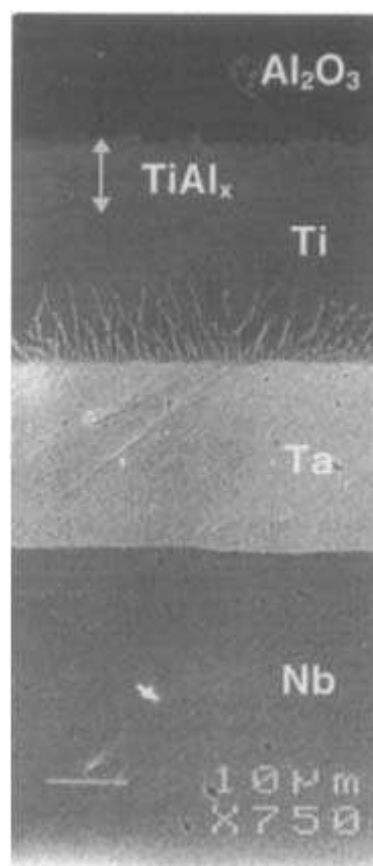
**Fig. 6.1** Exemple de coques sphériques MFG en biomécanique [S5 (2011)].

Due à un changement continu de la composition, les propriétés mécaniques et physiques varient d'une manière graduelle et continue. Cette variation pourra être dans une direction

(figure 6.2), deux directions, ou trois directions [Heikinheimo et al. (1996)]. En plus, la combinaison matérielle de plus de deux matériaux est envisageable (figure 6.3). La température de service de cet exemple de joint MFG est entre 700 et 1000°C.



**Fig. 6.2** Microstructure d'un matériau fonctionnellement gradué [Tu et al. (1996)].



**Fig. 6.3** Microstructure d'un joint en matériau fonctionnellement gradué [Heikinheimo et al. (1996)].

En effet ces matériaux existent dans la nature, par exemple, le bambou et les os. Un groupe de scientifiques Japonais [Yamanoushi et al. (1990) ; Koizumi (1993)] ont présenté le concept des MFG en 1984, telle une barrière à grande résistance thermique pour l'application aérospatiale, ils lui ont même donné le nom de « *Matériaux résistants à haute température* ».

Aujourd'hui les MFG trouvent leur application dans différents domaines et le développement de ces matériaux avancés prend trois volets :

- Modélisation (modèles de conception, simulation de comportement,...)
- Technologie de fabrication (procédés de fabrication, compositions chimiques,...)
- Application industrielle (fuselages, turbines, joint, revêtement...)

La contribution de ce chapitre s'inscrit dans le premier volet.

## 6.2 Modèles d'homogénéisation

Les matériaux MFG sont des matériaux non homogènes et afin de rendre leur modélisation possible, plusieurs modèles d'homogénéisation ont été proposés dès leur naissance. Comme exemple:

- Le modèle de l'équipe Kawasaki et Watanabe [1990]
- Le modèle micromécanique développé par Gasik [Gasik et Lilius (1994). ; Gasik, (1995) ; Cherradi et al. (1994)].
- Le modèle de Mori–Tanaka[Mori Tanaka (1973) ; Benveniste (1987) ; Vel SS et Batra (2002)].
- Le modèle basé sur une loi de puissance [Gibson et al. (1995) ; Hui Shen (2009)].

Actuellement, les deux derniers modèles sont les plus utilisés dans la modélisation des structures MFG. Ce dernier modèle aussi connu sous le nom de modèle de Voigt [Pradyumna et Bandyopadhyay (2008)], sera présenté dans ce chapitre. Les éléments finis développés pour les structures MFG sont basés sur ce modèle.

## 6.3 Bibliographie sur les coques MFG

Woo et Meguid [2001] ont effectué une analyse non linéaire flexionnelle des plaques et des coques peu profondes MFG soumises à des charges transverses dans un champ thermique. Loy et al. [1999] ont étudié la vibration libre d'une coque cylindrique MFG simplement appuyée. La stabilité dynamique de ce type de coque sous une charge harmonique axiale a été étudiée par Ng et al. [2001]. Yang et Shen [2003] ont étudié la vibration libre des panneaux cylindriques MFG. Patel et al. [2005] ont effectué l'analyse de la vibration libre des coques



cylindriques elliptiques MFG en utilisant une théorie d'ordre élevé. Liew et al. [2006] ont présenté l'analyse de la vibration linéaire et non linéaire d'un panneau cylindrique MFG à trois couches soumis à un gradient de température à travers l'épaisseur. Le flambement thermomécanique des panneaux cylindriques MFG avec des propriétés dépendantes de la température a été étudié par Shen et Leung [2003] et Yang et al. [2006]. Kadoli et Ganesan [2006] ont présenté le flambement thermique linéaire et l'analyse de la vibration libre d'une coque cylindrique MFG encastree. En se basant sur une théorie d'ordre élevé, Shen et Noda [2005] ont étudié le flambement des coques cylindriques MFG soumises à des charges mécaniques axiales et radiales dans un environnement thermique. En utilisant la même théorie avec la méthode des éléments finis, Pradyumna et Bandyopadhyay [2008] ont étudié la vibration linéaire d'un panneau MFG à double courbure. Dans cette étude, la conductivité thermique est négligée et les propriétés du matériau sont supposées indépendantes de la température. En utilisant une théorie d'ordre élevé, Matsunaga [2008a] a étudié la vibration libre et la stabilité des coques MFG peu profondes simplement appuyées ayant une projection rectangulaire. Le même auteur a élargi ses travaux sur la vibration et la stabilité à des structures plaques MFG [2008b] et coques MFG à simple courbure [2009]. Chorfi et Houmat [2010] ont présenté une étude sur les coques MFG ayant une projection curviligne. Dans cette étude, le comportement vibratoire linéaire et non linéaire de trois matériaux MFG est analysé.

## 6.4 Formulation

Un matériau MFG est un matériau composite spécial dont les propriétés changent graduellement d'une surface à une autre. Les premières recherches sur ces matériaux étaient une lutte contre un environnement thermique agressif. Comme solution, le mélange métal - céramique (M-C) était la première nuance proposée, le métal pour ses propriétés mécaniques et la céramique pour sa grande résistivité thermique. Actuellement, ces matériaux avancés ont trouvé leur importance dans d'autres champs d'application (isolation électrique, magnétique, lutte contre la corrosion, biomécanique...), et de nouvelles compositions en dehors du métal et de la céramique sont proposées. Malgré cela, les indices « M » et « C » sont généralement encore présents dans une formulation MFG.

### 6.4.1 Propriétés du mélange

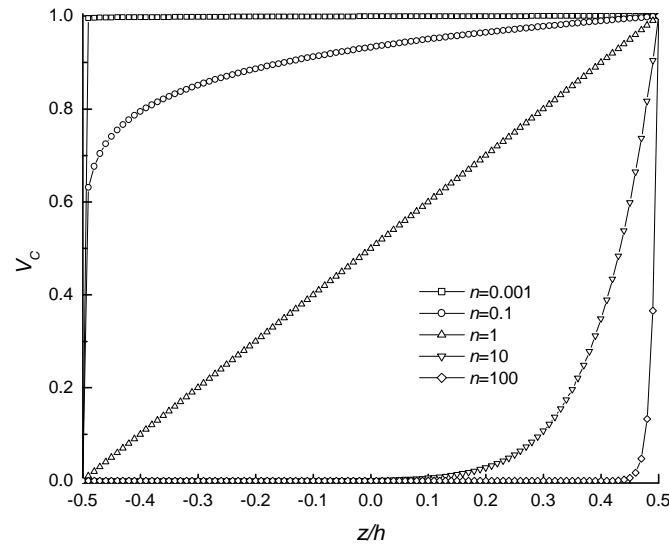
Dans cette formulation, une loi de puissance [Hui shen (2009)] est employée pour décrire la variation des propriétés du matériau.

Les fractions volumiques  $V_C$  du céramique et  $V_M$  du métal sont liées par les relations

$$V_M = 1 - V_C \quad (6.1)$$

$$V_C = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (6.2)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la coque et  $z$  est la distance par rapport à la surface moyenne. L'exposant  $n$  indique la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur est prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La figure. 6.4 présente la variation de la fraction volumique  $V_C$  en fonction de  $z/h$ .



**Fig. 6.4** Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une coque MFG.

Les propriétés du MFG sont obtenues à partir des propriétés des constituants en utilisant la règle des mélanges suivante :

$$P = P_C V_C + P_M V_M \quad (6.3)$$

où  $P$  indique la propriété du mélange (exemple : module d'élasticité  $E$ , masse volumique  $\rho$ , coefficient de Poisson  $\nu$ ).

La substitution de (6.1) et (6.2) dans (6.3) donne

$$P(z) = (P_C - P_M) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + P_M \quad (6.4)$$

où  $P_C$  et  $P_M$  sont les propriétés du céramique et du métal, respectivement. De cette dernière relation, nous déduisons

$$E(z) = (E_C - E_M) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_M \quad (6.5)$$

$$G(z) = (G_C - G_M) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + G_M \quad (6.6)$$

$$\rho(z) = (\rho_C - \rho_M) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_M \quad (6.7)$$

$$\nu(z) = (\nu_C - \nu_M) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \nu_M \quad (6.8)$$

### 6.4.2 Modélisation du panneau à double courbure en MFG

Considérons un élément fini version- $p$  d'une coque de géométrie arbitraire (figure 6.5).  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  sont les deux rayons de courbure,  $a$  et  $b$  sont les longueurs mesurées sur les cotés et  $h$  est l'épaisseur. Les propriétés varient graduellement de la surface interne à la surface externe de la coque.

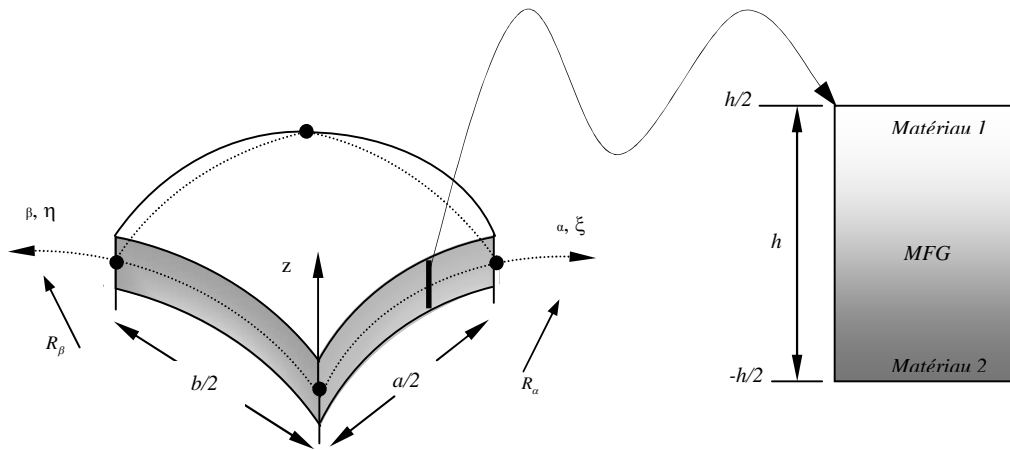


Fig. 6.5 Élément fini version- $p$  pour les structures coques MFG.

### 6.4.3 Relations contraintes-déformations

Lorsque le matériau est fonctionnellement gradué, et pour les éléments finis de coque modérément épaisse obtenus par dégénérescence d'un élément tridimensionnel, les constantes élastiques dans (4.16) ont pour expression [Pradyumna et Bandyopadhyay (2008)]

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2}, Q_{33} = Q_{44} = Q_{55} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (6.9)$$

où  $E, G$  et  $\nu$  dénotent, respectivement, le modules de Yong, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

### 6.4.4 Energie cinétique

En tenant compte de l'expression (6.7) et en injectant (4.1) dans l'expression de l'énergie cinétique (3.51), nous obtenons

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_{\alpha \beta z} \rho(z) \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + z^2 (\dot{\theta}_\alpha^2 + \dot{\theta}_\beta^2) + 2z (\dot{\theta}_\beta - \dot{\theta}_\alpha) \right) A_\alpha A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\alpha d\beta dz \quad (6.10)$$

Dans la théorie de Reissner-Mindlin, les termes  $\frac{z}{R_\beta}$  et  $\frac{z}{R_\alpha}$  sont négligeables (Reissner[1941], berry[1964], Mindlin[1951]) et l'intégration suivant l'épaisseur entre  $-\frac{h}{2}$  et

$\frac{h}{2}$  de l'expression précédente permet d'écrire

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\alpha \beta} \left( I_0 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2I_1 \dot{u} \dot{\theta}_\beta - 2I_1 \dot{v} \dot{\theta}_\alpha + I_2 (\dot{\theta}_\alpha^2 + \dot{\theta}_\beta^2) \right) A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \quad (6.11)$$

où

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz, \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \quad (6.12)$$

### 6.4.5 Energie de déformation

En injectant les relations (4.8)-(4.13) dans l'expression de l'énergie (3.49) et en tenant compte de (4.14) et (4.16) nous aurons

$$\begin{aligned} E_d = & \iiint_{\alpha \beta z} \left[ \frac{Q_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{Q_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 \right. \\ & + \frac{2Q_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{11}}{A_\alpha R_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) w + \frac{2Q_{12}}{A_\alpha R_\beta} w \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{2Q_{11}}{A_\beta R_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) w + \frac{2Q_{12}}{A_\beta R_\alpha} w \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) - \frac{2Q_{66} z}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) - \frac{2Q_{12} z}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \\ & + \frac{2Q_{66} z}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{11} z}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{2Q_{66} z}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) - \frac{2Q_{11} z}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \\ & + \frac{2Q_{66} z}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{12} z}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{2Q_{12}}{R_\alpha R_\beta} w^2 + \frac{Q_{11}}{(R_\alpha)^2} w^2 + \frac{kQ_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{kQ_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{Q_{11}}{(R_\beta)^2} w^2 \\ & - \frac{2kQ_{66}}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha - \frac{2Q_{12}}{A_\beta R_\alpha} z \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) w - \frac{2Q_{11}}{A_\beta R_\beta} z \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) w + \frac{2kQ_{66}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta \\ & + \frac{2Q_{12}}{A_\alpha R_\beta} z \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) w + \frac{2Q_{11}}{A_\alpha R_\alpha} z \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) w + kQ_{66} (\theta_\alpha)^2 + \frac{Q_{66} z^2}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{11} z^2}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2Q_{66}z^2}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) - \frac{2Q_{12}z^2}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) + kQ_{66}(\theta_\beta)^2 + \frac{Q_{66}z^2}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{Q_{11}z^2}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{Q_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{Q_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{11}}{A_\alpha^3} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{Q_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{2Q_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2Q_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{Q_{12}}{A_\alpha^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{12}}{A_\beta^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{Q_{11}}{A_\alpha^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{Q_{11}}{A_\beta^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \\
& - \frac{Q_{11}z}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{Q_{12}z}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{2Q_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} z \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& - \frac{Q_{11}z}{A_\alpha^3} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{Q_{12}z}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{2Q_{66}z}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{Q_{11}}{4A_\beta^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^4 + \frac{Q_{11}}{4A_\alpha^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^4 + \frac{Q_{12}}{2A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{Q_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \Big] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta dz \tag{6.13}
\end{aligned}$$

En séparant les termes dépendants de l'épaisseur, (6.13) se réécrit

$$\begin{aligned}
E_d = & \int \int \int \left[ \frac{A_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{A_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 \right. \\
& + \frac{2A_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{11}}{A_\alpha R_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) w + \frac{2A_{12}}{A_\alpha R_\beta} w \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \\
& + \frac{2A_{11}}{A_\beta R_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) w + \frac{2A_{12}}{A_\beta R_\alpha} w \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) - 2B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) - 2B_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{2B_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{2B_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \\
& - \frac{2B_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) - \frac{2B_{11}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) + \frac{2B_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{2B_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \\
& + \frac{2A_{12}}{R_\alpha R_\beta} w^2 + \frac{A_{11}}{(R_\alpha)^2} w^2 + \frac{kA_{66}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{kA_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{A_{11}}{(R_\beta)^2} w^2 \\
& - \frac{2kA_{66}}{A_\beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \theta_\alpha - \frac{2B_{12}}{A_\beta R_\alpha} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) w - \frac{2B_{11}}{A_\beta R_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) w \\
& + \frac{2kA_{66}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \theta_\beta + \frac{2B_{12}}{A_\alpha R_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) w + \frac{2B_{11}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + kA_{66}(\theta_\alpha)^2 + \frac{D_{66}}{A_\alpha} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{D_{11}}{A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 \\
& - \frac{2D_{66}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) - \frac{2D_{12}}{A_\alpha A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) + kA_{66}(\theta_\beta)^2 + \frac{D_{66}}{A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{D_{11}}{A_\alpha^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{A_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{A_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_{11}}{A_\alpha^3} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{A_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{2A_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{A_{12}}{A_\alpha^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_{12}}{A_\beta^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{A_{11}}{A_\alpha^2 R_\alpha} w \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_{11}}{A_\beta^2 R_\beta} w \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \\
& - \frac{B_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{B_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{2B_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& - \frac{B_{11}}{A_\alpha^3} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{B_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{2B_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\
& + \frac{A_{11}}{4A_\beta^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^4 + \frac{A_{11}}{4A_\alpha^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^4 + \frac{A_{12}}{2A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \\
& + \frac{A_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 ] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \tag{6.14}
\end{aligned}$$

où

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz, B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z dz, B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz \tag{6.15}$$

Remarquons que dans l'expression de l'énergie (6.14), l'intégration des termes avec  $z$  comme facteur n'est pas nulle dans cette formulation MFG. Pour un matériau isotrope, l'intégration de ces termes suivant l'épaisseur est nulle.

### 6.4.6 Équation de mouvement et dérivation des matrices masse et rigidité

Ayant établi les expressions des énergies, la dérivation des matrices masse et de rigidité, et par conséquent l'équation de mouvement, se fait d'une façon similaire à celle donnée en chapitre 5. De ce fait,

$$\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\mathbf{K}}^{-1} [\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}] \mathbf{q} \tag{6.16}$$

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + [\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}] \mathbf{q} + [\hat{\mathbf{K}}^T + 2\hat{\mathbf{K}}^T] \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{6.17}$$

Notons la présence de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  dans l'équation (6.17), qui a la forme

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\phi,\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{3\phi-2,3\varphi-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{3\phi-2,3\varphi} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{3\phi-1,3\varphi-2} & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{3\phi,3\varphi-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Cette matrice est dérivée à partir de l'énergie  $\tilde{U}$ . Une troncature de (6.14) donne

$$\begin{aligned} \tilde{U} = \int \int_{\alpha \beta} [ & -\frac{B_{11}}{A_\beta^3} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{B_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{2B_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\ & - \frac{B_{11}}{A_\alpha^3} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{B_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \\ & + \frac{2B_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} \left( \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) ] A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (6.19)$$

Cette énergie est nulle pour un matériau isotrope.

Les expressions des composantes non nulles de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  et les matrices formant les équations (6.16) et (6.17) sont données dans l'annexe 2.

En suivant le même chemin de dérivation de l'équation de mouvement (5.57), la substitution de (6.16) dans (6.17) donne

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \left[ \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.20)$$

Notons ici que  $\tilde{\mathbf{K}}$  est une fonction linéaire de  $\mathbf{q}$ . Donc, son intégrale par rapport à la période est zéro, ceci donne

$$-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{0} \quad (6.21)$$

La résolution de ce système d'équation permet de déterminer les fréquences et les modes propres correspondants. La méthode de résolution sera décrite dans le chapitre suivant.

# 7. Organisation de la programmation

## 7.1 Introduction

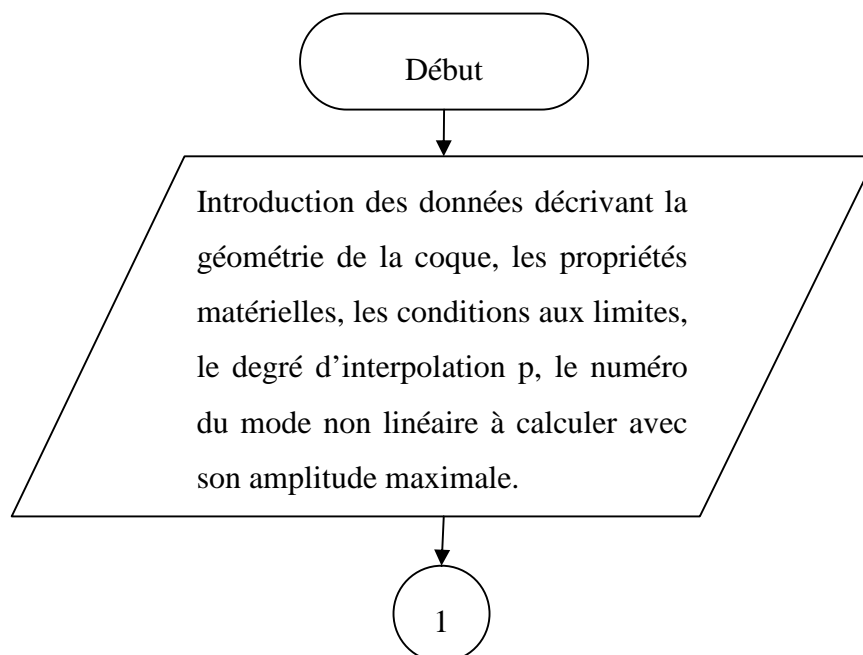
Pour résoudre le problème de coque à double courbure de formes géométriques arbitraires, une série de suppositions et d'approximations a été faite afin de transformer la structure réelle en un modèle mathématique. Un code- $p$  de la méthode des éléments finis a été élaboré. Il permet d'accomplir des calculs vibratoires pour des structures coques à simple et à double courbure de formes géométriques arbitraires, en utilisant différents degrés d'interpolations  $p$ , et diverses conditions aux limites. Il permet de réaliser des calculs linéaires et non linéaires aussi bien pour des structures à matériau isotrope que pour des structures à matériau fonctionnellement gradué. Cette section se compose de deux parties. Dans la première partie, l'algorithme de calcul est résumé. Dans la deuxième partie, une description des sous programmes élaborés est présentée.

## 7.2 Environnement de la programmation

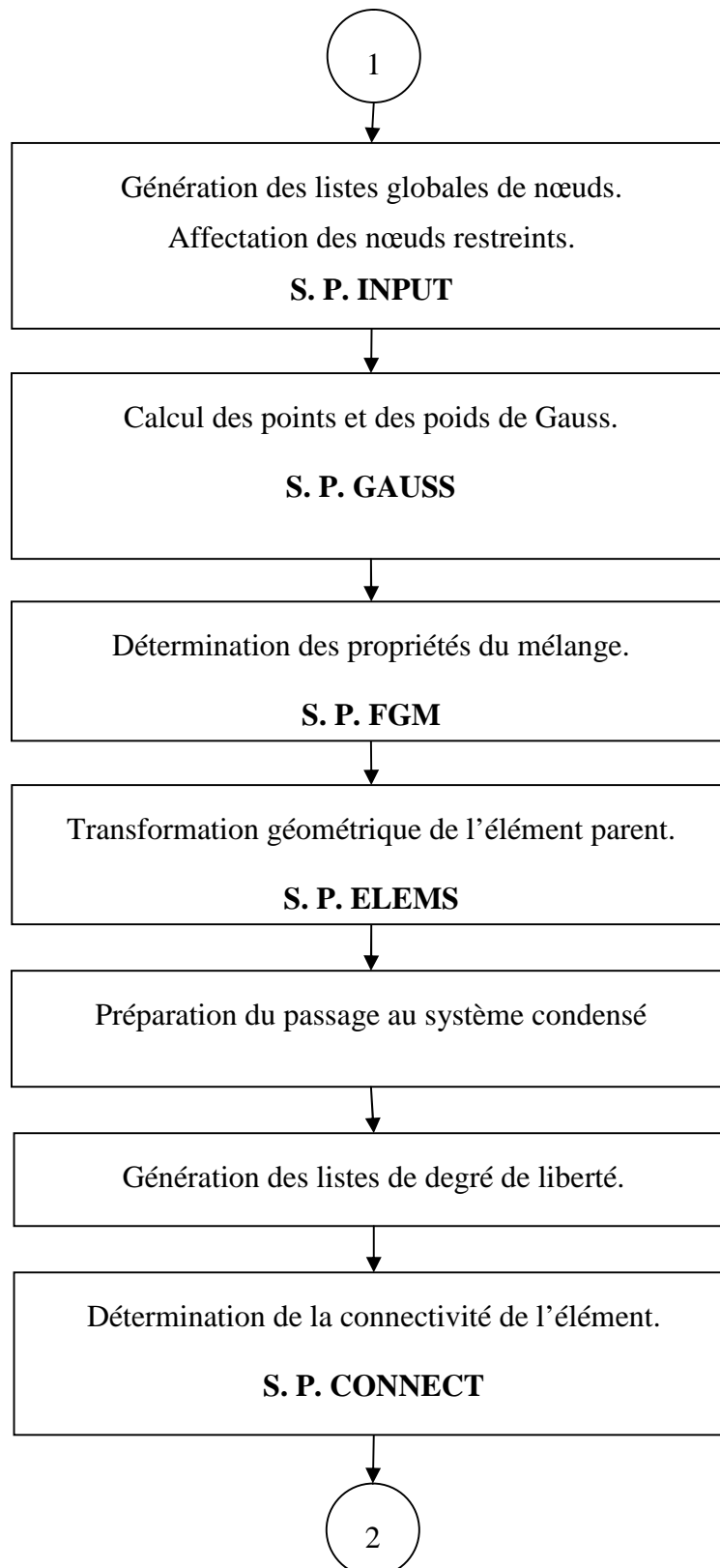
L'exécution a été effectuée sur un Pentium 4, CPU 3.06GHz, 256 MB de RAM. Le langage de programmation utilisé est le FORTRAN 90 version 0.4 de l'année 1994-1995 [Fortran (1994-95)]. Le système d'exploitation est le Windows XP [Microsoft (2002)].

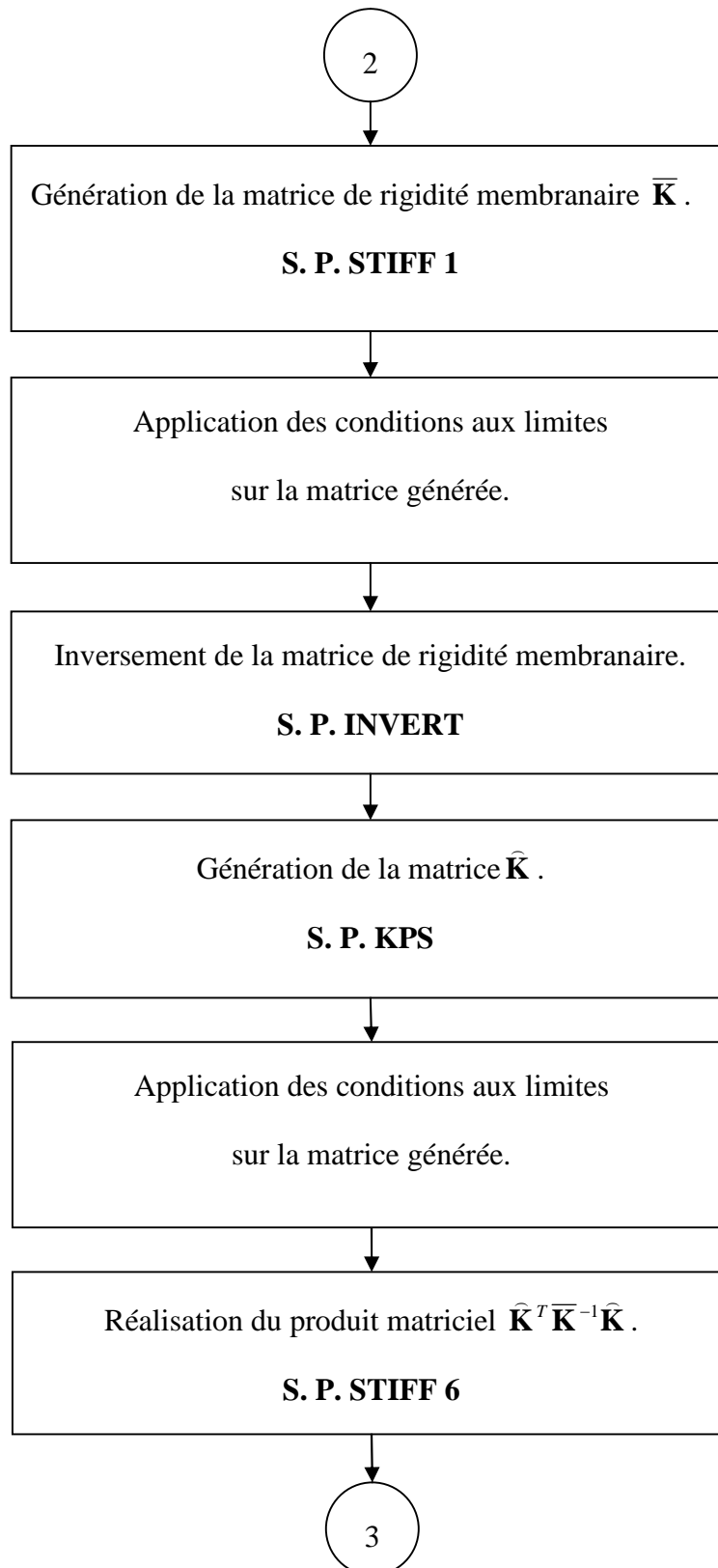
## 7.3 Organigramme général du programme principal

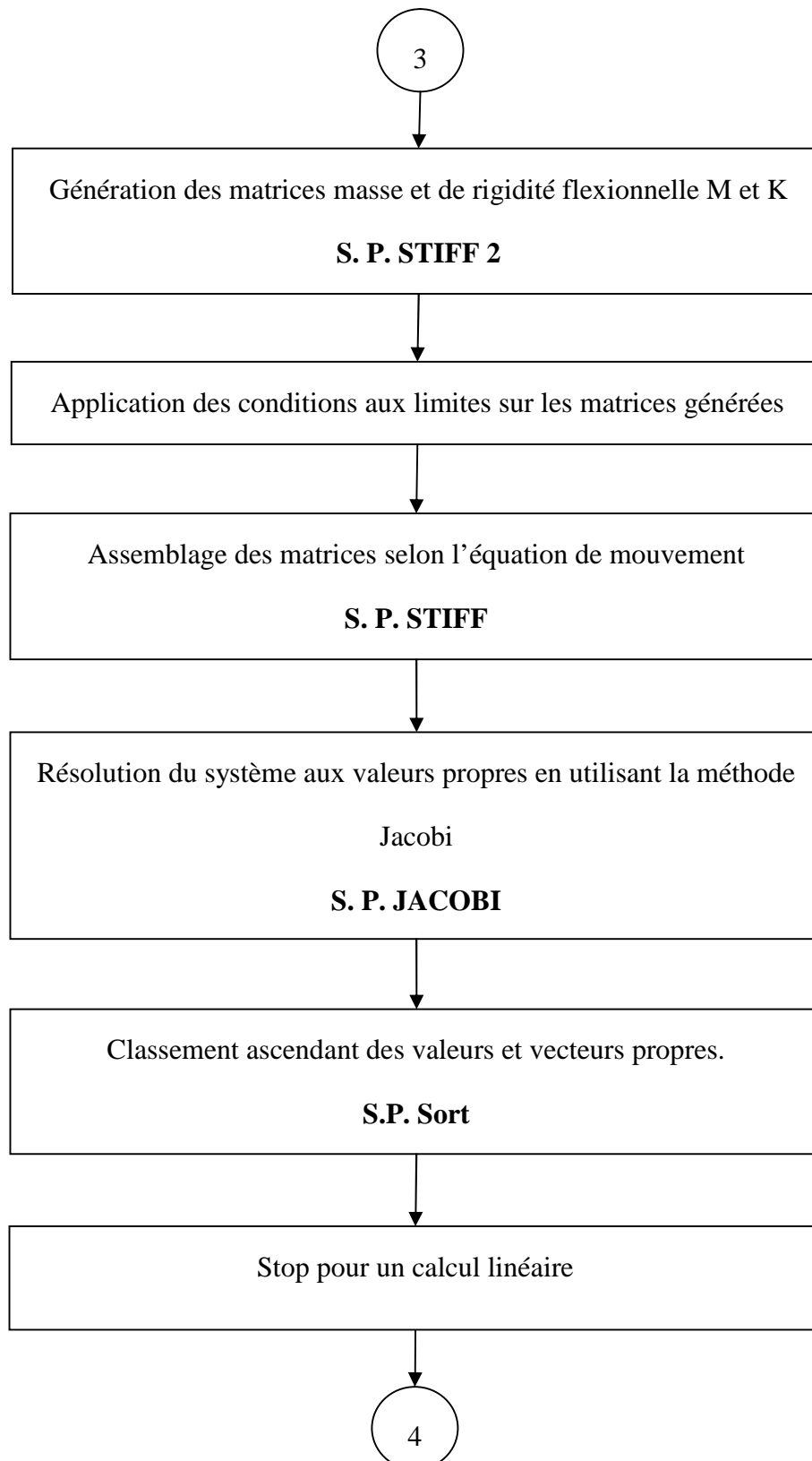
Le schéma suivant représente les principales étapes du code élaboré :

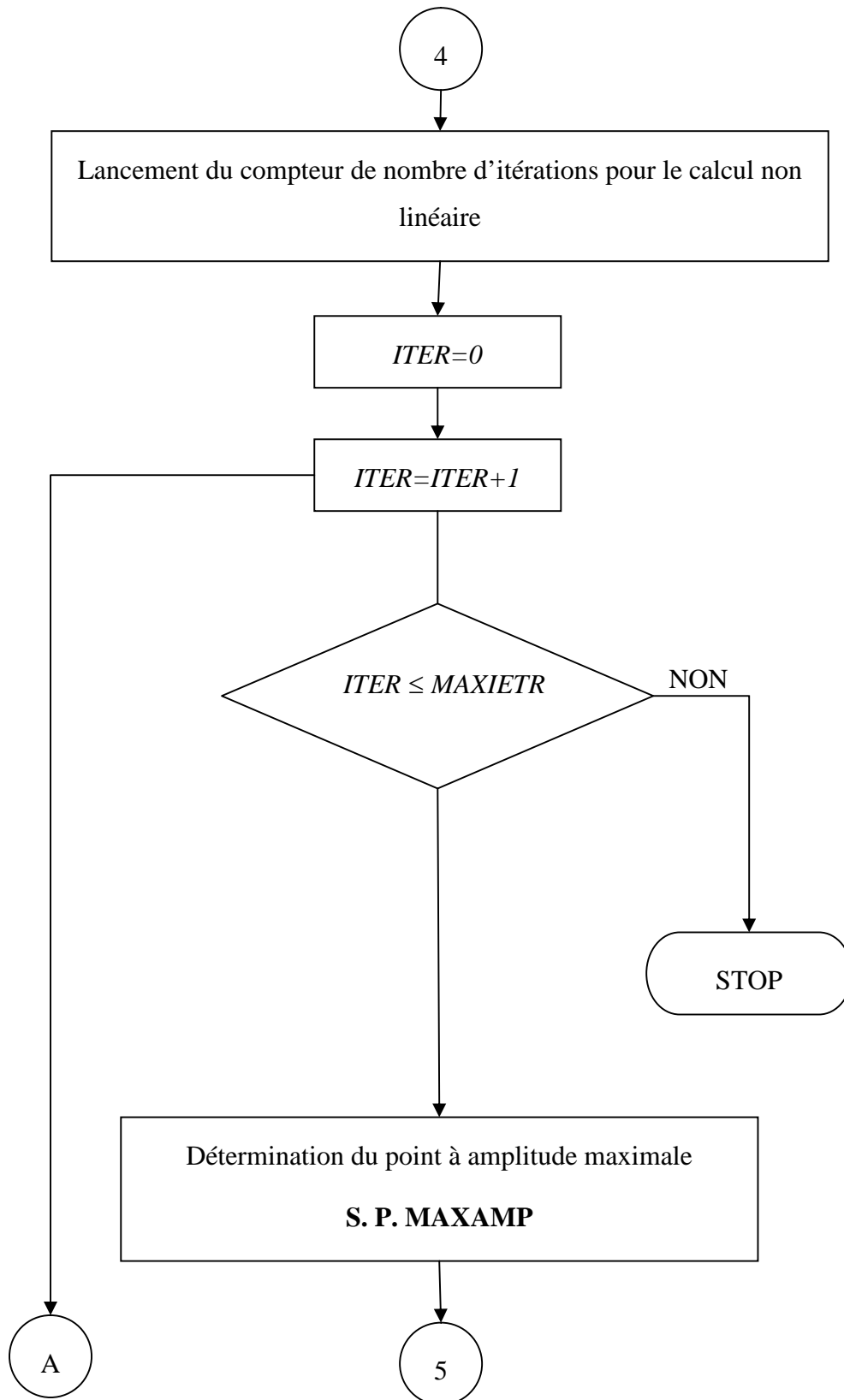


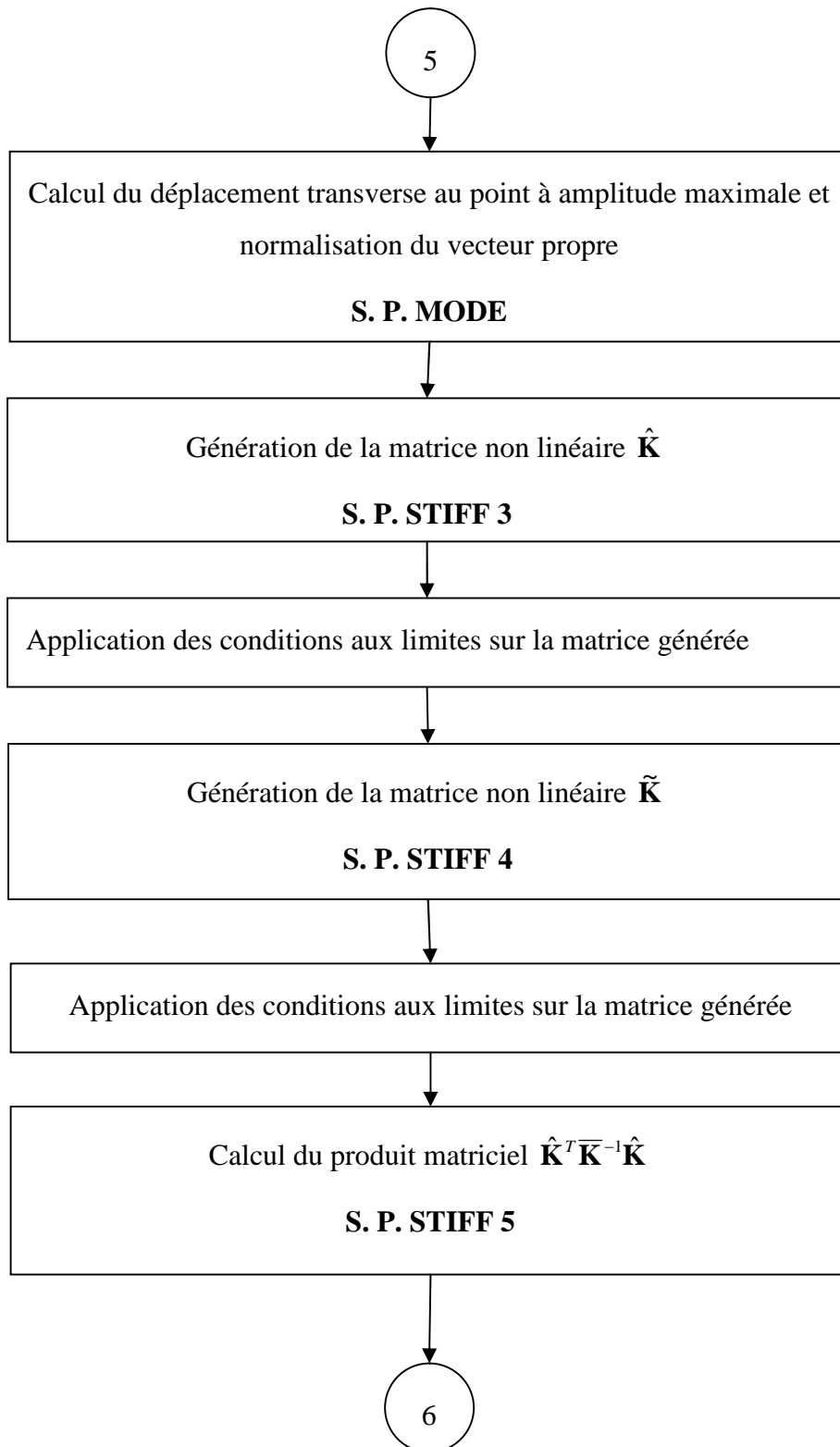


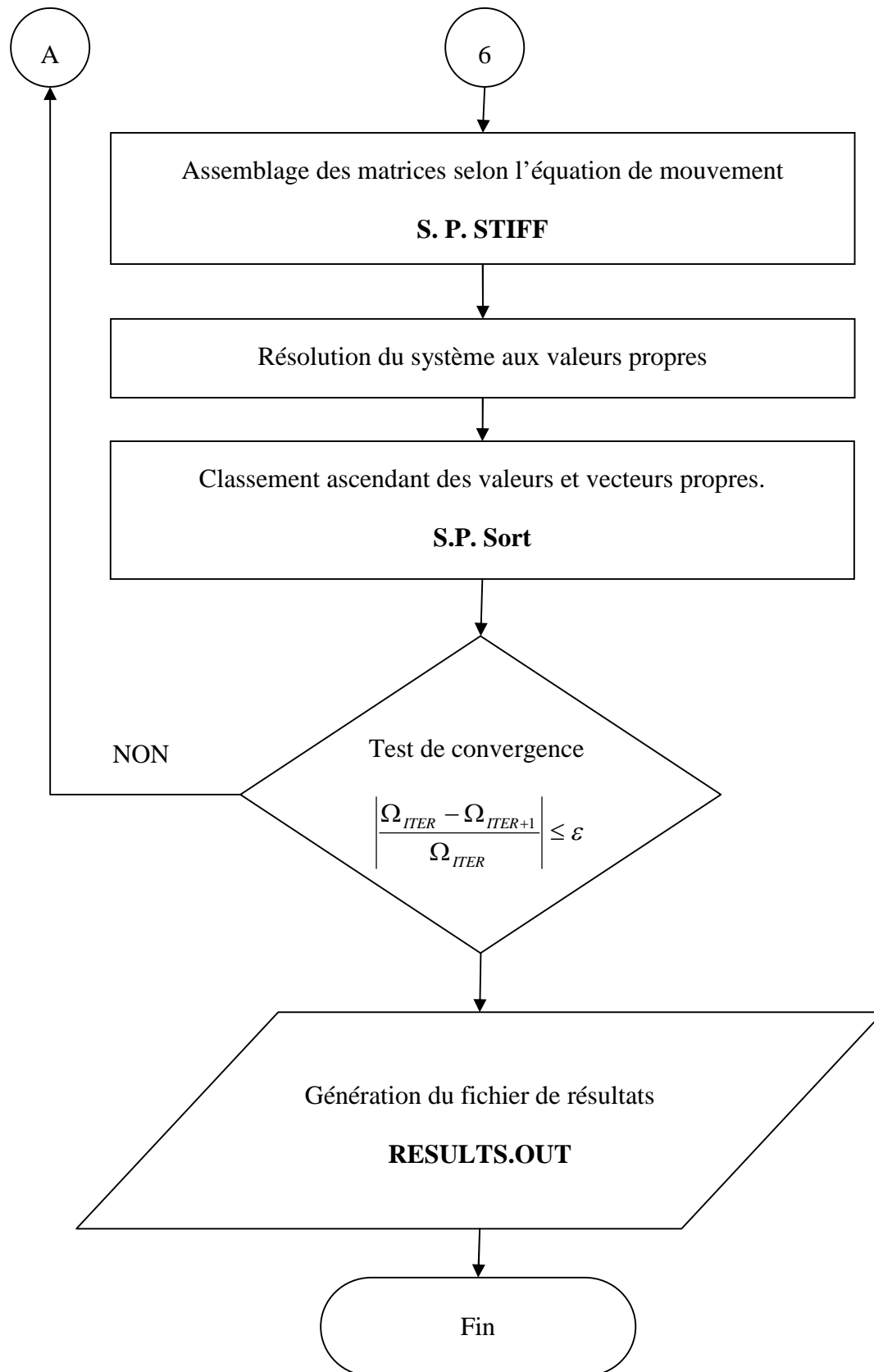












## 7.4 Description des Sous-Programmes

### 7.4.1 S.P. INPUT

Dans le sous programme INPUT trois tâches sont réalisées :

- La première tâche est la lecture des données qui caractérisent la géométrie et les propriétés du matériau.
- La seconde étape est la génération de trois listes, appelées « listes des noeuds réels et fictifs ». La première liste est celle des noeuds réels de sommets. La deuxième est la liste des noeuds fictifs sur les cotés. La troisième est la liste des noeuds internes. Ces listes sont conçues en fonction du degré du polynôme d'interpolation.
- La troisième étape est l'affectation des degrés de liberté des noeuds restreints.

Les données sont introduites au programme à partir d'un fichier d'entrée appelé ENTER.DAT selon l'ordre suivant :

- NTE : nombre total d'éléments.
- NTN : nombre total de noeuds.
- NTC : nombre total de côtés.
- NNR : nombre de noeuds restreints.
- NCR : nombre de côtés restreints.
- NMH : degré du polynôme d'interpolation.
- NMODE : nombre maximum de modes propres à déterminer dans un calcul linéaire ou numéro du mode non linéaire.
- H : épaisseur.
- R 1: rayon de la coque suivant la direction  $\alpha$  .
- R 2: rayon de la coque suivant la direction  $\beta$  .
- SC : facteur de correction du cisaillement transverse.
- E1 : Module de Young du matériau 1.
- E2 : Module de Young du matériau 2.
- PR1 : coefficient de Poisson du matériau 1.
- PR2 : coefficient de Poisson du matériau 2.

- EN : exposant n.
- Tableau de connectivité des éléments.
- Conditions aux limites des nœuds restreints.
- Conditions aux limites des cotés restreints.
- Wmax : amplitude maximale.

#### **7.4.2 S. P. GAUSS**

C'est un sous-programme qui calcule les abscisses des points de Gauss et les poids correspondants nécessaires pour l'intégration numérique. Comme son nom l'indique il utilise la méthode de Gauss [1809] avec les polynômes de Legendre [Carnahan et al (1996)]. Notons ici qu'un changement des bornes d'intégration est effectué afin de pouvoir intégrer sur les coordonnées adimensionnelles.

#### **7.4.3 S. P. FGM**

Le sous-programme FGM permet de calculer les propriétés du mélange selon la loi de puissance présentée en chapitre précédent. En plus, dans ce sous-programme, il faut spécifier n, l'exposant de la loi de puissance pour un matériau FGM. Dans le cas d'un matériau isotrope, il suffit d'affecter 0 ou une valeur très grande à cet exposant.

#### **7.4.4 S P. ELEMS**

Afin de permettre l'adoption des géométries arbitraires, Elems est un sous programme de préparation à la transformation géométrique de l'élément de référence. Dans ce sous-programme, se fait la lecture des données géométriques de la structure : les coordonnées aux nœuds et les fonctions paramétriques des cotés décrivant les frontières de la coque. Avec l'aide d'une transformation géométrique appropriée présentée dans la formulation, un élément de référence de forme géométrique simple peut se transformer en un ou plusieurs éléments de formes géométriques plus complexes.

#### **7.4.5 Préparation du passage au système condensé**

Le système de départ est un système à 5 coordonnées généralisées. A ce stade de programmation, ce système sera décomposé en deux sous-systèmes : le premier à 2 coordonnées généralisées appelé système membranaire, le deuxième à 3 coordonnées généralisées appelé système flexionnel.

#### **7.4.6 S.P. CONNECT**

Le sous-programme CONNECT réalise des affectations des listes de degrés de liberté déjà déterminés dans INPUT afin d'engendrer une hiérarchie de ces degrés de liberté.



#### **7.4.7 S. P. STIFF, STIFF 1, STIFF 2, STIFF 3, STIFF 4, STIFF 5 , STIFF 6 et KPS**

Une fois que la lecture des données nécessaires au calcul des matrices est accomplie, et en faisant appel à l'intégration numérique, ces sous-programmes engendrent les matrices de l'équation du mouvement.

STIFF 1 STIFF 2 et KPS sont des sous-programmes pour la génération des matrices masse et de rigidité linéaires.

STIFF 3 est un sous-programme pour la génération de la matrice de couplage des déformations linéaires membranaires et flexionnelles.

STIFF 4 est un sous-programme pour la génération des matrices de rigidité non linéaires.

STIFF 5 et STIFF 6 sont des sous-programmes pour la génération des produits matriciels.

S. P. STIFF est un sous programme pour l'assemblage.

Remarquons que chaque sous-programme fait appel à un autre sous-programme appelé SHAPFUNC. Ce dernier est le sous-programme des fonctions de forme. D'autre part SHAPFUNC utilise un autre sous programme appelé JMATRIX.

#### **7.4.8 S.P. JMATRIX**

Dans ce sous-programme nous déterminons les composantes de la matrice Jacobienne et son déterminant afin de les utiliser dans le calcul des intégrales.

#### **7.4.9 Application des conditions aux limites**

Une boucle avec un test d'élimination des degrés de liberté restreints existe dans le programme principal. La valeur 1 est introduite lorsque le degré de liberté est fixe et s'il est libre la valeur correspondante est 0.

#### **7.4.10 S. P. INVERT**

C'est un sous-programme pour l'inversion de la matrice de rigidité membranaire.

#### **7.4.11. S.P. JACOBI**

C'est un sous-programme pour le calcul des valeurs et vecteurs propres. Comme le nom de ce sous-programme l'indique, il utilise l'algorithme de la méthode de Jacobi [Jacobi (1846) ; Süli et Mayers (2003)].

#### **7.4.12 S.P. SORT**

Le sous-programme SORT permet de classer les valeurs propres et vecteurs propres associés par ordre croissant.

#### 7.4.13 S. P. MAXAMP

Ce sous-programme réalise trois tâches :

- Réinitialisation du vecteur propre du mode en question
- Calcul des déplacements en faisant appel aux fonctions de forme (S. P. SHAPFUNC).
- Détermination du point à amplitude maximale en faisant un balayage sur l'élément.

#### 7.4.14 S. P. MODE

Après avoir déterminé le point à amplitude maximale, le sous programme MODE fait la normalisation du vecteur propre.

#### 7.4.15 Remarque sur le calcul non linéaire

En effet, la partie non linéaire de la programmation est une implémentation de la méthode de *linéarisation des modes* [Han et Petyt (1997)]. Elle consiste à générer une suite convergente  $\{ \Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(N)} \}$  où  $\Omega^{(0)}$  est l'estimation initiale de la pulsation propre  $\Omega_L$  et  $\Omega^{(N)}$  est la pulsation non linéaire  $\Omega_{NL}$ .

#### 7.4.16 Affichage des résultats

Après avoir déterminé les fréquences linéaires et le rapport de la fréquence linéaire à la fréquence non linéaire, les résultats sont stockés dans un fichier de sortie appelé RESULTS.OUT.

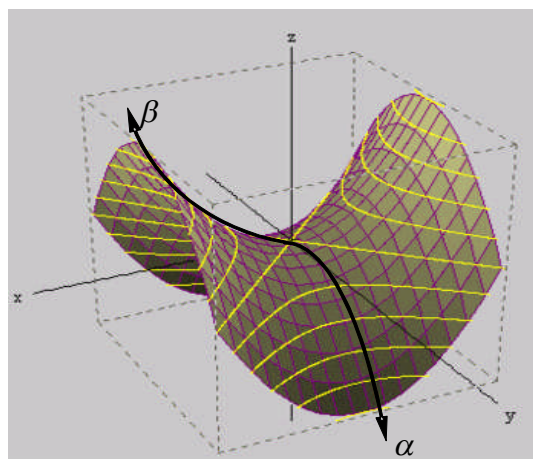
## 8. Applications numériques

### 8.1 Introduction

Pour évaluer la robustesse et l'efficacité de la méthode et du code de calcul développé, une série de tests a été menée. Ces tests ont permis non seulement de mesurer la qualité des résultats obtenus au moyen des techniques développées dans le cadre de cette thèse, mais aussi d'aboutir à des résultats originaux. Nous nous proposons dans cette partie de la thèse de présenter quelques applications numériques relatives à deux types de coques :

- coques à double courbure ayant des projections rectangulaires,
- coques à double courbure ayant des projections curvilignes.

Le premier type de coques proposé inclut les coques sphériques, paraboloides hyperboliques (figure 8.1), cylindriques (figure 8.4), et les plaques ayant des projections rectangulaires. Le deuxième type de coques inclut les calottes sphériques (figure 8.3), les coques cylindriques, les coques selle (figure 8.2), et les plaques avec des projections curvilignes. Dans ce deuxième type de coque, une importance particulière est donnée aux coques elliptiques (figure 8.5) où une étude paramétrique est étendue et des résultats originaux sont offerts. Deux types de matériaux sont considérés : isotropes et fonctionnellement gradués de différents mélanges. Notons ici que les résultats relatifs aux coques MFG se trouvent le long des résultats relatifs aux coques isotropes. Le lecteur peut les distinguer par un exposant nul ( $n=0$ ) pour les résultats graphiques et par la couleur apparente pour les résultats numériques.



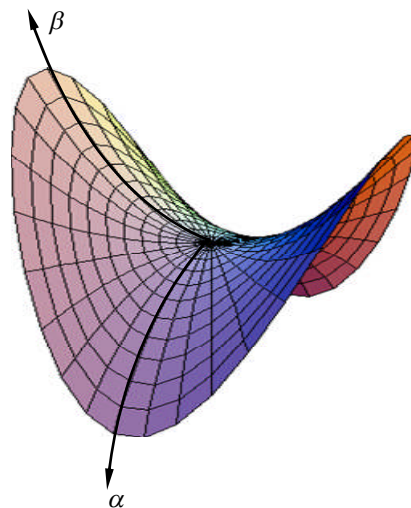
**Fig. 8.1** Coque paraboloides hyperbolique ayant une projection rectangulaire.



**Fig. 8.2** Coques cylindriques en hydrocarbure [S7 (2011)].



**Fig. 8.3** Coques sphériques en énergétique [S6 (2011)].



**Fig. 8.4** Coque parabolöide hyperbolique ayant une projection circulaire (coque selle).



**Fig. 8.5** Coque à double courbure ayant une projection elliptique en génie civil (Centre national des arts du spectacle, Beijing, République Populaire de Chine) [S8 (2011)].

## 8.2 Convergence et validation

L'exemple de trois matériaux FG à six mélanges différents est considéré :  $n=0,0.5, 1, 4,10$  et 100. Les propriétés de ces matériaux avancés sont données dans le tableau 8.1. Comme cas particulier de la formulation MFG, les matériaux isotropes sont aussi présents en prenant l'exposant  $n = 0$ .

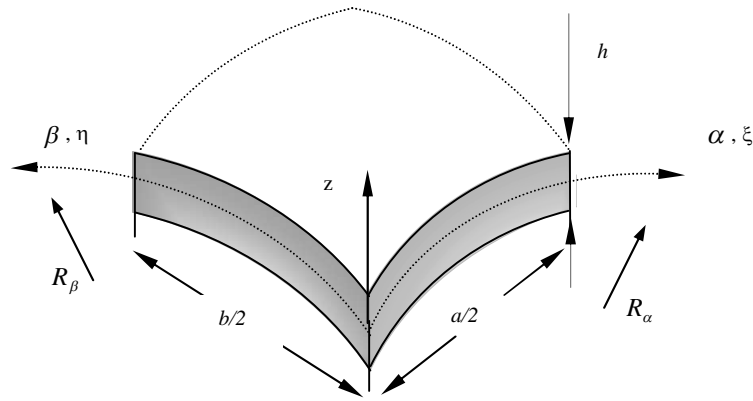
**Tableau. 8.1** Propriétés du mélange MFG [Zhao et al. (2009)].

Mélange	Constituants	Propriétés		
		$E_M / E_C$ (N/m <sup>2</sup> ) ( $\times 10^9$ )	$\nu_M / \nu_C$	$\rho_M / \rho_C$ (kg/m <sup>3</sup> )
1	Aluminium (Al)/ Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	70.0 / 380	0.30/0.30	2707/3800
2	Aluminium (Al)/ Zirconia (ZrO <sub>2</sub> )	70.0 / 151	0.30/0.30	2707/3000
3	Ti-6Al-4V/ Aluminium oxide	105.7 / 320.2	0.298/0.26	4429/3750

En profitant de la bi-symétrie et afin de garder la même plateforme de comparaison, le  $\frac{1}{4}$  de la coque est modélisé par un seul élément  $p$ . Les résultats sont donnés en fonction du paramètre de fréquence  $\Omega_L$ . Pour avoir les pulsations  $\omega$ , il suffit de remplacer les constantes dans l'expression du paramètre de fréquence.

### 8.2.1 Domaine rectangulaire

En raison de la projection rectangulaire, la coque à double courbure est modélisée par un élément quadrilatéral à quatre cotés droits (fig. 8.6). Le degré du polynôme  $p$  est augmenté de 2 à 9. La coque est en Aluminium / Alumina.



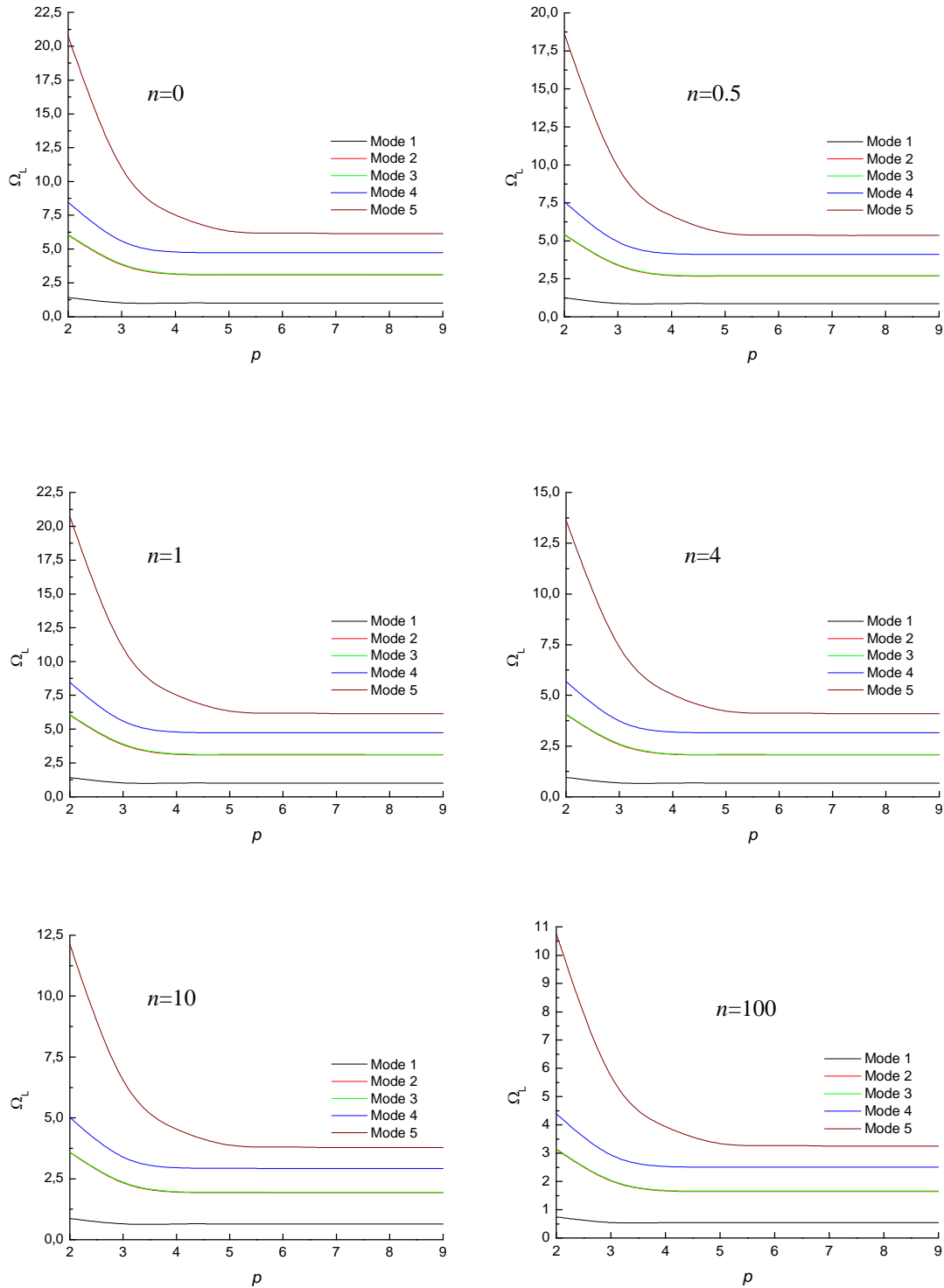
**Fig.8. 6** Coque à double courbure ayant une projection rectangulaire.

### 8.2.1.1 Convergence

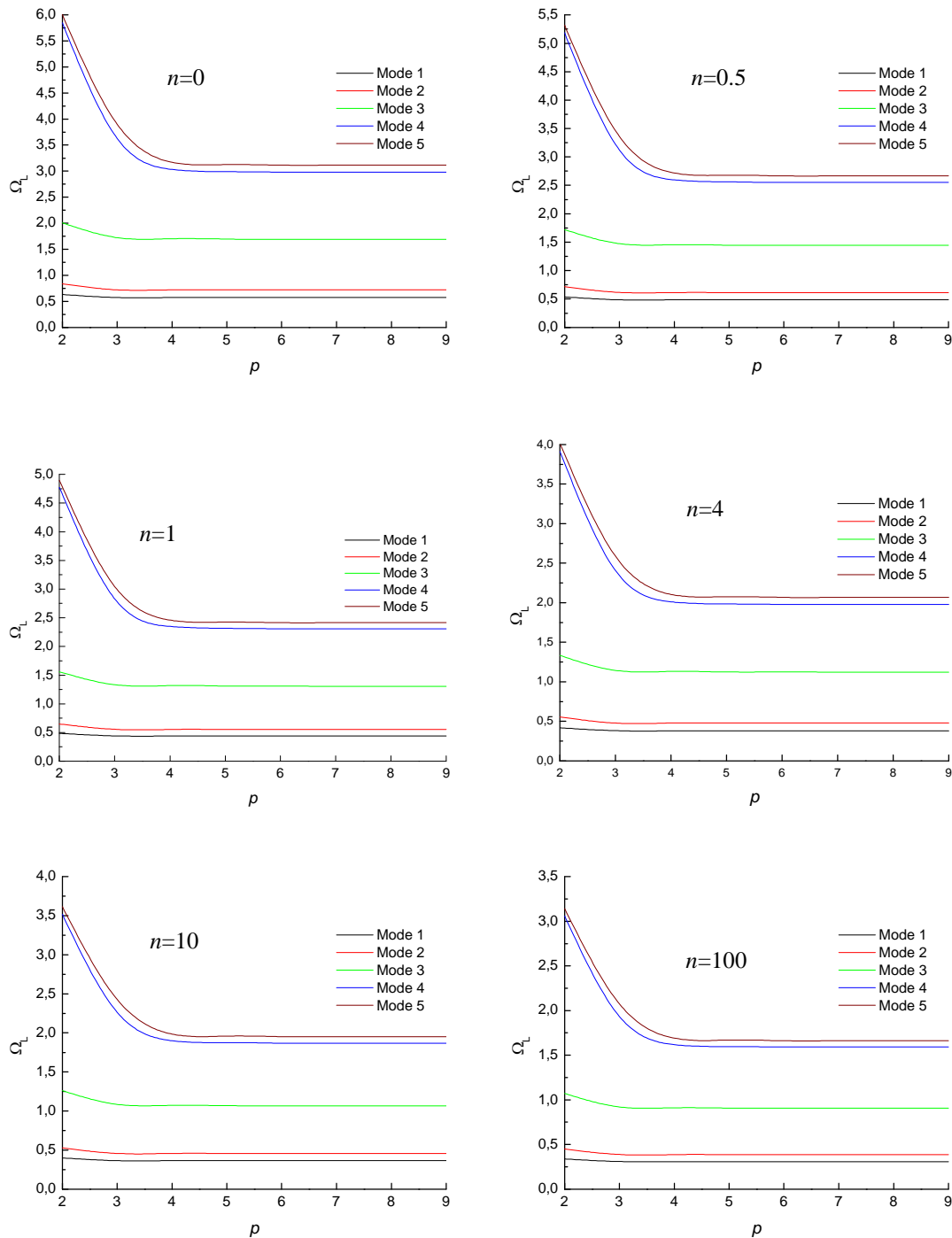
Dans cette étude de convergence, deux conditions aux limites sont considérées : la condition encastree (figure 8.7) et la condition libre (figure 8.8). D'après les graphes sur les figures 8.7 et 8.8, une convergence monotone a lieu qui s'accroît en augmentant le degré  $p$  du polynôme d'interpolation. Les courbes des premiers modes sont presque des droites. Même pour un seul élément et pour un degré  $p$  inférieur, la solution des cinq premiers modes est obtenue. Ceci confirme la convergence exponentielle de la méthode [Szabo & Babuska (1991) et Houmat (1997a) ; (1997b)]. Pour une visualisation numérique des graphes de convergence, le lecteur est invité à consulter l'annexe A4.

Remarquons que les fréquences linéaires sont beaucoup plus élevées pour une coque encastree que pour une coque libre. Ceci s'explique par l'effet des déplacements membranaires qui sont bloqués au voisinage de l'encastrement d'où la consolidation de la structure.

Notons aussi la présence des modes doubles pour la première condition aux limites. Ces modes sont séparés en appliquant la deuxième condition aux limites. Ceci concrétise l'importante influence de la condition aux limites sur le comportement vibratoire des coques non seulement sur les fréquences de vibration mais aussi sur l'apparition ou non de modes doubles qui peuvent avoir des effets destructifs en cas de résonance [Wang et al. (2005)].



**Fig 8.7** Courbes de convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_C}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG encastree à double courbure ayant une projection rectangulaire ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 1.0, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig 8.8** Courbes de convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG libre à double courbure ayant une projection rectangulaire ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 1.0, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

### 8.2.1.2 Validation

Les exemples de validation proposés considèrent quatre géométries distinctes (Tableau 8.2) :

- (i) Une plaque rectangulaire en ramenant les deux rayons de courbures à l'infini ( $a/R_\alpha = b/R_\beta = 0$ ) ;



- (ii) Un panneau cylindrique ( $b/R_\beta = 0$ ) ;
- (iii) Un panneau sphérique ( $a/R_\alpha = b/R_\beta = 0.5$ ) ;
- (iv) Une coque parabolôïde hyperbolique à deux rayons avec des signes opposés ( $a/R_\alpha = -b/R_\beta$ ).

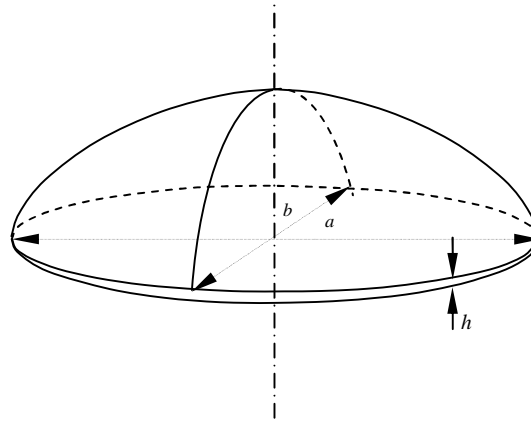
**Tableau. 8.2** Convergence et comparaison des paramètres de fréquences linéaires  $\Omega_L = \omega h \sqrt{\rho_C / E_C}$  d'une coque MFG peu profonde simplement appuyée ayant une projection rectangulaire ( $a/b = 1, a/h = 10$ ).

$b/R_\beta$	$a/R_\alpha$	$n$	$p$				Matsunaga [2008a]
			2	3	4	5	
0.0	0.0	0	0.0611	0.0603	0.0577	0.0577	0.0578
		0.5	0.0519	0.0513	0.0490	0.0490	0.0492
		1	0.0469	0.0463	0.0442	0.0442	0.0443
		4	0.0406	0.0400	0.0383	0.0383	0.0381
		10	0.0388	0.0382	0.0366	0.0366	0.0364
0.5	0.5	0	0.0814	0.0782	0.0762	0.0762	0.0751
		0.5	0.0710	0.0681	0.0664	0.0664	0.0657
		1	0.0649	0.0622	0.0607	0.0607	0.0601
		4	0.0544	0.0523	0.0509	0.0509	0.0503
		10	0.0502	0.0483	0.0471	0.0471	0.0464
0.0	0.5	0	0.0684	0.0653	0.0629	0.0629	0.0622
		0.5	0.0588	0.0561	0.0540	0.0540	0.0535
		1	0.0534	0.0509	0.0490	0.0490	0.0485
		4	0.0455	0.0435	0.0419	0.0419	0.0413
		10	0.0428	0.0410	0.0395	0.0395	0.0390
-0.5	0.5	0	0.0678	0.0608	0.0580	0.0580	0.0563
		0.5	0.0583	0.0518	0.0493	0.0493	0.0479
		1	0.0529	0.0468	0.0445	0.0445	0.0432
		4	0.0451	0.0404	0.0385	0.0385	0.0372
		10	0.0425	0.0385	0.0368	0.0368	0.0355
DDL			8	21	40	65	

Les résultats trouvés et ceux donnés par Matsunaga [2008a] sont très proches et parfois identiques à trois digits près. Ceci est confirmé pour les 5 mélanges ( $n=0,0.5, 1, 4$  et  $10$ ). Remarquons que les théories employées sont différentes (voir la discussion sur les travaux de Matsunaga en chapitre 6). Du point de vue convergence, remarquons qu'une précision de 3 chiffres est garantie par un  $p=4$ .

### 8.2.2 Domaine courbé

Un autre exemple de coque avec une géométrie plus complexe est proposé. Il s'agit des coques à double courbure ayant une projection curviligne elliptique (Figure. 8.9).

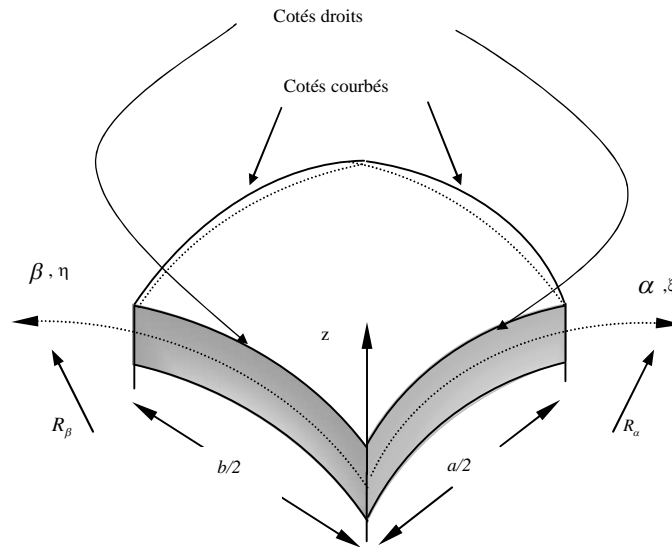


**Fig. 8.9** Coque à double courbure avec une projection elliptique.

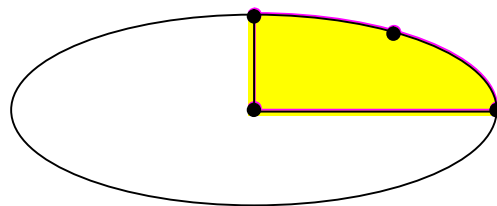
La formulation développée permet de définir la géométrie de cette coque en utilisant l'élément quadrilatéral de référence. Il suffit d'introduire les coordonnées de ses quatre nœuds-sommets avec les quatre fonctions paramétriques définissant le contour de la coque. Plusieurs potentialités de discrétisation se présentent :

- Un seul élément à quatre cotés courbés et quatre nœuds-sommets sur le bord curviligne suffit pour modéliser la coque en question.
- Comme deuxième solution et en bénéficiant de la bi-symétrie de la géométrie, seulement le  $\frac{1}{4}$  de la coque est modélisé par un élément à deux cotés courbés et deux cotés droits (figure 8.10). Une projection de la discrétisation proposée est donnée dans la figure 8.11. Les trois nœuds-sommets se trouvent sur le contour tandis que le quatrième nœud est le point d'intersection des axes de symétrie.

Cette dernière discrétisation sera maintenue pour l'étude de convergence succédée d'une validation de résultats.



**Fig. 8.10** Coque à double courbure avec deux cotés courbés et deux cotés droits.

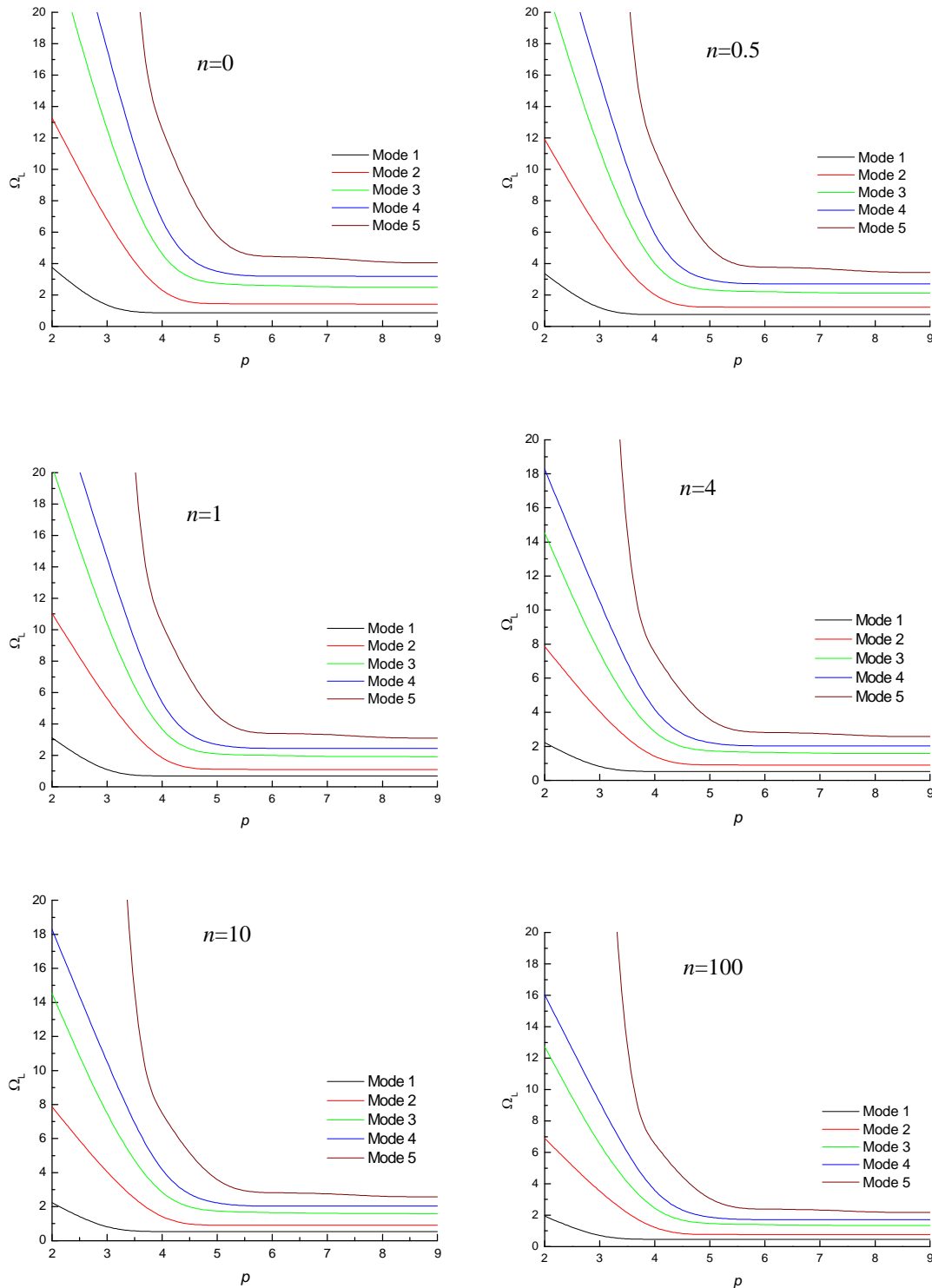


**Fig. 8.11** Vue de dessus du maillage proposé.

### 8.2.2.1 Convergence

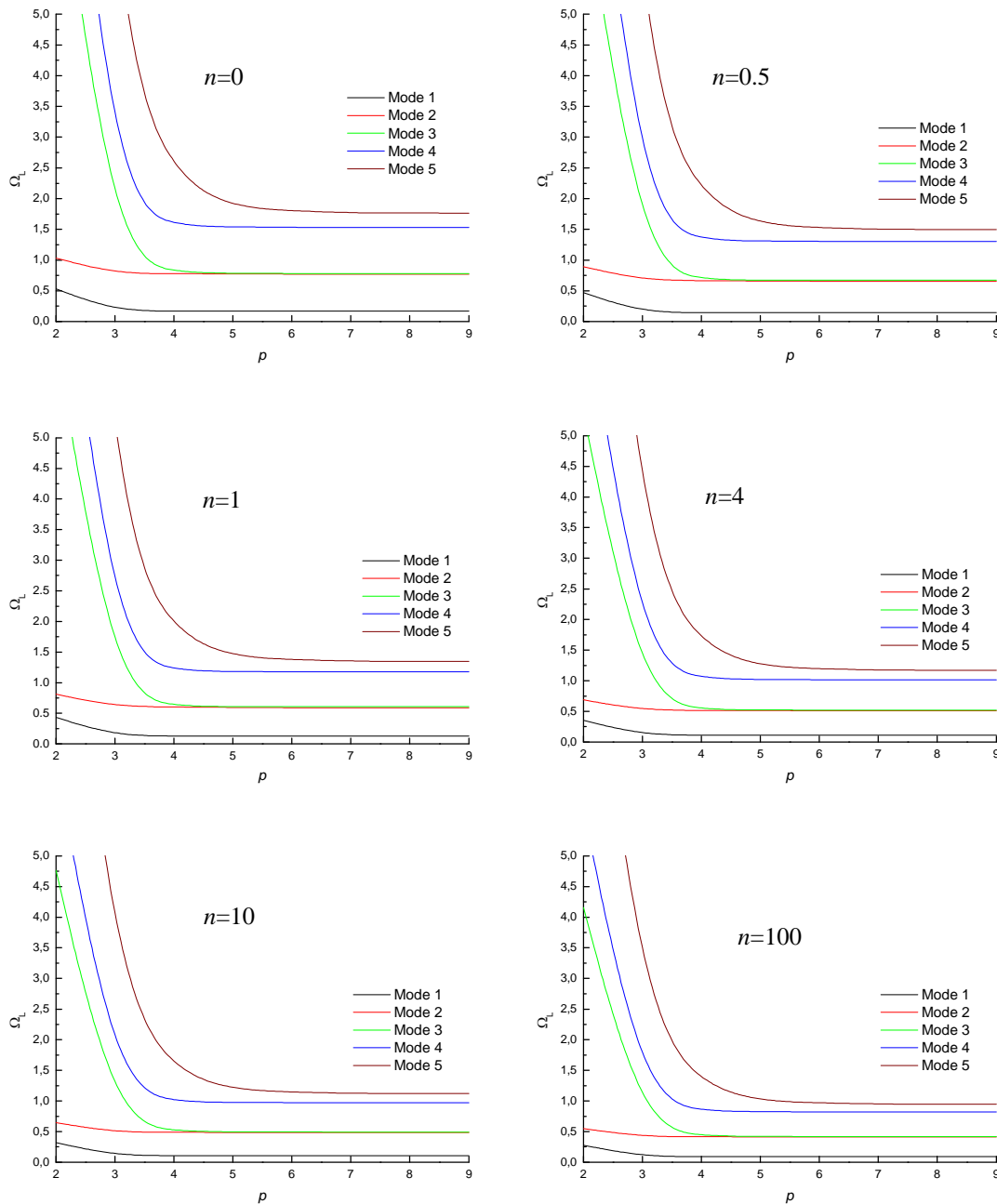
Deux conditions aux limites sont proposées : la Coque encastée (figure 8.12) et la coque libre (figure 8.13).

L'examen des graphes données par les figures 8.12 et 8.13 montre une convergence rapide de la solution des 5 premiers modes, mais elle est moins rapide que le cas du domaine rectangulaire traité dans l'exemple précédent. Cela est du à l'effet de la géométrie, plus elle se complique plus la vitesse de convergence s'amointrit.



**Fig 8.12** Courbes de convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_C}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG encastree à double courbure ayant une projection elliptique ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.01, a/R_\alpha = 0.2$  and  $k = 5/6$ ).

*Remarque :* pour une visualisation numérique de la convergence voir l'annexe A3.



**Fig 8.13** Courbes de convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_C}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d’une coque MFG libre à double courbure ayant une projection elliptique ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.01 \quad a/R_\alpha = 0.2 \text{ \& } k = 5/6$ ).

*Remarque* : il y’a une apparition d’un mode rigide pour cette condition aux limites.

### 8.2.2.2 Validation

Comme cela a déjà été signalé dans la revue bibliographique, les travaux sur les coques ayant une projection curviligne sont très peu relativement aux coques avec projection rectangulaire. Néanmoins pour les coques isotropes elliptiques, Liew et Lim [1996] ont employé la méthode de Ritz pour calculer les fréquences linéaires. Le code de calcul

développé dans le cadre de cette thèse est exécuté avec un  $p=5$  afin de retrouver les résultats de Liew et Lim [1996]. Notons que les théories employées sont distinctes. Par la même occasion de nouveaux résultats relatifs aux coques MFG sont présentés (Tableau 8.3).

**Tableau. 8. 3** Comparaison des paramètres de fréquence  $\Omega_L = \omega a b \sqrt{(\rho_M h / D_M)}$  des trois premiers modes Symétriques- Symétriques d'un panneau elliptique MFG libre ( $a/b=2, h/a=0.01$ ).

$a/R_\alpha$	$R_\alpha/R_\beta$	N° mode	Liew et Lim [1996]	$n$					
				0	0.5	1	4	10	100
0.0	all	1	13.322	13.3236	11.2864	10.1710	8.8397	8.4920	7.1648
		2	55.371	55.3644	46.9039	42.2702	36.7318	35.2813	29.7701
		3	62.765	62.7751	53.1874	47.9352	41.6497	39.9982	33.7527
0.2	-1.0	1	15.612	15.6326	13.4181	12.1724	10.4065	9.8113	8.3425
		2	61.453	61.4631	52.6799	47.7637	40.8810	38.6498	32.8315
		3	65.435	65.4489	55.7234	50.3493	43.4710	41.4747	35.0944
0.0		1	13.467	13.4715	11.4261	10.3042	8.9448	8.5789	7.2404
		2	62.687	62.6921	53.2800	48.0277	41.6742	39.3612	33.4688
		3	62.923	62.9222	53.8711	48.8830	41.7912	40.0627	33.8130
1.0		1	13.932	13.9432	11.8585	10.7085	9.2622	8.8480	7.4813
		2	63.513	63.5233	53.9993	48.7281	42.1854	40.1094	34.0396
		3	64.566	64.5602	55.4745	50.3841	42.9593	40.6909	34.4869

### 8.3 Exemple d'application

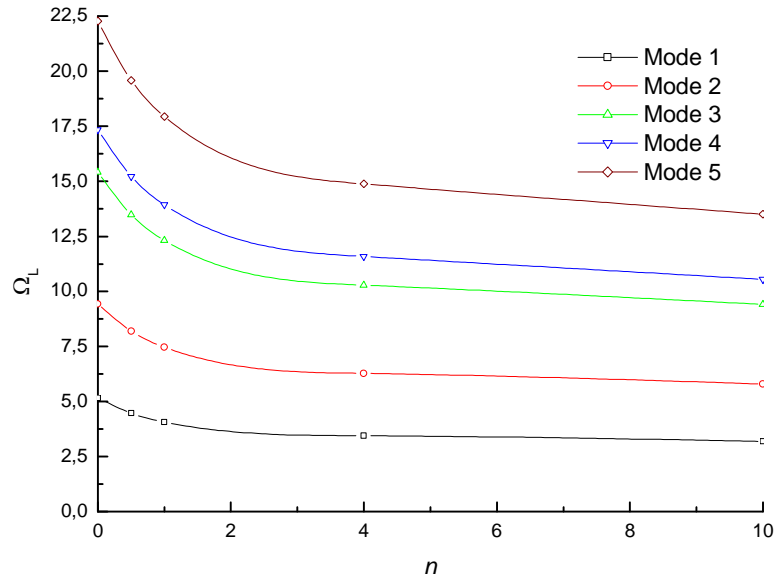
Comme exemple d'application la coque à doubles courbures ayant une projection elliptique présentée dans la section précédente est reconsidérée. Une étude paramétrique sera étendue afin d'analyser le comportement vibratoire linéaire et non linéaire de ce type de structure. En plus que cet exemple qui couvre plusieurs cas particuliers, la géométrie elliptique - une des géométries les plus complexe- est souvent présente en architecture génie civil ou en machines industrielles. Aucun travail n'a été proposé pour ce type de géométrie dans le domaine de vibration non linéaire. Donc les courbes non linéaires sont une contribution originale. Mais avant d'entamer le comportement non linéaire, faisons une étude paramétrique linéaire.

#### 8.3. 1 Vibration linéaire

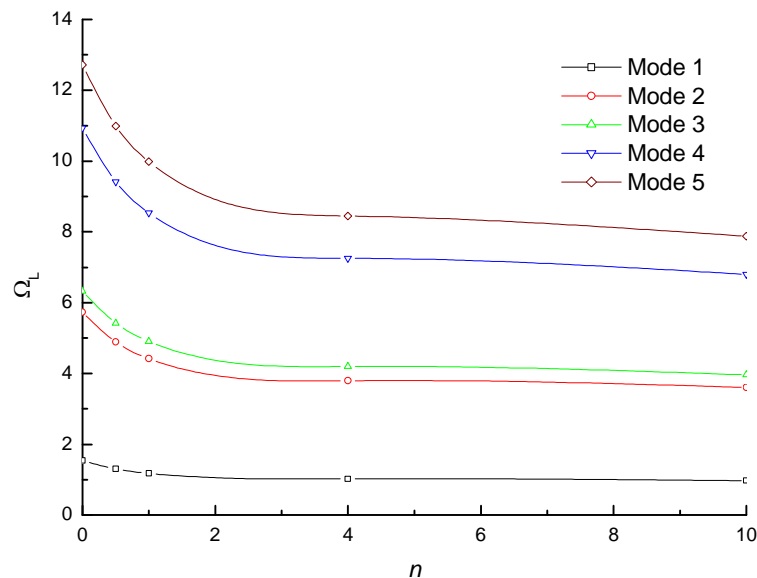
L'utilisation du code de calcul est étroite à sa partie linéaire. Le degré du polynôme est fixé à 5. L'influence de plusieurs paramètres sur le comportement vibratoire est discutée :

### 8.3.1.1 Influence de la condition aux limites

Pour une coque à double courbure ayant une projection elliptique, deux conditions aux limites sont présentées : la condition encastée (figure 8.14) et libre (figure 8.15).



**Fig. 8.14** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  MFG1 (coque encastée)  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



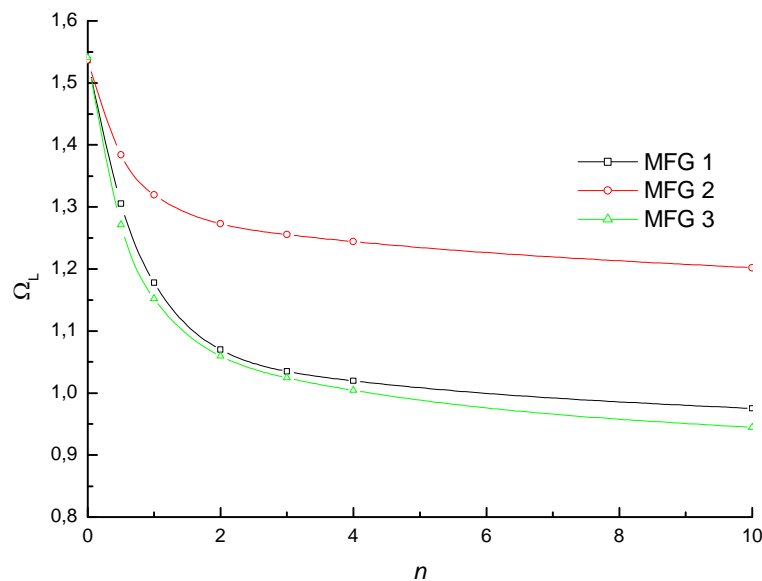
**Fig. 8.15** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  MFG1 (coque libre)  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

Les fréquences linéaires diminuent en augmentant l'exposant  $n$ , ceci est valable pour les 5 premiers modes des deux conditions aux limites. Les fréquences sont encore plus faibles pour une coque libre dont les effets membranaires sont moins réfractaires.

### 8.3.1.2 Influence de la nuance MFG

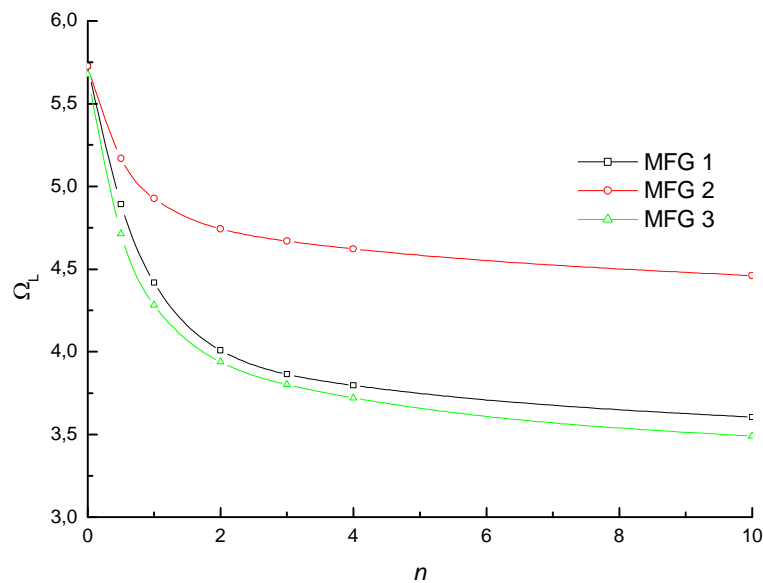
Pour une coque libre à double courbure avec projection elliptique et pour les trois MFG donnés en tableau de propriétés (tableau 8.1), la variation des fréquences des trois premiers modes en fonction de l'exposant  $n$  est analysée. Les résultats sont donnés par les figures 8.16-8.18.

Les courbes présentent la même allure pour les trois modes. Les fréquences relatives aux MFG1 et MFG3 sont proches comparées à MFG2. En augmentant  $n$ , ces fréquences diminuent d'une façon considérable. C'est l'effet de la densité céramique, qui devient de plus en plus importante en augmentant  $n$ . Elle est très proche dans le cas de MFG1 et MFG3 (voir le tableau de propriété).

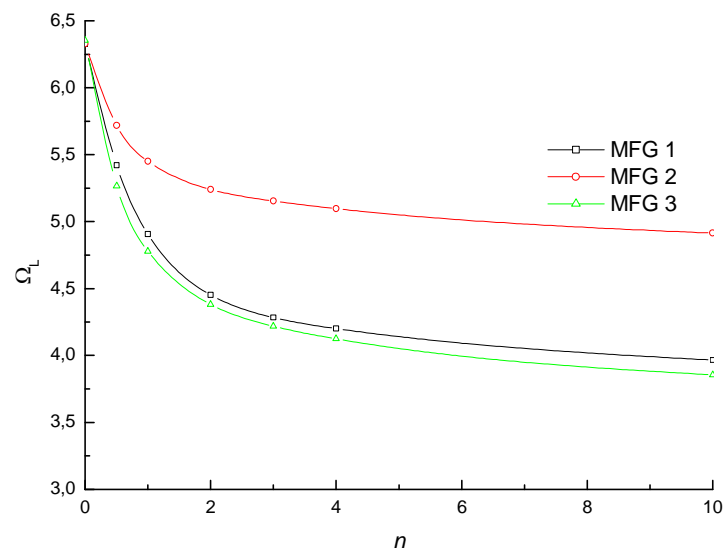


**Fig. 8.16** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  (mode 1)  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).





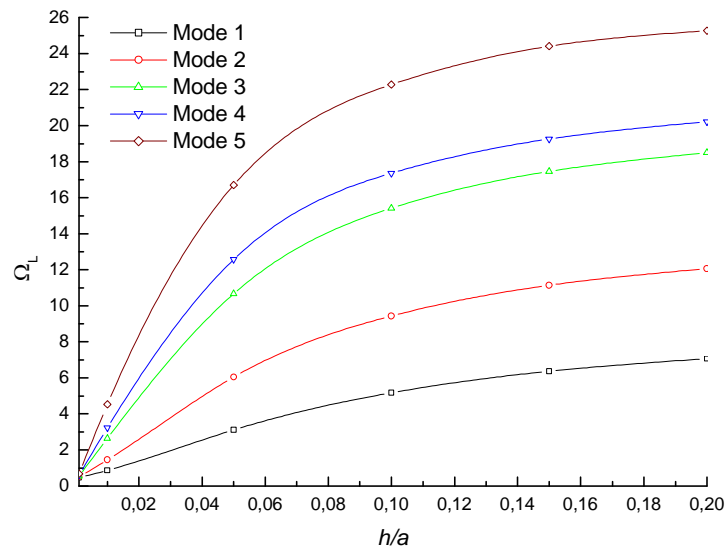
**Fig. 8.17** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  (mode 2)  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



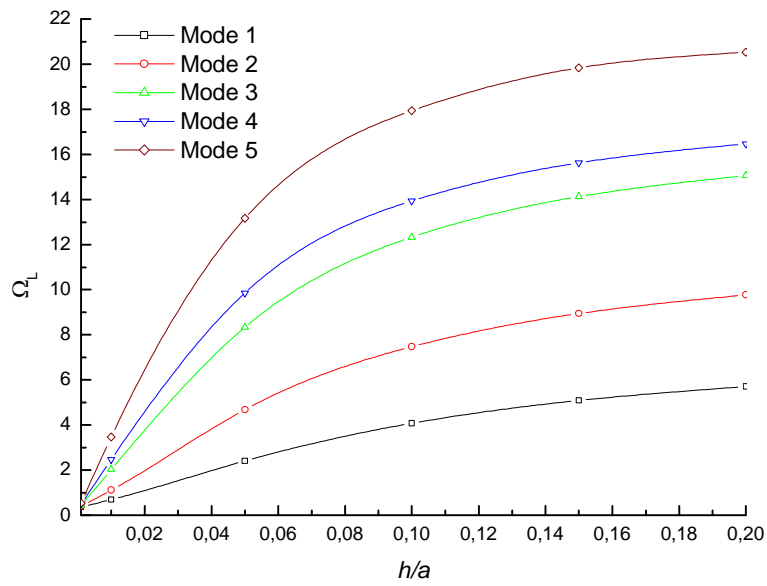
**Fig. 8.18** Variation de la fréquence en fonction de l'exposant  $n$  (mode 3)  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

### 8.3.1.3 Influence de l'épaisseur

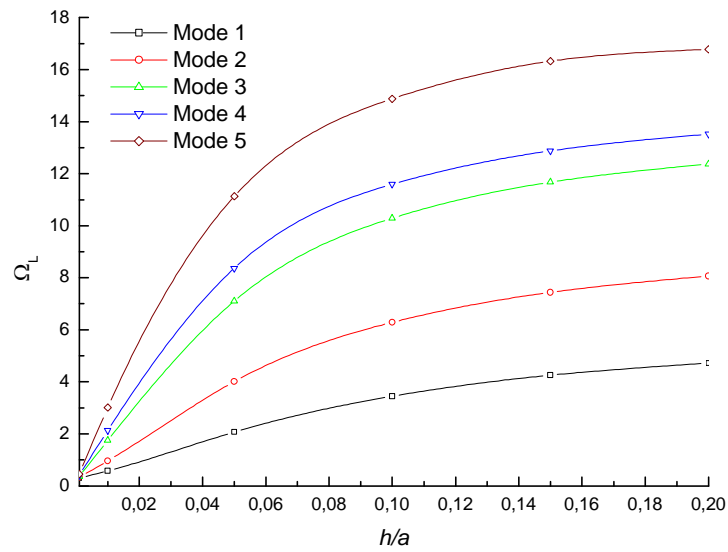
Pour une coque encadrée en MFG1 le rapport  $h/a$  est varié de 0.001 à 0.2. Les autres dimensions sont fixes ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$ ). Le facteur de correction de cisaillement transverse est  $k = 5/6$ . Les fréquences relatives aux 5 premiers modes sont tracées pour 4 mélanges différents  $n=0, 1, 4$  et  $10$  (figures 8.19-8.22).



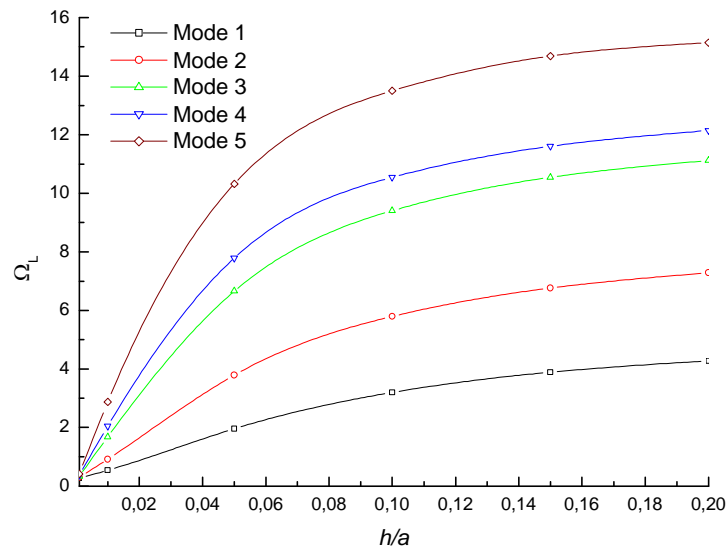
**Fig. 8.19** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=0$ )  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig. 8.20** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=1$ )  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig. 8.21** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=4$ )  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig. 8.22** Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur de la coque ( $n=10$ )  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

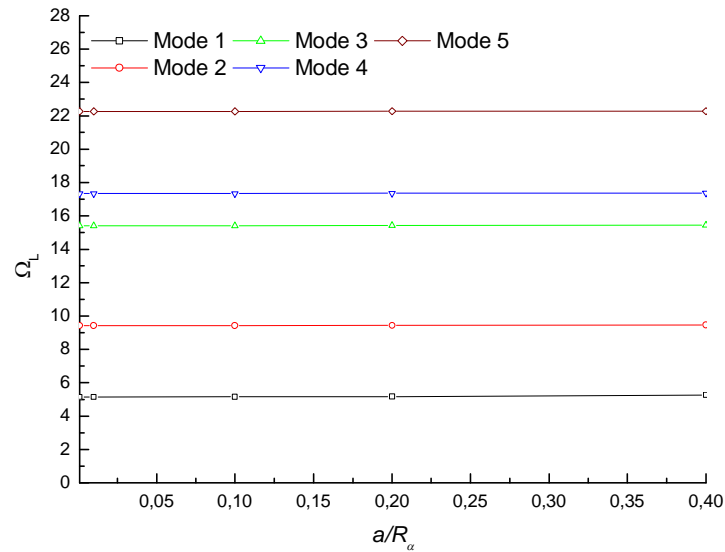
Les graphes montrent une croissance des paramètres de fréquences en fonction du rapport  $h/a$ . Ainsi une augmentation de l'épaisseur donne une rigidité supplémentaire à la coque.

### 8.3.1.4 Influence de la profondeur de la coque

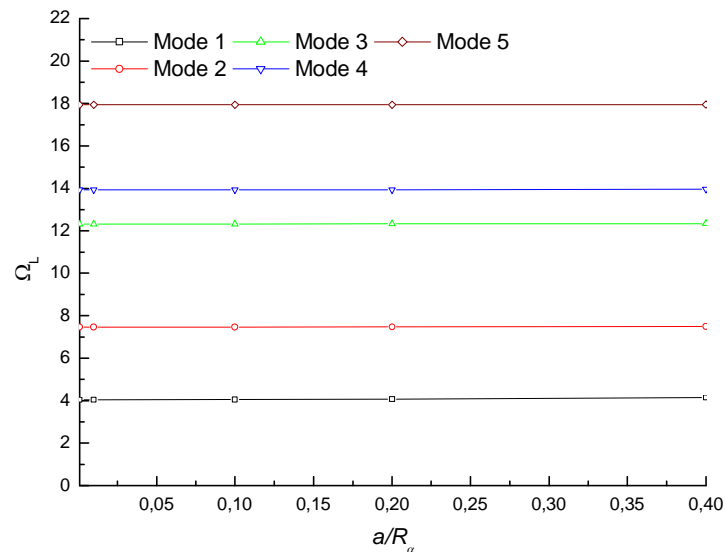
Les figures 8.23-8.26 montrent la variation des paramètres de fréquences des 5 premiers modes pour une variation du rapport ( $0 \leq a/R_\alpha \leq 0.4$ ). La valeur 0 de ce rapport est obtenue

en ramenant les rayons à l'infini. Les deux courbures de la coque sont prises égales dans les deux directions ( $R_\alpha = R_\beta$ ). Les autres paramètres géométriques sont fixes :  $a/b = 2$  et  $h/a = 0.1$ .

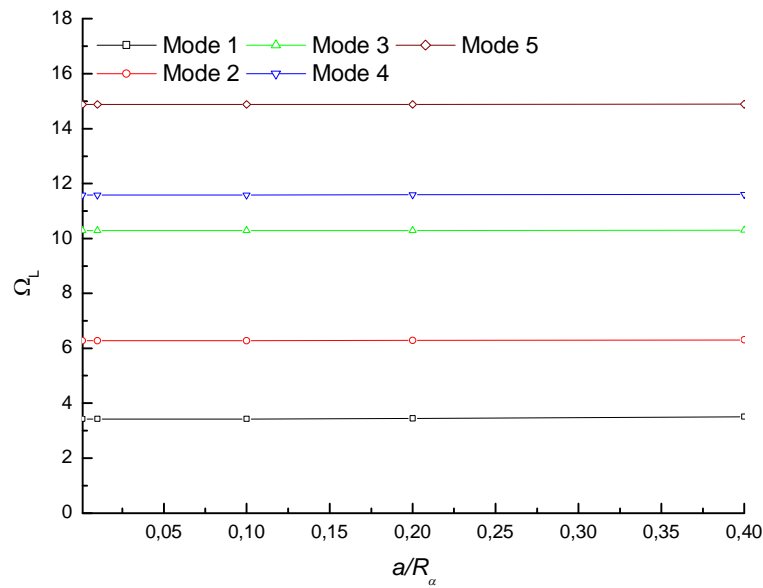
Marquant la faible influence de ce rapport géométrique sur les fréquences, les courbes sont presque des droites. Ces graphes confirment l'hypothèse sur les coques peu profondes [Ribeiro (2003), Soedel (2004) et Qatu (2010)].



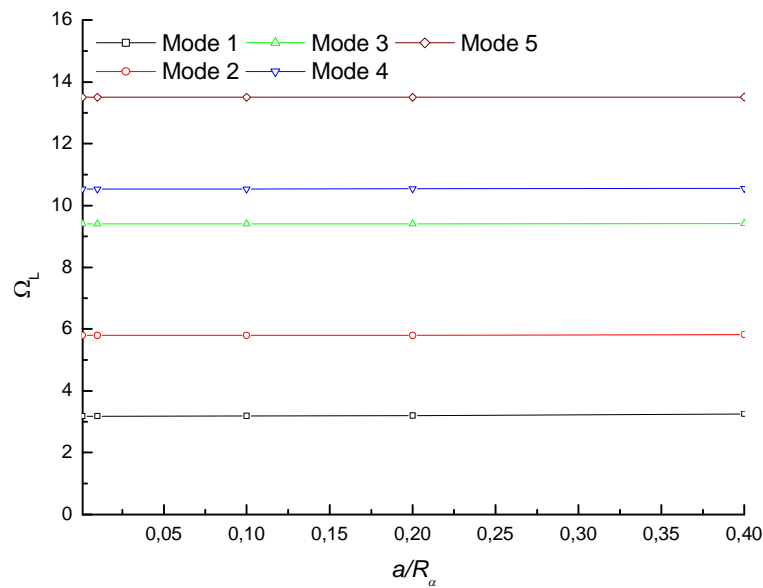
**Fig. 8.23** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=0$ )  
(  $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$  ).



**Fig. 8.24** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=1$ )  
(  $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$  ).



**Fig. 8.25** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=4$ )  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ).

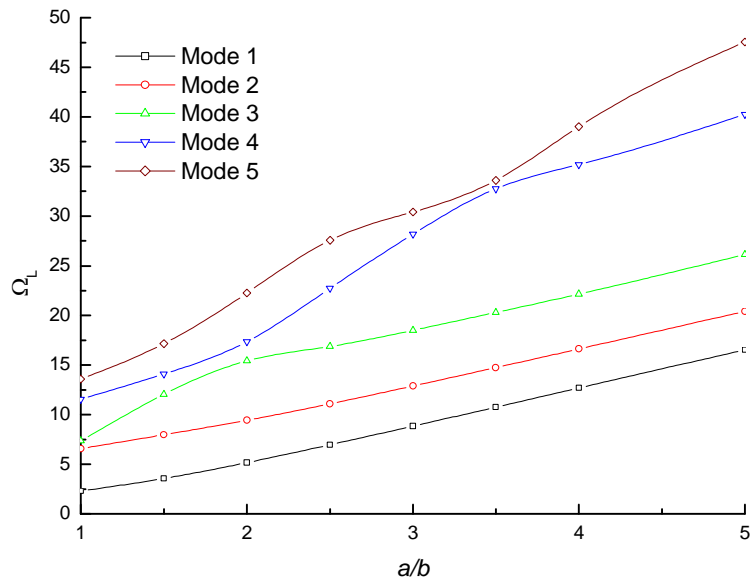


**Fig. 8.26** Variation de la fréquence en fonction de la profondeur de la coque ( $n=10$ )  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2$ ,  $h/a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ).

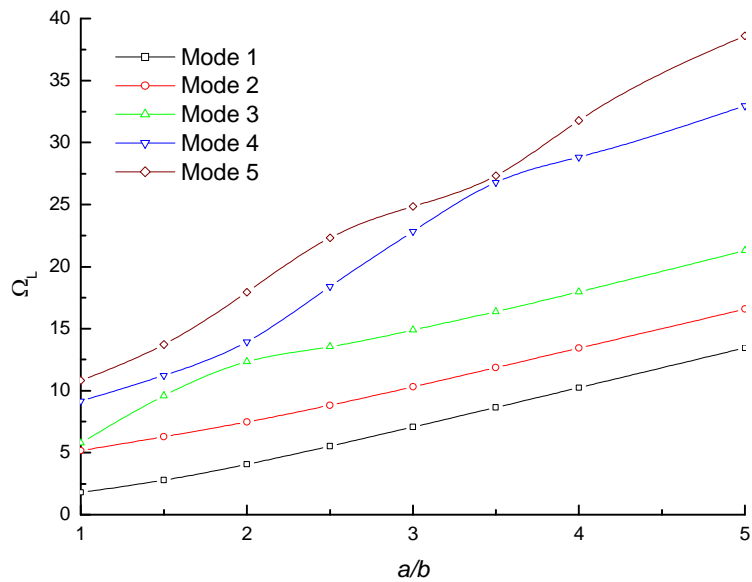
### 8.3.1.5 Influence du rapport d'ellipse

En gardant la même coque à double courbure ayant une projection elliptique, le rapport d'ellipse  $a/b$  sera varié pour quatre mélanges de MFG1 :  $n=0$ , 1,4 et 10 (figures 8.27-8.30).

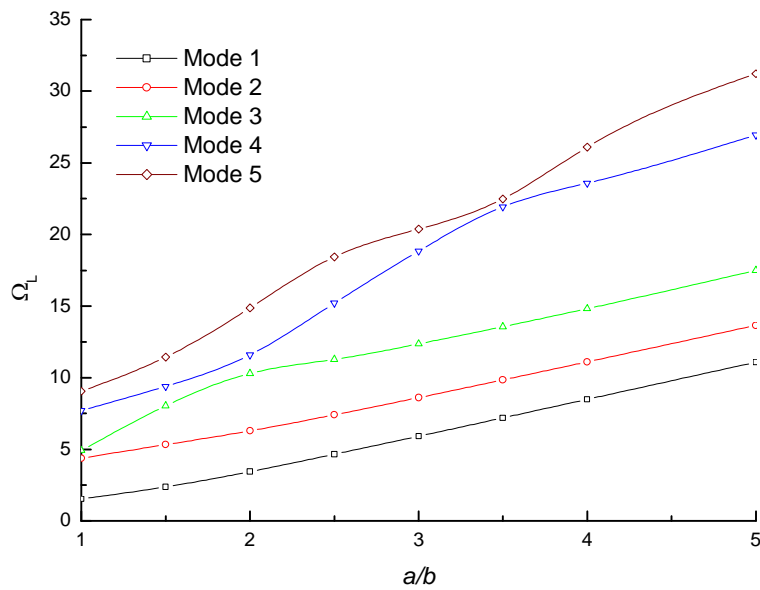
Le rapport des deux rayons de courbures est pris égal à l'unité ( $R_\alpha / R_\beta = 1$ ), le rapport d'épaisseur  $h/a = 0.1$  et la profondeur de la coque est  $a / R_\alpha = 0.2$ .



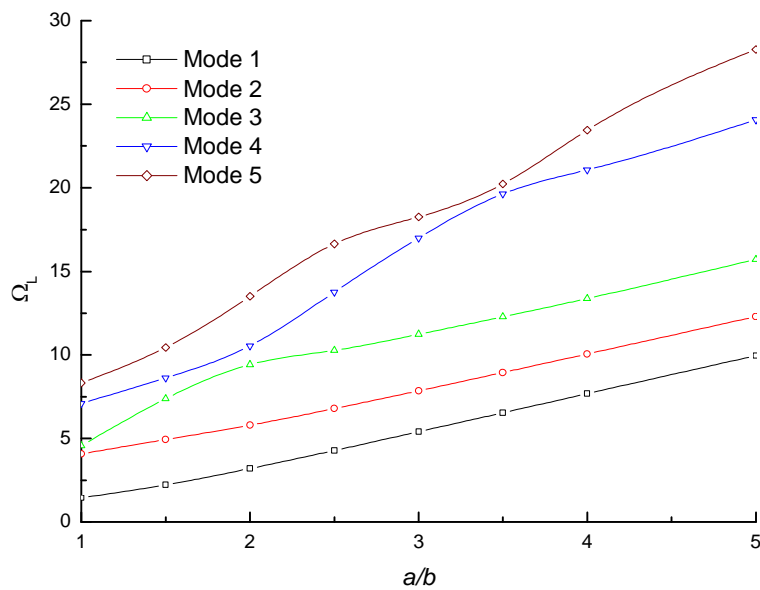
**Fig. 8.27** Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=0$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig. 8.28** Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=1$ ) ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig. 8.29** Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=4$ )  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ).

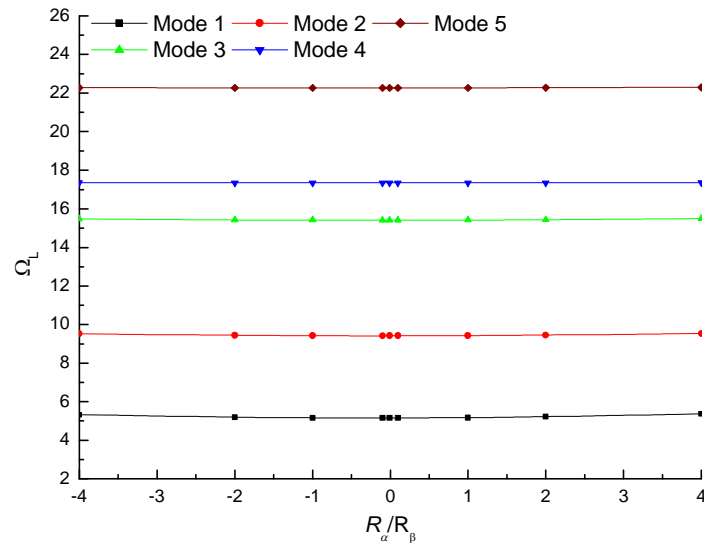


**Fig. 8.30** Variation de la fréquence en fonction du rapport d'ellipse ( $n=10$ )  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a / R_\alpha = 0.2, h / a = 0.1$  &  $k = 5/6$ ).

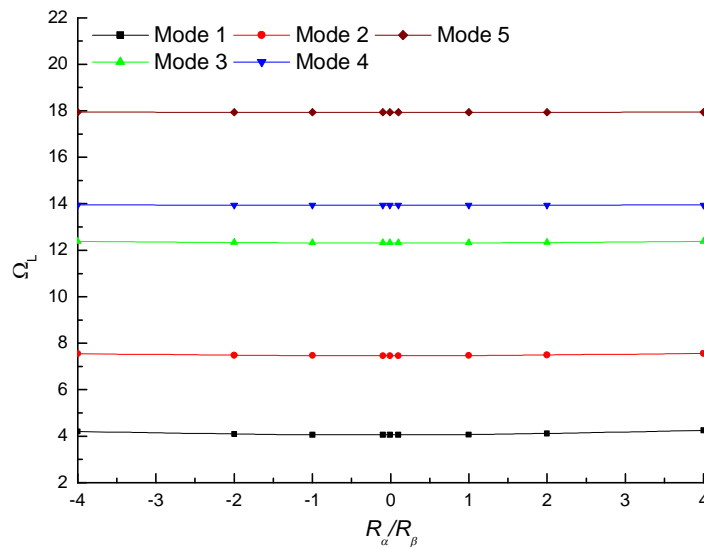
Les graphes 8.27-8.30 présentent un accroissement des fréquences en augmentant le rapport d'ellipse. En plus quelques rapports d'ellipse produisent des zones de rapprochements des modes. Par exemple le 3<sup>eme</sup> et le 4<sup>eme</sup> mode, pour un rapport  $a/b=2$ , et le 4<sup>eme</sup> et le 5<sup>eme</sup> mode pour un rapport  $a/b=3.5$ . Ces rapprochements peuvent engendrer des modes doubles.

### 8.3.1.6 Influence du rapport de courbures

Les figures 8.31-8.34 présentent les graphes de la variation des fréquences linéaires des 5 premiers modes en fonction du rapport de courbure  $R_\alpha / R_\beta$ . Ce rapport est varié de -4 à 4. La coque est en MFG1, encadrée, à double courbure et d'une projection elliptique. Les autres paramètres de la coque sont fixes ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  et  $k = 5/6$ ). Différentes nuances ( $n=0, 1, 4$  et  $10$ ) sont considérées.

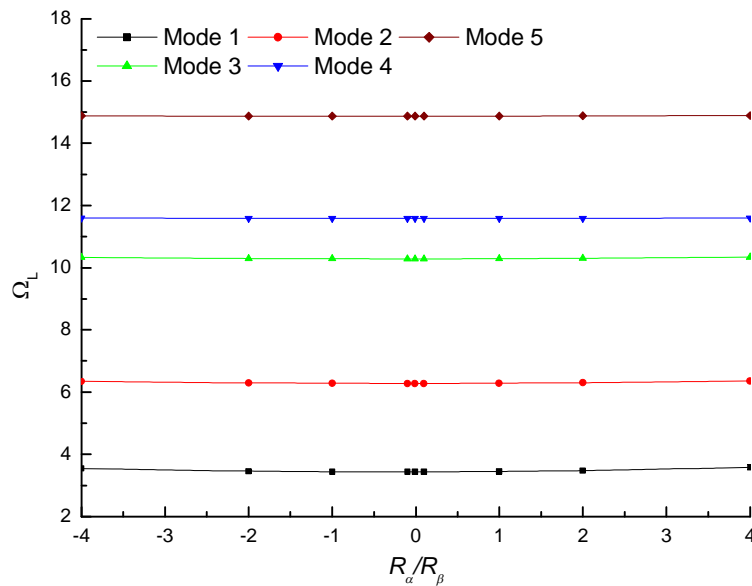


**Fig. 8.31** Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encadrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ) ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

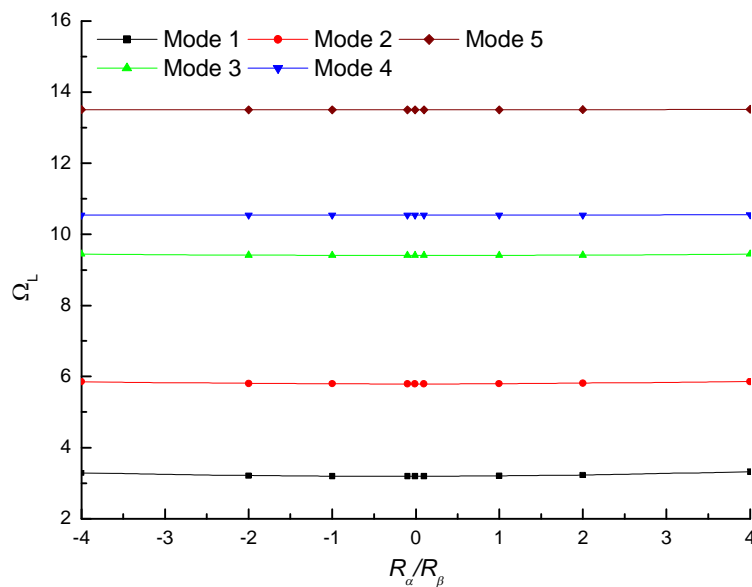


**Fig. 8.32** Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encadrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ) ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).





**Fig. 8.33** Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=4$ ) ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).



**Fig. 8.34** Variation de la fréquence en fonction du rapport des rayons de courbure d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ) ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

Les graphes indiquent une faible variation des paramètres de fréquences des 5 premiers modes. Un faible fléchissement apparaît au milieu des courbes. Cela correspond aux coques cylindriques. Avec la bordure curviligne de la coque et la condition d'encastrement sur cette

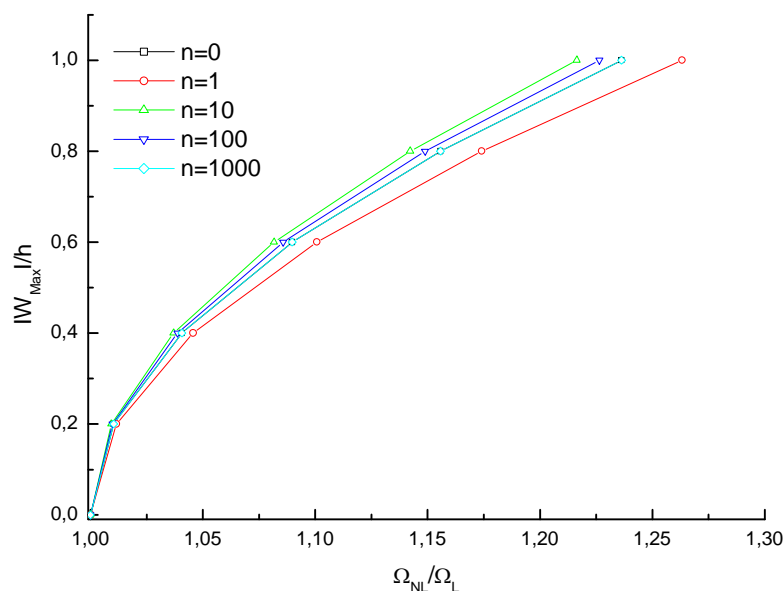
bordure, les fréquences linéaires semblent moins affectées par la variation de ce rapport géométrique.

### 8.3.2 Vibration non linéaire

Dans la première partie de cet exemple d'application numérique, nous nous sommes limités au comportement vibratoire linéaire des coques à double courbure ayant une projection curviligne elliptique. Mais souvent dans ce type de structures minces le problème se complique d'avantage et une non linéarité géométrique survient. Dans le cadre de cette thèse ce problème est discuté pour la première fois. Par la même occasion une étude paramétrique avec l'influence des conditions aux limites et de certains rapports géométriques sur les fréquences non linéaires est abordée. Les mêmes caractéristiques géométriques de la coque employées dans la section précédente sont maintenues.

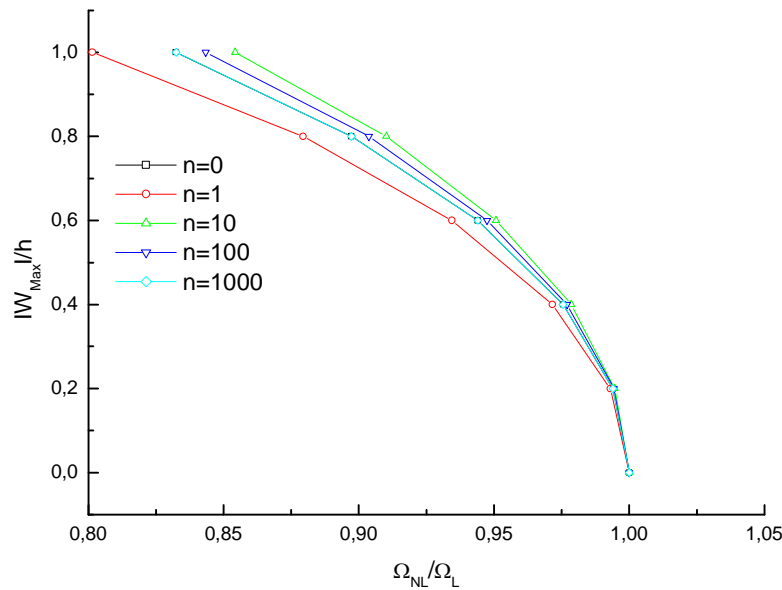
#### 8.3.2.1 Influence de la condition aux limites

Seule le mode fondamental sera considéré. Le rapport amplitude maximale/épaisseur ( $|W_{\max}|/h$ ) est tracé en fonction du rapport paramètre de fréquence non linéaire sur le paramètre de fréquence linéaire ( $\Omega_{NL}/\Omega_L$ ). Deux conditions aux limites sont considérées avec différents mélanges de MFG1 (figures 8.35-8.36).



**Fig. 8.35** Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque encastree à double courbure ayant une projection elliptique (MFG1).

( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2,0$ ,  $h/a = 0,1$ ,  $a/R_\alpha = 0,2$  &  $k = 5/6$ )



**Fig. 8.36** Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque simplement appuyée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG1).  
 $(R_\alpha/R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2 \text{ \& } k = 5/6)$

Dans le domaine de la vibration non linéaire des structures ces courbes sont connues sous le nom de « courbes d'épine dorsale ». Dans ces courbes, l'amplitude de la vibration est dépendante de la fréquence. Avec les deux conditions aux limites proposées, deux comportements antagonistes se dégagent :

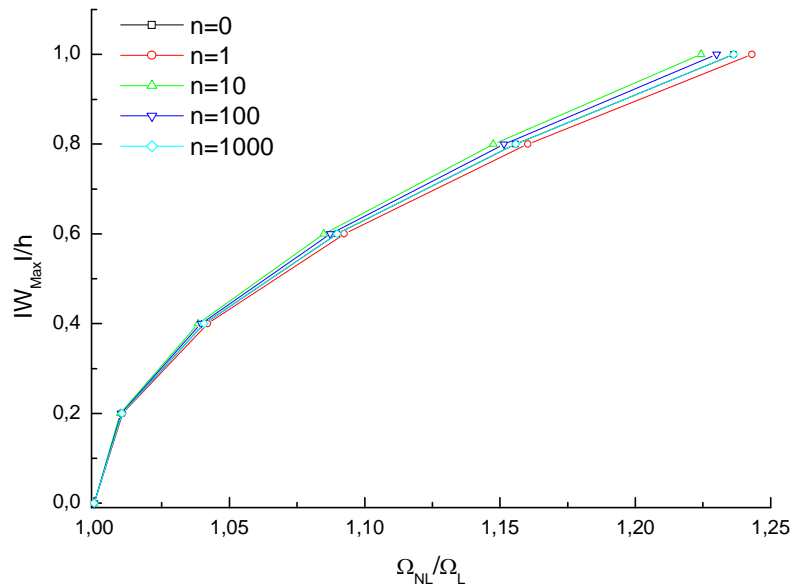
- Comportement raidissant qui est caractérisé par des fréquences croissantes (figure 8.35).
- Comportement assouplissant qui est caractérisé par des fréquences décroissantes (figure 8.36).

### 8.3.2.2 Influence de la nuance MFG

Considérons maintenant d'autres matériaux MFG tout en gardant la même géométrie et la même condition aux limites (figures 8.37-8.38). L'exposant  $n$  prend les valeurs 0, 1, 10, 100 et 1000.

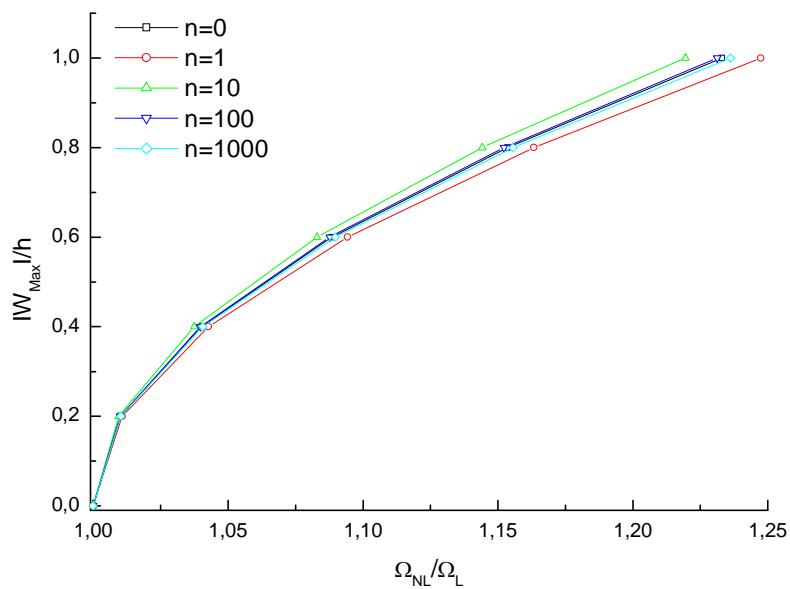
Un comportement non linéaire du type raidissant est observé pour les trois MFG (figures 8.35, 8.37 et 8.38). Pour les figures 8.35 et 8.37 correspondantes à MFG1 et MFG2, notons que les exposants de la fraction volumique  $n = 0$  (céramique pur) et  $n = 1000$  (métal pur) produisent des résultats semblables. Ceci est expliqué par le fait que le paramètre de fréquence est une fonction des coefficients de Poisson  $\nu_M$  et  $\nu_C$ . Dans le cas de MFG1 et

MFG2, ces coefficients sont égaux (voir le tableau 8.1). D'autre part, ces coefficients sont discordants pour le MFG3 ( $v_M \neq v_C$ ).



**Fig. 8.37** Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG2).

( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2.0$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

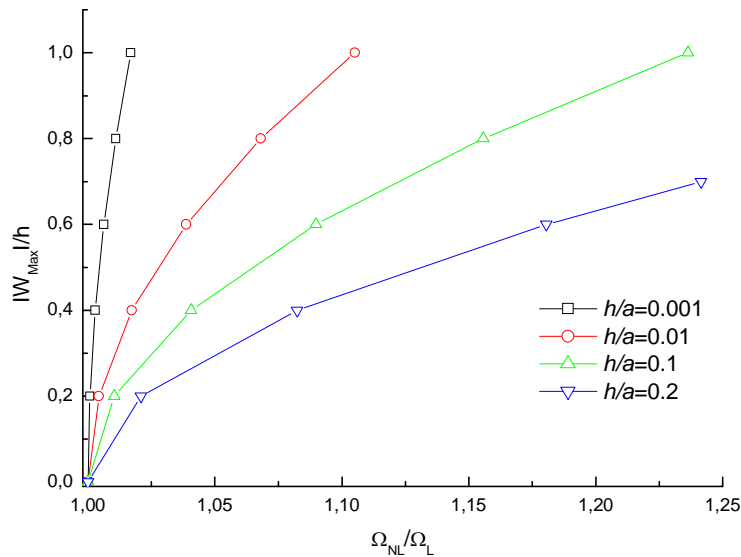


**Fig. 8.38** Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique (MFG3).

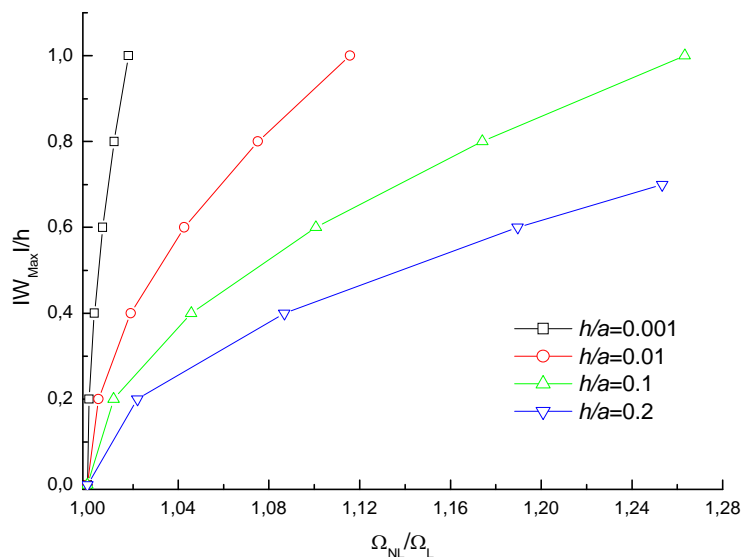
( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2.0$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

### 8.3.2.3 Influence de l'épaisseur

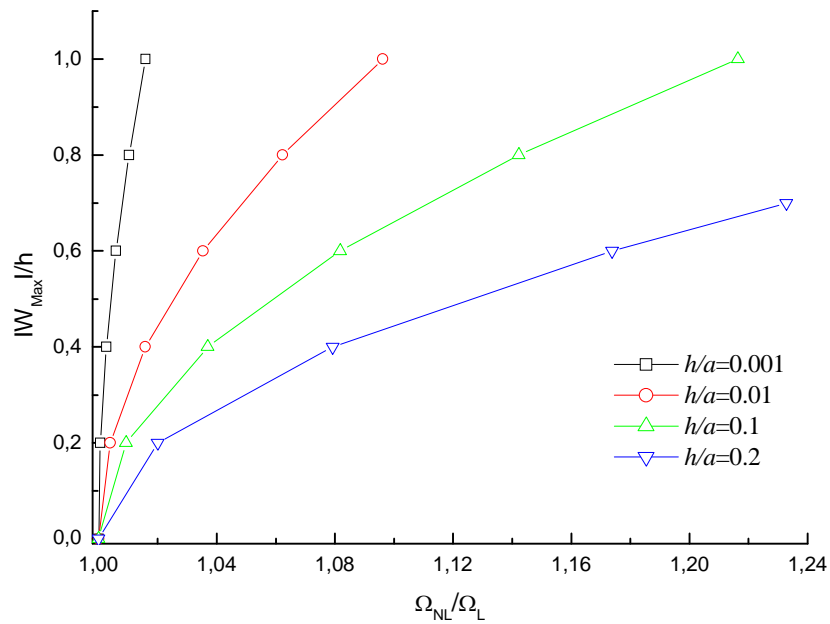
Les figures 8.39-8.41 présentent la variation des paramètres de fréquences du mode fondamental en fonction de l'amplitude maximale pour différents rapports d'épaisseur. En plus du cas d'un matériau isotrope ( $n=0$ ), deux autres mélanges de MFG1 avec les fractions volumiques  $n=1$  et  $n=10$  sont considérés.



**Fig. 8.39** Influence de l'épaisseur sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2.0$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )



**Fig. 8.40** Influence de l'épaisseur sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2.0$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )



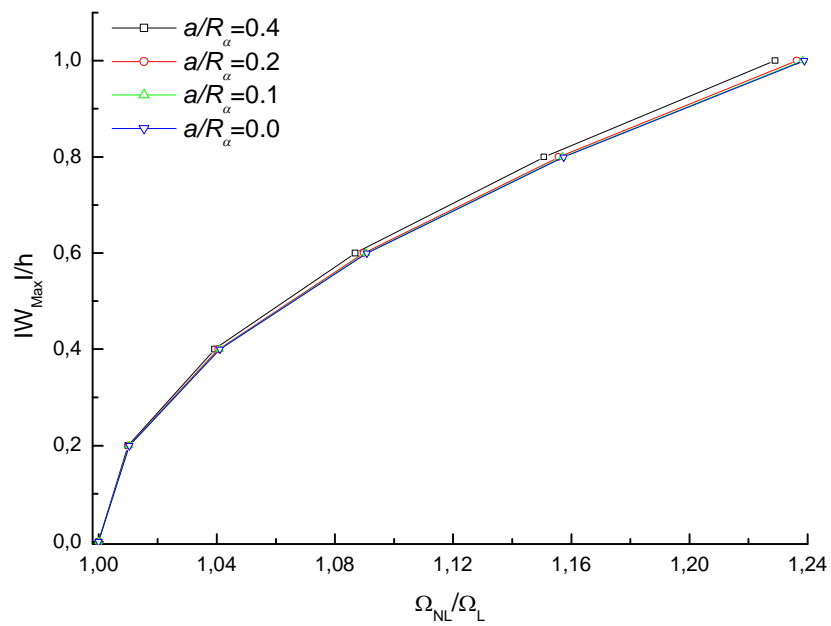
**Fig. 8.41** Influence de l'épaisseur sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
( $R_\alpha/R_\beta = 1$ ,  $a/b = 2.0$ ,  $a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

Les figures 8.39-8.41 conduisent à constater que les effets non linéaires sont fortement liés au changement de l'épaisseur. Plus l'épaisseur de la coque augmente, plus le comportement raidissant est important.

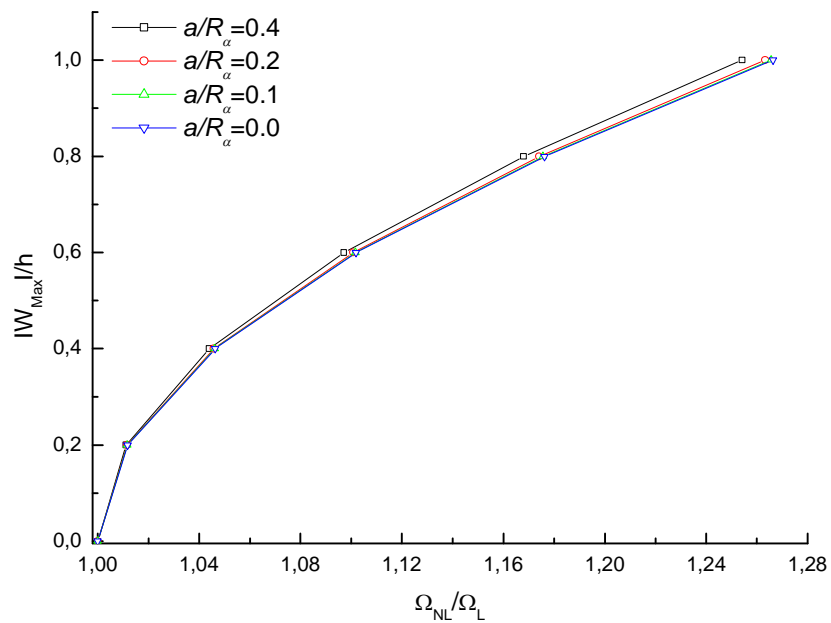
#### 8.3.2.4 Influence de la profondeur de la coque

Un autre paramètre géométrique est étudié, il s'agit de la profondeur de la coque (figures 8.42-8.44). En assurant des rayons de courbures égaux dans les deux directions et en fixant le rapport d'épaisseur  $h/a = 0.1$ , la courbure de la coque prend plusieurs valeurs  $a/R_\alpha = 0.0, 0.1, 0.2$  et  $0.4$ . Le cas de courbures nulles désigne une plaque.

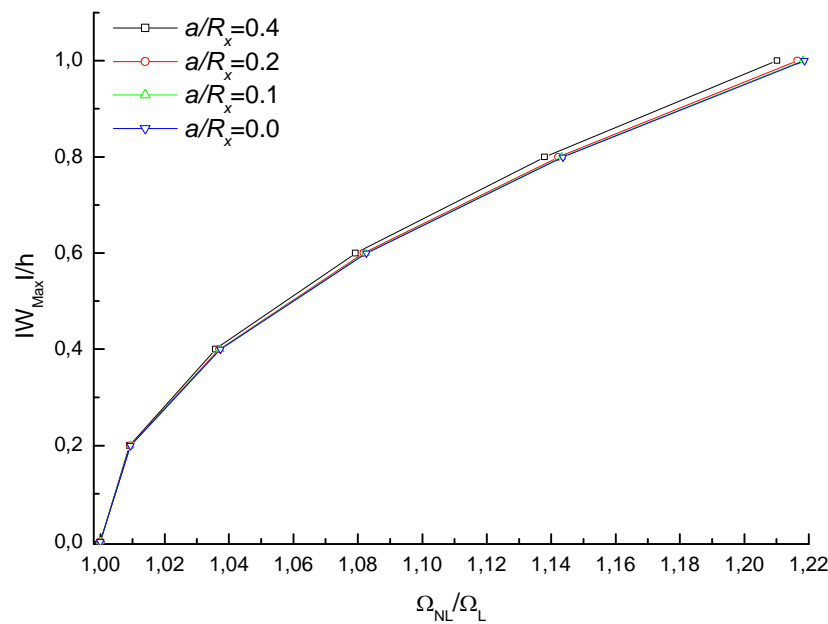
Les courbes dans les figures 8.42-8.44 sont très proches pour certains rapports elles sont confondues. Cette observation mène à constater la faible influence de ce rapport sur les fréquences non linéaires comparativement aux autres rapports géométriques.



**Fig. 8.42** Influence de la courbure sur les fréquences non linéaires d’une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).  
 ( $R_\alpha = R_\beta, h/a = 0.1, a/b = 2.0$  &  $k = 5/6$ )



**Fig. 8.43** Influence de la courbure sur les fréquences non linéaires d’une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 ( $R_\alpha = R_\beta, h/a = 0.1, a/b = 2.0$  &  $k = 5/6$ )



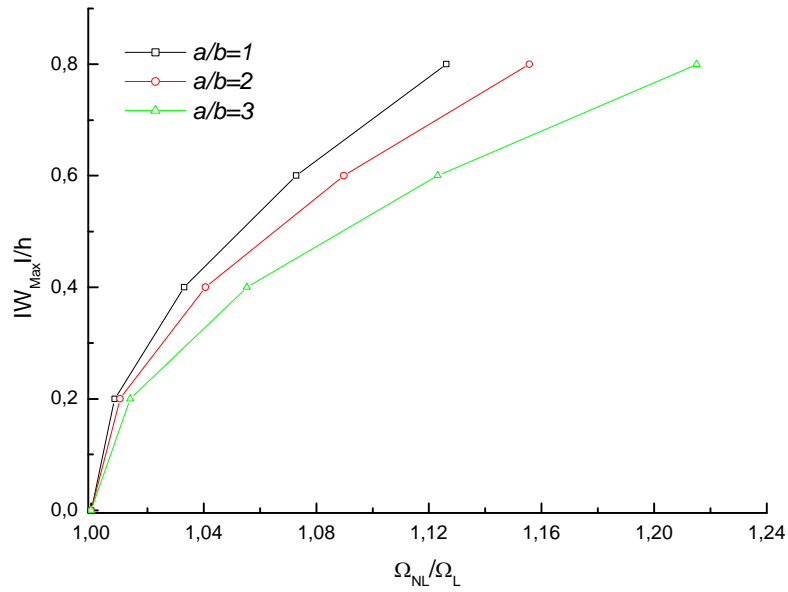
**Fig. 8.44** Influence de la courbure sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 ( $R_\alpha = R_\beta, h/a = 0.1, a/b = 2.0$  &  $k = 5/6$ )

### 8.3.2.5 Influence du rapport d'ellipse

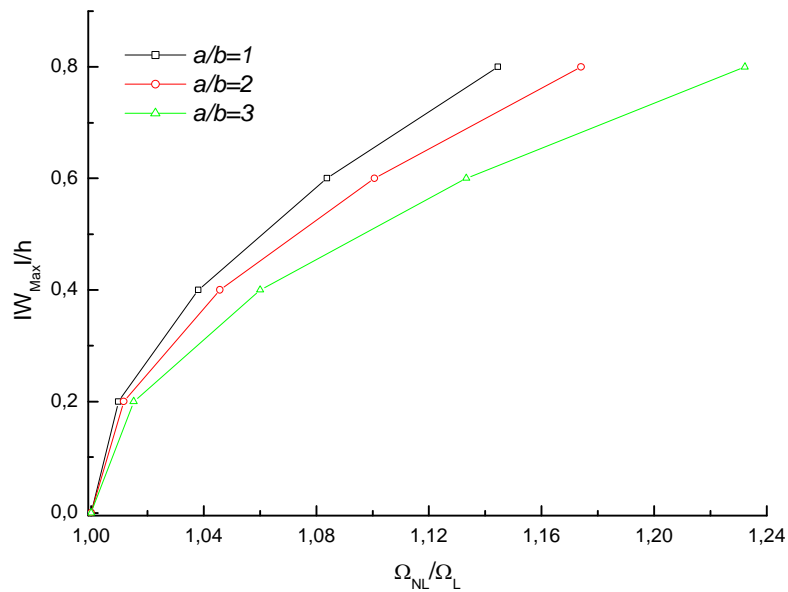
La coque à double courbure avec sa projection elliptique est considérée. Trois rapport d'ellipse sont utilisés  $a/b=1,2$  et  $3$ . Notons que le rapport  $a/b=1$  représente le cas particulier d'une coque à double courbure avec une projection circulaire. Les autres paramètres géométriques sont fixes tel que les deux rayons de courbures sont égaux ( $R_\alpha = R_\beta$ ), le rapport d'épaisseur  $h/a = 0.1$ , et la profondeur de la coque  $a/R_\alpha = 0.2$ . La figure 8.45 est celle d'une coque isotrope ( $n=0$ ). Les figures 8.46-8.47 sont celles de la coque en MFG1 avec deux fractions volumiques différentes ( $n=1$  et  $n=10$ ).

Les figures 8.45-8.47 montrent un effet non linéaire raidissant. Parmi les coques ayant différents rapports d'ellipse, la coque à double courbure à projection circulaire présente les courbes les moins incurvées. D'où l'effet important de la géométrie du contour sur le raidissement de la structure.

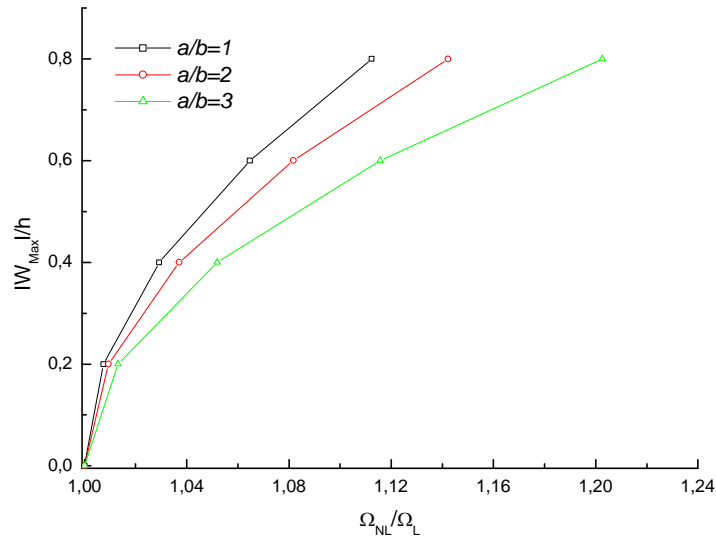




**Fig. 8.45** Influence du rapport d'ellipse sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection curviligne ( $n=0$ ).  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )



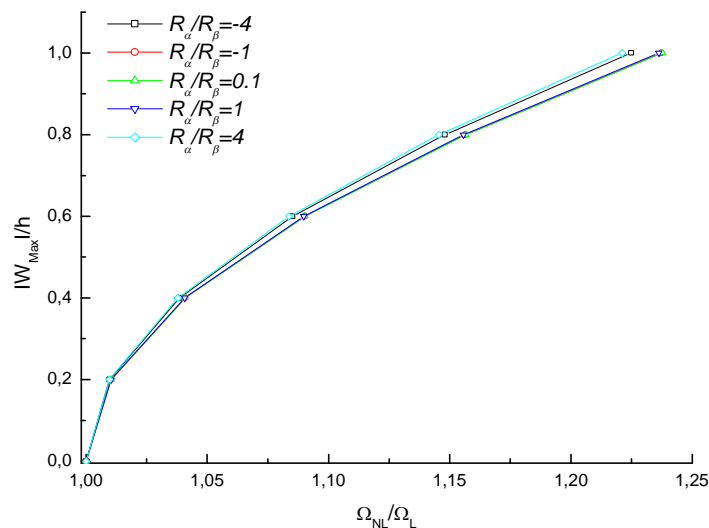
**Fig. 8.46** Influence du rapport d'ellipse sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection curviligne ( $n=1$ ).  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )



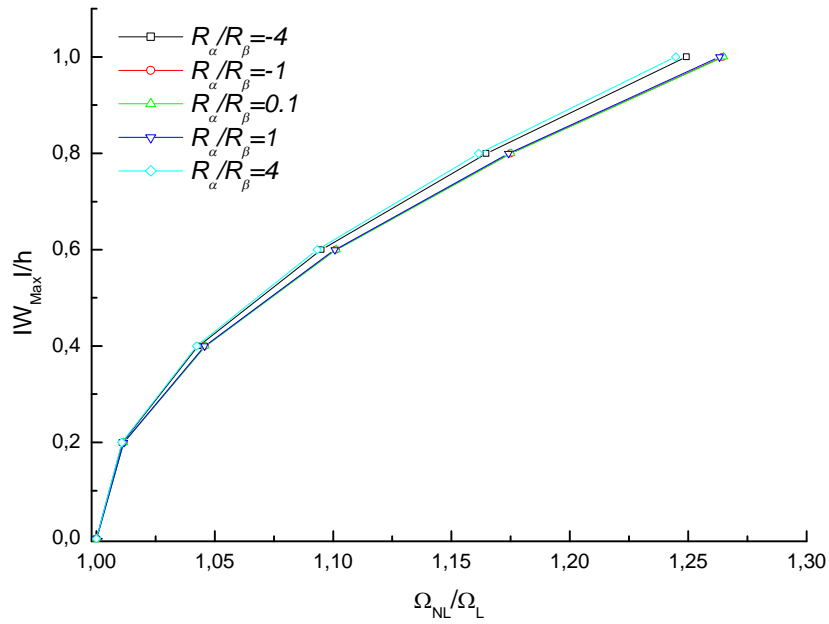
**Fig. 8.47** Influence du rapport d'ellipse sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection curviligne ( $n=10$ ).  
 ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

### 8.3.2.6 Influence du rapport de courbures

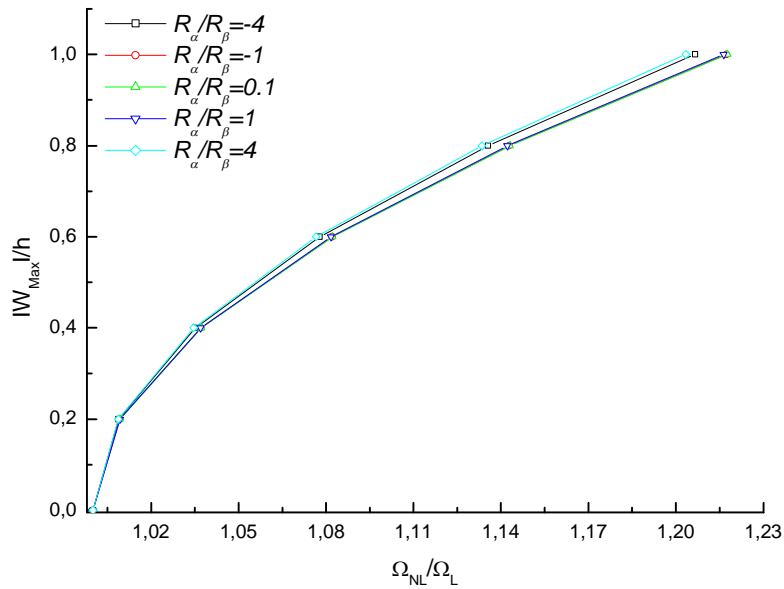
Les deux rayons de courbures de la coque  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  dans les deux directions curvilignes sont variés pour avoir les rapports  $R_\alpha / R_\beta = 0.1, 1, 4, -1$ , et  $-4$ . Le rapport égal à l'unité correspond à une coque sphérique tandis que le rapport négatif correspond à une coque parabolöide hyperbolique. Notons que les différentes coques conservent leur projection elliptique. Les résultats de calcul sont donnés par les figures 8.48-8.50.



**Fig. 8.48** Influence du rapport de courbures sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).  
 ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )



**Fig. 8.49** Influence du rapport de courbures sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

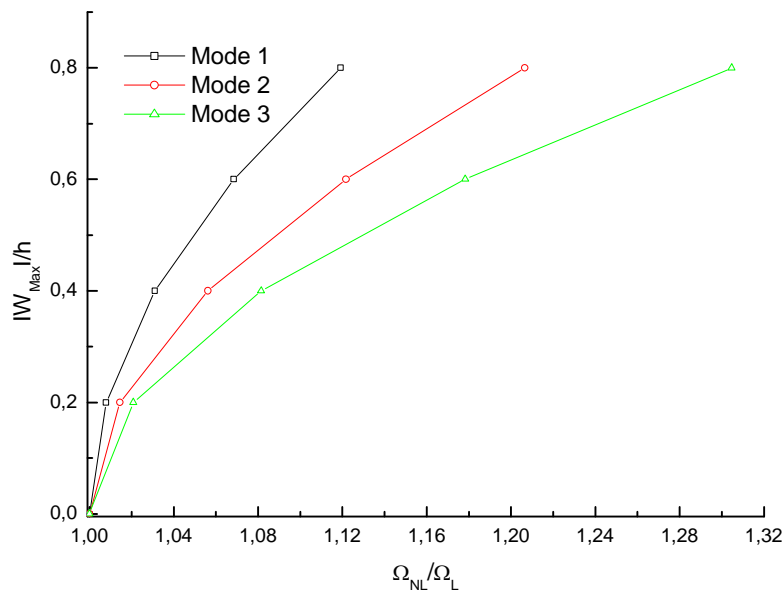


**Fig. 8.50** Influence du rapport de courbures sur les fréquences non linéaires d'une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 ( $a/b = 2, h/a = 0.1, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

Pour des amplitudes maximales inférieures à 0.4, les courbes sont quasiment jointes. Pour des valeurs supérieures à 0.4, deux branches voisines se présentent. La première est celle des courbes confondues correspondantes aux rapports 4 et -4. La deuxième branche représente les courbes des autres rapports. Cet aperçu mène à constater le faible effet de ce rapport géométrique de la coque comparativement aux autres paramètres.

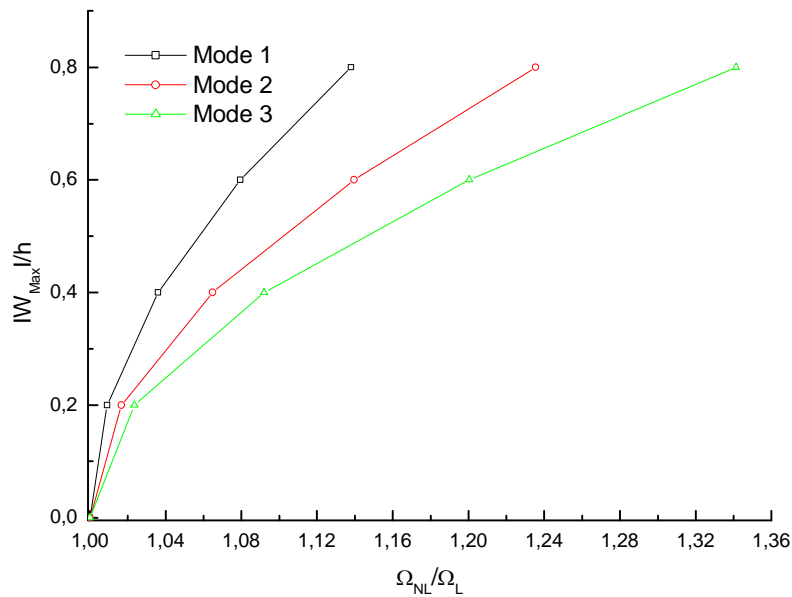
### 8.3.2.7 Vibration des modes supérieurs

Afin de voir l'effet modal sur les fréquences non linéaires, le code de calcul est exécuté pour les trois premiers modes vibratoires de la coque à double courbure ayant une projection elliptique. Trois figures 8.51-8.53 pour trois exposants  $n$  de la fraction volumique du MFG1 sont données.

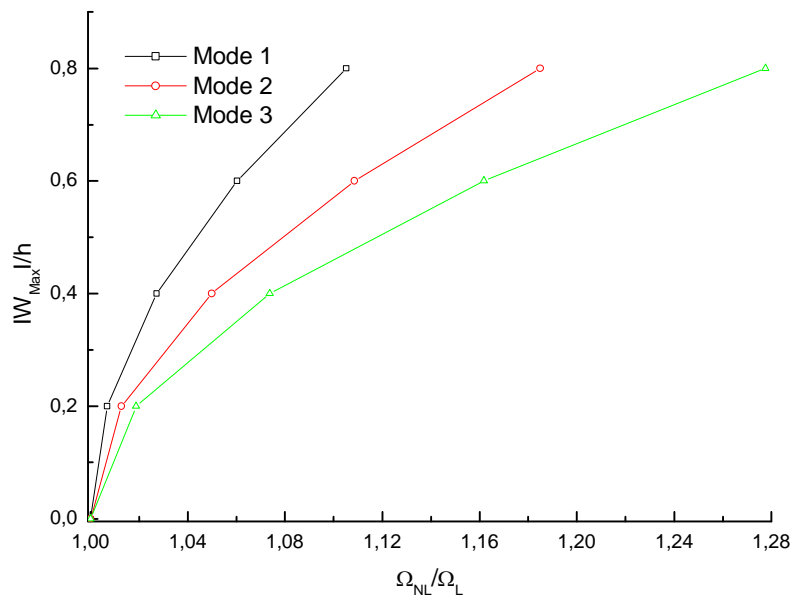


**Fig. 8.51** Vibration non linéaire des trois premiers modes d'une coque encastree à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=0$ ).

$$(R_\alpha/R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.05, a/R_\alpha = 0.2 \text{ \& } k = 5/6)$$



**Fig. 8.52** Vibration non linéaire des trois premiers modes d’une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=1$ ).  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.05, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )



**Fig. 8.53** Vibration non linéaire des trois premiers modes d’une coque encastrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $n=10$ ).  
 ( $R_\alpha/R_\beta = 1, a/b = 2, h/a = 0.05, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ )

Les figures 8.51-8.53 marquent le phénomène non linéaire raidissant de la coque pour les trois premiers modes. Pour une même amplitude maximale de vibration, les courbes sont classées selon l’ordre modal. Donc plus on avance vers les modes supérieurs, plus les fréquences non linéaires sont excitées par les amplitudes de vibration.

## Conclusions et perspectives

La première difficulté rencontrée dans une tâche de modélisation par éléments finis est la définition géométrique de la structure, car c'est sur cette définition, que repose la qualité d'une solution approchée par élément fini. Pour les coques de géométries arbitraires qui présentent certaines complexités géométriques en rayons ou en contours, cette difficulté est encore plus sérieuse. Pour contourner cette difficulté un nouveau type d'élément fini coque version- $p$  a été développé. Il décrit parfaitement la géométrie de la structure. L'erreur de discrétisation est contrôlée par simple variation du degré de l'élément.

La théorie des coques modérément épaisses dite de Reissner-Mindlin, présentée au quatrième chapitre, forme le fondement du modèle d'élément coque développé. Cet élément version- $p$  a permis de décrire le comportement vibratoire d'une grande variété de structures coques minces et épaisses. En plus, la formulation étant générale, a permis d'élargir le champ d'application pour couvrir le domaine des plaques. Il suffit de ramener les deux rayons de courbures à l'infini.

De nouveaux résultats pour les structures coques en matériaux fonctionnellement gradués sont présentés. La robustesse de la méthode et la précision des résultats obtenus, ont mené à l'étude du problème de vibration non linéaire des coques MFG.

Cette étude fut très enrichissante du point de vue numérique puisqu'elle a permis de déterminer les fréquences et les valeurs propres des coques de formes géométriques arbitraires. Cependant, l'analyse modale avec un graphisme 3D sont nécessaires pour comprendre de façon beaucoup plus fine le comportement vibratoire. En outre une étude expérimentale sera avantageuse puisqu'elle permettra non seulement de contrôler la validité des résultats numériques, mais aussi de contribuer à l'explication des phénomènes vibratoires complexes de ce type de structures.

La théorie de von Karman employée au quatrième chapitre constitue le fondement du modèle non linéaire de coques permettant de décrire une grande variété de phénomènes non linéaires. Le domaine de validité de cette théorie a clairement été précisé dans ce quatrième chapitre : les équations de von Karman sont valables jusqu'à des amplitudes du déplacement transverse de l'ordre de l'épaisseur de la coque ce qui est en accord avec le calcul numérique, où des problèmes de convergences surviennent aussitôt que le domaine de validité de la théorie est exagéré. Pour des problèmes de vibration non linéaire à amplitudes de l'ordre de plusieurs fois l'épaisseur, le domaine de validité pourra être étendu. Une étude sur ce sujet

nécessiterait toutefois l'addition d'autres termes dans le tenseur des déformations ce qui amplifiera considérablement la formulation et par conséquent une tâche de programmation ardue est inévitable.

Outre la réduction considérable du temps de calcul, la robustesse de l'élément développé peut être mise au profit des problèmes de propagation de fissures à courbures arbitraires. Les cotés curvilignes des éléments décriront la courbure de la fissure. L'assemblage de plusieurs éléments  $p$  sera la clé d'une telle modélisation et un passage à la version  $h-p$  sera, donc intéressant. Cette caractéristique peut être très attirante en génie civil pour des propagations dans le béton ou encore pour des propagations dans des pièces composites ou multicouches. La propagation d'une fissure au travers d'une interface entre deux matériaux constituerait une avancée significative en modélisation numérique de la mécanique de la rupture et offrirait un vaste champ d'applications industrielles.

L'efficacité du code pourrait être accrue en l'associant avec un outil de la CAO tout en optimisant son implantation informatique.

La formulation mise en place tout au long de cette thèse s'avère prometteuse et ouvre plusieurs perspectives intéressantes. Elle pourra être étendue pour des problèmes de vibration forcée, stabilité, viscoélasticité, plasticité, et qui peuvent être reliés à d'autres complications thermiques, flambement, amortissement, etc...œuvrant à l'exploitation de ce vaste champ de recherches.

## References

- Adam Christoph (2007). Moderately large vibrations of doubly curved shallow open shells composed of thick layers, *Journal of Sound and Vibration* 299 854–868.
- Alhazza Khaled (2002). Nonlinear vibrations of doubly curved cross-ply shallow shells. D Ph in mechanical engineering, Blacksburg Virginia.
- Alhazza khaled and Alhazza Abdulsalam (2004). A review of the vibrations of plates and shells, *Shock and Vibration Digest*, 36; 377.
- Alijani F. , Amabili M., Bakhtiari-Nejad. F. (in press). On the accuracy of the multiple scales method for non-linear vibrations of doubly curved shallow shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics*.
- Amabili M. and Païdoussis M. P. (2003) Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction, *Applied Mechanics Reviews* 56 349–381.
- Amabili. M. (2005). Non-linear vibrations of doubly curved shallow shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40 683 – 710.
- Amabili M. and Reddy J.N. (2010). A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 45 409–418.
- Ambartsumyan S. A. (1953). Calculation of Laminated Anisotropic Shells, *Izvestiia Akademiia Nauk Armenskoi SSR, Ser. Fiz. Mat.*, 6(3), p.15.
- Ambartsumyan S. A. (1964). Theory of Anisotropic shells, NASA Report TT F-118.
- Aron, H. (1874). Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale. *J. f. reine und angew. Mathem* 78 136-173.
- Benoît E. (1924). Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrées à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues- Application de la méthode à la résolution d'un système défini d'équations linéaires (Procédé du commandant Cholesky), *Bulletin géodésique (Toulouse)*. 38 25-36.
- Benveniste Y. (1987). A new approach to the application of Mori–Tanaka's theory of composite materials. *Mechanics of Materials*; 6 147–57.
- Biglari Hasan, Asghar Jafari Ali. (2010). High-order free vibrations of doubly-curved sandwich panels with flexible core based on a refined three-layered theory, *Composite Structures* 92 2685–2694.
- Bowdler H., Martin R. S., Reinsch C. and Wilkinson J. H. (1968). The QR and QL Algorithms for symmetric matrices. *Numerische Mathematik*. 11 293-306.



- Borisenko A. I. and Tarapov I. E. (1968). Vector and tensor analysis with applications, Dover publications Inc New York.
- Byrne R. (1944). Theory of Small Deformations of a thin Elastic Shell. Seminar Reports in Math., Univ. of Calif. Pub. In Math., N.S. vol. 2, N<sup>o</sup>. 1, pp. 103-152.
- Carnahan Brice, Luther h. A., Wilkes James O. (1969). Applied numerical methods, John Wiley & Sons, Inc, USA.
- Cauchy A. L. (1828). Exercices de Mathematique 3, 328–355. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solid.
- Cherradi N., Kawasaki A., and Gasik M. (1994). World-wide trends in functional gradient materials research and development. Compos. Eng. 4 : N<sup>o</sup>. 5, 883-894.
- Chorfi S. M. (2004). Analyse de la vibration des assemblages de panneaux cylindriques par la version h-p de la méthode des éléments finis. Memoire de magister. UABB Tlemcen.
- Chorfi S.M., Houmat. A. (2009). Nonlinear free vibration of a moderately thick doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form, International journal of computational method vol. 6 N<sup>o</sup> 4 615-632.
- Chorfi S.M., Houmat. A. (2010). Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form, Composite Structures 92 2573–2581.
- Ciarlet Philippe G. (2000). Mathematical Elasticity: volume iii theory of shells, Elsevier Science B.V. Amsterdam, The Netherlands.
- Côté A. and Charron F. (2001). On the selection of  $p$ -version shape function for plate vibration problems. Computers and Structures. 79 119-130.
- Craveur Jean-Charles (1997). Modélisation des structures calcul par éléments finis. Masson Paris.
- Dare A. Wells (1967), Lagrangian Dynamics , Schaum's outline serie in engineering, McGraw-Hill, New York.
- Dong, S. B., Pisker, K. S., and Taylor, R. L. (1962). On the theory of laminated anisotropic shells and plates, Journal of Aerospace Sciences 29 969-975.
- Donnell L. H. (1933). Stability of thin walled tubes under torsion. NACA Rept.No.479.
- Donnell L. H. (1938). A Discussion of thin shell theory. Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech..
- Evensen D. A. (1974). Thin Walled structures : Theory, Experiment and Design (Y. C. Fung and E. E. Sechler, editors), 133-155. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. Non-linear vibrations of circular cylindrical shells.

- Evensen D. A. and Olson M. D. (1967). Nonlinear Flutter of a Circular Cylindrical Shell in Supersonic Flow. NASA TN D-265, U.S. Government Printing Office, Washington, DC,USA.
- Evensen D. A. and Olson M. D. (1968). Circumferentially travelling wave flutter of a circular cylindrical shell. AIAA Journal 6, 1522–1527.
- Flügge W. (1934). Statik and Dynamik der Schalen. Springer-Verlag. New York.
- Flügge W. (1962). Stresses in Shells. Springer-Verlag. New York.
- Fortran powerstation 4.0. Microsoft Developer Studio. Copyright 1994-95 Microsoft Corporation.
- Gasik M. and Lilius K. (1994). Evaluation of properties of W--Cu functional gradient materials by micromechanical model Comp, Mater. Sci. 3 41-49.
- Gasik M. (1995). Principles of functional gradient materials and their processing by powder metallurgy, Acta Polytech. Scand. Ch 226 : 73 p.
- Gauss, C.F. (1809). Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, in C.F. Gauss, Werke, 3, 163–196 (Dietrich, Göttingen, 1863).
- Gerald W. and Demosthenes T. (2003). Mechanics Solids Shells Of And Theories And Approximations, CRC Press LLC, New York.
- Gibson L.J., Ashby M.F., Karam G.N., Wegst U., and Shercliff H.R. (1995). Mechanical properties of natural materials. II. Microstructures for mechanical efficiency, Proceedings of the Royal Society of London Series A 450 141–162.
- Gmur Thomas (1997). Dynamique des structures analyse modale numérique, Presses polytechniques et universitaires romandes. Lausanne.
- Gol'denveizer A.L. (1961) Theory of Elastic Thin Shells (English Translation) (Pergamon Press, New York).
- Gordon WJ (1971). Blending function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation, SIAM J Numer Anal 8:158–77.
- Gordon W.J. and Hall C.A (1973). Transfinite element methods: blending functions interpolation over arbitrary curved element domains, Numer. Math. 21 109-129.
- Graustein. W. c. (1935). Differential geometry .New York Macmillan.
- Green A. E. and Zerna W. (1968). Theoretical Elasticity, Oxford University Press.
- Guo D. and Chu F. L.. (2001) .The influence of rotation on vibration of a thick cylindrical shell, Journal of Sound and vibration 242(3): 487-505.

Gyorgy Kirfilyfalvi and Barna A. Szabo. (1997). Quasi-regional mapping for the p-version of the finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design* 27 85-97.

Han W. and Petyt M. (1997). Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method: the fundamental mode of isotropic plates, *Computers & Structures* Vol. 63 No. 2 295-308.

Heikinheimo Liisa, Siren Mika, Gasikt Michael M. (1996). Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> to Ni-superalloy diffusion bonded FG-joints for high temperature applications. , I. Shiota and M.Y, Miyamoto (Editors), *Functionally Graded Materials*, 1997 Elsevier Science B.V.pp313-318.

Hoffman Joe d. (2001). *Numerical methods for engineers and scientists*. Marcel Dekker, Inc. New York.

Houmat A. (1997a). Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes, *Journal of Sound and Vibration*.201 (4) 465-472.

Houmat A. (1997b). An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations, *Journal of Sound and Vibration* 206 (2) 201-215.

Houmat A. (2004). Three-dimensional hierarchical finite element free vibration analysis of annular sector plates. *Journal of Sound and Vibration* 276 181–193.

Houmat A. (2006). Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p-version of the finite element method, *Thin-Walled Struct* 44 943–51.

Houmat A. (2008). In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p-element, *Thin-Walled Struct* 46 103–11.

Householder A. S. (1970). *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation*, Mc Graw Hill.

Hui shen Shen (2009). *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, Taylor & Francis Group Boca Raton London New York.

Humayun R.H. Kabir (2002). Application of linear shallow shell theory of Reissner to frequency response of thin cylindrical panels with arbitrary lamination, *Composite Structures* 56 35–52.

Islam N. (2006). *Tensors and their Applications*, New Age (ISBN 8122418384)(262s).

Jacobi. C. G. J. (1846). über ein leichtes verfahren die inder theorie der säcularstörungen vorkommenden gleichungen umerisch aufzulösen. *Journal für die reine und angewandte mathematik (Crelles Journal)* Vol. 30, N.4,pp. 51-94.

Kadoli R., Ganesan N. (2006). Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperaturespecified boundary condition, *Journal of Sound and Vibration* 289 450–480.

- Kapania P. K. (1989) Review On The Analysis Of Laminated Shells, Journal of pressure vessel Technology 111 88-96.
- Kawasaki A. and Watanabe R. (1990) . J. Jpn. Soc. Powder Metall., 37 : 253.
- Kirchhoff G. (1850). Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's) 40 51–88.
- Koiter W. T. (1966). On the nonlinear theory of thin elastic shells. I, II, III, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen B 69 1–54.
- Koizumi M. (1993), The concept of FGM, Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials, 34 3–10.
- Krauthammer Eduard Ventsel Theodor (2001). Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications, Marcel Dekker, Inc, New York · Basel.
- Kreyszig E. (1993). Advanced Engineering Mathematics, 7th edition (Wiley, New York).
- Kulikov G. M. and Plotnikova S. V. (2002). Simple and effective elements based upon Timoshenko–Mindlin shell theory. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 191 1173-1187.
- Kumar L. Ravi, Datta P.K., Prabhakara D.L. (2005). Dynamic instability characteristics of laminated composite doubly curved panels subjected to partially distributed follower edge loading, International Journal of Solids and Structures 42 2243–2264.
- Kundu Chinmay Kumar, Han Jae-Hung (2009). Vibration characteristics and snapping behavior of hygro-thermo-elastic composite doubly curved shells, Composite Structures 91 306–317.
- Kurpa Lidia, Galina Pilgun, Eduard Ventsel. (2005a). Application of the R-function method to nonlinear vibrations of thin plates of arbitrary shape, Journal of Sound and Vibration 284 379–392.
- Kurpa L.V., Lyubitska K.I., Shmatko A.V.. (2005b). Solution of vibration problems for shallow shells of arbitrary form by the R-function method, Journal of Sound and Vibration 279 1071–1084.
- Kurpa Lidiya, Tatiana Shmatko, Galina Timchenko (2010). Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method, Composite Structures 93 225–233.
- Lai W., Rubin D., Krempf E. (1999). Introduction to Continuum Mechanics, 3rd ed Elsevier
- Lamé G. (1859). Leçon sur les coordonnées curvilignes, et leurs diverses applications, Mallet-Bachelier Paris.
- Lass H. (1950). Vector and tensor analysis, New York Mc-Graw-Hill.

Leissa A. W. and Kadi A. S. (1971). Curvature effects on shallow shell vibration, *J. Sound Vib.* 16 173-187.

Leissa, A. W. (1973). *Vibration of Shells*, NASA SP-288.

Leissa A. W. and Narita Y. (1984). Vibrations of completely free shallow shells of rectangular planform, *J. Sound Vib.* 96(2) 207-218.

Liew K.M., Lim C.W., and Kitipornchai, S. (1997). Vibration of shallow shells: a review with Bibliography. *Appl. Mech. Rev.* 50 431-444.

Liew K. M., Wang C. M., Xiang Y., Kitipornchai S. (1998). *Vibrations of Mindlin plates, programming the p-version Ritz method*. Elsevier.

Liew K.M., Yang J., Wu Y.F. (2006). Nonlinear vibration of a coating-FGM-substrate cylindrical panel subjected to a temperature gradient, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 1007–1026.

Love A. E. H. ( 1888). *The Small Free Vibrations and Deformations of thin Elastic Shell*, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London) ser. A*, 179, pp. 491 549.

Love A. E. H.( 1944) *A treatise on the Mathematical theory of Elasticity*. First ed., Cambridge Univ. Press, 1892; fourth ed., Dover Pub. Inc. New York.

Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Solids and Structures* 41 309–324.

Lur'ye, A. I. (1937). *General Theory of Elastic Shells*, *Prikl. Math. Mekh.* vol. 4, no. 1, 1940 pp. 7-34.(In Russian.)

**M**artin H. Sadd (2005). *Elasticity Theory Applications and Numerics*, Elsevier.

Mase G. Thomas and Mase George E (1999). *Continuum mechanics for engineers*, CRC Press Washington.

Matsunaga Hiroyuki (2008a). Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory, *Compo. Struct.* 84 132-146.

Matsunaga Hiroyuki (2008b). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Comp Struct*, 82:499-512.

Matsunaga Hiroyuki (2009). Free vibration and stability of functionally graded circular cylindrical shells according to a 2D higher-order deformation theory, *Comp Struct* 88 519-531.

Mickens R.E. (1984). Comments on the method of harmonic balance, *J. Sound Vibr.* 94 456-460.

Microsoft Windows XP Professional. Version (2002). Service Pack 3.

- Mindlin R. D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plate. *J. of App. Mech.*, vol 18(1),p. 31-38.
- Mirza, S. (1991). Recent Research in vibration of layered shells, *Journal of pressure vessel Technology* 113 321-325.
- Mizusawa T. (1996). Vibration of thick laminated cylindrical panels by the spline strip method. *Computers & Structures* vol. 61. no 3. pp. 44-457.
- Mori T and Tanaka K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21 571-4.
- Moussaoui, F. and Benamar, R. (2002). Non-linear vibrations of shell-type structures: A review with bibliography, *J. Sound Vib.* 255 161-184.
- Murnaghan F. D. (1951). *Finite déformation of an Elastic solid*. Wiley.
- Mushtari KH. M. (1938a). On the stability of cylindrical Shells Subjected to torsion. *Trudy Kaz. Avais, in-ta,2*. (In Russian.)
- Mushtari KH. M. (1938b). Certain generalizations of the theory of thin shells. *Izv. Fiz. Mat. Ob-va.prikaz. un-te*,vol. II, no. 8. (In Russian.)
- Naghdi P. M. and Berry J. G. (1964). On the Equations of Motion of Cylindrical Shells, *Journal of Applied Mechanics* 21(2) 160-166.
- Naghdi PM (1972) The theory of shells and plates, In S. Flügge (Ed.) *Encyclopedia of Physics*. Springer Berlin.
- Naidu N.V. Swamy, Sinha P.K. (2007). Nonlinear free vibration analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments, *Composite Structures* 77 475-483.
- Narita Y. and Leissa A. W. (1986). Vibrations of completely free shallow shells of curvilinear planform . *J. of Applied Mechanics (ASME)* 53 647-651.
- Nayfeh A. H. and Mook D. T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, pp. 5961
- Ng T.Y., Lam K.Y., Liew K.M., Reddy J.N. (2001). Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading, *International Journal of Solids and Structures* 38 1295-1309.
- Novozhilov V. V. (1964). *The Theory of Thin Elastic Shells*, Norodhoff. Moscow.
- Panda S.K. and Singh B.N. (2009) Nonlinear free vibration of spherical shell panel using higher order shear deformation theory – A finite element approach, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 86 373-383.

- Patel B.P., Gupta S.S., Loknath M.S., Kadu C.P. (2005). Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory, *Composite Structures* 69 259–270.
- Pietraszkiewicz W. (1977) Introduction to the Non-Linear Theory of Shells. Ruhr-Universität Bochum, Mitt. Inst. für Mechanik, No. 10.
- Pietraszkiewicz W. (1979) Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells, Polish Scientific Publisher, Warszawa – Poznan.
- Pietraszkiewicz W. (1984) Lagrangian description and incremental formulation in the nonlinear theory of thin shells, *Int. J. Nonlin. Mech.* 19 115-140.
- Pietraszkiewicz W. (1989) Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells, *Adv. Mech.* 12 51-130.
- Pradyumna S., Bandyopadhyay J.N. (2008) Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation, *Journal of Sound and Vibration* 318 176–192.
- Qatu M. S. (1992). Review of Shallow Shells Vibration Research, *Shock and Vibration Digest* 24(9) 3–15.
- Qatu Mohamad S. (2004). *Vibration of Laminated Shells and Plates*, Elsevier Ltd.
- Qatu Mohamad S., Rani Warsi Sullivan , Wenchao Wang. (2010) .Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Composite Structures* 93 14–31.
- Reaz A. Chaudhuria, H.R.H. Kabir. (2005). Effect of boundary constraint on the frequency response of moderately thick doubly curved cross-ply panels using mixed fourier solution functions, *Journal of Sound and Vibration* 283 263–293.
- Reddy, J. N. (1984). Exact solutions of Moderately thick Laminated shells, *Journal of Engineering Mechanics* 110(5) 794-809.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated plates and shells theory and analysis*, CRC press Washington.
- Reissner E. (1941). A new derivation of the Equations of the Deformation of Elastic Shells, *Amer. J. Math.*, vol. 63, no. 1 pp. 177-184.
- Reissner E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. of Appl. Mech.* 12 A69–A77.
- Reissner E. (1984) Formulation of variational theorems in geometrically nonlinear elasticity. *J. Eng. Mech.* 110 1377-1390.
- Ribeiro Pedro (2003). A hierarchical finite element for geometrically non-linear vibration of doubly curved, moderately thick isotropic shallow shells, *J. numer. Meth. Engng.* 56 715-738.

- Ribeiro P. and Petyt. M. (1999) .Geometrical non-linear, steady state, forced, periodic vibration of plates, part i: model and convergence studies. *Journal of sound and vibration* 226(5), 955-983.
- Sanders, J. L. (1959). An Improved First Approximation Theory for Thin Shells.NASA TR-R24.
- Sheikh A.H. , Topdar P. ,Halder S. (2001) . An appropriate FE model for through-thickness variation of displacement and potential in thin/moderately thick smart laminates, *Composite Structures* 51 401-409.
- Shen H. S. and Leung A.Y.T. (2003). Postbuckling of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments, *Journal of Engineering Mechanics—ASCE* 129 414–425.
- Shen H. S.and Noda N. (2005). Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments, *International Journal of Solids and Structures* 42 4641–4662.
- Simmonds JG and Danielson DA (1970). Nonlinear shell theory with finite rotation vector, *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Series B* 73 460-478.
- Simmonds JG and Danielson DA (1972). Nonlinear shell theory with finite rotation and stress function vectors, *J. Appl. Mech.* 39 1085-1090.
- Soedel W. (2004). *Vibrations of shells and plates* , Marcel Dekker New York.
- Sokolnikoff (1951). *Tensor Analysis theory and applications*, Jhon Wiley and Sons Inc, California.
- Soldatos, K. P. (1984). Acomparision of somme shell théories used for dynamic analysis of Cross-ply Laminated circular cylindrical panels, *J. Sound Vib.* 97 (2) 305-319.
- Stavsky, Y. (1963). Thermoelasticity of Heterogeneous Aeolotropic plates, *Journal of Engineering Mechanics Division, EM2* 89-105.
- Struik, D. J. (1950). *Differential geometry*, Reading, Pa :Addison-Wesley.
- Süli Endre and Mayers David F. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis* , Cambridge United Kingdom.
- Szabo B.A. & Babuska I. (1991). *Finite element analysis*, John Wiley & Sons.
- Timarci t. and Soldatos k. p. (1995).Comparative dynamic studies for symmetric cross-ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory, *Journal of Sound and Vibration* 187 4 609-624.
- Timoshenko S. (1959). *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill New York.



- Tornabene Francesco and Viola Erasmo (2009). Free vibrations of four-parameter functionally graded parabolic panels and shells of revolution, *European Journal of Mechanics A/Solids* 28 991–1013.
- Vel SS and Batra RC (2002). Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA Journal* 40(7) 1421–33.
- Viola Erasmo and Tornabene Francesco (2009). Free vibrations of three parameter functionally graded parabolic panels of revolution, *Mechanics Research Communications* 36 587–594.
- Von Karman T. (1910). Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften* vol. 4 Heft 4 311–385.
- Von Karman T. and Tsien H.-S. (1941). The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *Journal of the Aeronautical Sciences* 8 303–312.
- Vlasov V. Z. (1944). Osnovnye Differentsialnye Uravnenia Obshehe Teorii Uprugikh Obolochek. *Prikl. Mat. Mekh.*, Vol. 8. (English transl.: NASA TM 1241, Basic Differential Equations in the General Theory of Elastic shells, Feb. 1951.)
- Vlasov V. Z. (1949). Obshchaya teoriya obolochek: yeye prilozheniya v tekhnike. Gos. Izd. Tekh-Teor. Lit., Moscow-Leningrad. (English transl.: NASA TT F-99, General Theory of shells and It's Applications in Engineering, Apr. 1964.)
- Wang D., Zhang W.H., Jiang J. S. (2005). What are the repeated frequencies ? , *Journal of Sound and Vibration* 291 1186-1194.
- Wempner Gearald and Talaslidis Demosthnes (2003). *Mechanics of Solids and Shells Theories and Approximations*, CRC Press Washington.
- Wittrick W. H. (1987). Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on Mindlin's plate theory, *J. of Applied Mech.* 23 441–464.
- Woo J. and Meguid S.A. (2001). Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *International Journal of Solids and Structures* 38 7409–7421.
- Yamanoushi M., Koizumi M., Hirai T., and Shiota I. (eds.) (1990), *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials* Japan.
- Yang J., Shen H.-S. (2003) . Free vibration and parametric resonance of shear deformable functionally graded cylindrical panels, *Journal of Sound and Vibration* 261 871–893.
- Yang J., Liew K.M., Wu Y.F., Kitipornchai S. (2006). Thermo-mechanical post-buckling of FGM cylindrical panels with temperature dependent properties, *International Journal of Solids and Structures* 43 307–324.
- Zenkour A. M. (2001). Stress analysis of axisymmetric shear deformable cross-ply laminated circular cylindrical shells. *journal of engineering mathematics*.40 4 315-332.

Zhao X, Lee YY , Liew KM.(2009). Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free Kp Ritz method, J Sound Vib. 319 918–939.

Zienkiewicz. O. c. and Taylor R. L. (2000). The Finite Element Method, vol 1 The basis, Fifth edition by Butterworth-Heinemann.

## **Webographie**

S1. (2011). <http://www.Rahhala.net>

S2. (2011). <http://www.Shutterstock.com.7311564>

S3. (2011). <http://www.Komar.org/faq/airbas.a380-airplane>

S4. (2011). <http://www.nasa.gov/centers/kenndy/shutteoperations/orbiters/discovery-info.html>

S5. (2011). <http://www.csm.ornl.gov/hightlights/FGM.html>

S6. (2011). <http://www.econologie.com>

S7. (2011). <http://www.salesclic.com>

S8. (2011). <http://www.euroform.co.uk>

## Annexe 1

$$M_{3\phi-2,3\phi-2} = \rho h \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.1})$$

$$M_{3\phi-1,3\phi-1} = \rho \frac{h^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.2})$$

$$M_{3\phi,3\phi} = \rho \frac{h^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.3})$$

$$\begin{aligned} K_{3\phi-2,3\phi-2} = & h \int_0^1 \int_0^1 \left\{ kG \left[ \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) + g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right] \right. \\ & + C \left[ \frac{1}{R_\alpha} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{\nu}{R_\beta} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R_\beta} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \left( \frac{\nu}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \right] \right\} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.4}) \end{aligned}$$

$$K_{3\phi-2,3\phi-1} = -kGh \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) g_l(\eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.5})$$

$$K_{3\phi-2,3\phi} = kGh \int_0^1 \int_0^1 \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.5})$$

$$K_{3\phi-1,3\phi-2} = -kGh \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.5})$$

$$\begin{aligned} K_{3\phi-1,3\phi-1} = & \int_0^1 \int_0^1 \left\{ D \left[ g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right] \right. \\ & \left. + kGh g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \right\} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{3\phi-1,3\phi} = & -D \int_0^1 \int_0^1 \left[ \nu g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right. \\ & \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.5}) \end{aligned}$$

$$K_{3\phi,3\phi-2} = kGh \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.10})$$

$$\begin{aligned} K_{3\phi,3\phi-1} = & -D \int_0^1 \int_0^1 \left[ \nu \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right. \\ & \left. + \frac{(1-\nu)}{2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{3\phi-1,3\phi} = & \int_0^1 \int_0^1 \left\{ D \left[ \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) + \frac{(1-\nu)}{2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right] \right. \\ & \left. + kGh g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \right\} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A1.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\phi-1,2\phi-1} &= C \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A1.13})$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\phi-1,2\phi} &= C \int_0^1 \int_0^1 \left[ \nu \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A1.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\phi,2\phi-1} &= C \int_0^1 \int_0^1 \left[ \nu g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\phi,2\phi} &= C \int_0^1 \int_0^1 \left[ g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{2\phi-1,3\phi-2} &= \frac{C}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\xi} g_n(\eta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\nu) g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \right\} \mathcal{Q}_{3\delta-2} \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{2\phi,3\phi-2} &= \frac{C}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\xi} g_n(\eta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\nu) \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \right\} \mathcal{Q}_{3\delta-2} \end{aligned} \quad (\text{A1.18})$$

$$\hat{K}_{2\phi-1,3\phi-2} = C \int_0^1 \int_0^1 \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \left( \frac{1}{R_\alpha} + \nu \frac{1}{R_\beta} \right) \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \quad (\text{A1.19})$$

$$\hat{K}_{2\phi,3\phi-2} = C \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) g_l(\eta) \left( \frac{1}{R_\beta} + \nu \frac{1}{R_\alpha} \right) \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \quad (\text{A1.20})$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{3\phi-2,3\phi-2} &= \frac{C}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \sum_{r=1}^{p+1} \sum_{s=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\xi} g_n(\eta) \frac{dg_r(\xi)}{d\xi} g_s(\eta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} g_r(\xi) \frac{dg_s(\eta)}{d\eta} \right] \|\mathbf{J}\| d\xi d\eta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} g_r(\xi) \frac{dg_s(\eta)}{d\eta} \\
& + g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} \frac{dg_m(\xi)}{d\xi} g_n(\eta) \frac{dg_r(\xi)}{d\xi} g_s(\eta) \Big] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \Big\} Q_{3\delta-2} Q_{3\gamma-2} \quad (\text{A1.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{3\phi-2,3\phi-2} &= \frac{C}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{\nu}{R_\beta} \right) \left( g_i(\xi) g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\xi} g_n(\eta) \right. \right. \right. \\
& + \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\xi} g_n(\eta) \\
& + \left. \left. \frac{dg_i(\xi)}{d\xi} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} g_l(\eta) g_m(\xi) g_n(\eta) \right) \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{R_\beta} + \frac{\nu}{R_\alpha} \right) \left( g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} \right. \right. \\
& + g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\eta} \\
& + \left. \left. g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\eta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\eta} g_m(\xi) g_n(\eta) \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \Big\} Q_{3\delta-2} \quad (\text{A1.22})
\end{aligned}$$

dont

$$\delta = n + (m-1)(p+1) \quad (\text{A1.23})$$

$$\gamma = s + (r-1)(p+1) \quad (\text{A1.24})$$

et

$$C = Eh/(1-\nu^2), D = Eh^3/12(1-\nu^2), G = E/2(1+\nu) \quad (\text{A1.25})$$

## Annexe 2

$$M_{3\phi-2,3\phi-2} = \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) I_0 |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.1})$$

$$M_{3\phi-1,3\phi-1} = \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) I_2 |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.2})$$

$$M_{3\phi,3\phi} = \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) I_2 |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.3})$$

$$K_{3\phi-2,3\phi-2} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ k A_{66} \left[ \frac{1}{A_\alpha^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) + \frac{1}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{R_x} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \left( \frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R_y} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \left( \frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{11}}{R_y} \right) \right] \right\} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.4})$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta-1} = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{k A_{66}}{A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) g_l(\eta) \right. \\ \left. + \frac{1}{A_\beta} \left( \frac{B_{11}}{R_y} + \frac{B_{12}}{R_x} \right) g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{g_l(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.5})$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{k A_{66}}{A_\alpha} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \right. \\ \left. + \frac{1}{A_\alpha} \left( \frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} \right) g_i(\xi) g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.6})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-2} = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{k A_{66}}{A_\beta} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right. \\ \left. + \frac{1}{A_\beta} \left( \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{B_{12}}{R_x} \right) g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) g_l(\eta) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.7})$$

$$K_{3\phi-1,3\phi-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{D_{11}}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} + k A_{66} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \right. \\ \left. + \frac{D_{66}}{A_\alpha^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.8})$$

$$K_{3\phi-1,3\phi} = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{D_{12}}{A_\alpha A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right. \\ \left. + \frac{D_{66}}{A_\alpha A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.9})$$

$$K_{3\phi,3\phi-2} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{k A_{66}}{A_\alpha} g_i(\xi) g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) + \frac{1}{A_\alpha} \left( \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{B_{12}}{R_x} \right) \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.10})$$

$$K_{3\phi,3\phi-1} = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{D_{12}}{A_\alpha A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} + \frac{D_{66}}{A_\alpha A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\alpha} \frac{dg_k(\xi)}{d\beta} g_l(\eta) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.11})$$

$$K_{3\phi-1,3\phi-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{D_{11}}{A_\alpha^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) + k A_{66} g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) + \frac{D_{66}}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.12})$$

$$\bar{K}_{2\phi-1,2\phi-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ A_{11} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) + \frac{A_{66}}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.13})$$

$$\bar{K}_{2\phi-1,2\phi} = C \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{12}}{A_\alpha A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} + \frac{A_{66}}{A_\alpha^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\alpha} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.14})$$

$$\bar{K}_{2\phi,2\phi-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{12}}{A_\alpha A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) + \frac{A_{66}}{A_\alpha A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.15})$$

$$\bar{K}_{2\phi,2\phi} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{11}}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} + \frac{A_{66}}{A_\alpha^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (\text{A2.16})$$

$$\hat{K}_{2\phi-1,3\phi-2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{11}}{A_\alpha^3} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) + \frac{A_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} + \frac{2A_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} \quad (\text{A2.17})$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2\phi,3\phi-2} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{11}}{A_\beta^3} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right. \right. \\ &\quad + \frac{A_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \\ &\quad \left. \left. + \frac{2A_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} \end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

$$\widehat{K}_{2\phi-1,3\phi-2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \frac{1}{A_\alpha} \left( \frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.19})$$

$$\widehat{K}_{2\phi,3\phi-2} = \int_0^1 \int_0^1 g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) g_l(\eta) \frac{1}{A_\beta} \left( \frac{A_{11}}{R_y} + \frac{A_{12}}{R_x} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{A2.20})$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2\phi-1,3\phi-1} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ -\frac{B_{66}}{A_\alpha A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_{12}}{A_\alpha A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A2.21})$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2\phi-1,3\phi} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{B_{11}}{A_\alpha^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{66}}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A2.22})$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2\phi,3\phi-1} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ -\frac{B_{66}}{A_\alpha^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_{11}}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A2.23})$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2\phi,3\phi} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{B_{12}}{A_\alpha A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_{66}}{A_\alpha A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A2.24})$$

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_{3\phi-2,3\phi-1} &= \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{B_{11}}{A_\alpha^3} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \right. \right. \\ &\quad + \frac{B_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \\ &\quad \left. \left. + \frac{2B_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} \end{aligned} \quad (\text{A2.25})$$



$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{K}}_{3\phi-2,3\phi} = & - \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{B_{11}}{A_\beta^3} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right. \right. \\
& + \frac{B_{12}}{A_\alpha^2 A_\beta} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \\
& \left. \left. + \frac{2B_{66}}{A_\alpha^2 A_\beta} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} \quad (A2.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{K}}_{3\phi-1,3\phi-2} = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{B_{11}}{A_\alpha^3} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \right. \right. \\
& + \frac{B_{12}}{A_\alpha A_\beta^2} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \\
& \left. \left. + \frac{2B_{66}}{A_\alpha A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} \quad (A2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{K}}_{3\phi,3\phi-2} = & \frac{-1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{B_{11}}{A_\beta^3} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right. \right. \\
& + B_{12} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \\
& \left. \left. + 2B_{66} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} \quad (A2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{K}}_{3\phi-2,3\phi-2} = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \sum_{r=1}^{p+1} \sum_{s=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ A_{11} \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \frac{dg_r(\xi)}{d\alpha} g_s(\eta) \right. \right. \\
& + \frac{A_{11}}{A_\beta^4} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} g_r(\xi) \frac{dg_s(\eta)}{d\beta} \\
& + \frac{(A_{12} + 2A_{66})}{A_\alpha^2 A_\beta^2} \left( \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} g_r(\xi) \frac{dg_s(\eta)}{d\beta} \right. \\
& \left. \left. + g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \frac{dg_r(\xi)}{d\alpha} g_s(\eta) \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \right\} Q_{3\delta-2} Q_{3\gamma-2} \quad (A2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{K}}_{3\phi-2,3\phi-2} = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} \right) \left( g_i(\xi) g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \right. \right. \right. \\
& + \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) g_k(\xi) g_l(\eta) \frac{dg_m(\xi)}{d\alpha} g_n(\eta) \\
& \left. \left. + \frac{dg_i(\xi)}{d\alpha} g_j(\eta) \frac{dg_k(\xi)}{d\alpha} g_l(\eta) g_m(\xi) g_n(\eta) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{A_\beta^2} \left( \frac{A_{11}}{R_y} + \frac{A_{12}}{R_x} \right) \left( g_i(\xi) g_j(\eta) g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) g_l(\eta) g_m(\xi) \frac{dg_n(\eta)}{d\beta} \\
& + \frac{1}{A_\beta^2} g_i(\xi) \frac{dg_j(\eta)}{d\beta} g_k(\xi) \frac{dg_l(\eta)}{d\beta} g_m(\xi) g_n(\eta) \Bigg] \Big| \mathbf{J} | d\xi d\eta \Big\} Q_{3\delta-2} \quad (\text{A2.30})
\end{aligned}$$

où

$$\delta = n + (m-1)(p+1) \quad (\text{A2.31})$$

$$\gamma = s + (r-1)(p+1) \quad (\text{A2.32})$$

## Annexe 3

**Tableau A.3** Convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_C}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG1 encastree à double courbure ayant une projection rectangulaire ( $R_\alpha / R_\beta = 1, h/a = 0.1, a/b = 1.0, a/R_\alpha = 0.2$  &  $k = 5/6$ ).

$n$	N mode	$p$							
		2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1.42625	1.03101	1.02380	1.02354	1.02347	1.02345	1.02344	1.02344
	2	6.03589	3.84922	3.14707	3.11238	3.10690	3.10668	3.10665	3.10665
	3	6.07362	3.89985	3.17802	3.14387	3.13817	3.13797	3.13794	3.13794
	4	8.45784	5.60239	4.78921	4.74348	4.73784	4.73738	4.73729	4.73727
	5	20.73543	11.01881	7.52271	6.33554	6.19287	6.15740	6.15485	6.15453
0.5	1	1.25843	.88504	.87838	.87815	.87809	.87807	.87807	.87806
	2	5.40920	3.39188	2.71968	2.68804	2.68287	2.68266	2.68263	2.68263
	3	5.44092	3.43538	2.74569	2.71460	2.70923	2.70904	2.70901	2.70901
	4	7.57779	4.93613	4.15527	4.11288	4.10767	4.10721	4.10712	4.10710
	5	18.62660	9.85525	6.65014	5.52312	5.39337	5.35970	5.35734	5.35702
1	1	1.15693	.80252	.79627	.79606	.79600	.79598	.79598	.79598
	2	5.00885	3.11478	2.47253	2.44302	2.43812	2.43792	2.43789	2.43789
	3	5.03739	3.15427	2.49589	2.46693	2.46183	2.46165	2.46162	2.46162
	4	7.01574	4.53153	3.78423	3.74436	3.73947	3.73904	3.73894	3.73892
	5	17.11872	9.11485	6.11412	5.04108	4.92020	4.88815	4.88592	4.88562
4	1	0.95468	0.68591	0.68104	0.68086	0.68082	0.6808	0.6808	0.6808
	2	4.05379	2.57435	2.0956	2.0722	2.06847	2.06832	2.0683	2.0683
	3	4.07901	2.60819	2.11617	2.09314	2.08926	2.08912	2.08911	2.0891
	4	5.67944	3.74568	3.19088	3.15995	3.15612	3.1558	3.15574	3.15572
	5	13.63364	7.39294	5.0327	4.22518	4.12896	4.10479	4.10307	4.10284
10	1	0.86392	0.64554	0.64147	0.64131	0.64127	0.64126	0.64125	0.64125
	2	3.58022	2.33222	1.95039	1.93037	1.92734	1.92722	1.9272	1.9272
	3	3.60446	2.36386	1.97026	1.95051	1.94736	1.94724	1.94723	1.94723
	4	5.01809	3.39322	2.95232	2.92642	2.92322	2.92298	2.92294	2.92293
	5	12.12379	6.55051	4.53586	3.88146	3.79871	3.77918	3.77775	3.77757
100	1	0.74833	0.5498	0.54613	0.546	0.54596	0.54595	0.54595	0.54595
	2	3.13569	2.02049	1.67054	1.65274	1.64999	1.64988	1.64987	1.64986
	3	3.15603	2.04745	1.68724	1.6697	1.66683	1.66673	1.66672	1.66672
	4	4.39456	2.94058	2.53593	2.51269	2.50982	2.50959	2.50955	2.50954
	5	10.75884	5.73127	3.9402	3.34485	3.2715	3.25372	3.25243	3.25227
DDL		8	21	40	65	96	133	176	225

## Annexe 4

**Tableau A.4** Convergence des paramètres de fréquences  $\Omega_L = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c}$  des 5 premiers modes symétriques- symétriques d'une coque MFG1 encadrée à double courbure ayant une projection elliptique ( $R_\alpha / R_\beta = 1, a/b = 2.0, h/a = 0.01, a/R_\alpha = 0.2$  and  $k = 5/6$ ).

$n$	N mode	$P$							
		2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3.74938	.88172	.86873	.86731	.86716	.86715	.86715	.86715
	2	13.28632	6.51558	1.46698	1.44756	1.42552	1.42488	1.42464	1.42463
	3	24.55745	11.89601	3.28850	2.63948	2.62016	2.50327	2.50217	2.49917
	4	30.89067	17.52279	4.95953	3.22021	3.19377	3.19338	3.19320	3.19319
	5	392.6255	22.52896	12.07872	4.53247	4.44010	4.38557	4.04771	4.04493
0.5	1	3.36072	.76604	.75456	.75331	.75317	.75316	.75316	.75316
	2	11.92350	5.83441	1.25194	1.23473	1.21599	1.21542	1.21522	1.21521
	3	22.04144	10.64893	2.79277	2.24285	2.22590	2.12614	2.12517	2.12260
	4	27.72588	15.67991	4.22106	2.73445	2.71165	2.71132	2.71116	2.71115
	5	354.54804	20.21696	10.80802	3.84925	3.76968	3.72458	3.43549	3.43316
1	1	3.11284	.69926	.68867	.68753	.68739	.68739	.68739	.68739
	2	11.05000	5.40164	1.13255	1.11668	1.09978	1.09925	1.09907	1.09906
	3	20.42788	9.85749	2.51981	2.02431	2.00873	1.91854	1.91765	1.91531
	4	25.69622	14.51184	3.81229	2.46706	2.44634	2.44604	2.44590	2.44589
	5	326.58671	18.73531	10.00273	3.47287	3.40061	3.36040	3.09872	3.09663
4	1	2.51935	.58825	.57955	.57861	.57850	.57850	.57850	.57850
	2	8.93008	4.37697	.97485	.96183	.94720	.94677	.94661	.94660
	3	16.50615	7.99052	2.18289	1.75230	1.73940	1.66171	1.66098	1.65898
	4	20.76300	11.76861	3.29365	2.13751	2.11989	2.11963	2.11951	2.11951
	5	258.41315	15.14185	8.11244	3.00856	2.94705	2.91109	2.68643	2.68459
10	1	2.22401	.54538	.53750	.53663	.53654	.53654	.53654	.53654
	2	7.86722	3.87029	.92697	.91526	.90130	.90091	.90076	.90075
	3	14.53834	7.06936	2.08896	1.67587	1.66394	1.59027	1.58960	1.58772
	4	18.28761	10.41835	3.14109	2.04594	2.02950	2.02925	2.02914	2.02914
	5	227.81966	13.34102	7.18167	2.87868	2.82117	2.78520	2.57302	2.57119
100	1	1.94762	.46720	.46039	.45964	.45956	.45956	.45956	.45956
	2	6.89599	3.38677	.78552	.77535	.76353	.76319	.76307	.76306
	3	12.74490	6.18479	1.76559	1.41676	1.40654	1.34401	1.34343	1.34183
	4	16.03170	9.11240	2.65906	1.72907	1.71502	1.71481	1.71471	1.71471
	5	203.00858	11.69363	6.28137	2.43335	2.38422	2.35443	2.17398	2.17246
DDL		8	21	40	65	96	133	176	225

## ملخص

إن التطور التكنولوجي الحالي سمح بإنجاز مشاريع أكثر فأكثر تعقيدا وتكلفة، خاضعة لقيود أمنية أكثر صرامة، فيشجع استخدام قوالب أحادية أو ازدواجية الانحناء في المنشآت الهندسية (الميكانيكية، المدنية، بناء السفن، الطيران، الخ). وأمام التعقيد الهندسي لمعظم المنشآت القوقعية فإن العناصر المنتهية تبقى أداة المحاكاة الأكثر شيوعا. وتبقى الطريقة الأعم ذات الأثر عدد من التطبيقات، فهي تشكل الأساس لعدد كبير جدا من البرامج العددية التجارية والأكاديمية: NASTRAN, ASKA, SAP, ...MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, ABAQUS

في السنوات الأخيرة برز الإصدار p من طريقة العناصر المنتهية فارضا نفسه بأداء وتقارب جديدين ليسجل مرحلة مهمة في تطور الحسابات بالعناصر المنتهية. وقد بذل العديد من الدراسات على إصدار p ليدرج في برامج حاسوبية مرتبطة أساسا على هذه الطريقة أو كخيار مضمحل في البرامج الحاسوبية الموجودة للإصدار h الأول. استنادا على نظرية القوالب السمكية، مزج بين إصدار p من طريقة العناصر المنتهية مع طريقة مزج الدوال لتوليد نوع جديد من العناصر القوقعية إصدار p. يتم التمثيل الهندسي للقوالب بصرف النظر عن درجة تقريب العنصر. وقد طور برنامج كمبيوتر على أساس هذا النوع من العناصر واختباره مع التحقق من صحة النتائج بنجاح. فقد أتاح أداء البرنامج ومطابقتها من دراسة طائفة واسعة من الصياغ القوقعية في سلوكها الاهتزازي الخطي واللاخطي، والتي تكون من مواد متماثلة التكوين أو متدرجة وظيفيا ذات أشكال هندسية اعتباطية. أحادية أو ازدواجية الانحناء لتعرض الكثير من النتائج في شكل جداول ورسوم بيانية.

**كلمات مفتاحية:** قوالب ذات شكل هندسي اعتباطي، قوالب أحادية الانحناء، قوالب مزدوجة الانحناء، طريقة العناصر المنتهية إصدار p، عنصر منتهي قوقعي، مادة متماثلة التكوين، مادة متدرجة وظيفيا، إمتزاز حر، إمتزاز خطي، إمتزاز لا خطي.

## Abstract

*The current evolution of technology leads to complete projects more and more complex, costly, and subject to more severe security constraints. Shells with single or double curvature are commonly used in structural engineering (Mechanical, Civil, shipbuilding, aeronautics, etc.).*

*In front of the geometric complexity of most shell structures, the use of the finite element simulation tool is the most common. It remains the most universal method which has the largest number of applications and forms the basis of a very large number of commercial and academic numerical codes: NASTRAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, ABAQUS...*

*The p version of the finite element method has emerged in recent years by its robustness and good convergence to mark a milestone in the development of finite element calculations. Several researches on the p version have been made and implemented in computer codes based on this method or integrated into the existing codes of the standard h version.*

*Based on the thick shell theory, the p version of the finite element method is combined with the blending function method to generate a new type p version shell element. A geometric representation of the shell is made independently of the element degree of approximation. A computer code based on this type of element is developed, tested, and validated successfully. The performance and robustness of the developed code were used to examine a wide variety of shell structures with linear and nonlinear vibration behavior, single and double curvature, isotropic and functionally graded materials, and arbitrary geometrical shapes. Many results are presented in tables and graphs.*

**Keywords:** shell of arbitrary geometry; single curved shell; double curved shell; the p version of finite element method; shell finite element; isotropic material; functionally graded material; free vibration; linear vibration; nonlinear vibration.

## Résumé

*L'évolution actuelle de la technologie amène à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Les coques à simple ou à double courbure sont d'usage courant en ingénierie structurale (génie mécanique, civil, construction navale, aéronautique, etc.).*

*Devant la complication géométrique de la plupart des structures en coques, le recours aux éléments finis s'avère l'outil de simulation le plus répandu. Elle reste la méthode la plus universelle qui regroupe le plus grand nombre d'applications et qui constitue la base d'un très grand nombre de codes de calcul numérique commerciaux et académiques : NASTRAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, ABAQUS ...*

*La version-p de la méthode des éléments finis s'est imposée ces dernières années par sa robustesse et sa bonne convergence pour marquer une étape importante dans le développement des calculs par éléments finis. Plusieurs travaux de recherche sur la version-p ont été réalisés et implantés dans des codes de calcul basés sur cette méthode ou sous intégrés dans les codes existants de la version-h standard.*

*En se basant sur la théorie des coques épaisses, la version-p de la méthode des éléments finis est combinée avec la méthode des fonctions de mélange afin de générer un nouveau type d'élément coque version-p. Une représentation géométrique des coques est réalisée d'une manière indépendante du degré d'approximation de l'élément. Un code de calcul basé sur ce type d'élément est développé, testé, et validé avec succès. La performance et la robustesse du code élaboré ont permis l'étude d'une large panoplie de structures coques à comportement vibratoire linéaire et non linéaire, à simple et à double courbure, à matériau isotrope et fonctionnellement gradué, et de formes géométriques arbitraires. Beaucoup de résultats sont présentés sous forme de tableaux et de graphes.*

**Mots clés :** coque à géométrie arbitraire; coque à simple courbure; coque à double courbure; version-p de la méthode des éléments finis; éléments finis de type coque; matériau isotrope; matériau à gradient fonctionnel; vibration libre; vibration linéaire; vibration non linéaire.