



Thèse de doctorat de l'université
Aboubekr BELKAID – Tlemcen.

Spécialité
GENIE CIVIL

Présentée par
Mustapha DJAFOUR

Pour l'obtention du grade de
Docteur d'état

Sujet de la thèse :

Etude de la Stabilité Distorsionnelle des Profils en Acier Formés à Froid

Soutenue le 28 juin 2007 devant le jury composé de

<i>Président</i>	Abdelmalek BEKKOUCHE	<i>M.C., Université A. BELKAID - Tlemcen</i>
<i>Directeur</i>	Djamel Eldine KERDAL	<i>Professeur, USTO - Mohamed BOUDLAF - Oran</i>
<i>Examinateur</i>	Abdeldjelil BELARBI	<i>Professeur, Université Missouri Rolla - USA</i>
<i>Examinateur</i>	Abdelmadjid CHEIKH	<i>Professeur, Université A. BELKAID - Tlemcen</i>
<i>Examinateur</i>	Benali BENMANSOUR	<i>M.C, USTO - Mohamed BOUDLAF - Oran</i>
<i>Examinateur</i>	Abderrahmane Medjdoub MOKHTARI	<i>M.C, USTO - Mohamed BOUDLAF - Oran</i>



A la mémoire de Sidi Khai.
A ma grande famille.

Remerciements

J'exprime toute ma profonde reconnaissance au professeur Djamel Eldine KERDAL, mon directeur de thèse, qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide et qui, par son expérience et sa compétence, m'a transmis, pas à pas, sa passion pour la recherche scientifique. Il m'a laissé une grande liberté dans la recherche mais a été toujours disponible pour mes questions. Sans lui, cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour.

Je remercie vivement M Abdelmalek BEKKOUCHE, doyen de la faculté des Sciences de l'ingénieur de l'université A. Belkaid de Tlemcen, pour l'honneur qu'il me fait en présidant mon jury de thèse et surtout pour son amitié sincère.

Mes plus vifs remerciements vont également aux examinateurs, M Abdelmadjid CHEIKH, professeur au département de Génie Mécanique de l'université A. Belkaid de Tlemcen, M Benali BENMANSOUR et M Mejdoub MOKHTARI, Maîtres de conférences à l'USTO – Mohamed Boudiaf, pour avoir accepté de participer au jury. Leurs idées précieuses, leurs analyses critiques et avisées ont contribué à l'enrichissement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à M Abdeldjelil BELARBI, professeur à l'université Missouri Rolla aux USA, pour avoir accepté de participer au jury et pour son aide précieuse à l'achèvement de cette recherche.

Je suis également reconnaissant envers le professeur Nouredine GHOUALI, recteur de l'université A. Belkaid de Tlemcen, pour ses encouragements continus à achever ma thèse.

Le risque lors de la rédaction des remerciements est d'oublier des amis qui, dieu merci, sont nombreux. J'adresse donc mes plus vifs remerciements à tous mes amis et collègues de l'université de Tlemcen et d'ailleurs. J'ai cependant des sentiments très particuliers envers les enseignants du département de génie civil de Tlemcen qui ont l'immense mérite de former une équipe et qui maintiennent, depuis 1987, une ambiance amicale.

Je tiens aussi à remercier du fond du coeur ma famille pour son soutien et ses encouragements. C'est son amour qui m'a aidé à passer les moments les plus difficiles.

Table des matières

Principales notations	ix
Chapitre 1	
Introduction	1
1.1 Contexte – Problématique	1
1.2 Objectifs – Contributions	5
1.3 Plan de la thèse	8
Chapitre 2	
Les modes d’instabilité des profils formés à froid et la MBF	9
2.1 Introduction	9
2.2 Définition des modes d’instabilité	10
2.2.1 Instabilité locale ou voilement	11
2.2.2 Instabilité distorsionnelle	12
2.2.3 Instabilité globale ou Eulérienne	13
2.3 La méthodes des bandes finies classique : un outil important dans l’étude de la stabilité des structures à parois minces	14
2.3.1 Introduction	14
2.3.2 La théorie	15
2.3.3 Le programme élaboré, ses résultats et ses particularités	21
2.4 Première contribution : correction des courbes de voilement des profils en U et en C uniformément comprimés	24
2.4.1 Les premières utilisations de VisASCOP	24
2.4.2 Correction des courbes de voilement	27
2.4.3 Interprétation des courbes modifiées	29
2.5 Proposition d’une première procédure de classement	35
2.5.1 La technique proposée	35
2.5.2 Application aux profils à sections en C	36
2.5.3 Conclusion	42
Chapitre 3	
L’Instabilité distorsionnelle	45
3.1 Introduction	45
3.2 Historique	47
3.3 Méthodes simplifiées pour le calcul manuel de la contrainte critique distorsionnelle	50
3.3.1 Méthode de Hancock (1987)	50
3.3.2 Méthode de Schafer (1997)	52
3.3.3 Commentaires	54
3.4 Méthodes numériques d’analyse de la stabilité élastique	55
3.5 Charge ultime dans le mode distorsionnel	57
3.6 Règles de calcul des profils formés à froid	58

3.6.1	Introduction	58
3.6.2	Le concept de la largeur efficace	59
3.6.3	Une nouvelle méthode de calcul – la Direct Strength Method (DSM).....	62
3.7	Conclusion.....	64
Chapitre 4		
Classification des modes d’instabilité des sections à parois minces par la		
MBF : la cFSM..... 67		
4.1	Introduction.....	67
4.2	Incertitudes dans la définition des modes d’instabilité des éléments à parois minces.....	69
4.2.1	Définitions des modes d’instabilité.....	69
4.2.2	Problèmes et questionnements sur les définitions des modes d’instabilité.....	70
4.3	Problèmes dans le calcul des forces/contraintes critiques.....	76
4.3.1	Méthode de calcul de la charge critique d’un mode donné.....	76
4.3.2	Problèmes	78
4.4	Objectifs recherchés dans une méthode de classification.....	85
4.5	Les bases de la cFSM.....	87
4.5.1	Notations	87
4.5.2	Les différents types de nœuds	89
4.5.3	Définitions « mécaniques » des modes d’instabilité.....	90
4.5.4	Structure de la cFSM.....	92
4.5.5	Formulation de la cFSM pour les sections ouvertes à connexions simples	96
4.5.6	Formulation de la cFSM pour les sections ouvertes à connexions multiples	104
4.6	Utilisation de la cFSM.....	109
4.6.1	Exemples de calcul de modes purs.....	109
4.6.2	Exemples de décomposition modale.....	113
4.7	Conclusion.....	115
Chapitre 5		
Amélioration de la cFSM et nouvelle classification des modes d’instabilité 117		
5.1	Introduction.....	117
5.2	Problèmes relevés dans la cFSM	118
5.2.1	L’instabilité distorsionnelle des sections en I.....	119
5.2.2	Le voilement des éléments plans non raidis ou faiblement raidis	121
5.2.3	Résumé des problèmes relevés dans la cFSM.....	126
5.3	Améliorations de la cFSM	127
5.3.1	Introduction	127
5.3.2	Matrice de rigidité d’une bande dans l’espace GD	128
5.3.3	Matrice de contrainte concernant les déformations membranaires.....	130
5.3.4	Application des équations de contrainte à la matrice rigidité	134
5.3.5	Développement de la matrice de contrainte du sous espace GD	136
5.3.6	Exemple numérique.....	138
5.3.7	Conclusion.....	139

5.4	Amélioration de la définition/classification de l'instabilité distorsionnelle.....	140
5.4.1	Introduction	140
5.4.2	Quelques remarques sur les techniques utilisées pour isoler les modes d'instabilité.....	141
5.4.3	Nouvelle approche utilisant l'orthogonalité.....	143
5.4.4	Remarques	146
5.4.5	Exemples numériques.....	147
5.5	Conclusion	158
Chapitre 6		
Les colonnes composées.....		159
6.1	Introduction.....	159
6.2	Revue de la littérature sur le flambement dans le plan des éléments connexions	162
6.2.1	Historique	162
6.2.2	La solution de Paul : une compilation des solutions théoriques.....	163
6.2.3	Evaluation de la rigidité au cisaillement des colonnes lacées et à étrésillons	181
6.3	La méthode des splines bandes finies pour l'étude de la stabilité élastique des colonnes composées.....	185
6.3.1	Objectif	185
6.3.2	Justification du choix de la MSBF.....	186
6.3.3	La MSBF	188
6.3.4	La MSBF pour l'étude de la stabilité élastique des colonnes composées	194
6.3.5	SHEBA : le programme élaboré.....	198
6.4	Exemples numériques	199
6.4.1	Introduction	199
6.4.2	La colonne étudiée et sa modélisation.....	200
6.4.3	Exemple illustratif et identification modale.....	203
6.4.4	Résultats et commentaires	205
6.5	Conclusion	211
Conclusion		213
Annexe A		
Formulation de la matrice R_{GD}.....		217
	Relation entre les DDL de translation transversale et les autres déplacements transversaux	217
Bibliographie.....		231
Liste des Figures.....		237
Liste des Tableaux.....		241
ملخص		
Résumé		
Abstract		

Principales notations

Toutes les notations sont définies lors de leur première apparition dans le texte. Dans ce qui suit nous donnons les principaux symboles utilisés.

α	Angle définissant l'orientation des bandes.
χ	Courbure.
Δ	Vecteur des DDL globaux
ε	Allongement unitaire.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations.
φ	Vecteur des formes propres/des fonctions splines.
Φ	Matrice modale
γ	Distorsion.
Γ	Matrice de Changement de repère des bandes.
λ	Facteur de charge / Élancement.
Λ	Matrice diagonale des valeurs propres/facteurs de charge.
ν	Coefficient de Poisson
σ	Contrainte.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes.
a	Longueur de demi-onde.
A	Aire
b	Largeur de bande/paroi plane.
C_w	Constante de torsion gauchie.
D	Raideur flexionnelle des plaques.
\mathbf{D}	Vecteur des DDL d'une bande dans le repère global.
E	Module de Young
\mathbf{E}	Matrice d'élasticité.
\mathbf{F}	Vecteur forces.
G	Module de cisaillement.
h, w	Hauteur, largeur.
\mathbf{H}	Matrice contenant une base vectorielle/matrice de contrainte.

I	Moment d'inertie
\mathbf{I}	Matrice identité.
J	Constante de torsion de St. Venant.
K	Coefficient de rigidité.
K	Rigidité au cisaillement.
\mathbf{k}_e	Matrice de rigidité de l'élément bande exprimée dans le repère local.
\mathbf{K}_e	Matrice de rigidité de l'élément bande exprimée dans le repère global.
\mathbf{K}_E	Matrice de rigidité de la structure
\mathbf{k}_g	Matrice de rigidité géométrique de l'élément bande exprimée dans le repère local.
\mathbf{K}_g	Matrice de rigidité géométrique de l'élément bande exprimée dans le repère global.
\mathbf{K}_G	Matrice de rigidité géométrique de la structure
K_v	Coefficient de voilement.
L	Longueur.
m	Nombre de demi-ondes/nombre d'intervalles splines.
M	Moment fléchissant.
N	Effort normal
\mathbf{N}	Matrice des fonctions d'interpolation.
P	Charge.
Q	Effort tranchant.
\mathbf{R}	Matrice de contrainte.
S	Moment statique.
t	Epaisseur.
\mathbf{U}	Vecteur des champs de déplacement.
u, v, w	Champs de déplacement.
u, v, w, θ	Degrés de liberté locaux de la MBF.
U, V, W, Θ	Degrés de libertés globaux de la MBF.
\mathbf{V}	Vecteur des DDL de gauchissement.
x, y, x	Coordonnées locales.
X, Y, Z	Coordonnées globales.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte – Problématique

L'utilisation des profils formés à froid comme éléments de structures dans le domaine de la construction ou dans les rayonnages de stockage industriel a atteint l'âge de la maturité durant la dernière décennie. Les procédés de fabrication se sont développés au point de permettre la confection de sections ayant jusqu'à 25 mm d'épaisseur (Rondal, 2000), ce qui est fort éloigné des premières sections dont les épaisseurs ne dépassaient guère les 3 mm. La production des sections à partir de feuillards d'acier déjà enduits ou galvanisés offre des perspectives architecturales très intéressantes et résout les problèmes de corrosion. La facilité de fabrication permet de produire une grande variété de formes qu'on peut optimiser en fonction des critères structuraux, économiques ou esthétiques (figure 1.1). D'un autre côté, il est devenu courant de produire ce type de sections à partir d'aciers à haute résistance ce qui rend possible la réalisation de formes ayant des rapports largeur – épaisseur des parois relativement grands (Davies, 2000). Ces sections posent donc inévitablement des problèmes très complexes de conception et plus particulièrement de stabilité.

Les éléments de structures, poutres et poteaux, formés à froid, lorsqu'ils sont totalement ou partiellement comprimés, peuvent présenter trois modes d'instabilité : locale, distorsionnelle ou globale. Afin de décrire chacun de ces modes, il est nécessaire d'observer que les sections de ces éléments de structures sont formées de bandes ou parois planes raccordées par des congés. Si ces parties arrondies ont un rayon relativement faible, elles peuvent être négligées et assimilées à des arêtes vives, c'est-à-dire des segments de droites (Rondal, 1984). Même dans le cas contraire, les codes de calcul (CEN/EC3, 1996) préconisent de remplacer la section par des éléments plans fictifs. Le poteau ou la poutre formé à froid peut alors être vu comme une structure à parois (planes) minces (figure 1.2).

Dans l'instabilité locale ou voilement, chaque bande plane constituant la section se déforme hors de son plan en conservant les « lignes » de jonction essentiellement droites. Sous des charges qui ne varient pas selon la direction (z) de la longueur, ce mode prend la forme d'ondulations sinusoïdales comportant un nombre élevé de demi-ondes ($m \gg 1$) tel

que montré par la figure 1.3.a. Pour une structure suffisamment longue, la charge critique et la longueur de la demi-onde sont, dans ce cas de chargement, indépendantes des conditions de fixation de l'élément de structure (Timoshenko et Gere, 1961). Sous des charges latérales, le voilement peut être localisé et confiné aux régions qui sont fortement comprimées avant que l'instabilité n'ait lieu.

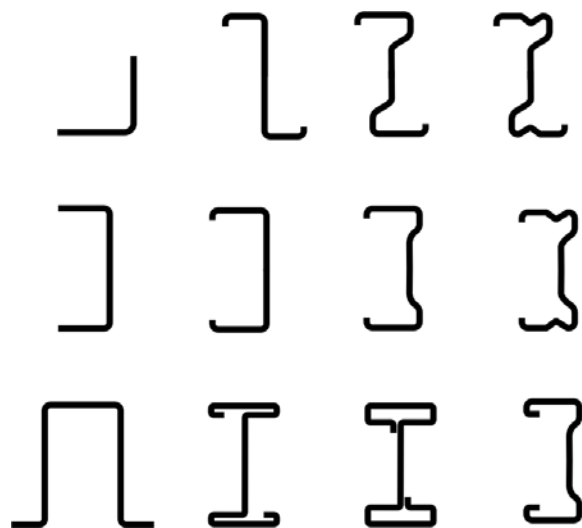


Figure 1.1 Eléments de structures en acier formés à froid ayant des sections ouvertes

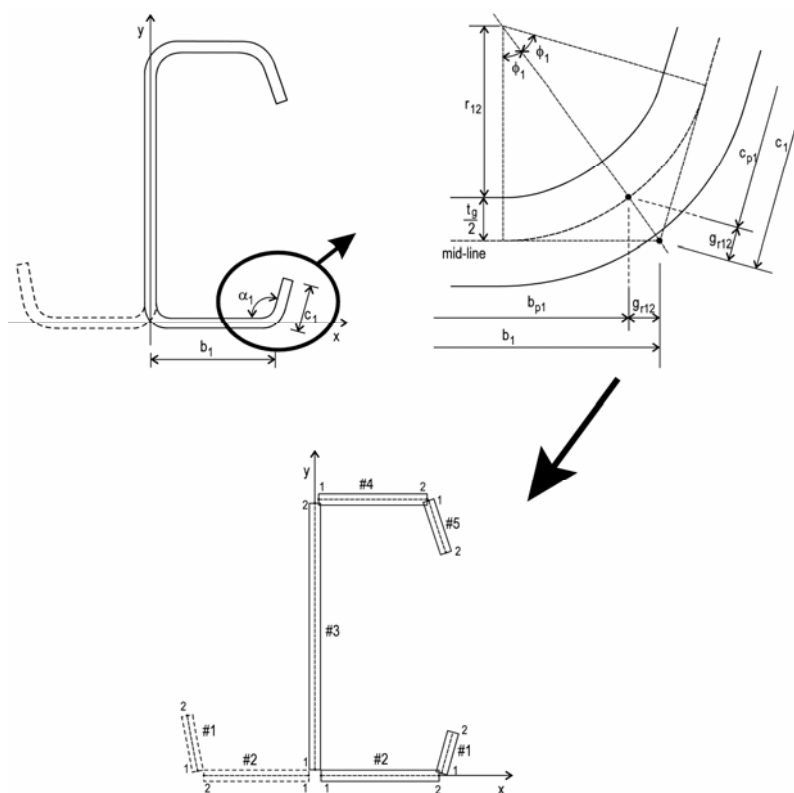


Figure 1.2 Les éléments structuraux en acier formés à froid sont des structures à parois minces.

Dans l'instabilité distorsionnelle, certaines parties planes ou ensemble de parties planes subissent une flexion dans leur plan et une torsion, alors que d'autres parois planes subissent un voilement pur. Ce type d'instabilité se manifeste également par des ondulations harmoniques dont les longueurs des demi-ondes sont plus grandes que celle du voilement (figure 1.3.b).

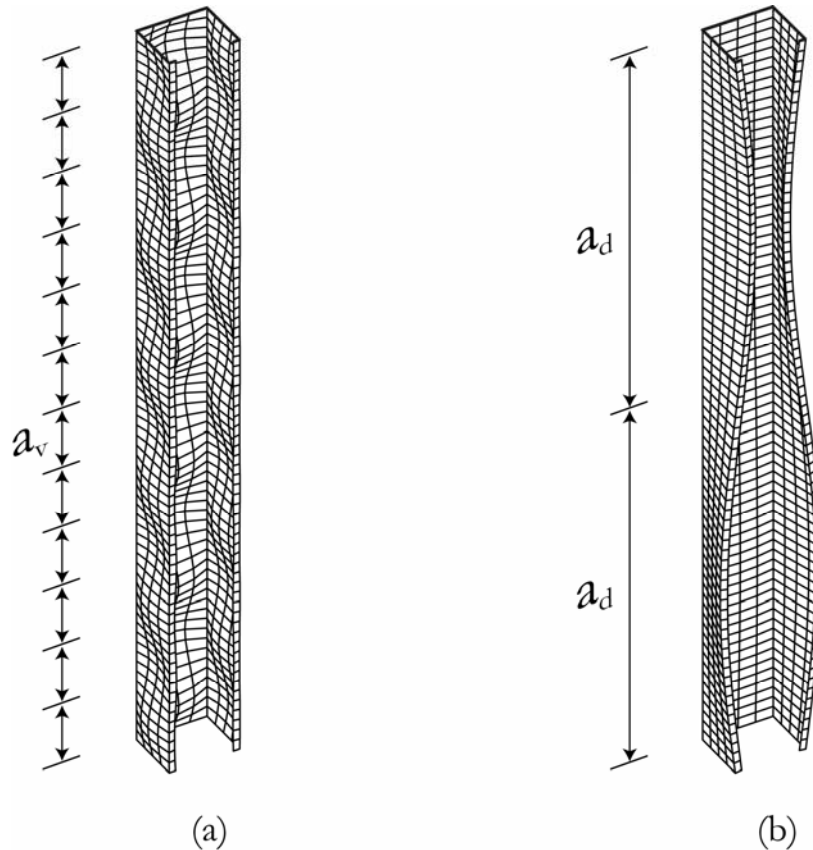


Figure 1.3 Les deux modes harmoniques : (a) local et (b) distorsionnel.

Le troisième type d'instabilité est dit global car il s'agit d'un mode non périodique qui couvre toute la longueur du poteau ou de la poutre. Il peut prendre la forme d'une instabilité par flexion (figure 1.4.a), par torsion ou par flexion et torsion (figure 1.4.b). La forme de la section transversale de l'élément de structure reste inchangée ou peut subir une légère distorsion.

Ces trois modes d'instabilité présentent donc des longueurs d'ondes différentes qui sont croissantes en passant du premier au troisième. Dans les zones de transition, l'instabilité peut avoir lieu en présentant des caractéristiques combinant le premier au deuxième ou au troisième. On parle alors de modes couplés ou de phénomène d'interaction entre modes (Sridharan, 2000). Il s'en suit en général une érosion de la charge critique (Dubina, 2001), c'est-à-dire qu'on observe une diminution de la résistance réelle par rapport aux valeurs théoriques.

Les instabilités locale et globale sont connues et étudiées depuis longtemps. Elles sont d'ailleurs largement couvertes dans les principaux codes et règlements de la

construction métallique. Pour le dimensionnement des éléments plans vis-à-vis du voilement, il y est fait appel à la notion de largeur efficace introduite par Von Karman et calibrée aux profils formés à froid par Winter. Il s'agit d'une méthode élémentaire dans le sens où, elle considère de manière isolée chaque partie plane constituant la section. D'autre part, les règlements utilisent les courbes de flambement des colonnes pour le calcul contre les instabilités globales. Les codes de calcul tiennent également compte du phénomène d'interaction entre les modes local et global.

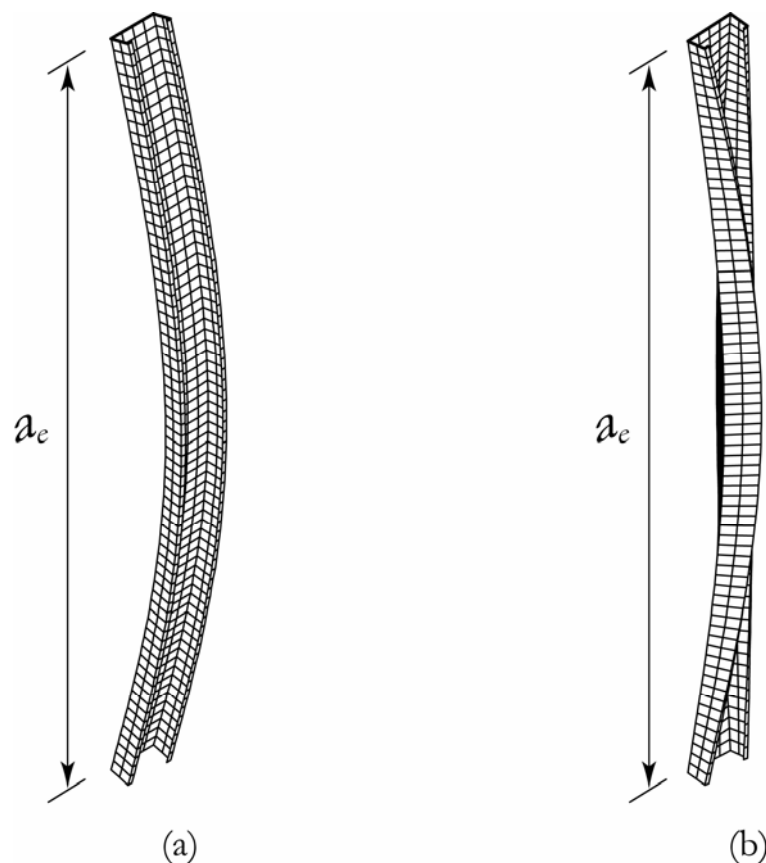


Figure 1.4 Deux modes Globaux : (a) Flexionnel et (b) Flexionnel – torsionnel.

L'instabilité distorsionnelle est relativement moins bien connue. Elle présente cependant un intérêt croissant suite à la réalisation par l'industrie de l'acier de sections de plus en plus minces avec des aciers ayant des résistances de plus en plus grandes. Les formules de dimensionnement les plus récentes qui tiennent compte de ce phénomène sont basées principalement sur les travaux de Hancock, Davies et leurs collaborateurs.

Selon Hancock (2003), le premier règlement à inclure un dimensionnement vis-à-vis de l'instabilité distorsionnelle est le code australien (AS/NZS 4600, 1996). Dès 1999, le règlement des USA (AISI, 1999) en tient compte par une extension de la notion de largeur efficace dans ses paragraphes B4.1 et B4.2 où sont considérés, respectivement, le cas des éléments plans raidis possédant un raidisseur intermédiaire et celui des éléments ayant un raidisseur de bord. Le comportement post-critique est pris en considération en utilisant une largeur de plaque réduite (efficace) sous la contrainte de dimensionnement. La version

actuelle du code nord américain (AISI, 2004a) fait appel à des équations semi empiriques complexes qu'il faut résoudre de manière itérative afin de calculer les contraintes critiques. Il est d'ailleurs reconnu que ces calculs peuvent, dans certains cas, ne pas être très précis (Sputo et Tovar, 2005 ; Tovar et Sputo, 2005).

D'autre part, les formes des sections des éléments de structures formés à froid deviennent de plus en plus complexes et comportent des raidisseurs de bords et intermédiaires de plus en plus nombreux et ayant des formes de plus en plus compliquées (figure 1.1). Pour surmonter la difficulté de leur calcul, une nouvelle méthode, baptisée la « méthode de la résistance directe »¹ (DSM), a été développée par Schafer et Peköz (1998). La DSM considère la section dans sa totalité et évite de la décomposer en éléments plans individuels. Elle se base sur la contrainte (force) critique d'instabilité élastique de la section entière évaluée par une méthode scientifiquement validée. La courbe de dimensionnement de la section entière est considérée comme une fonction de cette contrainte (force) critique élastique. La DSM, tout comme la méthode de la largeur efficace, tient compte de la résistance post-critique et permet ainsi une conception économique. Malgré quelques critiques (Rusch et Lindner, 2001), cette méthode a donné des résultats si convaincants qu'elle a été annexée aux nouvelles règles nord-américaines (AISI, 2004a) qui sont la compilation des résultats scientifiques les plus récents dans le domaine.

1.2 Objectifs – Contributions

Dans la DSM, les capacités portantes nominales vis-à-vis des trois types d'instabilité sont estimées directement à partir des forces critiques élastiques correspondantes calculées pour la section entière. C'est-à-dire que la section de la structure à parois minces n'a plus besoin d'être décomposée. La DSM a donc besoin d'outils fiables et pratiques pour estimer les charges critiques élastiques des structures à parois minces.

Bien qu'un certain nombre de méthodes existent, le calcul et l'identification explicite de la charge critique liée à un mode pur d'instabilité donné n'est toujours pas entièrement résolu (Hancock, 2003 ; Adany et Schafer, 2006a et 2006b). Le problème est que les méthodes générales de solution, qui peuvent manipuler des sections transversales, des conditions aux limites, et des charges arbitraires, ne peuvent pas explicitement calculer des modes purs d'instabilité ; tandis que, les méthodes spécialisées, qui résolvent avec succès le calcul pur de mode d'instabilité, ne peuvent pas aisément manipuler les sections, les conditions aux limites, et les charges générales.

L'ambiguïté et la difficulté de la classification des modes d'instabilité par les méthodes numériques disponibles sont rapportées par Adany et Schafer (2006a et 2006b). Ces chercheurs proposent alors une version modifiée de la méthode des bandes finies (MBF), baptisée la cFSM², qui est à même de classer automatiquement les types d'instabilité. L'idée fondamentale de la technique proposée est de garder les caractéristiques de la MBF, et d'y introduire les hypothèses de la GBT³ (Schardt, 1989 ; Davies et Leach, 1994) qui permettent l'identification et le calcul des modes purs d'instabilité. De cette façon, la MBF est contrainte à reproduire les modes purs d'instabilité. L'objectif d'Adany et Schafer est de réussir, à moyen terme, à mettre en

¹ the « Direct Strength Method », en anglais

² Pour : constrained Finite Strip Method

³ Generalized Beam Theory

œuvre cette technique dans une méthode plus générale que la MBF, c'est-à-dire dans la méthode des éléments finis (MEF).

La classification automatique des modes est un problème auquel nous avons commencé à contribuer dès 1995 (Kerdal et al., 1995a et 1995b). L'expérience cumulée dans l'analyse des résultats de la MBF nous a permis de relever des insuffisances dans la cFSM. La méthode de calcul de la principale matrice de contrainte de la cFSM, c'est-à-dire celle qui permet de définir le mode distorsionnel, est tellement compliquée que son extension à la MEF nous semble assez difficile.

Par conséquent, le premier objectif de cette thèse est de proposer un amendement à la cFSM qui améliore le calcul de la matrice de contrainte définissant le mode distorsionnel, qui reste l'instabilité la plus compliquée à étudier. Il s'agit alors de reformuler les hypothèses qui permettent d'isoler ce mode afin de rendre la procédure de calcul « cFSM » plus générale et plus simple que la proposition d'Adany et Schafer. La méthode doit conserver les caractéristiques des méthodes numériques générales.

Le calcul de la matrice de contrainte n'est pas le seul problème que nous avons relevé dans la cFSM. En effet, la procédure cFSM/GBT pour isoler le mode distorsionnel ne fonctionne pas dans certains cas tels que les sections fermées. D'autre part, la classification cFSM/GBT dépend du modèle numérique et donne lieu à des discontinuités. Dans cette thèse, nous chercherons à proposer une autre technique de séparation des modes propres qui leverait certaines des insuffisances de la cFSM et qui serait aisément extensible aux méthodes numériques générales (MEF, ...). Nous devons alors utiliser des définitions indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle.

Concernant la DSM en général et l'instabilité distorsionnelle en particulier, un domaine relativement vierge est celui des colonnes et des poutres composées, « Built-up columns and beams » en anglais. Ce type d'éléments de structures est formé de deux ou plusieurs éléments principaux parallèles (membrures) interconnectés (figure 1.5).

On peut évidemment envisager la possibilité d'étudier la stabilité distorsionnelle de chaque élément principal à part, en prenant comme sa longueur la distance séparant les connexions. On suppose ainsi implicitement que les points de connexion sont des appuis pour les membrures. Il y aurait donc nécessité de décomposer la section composée en ses membrures élémentaires puis, il faudrait décomposer ces mêmes membrures en éléments plans individuels pour pouvoir procéder à une analyse de type « largeur efficace » telle que recommandée par les règlements de construction métallique (CEN/EC3, 1996 ; AISI/NAS, 2004a). Dans le cas où les membrures possèdent des formes compliquées telles que celles retenues pour les colonnes formées à froid de nouvelle génération, on peut avancer que la tâche est extrêmement complexe.

La méthode de la résistance directe ou DSM (AISI, 2004a et 2004b ; Schafer et Peköz, 1998), qui évite justement de décomposer les sections et les étudie dans leur globalité, semble être une alternative intéressante pour simplifier la procédure réglementaire.

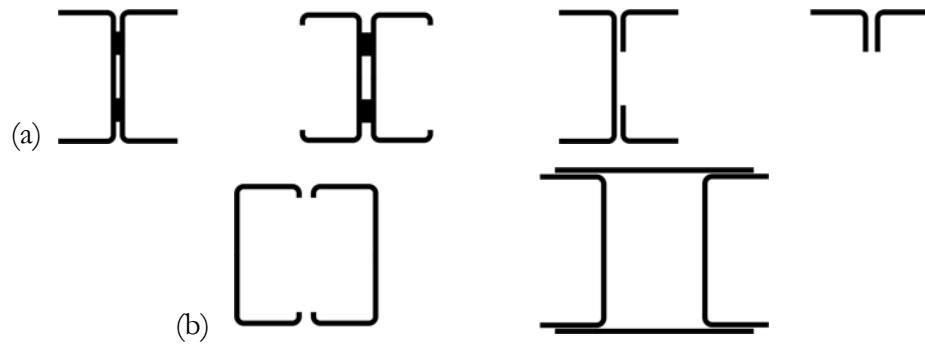


Figure 1.5 Sections composées (a) ouvertes et (b) fermées

Mais avant d'en arriver là, c'est-à-dire à proposer une méthode réglementaire basée sur la DSM, il est indispensable de développer une méthode numérique simple et efficace permettant d'étudier la stabilité élastique de la section entière des colonnes et des poutres composées. Par conséquent, un autre objectif de cette thèse est de développer une méthode numérique qui permette de calculer aisément les modes critiques d'instabilité élastique et d'évaluer les charges correspondantes. La méthode à développer doit être simple dans le sens où elle doit rester à la portée des ingénieurs en vue de son utilisation dans une procédure réglementaire. La méthode des éléments finis, qui est évidemment la méthode numérique la plus puissante dont on dispose, exige des modèles très élaborés et assez compliqués à préparer ainsi que des moyens de calcul onéreux. Elle ne correspond donc pas à l'objectif fixé. D'un autre côté, la méthode recherchée doit être efficace dans le sens où elle doit évaluer de façon précise tous les modes d'instabilité des colonnes et des poutres composées.

Lors des dernières décennies, la MBF (Lau et Hancock, 1985 ; Key et Hancock, 1993 ; Cheung et al., 1999 ; Kim et Choi, 2004 ; Ovesy et al. 2005 ; ...) et la GBT (Schardt, 1989 ; Davies et Leach, 1992, 1994 ; Davies et al., 1994 ; Kesti et Davies, 1999 ; Gonçalves et Camotim, 2004 ; Dinis et al., 2006) se sont imposées comme des moyens simples et efficaces pour étudier l'ensemble des modes d'instabilité des profils isolés.

Ces méthodes n'ont cependant jamais été utilisées pour modéliser et étudier la stabilité des colonnes composées. Parmi les variantes de la MBF, celle qui nous semble capable de répondre aux objectifs est la méthode des splines bandes finies (Lau et Hancock, 1985). Elle a en effet la capacité, grâce au type particulier de ses fonctions d'interpolations (B-3 splines), de tenir compte de l'effet discret des connexions. Elle présente également l'énorme avantage de permettre la modélisation d'une grande variété de conditions aux limites longitudinales ainsi que la possibilité de prendre en charge les appuis intermédiaires. L'objectif est donc de modifier cette méthode afin d'élaborer un outils numérique simple et efficace pour le calcul de la stabilité élastique de colonnes et poutres composées.

1.3 Plan de la thèse

Ce document est organisé en six chapitres et une annexe.

Le chapitre 1 est une introduction qui présente le contexte, les motivations et les objectifs de cette thèse.

Le chapitre 2 rappelle d'abord la théorie de la MBF. C'est une méthode numérique qui a acquis un statut particulier dans le calcul de la stabilité élastique des éléments structuraux en acier formés à froid. Elle est même recommandée dans certains règlements. Nous y exposerons ensuite notre expérience dans l'exploitation de la MBF qui s'est soldée par une première contribution publiée il y a plus de dix ans (Kerdal et al., 1995a et 1995b). Ensuite, et conformément au besoin très actuel d'identifier « automatiquement » les instabilités de base, nous y proposerons une première technique très simple d'identification.

Le chapitre 3 présente une revue de littérature sur l'instabilité distorsionnelle des profils formés à froid et sur les méthodes de calcul manuel et numérique de la charge critique distorsionnelle. On y rappelle également le concept de la largeur efficace, qui est à la base des principales règles de calcul des éléments structuraux en acier formés à froid, avant de présenter la nouvelle méthode de calcul introduite en 2004 dans les règles nord-américaines à savoir la méthode de la résistance directe ou « Direct Strength Method » (DSM).

Le chapitre 4 rappelle les motivations qui sont à l'origine du développement de la cFSM qui est une version de la MBF capable de calculer et d'identifier les principales instabilités des structures à parois minces. L'essentiel des développements théoriques de la cFSM sont ensuite présentés suivis de quelques résultats.

La cFSM repose sur le calcul de matrices servant à contraindre la MBF à fournir les différentes instabilités de base. La matrice relative à l'instabilité distorsionnelle dans la cFSM originale est très compliquée. Le chapitre 5 propose une autre formulation de cette matrice qui est beaucoup plus simple mais surtout beaucoup plus générale et efficace tout en simplifiant les hypothèses de calcul. Ce chapitre propose également une technique originale de séparation des modes d'instabilité dans le but de lever certaines insuffisances de la cFSM

Le chapitre 6 traite de la stabilité élastique des colonnes composées. Une revue de littérature sur le flambement dans le plan des connexions est d'abord présentée. Il s'agit d'une instabilité globale qui pose des problèmes théoriques particuliers car il faut tenir compte de l'érosion de la charge critique produite par la déformation des diagonales ou des étrépillons. On expose ensuite la méthode des spline bandes finies qui est une variante de la méthode des bandes finies. Elle constitue la base pour établir une nouvelle technique de calcul des colonnes composées. La procédure développée est présentée vers la fin du chapitre. Elle ne sera suivie que par quelques exemples de validation puis par des exemples d'utilisation.

Après la conclusion, une annexe est fournie. Elle complète l'exposé de la démonstration de la matrice de contrainte de la cFSM selon la méthode de Adany et Schafer (2006a).

Chapitre 2

Les modes d'instabilité des profils formés à froid et la MBF

2.1 Introduction

Dans la plupart des cas, les phénomènes d'instabilité sont le facteur déterminant dans le dimensionnement des éléments structuraux en acier formés à froid à cause de leurs élancements très grands. La démarche classique pour déterminer leur capacité portante vis-à-vis de l'instabilité consiste à chercher d'abord la charge ou la contrainte critique élastique qu'il faut ensuite corriger pour tenir compte des effets défavorables des différents types d'imperfections, ainsi que des effets favorables d'une possible réserve post-critique. Cette correction est souvent réalisée au moyen de courbes d'instabilité donnant la relation entre la charge critique élastique et la charge ultime en fonction de l'élancement. Cette démarche est respectée dans la plupart des règlements modernes (CEN/EC3, 1996 ; AS/NZS 4600, 1996 ; AISI/NAS, 2004a).

Il est donc indispensable de faire une évaluation correcte de la charge critique élastique du moment qu'elle est à l'origine de la procédure de dimensionnement. Il faut également identifier le type d'instabilité qui entre en jeu car les effets des imperfections et de la réserve post-critique en dépendent.

Les profils formés à froid comprimés et/ou fléchis peuvent subir trois types d'instabilité de base : Locale, Globale ou Distorsionnelle. Chacune de ces instabilités possède son propre comportement post-critique. Il est d'ailleurs connu que la réserve post-critique du voilement peut être très significative, particulièrement lorsque l'élancement est grand et le comportement essentiellement élastique. La notion de la largeur efficace, introduite depuis fort longtemps et présentée au paragraphe 3.6.2, permet justement d'en tenir compte. L'instabilité distorsionnelle possède également une réserve post-critique quoique beaucoup moins importante que celle du voilement. Quant à l'instabilité globale, il est connu qu'elle ne possède aucune réserve de ce type et la portance réelle de l'élément de structure est toujours inférieure à la charge critique élastique. Il paraît donc primordial de clairement identifier chaque type d'instabilité afin d'adopter la bonne procédure de dimensionnement.

Il semble cependant qu'à ce jour il n'y ait pas encore de consensus sur la définition des modes d'instabilité (Hancock, 2003 ; Adany et Schafer, 2006a et 2006b), particulièrement celle de l'instabilité distorsionnelle en tant que comportement de base. Les définitions actuelles la font chevaucher parfois avec les modes couplant différentes instabilités de base ou bien elles donnent lieu à une confusion avec l'instabilité locale, l'autre mode entraînant une déformation de la section transversale. Il est peut être important de noter qu'il n'y a aucun risque de confusion avec les modes globaux où, après instabilité, la forme de la section est conservée c'est-à-dire que la section subit un déplacement en mode rigide. Nous commencerons alors ce chapitre par donner les définitions des trois modes d'instabilité de base telles que rapportées dans les commentaires de la « Direct Strength Method » (DSM) (AISI, 2004b).

Il semble également que le calcul des charges critiques des instabilités de base, donnée importante dans la démarche de dimensionnement, pose problème. Les méthodes les plus générales sont numériques (MEF, MBF, ...) et permettent de calculer les charges provoquant l'instabilité des structures les plus compliquées. Elles sont cependant incapables d'isoler les instabilités de base et de donner les charges correspondantes. D'un autre côté, les méthodes qui permettent d'évaluer les charges critiques de base ne sont pas assez générales.

Pour simplifier de manière significative l'évaluation des charges critiques des instabilités de base à partir des résultats fournis par les méthodes numériques, on recommande dans les commentaires de la DSM (AISI, 2004b) de tracer la charge critique en fonction de la longueur de la demi-onde¹. Or, seule la méthode des bandes finies (MBF) réalise ce travail automatiquement. On reconnaît ainsi à la MBF un statut particulier dans le calcul des modes d'instabilité des profils formés à froid.

Nous commencerons par rappeler la théorie de cette méthode puis nous exposerons notre expérience dans son exploitation qui s'est soldée par une première contribution publiée il y a plus de dix ans (Kerdal et al., 1995a et 1995b). Ensuite, et conformément au besoin très actuel d'identifier « automatiquement » (Adany et Schafer, 2006a et 2006b) les instabilités de base, nous proposerons une première technique très simple d'identification.

2.2 Définition des modes d'instabilité

Comme indiqué plus haut, les profils formés à froid comprimés et/ou fléchis peuvent subir trois types d'instabilité de base : Locale, Globale ou Distorsionnelle. Cette classification est actuellement largement acceptée par la communauté scientifique et correspond principalement à trois classes de comportements post-critiques. A chaque type d'instabilité correspond une réserve post-critique particulière, ce qui donne lieu à différentes procédures de dimensionnement. Il est alors indispensable de les identifier correctement. Classiquement, la définition de ces modes d'instabilité repose sur la bonne compréhension des rôles de la longueur de demi-onde et de la forme déformée associées à l'instabilité.

Dans ce qui suit nous présenterons des critères qui permettent d'identifier les différentes classes d'instabilité des éléments structuraux soumis à des contraintes ne

¹ Half-wave length, en anglais

variant pas dans le sens de la longueur. Ces définitions sont celles rapportées dans les commentaires de la DSM (AISI, 2004b).

2.2.1 Instabilité locale ou voilement

2.2.1.1 Longueur de demi-onde

Le voilement d'un élément de structure totalement ou partiellement comprimé se produit en développant des ondulations sinusoïdales. La longueur de demi-onde de ces ondulations est plus petite que la plus grande dimension caractéristique de l'élément. Pour la section en C uniformément comprimée donnée comme exemple à la figure 2.1, cette dimension correspond à sa plus grande dimension extérieure, soit 200 mm. Ainsi, toutes les instabilités harmoniques dont les longueurs de demi-onde sont inférieures à 200 mm sont des instabilités locales ou voilements.

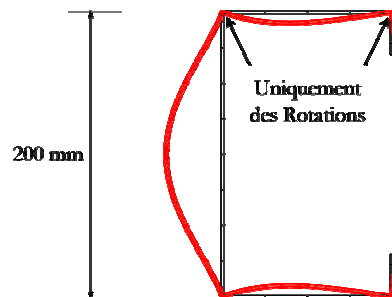


Figure 2.1 Voilement d'une section en C uniformément comprimée

Ce critère qui limite la longueur de demi-onde du voilement à la plus grande dimension extérieure de la partie comprimée d'une section repose sur le raisonnement suivant. Le voilement d'une plaque isolée simplement appuyée et uniformément comprimée se produit en développant des ondulations « carrées », c'est-à-dire que la longueur de la demi-onde est égale à la largeur de la plaque (la plus grande dimension extérieure). Si cette plaque est soumise à un gradient de contrainte ou qu'elle bénéficie d'un raidissage le long de ses bords par la présence d'éléments plans voisins, la longueur de la demi-onde sera plus petite que la largeur de la plaque. Par conséquent, un voilement, ayant un potentiel pour une réponse post-critique stable, n'a lieu que si la longueur de demi-onde est plus petite que la plus grande plaque potentielle de l'élément, i.e., la plus grande dimension extérieure comprimée.

2.2.1.2 Forme déformée

Lors du voilement d'un élément de structure, sa section droite se déforme de manière significative. Seulement, cette déformation n'engendre que des rotations, sans aucune translation, au niveau des lignes d'intersection entre les éléments plans (figure 2.1). Pour des sections dont les semelles possèdent un raidisseur de bord, comme les sections en C ou en Z, l'observation de la forme déformée procure une comparaison directe entre les instabilités locale et distorsionnelle. Le raidisseur ne subit qu'une rotation lors du voilement alors qu'il se déplace pendant une instabilité distorsionnelle.

2.2.1.3 Remarques

Il existe des cas où il est difficile de distinguer le voilement de l'instabilité distorsionnelle. Il se peut aussi que les définitions données ci-dessus ne correspondent pas toujours à l'usage. En effet, les cornières ou les sections en U sont considérées comme susceptibles de voiler par les principaux codes et règlements alors que les longueurs de demi-ondes de leurs « voilements » peuvent être supérieures à leur plus grande dimension. Il faut aussi signaler que le voilement peut se produire pour des longueurs de demi-ondes très petites devant la dimension caractéristique de la section. Ceci peut arriver en présence de raidisseurs intermédiaires, ou lorsque la partie comprimée de la section est très petite devant la partie tractée.

2.2.2 Instabilité distorsionnelle

2.2.2.1 Longueur de demi-onde

L'instabilité distorsionnelle est également une instabilité harmonique. Elle se produit en développant des ondulations le long de la longueur. Typiquement, la longueur de la demi-onde est égale à plusieurs fois la dimension caractéristique de la section (elle est nettement supérieure aux 200 mm de la figure 2.2). L'une des difficultés liées à ce type d'instabilité est que la longueur de demi-onde dépend fortement du chargement et de la géométrie.

2.2.2.2 Forme déformée

L'instabilité distorsionnelle induit des déplacements et des rotations au niveau des lignes d'intersection entre les plaques formant la section. Elle se caractérise par la déformation d'une partie de la section accompagnée d'un déplacement en mode rigide de l'autre partie. Dans l'exemple montré dans la figure 2.2, les ensembles semelle - raidisseur de la section en C se déplacent sans se déformer alors que les âmes subissent des déformations importantes.

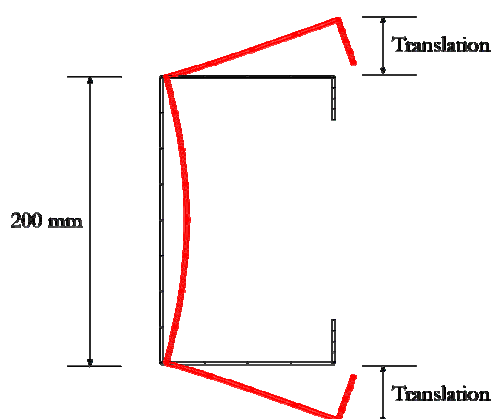


Figure 2.2 Instabilité distorsionnelle d'une section en C uniformément comprimée

2.2.2.3 Remarques

Lors d'analyses numériques, l'instabilité distorsionnelle peut ne pas se distinguer même lorsque l'instabilité locale et l'instabilité globale sont clairement identifiées. Les sections en C et en Z fléchies exhibent souvent ce comportement de base alors que pour d'autres sections l'instabilité distorsionnelle peut ne pas se produire.

Le raidissage peut être efficace en retardant l'instabilité distorsionnelle et en amplifiant la résistance d'un élément. Il va alors limiter la rotation de la jonction âme/semelle dans la zone comprimée.

2.2.3 Instabilité globale ou Eulérienne

2.2.3.1 Longueur de demi-onde

Le troisième type d'instabilité est dit global car il s'agit d'un mode non périodique qui couvre toute la longueur du poteau ou de la poutre. Pour les poteaux, il peut prendre la forme d'une instabilité par flexion (flambement d'Euler), par torsion ou par flexion et torsion (figure 2.3). Dans le cas des poutres fléchies il prend la forme d'un déversement.

La contrainte critique des instabilités globales décroît strictement lorsque la longueur augmente. Le flambement se produit alors avec une seule demi-onde de longueur égale à la longueur effective de flambement.

2.2.3.2 Forme déformée

Dans une instabilité Eulérienne, la forme de la section transversale de l'élément de structure reste inchangée. La section entière subit un déplacement en mode rigide qui se traduit par une translation et/ou une rotation (figure 2.3).

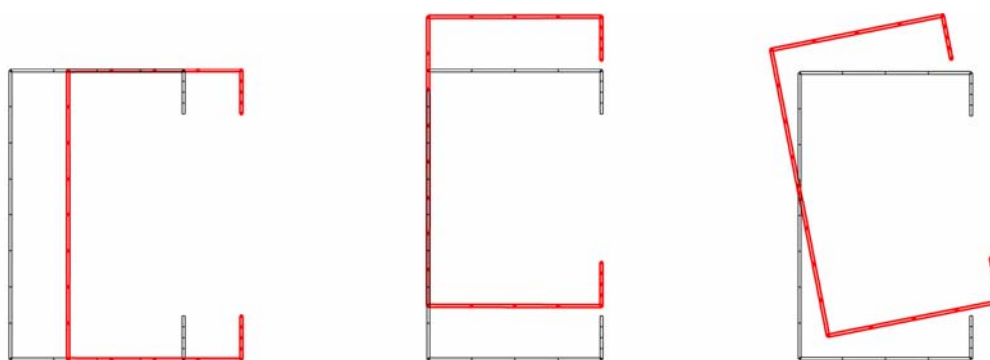


Figure 2.3 Instabilité globales d'une section en C uniformément comprimée

2.2.3.3 Remarques

Les instabilités globales et distorsionnelles peuvent interagir à certaines longueurs, ce qui peut rendre difficile l'identification des instabilités Eulériennes dans des analyses par la MEF ou par la MBF. Les conditions aux limites ainsi que les états de raidissage peuvent également compliquer les analyses numériques.

2.3 La méthode des bandes finies classique : un outil important dans l'étude de la stabilité des structures à parois minces

2.3.1 Introduction

A l'origine, la méthode des bandes finies (MBF) a été développée par Y.K. Cheung. Son livre (Cheung, 1997) en fait d'ailleurs une excellente présentation en montrant l'ensemble du domaine de son application. L'utilisation intensive de cette méthode pour étudier la stabilité des profils en acier formés à froid est cependant due à G.J. Hancock et ses collaborateurs (Hancock, 1978 ; Key et Hancock, 1993 ; ...). Au cours des deux dernières décennies, la MBF s'est progressivement imposée comme un moyen efficace pour étudier toutes les instabilités possibles des profils en acier formés à froid soumis à des contraintes longitudinales. Cette méthode est à l'origine du calibrage/validation des principales techniques de calcul manuel de l'instabilité distorsionnelle (Lau et Hancock, 1987 ; Schafer, 1997). Elle a également servi à valider les nouvelles approches et les nouvelles méthodes théoriques telle que la « Generalized Beam Theory » (GBT) (Davies et Leach, 1994 ; Camotim et Gonçalves, 2003, ...).

Après avoir été reléguée à jouer les seconds rôles par rapport à la MEF, la MBF a connu un regain d'intérêt spectaculaire avec l'avènement quasi révolutionnaire de la DSM (Direct Strength Method). Elle est devenue un outil indispensable aux ingénieurs américains pour dimensionner les sections des éléments structuraux en acier formés à froid (AISI, 2004a). Le professeur B.W. Schafer, concepteur de la DSM, offre d'ailleurs gratuitement un excellent logiciel, CUFISM (Schafer, 2006), basé sur la MBF sur son site Internet (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufism/>) dans le but de promouvoir et faciliter l'utilisation de la DSM.

Le premier programme que nous avons développé pour calculer la stabilité élastique des tôles et profils en acier formés à froid, ASCOP, a été écrit dans le cadre d'un mémoire de magister (Djafour, 1991). Il a été développé en langage PASCAL sous un environnement DOS. Ce programme, peu pratique et relativement lent, a été ensuite nettement amélioré (Kerdal et al., 1995a et 1995b). L'ergonomie a été revue et le graphisme y a été introduit. Le programme a été alors rebaptisé VisASCOP, pour visual ASCOP. Une modification importante concerne la procédure d'extraction des valeurs et vecteurs propres. Elle est devenue beaucoup plus stable et aussi beaucoup plus rapide. Une autre modification est l'automatisation des calculs répétitifs. On obtient d'ailleurs directement à l'écran les courbes d'instabilité de la section étudiée. Mais, la particularité de VisASCOP, par rapport aux autres logiciels basés sur la MBF, est qu'il trace automatiquement 2 courbes. En effet dès 1995, il nous est paru nécessaire de séparer les

modes d'instabilité symétrique et antisymétrique. Actuellement, et pour les besoins de la DSM, d'autres chercheurs poussent la séparation automatique plus loin (Adany et Schafer, 2006a et 2006b). Dans cette thèse, nous proposerons également une technique originale de séparation des modes purs d'instabilité. Mais avant, nous allons rappeler les éléments de base de cette méthode, du moment qu'elle a acquis un statut particulier dans l'étude de la stabilité élastique des éléments de structure en acier formés à froid.

2.3.2 La théorie

2.3.2.1 Modélisation – Fonctions d'interpolation

D'une manière générale, cette méthode peut être vue comme un cas particulier de la méthode des éléments finis. La principale différence réside dans la capacité de la MBF à modéliser les structures à parois minces sans les diviser dans le sens de la longueur, en utilisant des bandes au lieu d'éléments tel que montré par la figure 2.4. La procédure matricielle est quant à elle tout à fait similaire à celle de la MEF et ne devrait causer aucune difficulté particulière aux ingénieurs familiers de cette dernière méthode. La capacité de la MBF à éviter le maillage longitudinal vient d'un choix judicieux de la fonction d'interpolation pour approcher la variation du champ de déplacement dans le sens longitudinal.

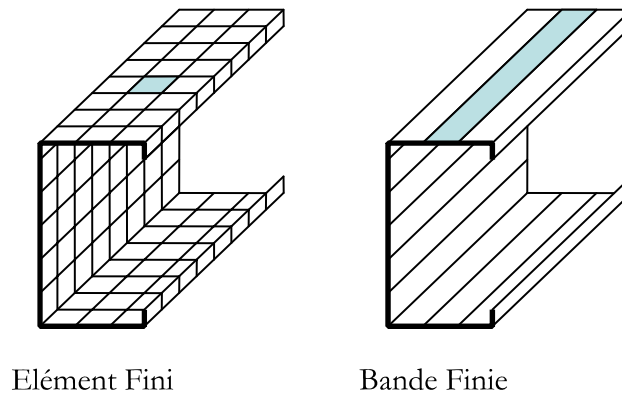


Figure 2.4 Maillages en éléments finis et en bandes finies.

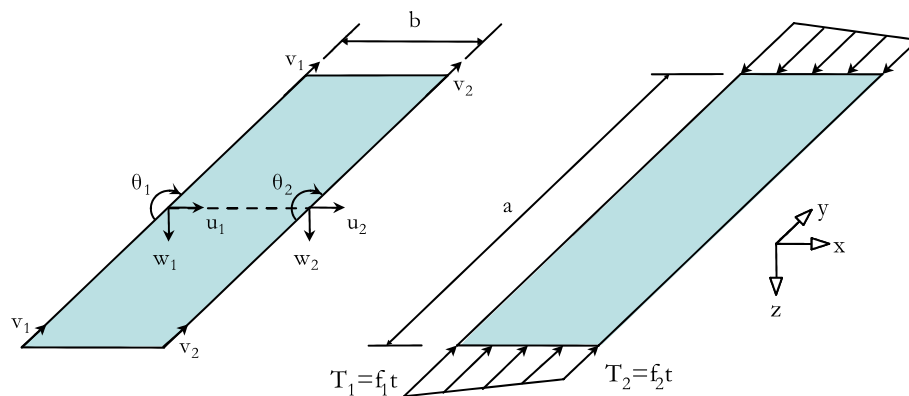


Figure 2.5 Géométrie, DDL, chargement appliqué et repère local d'une bande finie.

Dans la méthode des bandes finies classique, le vecteur total des champs de déplacement $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T$ est approché par les déplacements nodaux, \mathbf{d} , et les fonctions d'interpolation, \mathbf{N} , comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} = [\mathbf{N}_{uv} \ \mathbf{N}_w] [\mathbf{d}_{uv}^T \ | \ \mathbf{d}_{w\theta}^T]^T \quad (2.1)$$

Où les degrés de liberté nodaux qui sont montrés par la figure 2.5, peuvent être écrits soit explicitement $\mathbf{d} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ | \ w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]^T$ soit sous une forme partitionnée $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_{uv}^T \ | \ \mathbf{d}_{w\theta}^T]^T$. Les déplacements dans le plan de la bande ou déplacements membranaires, sont approchés par des interpolations linéaires dans le sens transversal et par des fonctions harmoniques dans le sens longitudinal. Une variation en sinus est retenue pour u et en cosinus pour v :

$$u = \left[\left(1 - \frac{x}{b} \right) \ \left(\frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right), \quad v = \left[\left(1 - \frac{x}{b} \right) \ \left(\frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (2.2.a,b)$$

Quant au déplacement perpendiculaire au plan de la bande ou flèche w , il est approché par un polynôme cubique dans le sens transversal et une fonction sinus dans le sens longitudinal :

$$w = \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) \ x \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) \ \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) \ x \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (2.3)$$

2.3.2.2 Matrices de rigidité

Les déformations dans une bande finie peuvent être décomposées en deux parties, membranaire et flexionnelle. Les déformations membranaires, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, sont celles du plan moyen de la bande et respectent les hypothèses d'un état de contrainte plane. Les déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_f$, correspondent à la théorie de flexion des plaques minces de Kirchhoff. Elles sont par conséquent nulles au niveau du plan moyen et ne dépendent que de la flèche w .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.4.a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \mathbf{N}'_{uv} \mathbf{d}_{uv} = \mathbf{B}_m \mathbf{d}_{uv} \quad (2.4.b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ -z \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2z \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_w'' \mathbf{d}_{w0} = \mathbf{B}_f \mathbf{d}_{w0} \quad (2.4.c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (2.4.d)$$

Ainsi, les déformations s'écrivent en fonction de dérivées des fonctions d'interpolation, \mathbf{N} , et des déplacements nodaux, \mathbf{d} . La matrice de rigidité peut être déduite en écrivant l'énergie potentielle de déformation et en considérant une loi de comportement élastique linéaire orthotrope : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$, avec une matrice de proportionnalité symétrique, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$.

$$U = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_y E_1 & 0 \\ \nu_x E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, E_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}, E_2 = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}, \nu_y E_x = \nu_x E_y \quad (2.6.a-d)$$

Où, les constantes, E_x et E_y , sont les modules d'élasticité et les coefficients, ν_x et ν_y , sont les coefficients de Poisson, suivant les deux directions orthogonales x et y , respectivement ; G étant le module de cisaillement.

Comme les comportements membranaire, (u, v) , et flexionnel, (w) , sont découplés, on peut déterminer les matrices de rigidité correspondantes séparément. On forme ensuite la matrice de rigidité de la bande finie :

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ef} \end{bmatrix} \quad (2.7.a)$$

$$\mathbf{k}_{em} = \int \mathbf{B}_m^T \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \text{ et } \mathbf{k}_{ef} = \int \mathbf{B}_f^T \mathbf{E} \mathbf{B}_f dV \quad (2.7.b,c)$$

En faisant les substitutions adéquates et en effectuant les intégrations, on arrive aux expressions suivantes, où $k_m = m\pi/a$.

$$\mathbf{k}_{em} = t \begin{bmatrix} \left(\frac{aE_1}{2b} + \frac{abk_m^2 G}{6} \right) & & & \text{symétrique} \\ \left(\frac{ak_m v_x E_2}{4} - \frac{ak_m G}{4} \right) & \left(\frac{abk_m^2 E_2}{6} + \frac{aG}{2b} \right) & & \\ \left(-\frac{aE_1}{2b} + \frac{abk_m^2 G}{12} \right) & \left(-\frac{ak_m v_x E_2}{4} - \frac{ak_m G}{4} \right) & \left(\frac{aE_1}{2b} + \frac{abk_m^2 G}{6} \right) & \\ \left(\frac{ak_m v_x E_2}{4} + \frac{ak_m G}{4} \right) & \left(\frac{abk_m^2 E_2}{12} - \frac{aG}{2b} \right) & \left(-\frac{ak_m v_x E_2}{4} + \frac{ak_m G}{4} \right) & \left(\frac{abk_m^2 E_2}{6} + \frac{aG}{2b} \right) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{k}_{er} = \begin{bmatrix} \left(\frac{13ab}{70} k_m^4 D_y + \frac{12a}{5b} k_m^2 D_{xy} \right) & & & \text{symétrique} \\ \left(\frac{6a}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6a}{b^3} D_x \right) & & & \\ \left(\frac{3a}{5} k_m^2 D_1 + \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \right) & \left(\frac{ab^3}{210} k_m^4 D_y + \frac{4ab}{15} k_m^2 D_{xy} \right) & & \\ \left(\frac{3a}{b^2} D_x + \frac{11ab^2}{420} k_m^4 D_y \right) & \left(\frac{2ab}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2a}{b} D_x \right) & & \\ \left(\frac{9ab}{140} k_m^4 D_y - \frac{12a}{5b} k_m^2 D_{xy} \right) & \left(\frac{13ab^2}{840} k_m^4 D_y - \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \right) & \left(\frac{13ab}{70} k_m^4 D_y + \frac{12a}{5b} k_m^2 D_{xy} \right) & \\ \left(-\frac{6a}{5b} k_m^2 D_1 - \frac{6a}{b^3} D_x \right) & \left(-\frac{a}{10} k_m^2 D_1 - \frac{3a}{b^2} D_x \right) & \left(\frac{6a}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6a}{b^3} D_x \right) & \\ \left(-\frac{13ab^2}{840} k_m^4 D_y + \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \right) & \left(-\frac{3ab^3}{840} k_m^4 D_y - \frac{ab}{15} k_m^2 D_{xy} \right) & \left(-\frac{11ab^2}{420} k_m^4 D_y - \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \right) & \left(\frac{ab^3}{210} k_m^4 D_y + \frac{4ab}{15} k_m^2 D_{xy} \right) \\ \left(\frac{a}{10} k_m^2 D_1 + \frac{3a}{b^2} D_x \right) & \left(-\frac{ab}{30} k_m^2 D_1 + \frac{a}{b} D_x \right) & \left(-\frac{3a}{5} k_m^2 D_1 - \frac{3a}{b^2} D_x \right) & \left(\frac{2ab}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2a}{b} D_x \right) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Où, $D_x = E_1 t^3/12$, $D_y = E_2 t^3/12$, $D_{xy} = G t^3/12$, $D_1 = v_y D_x = v_x D_y$

2.3.2.3 Matrices de rigidité géométrique

Considérons maintenant que la bande est soumise à des efforts de compression variant linéairement de T_1 à T_2 , comme indiqué dans la figure 2.5. La matrice de rigidité géométrique peut être calculée en considérant l'énergie potentielle additionnelle due à ces forces en parcourant le déplacement, suivant y , des extrémités longitudinales causé par la partie non linéaire de la déformation ε_y de Green-Lagrange :

$$W = \int_0^a \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (2.10)$$

Les carrés des dérivées des champs de déplacement peuvent être écrits en fonction des dérivées des fonctions d'interpolation, \mathbf{N} , et des déplacements nodaux, \mathbf{d} . Par exemple, on a :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \mathbf{d}_{w\theta}^T \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}'_w \mathbf{d}_{w\theta} = \mathbf{d}_{w\theta}^T \mathbf{G}_f{}^T \mathbf{G}_f \mathbf{d}_{w\theta} \quad (2.11)$$

En introduisant cette notation dans l'expression de l'énergie potentielle ci-dessus, on arrive à une définition formelle de la matrice de rigidité géométrique, \mathbf{k}_g :

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_0^a \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \mathbf{G}^T \mathbf{G} \, dx dy \, \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_g \mathbf{d} \quad (2.12)$$

D'une manière similaire à la matrice de rigidité, on peut calculer les matrices de rigidité géométriques membranaire, \mathbf{k}_{gm} , et flexionnelle, \mathbf{k}_{gf} , séparément :

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{gm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{gf} \end{bmatrix} \quad (2.13.a)$$

$$\mathbf{k}_{gm} = \int_0^a \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \mathbf{G}_m{}^T \mathbf{G}_m \, dx dy \quad (2.13.b)$$

$$\mathbf{k}_{gf} = \int_0^a \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \mathbf{G}_f{}^T \mathbf{G}_f \, dx dy \quad (2.13.c)$$

En effectuant les calculs, on trouve les expressions suivantes ($C = b(m\pi)^2/1680a$)

$$\mathbf{k}_{gm} = C \begin{bmatrix} 70(3T_1 + T_2) & 0 & 70(T_1 + T_2) & 0 \\ & 70(3T_1 + T_2) & 0 & 70(T_1 + T_2) \\ & & 70(T_1 + 3T_2) & 0 \\ \text{symétrique} & & & 70(T_1 + 3T_2) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{k}_{gf} = C \begin{bmatrix} 8(30T_1 + 9T_2) & 2b(15T_1 + 7T_2) & 54(T_1 + T_2) & -2b(7T_1 + 6T_2) \\ & b^2(5T_1 + 3T_2) & 2b(6T_1 + 7T_2) & -3b^2(T_1 + T_2) \\ & & 24(3T_1 + 10T_2) & -2b(7T_1 + 15T_2) \\ \text{symétrique} & & & b^2(3T_1 + 5T_2) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.3.2.4 Matrices globales et assemblage

Ces matrices de rigidité et de rigidité géométrique doivent être transformées du repère local de la bande vers un repère global avant de pouvoir les assembler. Dans la MBF, les bandes finies ne peuvent tourner qu'autour de l'axe y , leurs limites longitudinales devant rester parallèles à y . L'orientation d'une bande s quelconque par rapport à un repère global est définie par un seul angle $\alpha^{(s)}$, celui que font entre eux les axes local x et global X . Ainsi, les 4 degrés de liberté locaux, $[u_i \ v_i \ w_i \ \theta_i]$, d'un nœud i de cette bande s sont reliés à ses 4 DDL globaux, $[U_i \ V_i \ W_i \ \Theta_i]$, par :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(s)} & \sin\alpha^{(s)} \\ -\sin\alpha^{(s)} & \cos\alpha^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ \Theta_i \end{Bmatrix} \quad (2.16.a,b)$$

En écrivant ces relations pour les 2 nœuds de la bande, on arrive à relier tous les DDL locaux, $\mathbf{d}^{(s)}$, de la bande s à ses DDL globaux, $\mathbf{D}^{(s)}$.

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad (2.17)$$

Les matrices de rigidité et de rigidité géométrique de la bande s exprimés dans le repère global se calculent alors par la transformation des matrices locales :

$$\mathbf{K}_e^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_e^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_g^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_g^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad (2.18.a,b)$$

Les matrices de rigidité et de rigidité géométrique d'une structure à parois minces constituée de ns bandes s'obtiennent par assemblage des matrices globales de toutes les bandes :

$$\mathbf{K}_E = \sum_{\text{assemblage}}^{s=1 \text{ à } ns} \mathbf{K}_e^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_G = \sum_{\text{assemblage}}^{s=1 \text{ à } ns} \mathbf{K}_g^{(s)} \quad (2.19.a,b)$$

2.3.2.5 Equation de la stabilité

Le problème de la stabilité consiste à chercher un chargement multiple du chargement de référence appliqué aux bandes (voir figure 2.5) de façon à avoir l'équilibre. Le coefficient de proportionnalité λ est appelé facteur de charge. On aboutit alors au problème propre suivant :

$$\mathbf{K}_E \varphi = \lambda \mathbf{K}_G \varphi \quad (2.20)$$

Sa solution est constituée de couples de valeurs et vecteurs propres, (λ_p, φ_p) . La valeur propre λ_p multipliée par le chargement de référence définit un chargement qui provoque l'instabilité de la structure selon une forme décrite par le vecteur propre φ_p . La

plus petite valeur de λ , notée λ_{cr} , est la seule à avoir un sens physique. Elle donne ce qu'on appelle la charge critique, c'est-à-dire qu'elle définit la plus petite charge proportionnelle au chargement appliqué qui provoque une instabilité de la structure. Les autres instabilités ne peuvent pas avoir lieu physiquement car la structure perd son équilibre dès l'atteinte de λ_{cr} . La forme critique est définie par φ_{cr} .

2.3.3 Le programme élaboré, ses résultats et ses particularités

La méthode des bandes finies décrite ci-dessus est qualifiée dans la littérature de semi-analytique, de conventionnelle ou de classique. De part le choix des fonctions d'interpolation, elle ne peut traiter que les structures à parois minces qui sont articulées et libres de gauchir en leurs extrémités longitudinales. Elle reste cependant très utilisée en pratique, et plusieurs logiciels qui proposent des solutions par cette méthode sont commercialisés : CFS (CFS, 2006), THIN-WALL (Papangelis et Hancock, 1995 et 2006). Le programme CUFSM (Schafer, 2006) mérite toutefois une mention spéciale car il est non seulement gratuit mais son code source, en langage MATLAB, est également fourni.

La manière la plus usuelle de présenter les résultats de la méthode des bandes finies est de tracer la courbe donnant la charge critique, ou plutôt le facteur de charge critique λ_{cr} , en fonction de la longueur, a , des bandes. Le coefficient, m , définissant la variation harmonique des fonctions d'interpolation dans le sens longitudinal, y , est maintenu égal à 1. Ainsi, l'argument des fonctions harmoniques varie de 0 à π lorsque y varie de 0 à a . Ceci sous-entend que la structure est forcée de se déformer en développant dans le sens longitudinal une seule demi-sinusoïde ou une seule demi-onde. Ce qu'on trace donc c'est plutôt le facteur de charge critique en fonction de la longueur de la demi-onde.

Il faut peut être signaler qu'on ne prend pas, en général, la peine de considérer d'autres valeurs de m puisque les résultats peuvent être aisément déduits de ceux calculés en prenant $m=1$, vu la particularité des fonctions harmoniques. D'autre part, on opère ainsi, c'est-à-dire qu'on ne considère que le cas $m=1$, parce qu'il s'agit d'une technique astucieuse servant à simplifier l'évaluation des charges critiques des instabilités de base (AISI, 2004b).

La figure 2.6 montre l'interface du logiciel CUFSM (Schafer, 2006) dans la phase du post-traitement, et la figure 2.7 donne celle du programme VisASCOP (Kerdal et al., 1995a et 1995b). Dans les deux cas, nous retrouvons, bien sûr, la courbe donnant la relation entre le facteur de charge critique et la longueur de la demi-onde. Il y a également la forme de la section déformée pour une longueur de demi-onde donnée, que l'utilisateur a la possibilité de choisir.

Au-delà des aspects de présentation, la principale différence réside dans le fait que VisASCOP trace systématiquement deux courbes au lieu d'une seule. L'une correspond à une déformation symétrique de la section, l'autre à une déformation antisymétrique. Il est bien évident que c'est l'enveloppe inférieure des deux courbes qui donne le facteur de charge critique. Nous avons décidé d'opérer ainsi, car, au cours du traitement des résultats des multiples cas étudiés, nous avons remarqué que la courbe donnant la valeur critique pouvait présenter une ou plusieurs discontinuités. Nous avons alors commencé par chercher numériquement la « zone de transition continue », en couvrant de façon très dense les longueurs de demi ondes dans cette région, animés par l'idée que le comportement ne pouvait être que continu. La conclusion à laquelle nous sommes arrivés

est que, ce qu'on pensait être une zone de transition n'était en réalité qu'un seul point, le point d'intersection entre les courbes symétrique et antisymétrique. L'enveloppe inférieure définissant le comportement critique est donc obtenue à partir des valeurs minima de (au moins !) deux courbes distinctes. L'explication mathématique est que les formes, ou modes, symétrique et antisymétrique sont orthogonales entre elles. L'interaction entre elles est donc nulle ce qui donne une zone d'intersection sous la forme d'un point.

Pour éviter la discontinuité, ou du moins pour essayer de l'expliquer, nous avons alors décidé de dessiner les deux courbes symétrique et antisymétrique continues. On permet ainsi à l'utilisateur de voir ou de « comprendre » l'origine de la discontinuité. En d'autres termes, et c'est un résultat important qui n'a pas été suffisamment mis en valeur, le programme VisASCOP classe, dès 1995, les modes d'instabilité en deux catégories : symétrique et antisymétrique. Il faut enfin signaler que c'est le modèle linéaire retenu qui est à l'origine d'une discontinuité pareille dans une courbe censée représenter un phénomène mécanique.

Dans la figure 2.7, on peut remarquer qu'un quadrant de la fenêtre de l'interface de VisASCOP, celui situé en bas à droite, est resté vide. Dans cette partie, VisASCOP trace les deux courbes, symétriques et antisymétriques, des valeurs propres négatives, lorsqu'elles existent. Ces valeurs sont présentes lorsque la section est partiellement comprimée par le chargement de référence, qui, rappelons le, doit être multiplié par le facteur de charge λ pour écrire le problème propre de la stabilité. Une valeur propre négative veut tout simplement dire que le signe du chargement de référence est inversé : la partie tractée devient comprimée et inversement. L'avantage d'une telle astuce est d'obtenir, en un seul passage, les résultats correspondants aux deux sens de la flexion considérée. Dans le cas d'une section symétrique chargée symétriquement, comme dans le cas d'une flexion simple, on obtient évidemment le même résultat deux fois. Mais en l'absence de symétrie, on va deux fois plus vite ! Dans l'exemple représenté dans la figure 2.7, la partie réservée à ce résultat est restée vide car le chargement appliqué dans cet exemple est une compression uniforme, et il n'y a donc pas de valeur propre négative qui puisse provoquer l'instabilité.

L'autre particularité de VisASCOP qui n'apparaît pas à l'écran est que nous avons réussi à séparer les deux vecteurs propres, symétrique et antisymétrique, même pour des valeurs propres très voisines. C'est-à-dire que l'algorithme mis en place réussit à extraire les deux vecteurs propres d'une valeur propre double, ou presque, ce qui démontre sa performance. Il reste cependant relativement lent par rapport à la procédure livrée avec MATLAB et utilisée dans CUFSM.

Enfin, cette méthode des bandes finies et le programme développé nous ont beaucoup appris sur les méthodes de calcul numérique de l'instabilité linéaire et sur les différents types d'instabilité. Cette expérience cumulée dans le traitement des résultats de la MBF a été valorisée et mise à profit pour améliorer les nouvelles techniques développées récemment pour l'identification et le classement des modes d'instabilité (Adany et Schafer, 2006a et 2006b). Elle nous a également servi à développer des solutions de classification alternatives plus générales et plus puissantes.

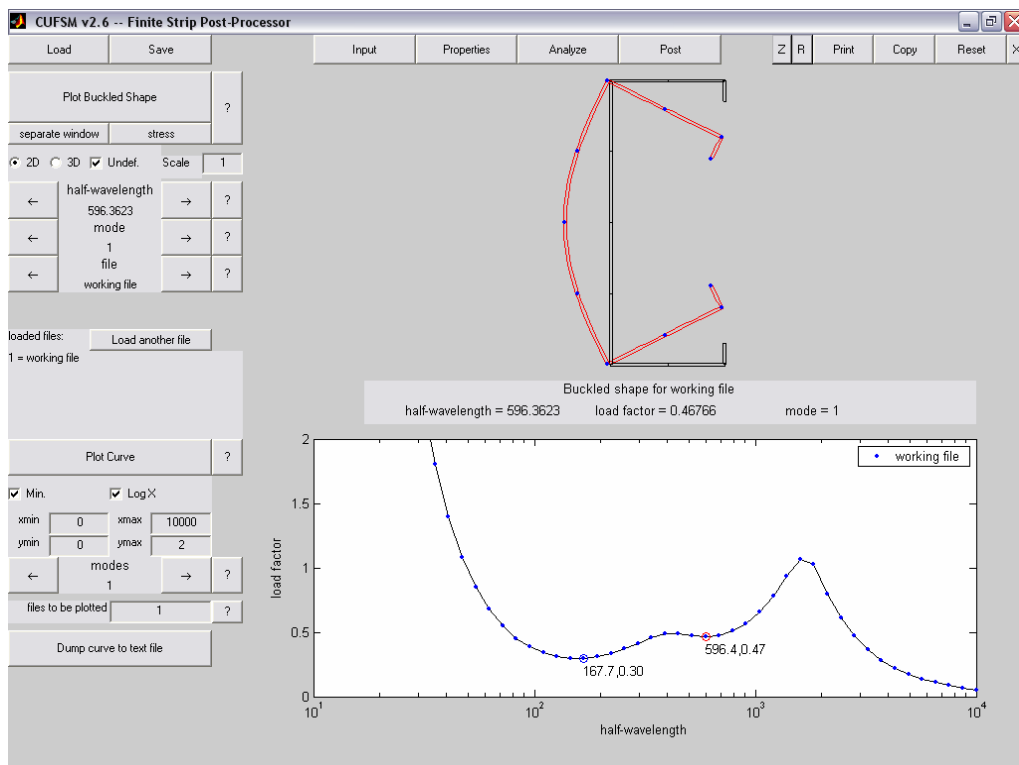


Figure 2.6 Interface du logiciel CUFSM/post-traitement

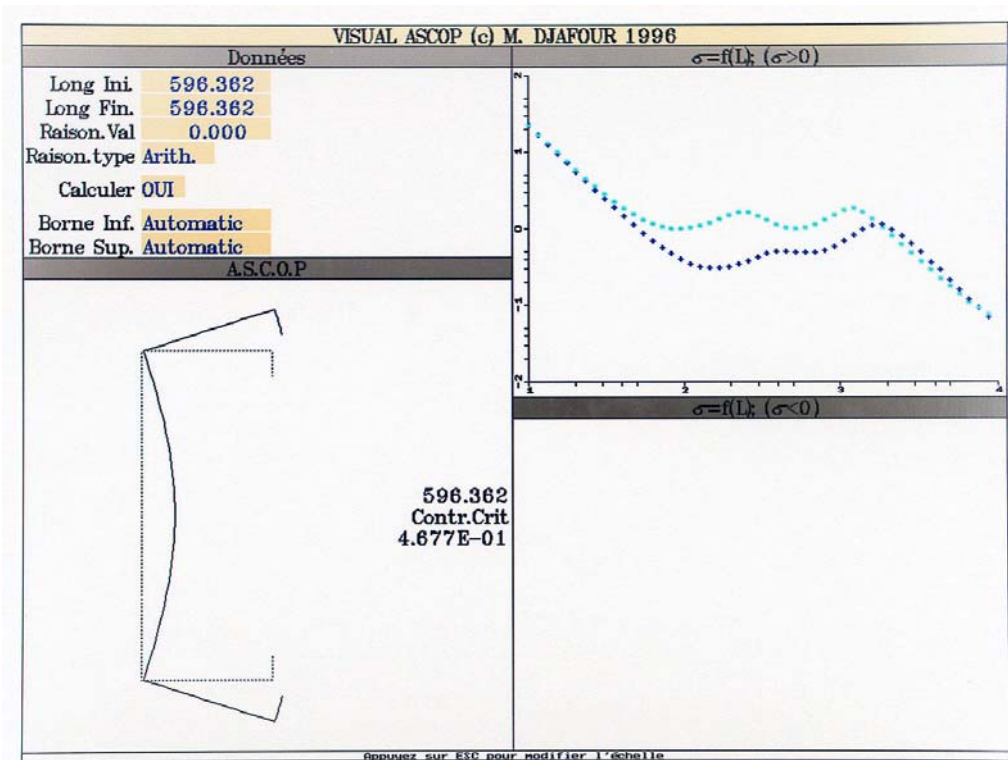


Figure 2.7 Interface du logiciel VisASCOP

Nous commencerons dans ce qui suit par présenter notre première contribution publiée (Kerdal, 1995a et 1995b), portant sur la correction des courbes de voilement des profils en U et en C uniformément comprimés. Cette correction a soulevé beaucoup de questions mais elle a surtout révélé le besoin d'un classement des modes d'instabilité. Nous donnerons alors notre première expérience de classement qui nous a permis : (i) de comprendre le classement de Adany et Schafer (2006a et 2006b), (ii) d'y déceler des anomalies et des insuffisances, et surtout (iii) de pouvoir proposer des alternatives de classement et de les programmer.

2.4 Première contribution : correction des courbes de voilement des profils en U et en C uniformément comprimés.

2.4.1 Les premières utilisations de VisASCOP

L'une des premières applications du programme VisASCOP a été de retrouver les résultats de Batista présentés dans sa thèse de doctorat sur la stabilité des profils à parois minces et sections ouvertes de type U et C (Batista, 1989). Dans le chapitre 3 de sa thèse, il présente un programme réalisé sur la base de la MBF, INSLO, dont les résultats sont utilisés pour tracer des courbes donnant le coefficient de voilement des profils objets de sa thèse en fonction de leurs dimensions définies dans la figure 2.8. Les profils sont considérés comme simplement appuyés et soumis à la compression simple. Le coefficient de Poisson vaut 0.3.

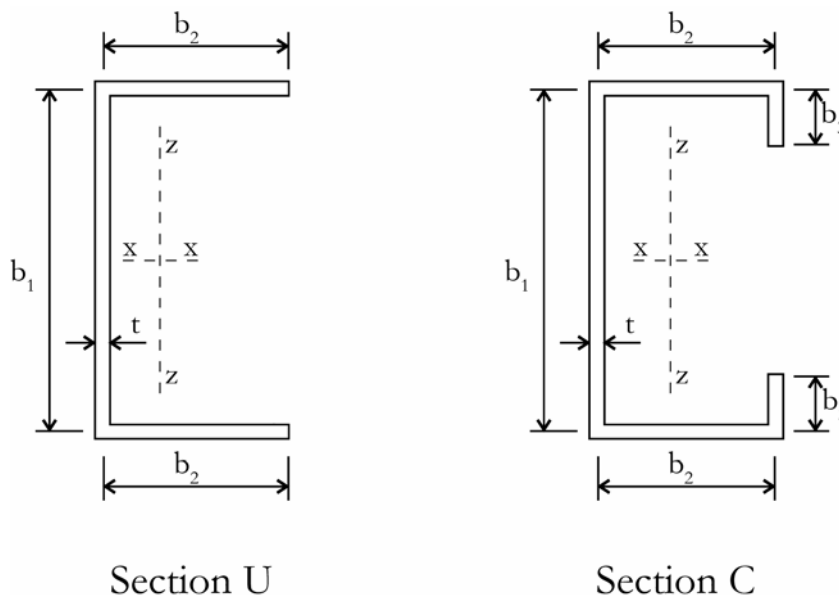


Figure 2.8 Géométrie des sections de types U et C.





Le coefficient de voilement, K_v , est un coefficient adimensionnel qui permet de calculer la contrainte critique de voilement des plaques rectangulaires isolées par la formule (Timoshenko et Gere, 1961) :

$$\sigma_{\text{crv}} = K_v \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.21)$$

Où, b est la largeur de la plaque, t son épaisseur, E le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Pour des plaques suffisamment longues, le coefficient K_v ne dépend que des conditions aux limites et du chargement appliqué. Le tableau 2.1 rappelle les valeurs du coefficient de voilement des plaques uniformément comprimées dans un sens et simplement appuyées le long des bords chargés, en fonction des appuis des deux autres bords (Timoshenko et Gere, 1961).

Tableau 2.1 Quelques valeurs du coefficient de voilement des plaques uniformément comprimées et simplement appuyées dans une direction

Conditions d'appuis				
K_v	4.00	6.97	0.425	1.28

Les profils en U et en C peuvent être considérés comme formés d'un ensemble de plaques liées le long de leurs intersections. Ces connexions font que les plaques ne sont pas isolées mais qu'elles interagissent entre-elles. Chaque liaison peut alors être vue comme un encastrement partiel apportant une rigidité supplémentaire à la rotation de la paroi plane. Si on néglige cette rigidité supplémentaire, la connexion entre plaques devient un appui simple. Si, par contre, on considère que cette rigidité est infinie, on tend alors vers un encastrement. Autrement dit, les coefficients de voilement des différentes plaques constituant un profil simplement appuyé et uniformément comprimé, sont compris dans la fourchette des valeurs du tableau 2.1. Il faut signaler que, dans l'étude de la stabilité des structures à parois mince, les éléments plans ayant leurs deux bords longitudinaux appuyés sont habituellement qualifiés de raidis. Dans le cas où l'un des deux bords est libre ou « insuffisamment appuyé », ils sont dits non raidis.

L'idée de Batista était de calculer un coefficient de voilement des profils en U et en C qui permette de tenir compte de l'interaction entre les parois. Il utilisa alors les contraintes critiques de voilement, $\sigma_{\text{cr}}^{\text{MBF}}$, calculées par son programme INSLO pour estimer un coefficient de voilement K_{v_1} , en utilisant la hauteur de l'âme b_1 comme largeur de référence (voir figure 2.8).

$$K_{v_1} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{\sigma_{\text{cr}}^{\text{MBF}}}{E} \left(\frac{b_1}{t}\right)^2 \quad (2.22)$$

Les résultats de ce travail sont repris dans les figures 2.9 et 2.10, pour les profils en U et en C, respectivement. La première figure a permis de montrer clairement la différence importante entre les valeurs de la contrainte critique de la section lorsque cette dernière est calculée soit en interaction, soit en l'absence de toute interaction, en adoptant la plus petite des contraintes critiques des trois plaques formant le U. Concernant les sections en C, la figure 2.10 a permis de conclure que la simple introduction d'un raidisseur au bord libre des plaques b_2 des sections en U accroît la charge critique de voilement de manière appréciable. La dimension b_3 de ce raidisseur doit être supérieure à $0.1b_1$ pour éviter la distorsion de la section, et doit rester inférieure à $0.3b_1$ pour éviter l'instabilité prématurée du raidisseur. Il est, à notre sens, important de signaler qu'aucune restriction n'a été émise par Batista concernant la dimension b_2 des sections en C.

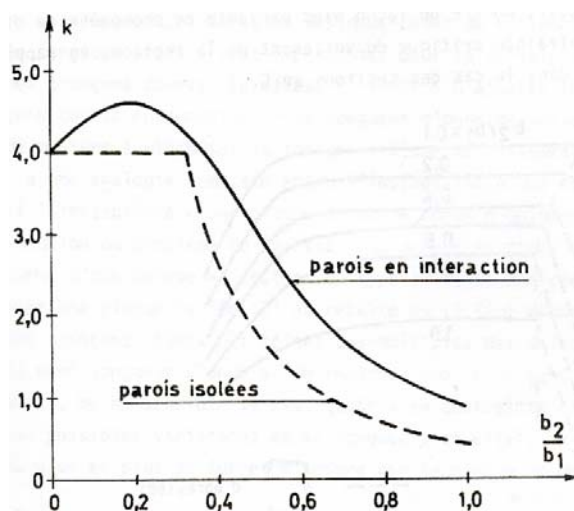


Figure 2.9 Coefficient de voilement pour une section en U, avec et sans interaction entre les parois (Batista, 1989).

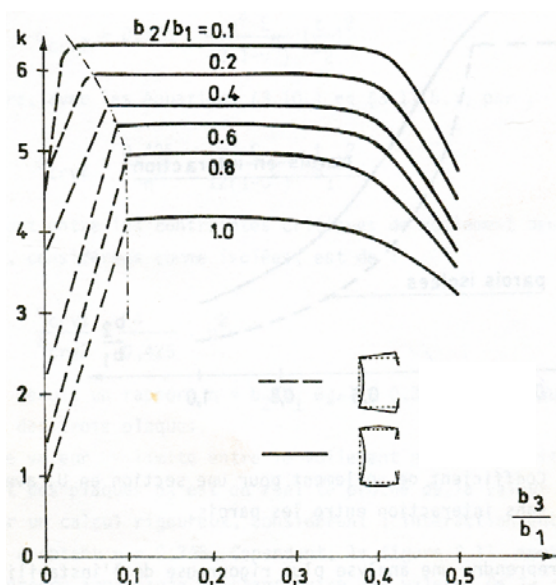


Figure 2.10 Coefficient de voilement pour une section en C (Batista, 1989).

2.4.2 Correction des courbes de voilement

Initialement, l'idée était de retrouver les résultats de Batista par l'intermédiaire du programme VisASCOP. Plusieurs formes de profils en C ont alors été considérées de façon à couvrir les intervalles : $0 \leq b_3/b_1 \leq 0.5$ et $0.1 \leq b_2/b_1 \leq 1.0$. Concernant la dimension b_3 du raidisseur, il est évident que les limites du domaine considéré sont les cas extrêmes. Quant à la largeur b_2 des semelles, si un rapport de 0.1 semble une limite inférieure assez faible, il n'y a par contre aucune raison que l'on s'arrête à un rapport de 1.0. Nous avons opéré ainsi pour répondre à l'objectif fixé. A titre d'exemple, les profils couverts dans la réglementation nord-américaine (AISI, 2004b) par la nouvelle « méthode de la résistance directe », ou DSM, peuvent avoir un rapport b_2/b_1 de 1.43 ! Enfin, tout comme Batista, nous avons pris des profils ayant une épaisseur constante définie par un rapport b_1/t égal à 100. Le chargement appliqué est une compression uniforme et les profils sont simplement appuyés tel que supposé par la MBF.

La procédure arrêtée consiste à tracer pour chaque profil la courbe donnant la charge critique, ou plutôt le facteur de charge critique λ_{cr} , en fonction de la longueur de la demi-onde, a . Plusieurs formes de courbes ont été obtenues. En fonction de la géométrie de la section, elles peuvent présenter un ou deux minima locaux avant d'entamer une partie strictement décroissante. Un exemple de courbe à deux minima locaux est donné dans figure 2.11.

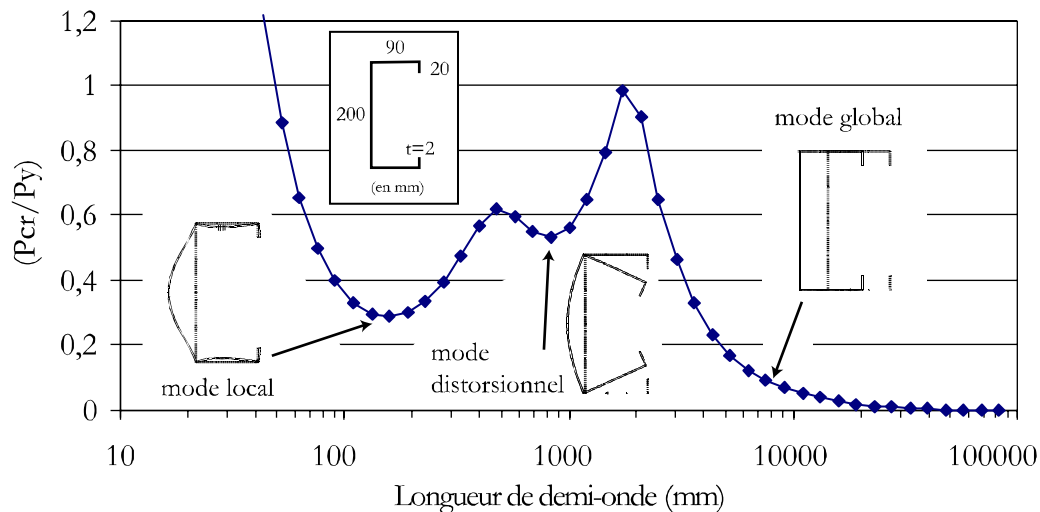


Figure 2.11 Charges critiques d'une section en C

L'observation des formes d'instabilité associées à la partie strictement décroissante a montré qu'il s'agit de la zone relevant de l'instabilité globale (figure 2.3). Concernant les formes d'instabilité obtenues au niveau des minima locaux, nous avons obtenu plusieurs types d'instabilité induisant différentes formes de déformation de la section du profil. Nous avons observé, selon les cas, (i) une flexion simultanée de l'âme et des semelles suite à une rotation sans déplacement des lignes d'intersection entre plaques (figure 2.1), (ii) une déformation de l'âme accompagnée d'une rotation en mode rigide de l'ensemble semelle – raidisseur (figure 2.2), (iii) une forme suggérant une flexion exagérée du raidisseur (figure 2.12), (iv) des modes mixtes ...

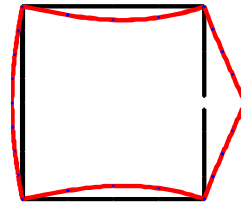


Figure 2.12 Forme d'instabilité présentant une déformation exagérée du raidisseur.

Pour tracer les courbes des coefficients de voilement des profils à sections en C et en vertu de la règle de l'enveloppe inférieure, nous avons utilisé le minimum des minima locaux calculés par VisASCOP, notée σ_{cr}^{MBF} . Le coefficient de voilement, Kv_1 , de la section est calculé en utilisant la hauteur de l'âme b_1 comme largeur de référence, c'est-à-dire que nous utilisons la formule (2.22). Le résultat de ce travail est donné dans la figure 2.13.

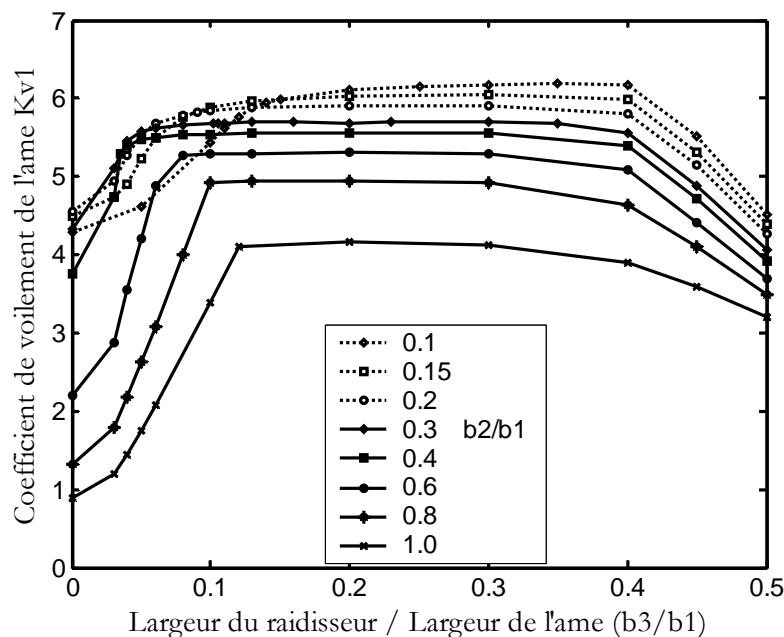


Figure 2.13 Coefficient de voilement pour une section en C calculé à partir des résultats de VisASCOP et en prenant b_1 comme largeur de référence.

Nous pouvons constater que, pour des rapports b_2/b_1 supérieurs à 0.3, les courbes obtenues sont similaires à celles de Batista (figure 2.10). On y observe une phase où le coefficient de voilement croît avec la dimension du raidisseur jusqu'à une certaine limite. Au-delà, et jusqu'à b_3/b_1 égal à 0.4, les valeurs du coefficient de voilement sont plus ou moins constantes. Enfin, lorsque la dimension b_3 du raidisseur dépasse $0.4b_1$, on constate une diminution du coefficient de voilement.

Par contre, lorsque le rapport b_2/b_1 est inférieur à 0.3, les courbes obtenues diffèrent de celles de Batista. On n'observe pas une frontière nette à la fin de la partie croissante. De plus, la courbe obtenue pour b_2/b_1 égal à 0.1 ne possède pas de palier constant. Ces résultats ont été publiés (Kerdal et al., 1995a et 1995b). Leur interprétation a donné lieu à une première procédure de classement que nous présentons ci-après.

2.4.3 Interprétation des courbes modifiées

La justification de la différence avec les résultats de Batista (1989) peut être donnée très rapidement. En effet, nous nous sommes rendu compte qu'il a utilisé une version simplifiée de la méthode des bandes finies qui ne considère que la flexion des plaques et néglige le comportement membranaire. Pour le calcul de la rigidité des bandes, il s'est contenté de retenir uniquement les termes liés à la flèche, w , de la plaque. D'autre part, et pour pouvoir assembler ses matrices, il a imposé un critère de compatibilité des déplacements le long des bords communs aux parois adjacentes : les déplacements perpendiculaires aux plans sont supposés nuls et les rotations identiques. Ces précisions peuvent sembler banales, mais elles nous seront très utiles d'abord, ci-dessous, mais également plus loin, lorsque nous proposerons une alternative à la cFSM, la méthode des bandes finies contrainte, développée très récemment par Adany et Schafer (2006a et 2006b) pour identifier et isoler les modes d'instabilité de base dans un calcul par la méthode des bandes finies.

La différence entre nos courbes et celles de Batista nous a poussé à les interpréter et à leur trouver des explications. Pour commencer, il est clair que la section en forme de U est la limite de celle en C lorsque la dimension du raidisseur b_3 tend vers zéro. En comparant nos résultats obtenus pour b_3/b_1 égal à zéro avec ceux calculés par Batista pour les sections en U (figure 2.9), nous avons d'abord conclu à une bonne concordance. Sauf que, nous nous sommes posé la question pourquoi nos résultats concordent (ou presque comme nous le montrerons plus loin dans ce paragraphe) pour le U et non pour le C ? La réponse réside dans le critère de compatibilité adopté par Batista pour les déplacements le long des bords communs aux parois adjacentes. Dans une section en U, l'un des deux bords de la semelle est un bord d'extrémité. Il est alors libre de se mouvoir dans le modèle de Batista. Par contre, dans une section en C, la simple existence du raidisseur, même si sa dimension est nulle ou presque, rend la ligne d'intersection entre le raidisseur et la semelle « un bords commun à deux parois adjacentes », et les déplacements perpendiculaires aux deux parois adjacentes sont alors annulés. Nous expliquons ainsi la discontinuité dans les résultats de Batista (1989).

Dans le même sillage, il est évident que la limite d'une section en U lorsque b_2 tend vers zéro, c'est une seule paroi, l'âme, avec ses deux bords libres. Or, la courbe du coefficient de voilement des sections en U calculée par Batista (figure 2.9) attribue une valeur de 4 à Kv_1 lorsque b_2 est égal à zéro. C'est la valeur correspondant à une plaque simplement appuyée sur ses 4 cotés (tableau 2.1). L'explication de ce résultat de Batista est la même que ci-dessus. Dans son modèle, les bords de l'âme sont considérés comme « des bords communs » avec les semelles et leurs déplacements sont par conséquent annulés. Ceci correspond à des conditions d'appui simple, la rotation étant toujours libre de se produire.

Nous avons alors utilisé VisASCOP pour rechercher la limite du coefficient de voilement des sections en U lorsque la largeur des semelles tend vers zéro, en utilisant la procédure expliquée dans le paragraphe 2.4.2, c'est-à-dire en recherchant les minima locaux correspondant aux instabilités harmoniques. Seulement, la plus petite largeur des semelles qui nous a donné un minimum local, est égale à $0.077 b_1$. Pour des largeurs de semelles plus petites la courbe est devenue strictement décroissante. L'observation des modes a montré que l'instabilité est progressivement passée du voilement vers une instabilité flexionnelle d'ensemble. L'explication est qu'en faisant tendre b_2 vers zéro, l'inertie flexionnelle de la section en U devient tellement faible que le flambement devient plus critique que le voilement de l'âme.

Trouver la limite $b_2/b_1 = 0.077$ n'est pas évident. Il s'agit d'un problème fortement non linéaire qui dépend beaucoup de la géométrie. Pour montrer la complexité du phénomène, nous pouvons mener l'approche simplifiée suivante.

L'aire et l'inertie flexionnelle (qui nous intéresse) d'une section en U (figure 2.8) sont données par :

$$\begin{aligned} A &= (2b_2 + b_1)t \\ I_{zz} &= \frac{1}{3}tb_2^3 \frac{b_2 + 2b_1}{2b_2 + b_1} + \frac{b_1t^3}{12} \end{aligned} \quad (2.23)$$

La contrainte critique σ_{cre} induisant un flambement autour de l'axe zz d'une colonne bi-articulée de longueur a , est donnée par la formule d'Euler :

$$\sigma_{cre} = \pi^2 E \frac{I_{zz}}{a^2 A} \quad (2.24)$$

Cette formule suppose évidemment que la forme de la section droite du profil reste inchangée durant l'instabilité et que, le comportement est régi par la théorie de flexion des poutres.

Dans le cas où on suppose que les bords communs aux plaques b_1 et b_2 ne bougent pas, le voilement a lieu seul et la contrainte critique vaut :

$$\sigma_{crv} = K_v \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_1} \right)^2 \quad (2.25)$$

Cette formule suppose évidemment que le comportement de l'âme est régi par la théorie de flexion des plaques.

Avec ces simplifications, égaliser la contrainte critique de flambement et celle du voilement donne lieu à une équation fortement non linéaire. La limite de la dimension de la semelle b_2 à partir de laquelle on a un « basculement » du voilement vers le flambement va dépendre de la géométrie de la section et de la longueur a .

$$\frac{1}{(2b_2 + b_1)^2} (4b_2^4 + 8b_2^3b_1 + 2b_2b_1t^2 + b_1^2t^2) = \frac{a^2K_v}{(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_1} \right)^2 \quad (2.26)$$

Il faut également noter que le coefficient de voilement n'est pas constant. En effet, même si on néglige l'interaction entre les parois planes formant le U, il reste que nous nous trouvons dans une situation à la limite du voilement et du flambement. L'instabilité par voilement n'a de l'espace que pour développer une seule demi-onde ! Autrement dit, nous nous trouvons dans la zone ($m=1$) où, même le coefficient de voilement des plaques isolées dépend du rapport de la longueur sur la largeur, a/b_1 (Timoshenko et Gere, 1961). Si nous prenons pour simplifier, $K_v = 4.0$, nous pouvons calculer les valeurs de b_2 qui vérifient cette équation pour différentes valeurs de la longueur a et pour les données de notre problème énoncées précédemment. Le résultat de ce travail est donné par le tableau 2.2.

Tableau 2.2 Valeurs limites de b_2 définissant la limite inférieure d'apparition du voilement des sections en U calculées par la méthode simplifiée.

a/b_1	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
b_2/b_1	0.044	0.051	0.057	0.064	0.069	0.075	0.081	0.086

Pour conclure, il est maintenant évident qu'il existe une limite inférieure pour l'apparition du voilement lorsque la largeur de la semelle devient très faible. Au-delà, c'est une instabilité globale qui prend le relais. La question maintenant est : comment peut-on définir simplement cette limite ?

La contrainte critique calculée par VisASCOP au niveau du minimum local pour $b_2/b_1 = 0.077$ est $\sigma_{cr}/E = 3.6136 \times 10^{-4}$. Ceci donne un coefficient de voilement K_{v1} égal à 4, soit le coefficient de voilement des plaques simplement appuyées ! Nous en avons déduit que, tant que les semelles assurent une fonction d'appui pour l'âme, le coefficient de voilement de l'âme K_{v1} est supérieur ou égal à 4. Si K_{v1} passe en dessous de 4, ceci implique que l'âme n'a plus d'appuis fixes et on ne peut plus observer un voilement de l'âme au sens classique du terme. Autrement dit, $K_{v1} = 4$ a indiqué la limite inférieure pour l'apparition du voilement de l'âme.

Avec ces nouvelles données, nous avons tracé dans la figure 2.14 la courbe donnant le coefficient de voilement des sections en U, calculé à partir des contraintes critiques de VisASCOP et en utilisant la hauteur de l'âme b_1 comme largeur de référence. Cette courbe corrige le résultat de Batista de la figure 2.9. Dans cette figure 2.14, nous avons également représenté deux courbes en pointillés. Elles représentent des coefficients K_{v1} calculés par la formule (2.22) mais en utilisant les contraintes critiques de flambement σ_{cre} obtenues par l'équation (2.24) pour deux valeurs de la longueur, $a/b_1 = 1.5$ et $a/b_1 = 2.5$. Enfin, on y trouve aussi la droite horizontale $K_{v1} = 4$.

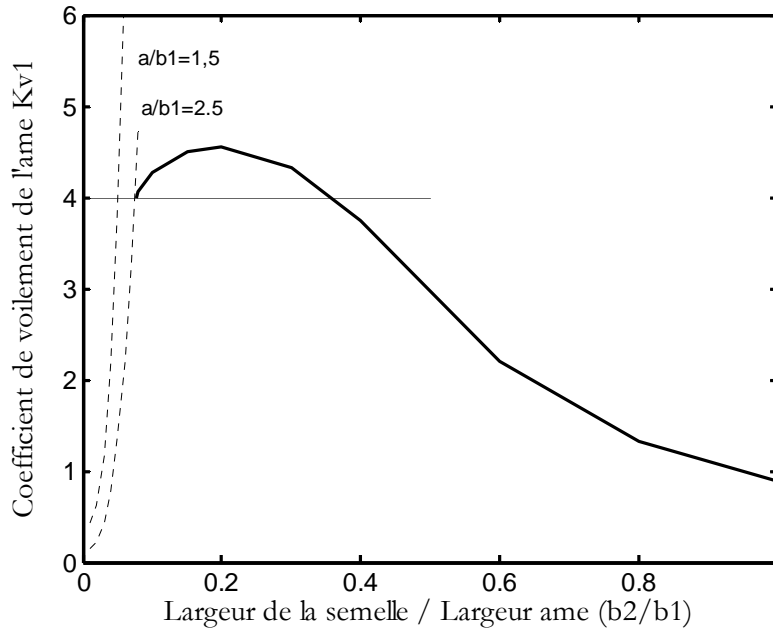


Figure 2.14 Coefficient de voilement pour une section en U calculé à partir des résultats de VisASCOP et en prenant b_1 comme largeur de référence.

Nous venons d'avancer qu'un coefficient de voilement Kv_1 égal à 4 a indiqué la limite inférieure pour l'apparition du voilement de l'âme pour de faibles largeurs des semelles. L'observation de la figure 2.14 montre que pour des b_2 supérieures à environ $0.36 b_1$, le coefficient de voilement Kv_1 des sections en U retombe en dessous de 4. Le voilement de l'âme ne serait alors plus le comportement déterminant dans l'instabilité de la section en U. C'est le voilement de la semelle qui prendrait le relais. De la même manière que précédemment, nous pouvons mener un raisonnement simplifié et isoler les plaques. L'âme est alors simplement appuyée le long de ses deux bords, la semelle n'en a qu'un qui est simplement appuyée, l'autre étant libre. D'après le tableau 2.1, les contraintes de voilement de ces 2 plaques sont respectivement données par :

$$\sigma_{crv_1} = 4.0 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_1} \right)^2 \quad (2.27)$$

$$\sigma_{crv_2} = 0.425 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_2} \right)^2 \quad (2.28)$$

L'égalité entre ces deux contraintes se produit pour $b_2/b_1 = 0.326$, indiquant le voilement simultané des plaques formant le U mais en négligeant toute interaction. Ce résultat consolide donc la remarque ci-dessus.

Pour conclure, le voilement de l'âme des sections en U n'est envisageable que lorsque Kv_1 est supérieur à 4 et il est exclu si Kv_1 tombe en dessous de 4. Pour rappel, Kv_1 a été calculé en utilisant la contrainte calculée par la MBF, σ_{cr}^{MBF} , et en considérant b_1 , la largeur de l'âme, comme largeur de référence. Nous nous sommes alors dit que dans cette démarche, on peut très bien changer la largeur de référence et prendre b_2 pour définir un autre coefficient de voilement des sections en U, qu'on note Kv_2

$$Kv_2 = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{\sigma_{cr}^{MBF}}{E} \left(\frac{b_2}{t}\right)^2 = Kv_1 \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \quad (2.29)$$

Nous avons alors tracé, dans la figure 2.15, la courbe donnant le coefficient de voilement des sections en U, calculé à partir des contraintes critiques de VisASCOP et en utilisant la largeur des semelles b_2 comme largeur de référence. Nous y avons matérialisé la valeur du coefficient de voilement des plaques simplement appuyées – libres qui est égale à 0.425. Nous calculons alors que Kv_2 est égal à 0.425 pour $b_2/b_1 = 0.317$

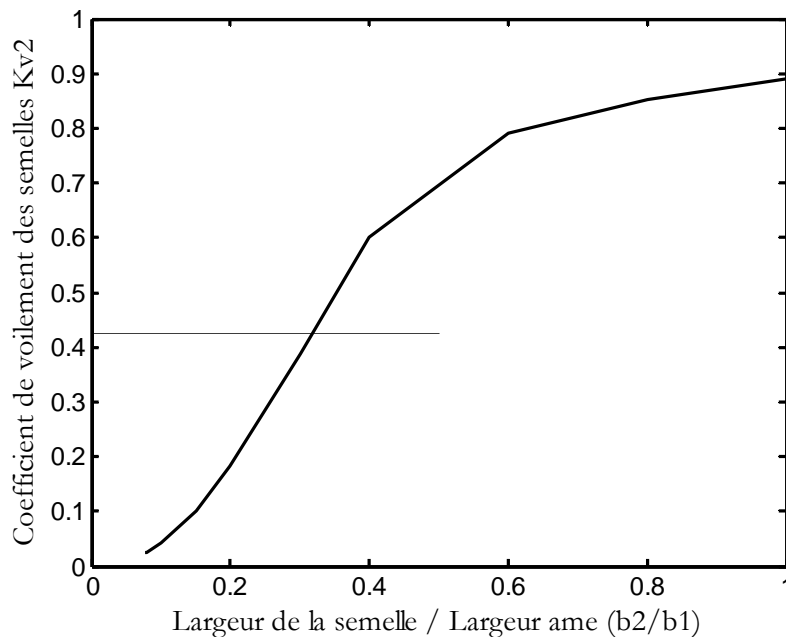


Figure 2.15 Coefficient de voilement pour une section en U calculé à partir des résultats de VisASCOP et en prenant b_2 comme largeur de référence.

Ce résultat vient consolider les remarques précédentes. Dans une section en U, la semelle peut être considérée comme partiellement encastrée dans l'âme. Si on néglige la rigidité à la rotation, ce qui est une hypothèse défavorable, sa connexion avec l'âme tend vers un appui simple. Son deuxième bord est évidemment libre. A cette situation limite, le coefficient de voilement vaut 0.425. Donc, le voilement de la semelle ne peut pas être le comportement déterminant dans l'instabilité de la section en U lorsque b_2 est inférieure à

$0.317 b_1$, du moment que pour ces largeurs, Kv_2 est inférieur à la valeur limite de 0.425. On ne peut l'envisager que pour des semelles plus grandes.

En conclusion, le fait de tracer Kv_1 et le comparer à 4 puis, de tracer Kv_2 et le comparer à 0.425, a permis, à partir des résultats de la méthode des bandes finies, de définir systématiquement trois zones où on a différentes instabilités des profils en U. Dans le paragraphe suivant, ce résultat sera exploité et généralisé pour identifier et classer, à partir des résultats de la méthode des bandes finies, les instabilités des sections à parois minces. Nous prendrons alors l'exemple des sections en C.

Mais avant, nous allons présenter une remarque que nous jugeons très importante. Elle concerne la longueur de la demi-onde, a_{min} , associées aux contraintes critiques minimales. Pour un profil ayant une section en U, le programme VisASCOP fournit les résultats illustrés par la figure 2.16. On remarque alors que dans la zone de voilement de l'âme, les longueurs de demi-ondes sont les plus petites et sont du même ordre de grandeur que la largeur de l'âme. Lorsque c'est le voilement de la semelle qui détermine l'instabilité du profil, la longueur de la demi-onde croît linéairement avec b_2 . De l'autre côté, dans la zone où le comportement de la section en U bascule du voilement vers le flambement pour de faibles valeurs de b_2 , on constate une accélération dans l'allongement de la longueur de la demi-onde. La valeur de a , calculée par VisASCOP pour $b_2/b_1 = 0.077$ vaut $1.3 b_1$. Si nous revenons à la figure 2.14, la longueur de flambement pur qui a coupé la courbe du coefficient de voilement Kv_1 au point $(0.077, 4.0)$, correspond à $a/b_1 = 2.5$. Il est clair que la différence vient du fait que, pour établir cette dernière valeur, toute interaction a été négligée. De plus, la petite différence entre les courbes $a/b_1 = 1.5$ et $a/b_1 = 2.5$ correspondant au flambement dans la figure 2.14, d'une part, et la grande pente que prend l'évolution de l'allongement de la demi-onde, d'autre part, peuvent justifier la différence entre 1.3 et 2.5 dans les rapports a/b_1 .

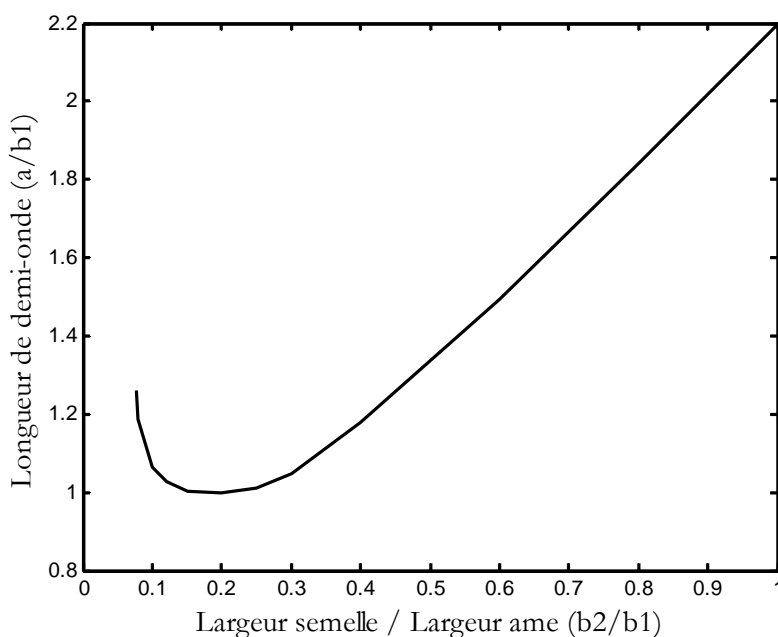


Figure 2.16 Longueurs de demi-onde pour une section en U.

2.5 Proposition d'une première procédure de classement

2.5.1 La technique proposée

Les profils à parois minces peuvent être vus comme un ensemble de plaques qui travaillent ensemble et interagissent entre-elles. La procédure classique de leur dimensionnement est une approche « élémentaire ». Elle consiste à décomposer la section en parois planes isolées, ce qui néglige évidemment leur interaction. Les programmes utilisant la MBF ou la MEF présentent l'avantage de traiter ces profils en tant qu'ensemble et permettent de calculer les contraintes critiques et les modes correspondants. On obtient alors des formes déformées généralement assez complexes et il s'agit d'identifier le type d'instabilité correspondant.

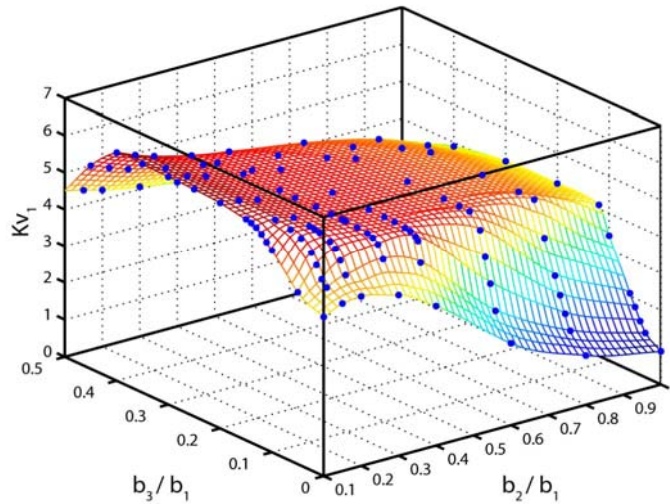
Les modes d'instabilité globale sont faciles à identifier. Ils se traduisent par un déplacement en mode rigide de la section, c'est-à-dire qu'elle se déplace sans qu'elle ne se déforme. Cependant, dès que l'instabilité s'accompagne d'une déformation de la section transversale, il devient assez difficile d'identifier le type d'instabilité en jeu.

Dans le paragraphe précédent, lorsque nous avons raisonné sur des situations limites de profils à section en U, nous nous sommes rendu compte que l'on peut identifier la zone où le voilement d'un élément plan est déterminant en calculant son coefficient de voilement et en le comparant à des valeurs limites. Nous allons proposer dans ce qui suit une technique d'identification des instabilités des colonnes à parois minces uniformément comprimées.

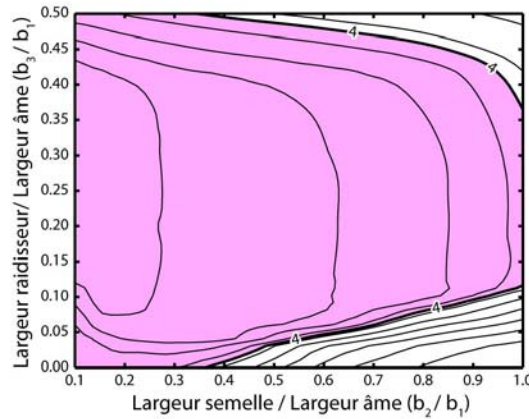
Nous pouvons considérer qu'une section à parois minces est constituée de n éléments plans de largeurs b_i , $i = 1, n$. A partir de la contrainte critique, σ_{cr}^{MBF} , calculée par la MBF ou par la MEF, nous pouvons calculer n coefficients de voilement en utilisant à chaque fois comme largeur de référence, celle d'un élément plan.

$$K_{v_i} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{\sigma_{cr}^{MBF}}{E} \left(\frac{b_i}{t} \right)^2 \quad (2.30)$$

Pour choisir les valeurs limites du coefficient de voilement, on suppose que les bords des plaques sont soit simplement appuyés, soit libres. Pour toutes les situations, nous avons deux valeurs de référence, 4 et 0.425, qui correspondent aux plaques raidies et non raidies, respectivement. En cas de doute sur l'efficacité d'un appui, les deux valeurs doivent alors être successivement prises en compte. Ainsi, si K_{v_i} est inférieur à 0.425 alors on peut affirmer que l'instabilité de la section entière ne peut pas être due au voilement de la plaque b_i . De même, si K_{v_i} est inférieur à 4, c'est le voilement en tant que plaque raidie qui est alors exclu. En éliminant ainsi les voilements impossibles, nous arrivons à mieux cerner l'instabilité de la section en ne laissant que les instabilités probables.



(a)



(b)

Figure 2.17 Délimitation de la zone où le voilement de l'âme des sections en C est possible en tant qu'élément raidi. (a) Coefficient de voilement de l'âme Kv_1 . (b) Zone de voilement probable de l'âme.

2.5.2 Application aux profils à sections en C

Appliquons maintenant la procédure proposée à l'identification de l'instabilité des sections en C en fonction de leur géométrie, dans les intervalles retenus là-dessus : $0 \leq b_3/b_1 \leq 0.5$ et $0.1 \leq b_2/b_1 \leq 1.0$. Pour des raisons de symétrie, nous n'avons que trois types de plaques dans un profil en C. L'âme est un élément plan raidi, surtout que b_2/b_1 est supérieur à 0.077. La limite à son voilement est donc définie par un coefficient de voilement égal à 4. Le raidisseur, de largeur b_3 , est une paroi d'extrémité et elle est évidemment une plaque non raidie. Son voilement ne peut pas être déterminant dans l'instabilité de la section si Kv_3 est inférieur à 0.425. Quant à la semelle, on peut facilement imaginer qu'en fonction de la dimension du raidisseur, son bord commun avec ce dernier peut être considéré soit libre soit appuyé. Ainsi, si Kv_2 est inférieur à 0.425 le

voilement de la semelle est exclu. Si $0.425 \leq K_{v_2} \leq 4$, alors le voilement de la semelle avec inefficacité du raidisseur est probable et c'est son voilement en tant que plaque raidie qui est exclu. Dans le dernier cas $K_{v_2} \geq 4$, le voilement de la semelle avec efficacité du raidisseur devient probable.

A partir des résultats obtenus par VisASCOP pour les sections en C et illustrés dans la figure 2.13, nous avons tracé les surfaces donnant les K_{v_i} , $i = 1, 3$ des sections en C en fonction des rapports b_2/b_1 et b_3/b_1 . Nous avons ensuite déterminé les courbes d'intersection des K_{v_i} avec les plan correspondants aux valeurs limites adéquates (figures 2.17 à 2.19).

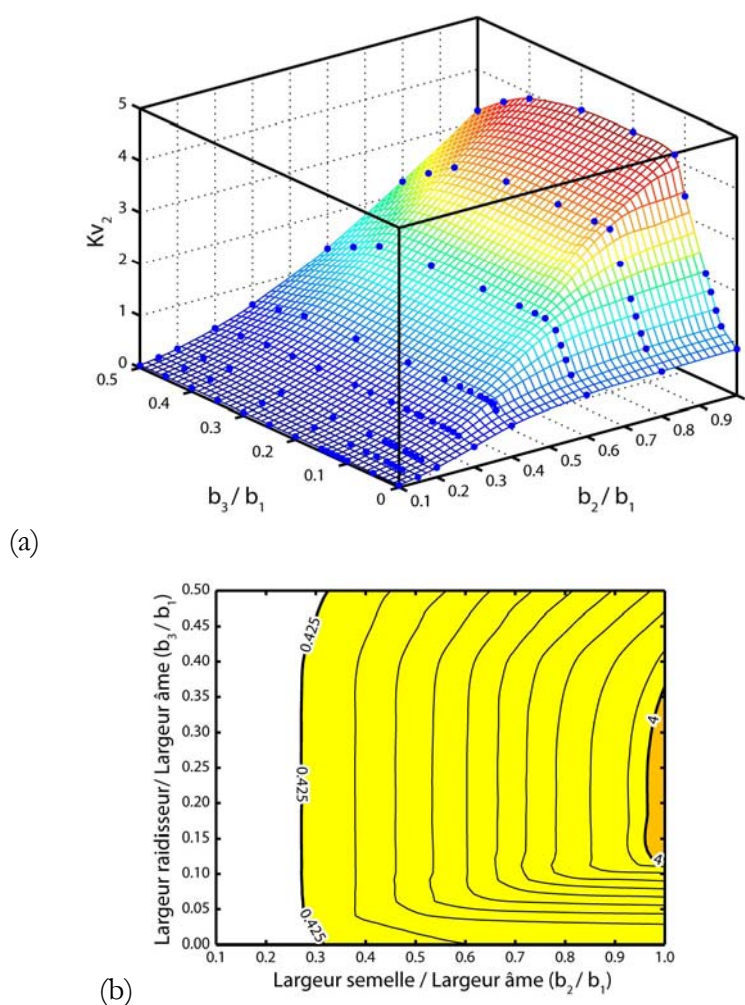
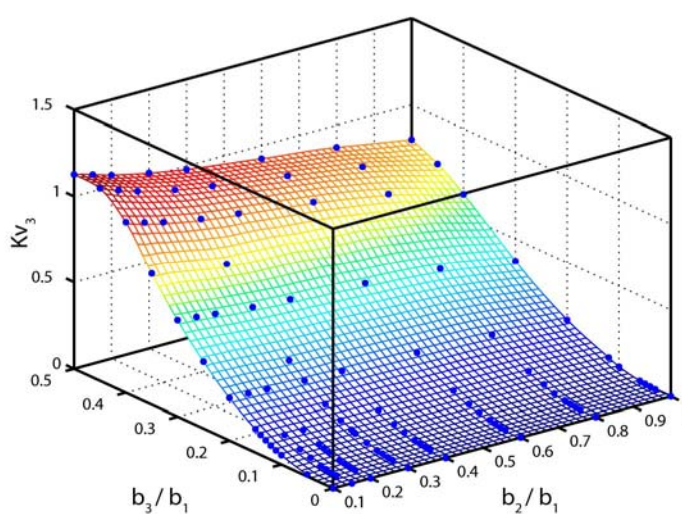


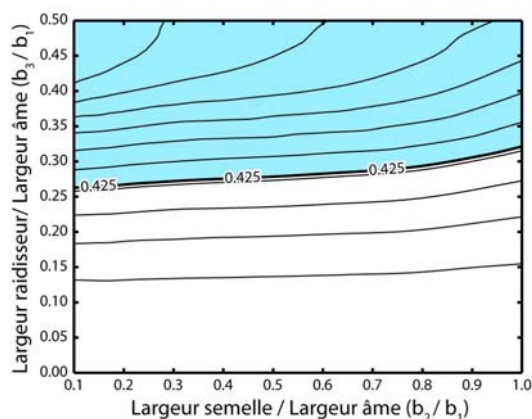
Figure 2.18 Délimitation des zones où le voilement de la semelle des sections en C est possible en tant qu'élément non raidi et en tant qu'élément raidi. (a) Coefficient de voilement de la semelle K_{v_2} . (b) Zones de voilement probable de la semelle.

La partie coloriée dans la figure 2.17.b est la zone qui correspond à un coefficient de voilement K_{v_1} supérieur à 4. A l'extérieur de ce domaine, l'instabilité de la section en C ne peut en aucun cas avoir été causée par le voilement de l'âme.

La figure 2.18.b montre que dans le cas de la semelle, il existe trois zones. La première concerne les faibles valeurs de b_2 où, Kv_2 est inférieur à 0.425 et la semelle ne peut pas être à l'origine de l'instabilité de la section en C. Le deuxième domaine est celui où Kv_2 arrive à être supérieur à 4 et qu'on commence à observer lorsque le rapport b_2/b_1 avoisine l'unité et pour certaines dimensions du raidisseur $0.12 \leq b_3/b_1 \leq 0.35$. Il est clair que la figure 2.18.b n'indique qu'une partie de ce domaine du moment que dans l'étude paramétrique, nous nous sommes limité à $b_2/b_1 = 1$. Dans ce deuxième domaine, on peut envisager l'instabilité de la semelle en tant qu'élément plan raidi. Dans la troisième zone, Kv_2 prend des valeurs intermédiaires. Nous pensons que c'est la zone privilégiée de l'instabilité distorsionnelle. Elle débute à partir de $b_2/b_1 \approx 0.3$.



(a)



(b)

Figure 2.19 Délimitation de la zone où le voilement du raidisseur des sections en C est possible en tant qu'élément plan non raidi. (a) Coefficient de voilement de la semelle Kv_2 .

(b) Zone de voilement probable du raidisseur.

Le domaine couvert par l'étude paramétrique est pratiquement divisé en 2 dans la figure 2.19.b qui donne Kv_3 . La frontière est quasiment une droite qui croît très légèrement avec la dimension de la semelle. On peut alors avancer que, d'une manière générale, le voilement du raidisseur ne peut pas causer l'instabilité de la section en C

lorsque b_3/b_1 est inférieur à 0.3. En observant la figure 2.19.a, on remarque que pour de grands raidisseurs et de petites semelles, le coefficient de voilement Kv_3 tend logiquement vers la valeur 1.28 qui caractérise l'instabilité d'une plaque encadrée – libre (voir tableau 2.1).

En dessinant les zones ainsi déterminées dans un même graphe (figure 2.20), nous définissons 8 domaines, numérotés de 1 à 8. Nous divisons ainsi les formes des sections en C dont le rapport b_2/b_1 est inférieur à 1 en huit catégories. A chacune d'elles correspond un type de comportement particulier lors de l'instabilité élastique des colonnes courtes à moyennement longues, uniformément comprimées. Les modes d'instabilité des colonnes élancées qui sont des modes globaux n'interviennent pas dans ce classement.

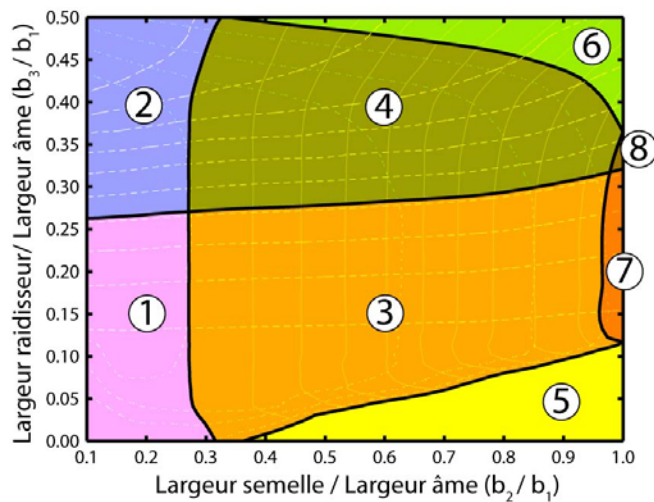


Figure 2.20 Les zones correspondant à différents types d'instabilité des profils en C.

Pour étayer ce résultat, nous avons pris un échantillon de forme de section en C par zone et nous avons donné, dans le tableau 2.3, les formes d'instabilité calculées par la MBF au niveau des minima locaux. Nous y avons également donné les formes d'instabilité calculées pour des longueurs de demi-ondes très petites. Cette information, qui d'habitude n'a aucun intérêt pratique, a confirmé la classification retenue. L'observation de la forme correspondant à de très petites longueurs de demi-ondes aide à l'identification des éléments plans dont le voilement est probable.

Examinons maintenant cette classification de plus près. Dans la zone 1, le seul voilement possible est celui de l'âme. L'interaction avec le mode global flexionnel fait chuter la contrainte critique pour de faibles valeurs de b_2 et de b_3 . La zone 2 définit les formes des sections en C dont l'instabilité locale peut être due au voilement de l'âme ou du raidisseur. Dans les zones 1 et 2 l'instabilité distorsionnelle n'est pas envisageable du moment que Kv_2 est inférieur à 0.425. Ce résultat est logique car la largeur de la semelle est trop faible pour que le flambement de l'ensemble semelle – raidisseur soit à l'origine de l'instabilité élastique de la section en C. D'ailleurs, les courbes $(a - \sigma_{cr})$ ne présentent qu'un seul minimum pour les sections en C de ces deux zones.

La zone 5 regroupe les formes des sections en C dont l'instabilité a lieu par insuffisance de raidissage de la semelle. L'instabilité est similaire à la ruine des sections en U par « voilement » des semelles en tant qu'éléments plans non raidis. La simple présence du raidisseur dans les sections en C fait « basculer », dans la littérature, la dénomination de ce mode vers « l'instabilité distorsionnelle ». Comme dans l'évaluation des Kv_1 , nous avons retenu la règle minimum des minima locaux, cette zone 5 correspond aux cas où le minimum du mode distorsionnel se situe en dessous de celui du mode local dans les courbes $(a - \sigma_{cr})$. Ces dernières peuvent aussi ne comporter qu'un seul minimum correspondant au mode distorsionnel, comme dans le cas des sections en U ou de la forme retenue comme exemple dans le tableau 2.3.


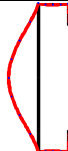
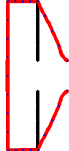

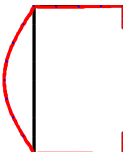
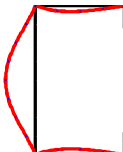
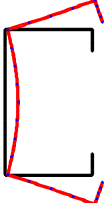
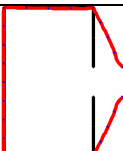

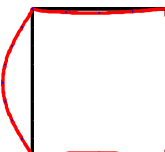
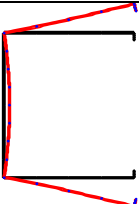
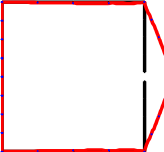
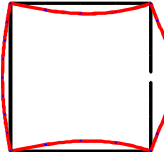
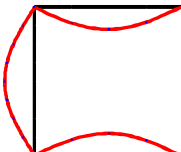
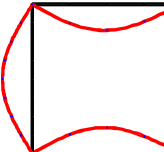
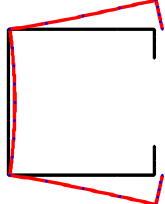
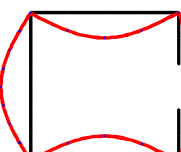
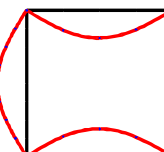
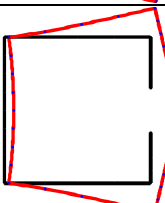
Dans les zones 3 et 4, les instabilités des sections en C peuvent être causées par le voilement de l'âme, en tant qu'élément raidi, et/ou le voilement de la semelle, en tant qu'élément non raidi. Dans la zone 4 il faut rajouter l'intervention probable du voilement du raidisseur qui est une plaque non raidie. Ces deux domaines sont caractérisés par une quasi indépendance de Kv_2 par rapport à b_3/b_1 . Il s'agit d'une zone de couplage âme – semelle : $Kv_1 \geq 4$ et $Kv_2 < 4$. La nécessité de considérer la section du C dans sa totalité et éviter de la décomposer en parois planes isolées paraît alors une évidence.

Le domaine 6 regroupe les sections en C dont le voilement ne peut être causé que par l'instabilité prématurée du raidisseur ou de la semelle. L'observation de la forme d'instabilité obtenue au niveau du seul minimum de la courbe $(a - \sigma_{cr})$ confirme cette classification (voir tableau 2.3). Le mode distorsionnel n'y apparaît pas de façon distincte. Il est couplé au mode global.

Dans la zone 7, les instabilités locales probables sont le voilement de l'âme et celui des semelles comme éléments raidis. Dans la zone 8, il faut rajouter le voilement du raidisseur en tant qu'élément non raidi. Dans ces deux domaines, les courbes $(a - \sigma_{cr})$ présentent deux minima locaux. Les modes, local et distorsionnel, correspondants à des sections représentatives des deux groupes sont montrés dans le tableau 2.3. Il est impossible de distinguer les deux classes en les observant. C'est l'instabilité pour de très faibles longueurs de demi-ondes qui permet de confirmer la classification. Il nous semble également important de signaler que ces zones se situent à la limite de la zone $Kv_1 \geq 4$, en dehors de laquelle le voilement de l'âme ne peut plus être le comportement déterminant. C'est-à-dire que l'on approche des formes pour lesquelles l'âme joue simplement un rôle d'encastrement partiel. L'instabilité locale a alors principalement lieu par voilement de la semelle ou du raidisseur.

En conclusion, nous pouvons dire que la technique très simple que nous venons d'exposer permet de classer et de caractériser l'instabilité locale des sections en C.

Tableau 2.3 Les modes d'instabilité, local, distorsionnel et pour de faibles longueurs de demi-ondes, correspondants à des sections représentatives des 8 zones de la classification.

Zone	Forme du C		Section déformée		
	b_2/b_1	b_3/b_1	$a \ll b_1$	Minimum local	Minimum distorsionnel
1	0.2	0.15			Pas de 2 ^{ème} minimum
2	0.2	0.4			Pas de 2 ^{ème} minimum
3	0.6	0.15			
4	0.6	0.4			Pas de 2 ^{ème} minimum
5	0.9	0.05		Pas de minimum Local	
6	0.95	0.47			Pas de 2 ^{ème} minimum
7	1	0.2			
8	1	0.35			

2.5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par rappeler les définitions des trois types d'instabilités de base. Les charges critiques de ces modes sont des données importantes dans la procédure de dimensionnement mais leur calcul peut être problématique, surtout pour des sections à formes complexes. Au fil des années, la MBF s'est imposée comme une méthode efficace pour résoudre ce problème. Elle a même permis d'attirer l'attention de chercheurs très expérimentés sur des instabilités à surveiller, alors qu'ils ne les avaient pas anticipés, lors de campagnes expérimentales (Schafer et al., 2006). Dans cet article, ces scientifiques ont « définitivement décrété l'avantage d'utiliser la MBF ou d'autres méthodes numériques dans la prédiction de l'instabilité élastique » car elle fournit tous les modes appropriés.

Néanmoins, l'interprétation des résultats peut parfois nécessiter une certaine expertise et des risques de confusion peuvent exister, tels que ceux rapportés par Hancock (2003) dans un article sur l'état de l'art. Nous avons alors proposé une première technique d'identification du voilement des structures à parois minces. Il s'agit plutôt d'une procédure pour éliminer les voilements improbables qui a été déduite en faisant des raisonnements sur des situations limites.

Un autre résultat qui semble prometteur concerne les observations faites lors de l'étude de la limite d'une section en U lorsque la largeur de ses semelles tend vers zéro. Le type d'instabilité a alors progressivement basculé du voilement, qui est un comportement individuel de plaques, vers le flambement, c'est-à-dire vers un comportement d'ensemble. La longueur de demi-onde s'est rapidement allongée (figure 2.16) et elle est devenue fortement dépendante de la géométrie (voir l'équation (2.26) ou le tableau 2.2). Ces deux observations correspondent aux descriptions phénoménologiques du mode distorsionnel qui sont rapportées dans la littérature. Ce résultat a alors suggéré l'idée que l'instabilité distorsionnelle est « une instabilité Eulérienne d'un sous-ensemble de parois qui n'apparaît que lorsque la dimension du raidisseur devient suffisante ».

Cette définition lèverait certaines insuffisances de la définition actuelle du mode distorsionnel donnée dans les normes. Il est en effet irrationnel de classer l'instabilité harmonique des U en voilement et de classer, en même temps, tous les modes harmoniques impliquant un déplacement du raidisseur des sections en C en instabilités distorsionnelles, indépendamment de la dimension du raidisseur (voir figure 2.2 et § 2.2.2.2). Or, il est évident que la limite du C, lorsque le raidisseur s'annule, est un U ! Cette anomalie de classement et d'autres sont rapportés dans le chapitre 4.

La définition que nous proposons suggère que, lorsque la dimension du raidisseur est faible, l'instabilité est plutôt un voilement de plaque reposant sur un appui élastique : le raidisseur. Pour des dimensions plus grandes, elle bascule vers une instabilité Eulérienne d'un sous-ensemble de parois : le mode distorsionnel. On ne doit donc parler de mode distorsionnel que lorsque le comportement d'un sous-ensemble de plaques est mobilisé en tant que tel. Le cas des profils où le nombre de plaques est inférieur à 3 (cornières) ne peut pas avoir de mode distorsionnel car on ne peut avoir que le comportement individuel des parois ou celui de l'ensemble. C'est également le cas des sections symétriques à trois parois (les U). La définition proposée est donc conforme à la pratique courante de classer les instabilités harmoniques des cornières et des sections U en voilements (voir § 2.2.1.3).

Cette division de l'instabilité impliquant le déplacement du raidisseur en deux types de comportements peut servir à expliquer la différence entre la méthode européenne

(CEN/EC3, 1996) et l'approche américano-australienne (AISI/NAS, 2004a ; AS/NZS 4600, 1996) pour calculer l'instabilité distorsionnelle. Dans l'Eurocode 3, le modèle de ce comportement est le flambement flexionnel du raidisseur qui s'appuie élastiquement sur la plaque (figure 2.21), soit exactement l'inverse de notre première proposition. Dans les règlements américain et australien, il s'agit plutôt de l'instabilité globale par flexion et torsion de l'ensemble (lire sous-ensemble) semelle – raidisseur qui s'appuie élastiquement sur l'âme, soit la deuxième partie de notre proposition.

Cette dernière approche sera présentée dans le chapitre suivant avec les particularités et les difficultés relatives à l'instabilité distorsionnelle. Dans le chapitre 5, nous proposerons une procédure de classement automatique des modes d'instabilité qui s'inspire plutôt de la démarche GBT. La proposition de définition que nous venons de donner ne sera pas utilisée dans cette thèse. Elle pourrait faire l'objet de recherches ultérieures pour la valider.

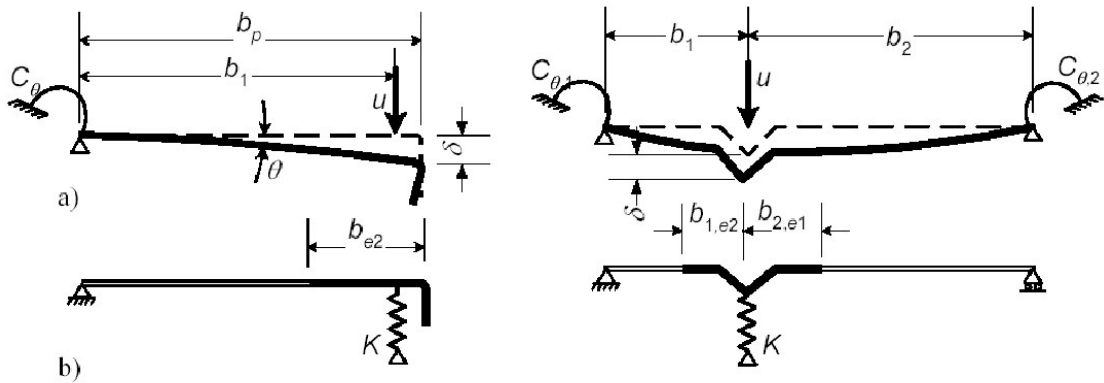


Figure 2.21 Solution Eurocode 3 pour modéliser l'instabilité distorsionnelle : (a) système « réel » (b) système équivalent (CEN/EC3, 1996).

Chapitre 3

L'Instabilité distorsionnelle

3.1 Introduction

L'instabilité distorsionnelle, également connue sous le nom de « instabilité de raidisseur » ou « instabilité torsionnelle locale », est un mode caractérisé par la rotation de la semelle à la jonction semelle – âme dans le cas des profils ayant une paroi de bord raidie. Dans des éléments à paroi intermédiaire raidie, l'instabilité distorsionnelle est caractérisée par le déplacement du raidisseur intermédiaire selon la normale au plan de la paroi (figure 3.1).

L'instabilité distorsionnelle peut être directement étudiée par une analyse par la méthode des bandes finies (MBF) présentée dans le chapitre précédent. Considérons, à titre d'exemple, l'analyse par la méthode des bandes finies d'une section en C soumise à la compression simple. L'étude consiste à calculer les charges critiques pour différentes longueurs de demi-ondes (figure 3.2). Les minima de la courbe ainsi obtenue révèlent les différentes instabilités de la colonne. Dans ce cas-ci, une instabilité distorsionnelle existe à une longueur de demi-onde intermédiaire, entre celle de l'instabilité locale et celle, plus longue, de l'instabilité flexionnelle ou flexionnelle – torsionnelle. Cette longueur intermédiaire est une caractéristique définissante de l'instabilité distorsionnelle (AISI, 2004b).

Comme dans l'exemple de la figure 3.2, il est fréquent que la contrainte critique de voilement soit nettement inférieure à celle de l'instabilité distorsionnelle. Il serait alors logique d'ignorer l'étude de l'instabilité distorsionnelle. Cependant dans beaucoup de cas, cette dernière doit être considérée, ne serait-ce qu'à titre routinier lors d'un dimensionnement par les codes.

L'instabilité distorsionnelle reste à ce jour le mode le moins intuitif. Il est d'ailleurs le dernier phénomène d'instabilité à avoir été codifié. Son introduction explicite dans les codes n'a été faite que dans les années 90. Nous allons alors commencer ce chapitre par présenter un historique sur l'instabilité distorsionnelle des profils formés à froid tiré d'une revue bibliographique réalisée en commun par Schafer et Hancock qui sont deux grands spécialistes de l'instabilité des structures à parois minces (Schafer, 2000).

Nous présenterons ensuite les différentes méthodes actuellement disponibles pour l'évaluation de la charge critique élastique distorsionnelle P_{crd} . Nous commencerons par les méthodes simplifiées à utiliser lors d'un calcul manuel et nous indiquerons ensuite les principales méthodes numériques susceptibles d'être utilisées pour évaluer P_{crd} . Après, nous rappellerons l'essentiel des résultats de Hancock concernant la charge ultime dans le mode distorsionnel. Pour terminer ce chapitre, nous rappellerons le concept de la largeur efficace, qui est à la base des principales règles de calcul des éléments structuraux en acier formés à froid, avant de présenter la nouvelle méthode de calcul introduite en 2004 dans les règles nord-américaines à savoir la méthode de la résistance directe ou « Direct Strength Method » (DSM).



Figure 3.1 L'instabilité distorsionnelle
(<http://www.civil.usyd.edu.au>)

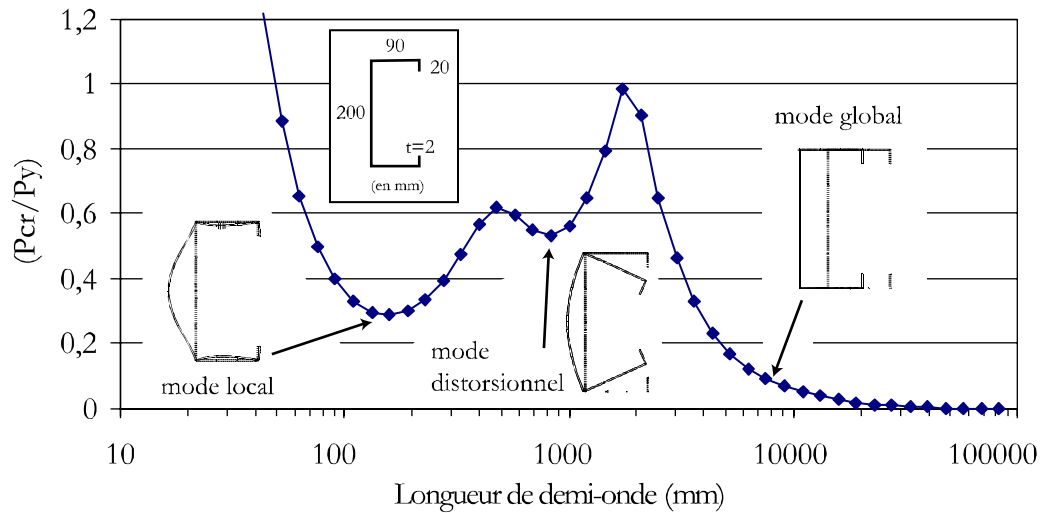


Figure 3.2 Charges critiques d'une section en C

3.2 Historique

La recherche sur le comportement des colonnes en acier formées à froid traverse approximativement cinquante ans. Pendant cette période, l'instabilité distorsionnelle, sous différents noms, a suscité plus ou moins d'intérêt. Schafer et Hancock (Schafer, 2000) ont récapitulé l'historique de la stabilité distorsionnelle des colonnes en acier formées à froid. Nous en présentons dans ce qui suit un résumé. Cet exposé présente les principaux travaux expérimentaux. Les tendances théoriques y sont également brièvement mentionnées, en particulier celles en relation avec l'instabilité distorsionnelle.

a Les années 40 et 50

La recherche sur les colonnes en acier formées à froid a commencé dans les années 40 par des essais sur les caractéristiques matérielles à l'université de Cornell. Winter a récapitulé l'état de l'art pour les années 40. Chilver (1951, 1953) et Harvey (1953) ont récapitulé la recherche expérimentale et théorique des colonnes à parois minces en Grande-Bretagne. Après cinquante ans de progrès, la recherche moderne sur les colonnes est encore semblable au travail de Chilver : des solutions de stabilité élastique pour le voilement des parois et le principe de « la largeur efficace » pour calculer la charge limite.

La solution de la stabilité élastique de parois a été basée sur les travaux de Lundquist et Stowell (1943) qui ont étendu le travail de Timoshenko et Gere (1936) en fournissant des méthodes pratiques pour calculer la stabilité des assemblages de parois planes. La démarche de la « largeur efficace » a été basée sur le travail de von Kármán et al. (1932) et les corrections expérimentales de Winter (1947). Notamment, Chilver et Harvey ont correctement inclus l'interaction entre parois planes lors de la détermination de la contrainte locale d'instabilité. En outre, concernant les sections en C, Chilver a déclaré que le raidisseur devrait être suffisamment raide pour assurer l'instabilité locale (et éviter ainsi une instabilité distorsionnelle), mais il n'a donné aucun critère pour réaliser ceci.

b Les années 60

Durant cette période l'instabilité distorsionnelle a été ignorée par les chercheurs dans le domaine des éléments structuraux formés à froid. Ils ont plutôt concentré leurs efforts sur la caractérisation des matériaux et sur le comportement des colonnes longues, c'est-à-dire celles sujettes à l'instabilité globale. Il y a même eu des recherches sur l'optimisation de la forme des colonnes et des raidisseurs de bord.

Concernant les aspects théoriques, cette période a connu la première méthode analytique simplifiée pour l'instabilité distorsionnelle (Sharp, 1966) et le développement d'une théorie de la stabilité élastique des coques prismatiques, c'est-à-dire celles formées de plaques pliées. Cette théorie a permis de « découvrir » les modes d'instabilité distorsionnelle.

c Les années 70

La recherche sur les colonnes en acier formées à froid dans les années 70 s'est concentrée sur l'interaction entre les modes locaux et globaux d'instabilité (c.-à-d., l'interaction entre le voilement et les instabilités flexionnelle, torsionnelle et flexionnelle – torsionnelle).

Cette période a vu la formulation de la base des règlements modernes sur les parois planes de bord raidies et non raidies. Le mode distorsionnel, quoique observé dans les recherches expérimentales, était intentionnellement éliminé en prévoyant des raidisseurs « adéquats ». Des résultats expérimentaux ont également montré qu'assurer une contrainte critique distorsionnelle supérieure à celle du voilement ne permet pas nécessairement d'éliminer le mode de ruine distorsionnel.

Mais les années 70 voient le développement des ordinateurs, ce qui a eu comme conséquence l'essor de la méthode des éléments finis.

d Les années 80

La recherche expérimentale des années 80 s'est concentrée sur les imperfections et les contraintes résiduelles et elle a permis la formalisation d'une approche unifiée de la largeur efficace.

Durant cette période quelques chercheurs ont commencé à focaliser sur l'instabilité distorsionnelle. Cette tendance était la plus évidente à l'université de Sydney. La nécessité d'étudier le comportement des montants des rayonnages de stockage en acier formés à froid a amené l'équipe de Hancock à travailler sur l'instabilité distorsionnelle (Lau et Hancock, 1987 et 1988 ; Hancock et al., 1994, ...). Les formes optimisées de ces colonnes ont fait que l'instabilité distorsionnelle a souvent dominé. Hancock a développé et a popularisé la méthode des bandes finies de Cheung (1976). Il en a fait un outil pour comprendre les modes d'instabilité dans les structures à parois minces. Il a également produit une méthode simplifiée pour le calcul de la contrainte d'instabilité distorsionnelle élastique (Lau et Hancock, 1987).

Pendant cette décennie, on a commencé, suite à des études numériques, à se rendre compte que la réserve post-critique dans le mode distorsionnel peut ne pas être aussi grande que dans le mode local.

e Les années 90

En Europe, les années 90 ont vu le développement des Eurocodes. La partie 1.3 de l'Eurocode 3 (CEN, 1996) a fourni une méthode pour calculer l'instabilité distorsionnelle des sections comportant des raidisseurs simples, telles que les sections en C. Cette méthode a tenu compte des déformations distorsionnelles de l'âme et de la semelle mais, elle a utilisé une courbe de résistance de colonnes pour prédire la ruine du raidisseur. Ceci implique qu'aucune réserve post-critique n'est considérée dans le mode distorsionnel.

Les travaux de recherche de l'université de Sydney sur l'instabilité distorsionnelle ont continué dans les années 90. Les essais ont prouvé que l'interaction de l'instabilité distorsionnelle avec les autres modes est faible. On a expérimentalement observé que l'instabilité distorsionnelle possède une réserve post-critique inférieure à celle de l'instabilité locale. Les résultats ont été compilés et de nouvelles courbes de résistance des colonnes sujettes à des ruines dans le mode distorsionnels ont été produites.

La norme australienne pour les rayonnages de stockage en acier (AS, 1993) et la norme d'Australie/Nouvelle Zélande pour les structures métalliques en acier formées à froid (AS/NZS 4600, 1996) ont été développées en contenant des règles de calcul explicites pour l'instabilité distorsionnelle.

Les années 90 ont vu le développement de la théorie des poutres généralisées, GBT (Schardt, 1989 ; Davies et Leach, 1994 ; Davies et al., 1994). Cette théorie est la première à fournir les charges critiques du mode distorsionnel et des autres instabilités de base, suite à une analyse théorique rationnelle. Cette théorie a permis de confirmer la faible interaction de l'instabilité distorsionnelle avec les autres instabilités.

En utilisant la MEF et la MBF, Schafer (1997) a démontré que le mode distorsionnel a une plus grande sensibilité aux imperfections que le mode local. Il a aussi observé que le mode distorsionnel a une réserve post-critique inférieure à celle du voilement et il a développé des méthodes simplifiées pour le calcul de la charge critique. Il a surtout proposé une alternative à la méthode de la largeur efficace, à savoir la DSM (Direct Strength Method)

f Les années 2000

La connaissance du mode distorsionnel est améliorée par le développement théorique. La GBT connaît un essor important. Elle est étendue à l'analyse non linéaire des sections à connexions simples et multiples. Cette période est marquée par l'adoption, dans les règles nord-américaines, de la DSM en tant qu'alternative à la méthode de la largeur efficace pour calculer les éléments structuraux en acier formés à froid. Il s'agit d'une véritable révolution car le concept de la largeur efficace avait traversé cinq décennies. Grâce à cette méthode, le calcul se trouve grandement simplifié. Actuellement, la recherche s'oriente vers les colonnes perforées et la généralisation de l'utilisation de la DSM.

3.3 Méthodes simplifiées pour le calcul manuel de la contrainte critique distorsionnelle

Bien que beaucoup d'études ont été effectuées sur l'instabilité distorsionnelle, la méthode de Lau et Hancock (1987), qu'on dénommera « méthode de Hancock », a été la première à produire une méthode de calcul manuel suffisamment simple pour un usage pratique. Elle a été validée par les résultats de la MBF conventionnelle. En Australie et en Nouvelle-Zélande, cette méthode a été incluse dès 1996 dans la norme AS/NZS 4600 (1996) pour les structures métalliques formées à froid. Jusqu'à la fin des années 90, elle s'est imposée aux autres modèles comme une méthode simple pour prévoir la force critique distorsionnelle (Kesti et Davies, 1999).

Dans la méthode de Hancock, le mode distorsionnel est modélisé par l'instabilité flexionnelle – torsionnelle de la semelle raidie qui est supposée partiellement encastree dans l'âme (figure 3.3). Dans la version initiale, le profil n'était soumis qu'à une compression uniforme. Cette restriction a été levée par la suite pour prendre en charge la flexion simple (Hancock, 1997) puis la flexion déviée (Teng et al., 2003).

Plus récemment, Schafer (1997) a développé une nouvelle approche semblable à celle de Hancock. Les deux modèles sont conceptuellement les mêmes pour la semelle, mais diffèrent dans la façon de traiter l'âme. La méthode de Schafer approche explicitement la rigidité à la rotation au niveau de la jonction âmes – semelle lors du calcul de la contrainte critique distorsionnelle.

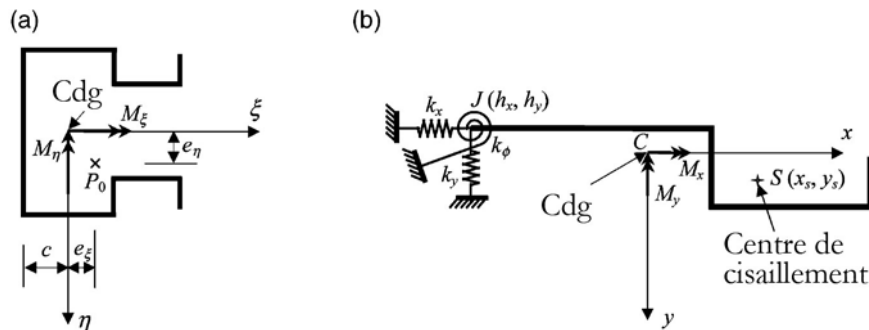


Figure 3.3 Semelle élastiquement appuyée sur la jonction âme – semelle : (a) section de la colonne étudiée ; (b) semelle isolée.

3.3.1 Méthode de Hancock (1987)

La première méthode simplifiée pour le calcul de la contrainte critique distorsionnelle est due à Lau et Hancock (1987). On y commence par faire une estimation de la longueur de demi-onde critique

$$\lambda_d = 4.8 \left(\frac{I_{xf} b^2 h}{t^3} \right)^{1/4} \quad (3.1)$$

L'étape suivante est de faire une première estimation de la contrainte d'instabilité distorsionnelle. Cette évaluation est nécessaire parce que la rigidité de rotation est écrite en fonction de la contrainte d'instabilité distorsionnelle. Cette étape exige la formulation et la solution d'une équation quadratique.

Les paramètres requis pour la solution sont

$$\eta = \left(\frac{\pi}{\lambda_d} \right)^2 ; \beta_1 = \bar{x}^2 + \left(\frac{I_{xf} + I_{yf}}{\Lambda_f} \right) \quad (3.2.a,b)$$

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{\beta_1} \left(I_{xf} b^2 + 0.039 J_f \lambda_d^2 \right) ; \alpha_2 = \eta \left(I_{yf} + \frac{2}{\beta_1} \bar{y} b I_{xyf} \right) \quad (3.2.c,d)$$

$$\alpha_3 = \eta \left(\alpha_1 I_{yf} - \frac{\eta}{\beta_1} I_{xyf}^2 b^2 \right) \quad (3.2.e)$$

La première estimation de la contrainte critique distorsionnelle est

$$\sigma' = \frac{E}{2\Lambda_f} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) - \left((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_3 \right)^{1/2} \right] \quad (3.3)$$

Dans le cas où cette racine est négative, on prend une valeur nulle.

Avec l'estimation de la contrainte critique ci-dessus, on peut évaluer la rigidité à la rotation :

$$k_\phi = \frac{Et^3}{5.46(h + 0.06\lambda_d)} \left[1 - \frac{1.11\sigma'}{Et^2} \left(\frac{h^2\lambda_d}{h^2 + \lambda_d^2} \right) \right] \quad (3.4)$$

Avec cette rigidité on corrige les paramètres α_1 et α_3 qui deviennent

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{\beta_1} \left(I_{xf} b^2 + 0.039 J_f \lambda_d^2 \right) + \frac{k_\phi}{\beta_1 \eta E} ; \alpha_3 = \eta \left(\alpha_1 I_{yf} - \frac{\eta}{\beta_1} I_{xyf}^2 b^2 \right) \quad (3.5.a,b)$$

Et on recalcule la racine de l'équation quadratique pour trouver la contrainte critique distorsionnelle avec la condition qu'elle ne doit pas être négative. Si tel est le cas on prend zéro.

$$\sigma_{\text{crd}} = \frac{E}{2\Lambda_f} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) - \left((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_3 \right)^{1/2} \right] \quad (3.6)$$

Les paramètres intervenant dans les expressions ci-dessus sont :

E = Module de Young

t = épaisseur des parois

h = hauteur de l'âme

b = largeur de la semelle

A_f = Aire de la section transversale de la semelle

I_{xf} = Moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe x

I_{yf} = Moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe y

I_{xyf} = Moment d'inertie de couplage de la semelle

J_f = Constante de la torsion de St. Venant de la semelle

\bar{x} = distance entre la jonction âme – semelle et le CDG de la semelle.

\bar{y} = distance entre la paroi plane de la semelle et le CDG

3.3.2 Méthode de Schafer (1997)

La contrainte critique σ_{crd} du mode distorsionnel des éléments de bords raidis peut être calculée à partir de la formule

$$\sigma_{\text{crd}} = \frac{k_{\phi fe} + k_{\phi we}}{\tilde{k}_{\phi fg} + \tilde{k}_{\phi wg}} \quad (3.7)$$

Les termes qui apparaissent dans cette formule sont définis ci-dessous. Il faut y prendre comme valeur de L , le résultat de l'équation suivante

$$L = \min(L_{\text{cr}}; L_{\text{m}}) \quad (3.8)$$

Rigidités à la rotation de la semelle :

$$k_{\phi fe} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left(EI_{xf}(x_o - h_x)^2 + EC_{wf} - E \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_o - h_x)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 GJ_f \quad (3.9)$$

$$k_{\phi fg} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[A_f \left((x_o - h_x)^2 \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}} \right)^2 - 2y_o(x_o - h_x) \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}} \right) + h_x^2 + y_o^2 \right) + I_{xf} + I_{yf} \right] \quad (3.10)$$

Longueur critique et rigidités à la rotation de l'âme pour les colonnes comprimées

$$L_{cr} = \left(\frac{6\pi^4 h (1-\nu^2)}{t^3} \left(I_{xf} (x_o - h_x)^2 + C_{wf} - \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_o - h_x)^2 \right) \right)^{1/4} \quad (3.11)$$

$$k_{\phi_{we}} = \frac{Et^3}{6h(1-\nu^2)} \quad (3.12)$$

$$\tilde{k}_{\phi_{wg}} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{th^3}{60} \quad (3.13)$$

Il faut noter que d'autres expressions de L_{cr} , $k_{\phi_{we}}$ et $\tilde{k}_{\phi_{wg}}$ sont à utiliser dans le cas des poutres (profils soumis à la flexion). On peut les trouver dans le manuel de la DSM (Schafer, 2002). Les autres paramètres intervenant dans les expressions ci-dessus sont :

E =module de Young

G =module de Cisaillement

ν =coefficient de Poisson

L_m =distance entre raidisseurs servant à empêcher l'instabilité distorsionnelle

t =épaisseur des parois

h =hauteur de l'âme

b =largeur de la semelle

A_f , I_{xf} , I_{yf} , I_{xyf} , C_{wf} , J_f , x_o et h_x sont les propriétés de la semelle comprimée (semelle avec son raidisseur) par rapport aux axes x et y . Ces axes prennent pour origine le centre de gravité ; l'axe x est dirigé vers la droite et l'axe y vers le bas. Pour le cas d'une semelle avec un raidisseur simple (c à d, les semelles des sections en C ou en Z), Schafer a calculé les valeurs appropriées et on les rappelle dans la figure 3.4.

A_f =aire de la section transversale de la semelle

I_{xf} =moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe x

I_{yf} =moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe y

I_{xyf} = moment d'inertie de couplage de la semelle

C_{wf} =constante de la torsion gauchie de la semelle

J_f =constante de la torsion de St. Venant de la semelle

x_o = position sur l'axe x du centre de torsion de la semelle. ($x_o = b - \bar{x}$)

h_x = coordonnée x de la jonction âme – semelle ; elle vaut (-1) fois la dimension c de la figure 3.3, ou bien $h_x = -\bar{y}$ de la solution de Hancock ci-dessus.

Le cas d'une paroi raidie possédant un raidisseur intermédiaire est traité à part. Pour les deux possibilités de chargement, compression simple et flexion composée, des formules, aussi compliquées que celles présentées ci-dessus, sont données par Schafer (2002).

A cette étape, il nous semble important de rappeler que ces méthodes approchées ont, à chaque fois, été validées par rapport à la méthode des bandes finies conventionnelle.

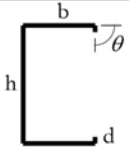
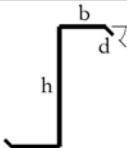
	
$\Lambda_f = (b+d)t$ $J_f = \frac{1}{3}bt^3 + \frac{1}{3}dt^3$ $I_{xf} = \frac{t(t^2b^2 + 4bd^3 + t^2bd + d^4)}{12(b+d)}$ $I_{yf} = \frac{t(b^4 + 4db^3)}{12(b+d)}$ $I_{xyf} = \frac{tb^2d^2}{4(b+d)}$ $I_{of} = \frac{1}{3}tb^3 + \frac{1}{12}bt^3 + \frac{1}{3}td^3$ $C_{wf} = 0$ $x_o = \frac{b^2}{2(b+d)}$ $h_y = y_o = \frac{-d^2}{2(b+d)}$ $h_x = \frac{-(b^2 + 2db)}{2(b+d)}$ $b = x_o - h_x$	$\Lambda_f = (b+d)t$ $J_f = \frac{1}{3}bt^3 + \frac{1}{3}dt^3$ $I_{xf} = \frac{t(t^2b^2 + 4bd^3 - 4bd^3 \cos^2(\theta) + t^2bd + d^4 - d^4 \cos^2(\theta))}{12(b+d)}$ $I_{yf} = \frac{t(b^4 + 4db^3 + 6d^2b^2 \cos(\theta) + 4d^3b \cos^2(\theta) + d^4 \cos^2(\theta))}{12(b+d)}$ $I_{xyf} = \frac{tbd^2 \sin(\theta)(b + d \cos(\theta))}{4(b+d)}$ $I_{of} = \frac{1}{3}tb^3 + \frac{1}{12}bt^3 + \frac{1}{3}td^3$ $C_{wf} = 0$ $x_o = \frac{b^2 - d^2 \cos(\theta)}{2(b+d)}$ $h_y = y_o = \frac{-d^2 \sin(\theta)}{2(b+d)}$ $h_x = \frac{-(b^2 + 2db + d^2 \cos(\theta))}{2(b+d)}$ $b = x_o - h_x$

Figure 3.4 Caractéristiques géométriques des semelles des sections en C et en Z (Schafer 2002).

3.3.3 Commentaires

Les deux méthodes présentées brièvement ci-dessus sont les plus « simples » qui donnent des résultats fiables. Il apparaît alors de façon évidente que dimensionner une colonne formée à froid à l'instabilité distorsionnelle est une tâche ardue qui ne peut pas se passer de l'ordinateur, surtout que l'instabilité distorsionnelle n'est qu'un aspect du problème. En effet, le calcul des largeurs efficaces pour tenir compte de la réserve post-critique du voilement peut conduire à des calculs itératifs fastidieux.

Le raisonnement est alors simple. Du moment que le dimensionnement d'une simple colonne formée à froid peut nécessiter l'utilisation de l'ordinateur, alors pourquoi ne pas

intégrer les méthodes numériques d'analyse de la stabilité élastique de façon formelle dans la procédure de dimensionnement ? C'est ce qu'a fait Schafer en développant la DSM (AISI, 2004a). L'utilisation de la MBF conventionnelle est intégrée au règlement américain, ou plutôt dans ses commentaires, et le logiciel CUFSM de Schafer est offert gratuitement pour promouvoir cette nouvelle approche (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>).

Dans ce qui suit nous allons donner un bref aperçu des différentes méthodes numériques qui peuvent être utilisées pour faire une analyse de la stabilité élastique, en général, et du mode distorsionnel en particulier.

3.4 Méthodes numériques d'analyse de la stabilité élastique

Une grande variété de méthodes numériques : éléments finis, différences finies, éléments de frontière, théorie des poutres généralisée, bandes finies, et d'autres peuvent fournir les solutions de stabilité élastique précises pour les poutres et les colonnes en acier formées à froid.

L'annexe des règles américaines (AISI, 2004a) fixe les conditions de base pour l'utilisation de ces méthodes numériques : l'erreur par rapport à la solution exacte dans des problèmes classiques ne devrait pas excéder 1% ; de plus, la compatibilité et l'équilibre doivent être maintenus, ou si ce n'est pas le cas, il faut que l'approche soit conservative.

L'analyse par la Méthode des Éléments Finis traditionnelle, en utilisant les éléments de plaques minces ou de coques, peut être employée pour le calcul des charges critiques élastiques. En raison de l'utilisation courante des fonctions d'interpolation polynomiales, le nombre d'éléments exigés pour une précision raisonnable peut être très élevé (voir figure 3.5). Les livres classiques de la MEF, tels que les livres de Cook et al. (1989) ou de Zienkiewicz et Taylor (1991), expliquent la théorie de base. Dans le commerce, il existe des logiciels très performants qui peuvent fournir des réponses d'instabilité élastique précises à condition d'en faire un bon usage. On peut citer à titre d'exemple : ABAQUS, MSC/NASTRAN, MARC, ANSYS, et STAGS. Il faut néanmoins noter que lors d'analyses par la MEF, le calcul d'un grand nombre de modes peut être nécessaire afin de révéler les trois modes fondamentaux d'intérêt pour un profil donné.

Des solutions au problème de la stabilité des plaques par la méthode des différences finies sont mises en oeuvre par Harik et al. (1991) et d'autres. L'approche est possible mais n'est pas très répandue, et les logiciels commerciaux sont rares. La méthode des éléments de frontière peut également être employée pour étudier la stabilité élastique (Elzein, 1991). Les exemples démontrent que la méthode peut fournir la précision requise, mais le problème est, qu'il s'agit d'une approche assez peu connue des praticiens.

La théorie des poutres généralisée, GBT, développée par Schardt (1989) et étendue par Davies et al. (1994), et puis d'autres, s'est avérée être un outil très utile pour analyser la stabilité élastique des profils en acier formés à froid. Sa capacité à séparer les différents modes d'instabilité la rend particulièrement adaptée aux méthodes de calcul par les règlements. Des logiciels utilisant la GBT ont été développés en Angleterre par le groupe de Davies et au Portugal par le groupe de Camotim.

La méthode des bandes finies, MBF, peut être vue comme une variante de la méthode des éléments finis. Il s'agit de l'une des méthodes les plus efficaces et les plus populaires pour étudier la stabilité élastique des structures métalliques formées à froid. Les détails de la MBF pour ce type d'analyses ont été présentés dans le chapitre précédent. Il faut admettre que ce sont Hancock et ses collaborateurs qui ont imposé l'utilisation de la MBF pour étudier la stabilité des profils en acier formés à froid et qui ont démontré d'une façon convaincante le potentiel important de la MBF. Le groupe de recherche de Hancock distribue THIN-WALL, un logiciel commercial utilisant cette méthode (www.civil.usyd.edu.au/case/THINWALL.htm). Le groupe de recherche de Schafer a également utilisé la MBF de façon intensive et a rendu public son logiciel, CUFSM (www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm). En outre, le programme VisASCOP qui a été présenté dans le chapitre précédent, permet de réaliser des analyses du même type. Deux nouvelles versions de ce programme seront développées dans le cadre de cette thèse. La première a pour objectif de fournir automatiquement les trois modes d'instabilité fondamentaux d'un profil donné, c'est-à-dire ceux dont on a besoin lors d'un calcul par les règlements des profils formés à froid. La deuxième a pour but de permettre l'analyse de la stabilité élastique des colonnes composées par la MBF. Il s'agit, à notre connaissance, d'un problème qui n'a jamais été étudié par la MBF. Le développement de ces deux programmes vise à améliorer les performances de la MBF en vue de son utilisation d'une manière d'abord plus efficace puis, plus générale dans la nouvelle méthode de conception des profils formés à froid : la DSM ou méthode de la résistance directe.

L'annexe présentant la DSM (AISI, 2004a) reconnaît à la MBF la faculté de donner des solutions précises avec un minimum d'effort et de temps, et recommande son utilisation malgré ses insuffisances. Nous essayerons donc de lever quelques unes de ses limitations dans les prochains chapitres de cette thèse. Dans ce qui suit nous allons exposer la procédure de calcul par la DSM. Mais avant, nous allons présenter comment la charge ultime dans le mode distorsionnel est évaluée car les conclusions la concernant ont guidé le développement de la DSM.

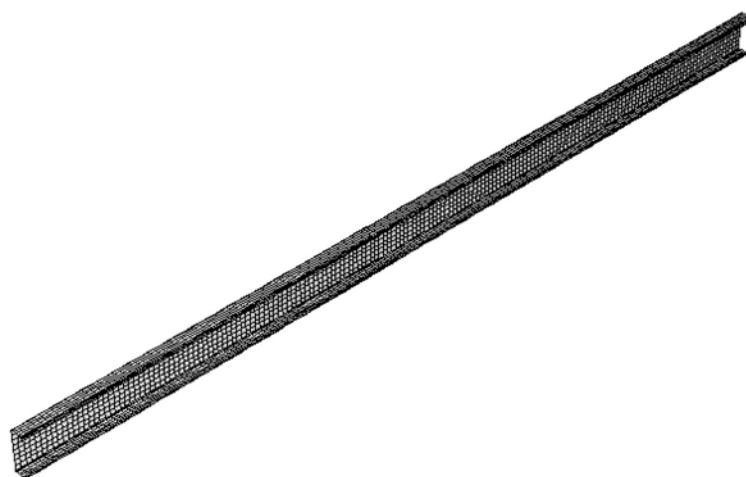


Figure 3.5 Exemple de maillage MEF d'un profil en C (Yu, 2005).

3.5 Charge ultime dans le mode distorsionnel

Divers travaux scientifiques, notamment ceux de Hancock (Hancock et al., 1994), Davies (Davies, 2000) et Schafer (Schafer, 1997) ont permis de tirer un certain nombre de conclusions concernant la charge ultime du mode distorsionnel :

- L'instabilité distorsionnelle possède une réserve post-critique plus faible que celle du voilement,
- L'instabilité distorsionnelle peut contrôler la rupture même dans les cas où la charge critique distorsionnelle est plus grande que la charge critique de voilement,
- L'instabilité distorsionnelle est beaucoup plus sensible aux imperfections que le voilement.

La série de résultats expérimentaux la plus complète sur la ruine de colonnes formées à froids dans le mode distorsionnel a été obtenue à l'université de Sydney : Lau et Hancock (1987), Kwon et Hancock (1992) comme récapitulé par Hancock et al. (1994). Des essais de compression ont été réalisés sur (a) des profils en C, (b) des montants de rayonnages de stockage, (c) des montants de rayonnages de stockage avec raidisseurs additionnels, (d) des colonnes à section en forme de « chapeau » et (e) des profils en C avec un raidisseur d'âme. Les schémas de ces sections sont dessinés dans la figure 3.6. Les charges de ruine dans le mode distorsionnel sont représentées dans la figure 3.7.

La courbe qui s'ajuste aux résultats expérimentaux de la figure 3.7 est connue comme la « courbe de Winter modifiée » ou « la courbe de Hancock ». Elle peut être exprimée comme suit

$$\frac{P_{nd}}{P_y} = \left(1 - 0.25 \left(\frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} \right) \left(\frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} \quad \text{si } \lambda_d = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crd}}} > 0.561 \quad \text{sinon } \frac{P_{nd}}{P_y} = 1 \quad (3.14)$$

Où P_{nd} est la charge axiale nominale pour une instabilité distorsionnelle,

$P_y = A \sigma_y$ est la charge plastique ; A est la section et σ_y est la limite d'élasticité.

$P_{crd} = A \sigma_{crd}$ est la charge critique distorsionnelle ; σ_{crd} est la contrainte critique distorsionnelle.

λ_d est l'élancement distorsionnel.

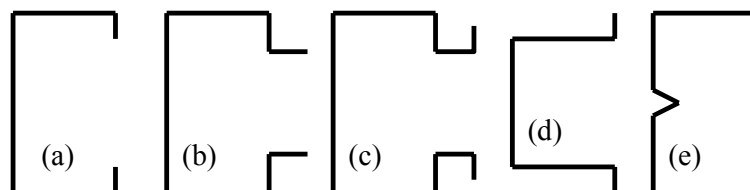


Figure 3.6 Sections des colonnes étudiées à l'université de Sydney

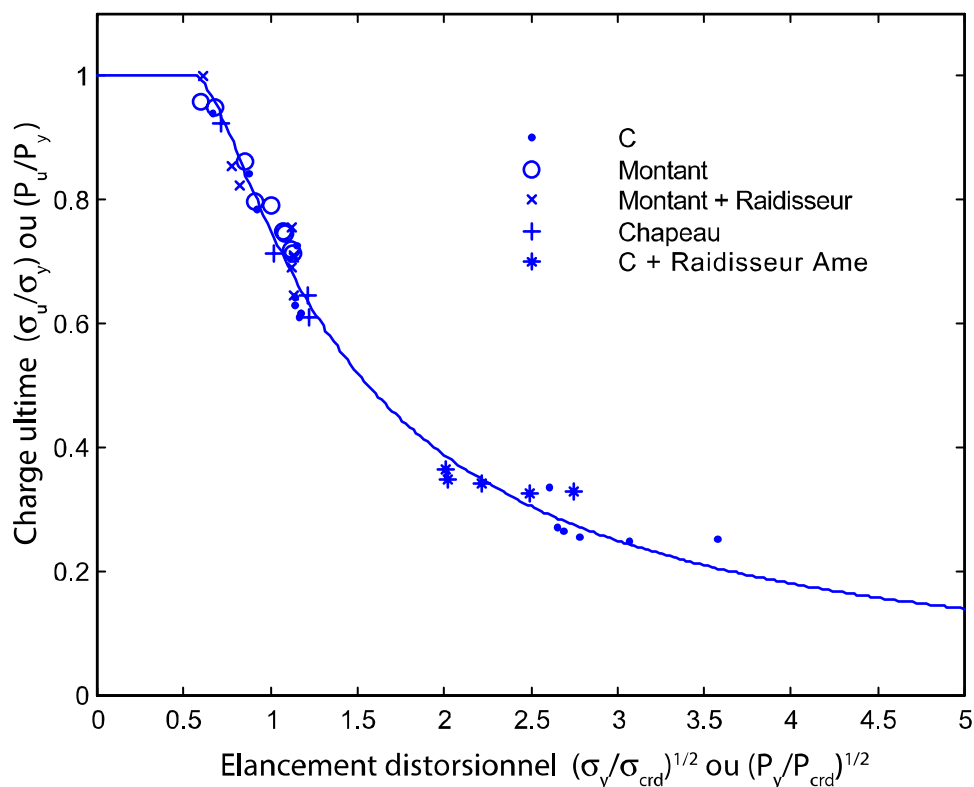


Figure 3.7 Charges ultimes des colonnes ayant un mode de ruine distorsionnel (université de Sydney)

La figure 3.7 fournit une évidence forte : si la ruine se produit selon le mode distorsionnel, alors la charge (contrainte) d'instabilité distorsionnelle élastique peut être utilisée pour prévoir la charge ultime. Cette remarque semble vraie pour une grande variété de formes de sections transversales. Elle confirme une hypothèse empirique déjà utilisée pour les modes de ruine par voilement ou par instabilité globale : la charge ultime est une fonction des charges élastiques d'instabilité et de la limite d'élasticité du matériau. Cette remarque et la difficulté de calculer les charges critiques distorsionnelles sont à l'origine de la nouvelle méthode de calcul des éléments structuraux en Acier Formés à Froid (AFF) qui est la DSM, et que nous présenterons plus loin dans ce chapitre.

3.6 Règles de calcul des profils formés à froid

3.6.1 Introduction

Le fait que les profils formés à froid soient des structures à parois minces complique beaucoup le comportement et la conception. L'expérience cumulée à travers les études théoriques et expérimentales a démontré qu'au moins trois instabilités de base doivent être considérées lors de la conception : locale, distorsionnelle et globale ou Eulérienne (dans ses trois formes flexionnelle, torsionnelle et flexionnelle – torsionnelle).

Par conséquent, en plus des considérations habituelles pour les colonnes en acier, à savoir la non linéarité matérielle, les imperfections géométriques, et les contraintes résiduelles, le rôle individuel et le potentiel pour l'interaction des modes d'instabilité doivent également être considérés.

Les premières règles de calcul pour les éléments structuraux en acier formés à froid ont été développées par l'institut américain de sidérurgie (règles AISI) en 1946. La première édition de ces règles a été basée principalement sur les travaux de recherche conduits par le professeur George Winter et ses collaborateurs à l'université de Cornell entre 1939 et 1946. Plus tard, les règles AISI ont été révisées et mises à jour par de nouveaux résultats de recherches, mais la philosophie principale des règles de calcul sont restées sans changement jusqu'en 1996, année d'édition de l'avant dernière version (AISI, 1999). D'ailleurs, les principaux règlements à travers le monde (CEN/EC3, 1996 ; AS/NZS 4600, 1996 ...) utilisent tous la notion de la largeur efficace.

3.6.2 Le concept de la largeur efficace

Du moment que les épaisseurs des parois formant les éléments structuraux en AFF sont petites devant leurs largeurs, les phénomènes d'instabilité et le comportement post-critique sont deux paramètres principaux dans le calcul de la charge de ruine de ces éléments structuraux.

À la différence des produits laminés à chaud, les éléments de structures en AFF flambent normalement avant la plastification de leur section. De plus, les éléments comprimés en AFF ne s'effondrent pas quand la contrainte d'instabilité est atteinte. Une charge additionnelle peut être supportée par l'élément après l'instabilité, suite à une redistribution des contraintes. Ce phénomène, dénommé réserve post-critique, est, d'autant plus, prononcé que l'élancement est élevé.

Pour l'élément plan raidi uniformément comprimé de la figure 3.8, le schéma 3.9 montre une idéalisation de la distribution de la contrainte longitudinale pendant les étapes consécutives du chargement. La contrainte est uniformément distribuée au début de la mise en charge. Lorsque la contrainte appliquée approche la contrainte critique, la distribution des contraintes n'est plus uniforme, et la contrainte maximum augmente au-delà de la contrainte d'instabilité jusqu'à ce qu'elle atteigne la limite d'élasticité ; on considère alors qu'il y a ruine de l'élément. Cette idéalisation ignore les variations longitudinales de la contrainte, mais cible le comportement moyen de la contrainte membranaire.

Le comportement post-critique élastique d'une paroi mince peut être analysé en utilisant la théorie des grands déplacements, mais le résultat est généralement trop complexe pour être appliqué dans la pratique. Par conséquent, le concept de largeur efficace, présenté par von Karman, Sechler, et Donnell en 1932 (von Karman et al., 1932) et modifié plus tard par Winter (1947), est devenu la base des méthode de calcul des éléments structuraux en AFF, de la première version des règles AISI en 1946 jusqu'aux dernières versions des règlements les plus importants (AISI/NAS, 2004a ; CEN/EC3, 1996 ; AS/NZS 4600, 1996).

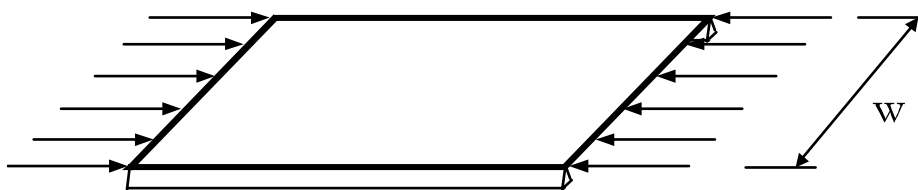


Figure 3.8 Elément plan raidi uniformément comprimé

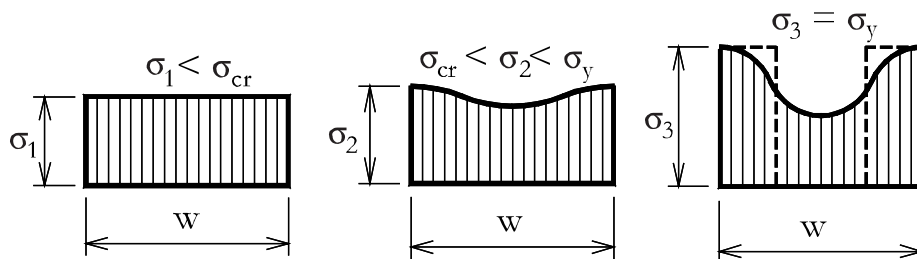


Figure 3.9 Evolution de la distribution des contraintes lors du chargement d'un élément raidi

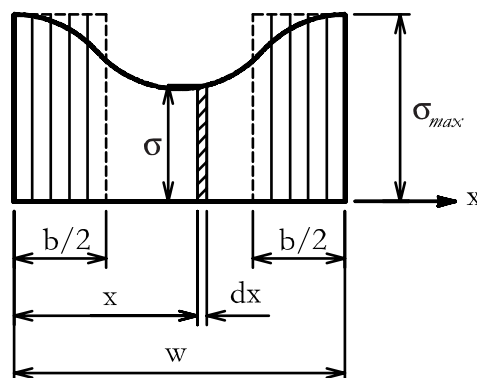


Figure 3.10 Largeur efficace d'un élément plan raidi uniformément comprimé

Dans l'approche de la largeur efficace, au lieu de considérer la distribution non uniforme de la contrainte à travers la largeur de l'élément, on suppose que toute la charge est supportée par une largeur fictive b , qui est soumise à une contrainte uniformément distribuée σ_{max} ; σ_{max} est égale à la contrainte au bord de la plaque, comme représentée dans la figure 3.10. Le calcul de la force post critique d'un élément plan raidi est ainsi simplifié et se ramène à déterminer la largeur efficace b . Les formules de base ont été développées sous la conduite du professeur George Winter à l'université de Cornell au début des années 40, et sont maintenant connues simplement en tant qu'« équations de Winter ». Ces équations sont apparues dans les premières règles de calcul des éléments structuraux en AFF et elles demeurent d'actualité.

$$b = w, \text{ pour } \lambda \leq 0.673 \tag{3.15.a}$$

$$b = \rho w, \text{ pour } \lambda > 0.673 \quad (3.15.a)$$

Où ρ est un facteur réducteur

$$\rho = \left(1 - \frac{0.22}{\lambda}\right) / \lambda \quad \rho \leq 1 \quad (3.15.c)$$

Et où λ est l'élanement de la plaque

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{crv}}} = \frac{1.052}{\sqrt{K_v}} \left(\frac{w}{t}\right) \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{E}} \quad (3.15.d)$$

Avec

K_v = coefficient de voilement de la plaque,

σ_{crv} = contrainte critique de voilement.

t = épaisseur de la plaque,

E = module d'élasticité,

σ_{max} = contrainte de compression maximum agissant au bord de la plaque
($\sigma_{max} = \sigma_y$, la limite s'élasticité pour avoir la charge maximum)

Pour des configurations plus compliquées, telles que la section en C de la figure 3.11, la largeur efficace doit être déterminée pour chaque partie en compression, et alors la charge ultime de la section peut être obtenue en supposant que la charge n'est reprise que par les secteurs efficaces.

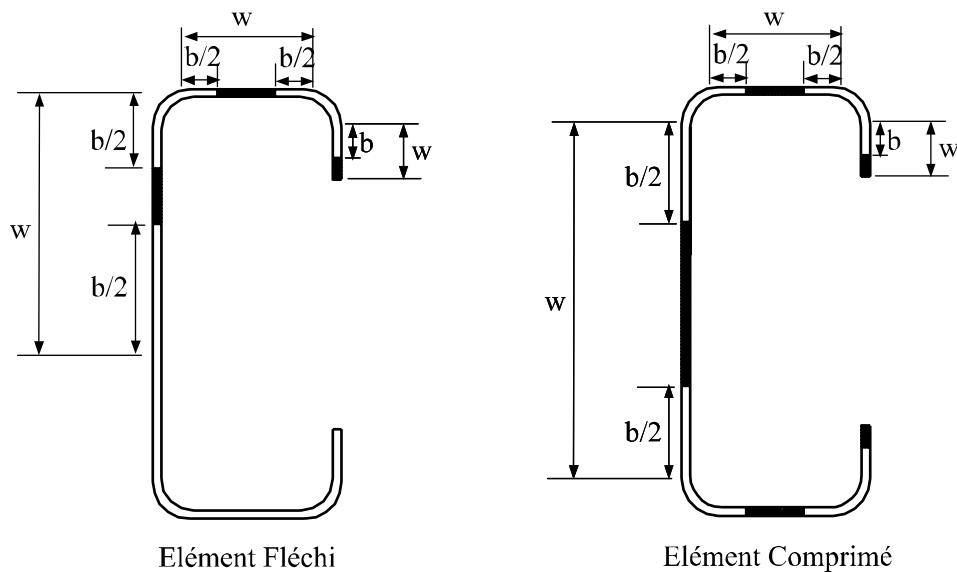


Figure 3.11 Largeurs efficaces de sections en C fléchies et comprimées (les parties noircies sont inefficaces)

3.6.3 Une nouvelle méthode de calcul – la Direct Strength Method (DSM)

Quand les sections deviennent plus complexes, avec des bords additionnels et/ou des raidisseurs intermédiaires, le calcul des largeurs efficaces (figure 3.11) devient extrêmement compliqué et long. De plus, les méthodes de calcul courantes traitent chaque élément de la section entière indépendamment, l'interaction qui existe entre les éléments (par exemple, entre l'âme et la semelle) est généralement ignorée. Pour surmonter ces problèmes, une nouvelle méthode a été développée par Schafer et Peköz (1998), appelée la méthode de résistance directe (DSM). La nouvelle méthode évite les calculs des largeurs/sections efficaces et emploie à la place des courbes de dimensionnement pour l'élément entier. Des solutions d'instabilité élastique pour l'élément entier sont utilisées plutôt que les solutions traditionnelles pour chaque élément individuel. L'élaboration de la DSM est basée sur la même hypothèse empirique que la méthode de la largeur efficace, à savoir que la charge ultime est une fonction des charges élastiques d'instabilité et de la limite d'élasticité du matériau. Les courbes de résistance pour la DSM ont été calibrées par une grande quantité de données expérimentales. Les analyses ont prouvé que la DSM est précise et fiable, et fonctionne aussi bien que les méthodes classiques avec une facilité beaucoup plus grande (Schafer et Peköz, 1998).

En 2004, la DSM a été approuvée par le comité AISI de la réglementation et a été incluse dans « les règles nord-américaines pour la conception des éléments structuraux en acier formés à froids » comme méthode de conception alternative pour la détermination des forces axiales et flexionnelles nominales des éléments en AFF (AISI, 2004a).

La DSM emploie la section transversale entière dans la détermination de l'instabilité élastique et offre des dispositions spécifiques pour les résistances vis-à-vis des 3 modes d'instabilité : local, distorsionnel et global, pour la compression et la flexion des éléments structuraux en AFF. Ci-dessous, on présente ces dispositions pour les éléments de structures comprimés.

La résistance nominale P_n vis-à-vis des charges de compression axiale est le minimum des trois charges P_{ne} , P_{nl} et P_{nd} définies ci-après.

a Instabilité globale flexionnelle, torsionnelle ou flexionnelle torsionnelle

La résistance nominale P_{ne} vis-à-vis des trois types d'instabilités globales flexionnelle, torsionnelle et flexionnelle torsionnelle est

$$P_{ne} = \left(0.658 \lambda_c^2 \right) P_y \quad \text{pour } \lambda_c \leq 1.5 \quad (3.16.a)$$

$$P_{ne} = \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) P_y \quad \text{pour } \lambda_c > 1.5 \quad (3.16.b)$$

$$\text{Où } \lambda_c = \sqrt{P_y / P_{cre}}$$

$$P_y = A \sigma_y$$

P_{cre} est la plus petite des trois charges critiques élastiques des modes d'instabilité globaux : flexionnel, torsionnel et flexionnel torsionnel

b Instabilité locale

La résistance nominale en compression P_{nl} pour le voilement est

$$P_{nl} = P_{ne} \quad \text{pour } \lambda_1 \leq 0.776 \quad (3.17.a)$$

$$P_{nl} = \left(1 - 0.15 \left(\frac{P_{crl}}{P_{ne}} \right)^{0.4} \right) \left(\frac{P_{crl}}{P_{ne}} \right)^{0.4} P_{ne} \quad \text{pour } \lambda_1 > 0.776 \quad (3.17.b)$$

$$\text{Où } \lambda_c = \sqrt{P_{ne}/P_{crl}}$$

P_{crl} est la charge critique élastique du mode local.

c Instabilité distorsionnelle

La résistance nominale en compression P_{nd} pour le mode distorsionnel est

$$P_{nd} = P_y \quad \text{pour } \lambda_d \leq 0.561 \quad (3.18.a)$$

$$P_{nd} = \left(1 - 0.25 \left(\frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} \right) \left(\frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} P_y \quad \text{pour } \lambda_d > 0.561 \quad (3.18.b)$$

$$\text{Où } \lambda_d = \sqrt{P_y/P_{crd}}$$

P_{crd} est la charge critique élastique du mode distorsionnel.

d Commentaire

Les courbes de résistance données par les équations (3.17) et (3.18) pour l'instabilité locale et distorsionnelle d'une colonne sont présentées sur la figure 3.12. Les courbes sont présentées en fonction de l'élanement λ qui se rapporte à l'élanement en mode local ou distorsionnel. Pour les colonnes non élanées (entièrement efficaces) P_{cr} est très grande devant P_y ; la section transversale est stable et la capacité portante P_n est égale à la charge de plastification P_y de la colonne. Des colonnes légèrement plus élanées se comportent de manière anélastique, avec $P_n < P_{cr}$ et $P_n < P_y$. Les sections transversales élanées se

comportent principalement de manière élastique, mais le comportement élastique dans une colonne à parois minces implique une réserve post-critique, avec $P_n > P_{cr}$. Dans la pratique, il existe des colonnes en acier formées à froid avec des dimensions qui couvrent les trois domaines de comportement : entièrement efficace, anélastique et élastique avec réserve post-critique. La figure 3.12 montre également que pour des élancements distorsionnel et local égaux, le mode distorsionnel possède une réserve post-critique réduite par rapport au voilement.

3.7 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons dire que l'instabilité distorsionnelle est la moins intuitive des trois types de comportement de base. Elle est d'ailleurs la dernière à avoir été intégrée dans les codes et règlements de calcul des éléments structuraux en acier formés à froid. Ce sont essentiellement les travaux du professeur G.J. Hancock qui ont permis de mettre en évidence que la charge de ruine dans le mode distorsionnel peut être prévue à partir de la charge (contrainte) d'instabilité distorsionnelle élastique. Ce résultat a confirmé une hypothèse empirique déjà utilisée pour les modes de ruine par voilement ou par instabilité globale : la charge ultime est une fonction des charges élastiques d'instabilité et de la limite d'élasticité du matériau.

Ce résultat, la difficulté d'estimer la charge critique distorsionnelle, la complexité des formes des éléments structuraux modernes et la lourdeur dans l'utilisation de la méthode de la largeur efficace traditionnelle (qui peut nécessiter des calculs itératifs) ont conduit les professeurs B. Schafer et T. Peköz (1998) à développer la DSM. Dans cette méthode, les capacités portantes nominales vis-à-vis des trois types d'instabilité sont estimées directement à partir des forces critiques élastiques correspondantes calculées pour la section entière. C'est-à-dire que la section de la structure à parois minces n'a plus besoin d'être décomposée. La DSM a donc besoin d'outils fiables et pratiques pour estimer les charges critiques élastiques des structures à parois minces.

La méthode la plus efficace dans ce sens est la méthode des bandes finies conventionnelle (MBF) au point où elle a été presque « institutionnalisée » par les règles américaines (AISI, 2004a). Néanmoins, son utilisation pose parfois quelques problèmes pratiques et des complications auxquels nous allons apporter des solutions dans le chapitre suivant. La MBF possède aussi des limitations. Elle ne peut traiter que les éléments simplement appuyés et ne peut pas modéliser des actions discrètes. Elle n'a d'ailleurs jamais été utilisée pour étudier les colonnes et poutres composées, de part l'existence des éléments de connexions dont l'action est discrète ou ponctuelle. Dans le [sixième](#) chapitre et dans l'esprit de la DSM, nous allons proposer une méthode numérique basée sur la MBF qui a pour but de calculer les charges critiques des colonnes composées en considérant la section entière.

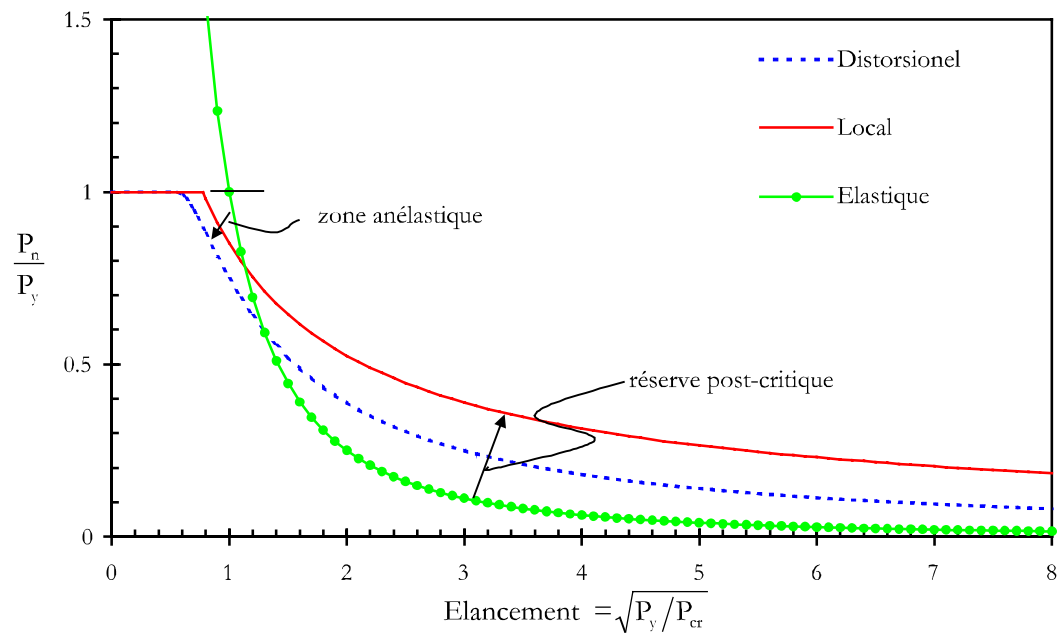


Figure 3.12 Courbes de résistance pour les instabilités distorsionnelle et locale.

Chapitre 4

Classification des modes d'instabilité des sections à parois minces par la MBF : la cFSM

4.1 Introduction

Dans le cas des éléments en acier formés à froid soumis à une force axiale de compression et/ou un moment de flexion, habituellement, trois instabilités de base peuvent être distinguées : locale, distorsionnelle et globale¹. Ces modes particuliers d'instabilité, ou types d'instabilité, ont lieu le plus fréquemment en interaction les uns avec les autres. Autrement dit, un mode d'instabilité observé peut combiner des déformations correspondant à plus d'un type d'instabilité. Les modes d'instabilité sans ce genre d'interaction sont désignés sous le nom des modes purs d'instabilité. Dans les règlements et codes de calcul, les termes d'instabilité globale, distorsionnelle et locale désignent ces modes purs.

Ceci vient du fait que chaque type d'instabilité a son propre comportement post-critique caractéristique. Par exemple, l'instabilité locale peut avoir une réserve post-critiques significative, au moins pour les éléments les plus minces où le comportement est principalement élastique. L'instabilité distorsionnelle peut également présenter une réserve post-critique, mais beaucoup moins que pour l'instabilité locale ; tandis que l'instabilité globale² n'en possède aucune et la capacité de l'élément est inférieure à sa charge critique élastique. Ainsi, il est important de classifier clairement les divers modes d'instabilité afin d'obtenir la résistance de conception la plus réaliste.

Le calcul et l'identification explicite de la charge critique liée à un mode pur d'instabilité donné n'est toujours pas entièrement résolu, bien qu'un certain nombre de méthodes existent. Le problème est que les méthodes générales de solution, qui peuvent manipuler des sections transversales, des conditions aux limites, et des charges arbitraires,

¹ Voir les définitions données au chapitre 2 pour d'autres descriptions de ces modes

² Comme le flambement d'une colonne

ne peuvent pas explicitement calculer des modes purs d'instabilité ; tandis que, les méthodes spécialisées, qui résolvent avec succès le calcul pur de mode d'instabilité, ne peuvent pas aisément manipuler les sections, les conditions aux limites, et les charges générales.

Parmi les méthodes numériques, la méthode des éléments finis (MEF) est de loin la plus populaire et générale. La MEF est applicable à pratiquement n'importe quel élément de structure, chargement, et conditions aux limites et un grand nombre de progiciels de MEF sont disponibles (ABAQUS, ANSYS, CAST3M, ...). Cependant, pour fournir une estimation précise des efforts d'instabilité dans un élément à parois minces, un grand nombre d'éléments coques ou d'éléments solides, et par conséquent un grand nombre de degrés de liberté (DDL), sont nécessaires. Bien qu'aujourd'hui les problèmes à grand nombre de DDL n'impliquent pas nécessairement de longs temps de calcul, ils impliquent qu'un grand nombre de modes d'instabilité sont produits, et la MEF est incapable de les classer automatiquement. Ainsi, c'est l'utilisateur qui décide qualitativement lesquels des modes d'instabilité calculés appartiennent à quel type de base (local, distorsionnel, global), ou s'il s'agit d'interaction. Pour une section transversale simple, le tri parmi des centaines ou des milliers de modes d'instabilité pour comprendre le comportement est un procédé inefficace. Pour les procédures qui exigent des analyses multiples des sections transversales à parois minces, comme dans le cas d'optimisation, la méthode est essentiellement inutilisable. L'identification des modes d'instabilité dans la MEF est actuellement un processus laborieux et plutôt arbitraire.

La méthode des bandes finies (MBF) utilise peu de DDL par rapport à la MEF. Elle est d'un point de vue informatique plus efficace et, surtout, elle produit moins de modes d'instabilité. Elle laisse ainsi à l'utilisateur un plus petit espace pour le travail d'identification. Cependant, le prix de l'effort informatique réduit est son applicabilité limitée : la MBF classique fonctionne uniquement sur les éléments structuraux à parois minces à sections constante et simplement appuyées. Du point de vue de l'identification des modes pur d'instabilité, la MBF est semblable à la MEF. Cependant, les logiciels disponibles de MBF, tels que THIN-WALL (Papangelis & Hancock, 1995, 2006), CUF5M (Schafer, 2006) et VisASCOP (Kerdal et al., 1995a), essaient de surmonter ce problème par la détermination automatique de l'effort critique en fonction de la longueur de demi-onde d'instabilité ce qui aide l'utilisateur à identifier les modes purs d'instabilité. Néanmoins, il est facile de trouver des sections où cette identification n'est pas toujours évidente.

Récemment, on a proposé une théorie généralisée des poutres, la GBT (Schardt, 1989 ; Davies et Leach, 1994 ; Silvestre et Camotim, 2002a ...). Actuellement, la GBT traite uniquement les éléments prismatiques avec un nombre relativement petit de DDL. La GBT possède l'attrayante capacité de pouvoir classer les modes d'instabilité automatiquement. Ainsi, les efforts critiques liés aux modes purs d'instabilité, qui sont exigés par les codes de calcul, sont directement fournis par cette méthode. Cependant, les progiciels de la GBT ne sont ni suffisamment disponibles ni assez connus parmi les utilisateurs potentiels.

Dans des articles très récents, Adany et Schafer (2006a, 2006b) ont proposé une nouvelle approche au problème de décomposition des modes d'instabilité qui est censée permettre aux méthodes numériques générales (c.-à-d., MEF, MBF) de calculer directement les charges critiques des modes purs d'instabilité. L'idée fondamentale de la technique proposée est de garder les caractéristiques des méthodes numériques générales,

c.-à-d., construction des matrices globales de rigidité et de stabilité par l'assemblage de matrices élémentaires, et puis d'introduire les hypothèses de la GBT qui permettent l'identification et le calcul des modes purs d'instabilité. De cette façon, la MBF et la MEF sont contraintes à reproduire les modes purs d'instabilité.

Bien que l'approche soit théoriquement générale, ils n'ont présenté sa mise en œuvre que pour la MBF. Ils ont baptisé cette nouvelle méthode « cFSM » pour « constrained Finite Strip Method » (Schafer et Adany, 2006) qu'on pourrait traduire par la « Méthode des Bandes Finies Contrainte ». La nouvelle version du CUSFM (v3.11), le logiciel en open source de Schafer et possédant cette capacité d'isoler les modes purs d'instabilité, est d'ailleurs disponible sur le web depuis le 19 octobre 2006 (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>).

La décomposition modale est accomplie en formant une série d'équations de contrainte qui décrivent une classe particulière d'instabilité. L'équation de stabilité de la MBF conventionnelle est d'abord contrainte à la classe d'instabilité choisie et l'analyse est ensuite exécutée. Le nombre de degrés de liberté (NDL) dans une classe est beaucoup plus petit que dans le modèle complet. La décomposition modale a comme conséquence une réduction significative du NDL. Les critères employés pour définir les classes d'instabilité sont tirés de la GBT et sont fournis dans deux articles publiés dans *Thin-Walled Structures* (Adany et Schafer, 2006a et 2006b). On y trouve aussi des exemples d'utilisation et de validation de la cFSM.

La formulation d'Adany et Schafer est très compliquée. La détermination de la matrice de contrainte définissant l'instabilité distorsionnelle, c'est-à-dire le mode qui pose le plus de problèmes et qui est l'objet de cette thèse, est très longue et constitue l'essentiel de leur premier article (Adany et Schafer, 2006a). Dans le chapitre suivant, nous proposerons une formulation beaucoup plus simple mais surtout beaucoup plus générale et efficace dans le sens où elle permettrait à la cFSM de conserver toute la souplesse des méthodes numériques. En effet, la version actuelle de la cFSM nécessite un traitement relativement lourd que nous commencerons par présenter avant de donner notre solution ; elle n'en sera que mieux valorisée. Mais avant tout, nous rappellerons les motivations qui sont à l'origine du développement de la cFSM et qui sont exposées dans un rapport de recherche de Adany (2004). Ceci nous aidera à mettre en évidence au chapitre 5 plusieurs failles dans les définitions des classes d'instabilité, spécialement celle du mode distorsionnel, dans la version actuelle de la cFSM/GBT.

4.2 Incertitudes dans la définition des modes d'instabilité des éléments à parois minces

4.2.1 Définitions des modes d'instabilité

Comme mentionné précédemment, trois types d'instabilité de base sont distingués pour les éléments structuraux en acier formés à froid¹ : locale, distorsionnelle et globale. Bien qu'il semble y avoir un consensus sur cette classification des modes d'instabilité, il n'y a aucun consensus sur la signification exacte des modes eux-mêmes.

¹ Et plus généralement pour les éléments à parois minces

L'instabilité globale peut être considérée comme le cas le plus simple et le plus clair : l'instabilité globale est un mode où la section transversale de l'élément se déplace sans se déformer. Ainsi, l'état déformé peut être caractérisé par le déplacement et la torsion du système de lignes formant la section. Selon les déformations et le type de chargement, d'autres sous-classes d'instabilité peuvent être définies : flexionnelle, torsionnelle, flexionnelle - torsionnelle et latérale - torsionnelle. Il faut noter que ces modes peuvent être dérivés analytiquement, au moins pour certains types de sections transversales et de conditions aux limites.

L'instabilité locale est normalement définie comme le mode qui implique uniquement des déformations flexionnelles de type « plaque », sans translation des lignes d'intersection des éléments plans formant la section. Une autre spécificité importante du voilement est que la longueur de demi-onde associée est la plus petite parmi les trois modes de base, et typiquement, elle est plus petite que la plus grande dimension caractéristique de l'élément.

L'instabilité distorsionnelle semble être le mode le plus problématique. La longueur de sa demi-onde est entre celles des modes locaux et globaux, et les déformations de la section transversale impliquent aussi bien une flexion de plaques qu'un déplacement de lignes d'intersection d'éléments plans adjacents.

4.2.2 Problèmes et questionnements sur les définitions des modes d'instabilité

Dans les paragraphes ci-dessus, nous avons rappelé les définitions des modes d'instabilité. Elles peuvent sembler claires seulement, des incertitudes persistent à ce jour et des confusions fréquentes ont lieu. Il arrive alors que l'on qualifie d'instabilité distorsionnelle toute instabilité qui n'est pas clairement locale ou globale. Dans un article relativement récent une confusion a d'ailleurs eu lieu entre le mode distorsionnel et le mode de voilement du raidisseur (Badawy Abu-Sena et al., 2001). Il nous semble opportun de signaler que ce type d'erreur en particulier ne peut pas arriver si l'on utilise la classification que nous avons proposée au chapitre 2.

La première source de confusion vient de la signification des lignes d'intersection. Bien que les définitions ci-dessus ne le soulignent pas, elles supposent implicitement qu'il y a des lignes d'intersection claires entre les éléments plans contigus formant la section transversale. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. A travers une série d'exemples que nous reprenons ci-dessous, Adany (2004) a mis en évidence la difficulté de classification selon ces définitions.

4.2.2.1 Exemple 1 : Qu'est-ce qu'une ligne d'intersection entre deux parois adjacentes ?

La figure 4.1 montre une série de sections transversales avec et sans raidisseurs d'âme. La hauteur de la section est de 200 mm, la largeur des semelles est de 90 mm, la dimension du raidisseur de la semelle est de 20 mm et l'épaisseur vaut 2 mm. Le raidisseur de l'âme possède une dimension parallèle à l'âme de 20 mm, tandis que dans la direction perpendiculaire elle varie de 0 à 8 mm. (Toutes les dimensions sont mesurées au niveau de la ligne moyenne.) Les variations des forces critiques correspondantes en fonction de la longueur de la demi-onde sont montrées dans la figure 4.2 ; le domaine couvert par l'étude paramétrique est celui des modes locaux et distorsionnels. La charge critique y est

représentée sous une forme adimensionnelle calculée comme le rapport de la force critique et de la charge qui provoque la première plastification de la section.

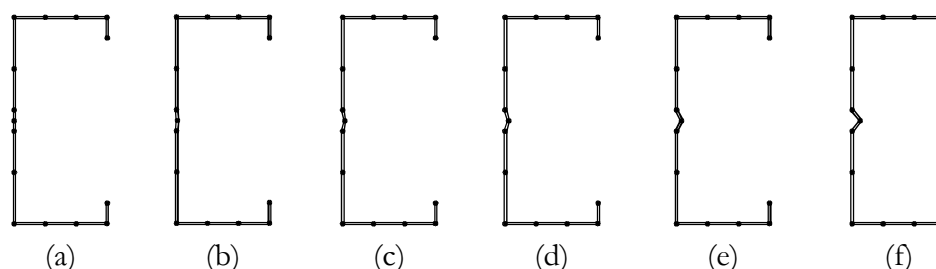


Figure 4.1 Sections en C avec et sans raidisseur d'âme
(Exemple 1) (Adany, 2004).

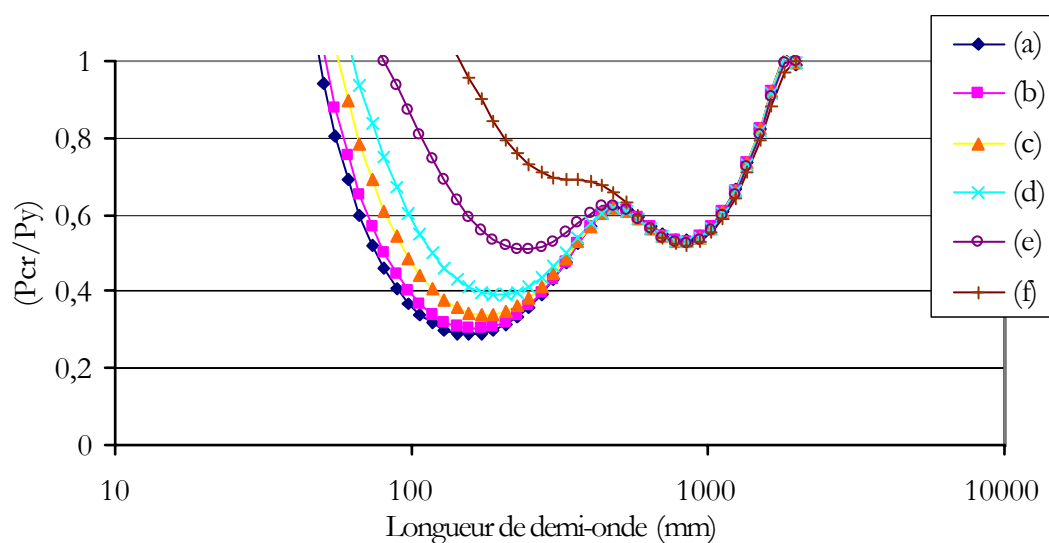


Figure 4.2 Charges critiques pour l'exemple 1 (Adany, 2004).

La figure 4.2 indique clairement que toutes les courbes possèdent un minimum à une longueur de demi-onde à peu près égale à 850 mm ; la charge critique adimensionnelle correspondante restant approximativement constante (0.52-0.53). La figure 4.3 montre que les modes d'instabilité associés sont fondamentalement similaires. Ils ont tous une déformée symétrique présentant un déplacement vertical du raidisseur de bord, caractéristique de l'instabilité distorsionnelle.

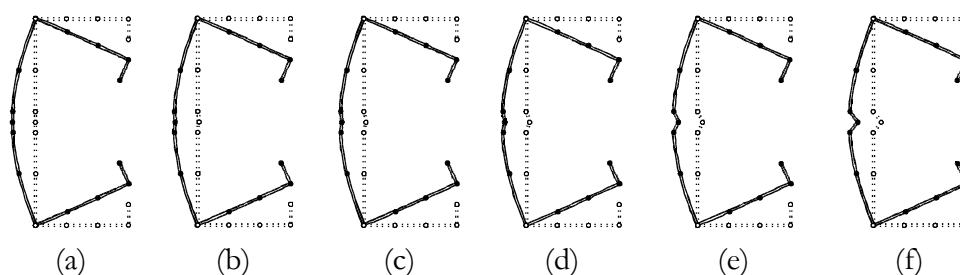


Figure 4.3 Formes d'instabilité de l'exemple 1 à une longueur de demi-onde de 850 mm, lieu de l'instabilité distorsionnelle (Adany, 2004)

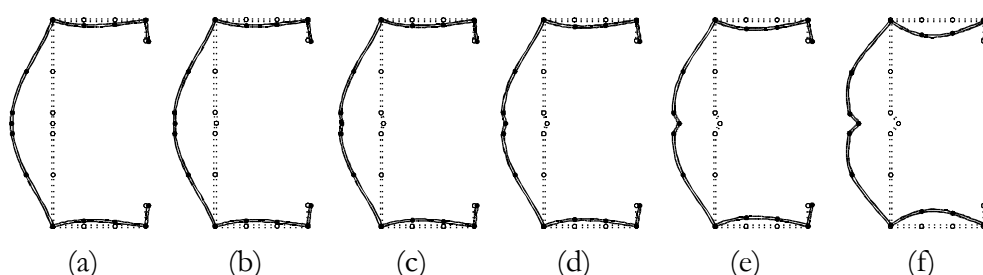


Figure 4.4 Formes d'instabilité de l'exemple 1 à une longueur de demi-onde de 170 mm. (Adany, 2004)

En observant les courbes pour des longueurs de demi-ondes plus petites, au voisinage du minimum « local », on peut observer un changement plus grand de la force critique. Par contre, l'observation des modes d'instabilité associés ne montre pas de changement significatif, comme représenté sur la figure 4.4 où les formes d'instabilité à une longueur de 170 mm sont dessinées. Les deux figures ci-dessus indiquent que le changement du phénomène d'instabilité est continu quand la taille de raidisseur de l'âme change. D'autre part, la classification des modes d'instabilité peut dépendre de la façon dont les lignes d'intersection sont définies.

En effet, si on suit l'évolution des premiers minima des courbes, on constate que les formes d'instabilité correspondantes sont assez semblables à celles représentées sur la figure 4.4 (a) à (e), et que les longueurs des demi-ondes augmentent graduellement lorsque le raidisseur devient de plus en plus rigide. Il est à signaler que ce premier minimum n'existe pas dans le cas de la section (f). Sur la base de cette observation, on pourrait conclure que toutes ces formes devraient être assignées au même mode d'instabilité. Cependant, selon la pratique courante, le mode représenté sur la figure 4.4 (a) serait certainement classifié en tant qu'instabilité locale de l'âme, alors qu'une forme semblable d'instabilité, par la simple présence du raidisseur de l'âme (par exemple la figure 4.4 (e) ou (f)), serait certainement classifié en tant qu'instabilité distorsionnelle.

Théoriquement, comme cas extrême, on pourrait proposer que toutes les lignes nodales devraient être considérées en tant que lignes d'intersection efficaces, indépendamment de l'angle relatif des parois adjacentes. Ceci mènerait à la conclusion que tous les modes de la figure 4.4 sont distorsionnels. Bien que cette conclusion soit claire, elle contredit la pratique courante.

Un autre cas possible de classification des modes d'instabilité consiste à ne considérer comme lignes d'intersection efficaces que celles communes à deux parois non coplanaires. Dans ce cas-ci, le mode 4.4 (a) est local, tandis que tous les autres sont distorsionnels, indépendamment de la dimension du raidisseur de l'âme. Ceci signifie qu'il y a une discontinuité dans la classification d'un comportement apparemment continu.

Il serait également possible de définir une valeur seuil pour l'angle relatif entre deux parois adjacentes. Elle permettrait de définir si une ligne nodale est une ligne d'intersection efficace ou non. Selon la valeur du seuil, quelques modes de l'exemple ci-dessus peuvent être classés comme locaux. Cependant, le problème de la discontinuité dans la classification est toujours là.

4.2.2.2 Exemple 2 : Qu'est-ce qu'un raidisseur de bord ?

Dans le traitement des raidisseurs de bord, il est nécessaire de savoir si les lignes extrêmes d'une section ouverte doivent être considérées comme lignes d'intersection fictives ou non. Il s'agit en fait d'une question similaire à la précédente comme le montre l'exemple suivant.

La figure 4.5 montre une série de sections en C comportant des raidisseurs de bord dont l'angle avec la semelle change. La section (a) constitue un cas extrême dans le sens où son « raidisseur » fait un angle de 180° avec la semelle. En pratique, il s'agit d'une section en U dont la semelle est non raidie.

La hauteur de l'âme de toutes les sections est de 200 mm, l'épaisseur est de 1 mm, la largeur des semelles est de 120 mm et le raidisseur de bord a une dimension de 10 mm. Pour le cas de la section (a), ceci donne une largeur totale des semelles de 130 mm (toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes). Les variations des forces critiques adimensionnelles correspondantes en fonction de la longueur de la demi-onde sont présentées sur la figure 4.6.

En analysant les courbes de la figure 4.6, il apparaît que les sections sans raidisseur ou avec de petits raidisseurs ne montrent pas deux modes d'instabilité séparés, locale et distorsionnelle. Cependant, lorsque l'angle du raidisseur diminue, c'est-à-dire quand le raidisseur devient de plus en plus efficace, la section se comporte de plus en plus en tant que section en C en présentant les deux modes local et distorsionnel.

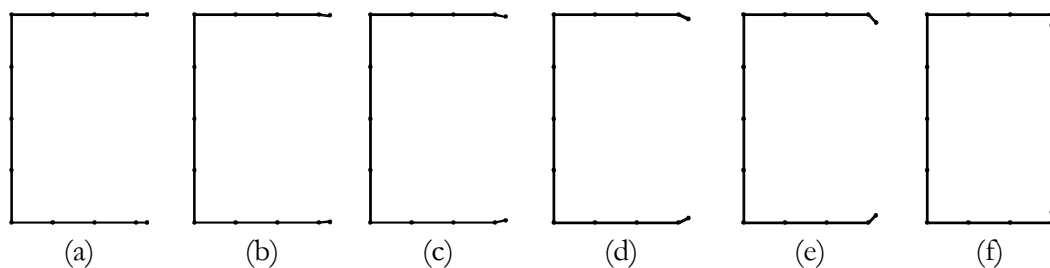


Figure 4.5 Sections en C avec et sans raidisseur de bord (Exemple 2) (Adany, 2004).

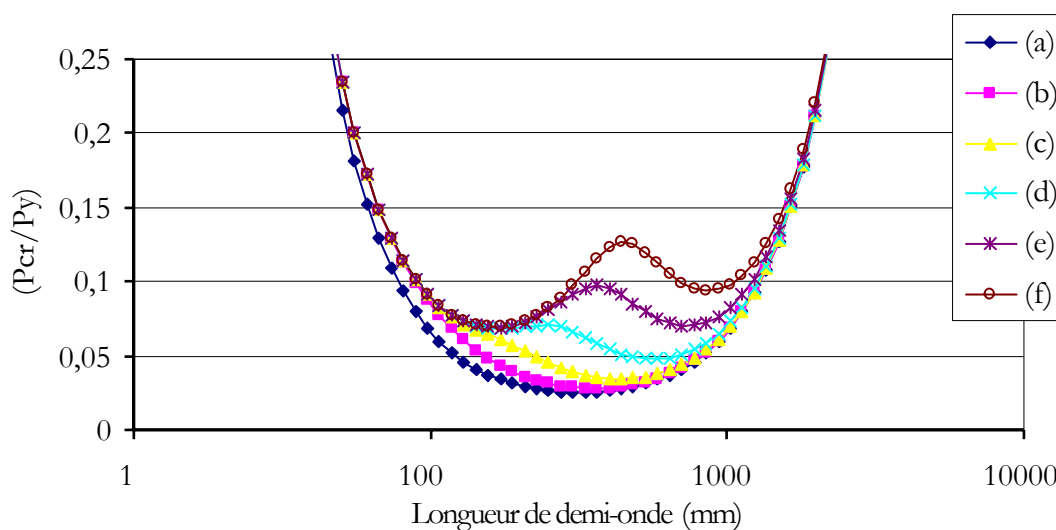


Figure 4.6 Charges critiques pour l'exemple 2 (Adany, 2004).

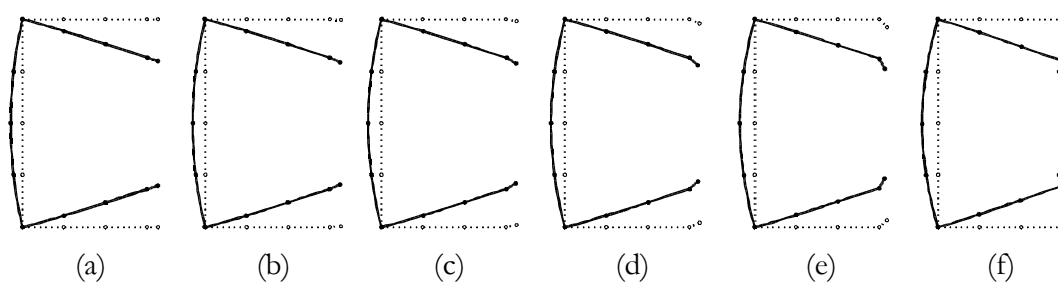


Figure 4.7 Formes d'instabilité de l'exemple 2 correspondant à la charge critique minimum (distorsionnelle) (Adany, 2004)

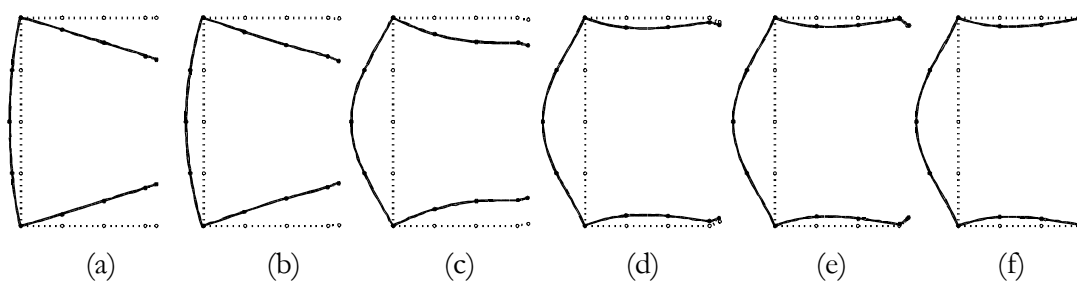


Figure 4.8 Formes d'instabilité de l'exemple 2 à une longueur de demi-onde de 170 mm. (Adany, 2004)

La figure 4.7 donne les formes d'instabilité pour les modes présentant un déplacement du raidisseur d'extrémité, aux longueurs de demi-onde correspondant aux forces minimales locales. Pour les sections avec de faibles raidisseurs, ce minimum est le seul, alors que pour des sections avec des raidisseurs plus forts ce minimum est en seconde position, il s'agit du mode distorsionnel. La longueur de demi-onde critique et la charge critique ont tendance à croître lorsque le raidisseur devient plus rigide. La longueur de demi-onde est passée de 300 mm à 850 mm, alors que la force critique adimensionnelle

est passée de 0.025 à 0.094. Cependant, toutes les formes d'instabilité sont restées très semblables.

La figure 4.8 présente les formes d'instabilité à une longueur de demi-onde de 170 mm qui, en étant inférieure à la hauteur de l'âme, permet d'avancer qu'il s'agit d'une instabilité locale. D'ailleurs, pour la section avec un « vrai » raidisseur de bord, c'est la longueur où le premier minimum des courbes d'instabilité se produit. La figure montre un changement progressif de l'instabilité de la semelle de la section (a) à l'instabilité de l'âme de la section (f). Ici encore, les forces critiques correspondantes augmentent lorsque le raidisseur devient plus fort.

Toutes les figures ci-dessus indiquent un changement progressif et continu des modes d'instabilité, particulièrement ceux présentant un déplacement du raidisseur. De ce point de vue, l'on pourrait conclure que tous les modes avec une translation des lignes d'extrémité devraient être classifiés en tant que modes distorsionnels, même si le raidisseur n'existe pratiquement pas. Bien que cette approche soit théoriquement claire, elle a quelques conséquences qui sont en contradiction avec la pratique courante. À savoir :

- L'instabilité des éléments plans non raidis, tels que les semelles d'une section en U, est traditionnellement considérée en tant qu'instabilité locale, tradition qui est reflétée dans beaucoup de codes de conception.
- L'instabilité de l'âme ou de la semelle d'une section en C implique toujours la translation des lignes de bord alors que ces modes sont habituellement classifiés en tant que modes locaux. Ainsi, si on retenait cette définition de l'instabilité distorsionnelle cela impliquerait que l'instabilité locale pure ne peut pas exister dans les sections ouvertes, ce qui est, encore une fois, en contradiction avec la classification traditionnelle des modes d'instabilité.

Une autre possibilité consiste à garder la classification traditionnelle pour les sections sans raidisseurs de bord. Dans ce cas-ci, on doit, cependant, faire face au même problème de discontinuité dans la classification.

4.2.2.3 Exemple 3 : Existe-t-il un mode distorsionnel pour les sections en I, en T ou en L ?

Dans la littérature, beaucoup d'auteurs évoquent des modes d'instabilité distorsionnelle des sections en I et en T (divers articles australiens et allemands). Dans son rapport, Adany (2004) avance que ceci n'est pas possible en s'appuyant sur le fait que la GBT, qui reste jusqu'à présent la seule méthode capable d'isoler le mode distorsionnel, n'en prévoit pas l'existence pour ce type de sections, du moins au sens de la définition qu'elle en donne. Il conclut alors que parler d'instabilité distorsionnelle des sections en I, en T ou en L revient à tomber dans le « piège » de classer comme « distorsionnel » tout mode qui n'est pas clairement global ou local. A ce sujet, il nous semble opportun de rappeler que cette classification rejetée par Adany correspond justement à la définition, plus ancienne, de Hancock.

Un exemple caractéristique est présenté dans la figure 4.9, où une section en I doublement symétrique avec des semelles sensiblement plus épaisses que l'âme est montrée. C'est, incontestablement, la manière habituelle de créer les sections en acier soudées. Si l'élément est soumis à la flexion uniforme, la forme d'instabilité correspondant

à une longueur de demi-onde intermédiaire est celle présentée dans la figure 4.9 (b). Evidemment, il ne s'agit ni d'un mode où la section entière se déplace en corps rigide ni d'une déformation de type flexion des plaques qui ne devrait pas induire la translation des lignes d'intersections des parois planes. En d'autres termes, l'instabilité est apparemment ni globale pure (en l'occurrence de type latéral torsionnel) ni locale pure (voilement de l'âme). Ainsi, on pourrait raisonnablement classer ce genre de mode comme distorsionnel, ce qui est rejeté par Adany du moment que ce mode ne peut pas être distorsionnel au sens de la GBT. Il avance alors qu'il s'agit probablement d'un « mode couplé global – local », ce qui, à notre sens, est très probablement incorrect. Nous pensons qu'il s'agit soit d'un voilement de l'âme ayant des encastremets déplaçables comme conditions aux limites transversales (ayant comme largeur critique la moitié de sa largeur réelle), soit d'un flambement de la semelle comprimée s'appuyant élastiquement sur l'âme.

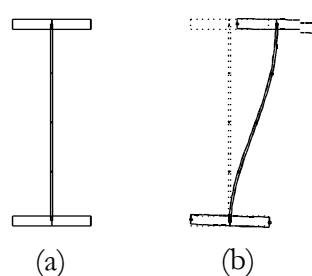


Figure 4.9 Exemple 3 : Instabilité distorsionnelle d'une section en I ? (Adany, 2004)

4.3 Problèmes dans le calcul des forces/contraintes critiques

4.3.1 Méthode de calcul de la charge critique d'un mode donné

Puisque les méthodes analytiques pour l'analyse de la stabilité élastique ne sont pas assez générales, et du moment qu'il existe un certain nombre de méthodes numériques qui peuvent manipuler des problèmes plus généraux, il est courant de faire des études numériques de la stabilité (MEF, MBF, MSBF,...).

Cependant, les méthodes numériques généralement utilisées sont incapables de classifier le mode ou les modes d'instabilité calculés. De plus, les résultats d'une analyse typique par la MEF ou par la MBF sont les valeurs des plus petits multiplicateurs de charge critiques (les valeurs propres) et les formes déformées associées (les vecteurs propres). Selon la densité du maillage utilisé et selon le nombre de valeurs et vecteurs propres calculés, ces résultats peuvent signifier une quantité de données énorme qui devraient être évaluées d'une façon ou d'une autre par l'utilisateur afin d'en déduire les forces/contraintes critiques associées aux différents modes purs d'instabilité : local, distorsionnel et global.

Avant la cFSM (Adany et Schafer, 2006a et 2006b), une version modifiée de la MBF qu'on présentera dans la suite de ce chapitre, on ne connaissait aucune méthode numérique qui permettait de sélectionner avec précision les modes globaux, locaux et distorsionnels parmi les résultats d'un logiciel général de MEF ou de MBF. On faisait usage d'un certain nombre de règles dont la présentation la plus complète est donnée dans le document des commentaires de la DSM (AISI, 2004b). Nous en donnons un bref résumé ci-dessous car elles restent d'actualité. C'est, à ce jour, le seul moyen pour identifier les modes purs parmi les résultats d'une analyse par la MEF qui est, évidemment, d'un usage plus général que la cFSM :

- Les forces critiques et les formes d'instabilité devraient être calculées et tracées en fonction de la longueur de demi-onde. Cette façon de faire permet de simplifier de manière significative la classification des modes d'instabilité en réduisant la quantité de résultats à analyser. En effet, la multiplicité des valeurs propres pour des instabilités développant différents nombres de demi-ondes est ainsi évitée. Dans la MBF, ceci se fait aisément et c'est, d'ailleurs, pour cette raison qu'elle est devenu populaire dans le domaine de la stabilité.
- En ce qui concerne la forme d'instabilité, les définitions rappelées dans la section 4.2.1 sont fondamentalement acceptées.
- Dans beaucoup de cas pratiques, la courbe des forces critiques possède deux minima locaux à des longueurs de demi-ondes relativement petites et, après une certaine longueur, elle tend asymptotiquement vers zéro. Une courbe typique est présentée dans la figure 4.10. C'est celle de la section en C représentée dans la figure 4.1 (a). Les formes d'instabilité aux deux minima sont présentées dans la figure 4.11. Il est évident que la forme correspondant à la plus petite longueur de demi-onde est clairement un mode local, alors que la forme se rapportant au deuxième minimum est un mode distorsionnel typique. Ainsi, il est raisonnable de classer ces deux modes comme local et distorsionnel, respectivement, et il est raisonnable de retenir les forces critiques correspondantes comme inputs pour calculer la capacité portante de l'élément.
- Si la courbe des forces critiques possède plus, ou moins, de deux minima locaux, ou si elle en possède deux mais les formes déformées correspondantes ne sont pas clairement locale et distorsionnelle, alors il n'est pas facile d'en tirer les deux forces critiques requises dans la procédure de dimensionnement. Dans ces cas les règles suivantes peuvent être appliquées :
 - Le mode local devrait être associé à une longueur de demi-onde inférieure à la plus grande largeur des parois planes formant la section.
 - Le mode distorsionnel devrait être associé à une longueur de demi-onde (beaucoup) plus grande que les largeurs des parois planes formant la section.
 - La répétition de l'analyse d'instabilité avec une géométrie de la section légèrement modifiée peut aider à identifier les longueurs où se produisent les modes local et distorsionnel.
 - L'application d'appuis appropriés peut éliminer certains modes gênants et permettre l'identification de la longueur caractéristique et/ou de la force critique pour certains modes.
 - L'analyse visuelle de la forme déformée de la section transversale contribue également à l'identification des modes d'instabilité.

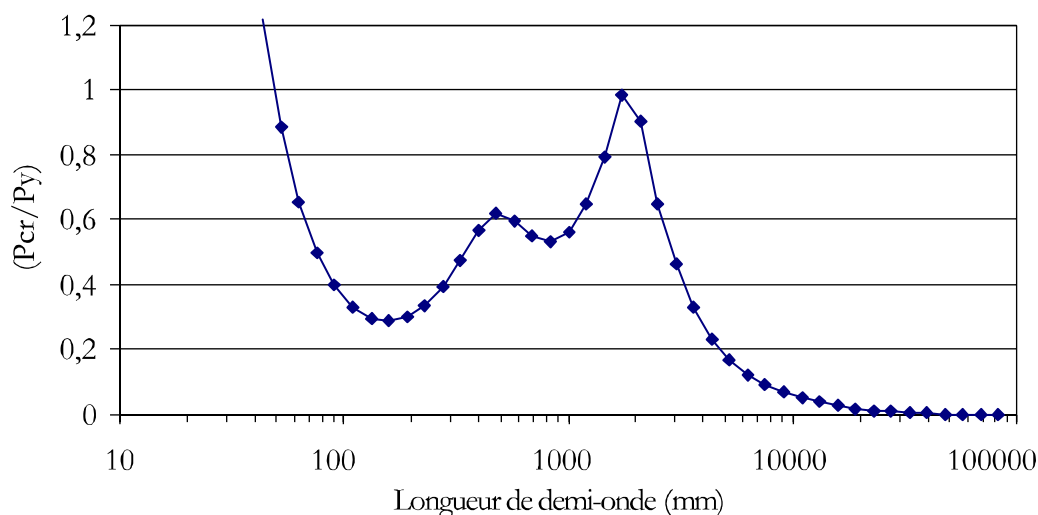


Figure 4.10 Une courbe des charges critiques avec deux minima locaux (exemple 4) (Adany, 2004).

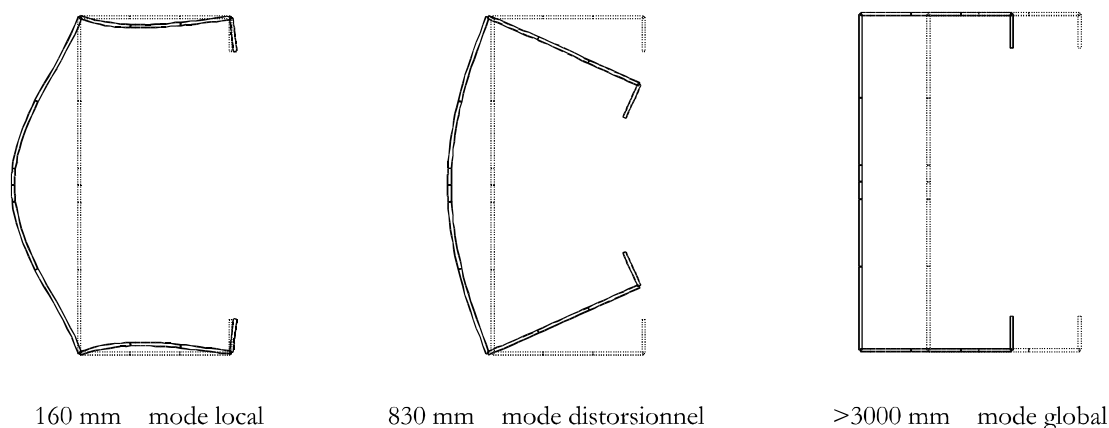


Figure 4.11 Formes déformées caractéristiques pour l'exemple 4 (Adany, 2004).

4.3.2 Problèmes

Dans cette section une liste d'exemples, où la détermination des forces critiques n'est pas évidente, est présentée.

4.3.2.1 Exemple 5

Dans cet exemple on essaye de calculer les forces critiques caractéristiques d'une simple section en C ! La hauteur de la section est de 200 mm, les largeurs des semelles sont de 50 mm, les raidisseurs de bord sont perpendiculaires aux semelles avec 20 mm de

longueur, alors que l'épaisseur est de 1.5 mm. Il faut noter que toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes et qu'elles sont loin d'être extrêmes ; elles sont plutôt typiques.

Les forces critiques sont calculées par un logiciel de MBF, et sont montrées dans la figure 4.12 en fonction de la longueur d'instabilité. Parallèlement, la figure 4.13 présente certaines des formes d'instabilité, pour neuf longueurs différentes de demi-ondes. Ces longueurs sont choisies afin de couvrir uniformément tout le domaine de longueur d'intérêt pratique (plus exactement : uniformément dans le sens logarithmique).

Il est clair de la figure 4.12, que la courbe possède un minimum à une longueur d'environ 150 mm. Des formes déformées (figure 4.13), il est également clair que ce minimum appartient à un mode local d'instabilité, puisque les formes d'instabilité correspondant à des longueurs inférieures à 150 mm ne montrent pas de translation des lignes d'intersection.

Cependant, la courbe d'instabilité ne possède aucun autre minimum bien qu'il soit plus ou moins évident qu'il y a un certain changement du comportement autour 500 mm de longueur de demi-onde. Il n'est alors pas du tout évident quelle longueur et quelle force critique devraient être choisies pour caractériser le mode distorsionnel. En observant les formes déformées, on pourrait également dire qu'il y a un mode distorsionnel quelque part autour de 500 millimètres, cependant, il n'est pas évident que le mode distorsionnel pur existe. Le dilemme est le suivant : les modes qui ne font pas intervenir clairement le mode global semblent être des modes couplés local - distorsionnel (voir les déformées à 250 mm et à 440 mm), alors que les modes avec une forme déformée rappelant celle des modes distorsionnels montrent une certaine translation de type corps rigide (voir 772 mm et 1357 mm). Ainsi, l'existence du mode distorsionnel pur avec sa force critique caractéristique est incertaine.

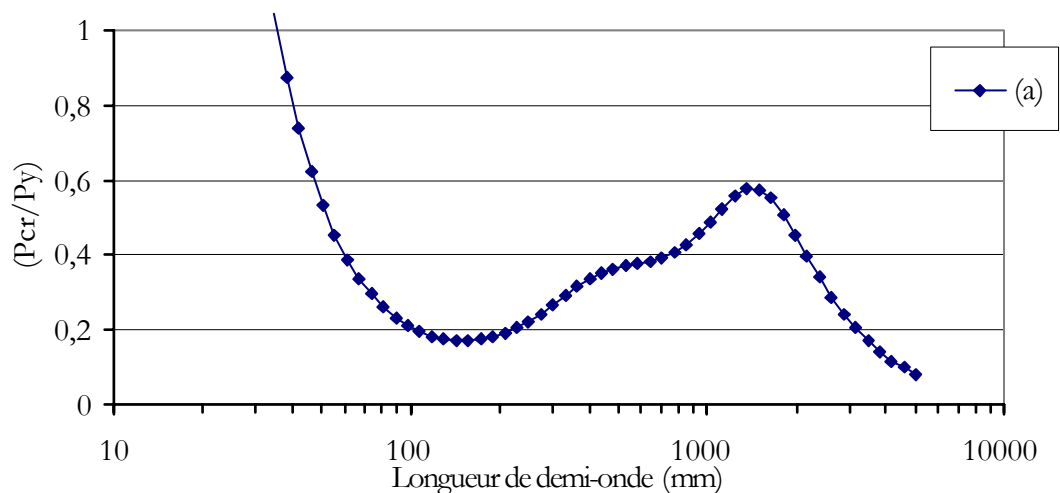


Figure 4.12 Forces critiques de l'exemple 5 (Adany, 2004).

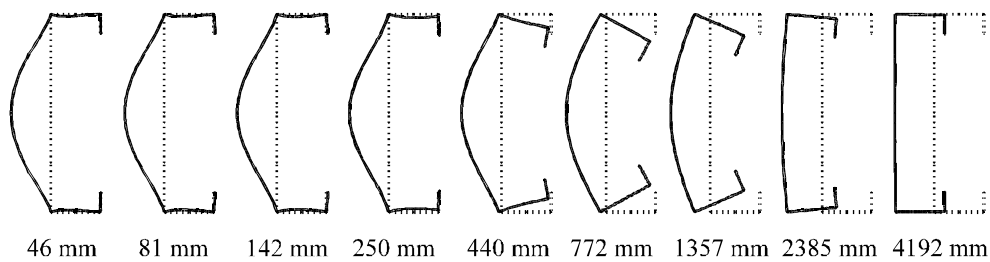


Figure 4.13 Sections déformées de l'exemple 5 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).

4.3.2.2 Exemple 6

Dans cet exemple Adany analyse une section en C avec un petit raidisseur d'âme ! La section est fondamentalement identique à celle de l'exemple précédent. La hauteur du raidisseur triangulaire de l'âme est de 20 mm, sa largeur, mesurée perpendiculairement à l'âme, est de 4 mm.

La variation de la force critique en fonction de la longueur d'instabilité est donnée par la courbe de la figure 4.14. Le schéma 4.15 présente certaines des formes déformées de la section transversale pour les mêmes neuf longueurs de l'exemple précédent.

Pour cet exemple aussi, la courbe d'instabilité ne possède qu'un seul minimum local, autour 250 mm. Du moment que cette longueur est plus grande que les largeurs des parois planes de la section, ce minimum, bien qu'il soit le premier, n'appartient probablement pas au mode local mais plutôt au mode distorsionnel. On observe maintenant les formes d'instabilité !

Si on considère les lignes d'intersection du raidisseur avec l'âme comme efficaces, ce qui est une hypothèse logique pour les dimensions données, il est clair de la figure 4.15 qu'aucun mode local pur n'existe pour cette section. Sur la base des formes d'instabilité, on pourrait dire que le mode à 250 mm, qui est le minimum de courbe, est un mode couplé. On peut y voir la contribution de deux modes distorsionnels, l'instabilité du raidisseur de l'âme et l'instabilité du raidisseur de la semelle, avec une participation probable du voilement des parois planes de l'âme. Au-dessous de cette longueur il semble y avoir une interaction entre le voilement des parois de l'âme et l'instabilité du raidisseur de l'âme, un mode distorsionnel. Pour des longueurs d'onde plus grandes, le mode local disparaît et une translation globale se produit progressivement. Ainsi, il n'est pas facile de classifier le mode au minimum de la courbe (250 mm), et, de façon plus générale, on peut conclure que l'examen visuel des formes d'instabilité ne permet pas de classifier avec certitude les modes se produisant à des longueurs d'ondes courtes à intermédiaires. Pour des longueurs supérieures à 4000 mm approximativement, il est évident que l'instabilité est globale (flambement).

Cette conclusion d'Adany met très bien en valeur l'intérêt, la pertinence et l'actualité de la procédure de classification des modes locaux que nous avons proposée au paragraphe 2.5. Cette technique sert à rendre facile la classification des modes se produisant à des longueurs d'ondes courtes. Le problème des longueurs d'ondes

intermédiaires, correspondant aux modes distorsionnels, n'est cependant pas résolu par cette procédure.

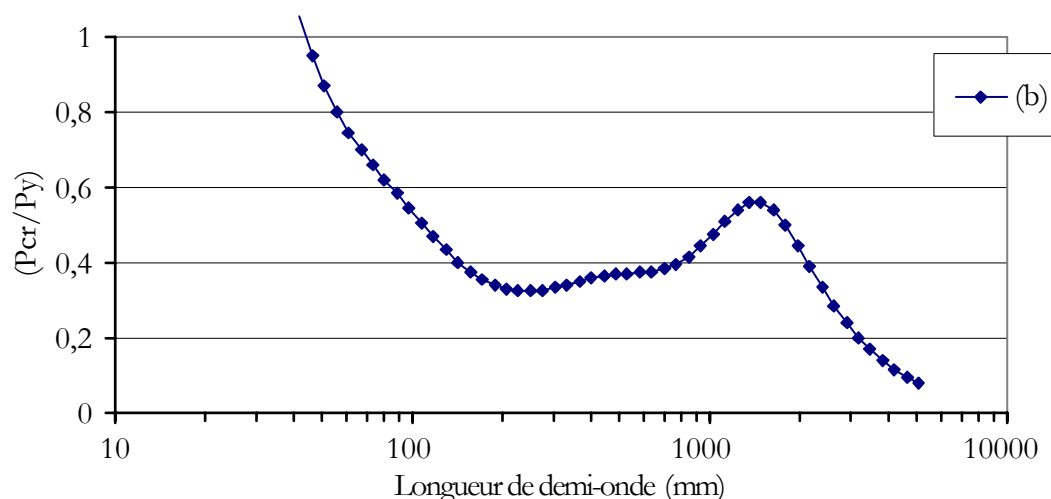


Figure 4.14 Forces critiques de l'exemple 6 (Adany, 2004).

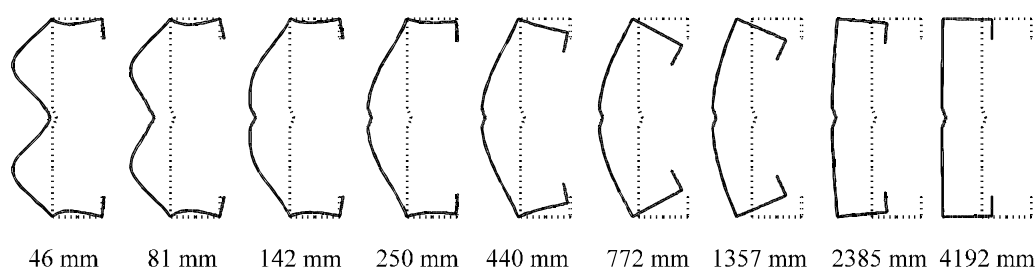


Figure 4.15 Sections déformées de l'exemple 6 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).

4.3.2.3 Exemple 7

L'exemple 7 est presque identique à l'exemple 6. La seule différence est que la dimension du raidisseur de l'âme perpendiculairement à celle-ci est maintenant légèrement plus grande, à savoir : 5 mm. Les forces critiques sont montrées dans la figure 4.16 en fonction de la longueur d'instabilité, alors que le schéma 4.17 présente les formes d'instabilité pour les neuf longueurs déjà mentionnées ci-dessus.

Bien que la section transversale et la courbe d'instabilité correspondante diffèrent très peu de celles de l'exemple précédent, il existe néanmoins une différence importante. Dans ce cas-ci la courbe a deux minima locaux : un à environ 300 mm, et l'autre à approximativement 600 mm. Puisque ces deux longueurs sont sensiblement plus grandes que la plus grande largeur des parois planes, les deux minima devraient correspondre à un mode distorsionnel. Cette affirmation est étayée par les formes d'instabilité. Cependant, il

n'est pas facile, encore une fois, de décider si les modes liés à ces points minimum sont des modes purs ou pas.

Une autre observation intéressante est que même si la courbe des forces critiques ne présente pas de minimum local à de plus petites longueurs, les formes déformées suggèrent l'existence de l'instabilité locale pure. Pour cette section, la force critique de voilement doit probablement être assez élevée pour ne pas avoir d'importance pratique, cependant, on pourrait facilement rater l'instabilité locale dans une situation semblable.

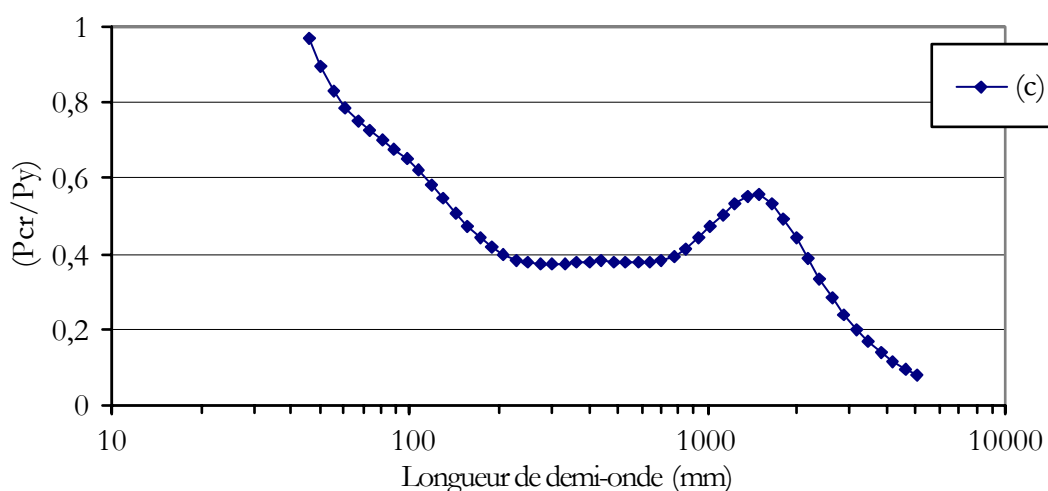


Figure 4.16 Forces critiques de l'exemple 7 (Adany, 2004).

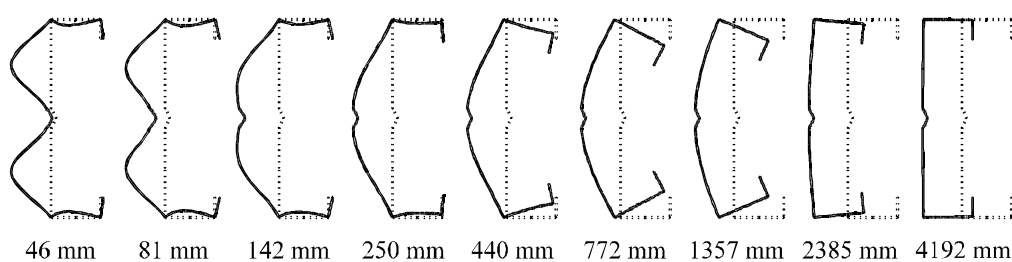


Figure 4.17 Sections déformées de l'exemple 7 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).

4.3.2.4 Exemple 8

L'exemple 8 diffère légèrement des exemples 6 et 7. La dimension de raidisseur de l'âme a été augmentée jusqu'à 6 mm. Les forces critiques sont montrées dans la figure 4.18, alors que le schéma 4.19 présente les formes déformées pour les mêmes neuf longueurs d'instabilité.

Le comportement est principalement identique à celui des exemples 6 et 7. Seulement ici, un seul minimum existe autour 640 mm. En observant les formes d'instabilité, il est clair que le mode associé est une interaction du mode distorsionnel (instabilité du raidisseur de la semelle) avec le mode global (flexionnel). L'existence du mode distorsionnel pur est encore une fois incertaine. D'autre part, si le mode local pur semble exister, il n'existe, cependant, aucun point minimum qui lui soit associé.

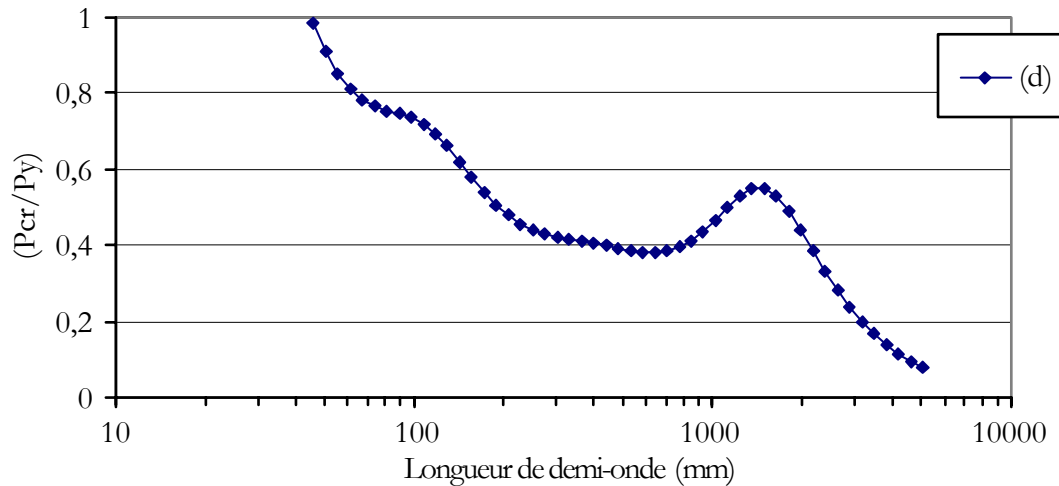


Figure 4.18 Forces critiques de l'exemple 8 (Adany, 2004).

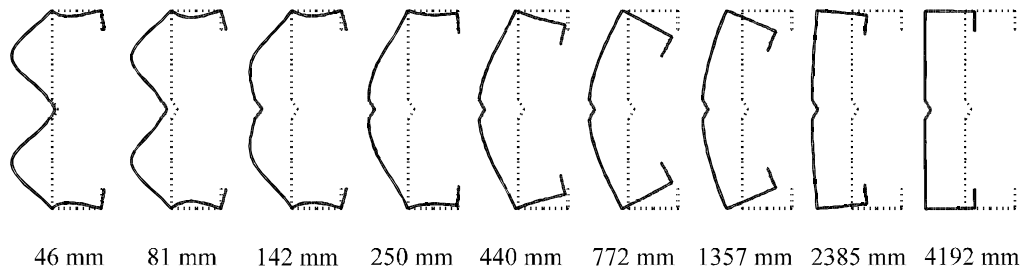


Figure 4.19 Sections déformées de l'exemple 8 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).

4.3.2.5 Exemple 9

Encore une fois, l'exemple 9 est très peu différent des exemples 6, 7 et 8, ses principales dimensions étant identiques. La dimension du raidisseur de l'âme est maintenant de 4.5 mm, alors que l'épaisseur est de 0.75 mm.

L'évolution des forces critiques en fonction de la longueur de demi-onde est donnée dans la figure 4.20, alors que le schéma 4.21 présente les formes d'instabilité pour les mêmes neuf longueurs d'instabilité.

Le comportement est principalement identique à celui des exemples 6, 7 et 8. Toutefois, la courbe possède trois minima locaux. Le premier correspond à un mode local, alors que le deuxième et le troisième sont principalement distorsionnels avec de l'interaction avec les modes locaux et globaux, respectivement. Il doit être noté que pour des longueurs très courtes, les instabilités symétrique et anti-symétrique de l'âme peuvent se produire pratiquement à la même force critique. A titre d'exemple, la figure 4.21 présente le mode anti-symétrique pour la longueur d'onde la plus courte.

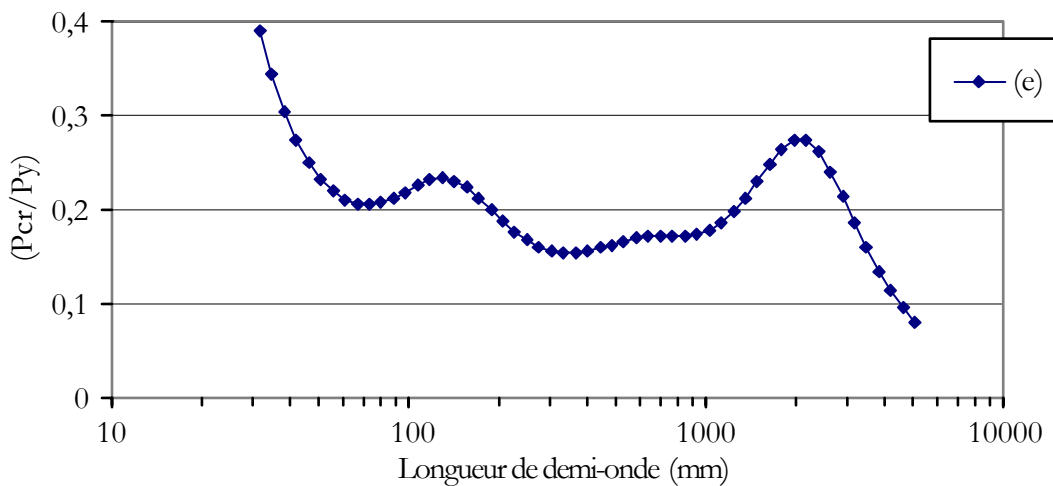


Figure 4.20 Forces critiques de l'exemple 9 (Adany, 2004).

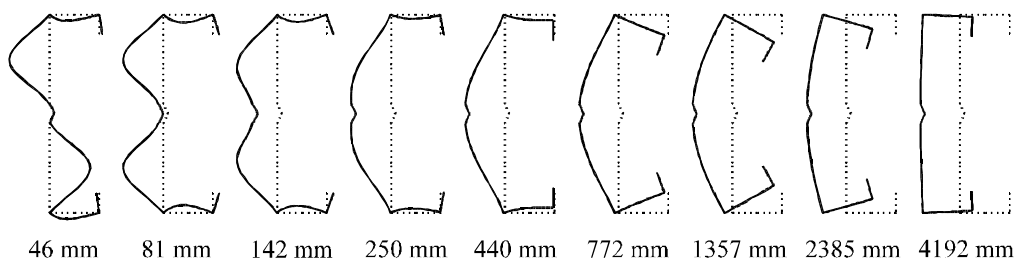


Figure 4.21 Sections déformées de l'exemple 9 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).

4.3.2.6 Conclusions à partir des exemples

En général, les exemples ci-dessus démontrent que la détermination des forces critiques locales et distorsionnelles n'est pas évidente même pour les sections simples avec des dimensions typiques.

- Le point(s) minimum de la courbe des forces critiques n'appartient pas toujours à un mode pur.

- Il y a des cas où un seul minimum local existe.
- Il y a des cas où il existe plus d'un minimum distorsionnel.
- Le premier point minimum (avec la plus petite longueur) n'appartient pas nécessairement à un mode local.
- Bien que l'analyse visuelle des formes déformées aide à la classification des modes d'instabilité, elle ne fournit pas en méthode précise et surtout infaillible.

4.4 Objectifs recherchés dans une méthode de classification

Sur la base des problèmes mentionnés dans les sections précédentes, Adany et Schafer ont identifié un certain nombre d'objectifs.

La plupart des besoins sont associées à l'exigence de calculer les forces critiques pour des modes locaux, distorsionnels et globaux purs. Puisqu'il est relativement facile de calculer les forces critiques pour des modes globaux pour la plupart des cas pratiques, le problème réel est l'identification des modes locaux et distorsionnels et le calcul des forces/contraintes critiques correspondantes.

Il faut noter que la question n'est pas purement théorique. Les méthodes de calcul de pratiquement toutes les normes modernes de conception des éléments en acier formés à froid exigent directement la valeur de la force/contrainte critique pour l'instabilité locale et distorsionnelle. D'autre part, il est facile de démontrer que le processus de calcul de la résistance de conception dépend fortement du calcul des efforts critiques appropriés.

Ainsi, les objectifs suivants devraient être atteints.

1. Des définitions précises et non ambiguës pour les modes d'instabilité globaux, distorsionnels et locaux devraient être données. D'autre part,
 - la signification et l'importance des lignes des intersections des parois planes devraient être clarifiées,
 - le cas des éléments plans non raidis devrait être clarifié,
 - le nombre de modes globaux et distorsionnels devrait être défini.
2. Sur la base des définitions des modes purs, une méthode devrait être développée pour la classification des modes d'instabilité résultant d'un calcul par l'une ou l'autre des méthodes numériques. La méthode de classification devrait être en mesure :
 - d'identifier les modes purs,
 - de définir la contribution de chacun des modes purs en cas d'interaction.
3. Une méthode de calcul devrait être développée qui combine les avantages des méthodes numériques disponibles, mais ignore leurs inconvénients dans la plus grande mesure possible. Dans un cas idéal, la méthode devrait :
 - pouvoir calculer des modes purs séparément et en interaction,
 - pouvoir calculer des éléments de structures soumis à des contraintes irrégulières,

- pouvoir calculer des éléments avec des trous,
 - pouvoir calculer des éléments avec des sections transversales variables,
 - pouvoir calculer les modes d'instabilité qui ne peuvent pas être caractérisés par une seule longueur de demi-onde (ondulations non harmoniques).
4. Puisqu'une méthode qui satisfait les critères énumérés ci-dessus doit certainement être basée sur un certain genre de technique de discrétisation, un logiciel est également exigé. Ce programme devrait :
- être basé sur la méthode de calcul telle que décrite,
 - être facile à utiliser, comme les logiciels disponibles basés sur la MBF,
 - être basé de préférence sur, ou au moins apparenté à, la MEF, puisque c'est la méthode numérique la mieux connue et la plus répandue.
5. Il faudrait également pouvoir utiliser les définitions des divers modes d'instabilité dans le cas d'éléments non réguliers, comme
- les éléments avec des trous,
 - les éléments avec des sections transversales variables.
6. Les effets des hypothèses de base de la GBT (on suppose notamment que certaines contraintes membranaires sont nulles) devraient être clarifiés :
- par la détermination des cas où elles peuvent être employées sans risque,
 - par l'évaluation de l'erreur éventuellement induite.

Conformément aux besoins énumérés ci-dessus, les objectifs du travail sont définis comme suit.

1) Construction des modes purs d'instabilité :

- On propose une méthode par laquelle les modes purs d'instabilité peuvent être calculés dans une approche de type MBF ou MEF.
- L'introduction de la méthode proposée dans la MBF sera présentée en détail, y compris la dérivation des formules nécessaires et la discussion de leur applicabilité.
- Les formules dérivées seront mises en application dans le logiciel CUFSM.

2) Décomposition modale :

- On proposera une méthode pour calculer la contribution des différents modes dans un mode général d'instabilité.
- La méthode modale de décomposition sera appliquée dans le logiciel CUFSM.

3) sur la base des méthodes ci-dessus et du logiciel mis à jour, la question de la définition de mode d'instabilité sera discutée.

4.5 Les bases de la cFSM

Les bases de la « méthode des bandes finies contrainte » ou cFSM ont été présentées par Adany et Schafer dans deux articles récents (2006a et 2006b) pour le cas des éléments de structures (profils) ayant des sections transversales ouvertes à connexions simples. On entend par sections à connexions simples celles dont les lignes d'intersection sont communes à, au plus, deux parois planes, comme les sections en U, C, Σ ... Les sections en forme de T ou de X par exemple, où certaines lignes d'intersection sont communes à plus de 2 parois planes, sont appelées sections à connexions multiples.

Dans ce qui suit, nous allons commencer par rappeler cette présentation de la cFSM. Nous donnerons les règles de la mécanique, très intéressantes, retenues par Adany et Schafer pour définir les modes purs d'instabilité. Nous présenterons ensuite la stratégie de la cFSM et la détermination des matrices de contrainte, qui sont la clé de la méthode. Nous donnerons après quelques résultats de la cFSM calculés au moyen de la nouvelle version du CUFSM, le logiciel en open source de Schafer, rendu public en octobre 2006 (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>).

Nous rappellerons en détails cette présentation car, dans la suite de cette thèse, nous allons développer une approche différente. Nous simplifierons les définitions d'Adany et Schafer et nous procéderons à la détermination des matrices de contrainte d'une manière beaucoup plus simple et surtout, beaucoup moins restrictive. La présentation qui suit nous semble donc indispensable à la mise en valeur de notre contribution à la recherche de techniques de classification des modes propres calculés numériquement.

4.5.1 Notations

Deux systèmes de coordonnées indirects sont employés dans la présentation qui suit. Il s'agit des repères global et local, tels que montrés dans la figure 4.22. Le système de coordonnées global est noté X-Y-Z, avec l'axe des Y parallèle à l'axe longitudinal de l'élément de structure (colonne ou poutre) à modéliser. Le système local est noté x-y-z. Le système local est toujours associé à une paroi plane (bande) de l'élément de structure de façon à ce que l'axe des x soit parallèle à la bande, et perpendiculaire à l'axe longitudinal de l'élément ; l'axe y est parallèle à l'axe Y, et l'axe z est perpendiculaire au plan x-y. Trois translations (U-V-W) et une rotation (Θ) sont considérés en tant que déplacements globaux. Des degrés de liberté locaux sont associés à la déformation d'une bande : trois translations (u-v-w) et une rotation (θ). Les déplacements longitudinaux (V) sont également désignés sous le nom de déplacements de gauchissement, alors que les autres composants de déplacements (U,W, Θ) sont appelés déplacements transversaux.

La numérotation d'une section transversale ouverte à connexions simples peut commodément être traitée par le système montré dans la figure 4.23. Le nombre total de noeuds (ou de lignes nodales) est n, et donc, le nombre total d'éléments plans (ou bandes) est (n-1). Il faut noter que dans la figure 4.23, les numéros des noeuds et ceux des bandes sont représentés à l'intérieur de cercles et de carrés, respectivement. D'autre part, il est important d'observer qu'un noeud interne est commun à deux parois planes, alors que pour les noeuds externes (le premier et le dernier) sont connectés à une seule bande.

Ainsi, pour modéliser l'élément de structure, on doit définir : les coordonnées globales (X et Z) de tous les noeuds (n), les épaisseurs (t) de toutes les parois planes (n-1),

la longueur (a) de l'élément, et les propriétés matérielles. La largeur et l'angle (b et α , respectivement) des bandes, qui peuvent être facilement calculés à partir des coordonnées nodales, seront également utilisés, α étant l'angle avec l'axe des abscisses positives. Dans les développements suivants, les différentes lignes nodales (noeuds) seront référencées par des indices, par exemple, la coordonnée X de la première ligne nodale est X_1 , alors que les bandes sont indiquées par des exposants entre parenthèses, par exemple, la largeur de la dernière bande est $b^{(n-1)}$.

De plus et concernant les caractéristiques des profils à modéliser, des hypothèses simplificatrices sont émises :

- la section transversale est ouverte et à connexions simples,
- les noeuds à l'intérieur d'une paroi plane ne sont pas permis,
- l'épaisseur est constante,
- le matériau est uniforme, isotrope,
- la numérotation des noeuds doit suivre un ordre strict.

Ces simplifications n'affectent pas l'essence de l'approche proposée. Elles sont appliquées ici uniquement pour simplifier les développements et aider le lecteur à mieux suivre et comprendre le procédé proposé qui, malgré ces simplifications, reste assez compliqué, comme on le verra ci-dessous. La généralisation de la solution présentée a été accomplie et mise en application dans la dernière version du CUFSM.

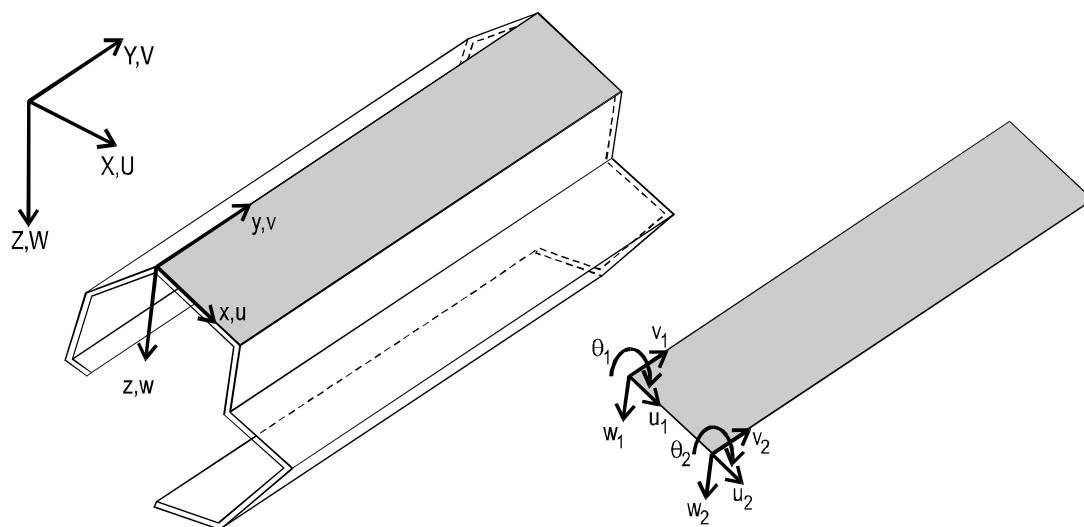


Figure 4.22 Système de coordonnées, Déplacements (Adany et Schafer, 2006a).

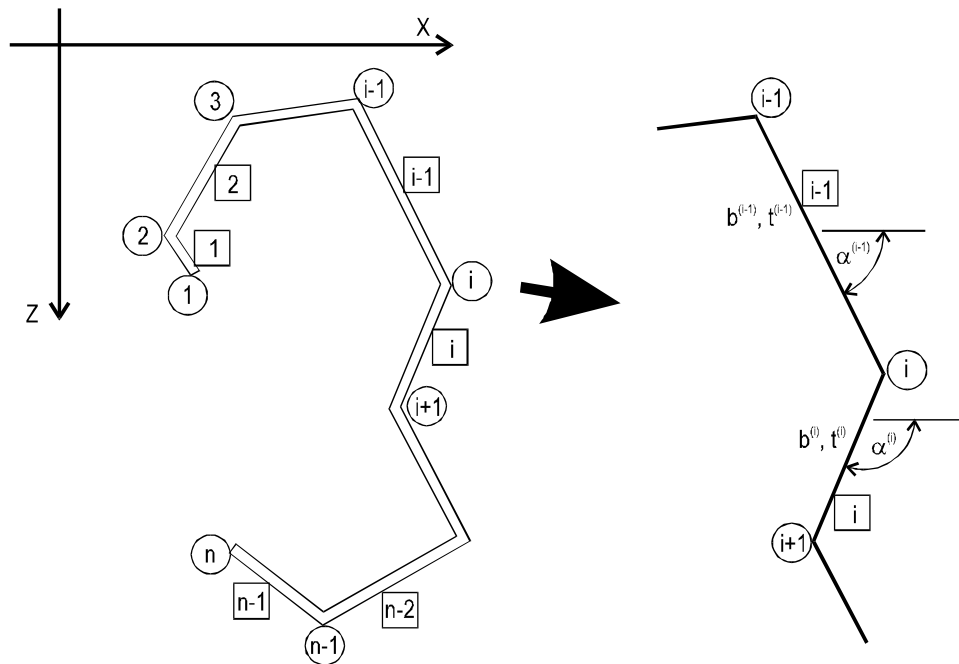


Figure 4.23 Description d'une section ouverte à connexions simples (Adany et Schafer, 2006a).

Il nous semble cependant très important de signaler que, d'une part, les sections fermées ne sont toujours pas prises en compte et, d'autre part, la numérotation stricte n'a pas été levée. Au contraire, les nœuds doivent en plus être classés en plusieurs types pour permettre d'étudier le cas des sections à connexions multiples et celui des parois planes subdivisées en plusieurs bandes. L'utilisateur du logiciel ne s'en rend pas réellement compte mais la renumérotation des nœuds et leur classification constituent la première des tâches effectuées par le programme. Ceci a nécessité un effort considérable de programmation qui, conjugué à la complexité de l'approche proposée, a donné lieu à un programme difficile à suivre, à comprendre et très probablement à entretenir. Nous avons d'ailleurs relevé dans la nouvelle version du CUFISM des bugs dans des options qui fonctionnaient correctement dans la version précédente. Nous citons, à titre d'exemple, que la modélisation des relations de type diaphragme, très utiles pour contraindre le profil à flamber dans le mode global, ne fonctionne plus correctement.

4.5.2 Les différents types de nœuds

Afin de pouvoir manipuler le cas général des sections transversales à connexions multiples et possédant des parois planes subdivisées, les nœuds sont classés d'une façon particulière dans la démarche d'Adany et Schafer (2006a). Il y a d'abord les nœuds secondaires (ns) qui sont ceux utilisés pour subdiviser les parois planes. Un nœud secondaire est, par conséquent, relié uniquement à deux bandes qui sont coplanaires.

Tous les autres nœuds sont qualifiés de nœuds principaux (nm) mais doivent, cependant, être encore divisés. Il y a les nœuds principaux qui ne sont reliés qu'à une seule bande. A titre d'exemple, on peut citer le premier et le dernier nœud d'une section ouverte à connexions simples. Ils sont qualifiés de nœuds principaux externes (nme) ou plus

simplement de nœuds d'extrémité. Tous les autres nœuds principaux sont appelés nœuds principaux internes (nmi) et il s'agit tout simplement des nœuds qui sont au sommet d'un ou de plusieurs coins.

Le traitement des sections transversales à connexions multiples nécessite de diviser les nœuds principaux en deux classes. En effet et à une certaine étape du calcul, on arrive, comme on le montrera plus loin dans ce chapitre, à un système d'équations linéaire surdéterminé. Les nœuds dont les déplacements sont retenus pour résoudre ce système en première phase sont qualifiés par Adany et Schafer de nœuds principaux déterminants (nmd). On se réfère aux autres en tant que nœuds principaux non déterminants (nmu). S'agissant de la solution d'un simple système d'équations surdéterminé, le choix des nœuds déterminants se fait par l'utilisateur ou par le programme et n'est, par suite, pas unique. Nous insistons sur ces détails car dans la procédure que nous allons proposer, une grande partie des restrictions de la méthode de Adany et Schafer seront levées.

4.5.3 Définitions « mécaniques » des modes d'instabilité

Comme souligné dans les premiers paragraphes de ce chapitre, il persiste une grande incertitude dans la caractérisation des modes purs d'instabilité des profils à parois minces. Les définitions existantes sont plutôt phénoménologiques, et fonctionnent relativement bien pour beaucoup de sections pratiques telles que les formes en C et en Z, mais ne peuvent pas être correctement appliquées à des sections plus compliquées et/ou moins conventionnelles.

Puisque la GBT est la seule méthode connue capable de produire et d'isoler des solutions pour tous les modes d'instabilité - globaux, distorsionnels et locaux - des éléments à parois minces, et puisque les modes de la GBT sont généralement conformes à la pratique courante, Adany et Schafer (2006a et 2006b) ont eu l'idée d'identifier et d'utiliser les hypothèses de la GBT qui sont à l'origine de son aptitude à isoler les modes. Leur but n'était pas d'imiter la démarche de la GBT, mais plutôt de formuler les idées fondamentales de la GBT sous forme d'une série d'hypothèses mécaniques distinctes. Ces dernières peuvent alors être introduites, au moyen d'équations de contraintes (au sens mathématique du terme), dans des méthodes plus générales telles que la MBF. C'est ce qui va être expliqué et présenté dans ce qui suit.

Suite à une analyse de la méthodologie de la GBT, il est mis en avant les 4 critères suivants comme hypothèses mécaniques critiques nécessaires pour définir les modes globaux et distorsionnels :

1. $\gamma_{xy} = 0$, les distorsions membranaires sont nulles.
2. $\varepsilon_x = 0$, les déformations membranaires transversales sont nulles.
3. $v = f(x)$, les déplacements longitudinaux varient linéairement suivant x , à l'intérieur d'une paroi plane.
4. Concernant la fonction du déplacement local $w(x)$, qui est la flèche de la paroi plane, la condition d'équilibre $d^4 w/dx^4 = 0$ doit être satisfaite. Il faut également que ses deux dérivées dw/dx et $d^2 w/dx^2$ soient continues le long de la totalité de la ligne moyenne de la section transversale. Cette hypothèse implique que

la section déformée est en équilibre indépendamment des forces et des moments longitudinaux.

On suppose que les hypothèses ci-dessus, qu'on appellera également « hypothèses de base de la GBT », définissent clairement les modes de déformation liés aux instabilités globale et distorsionnelle. Ceci signifie que : (i) tous les modes d'instabilité globaux et distorsionnels satisfont les hypothèses de base de la GBT, et (ii) les autres modes d'instabilité possibles, telles que les instabilités locale et de cisaillement, ne les satisfont pas.

Une conséquence importante de la satisfaction des hypothèses de base de la GBT est que tous les déplacements du profil peuvent être exprimés en fonction des seuls déplacements longitudinaux, V , c.-à-d. que tous les déplacements peuvent être reliés à la fonction de gauchissement. En fait, c'est cette relation qui forme la base des développements présentés par Adany et Schafer.

Pour distinguer les modes globaux des modes distorsionnels, la GBT suggère une analyse des fonctions de gauchissement qui est rappelée ci-dessous :

- Les modes globaux peuvent être décrits par quatre fonctions de gauchissement spéciales liées aux déplacements longitudinaux résultant de 4 charges spéciales, à savoir : (i) la charge axiale pure, (ii) le moment fléchissant pur autour du premier axe principal de la section transversale, (iii) le moment fléchissant pur autour du deuxième axe principal, (iv) la torsion pure (moment autour de l'axe longitudinal du profil). Ces fonctions de gauchissement sont illustrées dans la figure 4.24.
- Les fonctions de gauchissement qui satisfont les hypothèses de base de la GBT, et qui ne font pas partie des déformations qui décrivent les modes globaux, définissent les modes d'instabilité distorsionnels. Dans la pratique il est commode de retenir des fonctions de gauchissement orthogonales à celles qui définissent les quatre modes globaux.

De tels modes globaux n'engendrent aucune déformation de la section transversale. Ainsi, de ce point de vue, ils correspondent entièrement à la définition traditionnelle des modes globaux d'instabilité qui sont caractérisés par un déplacement en mode rigide de la section transversale. Cependant, traditionnellement seulement trois modes globaux d'instabilité sont identifiés par le déplacement en corps rigide de la section transversale, alors qu'au sens de la GBT il existerait un quatrième mode, le mode axial (voir figure 4.24). Adany et Schafer ont jugé que ce dernier est un mode d'instabilité théoriquement possible et qu'il n'avait aucune importance pratique.

La définition des modes distorsionnels donnée ci-dessus échoue pour des sections transversales formées avec moins de trois parois planes, ou possédant moins de quatre lignes nodales, comme c'est le cas des cornières. De ce point de vue, il nous semble important de signaler que même cette définition due à la GBT causerait une discontinuité dans la classification des modes propres. En effet, il suffit d'imaginer une cornière avec un raidisseur très petit ou faisant un angle nul avec la paroi plane, comme cela a été fait dans les exemples donnés au début de ce chapitre, pour que l'existence des modes distorsionnels devienne possible.

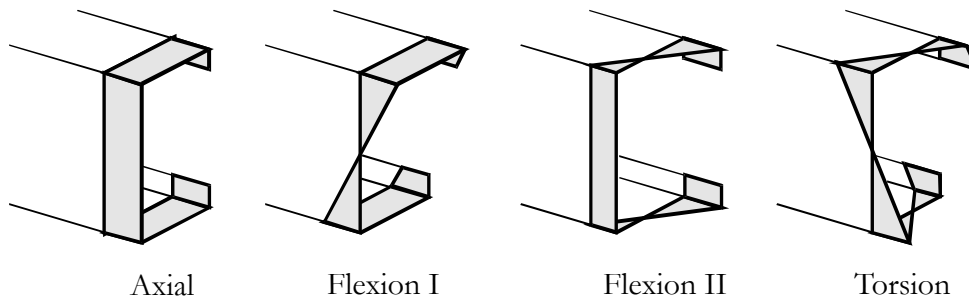


Figure 4.24 Distribution des déplacements longitudinaux (fonctions de gauchissement) pour les modes globaux (Adany et Schafer, 2006a).

4.5.4 Structure de la cFSM

Comme indiqué au chapitre 2, l'équation de la stabilité est un problème de valeurs et vecteurs propres généralisé. Il prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}_E \Phi = \mathbf{K}_G \Phi \Lambda \quad (4.1)$$

Où, \mathbf{K}_E est la matrice de rigidité globale et elle est fonction de la longueur du profil, a . \mathbf{K}_G est la matrice de rigidité géométrique globale et elle dépend de la longueur a ainsi que de la distribution des forces sur la section transversale. $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_q]$ est la matrice des vecteurs propres. $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q]$ est la matrice des valeurs propres, et q le nombre de degrés de liberté ($q = 4 \times n$).

Dans une utilisation typique de la MBF, l'équation ci-dessus est résolue pour différentes longueurs, a , de l'élément de structure et pour une distribution donnée, f , de l'effort axial. Les valeurs λ calculées sont alors tracées en fonction de la longueur a .

Tout déplacement \mathbf{d} , y compris les modes d'instabilité ϕ , peut être décrit en termes des degrés de liberté nodaux dans le repère global, ainsi :

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{U}^T \ \mathbf{V}^T \ \mathbf{W}^T \ \Theta^T] \quad (4.2)$$

Avec $\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]$. \mathbf{V}^T , \mathbf{W}^T et Θ^T sont décrits d'une manière similaire.

4.5.4.1 Matrice de contrainte correspondant aux hypothèses de base de la GBT

En utilisant les quatre hypothèses de base de la GBT, les champs de déplacement généraux de la MBF sont contraints à ne donner que les champs de déplacement correspondant aux modes d'instabilité globaux et distorsionnels. Pratiquement, les hypothèses de base de la GBT impliquent que les déplacements transversaux (\mathbf{U} , \mathbf{W} , Θ) sont entièrement définis par les déplacements de gauchissement (\mathbf{V}). Une matrice de

contrainte \mathbf{R}_{GD} reliant les déplacements dans l'espace réduit des modes globaux et distorsionnels aux déplacements de l'espace général de la MBF peut être construite. Ainsi, on aura :

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_{\text{GD}} \mathbf{d}_{\text{GD}} \quad (4.3)$$

où \mathbf{d}_{GD} est un vecteur de déplacement dans l'espace des modes globaux et distorsionnels ; les éléments de \mathbf{d}_{GD} sont les déplacements nodaux longitudinaux. L'équation ci-dessus peut être réécrite sous une forme développée pour montrer la relation entre les degrés de liberté globaux des nœuds :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{UV}} \\ \mathbf{R}_{\text{VV}} \\ \mathbf{R}_{\text{WV}} \\ \mathbf{R}_{\text{\Theta V}} \end{bmatrix} \times \mathbf{V} \quad (4.4)$$

\mathbf{R}_{VV} est une matrice identité de dimension n . La détermination des sous-matrices de \mathbf{R}_{GD} selon la méthode de Adany et Schafer est relativement complexe. L'exposé de la méthode, dans le cadre des hypothèses simplificatrices énoncées au paragraphe 4.5.1, a constitué le principal sujet d'un article d'une vingtaine de pages dans la revue Thin Walled Structures (Adany et Schafer, 2006a) !

Un mode d'instabilité ϕ est d'abord un champ de déplacement. Ainsi, la relation (4.3) peut être utilisée dans le problème propre de la stabilité. En reportant l'équation (4.3) dans l'équation (4.1) et en prémultipliant par \mathbf{R}_{GD}^T , on obtient :

$$\mathbf{R}_{\text{GD}}^T \mathbf{K}_{\text{E}} \mathbf{R}_{\text{GD}} \mathbf{\Phi}_{\text{GD}} = \mathbf{R}_{\text{GD}}^T \mathbf{K}_{\text{G}} \mathbf{R}_{\text{GD}} \mathbf{\Phi}_{\text{GD}} \Lambda_{\text{GD}} \quad (4.5)$$

ou plus simplement

$$\mathbf{K}_{\text{E,GD}} \mathbf{\Phi}_{\text{GD}} = \mathbf{K}_{\text{G,GD}} \mathbf{\Phi}_{\text{GD}} \Lambda_{\text{GD}} \quad (4.6)$$

ce qui peut être vu comme un nouveau problème de valeurs propres écrit dans l'espace des degrés de liberté contraints couvrant les modes d'instabilité globaux et distorsionnels. Dans l'expression ci-dessus $\mathbf{K}_{\text{E,GD}}$ et $\mathbf{K}_{\text{G,GD}}$ sont, respectivement, la matrice de rigidité et la matrice de rigidité géométrique du problème contraint de la méthode des bandes finies.

Il faut noter que \mathbf{R}_{GD} est une matrice rectangulaire de dimension $q \times n$. Il s'en suit que $\mathbf{K}_{\text{E,GD}}$ et $\mathbf{K}_{\text{G,GD}}$ sont de dimension $n \times n$, alors que les matrices \mathbf{K}_{E} et \mathbf{K}_{G} ont une dimension plus grande ($q \times q$). Ainsi, l'application de l'équation de contrainte résulte en une réduction de la dimension du problème. Le problème transformé a une dimension égale au quart de celle du problème initial.

4.5.4.2 Séparation des modes globaux et distorsionnels.

La formulation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} publiée par Adany et Schafer (2006a et 2006b) est fournie dans la section 4.5.5 ci-après. Cependant, \mathbf{R}_{GD} seule ne permet pas de séparer les modes globaux des modes distorsionnels, et elle ne peut pas être employée pour distinguer les différents modes globaux : flexionnel, torsionnel, etc.... Il est nécessaire d'introduire une transformation supplémentaire, à l'intérieur de l'espace couvert par les déformations globales et distorsionnelles. Mathématiquement, il faut une matrice de transformation \mathbf{H} qui peut être utilisée pour décrire n'importe quel vecteur \mathbf{d}_{GD} , qui, on le rappelle, contient les déplacements longitudinaux des nœuds. Cette matrice \mathbf{H} peut également être vue comme une base modale et la relation ci-après comme un changement de base. On passe alors des coordonnées \mathbf{d}_{GD} aux coordonnées modales \mathbf{d}_{H} .

$$\mathbf{d}_{\text{GD}} = \mathbf{H}\mathbf{d}_{\text{H}} \quad (4.7)$$

Ensuite, il faut ordonner les vecteurs de la base de sorte que \mathbf{H} puisse être séparée en deux sous matrices \mathbf{H}_{G} et \mathbf{H}_{D} contenant les bases vectorielles des modes globaux et distorsionnels séparément.

En introduisant \mathbf{H}_{G} et \mathbf{H}_{D} dans l'équation (4.7), et en séparant le vecteur des coordonnées modales \mathbf{d}_{H} en deux parties $\mathbf{d}_{\text{H,G}}$ et $\mathbf{d}_{\text{H,D}}$ correspondant aux coordonnées modales pour les modes globaux et distorsionnels, respectivement, on aboutit à :

$$\mathbf{d}_{\text{GD}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{G}} & \mathbf{H}_{\text{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\text{H,G}} \\ \mathbf{d}_{\text{H,D}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

En reportant cette transformation dans la première équation de contrainte (4.3), on peut alors séparer \mathbf{R}_{GD} dans les espaces des modes globaux \mathbf{R}_{G} et distorsionnels \mathbf{R}_{D} , par l'intermédiaire de

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{G}} & \mathbf{R}_{\text{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\text{H,G}} \\ \mathbf{d}_{\text{H,D}} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Où,

$$\mathbf{R}_{\text{G}} = \mathbf{R}_{\text{GD}}\mathbf{H}_{\text{G}} \text{ et } \mathbf{R}_{\text{D}} = \mathbf{R}_{\text{GD}}\mathbf{H}_{\text{D}} \quad (4.10.a,b)$$

\mathbf{R}_{G} et \mathbf{R}_{D} peuvent être utilisés de la même manière que \mathbf{R}_{GD} (voir les équations 4.5 et 4.6) pour définir des problèmes propres contraints à fournir les modes d'instabilité globaux et distorsionnels, respectivement.

4.5.4.3 Déplacements modaux purs, modes d'instabilité purs.

Sur la base des considérations précédentes, il est possible de définir les notions de « déplacements modaux purs » et de « modes d'instabilité purs ». Un vecteur déplacement \mathbf{d} est défini comme un déplacement modal pur s'il peut être exprimé en fonction d'une base modale et de coordonnées modales, comme montré ci-dessous pour les modes globaux et distorsionnels, respectivement :

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_G \mathbf{d}_{H,G} = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_G \mathbf{d}_{H,G} \quad \text{et} \quad \mathbf{d} = \mathbf{R}_D \mathbf{d}_{H,D} = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_D \mathbf{d}_{H,D} \quad (4.11.a,b)$$

Un mode d'instabilité pur doit satisfaire deux critères : (i) il doit être un déplacement modal pur, et (ii) il doit être la solution du problème généralisé de valeurs propres défini par l'équation (4.1). Une manière commode de calculer les modes d'instabilité globaux purs et les modes distorsionnels purs est de résoudre le problème contraint de valeurs propres, tel que présenté ci-dessus.

4.5.4.4 Les espaces G et D

Une étape cruciale dans la décomposition modale décrite par Adany et Schafer est la séparation de l'espace général des déformations couvert par la MBF en des sous-espaces utiles. Par conséquent, il est intéressant de jeter un bref coup d'oeil à la nature exacte de ces sous-espaces. L'ensemble des vecteurs appartenant à un mode pur de déformation définit un espace vectoriel. L'espace vectoriel défini par tous les modes globaux purs est noté G et celui des modes distorsionnels purs est désigné par D. Ces espaces G et D sont réellement des sous-espaces de l'espace GD (défini par \mathbf{R}_{GD}) mais on utilisera le terme d'espace au lieu de sous-espace pour simplifier la rédaction. Il est également important de souligner que dans la MBF les déplacements sont en fait exprimés comme le produit du vecteur des déplacements nodaux et de fonctions d'interpolation. Ainsi, les déplacements modaux (et les modes d'instabilité) sont réellement des fonctions, plutôt que des vecteurs. Il serait alors plus précis de parler d'espaces de fonctions, G et D, plutôt que d'espaces vectoriels. Ce détail peut avoir son importance à une étape donnée de la démarche.

4.5.4.5 Modes individuels

Selon les définitions de la section 4.5.3, il est possible d'organiser l'espace G dans un ordre qui conduira à une définition commode des bases vectorielles des modes globaux et distorsionnels. Puisque les colonnes de \mathbf{H}_G sont la base vectorielle des modes globaux, et puisqu'elles sont définies par les déplacements nodaux longitudinaux (de gauchissement), il est facile de définir quatre vecteurs linéairement indépendants de l'espace G en utilisant directement la définition des modes globaux fournie par la GBT et qui est illustrée dans la figure 4.24. Ainsi, on peut définir un mode axial, deux modes de flexion, et un mode de torsion en tant que modes de déplacement globaux ; ils sont, respectivement, notés \mathbf{H}_{G1} , \mathbf{H}_{G2} , \mathbf{H}_{G3} et \mathbf{H}_{G4} .

$$\mathbf{H}_G = [\mathbf{H}_{G1} \quad \mathbf{H}_{G2} \quad \mathbf{H}_{G3} \quad \mathbf{H}_{G4}] \quad (4.12)$$

\mathbf{H}_{G1} , \mathbf{H}_{G2} , \mathbf{H}_{G3} et \mathbf{H}_{G4} sont des vecteurs de dimension n.

En utilisant l'équation (4.12) il est possible de calculer les modes d'instabilité globaux individuellement en résolvant un problème contraint de valeur propre qui est obtenu en utilisant la procédure décrite ci-dessus.

La signification physique des modes de déplacement G2 à G4 peut être facilement identifiée. Les deux modes de flexion (G2 et G3) correspondent justement aux instabilités flexionnelles autour des deux axes principaux, alors que le G4 correspond à l'instabilité torsionnelle. On rappelle que ces modes d'instabilité ne se produisent de manière découplée que si la section transversale est doublement symétrique.

Théoriquement, les différents modes distorsionnels peuvent être calculés d'une manière similaire, une fois que \mathbf{H}_D est définie. Cependant, à ce jour, aucune définition directe des modes distorsionnels n'existe. Ils sont définis comme les modes de l'espace GD qui ne sont pas dans l'espace G. La signification physique des différents modes distorsionnels n'est alors pas évidente.

4.5.5 Formulation de la cFSM pour les sections ouvertes à connexions simples

4.5.5.1 Vue d'ensemble

L'utilisation, à la manière d'Adany et Schafer, des hypothèses mécaniques pour arriver à la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} de l'équation (4.3) est l'objectif de cette section. Les hypothèses de base de la GBT définies à la section 4.5.3 sont introduites dans la MBF selon l'explication donnée dans la section 4.5.4, pour les profils qui satisfont les critères énumérés dans la section 4.5.1. L'utilisation des hypothèses de base de la GBT procure le moyen d'exprimer le champ de déplacement du profil en fonction des déplacements nodaux longitudinaux, \mathbf{V} . Ceci permet d'isoler les modes d'instabilité globaux et distorsionnels dans le contexte de la MBF. Ceci permet, en particulier, la construction des sous-matrices \mathbf{R}_{UV} , \mathbf{R}_{WV} et $\mathbf{R}_{\Theta V}$ de la matrice \mathbf{R}_{GD} (voir l'équation 4.4). Chacune d'elle fournit une relation formelle entre les degrés de liberté \mathbf{U} , \mathbf{W} et Θ avec les degrés de liberté \mathbf{V} . Pour les besoins de la démonstration, ces sous-matrices doivent à leur tour être partitionnées comme suit :

$$\mathbf{R}_{UV} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{U1} \\ \mathbf{R}_{\bar{U}} \\ \mathbf{R}_{Un} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{WV} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{W1} \\ \mathbf{R}_{\bar{W}} \\ \mathbf{R}_{Wn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\Theta V} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Theta 1} \\ \mathbf{R}_{\Theta 2} \\ \mathbf{R}_{\bar{\Theta}} \\ \mathbf{R}_{\Theta n-1} \\ \mathbf{R}_{\Theta n} \end{bmatrix} \quad (4.13.a-d)$$

$\mathbf{R}_{\bar{U}}$, $\mathbf{R}_{\bar{W}}$ et $\mathbf{R}_{\bar{\Theta}}$ représentent les relations entre les DDL \mathbf{U} , \mathbf{W} et Θ des nœuds internes, au sens de la section 4.5.2, et les déplacements de gauchissement \mathbf{V} . Les autres sous matrices concernent les DDL des nœuds externes, soit le premier (1) et le dernier (n) nœud de la section ouverte.

Dans la section 4.5.5.2 les hypothèses 1 et 2 de la GBT sont appliquées à une bande simple. Ceci conduit, comme exposé dans la section 4.5.5.3, à une relation entre les DDL

de translation transversale et les DDL de gauchissement. Cette relation est formalisée sous forme d'équations matricielles et fournit les sous-matrices $\mathbf{R}_{\bar{u}}$ et $\mathbf{R}_{\bar{w}}$. La suite de la formulation consiste à exploiter l'hypothèse 4 de la GBT pour relier le reste de DDL aux déplacements de gauchissement. Le but est alors d'obtenir les sous-matrices \mathbf{R}_{Θ} , \mathbf{R}_{U1} , \mathbf{R}_{Un} , \mathbf{R}_{W1} , \mathbf{R}_{Wn} , $\mathbf{R}_{\Theta1}$, $\mathbf{R}_{\Theta2}$, $\mathbf{R}_{\Theta n-1}$ et $\mathbf{R}_{\Theta n}$, et achever ainsi l'élaboration de la matrice \mathbf{R}_{GD} . Les expressions nécessaires au calcul des modes purs d'instabilité deviennent alors disponibles. Le principe de ce travail est donné dans la section 4.5.5.4 mais la démonstration est reportée dans l'annexe A de la thèse.

4.5.5.2 L'effet des hypothèses de la GBT concernant les déformations membranaires sur les DDL locaux d'une bande

a La relation entre les DDL locaux u et v

Les déplacements dans le plan de la bande ou déplacements membranaires, sont approchés, à partir des déplacements nodaux, par des interpolations linéaires dans le sens transversal et par des fonctions harmoniques dans le sens longitudinal. Une variation en sinus est retenue pour u et en cosinus pour v

$$u = \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right), \quad v = \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right). \quad (4.14.a,b)$$

Où, m désigne le nombre de demi-ondes harmonique se développant dans le sens longitudinal. Les hypothèses 1 et 2 de la GBT peuvent s'écrire comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.15.a,b)$$

En substituant (4.14.a) dans (4.15.a), on peut écrire

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_1 + u_2}{b} \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) = 0 \quad (4.16)$$

Comme cette relation doit être vérifiée quelque soit y , il s'en suit que l'on doit avoir

$$u_1 = u_2 \quad (4.17)$$

Suite à l'exploitation de l'hypothèse N°2 de la GBT, les déplacements transversaux, u , des deux lignes nodales de la bande doivent donc être identiques. En utilisant ce résultat avec l'hypothèse N°1 de la GBT, on peut écrire :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{-v_1 + v_2}{b} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) = 0 \quad (4.18)$$

On obtient ainsi la relation suivante entre les DDL locaux membranaires, u et v , des nœuds de la bande :

$$u_1 = u_2 = u = (v_1 - v_2) \frac{a}{bm\pi} = (v_1 - v_2) \frac{1}{bk_m} \quad (4.19)$$

$$\text{Où, } k_m = \frac{m\pi}{a}$$

Il est intéressant de signaler que l'hypothèse N°3 est automatiquement vérifiée du moment que, dans la méthode des bandes finies, le déplacement longitudinal v est supposé avoir une variation linéaire selon l'axe x local.

b Interprétation géométrique

Afin de mieux comprendre la signification physique des équations ci-dessus, il suffit de considérer la bande grisée du profil montré dans la figure 4.22. Conformément aux hypothèses de la MBF, (i) la variation transversale de u et de v est linéaire, (ii) la variation longitudinale de u est sinusoidale, et (iii) la variation longitudinale de v est une fonction cosinus. Ces hypothèses ont comme conséquence un modèle général de déformation qui est illustré dans la figure 4.25. Cependant, la prise en compte des hypothèses de la GBT conduit à un modèle de déformation plus restreint, tel que présenté dans la figure 4.26.

Il est peut-être utile de rappeler que les déplacements nodaux sont, en fait, les amplitudes des fonctions de déplacement harmoniques. Comme u est une fonction de sinus, alors que v est une fonction de cosinus, ces deux fonctions prennent leurs valeurs maxima dans différentes sections transversales (voir la figure 4.25).

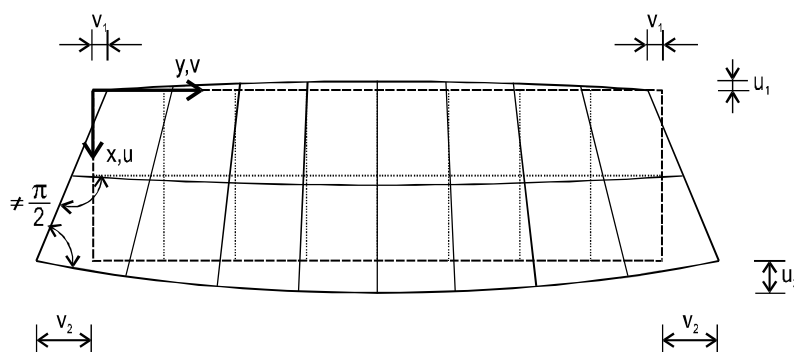


Figure 4.25 Etat de déformation membranaire général d'une bande dans la MBF (Adany et Schafer, 2006a).

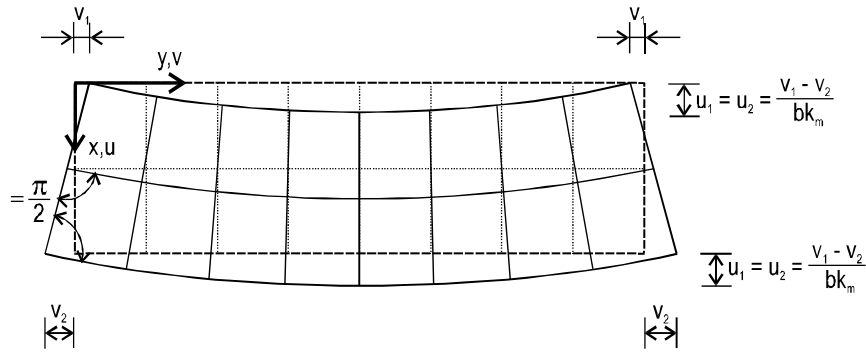


Figure 4.26 Etat de déformation membranaire d'une bande dans le cas de la GBT (Adany et Schafer, 2006a).

4.5.5.3 Relation entre les DDL de translation transversale des nœuds principaux et les DDL de gauchissement

a Relation entre les déplacements u local et V global des lignes nodales

On va s'intéresser à la $i^{\text{ème}}$ ligne nodale d'un profil possédant une section transversale ouverte à connexions simples. Les parois planes qui lui reliées sont les numéro (i) et $(i-1)$, comme montré dans la figure 4.23. Les angles que font ces bandes avec l'axe des x positifs sont : $\alpha^{(i-1)}$ et $\alpha^{(i)}$, respectivement, et leurs largeurs respectives sont $b^{(i-1)}$ et $b^{(i)}$. L'application de la relation (4.19) pour ces deux parois planes, permet d'écrire :

$$u^{(i-1)} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(i-1)} & -1/b^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(i-1)} \\ v_2^{(i-1)} \end{bmatrix} \text{ et } u^{(i)} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(i)} & -1/b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.20.a,b)$$

Du moment que les axes y local et Y global sont parallèles, les déplacements v et V d'une ligne nodale sont identiques. En utilisant la condition de compatibilité, on peut alors écrire les égalités suivantes pour les deux bandes en question et leurs trois lignes nodales :

$$v_1^{(i-1)} = V_{i-1}, \quad v_2^{(i-1)} = v_1^{(i)} = V_i, \quad v_2^{(i)} = V_{i+1} \quad (4.21.a-c)$$

Des deux groupes d'équations (4.20) et (4.21) on peut déduire la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} u^{(i-1)} \\ u^{(i)} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(i-1)} & -1/b^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 1/b^{(i)} & -1/b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

b Relation entre le déplacement local u et les déplacements globaux U, W des lignes nodales

L'orientation du repère local d'une bande i quelconque par rapport au repère global est définie par le seul angle $\alpha^{(i)}$, celui que font entre eux les axes local x et global X . Les composantes locales x, z sont reliées aux composantes globales X, Z par

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i)} & \sin\alpha^{(i)} \\ -\sin\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

En utilisant la première ligne de cette équation pour relier les déplacements u locaux des deux bandes (i) et $(i-1)$ aux déplacements globaux U et W de leur ligne nodale commune i , on aboutit à :

$$\begin{Bmatrix} u^{(i-1)} \\ u^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i-1)} & \sin\alpha^{(i-1)} \\ \cos\alpha^{(i)} & \sin\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

c Relation entre le déplacement global V et les déplacements globaux U, W des lignes nodales

Les deux termes de gauche des expressions (4.22) et (4.24) sont identiques. Leurs termes de droite doivent par suite être égaux, ce qui conduit à la relation ci-dessous entre le déplacement longitudinal V et les déplacements transversaux U et W

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i-1)} & \sin\alpha^{(i-1)} \\ \cos\alpha^{(i)} & \sin\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(i-1)} & -1/b^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 1/b^{(i)} & -1/b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_m \text{Det}_i} \begin{bmatrix} \sin\alpha^{(i)} & -\sin\alpha^{(i-1)} \\ -\cos\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/b^{(i-1)} & -1/b^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 1/b^{(i)} & -1/b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Où Det_i est le déterminant de la matrice à inverser :

$$\text{Det}_i = \sin\alpha^{(i)}\cos\alpha^{(i-1)} - \sin\alpha^{(i-1)}\cos\alpha^{(i)} = \sin(\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)}) \quad (4.27)$$

Le cas où ce déterminant est nul a été éliminé par les hypothèses simplificatrices de la section 4.5.1. On a alors supposé que les parois ne peuvent pas être coplanaires. Le traitement de ce cas particulier est présenté à part dans le rapport de Adany (2004).

En développant la relation (4.26) et en séparant les expressions de U et de W en vue de mettre en évidence les termes des sous-matrices \mathbf{R}_{UV} et \mathbf{R}_{WV} , on trouve

$$U_i = \frac{1}{k_m} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\sin\alpha^{(i)}}{\text{Det}_i b^{(i-1)}} \right) \left(-\frac{\sin\alpha^{(i)}}{\text{Det}_i b^{(i-1)}} - \frac{\sin\alpha^{(i-1)}}{\text{Det}_i b^{(i)}} \right) \left(\frac{\sin\alpha^{(i-1)}}{\text{Det}_i b^{(i)}} \right) \\ \left(\frac{\sin\alpha^{(i-1)}}{\text{Det}_i b^{(i)}} \right) \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$W_i = \frac{1}{k_m} \left[\begin{array}{c} \left(-\frac{\cos\alpha^{(i)}}{\text{Det}_i b^{(i-1)}} \right) \left(\frac{\cos\alpha^{(i)}}{\text{Det}_i b^{(i-1)}} + \frac{\cos\alpha^{(i-1)}}{\text{Det}_i b^{(i)}} \right) \left(-\frac{\cos\alpha^{(i-1)}}{\text{Det}_i b^{(i)}} \right) \\ \left(-\frac{\cos\alpha^{(i-1)}}{\text{Det}_i b^{(i)}} \right) \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Du fait que les déplacements transversaux U et W du nœud i dépendent des déplacements de gauchissement de trois nœuds, i plus ses deux voisins, les expressions ci-dessus ne donnent alors que la relation entre les U, W des nœuds internes avec les déplacements de gauchissement. Autrement dit, ces relations fournissent les termes des sous matrices $\mathbf{R}_{\bar{U}}$ et $\mathbf{R}_{\bar{W}}$. Les relations concernant les U, W des nœuds externes seront développées ultérieurement.

d Relation U-V et W-V pour l'ensemble des nœuds internes de la section

En regroupant les équations (4.28) puis (4.29) de tous les nœuds internes, on trouve :

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}} \right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}} - \frac{\sin\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}} \right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sin\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}} \right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}} - \frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}} \right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ W_{n-2} \\ W_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{-1}{k_m} \begin{bmatrix} \left(\frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}} \right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}} - \frac{\cos\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}} \right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\cos\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}} \right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}} - \frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}} \right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Ou bien,

$$\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{k_m} \mathbf{S}_1 \mathbf{V} = \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{U}}} \mathbf{V}, \quad (4.32)$$

$$\bar{\mathbf{W}} = -\frac{1}{k_m} \mathbf{C}_1 \mathbf{V} = \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{W}}} \mathbf{V}, \quad (4.33)$$

Où $\bar{\mathbf{U}}$ et $\bar{\mathbf{W}}$ ont une dimension égale à $(n-2)$ et contiennent les DDL U et W de tous les nœuds internes. \mathbf{V} est le vecteur des déplacements de gauchissement de tous les nœuds. \mathbf{S}_1 et \mathbf{C}_1 sont des matrices de dimension $(n-2) \times n$ contenant uniquement des informations géométriques de la section transversale. Ces relations fournissent les termes des sous matrices $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{U}}}$ et $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{W}}}$ entrant dans la construction des sous-matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{UV}}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{WV}}$ de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{GD}}$.

Bien que les DDL U et W des nœuds extrêmes ne figurent pas dans les équations ci-dessus, il faut se rappeler que l'application des hypothèses 1 et 2 de la GBT à la première et à la dernière bandes implique une relation de contrainte pour chacune de ces bandes. Elle concerne le DDL u local. Seulement, avec une seule relation par bande d'extrémité il n'est pas possible de relier les DDL globaux U et W aux déplacements de gauchissement ; le système à résoudre est sous déterminé.

4.5.5.4 Relation entre les DDL de translation transversale et les autres déplacements transversaux

Les développements de la section 4.5.5.3 sont basés uniquement sur la géométrie. Les conséquences des hypothèses 1 et 2 de la GBT sont entièrement exploitées, et il n'y a aucune manière d'exprimer davantage de DDL en fonction des déplacements de gauchissement à moins que d'autres hypothèses soient introduites. Pour obtenir le reste des sous-matrices $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{0}}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{U1}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{Un}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{W1}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{Wn}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{01}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{02}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{0n-1}}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{0n}}$, et achever ainsi l'élaboration de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{GD}}$, il faut faire usage de la quatrième hypothèse de la GBT.

Cette dernière stipule que le déplacement de la section transversale doit être formé de sorte que les forces transversales et les moments de flexion résultants soient en équilibre. Cette hypothèse considère uniquement des résultantes transversales et ignore toutes les autres forces. Ceci implique que le profil en 3D peut être réduit à sa section transversale 2D. Si on néglige la déformation axiale, le problème 2D à résoudre a une analogie directe avec le problème de flexion des poutres continues. L'analogie est illustrée dans la figure 4.27 où, (a) la section transversale, (b) le modèle de poutre équivalent, et (c) le modèle équivalent déformé par des déplacements d'appuis sont montrés. Les principales caractéristiques du problème équivalent peuvent être synthétisées comme suit :

- La géométrie globale de la poutre équivalente est identique à celle de la section transversale.
- Un appui simple est affecté à chaque noeud interne.

- Un chargement cinématique est appliqué sous forme de déplacements d'appuis qui ne sont autres que les déplacements U et W de la section précédente.
- La raideur flexionnelle de la poutre est prise égale à la raideur de flexion de la plaque : $EI = Et^3 / (12(1 - \nu^2))$, où E est le module de Young, ν est le coefficient de Poisson et t est l'épaisseur de la plaque.

Le modèle de la poutre équivalente ci-dessus exige la solution d'un système statiquement indéterminé. Fondamentalement, il y a deux possibilités : la méthode de flexibilité et la méthode de rigidité. Les matrices de rigidité des poutres du problème équivalent peuvent être retrouvées par une simplification directe des matrices de rigidité des bandes de la MBF standard ; ceci constitue un avantage certain lors de la mise en oeuvre numérique du procédé. Cependant, la méthode de flexibilité a été préférée dans l'article de Adany et Schafer (2006a) car elle cadre bien avec les développements qu'on trouve dans la littérature concernant la GBT (Silvestre et Camotim, 2002a et 2002b).

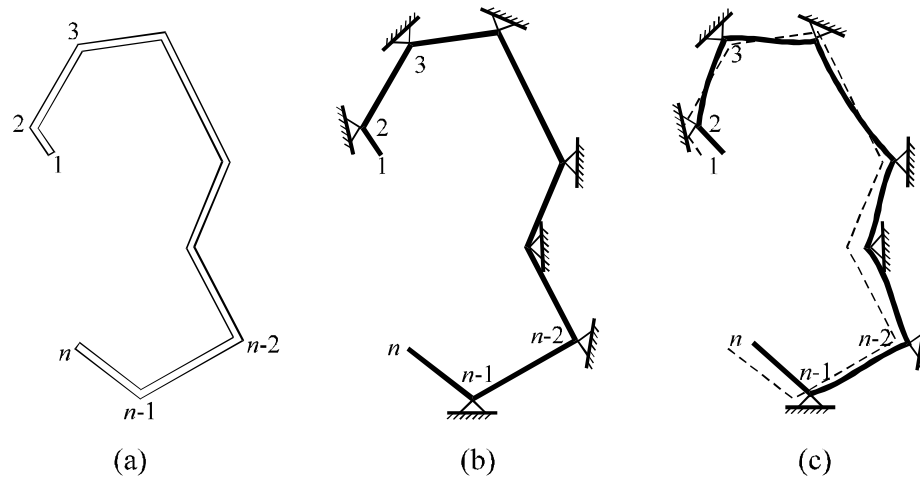


Figure 4.27 Section transversale (a) et la poutre continue équivalente sans (b) et avec (c) déformations (Adany et Schafer, 2006a).

La détermination des sous-matrices \mathbf{R}_{Θ}^{-} , \mathbf{R}_{U1} , \mathbf{R}_{Un} , \mathbf{R}_{W1} , \mathbf{R}_{Wn} , $\mathbf{R}_{\Theta1}$, $\mathbf{R}_{\Theta2}$, $\mathbf{R}_{\Theta n-1}$ et $\mathbf{R}_{\Theta n}$ de la matrice \mathbf{R}_{GD} en utilisant l'analogie avec la poutre continue est présentée dans l'annexe A de la thèse.

Après cette étape cruciale, les expressions nécessaires au calcul des modes purs d'instabilité deviennent alors disponibles. La mise en œuvre de la cFSM est présentée dans le deuxième article de Adany et Schafer (2006b). Dans ce qui suit nous allons introduire la technique à utiliser dans le cas des sections à parois minces ouvertes et à connexions multiples, comme les sections en forme de T, I, X...

4.5.6 Formulation de la cFSM pour les sections ouvertes à connexions multiples

4.5.6.1 Introduction

La description des sections ouvertes à connexions multiples nécessite des données supplémentaires par rapport aux sections à connexions simples. Il faut indiquer comment les éléments bandes sont reliés aux nœuds. On rappelle que ces liaisons sont implicitement définies par la numérotation stricte des nœuds et des éléments dans le cas des sections à connexions simples.

Concernant le développement des matrices de contrainte de la cFSM, le cas des sections ouvertes à connexions multiples diffère du cas simple par le fait qu'au moins un nœud est connecté à plus de deux bandes. Du moment que ce genre de nœuds est à l'origine de la principale différence entre les deux types de sections, une attention particulière lui sera accordée.

4.5.6.2 Relation entre les DDL de translation transversale des nœuds principaux et les DDL de gauchissement

Dans une section à connexions multiples, un nœud principal i peut être relié à m parois planes, comme représenté dans la figure 4.28. Pour simplifier, les nœuds principaux qui lui sont adjacents sont numérotés par 1, 2, 3..., j ... m . Les éléments bandes connectés à ce nœud principal sont définis par leurs nœuds origine et extrémité comme suit : $i.1, i.2, \dots, i.j, \dots, i.m$. Il est peut être important de signaler que, pour améliorer la qualité des résultats de la MBF, une paroi plane peut être modélisée par plusieurs éléments, ce qui impliquerait l'utilisation de nœuds qualifiés de secondaires dans la section 4.5.2. Seulement, ces nœuds secondaires sont manipulés à part dans la démarche de la cFSM. Pour cette raison la figure montre seulement les nœuds principaux du modèle.

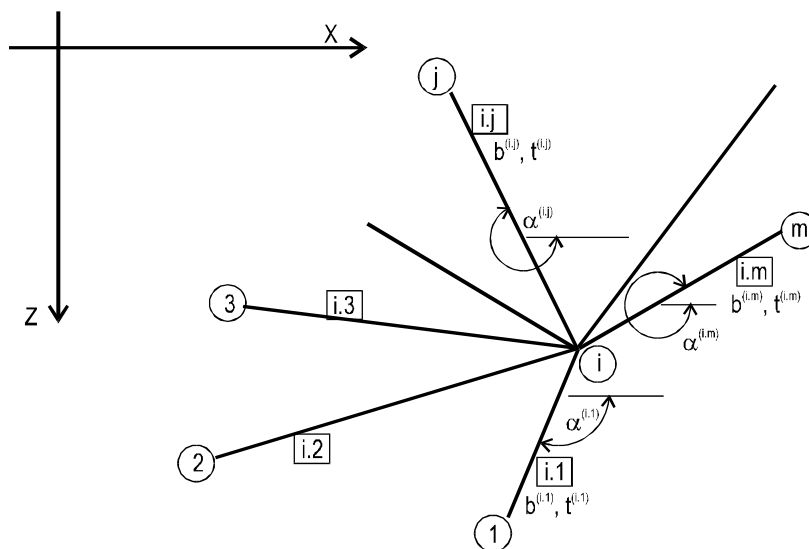


Figure 4.28 Un nœud interne principal d'une section à connexions multiples avec les bandes et les nœuds principaux adjacents (Adany, 2004).

Comme pour le cas des sections à connexions simples, on peut appliquer l'équation (4.19) à l'ensemble des bandes connectées au nœud i .

$$\mathbf{u}^{(j)} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(j)} & -1/b^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(j)} \\ v_2^{(j)} \end{bmatrix} \quad j=1\dots m \quad (4.34)$$

En se rappelant que les DDL v local et V global sont les mêmes, on peut écrire :

$$v_1^{(j)} = V_i \quad j=1\dots m, \text{ et, } v_2^{(j)} = V_j \quad j=1\dots m \quad (4.35.a,b)$$

Le report de ce résultat dans l'équation (4.34) permet d'aboutir à :

$$\begin{bmatrix} u^{(i.1)} \\ u^{(i.2)} \\ \vdots \\ u^{(i.j)} \\ \vdots \\ u^{(i.m)} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(i.1)} & -1/b^{(i.1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/b^{(i.2)} & 0 & -1/b^{(i.2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/b^{(i.j)} & 0 & 0 & 0 & -1/b^{(i.j)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/b^{(i.m)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/b^{(i.m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_j \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Comme pour le cas des sections à connexions simples, l'étape suivante consiste à exploiter les relations usuelles de changement de repère. Pour l'ensemble des bandes connectées au nœud i , on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} u^{(i.j)} \\ w^{(i.j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i.j)} & \sin\alpha^{(i.j)} \\ -\sin\alpha^{(i.j)} & \cos\alpha^{(i.j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad j=1\dots m \quad (4.37)$$

En retenant uniquement les premières lignes de cette équation, on peut écrire la relation entre les DDL globaux U et W du nœud i et les DDL locaux u des éléments bandes qui lui sont adjacents :

$$\begin{Bmatrix} u^{(i.1)} \\ u^{(i.2)} \\ \vdots \\ u^{(i.j)} \\ \vdots \\ u^{(i.m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i.1)} & \sin\alpha^{(i.1)} \\ \cos\alpha^{(i.2)} & \sin\alpha^{(i.2)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha^{(i.j)} & \sin\alpha^{(i.j)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha^{(i.m)} & \sin\alpha^{(i.m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

On rappelle que l'objectif de la démarche cFSM est de relier l'ensemble des DDL aux DDL de gauchissement V . Dans le cas des sections à connexions simples, un nœud principal n'était relié qu'à deux bandes. Le système équivalent à celui-ci avait une matrice carrée et sa solution ne dépendait que de la condition de non singularité qui était assurée en évitant les bandes coplanaires, c'est-à-dire en évitant les nœuds secondaires. Dans le cas présent, il est évident que le système est surdéterminé et les DDL u locaux des bandes connectées au nœud i ne sont pas indépendants. Pour relier les DDL U et W globaux du nœud i aux DDL de gauchissement via les équations (4.36) et (4.38), il suffit de retenir deux bandes adjacentes non coplanaires pour évaluer U_i et W_i ; les autres équations sont surabondantes mais doivent impérativement être vérifiées. Le fait que les DDL u locaux soient reliés entre eux implique que les DDL de gauchissement V des nœuds connectés au nœud i ne sont pas indépendants. Ce problème peut être manipulé comme suit.

Les deux termes de gauche des expressions (4.36) et (4.38) sont identiques. Leurs termes de droite doivent par suite être égaux, ce qui conduit à la relation ci-dessous entre les déplacements longitudinaux V des nœuds connectés au nœud i et les déplacements transversaux U_i et W_i de ce nœud.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i.1)} & \sin\alpha^{(i.1)} \\ \cos\alpha^{(i.2)} & \sin\alpha^{(i.2)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha^{(i.j)} & \sin\alpha^{(i.j)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha^{(i.m)} & \sin\alpha^{(i.m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} \frac{1}{b^{(i.1)}} & \frac{-1}{b^{(i.1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b^{(i.2)}} & 0 & \frac{-1}{b^{(i.2)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{b^{(i.j)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{b^{(i.j)}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{b^{(i.m)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{b^{(i.m)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_j \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Conformément à ce qui a été dit ci-dessus, deux équations quelconques permettraient de déterminer les déplacements inconnus U_i et W_i à condition que les angles correspondants soient différents. On peut, par exemple, retenir les deux premières équations pour calculer les déplacements inconnus U_i et W_i , alors que le reste des équations sera employé pour établir une liaison entre les déplacements longitudinaux V .

En partitionnant l'équation ci-dessus dans ce sens, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i.1)} & \sin\alpha^{(i.1)} \\ \cos\alpha^{(i.2)} & \sin\alpha^{(i.2)} \\ \cos\alpha^{(i.3)} & \sin\alpha^{(i.3)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha^{(i.j)} & \sin\alpha^{(i.j)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha^{(i.m)} & \sin\alpha^{(i.m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} \frac{1}{b^{(i.1)}} & \frac{-1}{b^{(i.1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b^{(i.2)}} & 0 & \frac{-1}{b^{(i.2)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b^{(i.3)}} & 0 & 0 & \frac{-1}{b^{(i.3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{b^{(i.j)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{b^{(i.j)}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{b^{(i.m)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{b^{(i.m)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_j \\ \vdots \\ V_m \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Pour simplifier la présentation, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_T = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{L1} \\ \mathbf{D}_{L2} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

La solution de la première équation de ce système permet de trouver les déplacements transversaux :

$$\mathbf{D}_T = \frac{1}{k_m} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_{11} \mathbf{D}_{L1} \quad (4.42)$$

Ce résultat est d'abord substitué dans la deuxième équation du système (4.41), puis on résout l'équation ainsi obtenue pour trouver la relation entre les DDL de liberté de gauchissement :

$$\mathbf{D}_{L2} = \mathbf{B}_{22}^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{21}) \mathbf{D}_{L1} \quad (4.43)$$

Il est utile de noter que la matrice \mathbf{B}_{22} est facilement inversible : elle est diagonale et son déterminant est, de toute évidence, non nul.

Pour résumer, les deux relations ci-dessus concernent le nœud principal interne i et permettent d'exprimer les vecteurs \mathbf{D}_T et \mathbf{D}_{L2} en fonction du seul vecteur \mathbf{D}_{L1} . \mathbf{D}_T contient les 2 DDL de translation transversale du nœud i . \mathbf{D}_{L1} et \mathbf{D}_{L2} contiennent, à eux deux, les DDL de gauchissement de tous les nœuds connectés au nœud i . \mathbf{D}_{L1} contient les 3 DDL longitudinaux retenus pour résoudre le système d'équations surdéterminé : il s'agit du déplacement longitudinal du nœud i et des déplacements V de deux nœuds connectés à i par deux bandes non coplanaires (les formules ne peuvent donc pas être

utilisées pour les nœuds secondaires !). On signale ici que les nœuds dont les V sont retenus dans \mathbf{D}_{L1} sont qualifiés de nœuds « déterminants » dans le rapport de Adany (2004). \mathbf{D}_{L2} contient les DDL longitudinaux des autres nœuds connectés au nœud i et non retenus dans \mathbf{D}_{L1} . Ces DDL ne sont pas indépendants et leurs nœuds sont qualifiés de « non déterminants » par Adany. Il est évident que si le nœud i est connecté à uniquement deux bandes, comme dans le cas des sections à connexions simples, alors \mathbf{D}_{L2} est vide. Autrement dit, tous les nœuds principaux internes des parois à connexions simples sont déterminants.

En appliquant les équations ci-dessus pour tous les nœuds principaux internes, la relation entre les DDL de translation transversale de tous les nœuds principaux et les DDL de gauchissement des nœuds principaux déterminants peut être établie.

Concernant les nœuds principaux externes d'une section à connexions multiples, on peut voir qu'ils ne présentent aucune différence substantielle par rapport aux nœuds extrêmes, le premier et le dernier nœud, d'une section à connexions simples. Les équations présentées à l'annexe A peuvent alors être utilisées. On rappelle que la translation dans la direction perpendiculaire au plan de la bande extrême est indépendante des déplacements longitudinaux ; seule la translation dans le plan de la bande est définie par les DDL de gauchissement.

Pour ce qui est des nœuds secondaires, on peut avancer que leurs déplacements longitudinaux peuvent être déduits des DDL de gauchissement des nœuds principaux par une simple interpolation linéaire du moment que, dans la MBF, la variation de V suivant la direction transversale est supposée linéaire.

4.5.6.3 Relation entre les DDL de gauchissement et les autres déplacements transversaux

Dans la section précédente, une partie des DDL du modèle MBF de la section est reliée aux degrés de liberté de gauchissement (translations longitudinales) des nœuds principaux. Il s'agit des translations transversales des nœuds principaux internes et d'une composante de translation transversale par nœud principal externe. Les translations longitudinales des nœuds secondaires sont, quant à elles, obtenues par interpolation linéaire des DDL de gauchissement de nœuds principaux. Pour achever le développement de la matrice \mathbf{R}_{GD} , qui a pour objectif de relier l'ensemble des DDL du modèle aux DDL de gauchissement, il reste à relier les DDL suivants :

- Les rotations de tous les nœuds principaux,
- Une composante de translation transversale par nœud principal externe et
- Les DDL de translation transversale et de rotation de tous les nœuds secondaires (trois DDL par nœud).

Pour y arriver, il faut faire usage de la quatrième hypothèse de la GBT : les efforts internes de flexion produits par la déformation de la section sont en équilibre. Cette hypothèse considère uniquement des résultantes transversales et ignore toutes les autres forces. Ceci implique que le profil en 3D peut être réduit à sa section transversale 2D.

De la même manière que dans le cas des sections à connexions simples, on fait usage de l'analogie avec les poutres. La démarche consiste à considérer un assemblage de

poutres dont la géométrie est identique à la section transversale du profil. Les nœuds du modèle équivalent et ceux de la section transversale, y compris les nœuds secondaires, sont les mêmes. Les degrés de liberté du modèle sont deux translations, U et W , et une rotation par nœud. La raideur flexionnelle EI des poutres est prise égale à la raideur de flexion transversale des bandes, soit $Et^3 / [12(1 - \nu^2)]$. C'est-à-dire qu'au coefficient de Poisson près, on suppose que la section transversale de la poutre est un rectangle dont la largeur est unitaire et dont la hauteur est égale à l'épaisseur de la bande. Quant à la raideur axiale EA , elle est prise suffisamment grande de façon que les déformations axiales des poutres équivalentes restent négligeables, conformément à la deuxième hypothèse de la GBT.

La suite de la procédure consiste à fixer les translations U et W de tous les nœuds internes principaux, puis à les libérer une à une pour calculer les déplacements qui en résultent aux autres DDL. Pour résoudre le problème d'un assemblage de poutres soumis à ce type de chargement cinématique, on peut évidemment faire usage de la méthode des forces, comme cela a été fait en annexe A pour le cas des sections à connexions simples. On peut également utiliser la méthode des déplacements, qui peut être préférée pour son caractère systématique et pour sa « ressemblance » avec la MBF.

Le résultat de cette étape est une relation entre les translations transversales des nœuds principaux internes et le reste des DDL transversaux du modèle. Comme dans la section précédente les translations transversales des nœuds principaux ont été exprimées en fonction des DDL de gauchissement, on peut conclure que l'ensemble des DDL est maintenant relié aux DDL de gauchissement. En d'autres termes, le calcul de la matrice \mathbf{R}_{GD} dans le cas des sections ouvertes à connexions multiples est achevé.

Le reste de la procédure de la cFSM consiste à contraindre les matrices de rigidité et de stabilité de la MBF au moyen de matrices de contrainte. Le système aux valeurs propres réduit qui en résulte permet de calculer les modes purs d'instabilité des sections ouvertes à parois minces. Dans ce qui suit nous donnons quelques exemples d'utilisation de la cFSM.

4.6 Utilisation de la cFSM

4.6.1 Exemples de calcul de modes purs

Dans cette section, quelques exemples numériques sont présentés afin de démontrer comment la cFSM fonctionne dans la pratique. On commence par montrer comment sont calculés les modes purs d'instabilité. Les exemples correspondent aux exemples présentés dans la section 4.3, à savoir les exemples 4 à 9. Seules les courbes donnant la force critique en fonction de la longueur de demi-onde sont présentées. Les formes déformées correspondantes sont celles données dans la section 4.3.

La figure 4.29 donne les charges critiques en fonction de la longueur d'instabilité pour l'exemple 4, qui est une section en C dont les données géométriques sont fournies dans la section 4.3.1. Trois courbes distinctes correspondant aux trois premiers modes purs (local, distorsionnel et global) y sont représentées. Elles ont été calculées à l'aide de la cFSM qui permet justement d'isoler chaque type d'instabilité. Avec ces courbes, on a

représenté le résultat du calcul par la MBF conventionnelle qui, comme on le sait, inclut naturellement et de manière continue tous les types de modes.

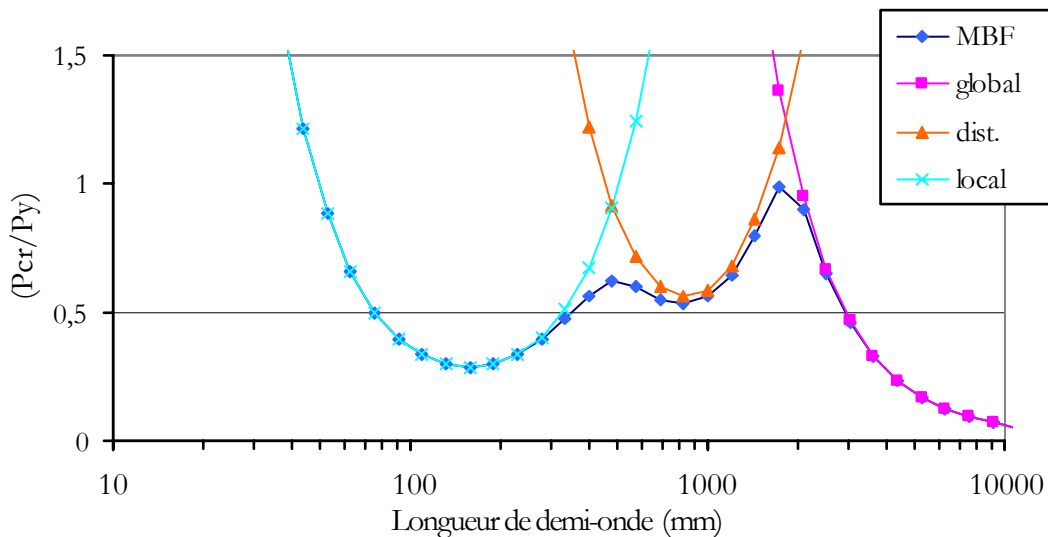


Figure 4.29 Forces critiques des modes purs de l'exemple 4 (Adany 2004).

Il est remarquable que pour les petites et pour les grandes longueurs d'instabilité, la courbe de la MBF se confond avec la courbe du mode local pur et la courbe du mode global pur, respectivement. Pour des longueurs d'instabilité intermédiaires il y a également une bonne concordance entre la courbe de la MBF et celle du mode distorsionnel pur. Il existe cependant une petite différence qui suggère que, si la courbe de la MBF a un point minimum distorsionnel distinct, c'est probablement parce que le mode qu'elle calcule n'est pas un mode distorsionnel pur mais une interaction entre le mode distorsionnel avec l'un des autres modes. Il faut noter qu'une interaction encore plus forte peut également être observée au voisinage des longueurs d'instabilité où les courbes des modes purs se coupent. Cette interaction, qui est d'ailleurs bien connue de la littérature, se manifeste par le fait que la courbe de la MBF s'étend bien au-dessous des courbes des modes purs dans ces zones d'intersection. On parle alors d'érosion de la contrainte critique.

La figure 4.30 montre des courbes similaires à celles présentées ci-dessus, cependant, elles correspondent à l'exemple 5. Les dimensions de la section transversale en forme de C analysée sont données dans la section 4.3.2.

Des observations semblables à celles de l'exemple précédent peuvent être faites. Toutefois, l'érosion de la contrainte critique au niveau des longueurs d'instabilité intermédiaires est plus notable dans cet exemple. Les raisons de cette forte interaction ont certainement pour origine l'absence d'un point minimum distorsionnel sur la courbe de la MBF. On rappelle d'ailleurs que cette incapacité de la MBF conventionnelle à fournir ce type de minimum dans beaucoup de cas pratiques constitue l'un de ses principaux défauts. Suite à cet exemple, la principale conclusion est que la cFSM est capable de calculer la position et la valeur de la force critique minimale du mode distorsionnel, même pour les cas où la MBF en est incapable.

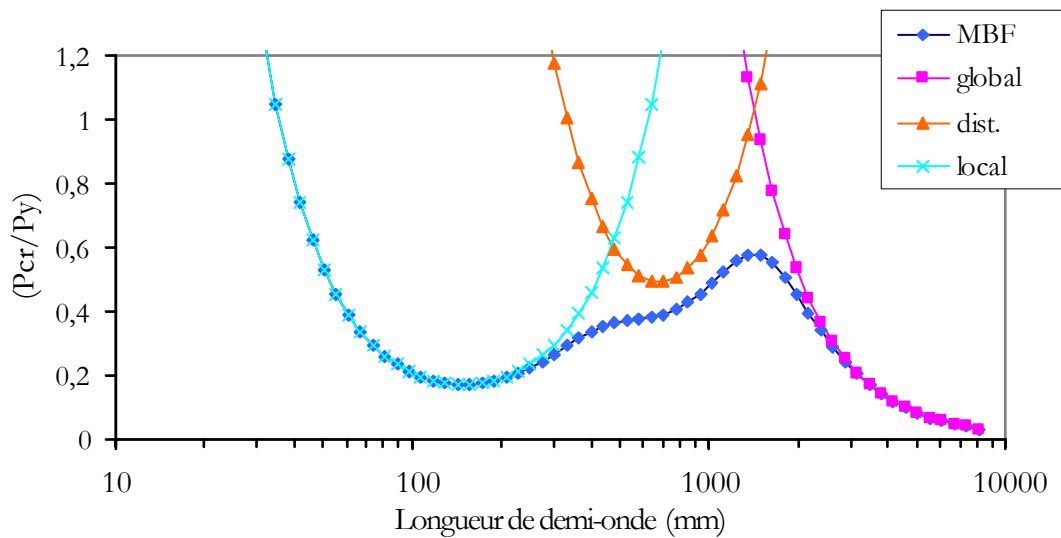


Figure 4.30 Forces critiques des modes purs de l'exemple 5 (Adany 2004).

Les figures 4.31 à 4.34 présentent les forces critiques pour des sections en C avec de petits raidisseurs d'âme (exemples 6 à 9). Pour les trois premiers cas (les exemples 6, 7 et 8), les figures se ressemblent beaucoup du moment que les sections transversales analysées diffèrent à peine. Leur caractéristique principale est que la valeur de la force critique locale pure est suffisamment élevée pour que le minimum local disparaisse des courbes de la MBF. C'est pourquoi les premiers points minima des courbes calculées par la MBF appartiennent, en fait, au mode distorsionnel, probablement en interaction avec d'autres modes.

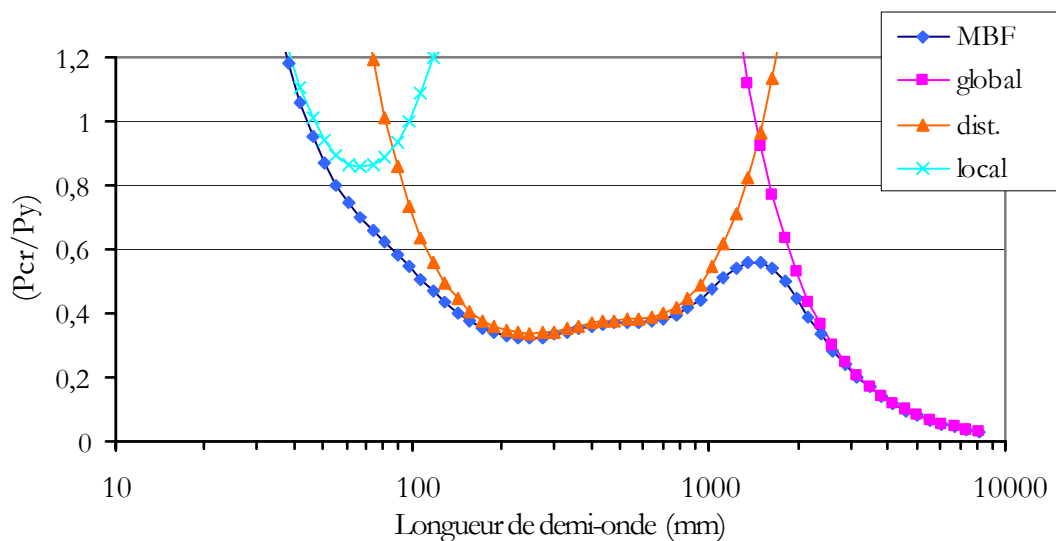


Figure 4.31 Forces critiques des modes purs de l'exemple 6 (Adany 2004).

Dans le cas de l'exemple 9, le minimum local existe même sur la courbe donnée par la MBF. Il y a deux autres points minima, les deux correspondant à des modes distorsionnels selon les calculs des modes purs par la cFSM.

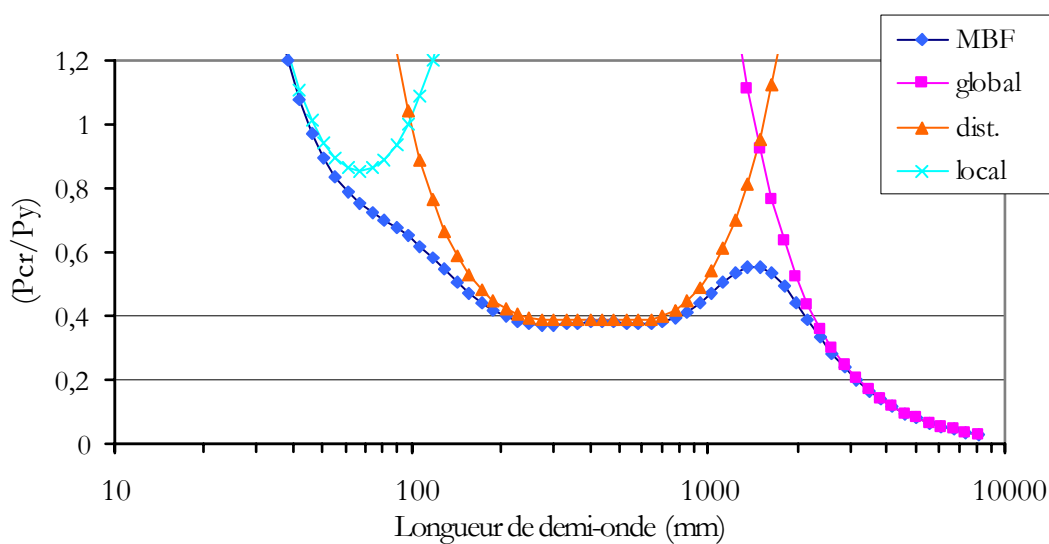


Figure 4.32 Forces critiques des modes purs de l'exemple 7 (Adany 2004).

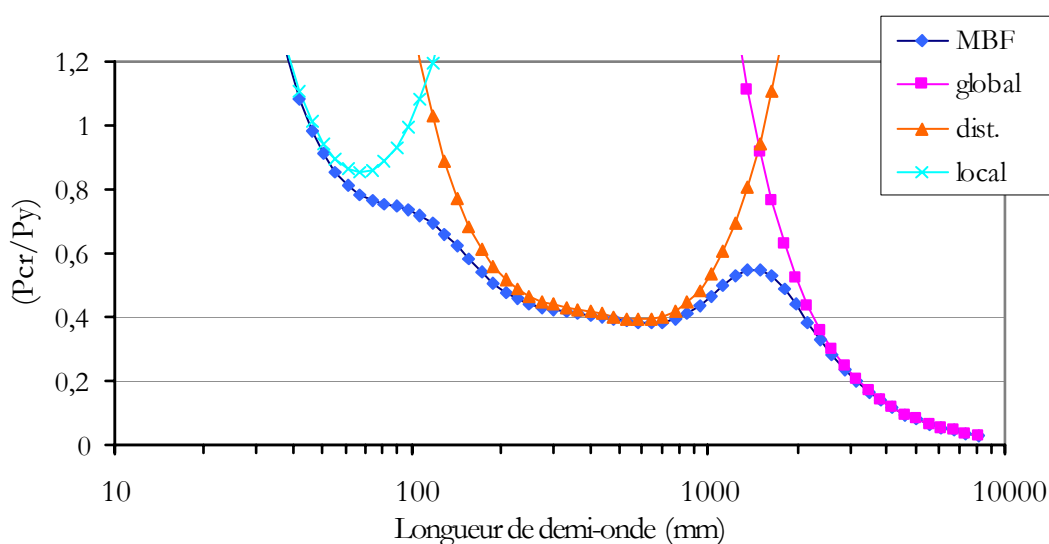


Figure 4.33 Forces critiques des modes purs de l'exemple 8 (Adany 2004).

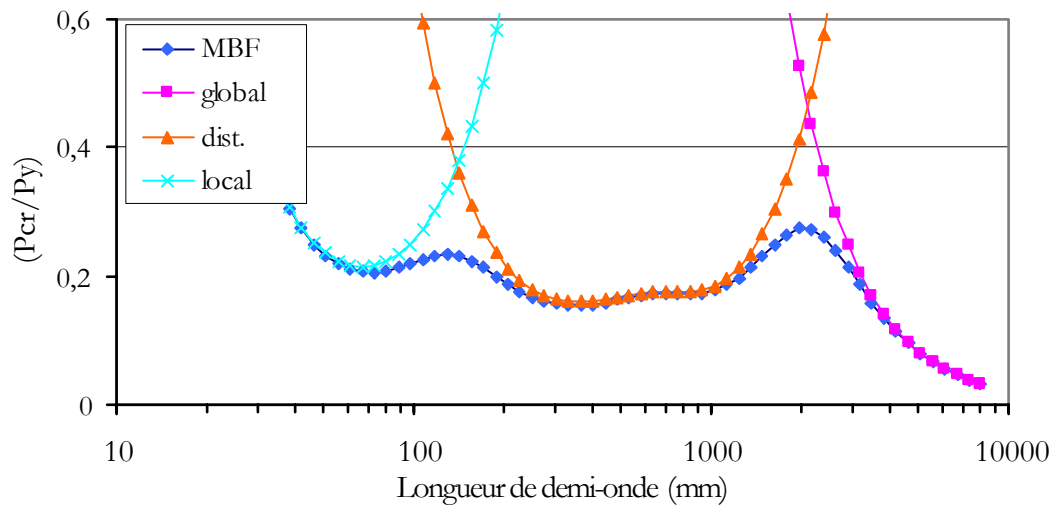


Figure 4.34 Forces critiques des modes purs de l'exemple 9 (Adany 2004).

4.6.2 Exemples de décomposition modale

Deux exemples sont d'abord présentés dans cette section afin d'illustrer quelques résultats de décomposition modale. Il s'agit des exemples 5 et 9 présentés ci-dessus. Le premier est une section en C simple, le deuxième est un C avec un raidisseur d'âme.

Les figures 5.35 et 5.36 présentent les forces critiques et les contributions modales respectives comme fonction de la longueur d'instabilité. Bien que les diagrammes des participations modales des deux exemples soient différents, ils présentent des tendances semblables.

- Les modes locaux contribuent à pratiquement 100% pour de petites longueurs d'instabilité, puis leur participation décroît vers zéro, à mesure que la longueur d'instabilité augmente.
- Les modes distorsionnels ont une contribution importante uniquement pour des longueurs d'instabilité intermédiaires, ce qui est clairement montré par la forme en cloche de la courbe correspondante.
- La courbe de contribution des modes globaux croît strictement de 0 à 100% en fonction de la longueur d'instabilité.
- La contribution des autres modes est négligeable pour les deux cas présentés.

Une autre remarque concerne le fait que, comme déjà mentionné dans la section précédente, la courbe obtenue par la MBF pour l'exemple 5 n'exhibe pas de minimum distorsionnel. Ceci s'est reflété par une contribution du mode distorsionnel pur n'excédant pas les 60% dans ce cas particulier.

Si les tendances ci-dessus semblent être cohérentes avec la pratique courante de classement des modes d'instabilité, nous avons relevé d'autres cas qui posent à notre sens certains problèmes et que nous exposerons dans la section 5.2 qui va suivre.

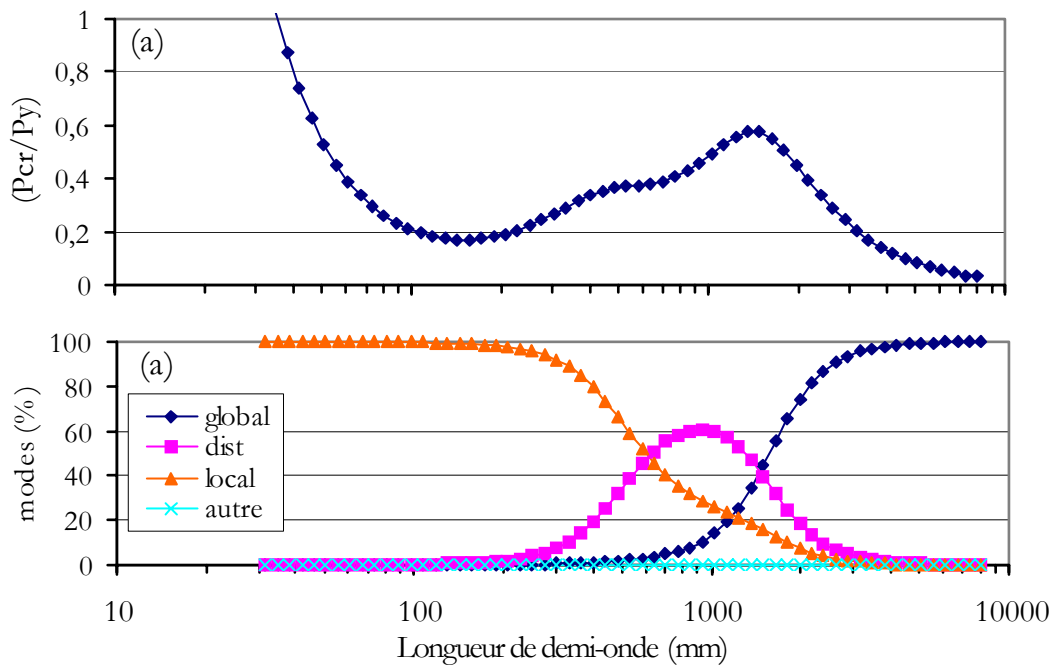


Figure 4.35 Décomposition modale pour l'exemple 5 (Adany 2004).

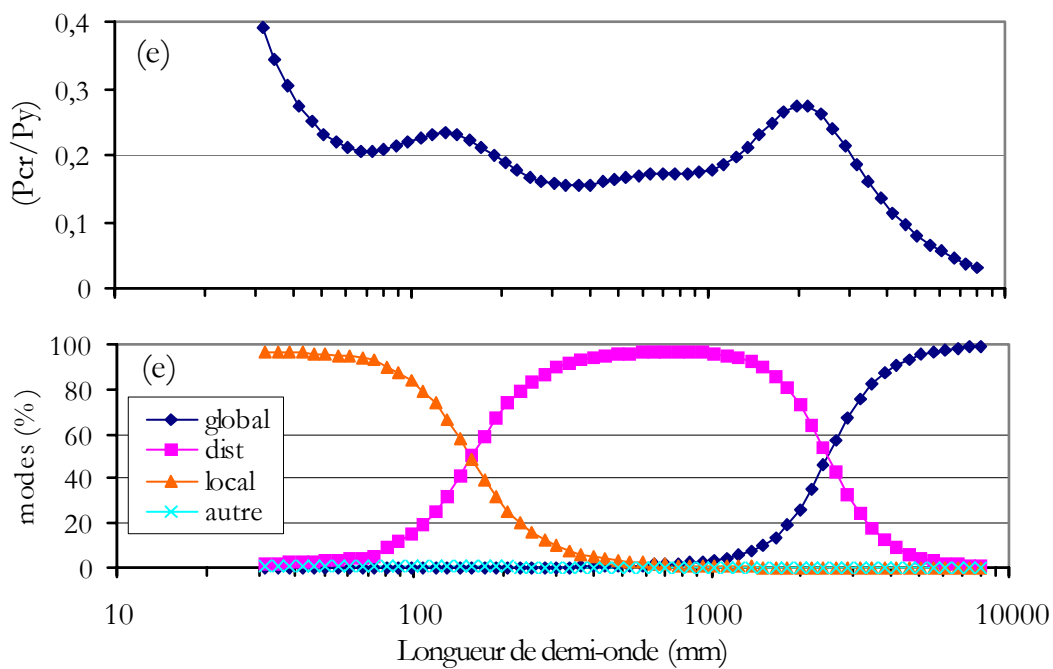


Figure 4.36 Décomposition modale pour l'exemple 9 (Adany 2004).

4.7 Conclusion

Pour résumer, dans ce chapitre nous avons commencé par rappeler les problèmes de classification rapportés par Adany (2004) et qui sont à l'origine du développement de la cFSM. Nous avons ensuite présenté la cFSM en insistant sur son principe et ses hypothèses. Puis, nous avons présenté quelques exemples d'utilisation de la cFSM.

Dans le chapitre suivant, nous allons énumérer les cas où la cFSM échoue. Nous y développerons également une version améliorée de la cFSM qui est beaucoup plus souple, générale et efficace que celle présentée dans ce chapitre.

Chapitre 5

Amélioration de la cFSM et nouvelle classification des modes d'instabilité

5.1 Introduction

Le besoin d'une classification automatique des résultats des analyses numériques de la stabilité élastique est très important. Ces méthodes fournissent des solutions pour les formes des sections transversales les plus complexes, seulement l'exploitation pratique des résultats est très laborieuse. En effet, il est souvent très difficile d'identifier parmi la grande quantité de résultats numériques, les charges critiques des 3 familles d'instabilités de base qui constituent les données utiles aux procédures de dimensionnement par les normes modernes.

Puisqu'il est relativement facile de calculer les forces critiques pour des modes globaux pour la plupart des cas pratiques (Yu, 2000), le véritable problème est l'identification des modes locaux et distorsionnels et le calcul des forces/contraintes critiques correspondantes. Les objectifs recherchés dans une procédure générale de classification ont été présentés dans la section 4.4.

Un travail scientifique récent (Adany et Schafer, 2006a) a permis de développer une méthode basée sur la MBF, la cFSM, qui offre l'avantage de pouvoir « commander » à la MBF le mode d'instabilité à calculer. Il s'agit d'un progrès considérable dans le domaine de l'analyse numérique de la stabilité élastique. Malheureusement cette méthode ne fonctionne que dans le cadre des hypothèses de la MBF¹ en excluant, en plus, le cas des sections fermées. Nous pensons même qu'on aura beaucoup de mal à l'introduire dans la MEF ou dans une version non conventionnelle de la MBF telle que la Méthode des Splines Bandes Finies (MSBF). On est donc encore loin des objectifs énumérés dans la section 4.4.

Dans la démarche cFSM, une matrice est particulièrement importante. Il s'agit de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} définissant l'instabilité distorsionnelle qui, traditionnellement,

¹ Voir Chapitre 2.

est le mode qui pose le plus de problèmes. Le développement de \mathbf{R}_{GD} représente d'ailleurs la quasi-totalité de l'article présentant le développement de la cFSM (Adany et Schafer, 2006a). Dans ce chapitre, nous allons proposer une autre formulation de cette matrice avec l'objectif de faire beaucoup plus simple mais surtout beaucoup plus général et efficace, dans le sens où la nouvelle formulation devrait permettre à la cFSM de conserver toute la souplesse des méthodes numériques. En effet, la version actuelle de la cFSM utilise une méthode très compliquée que nous avons présentée dans le chapitre précédent dans le but de mettre en valeur notre solution.

L'autre objectif du chapitre 4 était de mettre en évidence plusieurs failles dans les définitions des classes d'instabilité, spécialement celle du mode distorsionnel, dans la version actuelle de la cFSM. Il existe en effet des cas où la définition ne fonctionne pas ou qu'elle donne lieu à des discontinuités. Nous commencerons dans ce chapitre par exposer les problèmes que nous avons relevés dans la démarche cFSM. Nous montrerons également que la classification cFSM dépend de la modélisation, ce qui constitue un inconvénient certain.

Nous terminerons ce chapitre par la proposition d'une technique originale de séparation des modes propres qui leverait certaines des insuffisances de la cFSM et qui serait aisément extensible aux méthodes numériques générales (MEF, MSBF, ...). Nous utiliserons alors des définitions indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle.

5.2 Problèmes relevés dans la cFSM

Les exemples présentés dans le chapitre précédent démontrent l'aptitude de la cFSM à séparer les modes purs d'instabilité et à évaluer la participation de chacun d'eux dans la solution fournie par la MBF conventionnelle. Les résultats fournis démontrent la capacité de la cFSM à résoudre le problème de détermination des minima correspondant aux trois types d'instabilités de base pour les sections ouvertes à parois minces. Ces minima, dont la connaissance est primordiale dans les procédures de dimensionnement par les codes modernes de calcul des profils formés à froid, n'apparaissent pas automatiquement dans les analyses de la stabilité par la MBF conventionnelle. L'approche, présentée par Adany et Schafer pour contraindre la MBF à fournir les modes purs d'instabilité en utilisant des matrices tirées de la GBT, semble fonctionner.

Nous avons néanmoins relevé certains problèmes que nous allons présenter dans cette section. Les définitions appliquées pour les modes locaux et distorsionnels mènent parfois à une classification qui est en contradiction avec la pratique courante et/ou avec les classifications de travaux antérieurs. Deux exemples caractéristiques sont l'exemple de l'instabilité distorsionnelle des sections en I et celui du voilement des éléments plans non raidis, comme les semelles des sections en U, ou faiblement raidis, comme le cas des petits raidisseurs.

D'autres cas ne peuvent toujours pas être traités par la cFSM. Nous pouvons citer celui des sections à parois minces fermées, très présentes dans la pratique de la construction en acier formé à froid. Il y a aussi celui des sections formées avec moins de trois éléments plans telles que les cornières pour lesquelles les définitions retenues par

Adany et Schafer échouent. Nous pouvons également citer le cas des sections en X, qui, sous une torsion pure, possèdent une fonction de gauchissement nulle¹. L'instabilité par rotation pure de la section transversale peut alors être classée aussi bien locale que globale. D'ailleurs, Timoshenko dans son livre sur la théorie de la stabilité élastique (Timoshenko et Gere, 1961) traite le cas des sections en X de deux manières, par la théorie de flexion des plaques et par la théorie de torsion des poutres, et trouve le même résultat. Ce cas particulier met en échec la décomposition modale proposée par Adany et Schafer. En effet, on ne peut pas avoir deux modes purs identiques, c'est-à-dire qu'on ne peut pas avoir deux vecteurs identiques dans une base vectorielle ; le contraire serait une aberration mathématique.

Un autre aspect intrigant dans cette classification est le fait que la courbe correspondant à l'instabilité distorsionnelle pure, selon la cFSM, peut comporter plusieurs minima locaux. Un cas d'espèce est représenté dans la figure 4.31 où la courbe de l'instabilité distorsionnelle de l'exemple 7 possède 2 minima. Pour identifier les types d'instabilité correspondants, il suffit dans ce cas d'observer les formes déformées. Le premier minimum est relatif à une instabilité du raidisseur de l'âme, le deuxième concerne le raidisseur du bord de la semelle. Il n'y a donc pas un seul mode distorsionnel mais plusieurs, autant que de raidisseurs. La définition de l'instabilité distorsionnelle apportée par la GBT et adoptée par Adany et Schafer ne permet pas cette distinction, d'où la nécessité de revoir encore une fois la définition de ce mode d'instabilité.

Nous rappelons également que la technique de classification développée par Adany et Schafer nécessite une numérotation stricte des nœuds, ce qui en soi n'est pas une contrainte majeure. Ce qui est par contre déterminant dans la procédure qu'ils ont développée, c'est l'obligation de classer les nœuds en plusieurs types et particulièrement l'introduction de la notion de nœuds principaux internes. Nous pensons qu'elle est à l'origine des problèmes que nous allons présenter dans ce qui suit.

5.2.1 L'instabilité distorsionnelle des sections en I

A ce jour, il semble que l'existence ou non du mode distorsionnel pour les sections en I soit une question qui reste posée. Il y a d'une part les définitions classiques du mode distorsionnel, basées sur les longueurs de demi-ondes et sur les formes des sections déformées, telles que celles données par Hancock et rapportées au paragraphe 2.2 de cette thèse. Elles en font donc une description purement phénoménologique qui a conduit certains auteurs dans divers articles australiens et allemands à classer certains modes d'instabilité des sections en I comme distorsionnels.

D'un autre côté, il y a la GBT et plus récemment la cFSM qui donnent une définition « mathématique » du mode distorsionnel. Ces deux méthodes « calculent » le nombre de modes distorsionnels. Il est égal au nombre de nœuds principaux internes moins 2. Comme les sections en I ne possèdent que deux nœuds principaux internes, le nombre de modes distorsionnels est égal à zéro selon ces deux méthodes « rationnelles ». Pour « étayer » cette affirmation et la classification de la cFSM, Adany et Schafer donnent les formes déformées des sections transversales pour différentes longueurs (figure 5.1), les courbes des forces critiques des modes purs (figure 5.2) et la décomposition modale (figure 5.3) d'une section I soumise à la flexion pure.

¹ tout comme les cornières !

L'observation des formes d'instabilité, de la figure 5.1, montre l'existence d'un mode local pour les petites longueurs, d'un mode global par flexion et torsion pour les grandes longueurs et des situations intermédiaires où la section est déformée. La courbe des charges critiques calculée par la MBF classique ne possède qu'un seul minimum, au voisinage de 100 mm, et la cFSM ne donne que deux courbes de modes purs : local et global. En se basant sur l'absence d'un minimum distorsionnel dans les résultats de la MBF, en le justifiant par la théorie de la GBT qui prédit un nombre de modes distorsionnels nul et en s'appuyant sur les résultats de la décomposition modale de la figure 5.3, Adany et Schafer concluent qu'il ne peut pas y avoir de mode distorsionnel pour les sections en I. Le mode que certains auteurs classent comme distorsionnel, serait plutôt une forte interaction entre les modes local et global.

Cette conclusion peut être contestée en présentant tout simplement un contre-exemple. Nous proposons une section en forme de I similaire à la précédente, sauf que les semelles sont beaucoup plus larges et le chargement est une compression uniforme. La hauteur de l'âme est de 228.6 mm et son épaisseur de 5.08 mm. Les largeurs des semelles sont de 254 mm et leur épaisseur est égale à 10.16 mm. Il faut noter que toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes. Les épaisseurs peuvent sembler excessives quand elles sont comparées à celles des sections courantes en acier formé à froid, quoique Rondal cite des profils formés à froid avec des épaisseurs allant jusqu'à 25 mm (Rondal, 2000). Nous donnons ces résultats car ils étaient déjà mis en forme et surtout parce que la conclusion de la GBT concerne toutes les sections à parois minces en forme de I. Le contre-exemple reste donc valable surtout, qu'à notre sens, le paramètre déterminant dans les remarques qui vont suivre est le rapport entre les dimensions des éléments plans. Le même type de résultats a été retrouvé avec des épaisseurs plus faibles.

L'évolution de la force critique en fonction de la longueur de la demi-onde pour cet exemple de section en I est donnée dans la figure 5.4. Les formes déformées pour diverses longueurs sont quant à elles données dans la figure 5.5. D'abord et contrairement à l'exemple précédent, la courbe critique présente deux minima locaux aux longueurs d'onde 170 mm et 590 mm. Les forces critiques adimensionnelles respectives sont de 1.80 et 1.67. La longueur d'onde du premier minimum est inférieure aux dimensions extérieures de la section. Celle du second est plusieurs fois supérieure aux dimensions de la section. La déformation de la section au premier point s'est produite sans que les lignes d'intersection entre les éléments plans ne bougent. La forme d'instabilité au deuxième point a impliqué la flexion de l'âme et le déplacement en mode rigide des semelles, ou devrait-on dire de l'ensemble formé des deux demi-semelles. Si on se réfère aux définitions des 3 types d'instabilité de base rapportées dans les codes de calcul et rappelées à la section 2.2 de cette thèse, il est raisonnable de classer le mode qui est apparu au premier point comme local et le second comme distorsionnel. Ce résultat implique une contradiction entre la classification des modes d'instabilité au sens de la GBT et la pratique courante de la classification.

En observant la déformée correspondant au deuxième minimum, il est possible d'y voir une grande ressemblance entre ce mode et le « voilement » des sections en U. Nous pensons que le problème soulevé par la contradiction ci-dessus est similaire à la discontinuité dans la classification soulevée au paragraphe 4.2.2.2, lors de la présentation de l'exemple 2. Toutes les figures indiquaient un changement progressif et continu des modes d'instabilité, particulièrement ceux présentant un déplacement du raidisseur, alors que la classification, dans la pratique, était discontinue. La classification selon la GBT et la cFSM n'a pas éliminé cette anomalie et contient la même discontinuité. En effet, la GBT

lie le nombre de modes distorsionnels au nombre de nœuds principaux internes. Ainsi, la simple présence d'un raidisseur de bords, aussi petit soit-il, fait basculer la classification de l'instabilité des sections en U du mode local vers le distorsionnel.

D'un autre côté, la décomposition modale, calculée par la cFSM et présentée à la figure 5.4, n'a donné que la participation de deux modes car tout simplement cette décomposition a, au préalable, supposé qu'il devait en être ainsi. Il s'agit du résultat logique des hypothèses d'une classification qui élimine d'emblée le mode distorsionnel pour les section en I. Le résultat de cette décomposition ne peut donc pas être avancé comme argument en faveur de l'absence du mode distorsionnel dans le cas des sections en I.

La cFSM et la GBT n'apportent pas non plus de solutions aux discontinuités dans la classification de comportements apparemment continus. Ces problèmes ont été présentés à la section 4.2.2 et concernaient les éléments plans non raidis ou faiblement raidis. Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats de la cFSM qui ont été utilisés par ses développeurs comme arguments à faveur alors qu'à notre jugement, il s'agit plutôt d'arguments en défaveur de la classification de la cFSM et de la GBT.

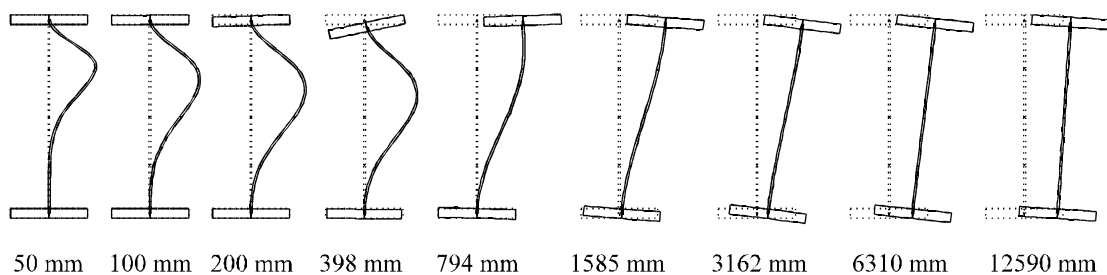


Figure 5.1 Sections déformées de l'exemple 3 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).

5.2.2 Le voilement des éléments plans non raidis ou faiblement raidis

Dans la section 4.2.2, nous avons présenté des exemples où les définitions conventionnelles de l'instabilité distorsionnelle étaient mises en difficulté. On en a alors déduit la nécessité de disposer d'une procédure de classification systématique des modes d'instabilité résultant d'un calcul numérique par éléments finis ou bandes finies. Ce besoin d'identification nécessite des définitions précises et non ambiguës pour les modes purs d'instabilité : globaux, distorsionnels et locaux. Il faut également pouvoir estimer la contribution de chacun des modes purs en cas d'interaction.

La cFSM, une version améliorée de la méthode des bandes finies qui utilise des hypothèses tirées de la GBT pour isoler les modes purs, a été récemment développée par Schafer et Adany (2006). Elle utilise des définitions « mécaniques » pour les divers modes purs d'instabilité et elle possède la capacité, grâce à une technique de décomposition modale, d'évaluer la contribution de chacun d'eux dans le cas fréquent où il se produit une interaction. Cette méthode a été mise en œuvre dans le logiciel en open source de Schafer, CUFSM, et a été rendue publique en octobre 2006.

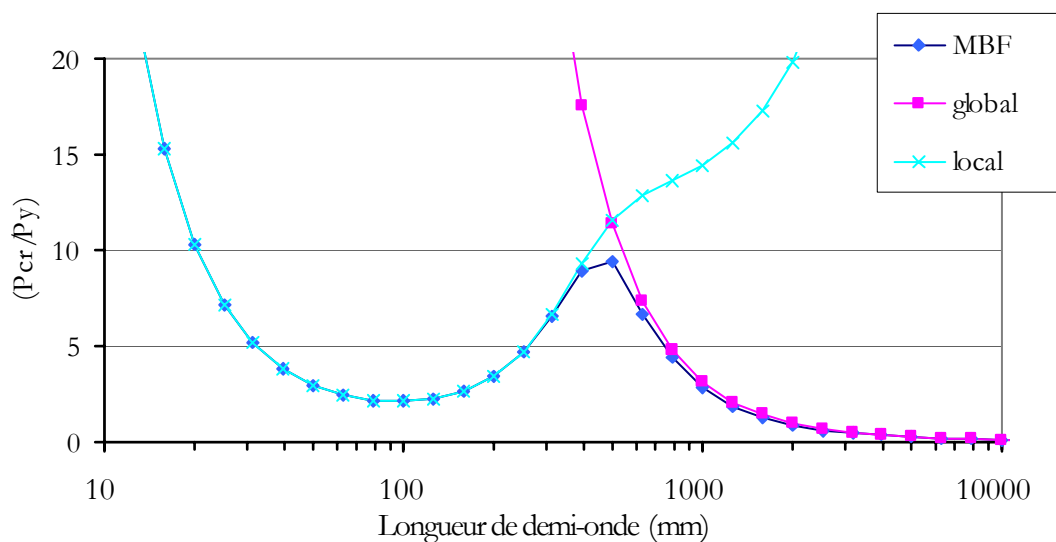


Figure 5.2 Forces critiques des modes purs de l'exemple 3 (Adany, 2004).

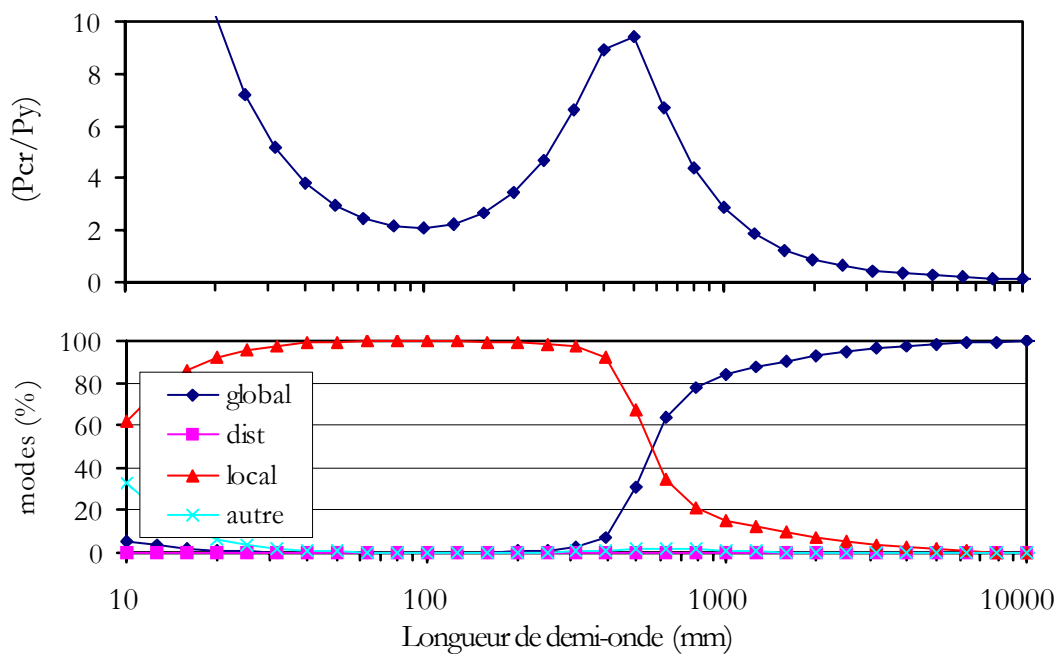


Figure 5.3 Décomposition modale pour l'exemple 3 (Adany 2004).

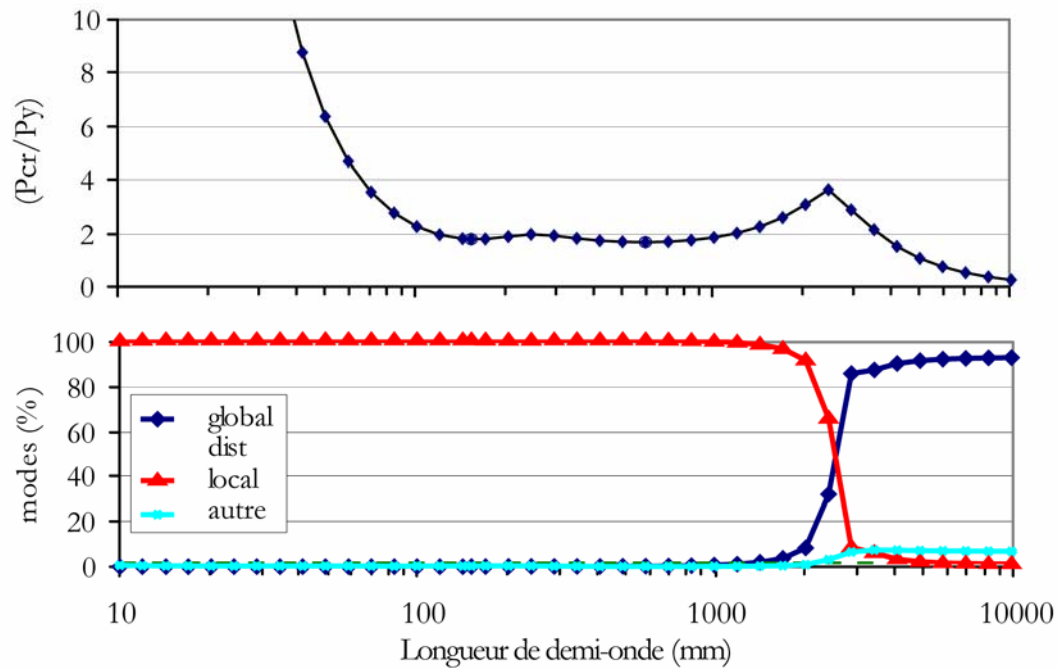


Figure 5.4 Exemple de section en I avec 2 minima locaux et sa décomposition modale la cFSM.

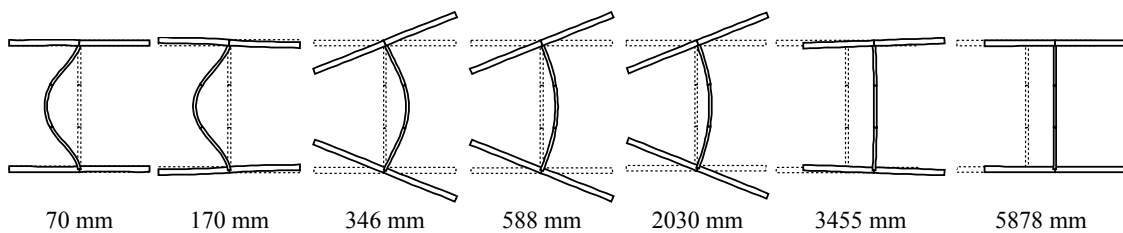


Figure 5.5 Sections déformées du profil en I avec deux minima locaux.

Pour illustrer la « puissance » de la décomposition modale proposée dans le CUFSM, Adany (2004) reprend les cas (a) et (b) de l'exemple 1 présenté dans la section 4.2.2.1. Les sections transversales sont pratiquement identiques : le cas (a) est une simple section en C alors que la section (b) est un C avec un très petit raidisseur d'âme. En fait, la dimension du raidisseur d'âme est de l'ordre de l'imperfection géométrique, puisque sa dimension maximale mesurée perpendiculairement à l'âme est de seulement 1 mm pour une hauteur d'âme de 200 mm.

Comme prévisible, les forces critiques et les formes déformées des deux sections transversales sont très semblables (voir les figures 4.3 et 4.4). La différence entre les forces critiques des sections (a) et (b) est à peine visible sur la figure 5.6.i. En conséquence, il serait logique de s'attendre à ce que la classification des modes d'instabilité soit identique pour toutes les longueurs d'instabilité. Cependant, les décompositions modales calculées par la cFSM, qui utilise les définitions mécaniques suggérées par la GBT, diffèrent de manière significative l'une de l'autre comme on peut l'observer sur les figures 5.6.ii et 5.6.iii

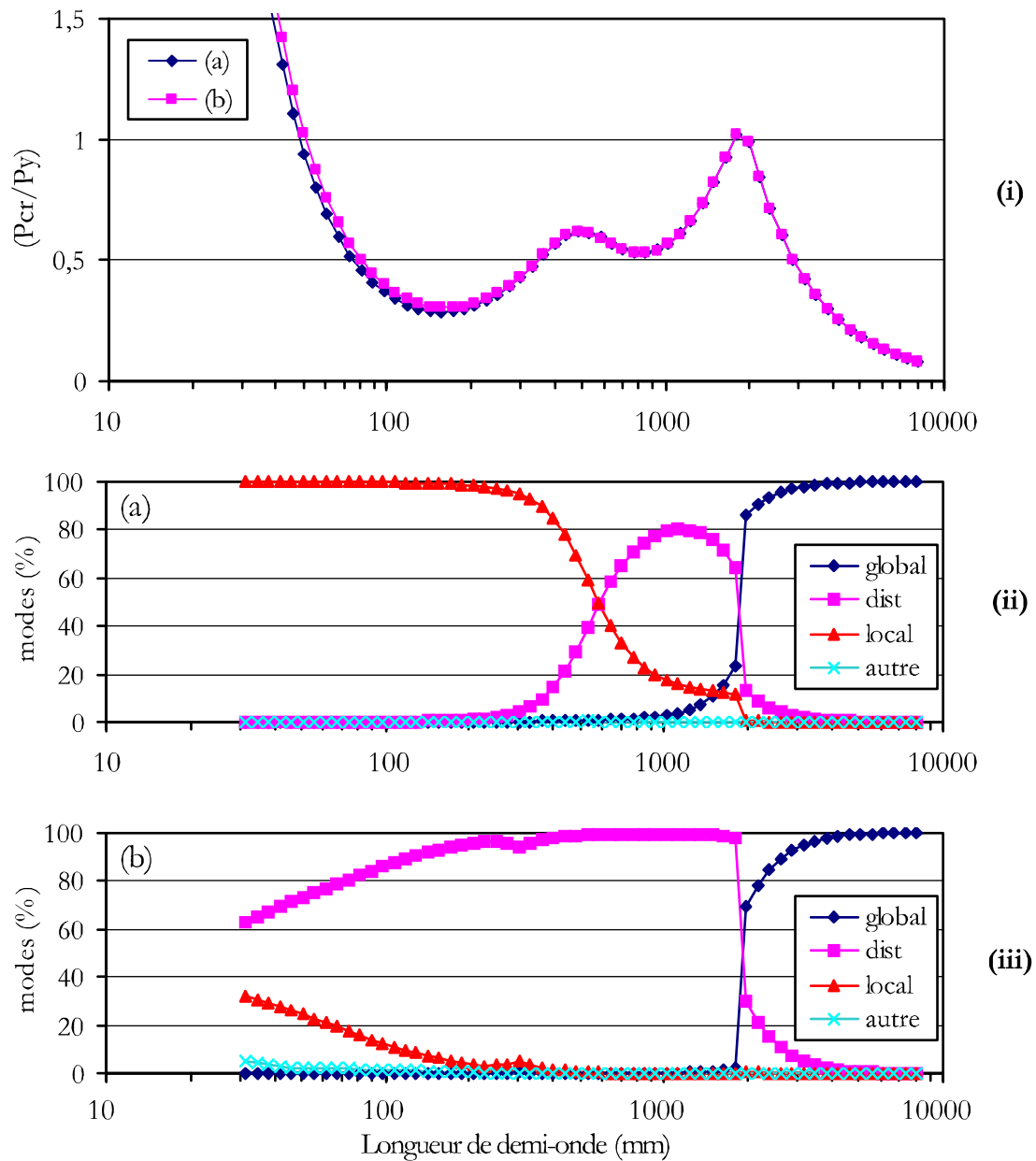


Figure 5.6 Courbes des forces critiques et décompositions modales pour les exemples 1 (a) et (b) (Adany 2004).

Pour la section en C simple (exemple 1 (a)) les courbes de décomposition modale suivent les tendances habituelles. On a principalement une instabilité locale pour de petites longueurs, une instabilité distorsionnelle pour les longueurs intermédiaires et une instabilité globale pour les grandes longueurs. On signale que la contribution du mode distorsionnel ne dépasse pas les 80% même pour des longueurs intermédiaires.

Concernant l'exemple 1 (b), la simple présence du très petit raidisseur d'âme a fait basculer dans le type distorsionnel la classification du mode d'instabilité qui comporte une déformation significative de l'âme, et a presque fait disparaître le mode local. Par exemple, à la longueur de 170 mm (qui est approximativement celle du minimum local sur la courbe

des forces critiques) la contribution des modes locaux est supérieure à 99% pour la section en C, alors que, pour la section avec le petit raidisseur d'âme, cette contribution descend à 5% et c'est celle du mode distorsionnel qui prend le dessus pour valoir 94% !

Le même problème peut être observé dans l'exemple 2. La section (a) possède une forme en U et la section (b) lui est semblable mais possède un très petit raidisseur à l'extrémité de la semelle. Les courbes des forces critiques et les décompositions modales pour les deux sections sont présentées sur la figure 5.7. Les formes des sections déformées sont représentées dans les figures 4.7 et 4.8.

La section en U ne possède pas de mode distorsionnel au sens de la GBT du moment qu'elle ne possède que 2 nœuds principaux internes, tout comme les sections en forme de I. Par contre pour l'exemple 2 (b), on obtient un mode distorsionnel dominant sur un large éventail de longueurs d'instabilité et le mode local n'existe que pour de très petites longueurs.

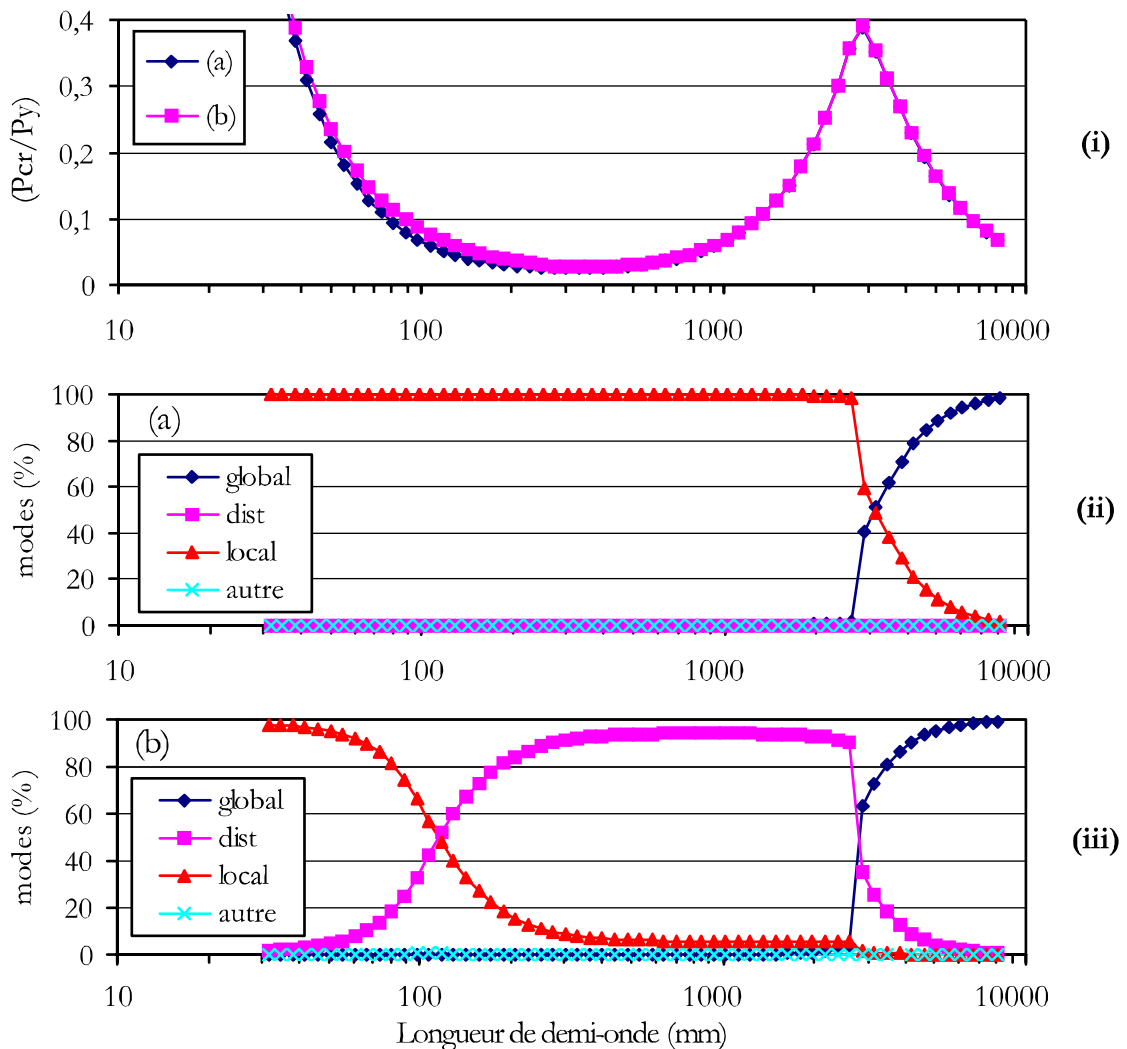


Figure 5.7 Courbes des forces critiques et décompositions modales pour les exemples 2 (a) et (b) (Adany 2004).

5.2.3 Résumé des problèmes relevés dans la cFSM

Suite à ces exemples, il est évident que la cFSM a apporté un outil fort appréciable pour le calcul des forces/contraintes critiques des différents modes purs d'instabilité qui sont des informations essentielles à toutes les procédures réglementaires de calcul des profils en acier formés à froid. Elle permet également d'évaluer la contribution de chacun de ces modes purs à un mode général calculé par la méthode des bandes finies classique. Pour arriver à réaliser ces résultats, il était nécessaire de donner des définitions mécaniques des différents types d'instabilité pure en s'inspirant de la GBT qui était, jusqu'à lors, la seule méthode capable d'isoler les modes purs d'instabilité.

Seulement, nous avons montré à travers quelques exemples que les classifications de la cFSM peuvent parfois être en contradiction avec la pratique courante et les usages dans l'ingénierie des structures. De plus, elle donne lieu, comme dans les méthodes d'identification classiques, à des discontinuités dans la classification de phénomènes apparemment continus. On peut citer l'apparition « brutale » du mode distorsionnel dans le cas où la section comporte de très petits raidisseurs ainsi que sa disparition tout aussi brutale pour l'ensemble des sections en forme de I.

Nous pouvons également citer le fait que les définitions des modes purs d'instabilité selon la GBT et, par voie de conséquence, selon la cFSM, échouent pour l'ensemble des sections qui comportent moins de 2 nœuds internes principaux, telles que les parois isolées et les sections en forme de L, T ou X. On peut remarquer qu'il s'agit de l'ensemble des sections dont la fonction de gauchissement est nulle sur la totalité de la section.

En analysant ces problèmes, il nous semble qu'ils sont tous en relation avec le fait que la définition des modes purs d'instabilité dans la GBT est liée à la définition et à l'utilisation de différents types de nœuds. Ainsi, en rajoutant un raidisseur à l'extrémité libre de la semelle d'une section en U, c'est un nœud interne principal qu'on a rajouté. De même, l'introduction d'un raidisseur dans une âme, aussi petit soit-il, équivaut à rajouter trois nœuds internes principaux. D'un autre côté, l'absence, selon la GBT, de modes distorsionnels dans les sections en I est liée au fait qu'on calcule leur nombre à partir du nombre de nœuds internes principaux. Enfin, la base vectorielle des modes purs globaux, nécessaire à la GBT, se trouve tronquée dès que le nombre de ces nœuds internes principaux descend en dessous de 2.

Ainsi, cette notion de nœud interne principal qui devrait rester au statut d'outil de modélisation se trouve élevée au rang d'élément déterminant dans la classification de phénomènes purement mécaniques. Il nous semble, à ce stade, important de rappeler que le besoin de classer les phénomènes d'instabilité en trois grandes catégories provient essentiellement du fait qu'ils possèdent différents comportements post-critiques et qu'ils possèdent, par conséquent, des procédures de dimensionnement différentes. Les classifications de la cFSM et de la GBT, quoique attrayantes et souvent utiles, ne répondent pas toujours aux besoins réels de la classification et donnent parfois lieu à des contradictions avec la pratique courante qui s'est imposée, dans la plupart des cas, suite à des résultats expérimentaux.

5.3 Améliorations de la cFSM

5.3.1 Introduction

Dans deux articles publiés récemment dans la revue scientifique « Thin Walled Structures » (Adany et Schafer, 2006a et 2006b), Adany et Schafer ont proposé des définitions mécaniques formelles et « non ambiguës » des divers types d'instabilité à partir des hypothèses de la théorie des poutres généralisée (GBT). Ces définitions sont faciles à comprendre et peuvent théoriquement être appliquées dans le contexte de n'importe quelle méthode numérique. L'application des définitions proposées à la méthode des bandes finies conventionnelle a eu comme résultat une version améliorée de la MBF, à savoir, la méthode des bandes finies contrainte, ou cFSM. Son principe et ses hypothèses ont fait l'objet d'une présentation détaillée dans le chapitre précédent.

L'approche proposée par Adany et Schafer, et qui est inspirée de la démarche « GBT » (Schardt, 1989 ; Davies et Leach, 1994), est très complexe comme le démontre le nombre d'équations et le nombre de pages nécessaires à son exposé. D'autre part, elle est limitée aux sections ouvertes et reste incapable de traiter les sections fermées qui constituent une classe importante des profils en acier formés à froid. Cette démarche impose une classification particulière des nœuds du modèle (voir section 4.5.2) pour pouvoir étudier les sections à connexions multiples (nœuds principaux externes, nœuds principaux internes déterminants et non déterminants...) et les sections comportant des bandes coplanaires (nœuds secondaires). Cette classification est nécessaire dans la démarche d'Adany et Schafer car la principale matrice de contrainte, notée \mathbf{R}_{GD} ci-dessus, est déterminée suite à une succession d'étapes qui doivent être traitées dans un ordre très précis.

La cFSM a été programmée par ses auteurs sous MATLAB et le résultat est un logiciel (CUFSM v3.12) très facile à utiliser et d'une grande utilité pratique. Pour qu'il en soit ainsi, le travail de programmation a dû être fastidieux. En effet, le programme est difficile à suivre, à comprendre et, très probablement, à entretenir. Nous avons d'ailleurs relevé dans la nouvelle version du CUFSM des bugs dans des options qui fonctionnaient correctement dans la version précédente. Nous citons, à titre d'exemple, que la modélisation des relations de type diaphragme, très utiles pour contraindre le profil à flamber dans le mode global, ne fonctionne plus correctement.

Dans cette section, nous proposerons une simplification des définitions d'Adany et de Schafer pour les modes d'instabilité et nous procéderons à la détermination des matrices de contrainte d'une manière beaucoup plus simple et surtout, beaucoup moins restrictive. Nous nous intéresserons particulièrement à la matrice \mathbf{R}_{GD} qui permet d'isoler les modes globaux et distorsionnels, ce dernier étant l'instabilité qui pose traditionnellement le plus de problèmes. La formulation de cette matrice est une étape cruciale dans la démarche de Adany et Schafer. Elle représente la quasi-totalité de l'article présentant le développement de la méthode (Adany et Schafer, 2006a). Dans ce chapitre, nous proposons une formulation beaucoup plus simple mais surtout beaucoup plus générale et efficace dans le sens où elle permettrait à la cFSM de conserver toute la souplesse des méthodes numériques.

5.3.2 Matrice de rigidité d'une bande dans l'espace GD

D'après le chapitre 2, la matrice de rigidité d'une bande finie conventionnelle est formée d'une sous-matrice membranaire et d'une autre flexionnelle (Eq. 2.7). Ces sous-matrices sont calculées séparément grâce au fait que les déplacements membranaires, (u, v) , et flexionnel, (w) , sont découplés.

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ef} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Nous allons nous intéresser, en premier lieu, à la sous-matrice flexionnelle \mathbf{k}_{ef} dans le cas des instabilités distorsionnelle et globale, c'est-à-dire dans le cas où l'instabilité se produit dans le sous-espace GD. Comme rappelé à la section 2.2, ces deux types d'instabilité se produisent à des longueurs de demi-onde, a , beaucoup plus grandes que la dimension caractéristique, b , de la section (AISI, 2004b).

$$a \gg b \quad (5.2)$$

Dans ce cas, il est évident que toute flexion d'une paroi plane de la section est de type « flexion cylindrique des plaques ». Ceci signifie que, dans le repère local de la bande (voir la figure 2.5), les courbures χ_y et χ_{xy} peuvent être négligées devant χ_x . Ainsi, la première hypothèse de notre démonstration est que dans le sous-espace GD on a :

$$\chi_y = \chi_{xy} = 0 \quad (5.3)$$

La conséquence immédiate de cette hypothèse est que les déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_f$, définies par l'équation (2.4.c) deviennent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\chi_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_f^{\text{GD}} \mathbf{d}_{w\theta} \quad (5.4)$$

Comme dans l'équation (2.7.c), la sous-matrice de rigidité flexionnelle d'une bande finie dans le cas de la flexion cylindrique est évaluée par :

$$\mathbf{k}_{ef} = \int \mathbf{B}_f^{\text{GD}T} \mathbf{E} \mathbf{B}_f^{\text{GD}} dV \quad (5.5)$$

Où la matrice de proportionnalité \mathbf{E} est définie dans l'équation (2.6).

En faisant les substitutions adéquates et en effectuant les intégrations, on arrive à l'expression suivante :

$$\mathbf{k}_{\text{ef}} = \begin{bmatrix} +\frac{6a}{b^3} D_x & & & & \text{sym} \\ +\frac{3a}{b^2} D_x & +\frac{2a}{b} D_x & & & \\ -\frac{6a}{b^3} D_x & -\frac{3a}{b^2} D_x & +\frac{6a}{b^3} D_x & & \\ +\frac{3a}{b^2} D_x & +\frac{a}{b} D_x & -\frac{3a}{b^2} D_x & +\frac{2a}{b} D_x & \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\text{Où, } D_x = E_x t^3 / 12 (1 - \nu_x \nu_y)$$

La constante E_x est le module d'élasticité suivant la direction x et les coefficients ν_x et ν_y sont les coefficients de Poisson suivant les deux directions orthogonales x et y , respectivement. Les grandeurs a et b sont les dimensions de la bande suivant les directions y et x , respectivement ; ce sont la longueur et la largeur de la bande, respectivement.

Cette sous-matrice ressemble beaucoup à la très populaire matrice de rigidité de l'élément poutre de Bernoulli, qu'on rappelle ci-dessous :

$$\mathbf{k}_{\text{poutre}} = \begin{bmatrix} +\frac{12EI}{L^3} & & & & \text{sym} \\ +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} & & & \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{12EI}{L^3} & & \\ +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} & \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Où E est le module de Young, I le moment d'inertie de la poutre et L est sa longueur.

En effet, il suffit de poser

$$EI = aD_x/2 \text{ et } L = b \quad (5.8.a,b)$$

pour retrouver la sous-matrice \mathbf{k}_{ef} de la bande dans le cas de la flexion cylindrique. Par conséquent, on peut très bien étudier ce problème par des poutres équivalentes, comme cela a été fait dans les articles d'Adany et Schafer (2006a et 2006b) ainsi que dans beaucoup de travaux utilisant la GBT (Silvestre et Camotim, 2002a). Notre contribution à cette approche est de dire que le modèle de la poutre équivalente est le résultat de l'hypothèse de flexion cylindrique des plaques. Nous fournissons ainsi une explication très claire et non ambiguë au modèle de la poutre équivalente.

Le facteur $a/2$ qui apparaît dans le terme de raideur provient du fait que la variation de la flèche et de la déformation dans la direction y est sinusoïdale (Eq.2.3). L'évaluation de la matrice de rigidité fait apparaître l'intégrale ci-dessous :

$$\int_0^a \sin^2(\pi y/a) dy = a/2 \quad (5.9)$$

Dans le modèle de la poutre équivalente des autres auteurs, ce facteur $a/2$ ne figure pas car ils supposent implicitement que la distribution de la flèche dans le sens transversal de la poutre, qui est la direction y , est constante. Pour obtenir la raideur de la poutre équivalente, ils prennent alors une portion de la bande de dimension unitaire suivant l'axe y et considèrent $EI = D_x$, comme cela a été fait à la section 4.5.5.4. Il faut cependant signaler que, pour élaborer la matrice \mathbf{R}_{GD} qui est l'objectif de cette section, ce qui importe vraiment ce ne sont pas les valeurs réelles de la rigidité mais c'est plutôt la distribution de la rigidité. Nous retrouvons d'ailleurs les mêmes résultats comme nous le montrerons plus loin dans cette section.

Pour résumer l'étape ci-dessus, nous avons modifié la matrice de rigidité d'une bande finie, ou plus exactement sa sous-matrice correspondant au comportement flexionnel, pour tenir compte de l'hypothèse de la flexion cylindrique. La suite naturelle dans l'analyse par la méthode des bandes finie consiste à transformer la matrice élémentaire du repère local vers le repère global puis à l'assembler à la matrice de la structure (voir § 2.3.2.4) :

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{K}_e^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_e^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{K}_E = \sum_{\text{assemblage}}^{s=1 \text{ à } ns} \mathbf{K}_e^{(s)} \quad (5.12)$$

Où, ns est le nombre total de bandes modélisant la structure.

5.3.3 Matrice de contrainte concernant les déformations membranaires

Les autres hypothèses utiles à notre démonstration sont celles qui concernent les déformations membranaires à l'intérieur d'une bande, qu'on a appelé ci-dessus les « hypothèses 1 et 2 de la GBT » :

$$\varepsilon_x = 0 \text{ et } \gamma_{xy} = 0 \quad (5.13.a,b)$$

L'introduction de ces 2 hypothèses aux déplacements membranaires, u et v , de la bande a été présentée au paragraphe 4.5.5.2 et a donné lieu à deux relations entre les degrés de liberté locaux u et v de la bande (Eq.4.19). En notant par i et j les nœuds origine

et extrémité de la bande, l'équation (4.19) peut être étendue pour concerner l'ensemble des DDL locaux de la bande, avant et après introduction des hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1/k_m b_s & 0 & 0 & 0 & -1/k_m b_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_m b_s & 0 & 0 & 0 & -1/k_m b_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

Nous remarquons que cette matrice contient deux colonnes nulles, ce qui veut évidemment dire que, suite à l'application des 2 relations de contrainte de la bande, deux degrés de liberté de la bande, u_i et u_j , ne sont plus effectifs et qu'au lieu des 8 DDL initiaux nous n'avons plus que 6 DDL indépendants ; u_i et u_j ont été exprimés en fonction des DDL de gauchissement. La relation ci-dessus peut être réécrite sous une forme plus compacte où la matrice de contrainte entre les nœuds de la bande s est notée $\mathbf{r}^{(s)}$:

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{d}^{(s)} \quad (5.15)$$

Cette équation peut être transformée pour concerner les degrés de liberté des nœuds i et j dans le repère global en utilisant la matrice habituelle de changement de repère de la bande, $\mathbf{\Gamma}^{(s)}$, qui, on le rappelle, est une matrice de rotation orthonormée (Eqs. (2.16) et (2.17)) :

$$\mathbf{D}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} = \mathbf{R}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad (5.16)$$

Ensuite, cette matrice de contrainte de la bande s rapportée au repère global, $\mathbf{R}^{(s)}$, peut être étendue au moyen de sous-matrices identité pour aboutir à une matrice $\mathbf{H}^{(s)}$ qui concerne l'ensemble des DDL de la structure, $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{H}^{(s)} \mathbf{\Delta} \quad (5.17)$$

La dimension de $\mathbf{\Delta}$ est égale au nombre de nœuds, n , multiplié par 4 qui est le nombre de degrés de liberté par nœud.

En définitif, l'équation de contrainte provenant des hypothèses sur les déformations membranaires à l'intérieur d'une bande (hypothèses 1 et 2 de la GBT) peut être vue comme une transformation des DDL de la structure. En considérant successivement les

ns bandes constituant la structure à parois minces, on obtient une matrice de transformation \mathbf{HH} qui incorpore les contraintes apportées par toutes les bandes :

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)} \dots \mathbf{H}^{(ns)} \mathbf{\Delta} = \mathbf{HH} \mathbf{\Delta} \quad (5.18)$$

Du moment que chaque bande apporte deux relations entre les DDL, ceci signifie qu'après chaque transformation $\mathbf{H}^{(s)}$, deux degrés de liberté ne sont plus effectifs et doivent être réduits. Normalement, seuls les DDL U et/ou W sont concernés par l'équation (5.16) qui les relie aux DDL de gauchissement V. Ainsi, et en fonction de l'angle d'orientation de la bande, ce sont deux U ou deux W qui sont « éliminés » pour accomplir les relations de contrainte d'une bande. Cependant, il y a un problème si l'un des DDL à éliminer a été déjà réduit suite à une transformation antérieure. On rencontre ce problème lorsqu'on est en présence des nœuds secondaires qui sont communs à deux bandes coplanaires. On le rencontre également dans le cas des nœuds principaux reliés à plus de bandes, c'est-à-dire dans le cas des sections à connexions multiples. Autrement dit, il s'agit des deux cas traités isolément dans la démarche d'Adany et Schafer.

Dans ces cas et pour accomplir la relation de contrainte apportée par la bande en cours, une relation entre les DDL V concernés doit exister. Autrement dit, certains DDL de gauchissement ne sont plus indépendants (ou effectifs) et doivent être exprimés en fonction d'autres DDL V, pour être ensuite « réduits ».

Pour expliquer la procédure, considérons d'abord le cas d'une série de bandes coplanaires formant une paroi plane comme montrée dans la figure 5.8. A titre d'exemple, supposons que nous avons affaire à 4 bandes numérotées de 1 à 4 qu'on peut également définir à partir de leurs nœuds origine et extrémité : i,k, j,k, j,q, et q,l respectivement. Nous pouvons écrire dans le repère local x commun à toutes ces bandes ($\hat{a} \pm \pi$) leurs relations de contrainte successives par application de l'équation (4.19) :

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_k^{(1)} = (V_k - V_i)/k_m b_1 \\ u_k^{(2)} &= u_j^{(2)} = (V_j - V_k)/k_m b_2 \\ u_j^{(3)} &= u_q^{(3)} = (V_q - V_j)/k_m b_3 \\ u_q^{(4)} &= u_l^{(4)} = (V_l - V_q)/k_m b_4 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Il faut souligner que $v = V$ et que b_i est la largeur de la bande i.

La compatibilité des déplacements permet d'égaliser les DDL u des 3 nœuds de jonction entre bandes et de déduire 3 relations entre les V :

$$\begin{cases} u_k^{(1)} = u_k^{(2)} \\ u_j^{(2)} = u_j^{(3)} \\ u_q^{(3)} = u_q^{(4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (V_k - V_i)/b_1 = (V_j - V_k)/b_2 \\ (V_j - V_k)/b_2 = (V_q - V_j)/b_3 \\ (V_q - V_j)/b_3 = (V_l - V_q)/b_4 \end{cases} \quad (5.20)$$

En résolvant ce système, nous pouvons exprimer les DDL V des nœuds intermédiaires (ou secondaires) en fonction des DDL V des 2 nœuds externes (ou principaux), i et l , limitant la paroi plane.

$$\begin{aligned} V_k &= ((b_2 + b_3 + b_4)V_i + b_1V_l)/(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ V_j &= ((b_3 + b_4)V_i + (b_1 + b_2)V_l)/(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ V_q &= (b_4V_i + (b_1 + b_2 + b_3)V_l)/(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Il s'agit tout simplement d'une interpolation linéaire. Ainsi, si les DDL de gauchissement des nœuds secondaires sont calculés par interpolation linéaire, c'est dû, premièrement, au fait que les déplacements membranaires u et v dans la méthode des bandes finies ont une variation linéaire selon l'axe x local et, deuxièmement, suite aux hypothèses 1 et 2 de la GBT sur les déformations membranaires. C'est-à-dire que l'hypothèse n°3 de la section 4.5.3 dans la démarche d'Adany et Schafer est tout simplement superflue.

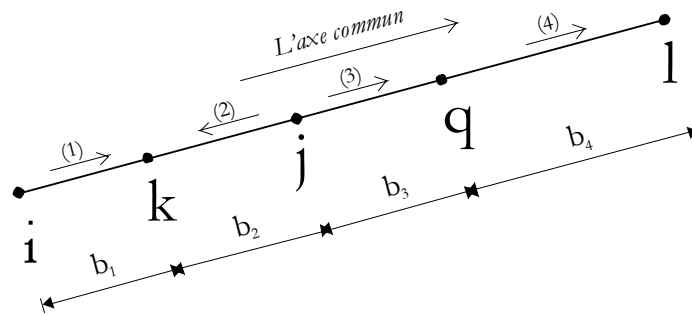


Figure 5.8 Une paroi plane formée par 4 bandes

Cette équation (5.21) est une relation de contrainte qui peut être étendue au moyen de matrices identité pour concerner l'ensemble des DDL de la structure à parois minces. La matrice ainsi obtenue peut être vue comme une autre matrice de transformation des DDL globaux de la structure qu'il faut post-multiplier à la matrice \mathbf{HH} de l'équation (5.18). Les degrés de liberté de gauchissement de tous les nœuds secondaires peuvent être déduits de ceux des nœuds principaux et sont, par conséquent, éliminés ou réduits.

Pour ce qui est des sections à connexions multiples, la relation (4.43) développée au chapitre 4 relie les DDL de gauchissement des nœuds non déterminants, \mathbf{D}_{L2} , aux DDL de gauchissement des nœuds déterminants \mathbf{D}_{L1} . La procédure de détermination de cette relation peut être améliorée en évitant notamment l'inversion de la matrice de rotation. Cependant, le plus important reste que, encore une fois, cette relation peut être étendue au moyen de matrices identité pour obtenir une matrice de transformation reliant l'ensemble des DDL de la structure et qu'il faudra la post-multiplier à la série de produits des matrices de transformation successives. Il faut noter que \mathbf{D}_{L2} contient les DDL de gauchissement qui ne sont pas effectifs et qui doivent être éliminés.

Finalement, ces séries de transformations permettent de relier tous les DDL de la structure à parois minces qui sont au nombre de $4 \times n$, avant et après application des relations de contrainte. La matrice de transformation finale est notée \mathbf{HH} :

$$\Delta = \mathbf{HH} \Delta \quad (5.22)$$

En utilisant une matrice d'identité \mathbf{I} de même dimension que \mathbf{HH} , cette relation peut être réécrite comme suit :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{HH})\Delta = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Ou bien, en introduisant la notation $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{HH}$, la relation de contrainte peut s'écrire :

$$\mathbf{H}.\Delta = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

En ne prenant de cette relation matricielle (suite à un partitionnement de la matrice \mathbf{H}) que les lignes relatives aux DDL à éliminer, on arrive à écrire la relation :

$$\mathbf{H}_{ee}\Delta_e + \mathbf{H}_{ek}\Delta_k = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

Où Δ_e est le vecteur des DDL à éliminer suite à l'application des conditions de contrainte et Δ_k est le vecteur contenant les DDL qui n'ont pas été concernés par les transformations successives et qui sont « retenus » ou « déterminants » pour la phase finale. La dimension de Δ_e est égale à deux fois le nombre de bandes ($2 \times ns$) du moment que chaque bande apporte 2 équations de contrainte. La dimension de Δ_k est évidemment égale à $4 \times nn - 2 \times ns$. \mathbf{H}_{ee} est une sous-matrice carrée résultant du partitionnement de \mathbf{H} ; \mathbf{H}_{ek} est, quant à elle, une sous-matrice rectangulaire

L'équation (5.25) peut être réécrite ainsi :

$$\Delta_e + \mathbf{H}_{ee}^{-1}\mathbf{H}_{ek} \Delta_k = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Ou bien, en introduisant la notation $\mathbf{C}_{ek} = \mathbf{H}_{ee}^{-1}\mathbf{H}_{ek}$ on a :

$$\Delta_e + \mathbf{C}_{ek}\Delta_k = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

Cette équation peut être vue, tout simplement, comme une version modifiée des relations de contrainte. Elle représente la « compilation » de l'application des hypothèses 1 et 2 de la GBT à toutes les bandes formant la structure à parois minces.

5.3.4 Application des équations de contrainte à la matrice de rigidité

L'objectif de cette section est de combiner les résultats des deux sections précédentes. C'est-à-dire que nous allons rechercher la conséquence de l'hypothèse de

flexion cylindrique de la bande et des hypothèses 1 et 2 de la GBT concernant les déformations membranaires sur la matrice de rigidité.

L'assemblage des matrices élémentaires modifiées selon l'hypothèse de la flexion cylindrique donne une matrice globale de la structure, que nous avons noté \mathbf{K}_E dans l'équation (5.12). Cette matrice peut être partitionnée en 4 sous matrices en regroupant du même côté les DDL à éliminer et de l'autre, les DDL à conserver.

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} & \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{ke} & \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Cette matrice établit la relation linéaire entre les forces et les DDL, dans leurs deux catégories à éliminer et à conserver :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} & \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{ke} & \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{F}_k \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

On peut la réécrire ainsi :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} \\ \mathbf{K}_E^{ke} \end{bmatrix} \Delta_e + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} \Delta_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{F}_k \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

En prémultipliant l'équation (5.27) par le multiplicateur de Δ_e dans l'équation ci-dessus, on arrive à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} \\ \mathbf{K}_E^{ke} \end{bmatrix} \Delta_e + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} \\ \mathbf{K}_E^{ke} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{ek} \Delta_k = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

La soustraction membre à membre de ces deux dernières équations permet d'aboutir à :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} \\ \mathbf{K}_E^{ke} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{ek} \right) \Delta_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{F}_k \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

En ne prenant que les lignes relatives aux DDL à éliminer, on a :

$$\left(\mathbf{K}_E^{ek} - \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek} \right) \Delta_k = \mathbf{F}_e \quad (5.33)$$

Quant aux autres équations, elles s'écrivent :

$$\left(\mathbf{K}_E^{kk} - \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek} \right) \Delta_k = \mathbf{F}_k \quad (5.34)$$

En introduisant une matrice de multiplicateurs de Lagrange λ^{ke} , les équations (5.33) et (5.34) peuvent être combinées comme suit :

$$\left(\mathbf{K}_E^{kk} - \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek} \right) \Delta_k - \mathbf{F}_k + \lambda^{ke} \left[\left(\mathbf{K}_E^{ek} - \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek} \right) \Delta_k - \mathbf{F}_e \right] = \mathbf{0} \quad (5.35)$$

A partir de la procédure standard des multiplicateurs de Lagrange (Denn, 1969), on doit avoir :

$$\lambda^{ke} = \frac{\partial \Delta_e}{\partial \Delta_k} \quad (5.36)$$

En exploitant l'expression (5.27), on peut aisément déduire que :

$$\lambda^{ke} = -\mathbf{C}_{ek}^T \quad (5.37)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation (5.35) on trouve :

$$\left(\mathbf{K}_E^{kk} - \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek} - \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ek} + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek} \right) \Delta_k = \mathbf{F}_k - \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{F}_e \quad (5.38)$$

Ce système d'équations linéaires provient de l'application des équations de contraintes linéaires (5.27) au système d'équations linéaires initial (5.29). Le résultat est une matrice de rigidité réduite :

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_E^{kk} - \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek} - \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ek} + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek} \quad (5.39)$$

Nous rappelons que le nombre d'équations à réduire est égal à deux fois le nombre de bandes du moment que nous avons 2 équations de contrainte par bande. En opérant ainsi pour introduire ces relations de contrainte, les sous-matrices membranaires de la matrice de rigidité sont automatiquement éliminées (ou ignorées) du moment que la relation entre les DDL membranaires u et v est forcée à reproduire les équations de contraintes apportées par les hypothèses 1 et 2 de la GBT et traduites par la relation (5.27).

Ainsi, la matrice \mathbf{K}_R est la matrice de rigidité d'une structure à parois minces discrétisée en bandes finies et qui tient compte des hypothèses $\chi_y = \chi_{xy} = 0$ et $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$.

5.3.5 Développement de la matrice de contrainte du sous espace GD

La cFSM, tout comme la GBT, est basée sur la construction d'une matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} qui relie les déplacements dans l'espace réduit (GD) des modes globaux et distorsionnels, aux déplacements de l'espace général. Cette matrice exprime le fait que tous les DDL transversaux ($\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{\Theta}$) (ainsi que les DDL V des nœuds non déterminants)

peuvent être entièrement définis par les déplacements de gauchissement \mathbf{V} (des nœuds déterminants) dans le sous espace GD.

Pour définir ce sous espace, nous avons proposé uniquement deux hypothèses : $\chi_y = \chi_{xy} = 0$ et $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$ en remplacement des 4 proposées par Adany et Schafer (voir section 4.5.3). L'effet de ces hypothèses sur la matrice de rigidité d'une structure à parois mince a été présenté dans les sections précédentes. Le résultat de ce travail est une matrice de rigidité réduite \mathbf{K}_R . Elle ne concerne que les degrés de liberté effectifs Δ_k , c'est-à-dire ceux qui n'ont pas été éliminés par l'application des relations de contrainte. Ces DDL sont qualifiés d'effectifs car les autres DDL qui ont été réduits peuvent en être déduits grâce à l'équation (5.27).

L'étape suivante dans la détermination de la matrice \mathbf{R}_{GD} consiste à relier tous les DDL aux degrés de liberté de gauchissement effectifs \mathbf{V} . Il s'agit alors d'imposer des valeurs à \mathbf{V} (chargement cinématique) et de calculer le reste des DDL. En regroupant les \mathbf{V} du même côté et en notant par Δ_u le reste des DDL de Δ_k , la matrice \mathbf{K}_R est divisée en quatre sous matrice et l'équation de l'équilibre statique s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_R^{VV} & \mathbf{K}_R^{V\Delta} \\ \mathbf{K}_R^{\Delta V} & \mathbf{K}_R^{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_V \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Comme l'objectif est de calculer les DDL sous l'effet de \mathbf{V} seul, les forces correspondant à Δ_u doivent nécessairement être nulles. Celles correspondant à V ne sont pas nulles car elles représentent, en quelque sorte, les réactions d'appuis (inconnues) sous les déplacements imposés. La deuxième équation du système matriciel ci-dessus permet de trouver la relation :

$$\Delta_u = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_R^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_R^{\Delta V} \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (5.41)$$

L'équation (5.41) peut être étendue au moyen d'une matrice identité \mathbf{I}_V ayant la même dimension que V pour concerner l'ensemble des DDL Δ_k .

$$\Delta_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V \\ -\mathbf{K}_R^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_R^{\Delta V} \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (5.42)$$

De la même manière, l'équation (5.27) peut être étendue en utilisant une matrice identité \mathbf{I}_{Δ_k} de dimension égale à celle de Δ_k pour toucher l'ensemble des DDL Δ de la structure à parois minces.

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_k \\ \Delta_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\Delta_k} \\ -\mathbf{C}_{ek} \end{bmatrix} \Delta_k \quad (5.43)$$

En remplaçant dans l'équation (5.43) Δ_k par son expression fournie par l'équation (5.42), on trouve :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\Delta_k} \\ -\mathbf{C}_{ek} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V \\ -\mathbf{K}_R^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_R^{\Delta V} \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (5.44)$$

Il s'agit donc de la matrice \mathbf{R}_{GD} recherchée. En effet, elle relie tous les DDL Δ aux degrés de liberté de gauchissement effectifs \mathbf{V} .

$$\mathbf{R}_{GD} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\Delta_k} \\ -\mathbf{C}_{ek} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V \\ -\mathbf{K}_R^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_R^{\Delta V} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Nous avons ainsi exprimé la matrice de contrainte de l'espace GD par une formule unique en remplacement de la définition par parties (voir Eqs. (4.4) et (4.13)) proposée par Adany et Schafer (2006a).

5.3.6 Exemple numérique

Afin de valider la démarche proposée, nous présentons un exemple numérique d'évaluation de la matrice \mathbf{R}_{GD} . La section choisie a une forme symétrique en sigma. Ses dimensions mesurées au niveau de la ligne moyenne ainsi que le modèle MBF retenu sont présentés dans la figure 5.9. La longueur du profil est de 650 mm, le module de Young $E = 210\,000$ MPa, et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le modèle MBF compte 11 nœuds, ce qui donne 44 DDL. La matrice \mathbf{R}_{GD} les relie aux DDL de gauchissement \mathbf{V} des 10 nœuds « principaux ». Le nœud 6 divise une paroi plane en 2, ce qui en fait un nœud « secondaire ». La matrice \mathbf{R}_{GD} obtenue par notre méthode est donnée par la figure 5.10. Elle est identique à celle calculée, de manière beaucoup plus compliquée et en plusieurs phases, par la méthode d'Adany et Schafer (2006a et 2006b).

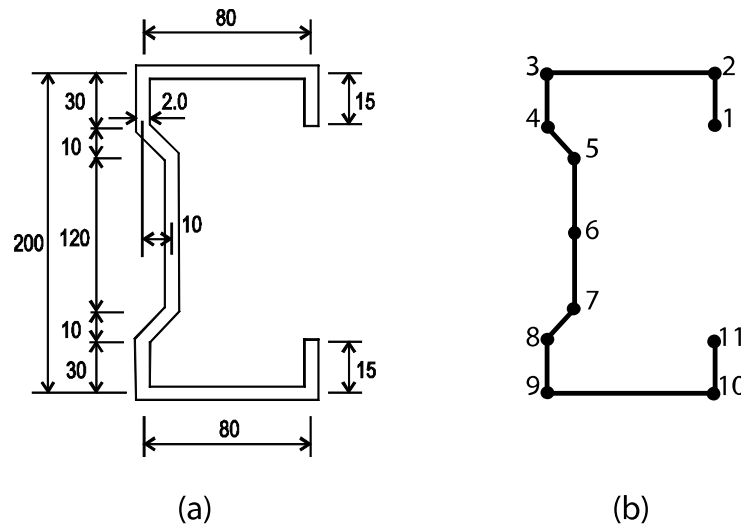


Figure 5.9 (a) Une section sigma et (b) son modèle MBF.

U_1	3.5729	-6.8220	8.2479	-10.2685	4.8912	0.4032	0.0251	-0.0508	0.0012	-0.0002
-	0	-2.5863	2.5863	0	0	0	0	0	0	0
-	0	-2.5863	2.5863	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	-6.8967	27.5869	-20.6901	0	0	0	0	0
-	0	0	0	20.6901	-22.4143	1.7242	0	0	0	0
-	0.0553	-0.2855	12.1435	-3.4102	-8.5030	-8.5030	-3.4102	12.1435	-0.2855	0.0553
-	0	0	0	0	1.7242	-22.4143	20.6901	0	0	0
-	0	0	0	0	0	-20.6901	27.5869	-6.8967	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	2.5863	-2.5863	0
-	0	0	0	0	0	0	0	2.5863	-2.5863	0
U_{11}	-0.0002	0.0012	-0.0508	0.0251	0.4032	4.8912	-10.2685	8.2479	-6.8220	3.5729
V_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
V_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
W_1	-13.793	13.793	0	0	0	0	0	0	0	0
-	-13.793	13.793	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	6.897	-6.897	0	0	0	0	0	0
-	0	0	6.897	-6.897	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1.724	-1.724	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1.724	-1.724	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1.724	-1.724	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	6.897	-6.897	0	0
-	0	0	0	0	0	0	6.897	-6.897	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0	-13.793	13.793
W_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	-13.793	13.793
Θ_1	-0.238196	0.282380	-0.377441	0.684567	-0.326081	-0.026882	-0.001674	0.003389	-0.000080	0.000015
-	-0.238196	0.282380	-0.377441	0.684567	-0.326081	-0.026882	-0.001674	0.003389	-0.000080	0.000015
-	-0.040862	-0.047507	0.496254	-1.110508	0.652161	0.053763	0.003347	-0.006778	0.000159	-0.000031
-	0.007723	-0.039904	-0.371846	0.135482	0.397851	-0.137769	-0.008577	0.017369	-0.000408	0.000079
-	-0.003466	0.017908	-0.761647	0.893357	0.014366	-0.137171	0.023662	-0.047918	0.001127	-0.000218
-	0.000812	-0.004195	0.178432	0.041203	-0.339615	0.339615	-0.041203	-0.178432	0.004195	-0.000812
-	0.000218	-0.001127	0.047918	-0.023662	0.137171	-0.014366	-0.893357	0.761647	-0.017908	0.003466
-	-0.000079	0.000408	-0.017369	0.008577	0.137769	-0.397851	-0.135482	0.371846	0.039904	-0.007723
-	0.000031	-0.000159	0.006778	-0.003347	-0.053763	-0.652161	1.110508	-0.496254	0.047507	0.040862
-	-0.000015	0.000080	-0.003389	0.001674	0.026882	0.326081	-0.684567	0.377441	-0.282380	0.238196
Θ_{11}	-0.000015	0.000080	-0.003389	0.001674	0.026882	0.326081	-0.684567	0.377441	-0.282380	0.238196

Figure 5.10 La matrice R_{GD} de la section sigma

5.3.7 Conclusion

Pour conclure cette contribution au développement de la cFSM, nous pouvons dire que, pour déterminer la matrice de contrainte R_{GD} qui est la clé de voûte de la cFSM et de la GBT, uniquement deux hypothèses sont nécessaires :

1. $\chi_y = \chi_{xy} = 0$ (flexion cylindrique des plaques)
2. $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$

L'hypothèse 3 de la section 4.5.3 a été déclarée superflue alors que l'hypothèse 4 de la démarche d'Adany et Schafer, dont la lecture est à notre sens assez difficile, a été remplacée par celle, toute simple, sur la flexion cylindrique. Parler alors d'équilibre devient superflu du moment que la méthode des déplacements à l'origine de la MBF est basée sur les conditions d'équilibre et de compatibilité.

Dans la démarche que nous avons proposée, aucune classification particulière des nœuds n'a été faite et aucune numérotation particulière n'est exigée. Notre proposition préserve la flexibilité de la méthode numérique qui est la MBF en laissant libre la numérotation des nœuds, la numérotation des éléments, le choix des caractéristiques géométriques et mécaniques,... Un autre point fort de la nouvelle démarche est l'élimination du recours au modèle de la poutre équivalente ce qui apporte d'avantage de cohérence à la cFSM. Enfin, il n'est plus nécessaire de recourir à la distinction entre les sections à connexions multiples de celles à connexions simples.

Nous avons donc proposé une version améliorée beaucoup plus souple, générale et efficace.

5.4 Amélioration de la définition/classification de l'instabilité distorsionnelle

5.4.1 Introduction

La contribution présentée ci-dessus améliore ostensiblement la flexibilité de la cFSM et lui redonne toute la souplesse d'une méthode numérique d'analyse des structures. Le programme informatique qui en résulte est beaucoup plus lisible et sera probablement plus facile à entretenir. Cependant, l'essence même de la classification des modes purs d'instabilité n'a pas changé. Elle repose sur les définitions données par la GBT, qui, avec le cFSM, sont les seules méthodes capables d'isoler les modes purs d'instabilité.

Nous avons montré à travers quelques exemples que les classifications de la cFSM sont parfois en contradiction avec la pratique courante et les usages dans l'ingénierie des structures. D'un autre côté, elle peut produire des discontinuités dans la classification de phénomènes apparemment continus, telle que l'apparition « brutale » du mode distorsionnel dans le cas où la section comporte de très petits raidisseurs ainsi que sa disparition tout aussi brutale pour l'ensemble des sections en forme de I. Il y a également le fait que les définitions des modes purs d'instabilité selon la GBT et, par voie de conséquence, selon la cFSM, échouent pour l'ensemble des sections qui comportent moins de 2 nœuds internes principaux, telles que les parois isolées et les sections en forme de L, T ou X.

L'ensemble de ces problèmes est, à notre sens, en relation avec le fait que la définition des modes purs d'instabilité dans la GBT est liée à la notion de nœud interne principal. En effet, lorsqu'on rajoute un raidisseur à l'extrémité libre de la semelle d'une section en U, c'est un nœud interne principal qu'on a rajouté. De même, l'introduction d'un raidisseur dans une âme, aussi petit soit-il, équivaut à rajouter trois nœuds internes principaux. D'un autre côté, l'absence, selon la GBT, de modes distorsionnels dans les sections en I est liée au fait qu'on calcule leur nombre à partir du nombre de nœuds internes principaux. Enfin, la base vectorielle des modes purs globaux, nécessaire à la GBT, se trouve tronquée dès que le nombre de ces nœuds internes principaux descend en dessous de 2. Ainsi, la notion de nœud interne principal, qui n'est qu'un outil de modélisation, possède un caractère déterminant dans la classification de la cFSM.

Un autre inconvénient majeur de l'approche cFSM pour séparer les modes est qu'elle est, à notre humble avis, difficilement applicable à une méthode numérique plus générale telle que la MEF ou la méthode des splines bandes finies (MSBF). En effet, La cFSM tout comme la GBT exploitent la variation harmonique des déplacements dans le sens longitudinal et l'orthogonalité de ce type de fonctions pour isoler le sous-espace GD.

L'idée est de proposer d'autres définitions basées sur les parois planes plutôt que sur les nœuds. Nous proposerons alors une autre technique de séparation des modes propres qui leverait l'ensemble des insuffisances de la cFSM et qui serait aisément extensible aux méthodes numériques générales (MEF, MSBF, ...). Nous utiliserons alors des définitions indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle. En effet, le besoin de classer les phénomènes d'instabilité en trois grandes catégories provient surtout du fait qu'ils possèdent différents comportements post-critiques et qu'ils possèdent, par conséquent, des procédures de dimensionnement différentes.

5.4.2 Quelques remarques sur les techniques utilisées pour isoler les modes d'instabilité

A part la GBT et la cFSM qui fournissent des définitions « rationnelles », les codes et règlements (CEN/EC3, 1996 ; AISI/NAS, 2004a) donnent des descriptions phénoménologiques, que nous avons rappelées dans la section 2.2, pour définir les 3 types d'instabilité de base. Elles portent essentiellement sur la forme de la section et sur les longueurs de demi-ondes. Pour évaluer les contraintes critiques correspondantes au moyen d'analyses numériques, ces règlements recommandent l'usage d'un certain nombre de règles dont la présentation la plus complète est donnée dans le document des commentaires de la DSM (AISI, 2004b). Nous en avons donné un bref résumé à la section 2.2. Parmi ces règles, il y a la possibilité d'utiliser des appuis fictifs et/ou des équations de contraintes pour forcer l'apparition de modes récalcitrants parmi les résultats des méthodes numériques. On peut également réussir à les observer en les cherchant parmi les modes supérieurs ou en jouant sur les caractéristiques des matériaux.

A ces règles nous rajoutons notre propre expérience dans le calcul des modes d'instabilité par les méthodes numériques en général et les différentes variantes de MBF en particulier. Suite aux multiples exemples que nous avons traités par la MBF, il y a relativement longtemps (Kerdal et al, 1995a et 1995b), on s'est rendu compte de l'existence d'une discontinuité dans les courbes de stabilité lorsque le comportement passe d'un mode symétrique à un mode antisymétrique. On s'était d'abord obstinés à rechercher une zone de transitions en couvrant de façon très dense les longueurs de demi-ondes dans cette région, animés par l'idée que le comportement ne pouvait être que continu. La conclusion à laquelle nous sommes arrivés est que, ce que l'on pensait être une zone de transition n'était en réalité qu'un seul point, le point d'intersection entre les courbes symétrique et antisymétrique. Le programme VISACOP, dès 1996, trace automatiquement et dans tous les cas les deux courbes relatives aux deux types de comportement, symétrique et antisymétrique (voir section 2.3.3).

La recherche d'une zone hypothétique de transition entre les courbes correspondant à différents nombres de demi-ondes (entre les courbes $m=1$ et $m=2$, par exemple) a été également réalisée en faisant une expérimentation numérique par la MSBF (Djafour et al, 1999, 2001). Le résultat a été le même, c'est-à-dire que ces courbes se coupent en un point. Les résultats numériques des MBF peuvent donc présenter des discontinuités ce qui

contredit apparemment les résultats qu'on retrouve dans beaucoup de références (Hancock, 1978 ; Lau et Hancock, 1985) où l'on « loue » la capacité de la MBF à couvrir tous les types de comportements de manière continue.

La question qui se pose naturellement est : pourquoi a-t-on une évolution continue dans certains cas et discontinue dans d'autres cas ? La réponse a été trouvée en observant les formes des modes propres. La discontinuité a eu lieu à chaque fois que les modes en jeu sont orthogonaux entre eux : lors du passage du mode symétrique à l'antisymétrique, entre les courbes correspondants à différents nombres de demi-ondes,... On peut aussi dire que cela s'est produit à chaque fois que le couplage des formes propres en question est nul. Cette observation n'a pas été faite sans rappeler certaines techniques basées sur la condition d'orthogonalité et qui sont utilisées dans certains algorithmes d'extraction des vecteurs propres (Bathe, 1982 ; Djafour et Megnounif, 1993). Cette remarque se confirme par le fait que, même si dans une analyse par la MBF un seul type de mode global est observé sur la courbe critique (la plus basse), il suffit de s'intéresser aux modes supérieurs pour observer tous les modes globaux. Ces instabilités apparaissent séparément grâce au fait que leurs formes sont orthogonales entre-elles (voir figure 4.24), à l'exception du couplage torsion - flexion qui donne d'ailleurs lieu au mode global flexionnel – torsionnel. D'autre part, ce couplage disparaît dans le cas des sections doublement symétriques et a pour résultat l'apparition du mode torsionnel seul.

L'évolution n'est donc continue que pour les modes dont les formes ne sont pas orthogonales entre-elles, c'est-à-dire pour les formes où un couplage est possible. L'érosion et le lissage de la courbe d'instabilité sont possibles, ce qui donne lieu à une évolution continue. Le comportement change alors progressivement du mode local vers l'un des modes globaux en passant par le mode distorsionnel sur une même courbe d'instabilité lissée (voir les exemples 1 à 9 au début du chapitre 4).

En réfléchissant davantage à ces remarques relatives à l'orthogonalité, il nous est paru que l'intérêt pratique d'utiliser la MBF conventionnelle plutôt que des méthodes plus sophistiquées pour faire des analyses de stabilité élastique, provient de la propriété d'orthogonalité des fonctions harmoniques qu'elle utilise. En effet, en fixant $m=1$ pour tracer la courbe d'instabilité, on élimine en fait tous les modes orthogonaux à $m=1$, ce qui réduit considérablement la base de recherche des modes propres et rend plus facile l'exploitation des résultats. Le principal inconvénient dans les analyses par la MEF (Yu, 2005) ou la MSBF (Djafour et al, 1999 et 2001) réside justement dans le fait que la même forme d'instabilité de la section transversale est obtenue plusieurs fois, pour différents nombres de demi-ondes. C'est-à-dire que le résultat utile pour caractériser l'un des trois types d'instabilité de base est répété « inutilement » plusieurs fois dans les analyses par la MEF ou la MSBF au point d'arriver à masquer les autres. En effet, il arrive souvent que le mode local, par exemple, se répète tellement de fois qu'il faille calculer plus d'une trentaine de modes pour voir apparaître le premier mode distorsionnel. Si on sait que l'analyse et la classification de tous ces résultats se fait, jusqu'à ce jour, par inspection visuelle, la difficulté de la tâche devient évidente et l'intérêt de la MBF avéré. Ceci met également en exergue tout l'intérêt pratique de développer des procédures automatiques de classification des modes d'instabilité produits par les méthodes numériques, ce que fait la cFSM pour les résultats de la MBF qui est en fait le cas le plus « facile ».

Pour séparer les différents types d'instabilité, i.e. pour calculer les modes purs, la cFSM utilise des relations de contrainte pour séparer les modes locaux (L) des modes GD (globaux et distorsionnel) comme nous l'avons présenté dans la section 4.5. Cependant,

cette méthode fait appel, elle aussi, à la condition d'orthogonalité pour séparer les modes D des modes G. La procédure consiste à choisir une base des modes G (figure 4.24) et à calculer une base des modes D qui lui soit orthogonale (voir section 4.5.4.2.). Autrement dit, aucune définition directe des modes distorsionnels n'est donnée par la GBT ou par Adany et Schafer. Les modes D sont déduits par orthogonalité aux modes G dans le sous-espace GD.

5.4.3 Nouvelle approche utilisant l'orthogonalité

Au fond, nous pouvons résumer la cFSM comme une combinaison astucieuse d'équations de contrainte et des conditions d'orthogonalité. L'idée que nous avons eue est de faire la même chose mais autrement.

Les modes globaux ou Eulérien sont ceux qui posent le moins de problèmes et dont la définition est claire. Dans ces types d'instabilités, la forme de la section transversale de l'élément de structure reste inchangée. La section entière subit un déplacement en mode rigide qui se traduit par une translation et/ou une rotation.

Pour forcer une méthode numérique quelconque à reproduire ces modes globaux, il suffit d'imposer des relations de contrainte de type « diaphragme » entre les DDL agissant dans les plans des différentes sections droites du modèle numérique du profil. Si l'axe du profil est dirigé selon l'axe y, les plans des sections droites sont parallèles au plan xz. Les DDL concernés par ces relations de contrainte sont les deux translations U, W et la rotation θ_y . La technique est similaire à celle utilisée dans la modélisation des bâtiments où, les DDL d'un même étage (section plane) sont reliés par une équation de contrainte de type diaphragme. Le CUFSM permet cette modélisation et la qualifie de relation maître – esclave, comme c'était le cas dans les anciennes versions du très populaire SAP (Computers and structures, 2007). On emploie cette appellation car, suite à l'application de la relation de contrainte de type diaphragme (perpendiculaire à y), les DDL U, W et θ_y de tous les nœuds (esclaves) d'une section droite s'expriment très simplement (relations géométriques) en fonction des 3 DDL, U, W et θ_y , d'un seul nœud qui est alors qualifié de nœud maître. Autrement dit, lors d'une instabilité globale, le déplacement d'une section droite dans son plan est entièrement défini par les trois DDL U, W et θ_y de son nœud maître.

Pour contraindre la méthode numérique (MEF, MBF, MSBF, ...) à ne reproduire qu'un seul type d'instabilité globale, il suffit d'associer des conditions d'appui particulières aux relations de contrainte. Ainsi, pour obtenir le flambement (instabilité flexionnelle) suivant une direction donnée (x ou z), il suffit de bloquer les rotations θ_y et les translations selon l'autre direction (z ou x) des nœuds maîtres de toutes les sections. De même, pour forcer l'apparition du mode torsionnel, il faut bloquer les translations U et W de tous les nœuds maîtres. Cependant, pour avoir une torsion pure il est nécessaire que les nœuds maîtres soient positionnés aux centres de torsions des sections. Enfin, pour pouvoir obtenir l'un des 2 modes couplés flexionnels – torsionnels, il suffit de libérer la rotation et l'une des deux translations.

Ainsi, il est aisé de « commander » à une méthode numérique quelconque (MEF, MBF, MSBF, ...) le calcul d'un ou de plusieurs modes globaux. Pour conclure, l'espace G peut être calculé facilement par les principales méthodes numériques.

En ce qui concerne les modes locaux ou voilements, un grand nombre d'auteurs les définissent en utilisant la notion de « ligne d'intersection entre parois planes ». Ils préconisent que, lors du voilement, la section droite se déforme de manière significative, seulement, cette déformation n'engendre que des rotations, sans aucune translation, au niveau des lignes d'intersection entre les éléments plans. Pour forcer l'apparition du voilement et empêcher qu'il ne soit masqué par un autre comportement comme le mode distorsionnel, Hancock (Papangelis et Hancock, 1995) suggère de mettre des appuis doubles au niveau des lignes d'intersection. Seulement, cette définition pose le problème de ce qu'est une ligne d'intersection (voir la section 4.2.2.1) et il est alors nécessaire de l'identifier avant de pouvoir bloquer ses translations.

La définition qui nous semble correcte est celle qui se base sur le type de comportement. En effet, pendant un voilement les différentes parois planes ne subissent qu'une flexion au sens de la flexion de plaques ; les déformations membranaires sont nulles ou négligeables. On peut retrouver cette définition sous une autre forme où, pour identifier les types d'instabilité il est d'usage de comparer les énergies de déformation flexionnelle et membranaire : pendant un voilement c'est l'énergie flexionnelle qui domine (Schafer et Adany, 2006). Cette définition a été également utilisée dans d'anciennes versions de la MBF (Plank et Wittrick, 1974 ; Batista, 1989) où, pour calculer le voilement, seules les matrices flexionnelles (qui ne concernent que 2 DDL par nœud : la flèche et la rotation) sont utilisées. Le problème qui se posait dans ces approches est celui de l'assemblage des bandes non coplanaires. Le problème était contourné en utilisant une astuce similaire à celle utilisée dans l'annexe A pour étudier la poutre continue de la figure 4.27. La section était alors modélisée sous une forme « déployée » où toutes les bandes sont alignées et où des appuis doubles sont appliqués aux lignes d'intersection entre parois non coplanaires. Ainsi, pour forcer l'apparition du voilement seul par cette technique, il est nécessaire de réaliser un autre modèle numérique de la section dont la forme est différente de l'original.

Le problème avec les deux définitions du voilement données ci-dessus est qu'elles exigent une intervention « experte » de l'utilisateur et elles ne sont, par conséquent, pas systématiques. Or, notre objectif est d'arriver à une procédure automatique qui doit surtout être indépendante de la notion de ligne d'intersection.

Notre idée est de conserver le modèle numérique (MBF, MEF, MSBF, ...) de la structure à parois mince et d'utiliser des relations de contrainte afin de forcer l'apparition du voilement et éviter qu'il ne soit masqué par un autre type d'instabilité. Forcer le voilement revient tout simplement à éliminer les déformations membranaires. Ainsi, dans le plan xy de la paroi plane on doit avoir :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad (5.46)$$

Pour deux relations de contrainte parmi les trois ci-dessus, les équations matricielles ont été déjà trouvées dans le cadre de la MBF et elles ont fait l'objet de la section 4.5.5.2. En ce qui concerne la nouvelle contrainte $\varepsilon_y = \partial v / \partial y = 0$, elle ne peut être accomplie le long d'une bande finie que si (voir l'équation 2.2.b) les DDL locaux v des nœuds origine et extrémité de la bande sont nuls :

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (5.47)$$

Comme $v=V$ dans la MBF, il devient évident que la condition $\varepsilon_y = 0$ peut être réalisée au niveau de l'ensemble des parois planes en bloquant les DDL V de tous les nœuds du modèle MBF de la structure. Ainsi, cette contrainte devient une simple condition d'appui. Nous pensons même que cette seule condition suffit à forcer l'apparition du voilement seul. D'un point de vue mécanique, les 2 autres hypothèses sur les déformations membranaires nous semblent superflues par rapport au comportement attendu vis-à-vis du type de chargement appliqué (chargement axial exclusivement).

En conclusion, l'espace L dans les conditions de la MBF peut être trouvé simplement en imposant $V_i = 0$ au niveau de tous les nœuds. Pour d'autres méthodes numériques, il faudrait développer les matrices de contrainte adéquates pour forcer les déformations membranaires à être nulles.

Pour résumer, il suffit (i) d'appliquer des relations de type diaphragme au niveau des DDL des section droites du modèle pour obtenir les vecteurs de l'espace G (de dimension 3 fois le nombre de sections droites), et (ii) de bloquer les DDL V de tous les nœuds pour obtenir les vecteurs de l'espace L (de dimension égale à $4n - 2n_s - n = 2n - n_{appuis}$). L'ensemble des vecteurs ainsi obtenus peut être rassemblé dans une matrice \mathbf{H}_{LG} . Pour déduire une base vectorielle \mathbf{H}_D de l'espace D , qui à ce jour ne possède pas de définition directe, nous utilisons alors la condition d'orthogonalité de la même manière que la GBT et la cFSM. On résout alors l'équation :

$$\mathbf{H}_{LG}^T \mathbf{K}_E \mathbf{H}_D = \mathbf{0} \quad (5.48)$$

Une fois la matrice \mathbf{H}_D calculée, nous pouvons rechercher les modes d'instabilité distorsionnelle parmi les combinaisons linéaires de la base \mathbf{H}_D qui vérifient l'équation de la stabilité (4.1).

$$\phi = \mathbf{H}_D \phi_D \text{ et } \mathbf{K}_E \phi = \lambda \mathbf{K}_G \phi \quad (5.49.a,b)$$

C'est-à-dire que les modes d'instabilité distorsionnels ϕ doivent être orthogonaux aux vecteurs des espaces G et L et ils doivent vérifier l'équation de la stabilité (4.1). En reportant la première équation dans la deuxième et en prémultipliant par \mathbf{H}_D^T , on obtient :

$$\mathbf{H}_D^T \mathbf{K}_E \mathbf{H}_D \Phi_D = \mathbf{H}_D^T \mathbf{K}_G \mathbf{H}_D \Phi_D \Lambda_D \quad (5.50)$$

ou plus simplement

$$\mathbf{K}_{E,D} \Phi_D = \mathbf{K}_{G,D} \Phi_D \Lambda_D \quad (5.51)$$

Ce qui peut être vu comme un nouveau problème de valeurs propres écrit dans l'espace des degrés de liberté contraints couvrant les modes d'instabilité distorsionnels. Dans l'expression ci-dessus $\mathbf{K}_{E,D}$ et $\mathbf{K}_{G,D}$ sont, respectivement, la matrice de rigidité et la matrice de rigidité géométrique du problème contraint.

5.4.4 Remarques

Les définitions des espaces G et L données ci-dessus sont indépendantes de la méthode numérique utilisée. Elles sont facilement exploitables et programmables dans n'importe quelle méthode numérique. La définition de l'espace D qui a été retenue est de même nature que celle donnée par la GBT et la cFSM. Elle utilise la propriété, très connue, de l'orthogonalité des vecteurs propres.

La démarche proposée ressemble à la GBT et à la cFSM dans le sens où, comme elles, elle utilise des équations de contrainte et la condition d'orthogonalité. Elle leur est cependant fondamentalement différente. L'approche GBT/cFSM utilise des équations de contrainte pour séparer les modes locaux (espace L) des modes globaux et distorsionnels (espace GD). Elle utilise ensuite la condition d'orthogonalité pour séparer les modes distorsionnels (espace D) des modes globaux (espace G). Dans notre approche, nous utilisons deux types d'équations de contrainte distinctes pour isoler les modes locaux (espace L) et les modes globaux (espace G). Nous utilisons ensuite la condition d'orthogonalité par rapport aux espaces L et G pour déduire l'espace D des modes distorsionnels.

Concernant les dimensions des espaces, nous pouvons avancer que le nombre de modes globaux est égal à 3 fois le nombre de nœuds maîtres. Dans la MBF où il n'y a aucun maillage longitudinal (un seul jeu de DDL pour l'ensemble de la longueur de la structure à parois minces), ce nombre est tout simplement égal à 3. Le nombre de modes locaux est égal au nombre total de degrés de liberté du modèle diminué du nombre total d'équations de contraintes utilisées (fournies par les équations (5.46) et (5.47)). La dimension de l'espace D serait donnée par le nombre de DDL restant après soustraction du nombre de modes L et de modes G .

Mais comme en général on ne s'intéresse qu'aux premiers modes de chaque type d'instabilité de base, il est inutile de calculer tous les modes de l'espace L , ce qui serait un gaspillage de temps. En effet, ce qu'il nous faut c'est un échantillon de vecteurs de l'espace L suffisant pour pouvoir isoler les premiers modes D . Ces aspects purement numériques n'ont fait l'objet d'aucune recherche dans ce travail mais ils méritent qu'on s'y intéresse sérieusement afin d'optimiser les dimensions des espaces vectoriels à chercher. L'efficacité de la démarche proposée en dépend.

Un autre aspect qui reste en suspens est que, tout comme pour la GBT et la cFSM, l'utilisation de l'orthogonalité pour définir l'espace D ne permet pas de séparer deux modes distorsionnels. Ce cas se présente, par exemple, pour une section en C qui possède un raidisseur d'âme. En effet, il paraît évident de la figure 4.34 que la courbe du mode distorsionnel fournie par la cFSM est en fait composée de deux courbes : celle correspondant à l'instabilité du raidisseur de l'âme et celle de l'instabilité du raidisseur de la semelle. La GBT, la cFSM et l'approche proposée fournissent une seule courbe enveloppe pour tous les modes distorsionnels ; il y en aurait plusieurs si on associe un mode distorsionnel à « l'inefficacité » d'un raidisseur.

La démarche proposée a été programmée sous MATLAB. Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples de validation qui seront suivis d'exemples de sections qui ne peuvent pas être traitées par la cFSM.

5.4.5 Exemples numériques

Dans la section précédente nous avons proposé une procédure pour calculer les modes purs d'instabilité séparément. Afin de prouver son bon fonctionnement, nous allons reprendre les exemples 4 à 9 présentés dans la section 4.3. Seules les courbes donnant la force critique en fonction de la longueur de demi-onde sont présentées. Les formes déformées correspondantes sont celles données dans la section 4.3.

Ensuite et pour mettre en valeur notre contribution au calcul des modes purs d'instabilité, nous allons traiter quelques exemples de sections fermées qui ne peuvent pas être étudiées par la cFSM. Nous présentons alors les courbes donnant la force critique en fonction de la longueur de demi-onde ainsi que les formes déformées correspondantes.

5.4.5.1 Exemples de validation

Le premier exemple que nous allons étudier par la nouvelle procédure est celui de la section en C (exemple 4), dont les données géométriques sont fournies dans la section 4.3.1. La figure 5.11 donne les charges critiques en fonction de la longueur d'instabilité. Cinq courbes distinctes y sont représentées. Elles correspondent au premier mode pur local, au premier mode pur distorsionnel et aux trois premiers modes globaux. Elles ont été calculées à l'aide de la technique proposée dans la section précédente et qui permet justement d'isoler chaque type d'instabilité. Avec ces courbes de modes purs, on a représenté une sixième, celle résultant d'un calcul par la MBF conventionnelle.

Il est notable que pour les petites et pour les grandes longueurs d'instabilité, la courbe de la MBF coïncide avec la courbe du mode local pur et la courbe du premier mode global pur, respectivement. Pour des longueurs d'instabilité intermédiaires il y a également une bonne concordance entre la courbe de la MBF et celle du mode distorsionnel pur. La petite différence entre le minimum distorsionnel obtenu par la MBF et celui calculé par la nouvelle procédure peut être expliquée par une érosion du minimum de la MBF suite à une éventuelle interaction entre le mode distorsionnel avec l'un des autres modes. Nos résultats de la figure 5.11 sont en somme tout à fait similaires à ceux obtenus par la cFSM (Adany, 2004) pour le même exemple et qui ont été rappelés à la figure 4.29.

D'autre part et pour marquer la différence avec les résultats d'Adany, notre figure contient deux courbes supplémentaires : celles des modes purs globaux 2 et 3. Afin de ne pas encombrer la figure, nous avons évité de représenter les modes supérieurs (numéros 2 et 3) obtenus par la MBF. Pourtant, nous avons trouvé que leurs branches descendantes respectives coïncident avec les courbes des deuxième et troisième modes globaux purs. Ce type de résultat, où l'on obtient une coïncidence avec des modes supérieurs, sera présenté ultérieurement pour un autre type de section hautement plus intéressant qui est celui des sections fermées. Il est plus intéressant dans le sens où nous sommes les premiers, à notre connaissance, à proposer une technique de calcul de modes purs pour ce genre de sections. Si nous avons choisi de représenter cinq courbes de modes purs pour l'ensemble des exemples de validation (exemples 4 à 9), c'est tout simplement parce qu'elle donnent toutes les contraintes critiques nécessaires à la procédure de calcul de la capacité portante des profils formés à froid par les codes de calcul (AS/NZS 4600, 1996 ; CEN/EC3, 1996 ; AISI/NAS, 2004a).

La figure 5.12 montre des courbes similaires à celles présentées ci-dessus, cependant, elles correspondent à l'exemple 5. Les dimensions de la section transversale en forme de C

analysée sont données dans la section 4.3.2. Des observations semblables à celles de l'exemple précédent peuvent être faites. La principale conclusion est que la technique proposée est capable de calculer, tout comme la cFSM (voir figure 4.30), la position et la valeur de la force critique minimale du mode distorsionnel, même pour les cas où la MBF est incapable de le faire. D'autre part et quoiqu'ils soient fort semblables, il faut signaler qu'une petite différence est perceptible entre nos résultats et ceux de la cFSM (voir les figures 5.12 et 4.30, respectivement). A titre d'exemple, le rapport P_{cr}/P_y (la force critique sur la limite d'élasticité) minimum du mode distorsionnel pur calculé par notre programme est égal à 0.537. Ce même rapport vaut 0.521 lorsqu'il est calculé par la cFSM, ce qui donne une différence de 3%. Nous signalons également que, dans cet exemple et comme pour le précédent, les courbes des modes 2 et 3 globaux purs ont été trouvées concordantes avec les branches descendantes des courbes des modes 2 et 3 calculées par la MBF ; ces dernières n'ont pas été représentées sur la figure pour, tout simplement, éviter de la surcharger.

Les figures 5.13 à 5.16 présentent les forces critiques pour des sections en C avec de petits raidisseurs d'âme (exemples 6 à 9). Les figures des trois premiers cas (les exemples 6, 7 et 8) diffèrent à peine du moment que les sections transversales analysées se ressemblent beaucoup. Elles se caractérisent par un minimum local pur qui n'apparaît pas dans la solution par la MBF. Ce minimum est mis en évidence par la procédure proposée, ce qui permet l'évaluation de la force critique correspondante. Ici encore les résultats obtenus par notre programme diffèrent légèrement des résultats de la cFSM (figures 4.31 à 4.34). Nos résultats sont à chaque fois légèrement plus grands.

L'exemple 9 est traité dans la figure 5.16. Sa particularité réside dans le fait que la solution par la MBF possède 3 minima locaux. Le calcul des modes purs par le programme élaboré permet d'associer le premier à un mode local et les deux autres à des modes distorsionnels. Seulement notre programme, tout comme la cFSM, est incapable de séparer les deux minima distorsionnels. C'est normal du moment que les modes distorsionnels n'ont pas été définis directement. Ils sont recherchés dans notre méthode comme dans la cFSM parmi le complémentaire à un sous-espace vectoriel donné.

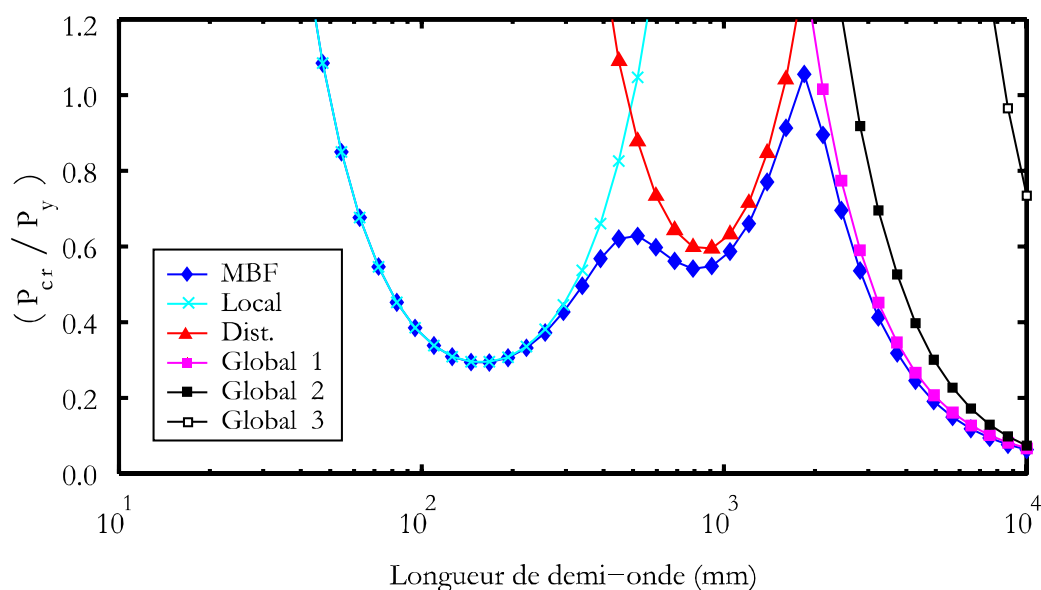


Figure 5.11 Forces critiques des modes purs de l'exemple 4.

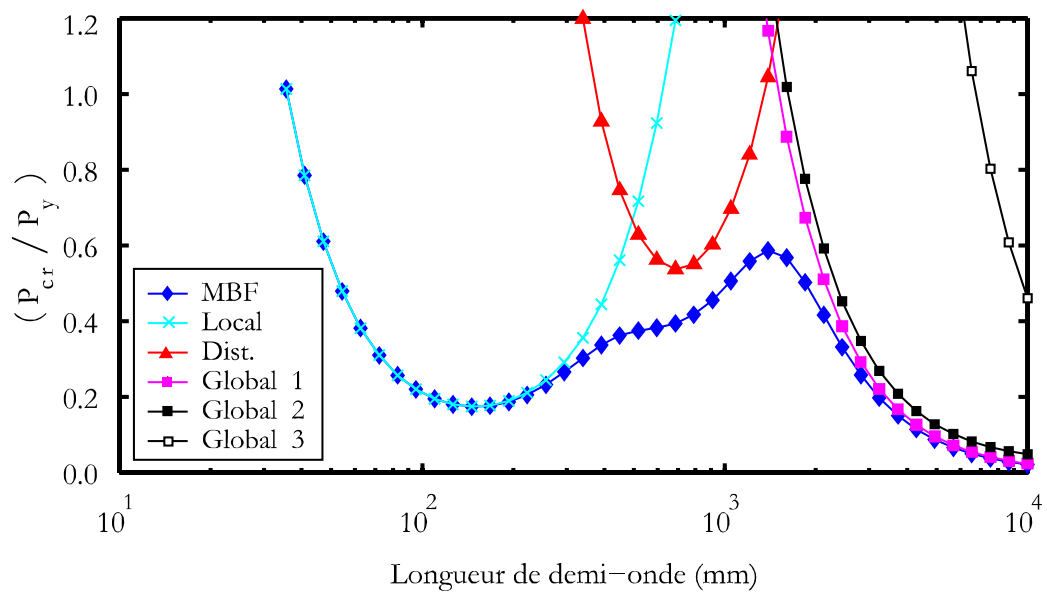


Figure 5.12 Forces critiques des modes purs de l'exemple 5.

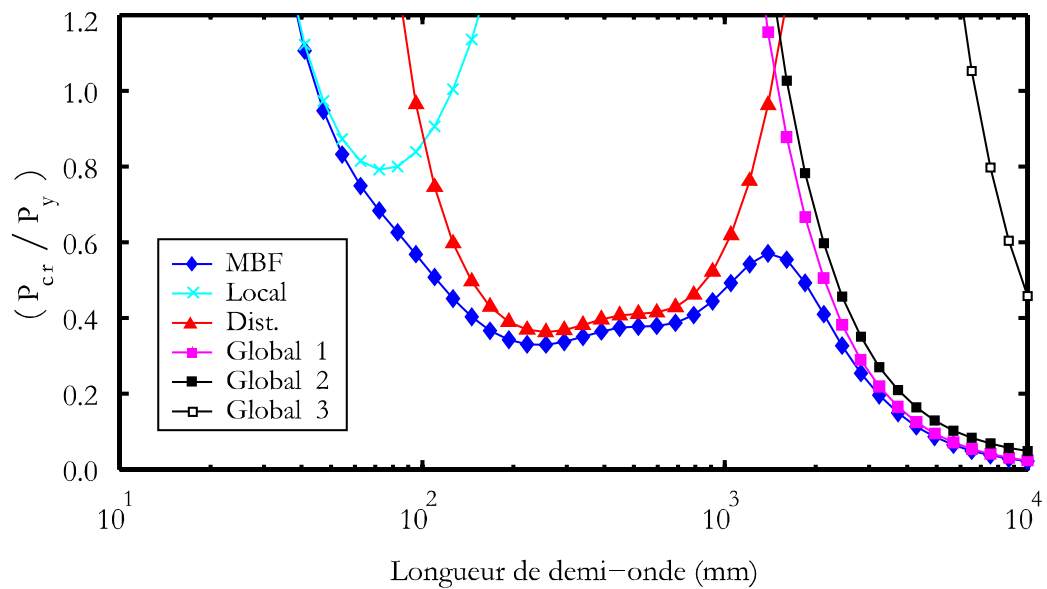


Figure 5.13 Forces critiques des modes purs de l'exemple 6.

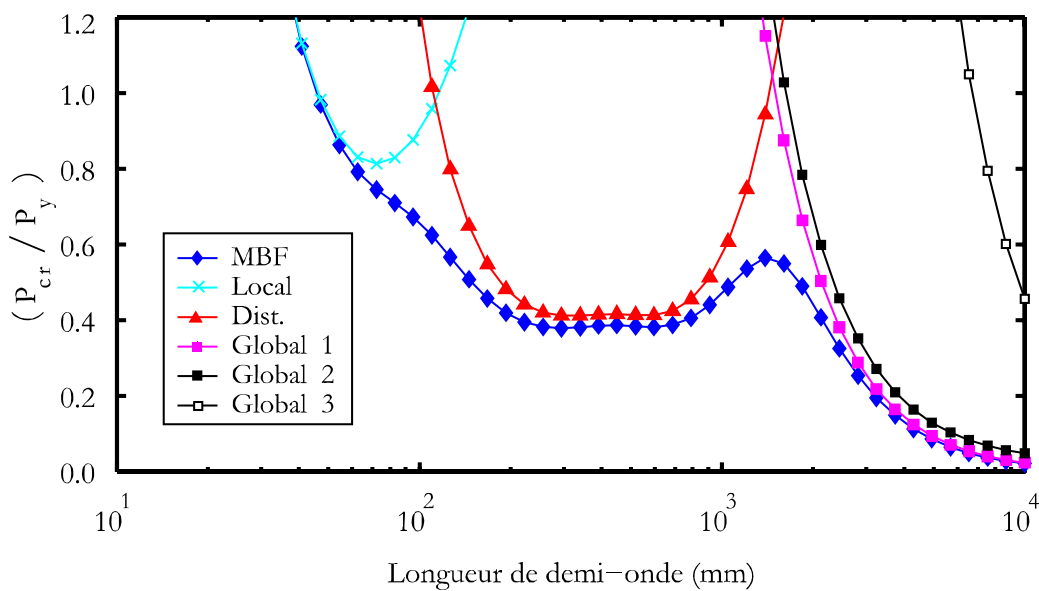


Figure 5.14 Forces critiques des modes purs de l'exemple 7.

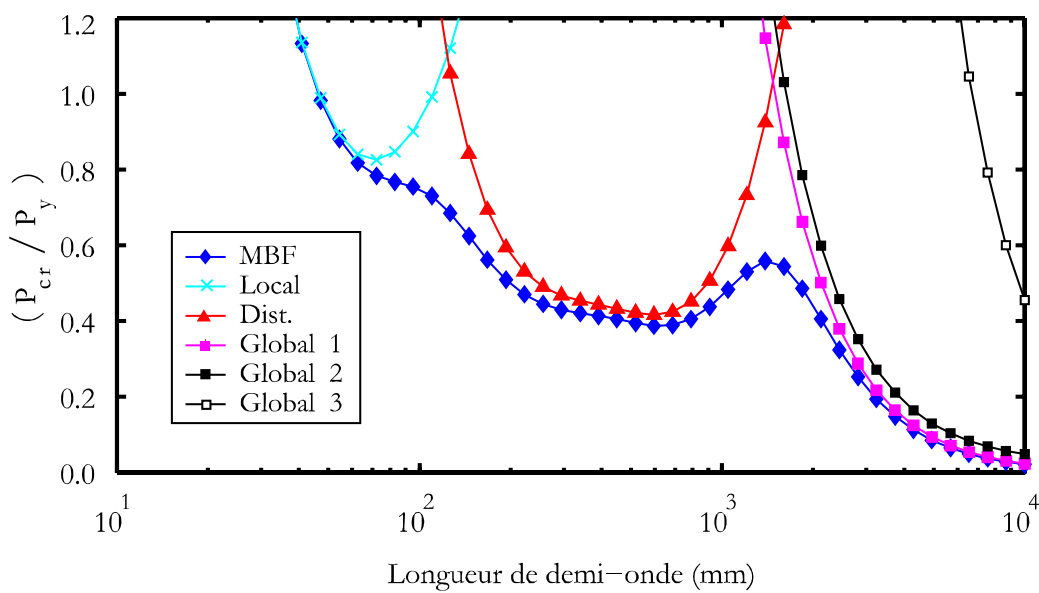


Figure 5.15 Forces critiques des modes purs de l'exemple 8.

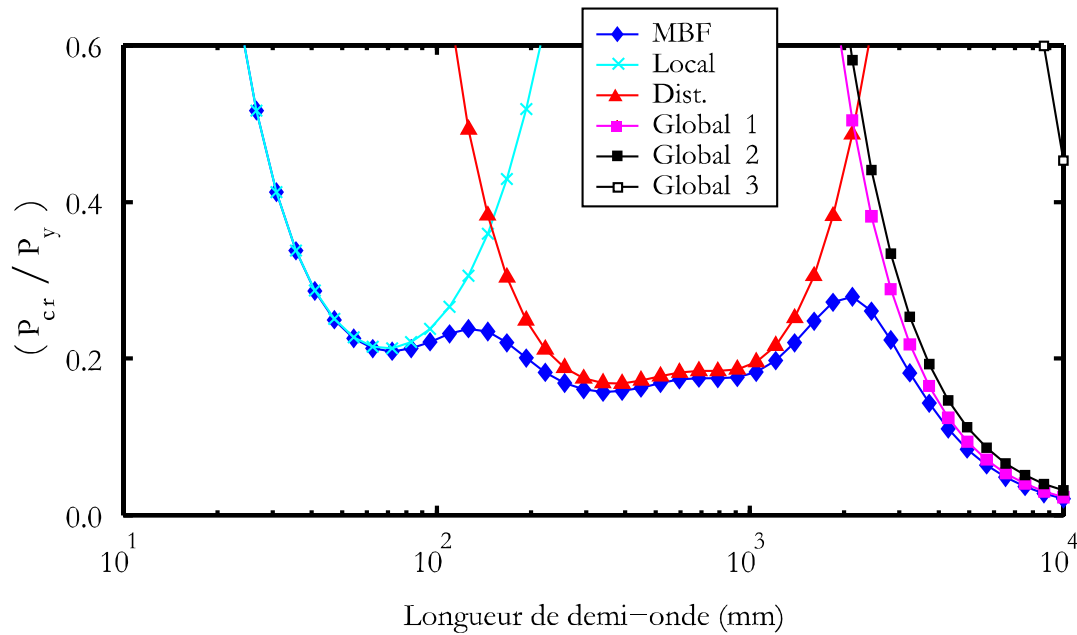


Figure 5.16 Forces critiques des modes purs de l'exemple 9.

5.4.5.2 Calcul de modes purs de sections fermées

Contrairement à la cFSM qui conduit à des problèmes aux valeurs et vecteurs propres à résoudre de dimensions beaucoup plus petites que celle du système original, notre technique ne permet pas d'économie substantielle dans la taille du problème. La contribution essentielle de notre méthode réside dans son caractère général. En effet, aucune hypothèse particulière n'est émise à part celles définissant les modes purs d'instabilité.

La cFSM tout comme la plupart des solutions GBT disponibles sont limitées aux sections ouvertes et ne permettent pas de traiter les sections fermées. Dans ce qui suit, nous allons donner quelques exemples de ce type de sections pour démontrer l'intérêt de la procédure proposée.

Le premier exemple de section fermée, que nous désignons par « exemple 10 », est une colonne creuse à section rectangulaire de largeur 60 mm, de hauteur 100 mm et d'épaisseur 2 mm. Ces dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes tel que montré dans la figure 5.17. Cet exemple est tiré de l'une des rares publications utilisant la GBT pour étudier les sections fermées (Camotim et Gonçalves, 2003). Le module de Young E est pris égal à 200 GPa, la limite d'élasticité σ_y vaut 300 MPa et le coefficient de Poisson ν est égal à 0.3.

La figure 5.18 donne les charges critiques en fonction de la longueur d'instabilité. On y trouve le résultat d'un calcul par la MBF conventionnelle ainsi que trois autres courbes correspondant à des modes purs d'instabilité. Ces courbes sont le résultat de l'utilisation du programme élaboré et elles correspondent au premier mode local pur et aux deux premiers modes globaux purs. Parallèlement, la figure 5.19 présente les formes d'instabilité correspondant aux trois types de modes purs.

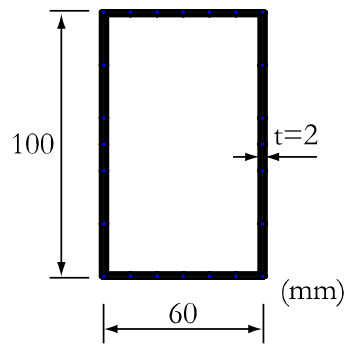


Figure 5.17 Exemple 10 : Colonne creuse à section rectangulaire (Camotim et Gonçalves, 2003).

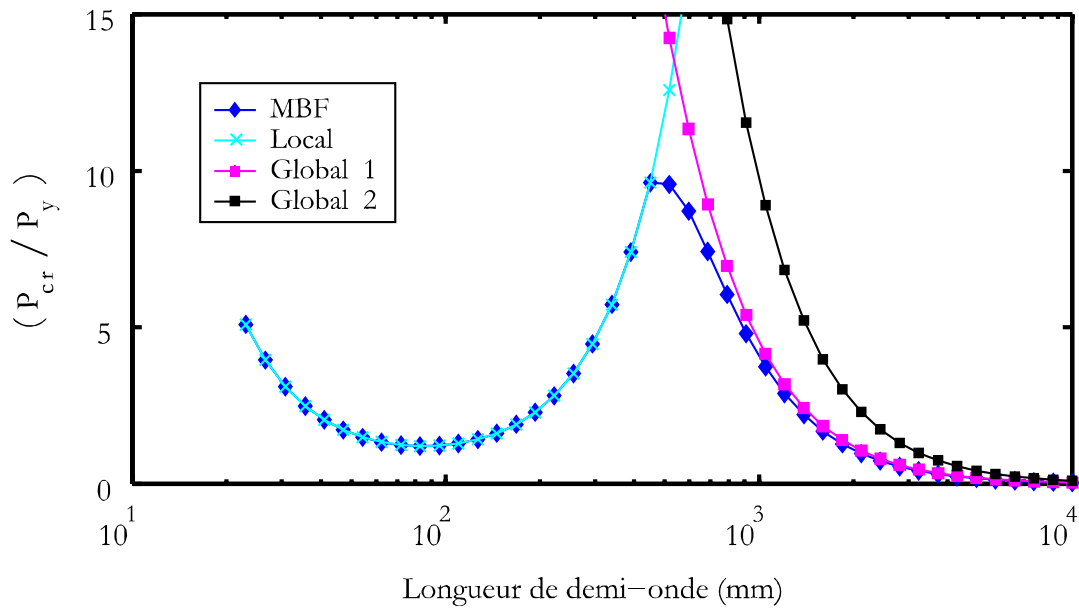


Figure 5.18 Forces critiques des modes purs de l'exemple 10.

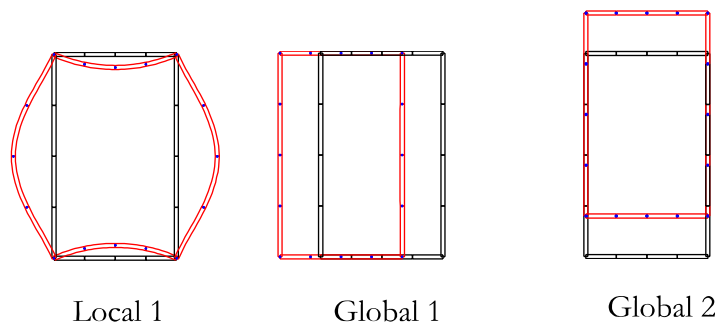


Figure 5.19 Modes purs d'instabilité de l'exemple 10.

Il est remarquable que pour les petites et pour les grandes longueurs d'instabilité, la courbe de la MBF coïncide avec la courbe du mode local pur et la courbe du premier mode global pur, respectivement. Dans la zone de transition entre les modes local et

global on peut observer une importante érosion de la charge critique, ce qui, on le rappelle, est un phénomène bien connu. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par Camotim et Gonçalves (2003) et confirment le bien fondé de la démarche proposée ainsi que son aptitude à traiter, très facilement, le cas des sections fermées. Nous insistons sur le fait que, d'une part, ces dernières posent des problèmes théoriques relativement sérieux à la GBT et que, d'autre part, leur cas n'a pas encore été résolu par la cFSM.

Les deux autres sections creuses que nous avons étudiées et que nous désignons dans ce qui suit par « exemples 11 et 12 », sont des pseudo rectangles de largeur 140 mm, de hauteur 200 mm et d'épaisseur 1.5 mm. Nous les avons qualifiés de pseudo rectangles car chaque paroi plane est raidie par un raidisseur en forme de V placé symétriquement et dont la pointe est dirigée vers l'intérieur de la section. La dimension du raidisseur parallèlement à la paroi plane est de 20 mm ; sa dimension mesurée perpendiculairement à la paroi vaut 5 mm pour l'exemple 11 et 10 mm pour l'exemple 12. Ces deux sections sont dessinées dans la figure 5.20. Toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes.

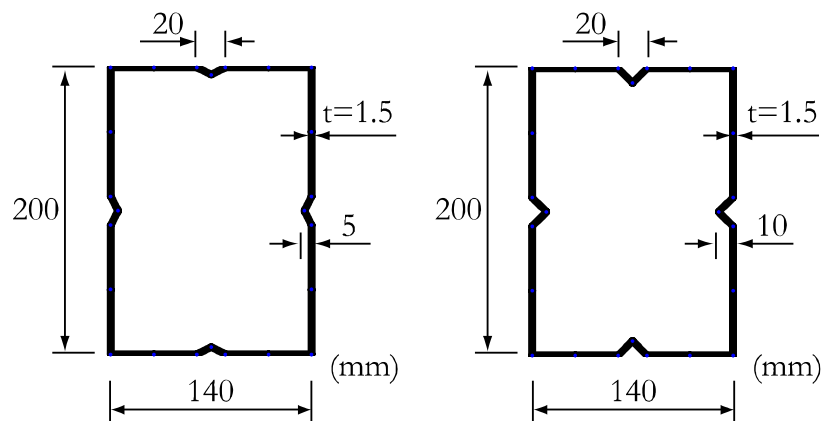


Figure 5.20 Exemples 11 et 12 : Colonnes à sections fermées avec raidisseurs intermédiaires.

La figure 5.21 donne la variation de la charge critique en fonction de la longueur de la demi-onde pour l'exemple 11. Cinq courbes y sont représentées : (i) la courbe résultant d'un calcul par la MBF classique, (ii) le premier mode local pur, (iii) le premier mode distorsionnel pur, (iv) le premier mode global pur et (v) le deuxième mode global pur. Les 4 modes purs d'instabilité ont été calculés par le programme élaboré et les formes déformées des sections qui leur correspondent sont dessinées dans la figure 5.22.

La courbe du mode local pur coïncide avec la solution MBF pour de faibles longueurs et permet de mettre en évidence le minimum local dont on a besoin et qui n'apparaît pas dans la solution MBF. Pour les longueurs d'instabilité intermédiaires et pour les grandes longueurs d'instabilité, la courbe de la MBF concorde avec la courbe du mode distorsionnel pur et la courbe du premier mode global pur, respectivement. Dans la zone d'intersection entre la courbe du mode pur local avec celle du mode pur distorsionnel, on constate la traditionnelle érosion de la contrainte critique calculée par la MBF. Ces résultats démontrent que la procédure que nous avons proposée pour la détermination des modes purs d'instabilité fonctionne même pour les sections fermées. Elle est capable de calculer la position et la valeur de la force critique minimale des modes purs, local et distorsionnel, même pour les cas où la MBF est incapable de le faire.

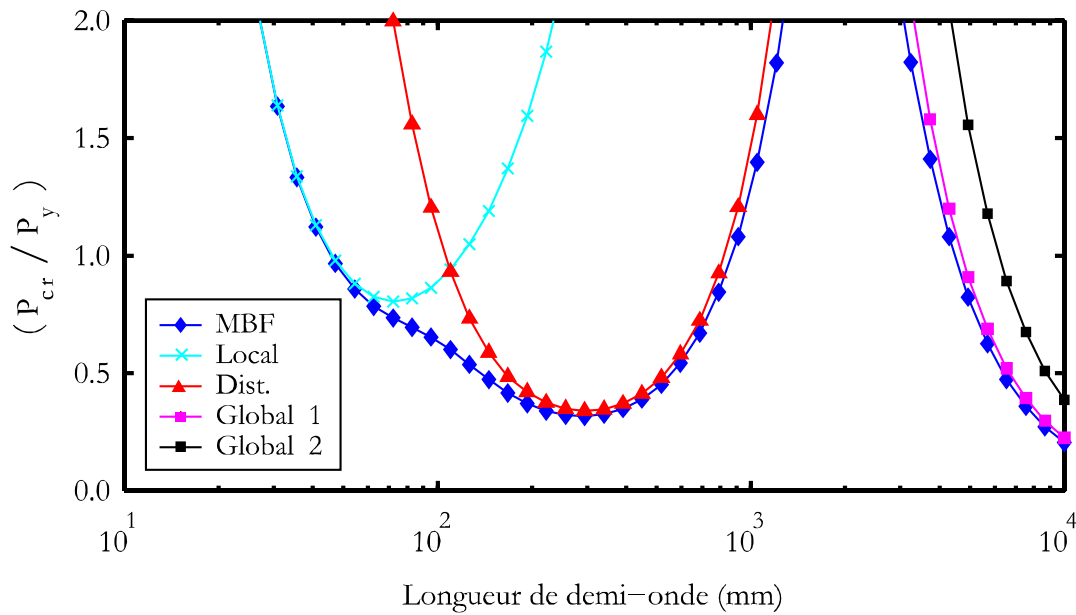


Figure 5.21 Forces critiques des modes purs de l'exemple 11.

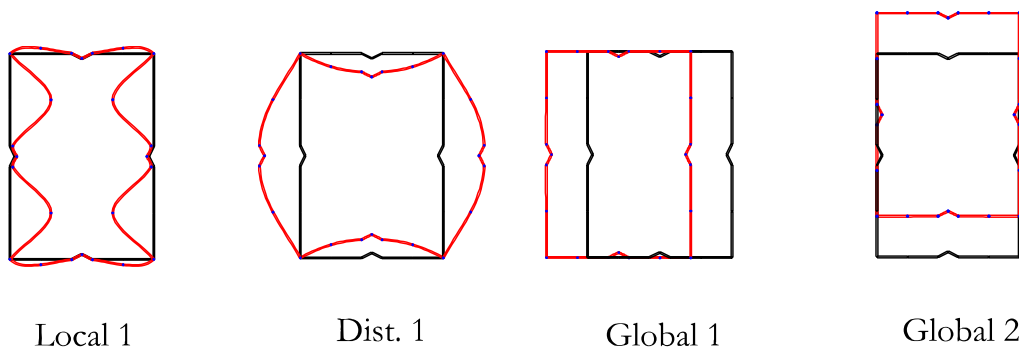


Figure 5.22 Modes d'instabilité de l'exemple 11.

Dans ce qui suit nous présentons les résultats obtenus pour l'exemple 12. Pour démontrer le bon fonctionnement de la méthode proposée, nous avons décidé de présenter la décomposition, en courbes de modes purs, de quelques courbes d'instabilité correspondant à des modes supérieurs. La figure 5.23 donne les courbes des forces critiques des 3 premiers modes de l'exemple 12 calculées par la MBF, c'est-à-dire en autorisant l'interaction entre les modes purs. Chacune de ces courbes est ensuite décomposée en courbes de modes purs. Ainsi, au premier mode de la méthode des bandes finies (MBF1) correspondent le premier mode local pur (Local 1), le premier mode distorsionnel (Dist. 1) et le premier mode global (Global 1). Ce premier résultat de décomposition est montré dans la figure 5.24. De même, la courbe du deuxième mode (MBF 2) est décomposée en 3 courbes d'instabilités pures (Local 2, Dist. 2 et Global 2) et le résultat est donné dans la figure 5.25. La courbe du troisième mode (MBF 3) n'a pas présenté de branche descendante dans l'intervalle de longueurs de demi-ondes considéré. Nous n'avons également pas pu trouver le troisième mode global pur pour les longueurs en question. Ce résultat est en somme tout à fait raisonnable vu la grande rigidité à la torsion des sections fermées, ce qui rend l'apparition du mode torsionnel difficile. Dans la

figure 5.26 donnant la décomposition de la courbe MBF 3, il n'existe donc pas de troisième mode global, mais uniquement le troisième mode local pur (Local 3) et le troisième mode distorsionnel pur (Dist. 3).

Les formes déformées correspondant aux divers modes purs d'instabilité trouvés dans le cas de l'exemple 12 sont représentées dans la figure 5.27. L'observation des déformées des 3 premiers modes locaux permet d'expliquer la multiplicité des valeurs propres obtenues. Nous avons en effet trouvé que les courbes des trois premiers modes de voilement (Local 1, Local 2 et Local 3) sont pratiquement confondues. De même, les courbes des 3 premiers modes de la MBF (figure 5.23) n'ont commencé à se séparer qu'à partir de longueurs intermédiaires, c'est-à-dire qu'à partir de longueurs où l'instabilité distorsionnelle entre en jeu.

L'examen de la forme du premier mode distorsionnel pur (Dist. 1) permet d'avancer qu'il s'agit d'une instabilité qui met en jeu le déplacement de tous les raidisseurs. Vu les dimensions des parois, nous pouvons dire qu'il s'agit d'une instabilité des raidisseurs des grands cotés qui est accompagnée du déplacement des raidisseurs des petits côtés. Le deuxième mode distorsionnel pur (Dist. 2) est une instabilité des raidisseurs des grands cotés uniquement ; les raidisseurs des petits côtés ne se sont pas déplacés. Cette déformée oppose une rigidité plus grande au déplacement des raidisseurs des grands cotés par rapport au premier cas, ce qui donne lieu naturellement à une charge critique plus grande. Le troisième mode distorsionnel pur (Dist. 3) s'est manifesté par une instabilité des raidisseurs des petits côtés sans que ceux des grands cotés ne les accompagnent. Les deux modes globaux purs qui ont été obtenus sont les flambements autour des deux axes principaux de la section.

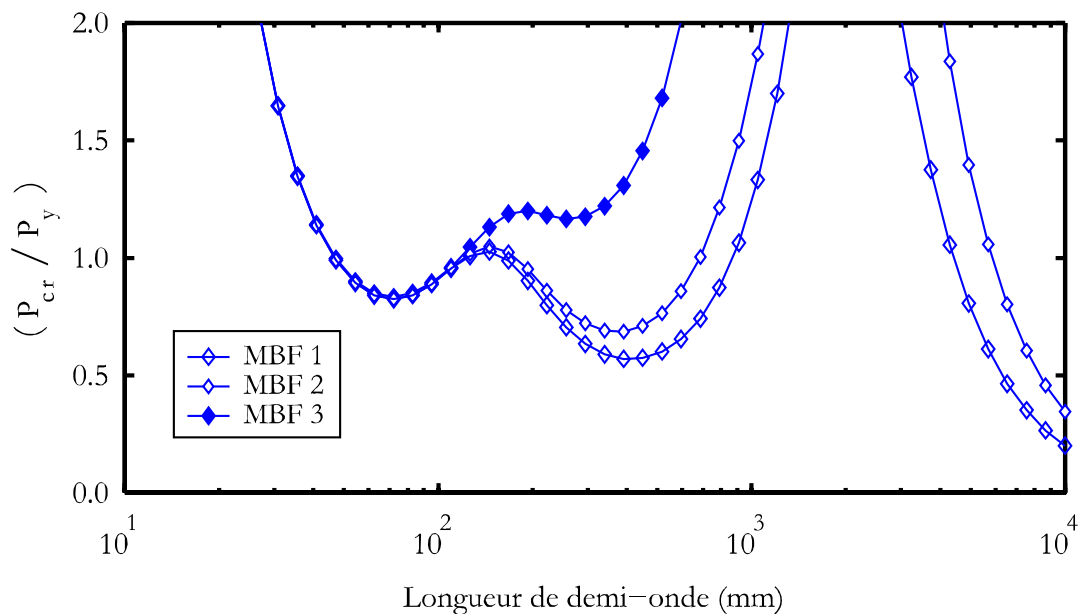


Figure 5.23 Forces critiques des 3 premiers modes de l'exemple 12 obtenues par la MBF (en interaction).

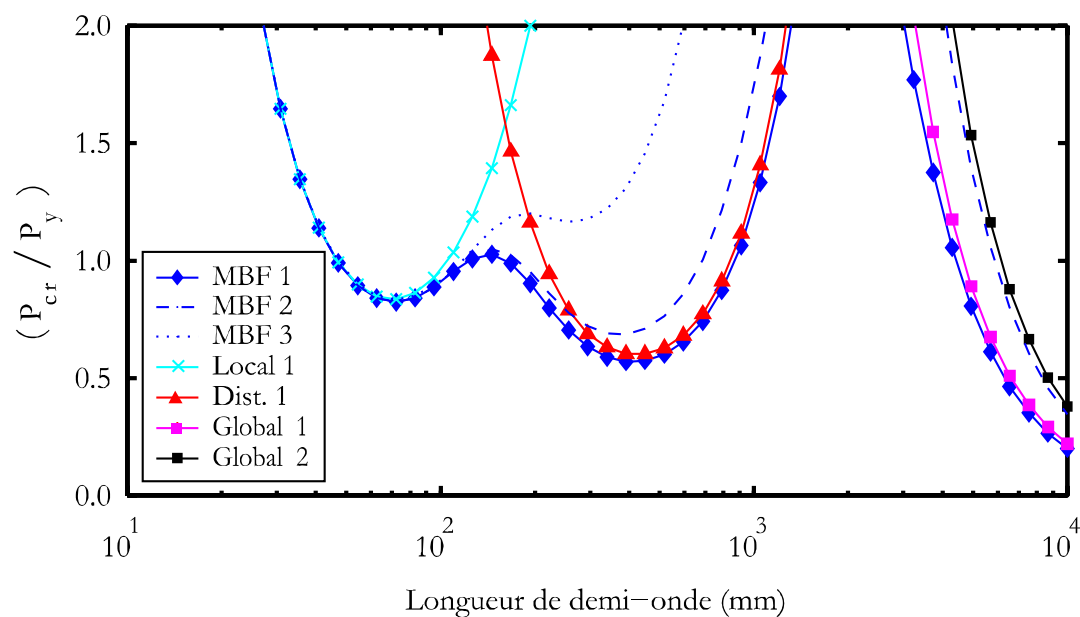


Figure 5.24 Décomposition en modes purs du mode 1 de l'exemple 12.

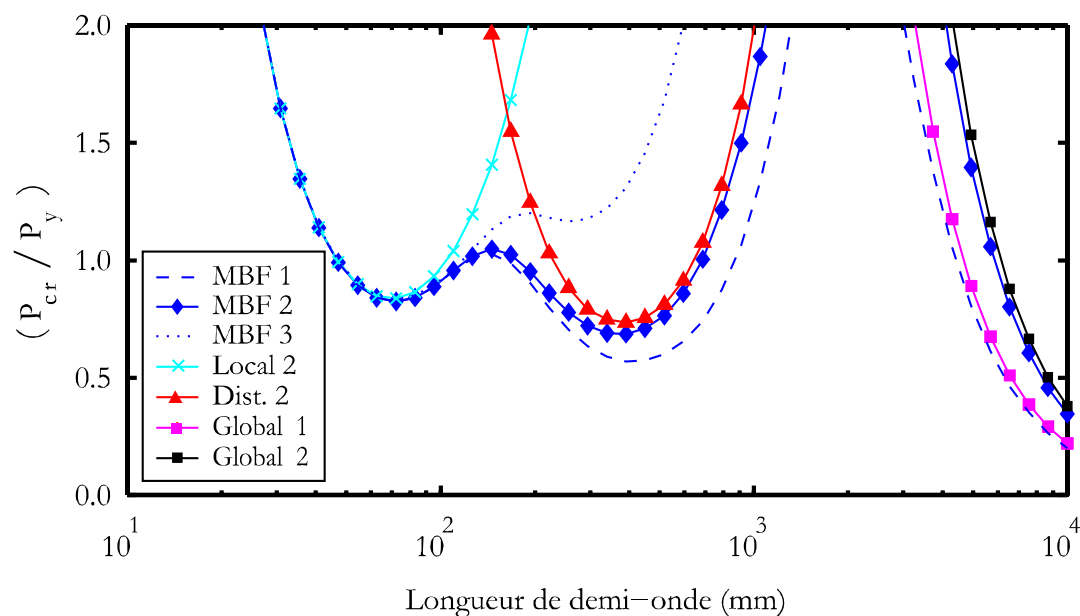


Figure 5.25 Décomposition en modes purs du mode 2 de l'exemple 12.

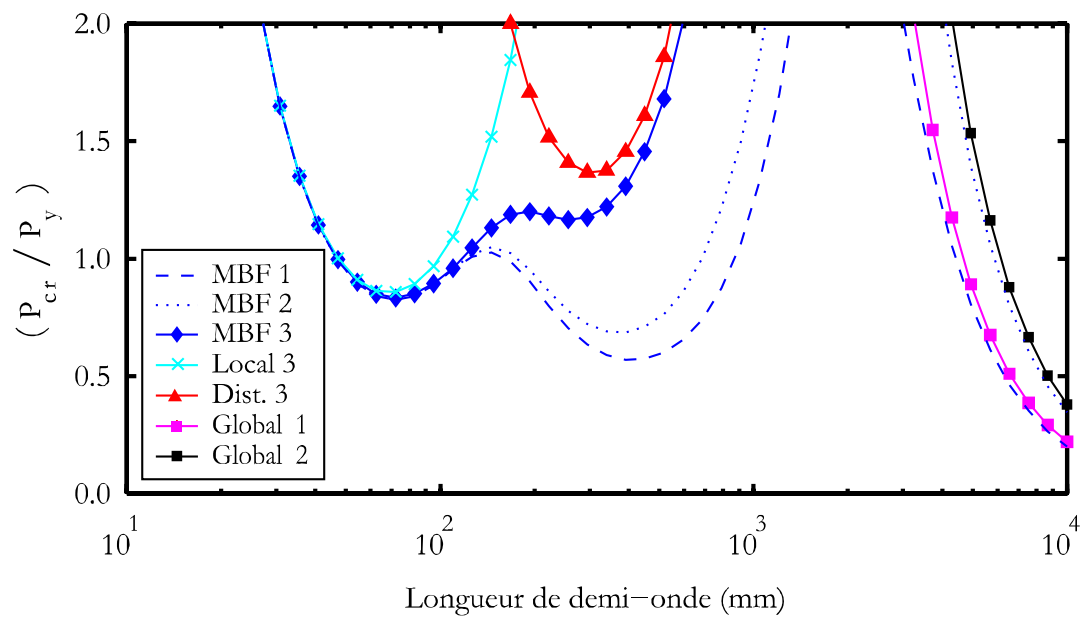


Figure 5.26 Décomposition en modes purs du mode 3 de l'exemple 12.

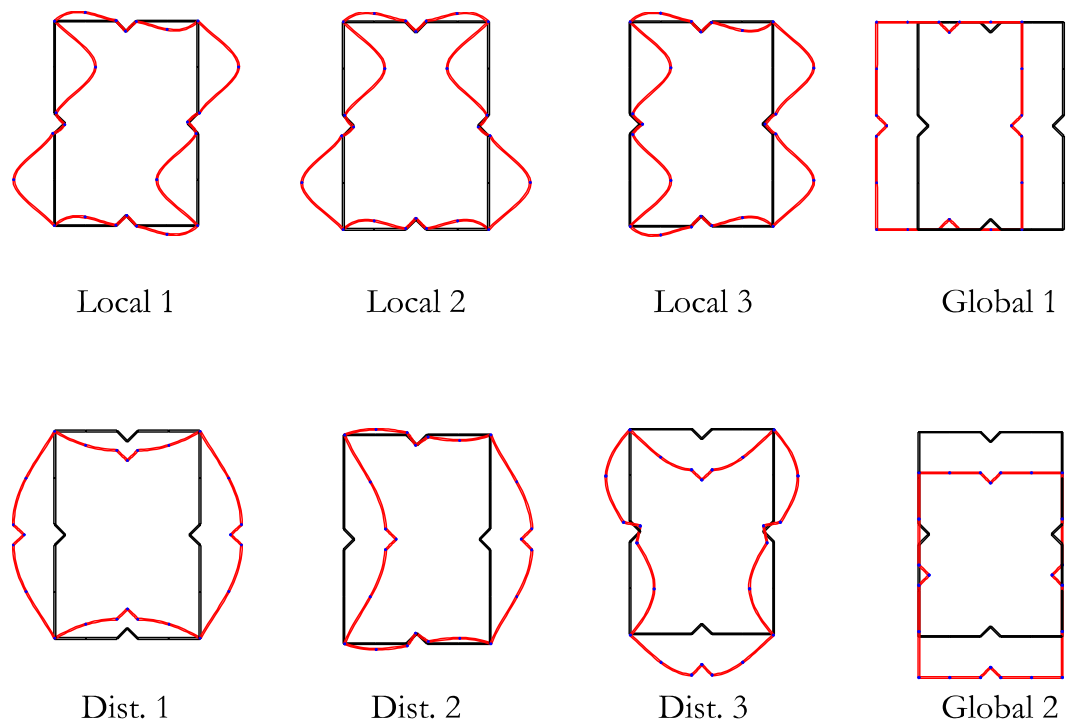


Figure 5.27 Modes d'instabilité de l'exemple 12.

5.5 Conclusion

A travers quelques exemples, nous avons montré que les classifications de la cFSM peuvent parfois être en contradiction avec la pratique courante et les usages dans l'ingénierie des structures. Nous avons également montré que la classification cFSM donne lieu, comme les méthodes d'identification classiques, à des discontinuités dans la classification de phénomènes apparemment continus. Ces discontinuités sont liées à la notion de nœud interne principal qui est, à notre sens, juste un objet de modélisation. Il ne devrait pas posséder ce statut déterminant dans la classification de phénomènes purement mécaniques.

La méthode cFSM repose sur la détermination de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} définissant l'instabilité distorsionnelle. La démonstration d'Adany et Schafer (2006a) est tellement compliquée que nous n'imaginons pas sa généralisation à la MEF ou la MSBF. Nous avons alors proposé une autre démonstration en utilisant uniquement 2 hypothèses très simples. Le résultat est une formulation beaucoup plus lisible qui n'utilise aucune classification particulière des nœuds. Elle préserve la flexibilité de la méthode numérique qui est la MBF en laissant libre la numérotation des nœuds, la numérotation des éléments, le choix des caractéristiques géométriques et mécaniques,...

A la fin de ce chapitre, nous avons proposé une technique originale de séparation des modes propres. Nous avons utilisé des définitions indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle. La méthode que nous avons proposée lève certaines des insuffisances de la cFSM. Nous avons entre autres pu étudier des sections fermées ce qui est impossible par la cFSM et par la plupart des solutions type GBT. La méthode de classification que nous avons proposée nous semble aisément extensible aux méthodes numériques générales (MEF, MSBF, ...). Il serait intéressant de la mettre en œuvre dans d'autres travaux de recherche.

Dans la suite de cette thèse nous nous sommes plutôt penchés sur un problème qui n'a jamais été étudié par la MBF. Il s'agit de la stabilité élastique des colonnes composées à diagonales ou à étréssillon.

Chapitre 6

Les colonnes composées

6.1 Introduction

Concernant l'instabilité distorsionnelle, un domaine de recherche relativement inexploré est celui des colonnes et des poutres composées¹. Ce type d'éléments de structures est formé de deux ou plusieurs éléments principaux parallèles, les membrures, interconnectés par des diagonales ou des étrésillons² (figure 6.1). Le moment d'inertie de la section de la colonne composée, et par conséquent sa rigidité vis-à-vis de la flexion dans le plan des connexions, augmente avec la distance entre les axes des membrures principales, ce qui en constitue l'intérêt. On peut évidemment envisager la possibilité d'étudier la stabilité distorsionnelle de chaque élément principal à part, en prenant comme sa longueur la distance séparant les diagonales ou les étrésillons. On suppose ainsi implicitement que les points de connexion sont des appuis pour les membrures. Il y aurait donc nécessité de décomposer la section composée en ses membrures élémentaires puis, il faudrait décomposer ces mêmes membrures en éléments plans individuels pour pouvoir procéder à une analyse de type « largeur efficace » telle que recommandée par les règlements de la construction métallique en acier formé à froid (CEN/EC3, 1996 ; AISI/NAS, 2004a). Dans le cas où les membrures possèdent des formes compliquées telles que celles retenues pour les colonnes formées à froid de nouvelle génération, on peut avancer que la tâche est extrêmement complexe.

Une source supplémentaire de difficulté réside dans le fait que les diagonales ou les étrésillons constituent des appuis élastiques pour les membrures principales ou pour certains des éléments plans qui les constituent. Nous pensons même que l'utilisation des procédures recommandées par les codes de dimensionnement pour étudier l'instabilité distorsionnelle peut ne pas convenir dans ce cas. La méthode de la résistance directe ou DSM (AISI, 2004b ; Schafer et Peköz, 1998), qui évite justement de décomposer les sections et les étudie dans leur globalité, semble être une alternative intéressante pour simplifier la procédure réglementaire.

¹ En anglais : Built-up columns and beams

² En anglais : lacing bars or batten plates

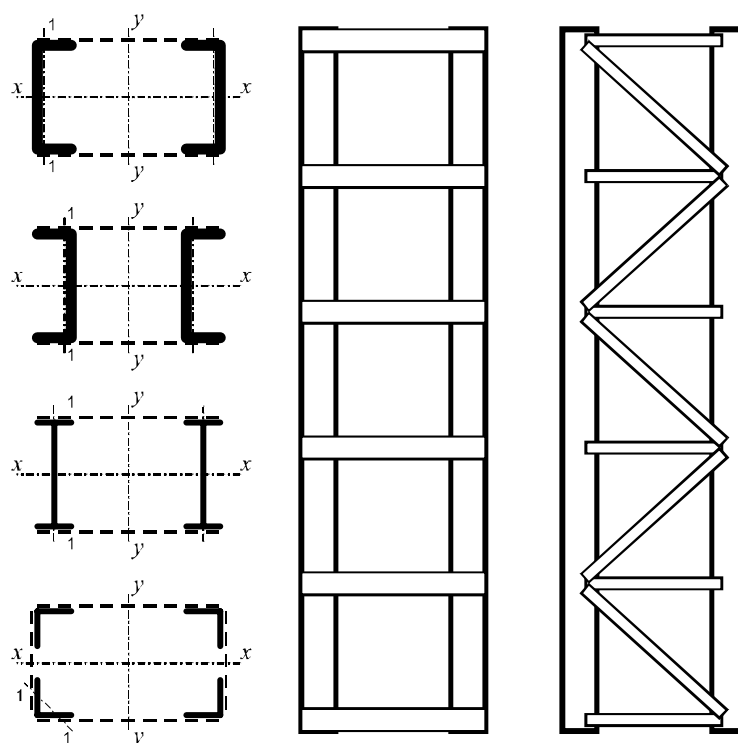


Figure 6.1 Colonnes composées

Mais avant d'en arriver là, c'est-à-dire à proposer une méthode réglementaire basée sur la DSM, il est indispensable de développer une méthode numérique simple et efficace permettant d'étudier la stabilité élastique de la section entière des colonnes et des poutres composées. L'objectif principal de ce chapitre est donc de mettre en œuvre une méthode numérique permettant d'identifier aisément les modes critiques d'instabilité élastique, même ceux faisant intervenir des interactions, et d'évaluer les charges correspondantes. La méthode à développer doit être simple dans le sens où elle doit rester à la portée des ingénieurs en vue de son utilisation dans une procédure réglementaire. La méthode des éléments finis, qui est évidemment la méthode numérique la plus puissante dont on dispose, exige des modèles très élaborés et assez compliqués à préparer ainsi que des moyens de calcul onéreux. Elle ne correspond donc pas à l'objectif fixé. D'un autre côté, la méthode recherchée doit être efficace dans le sens où elle doit évaluer de façon précise tous les modes d'instabilité des colonnes et des poutres composées. Par exemple, elle doit prouver sa capacité à étudier les principales instabilités élastiques des colonnes composées uniformément comprimées. Ces instabilités sont rappelées ci-dessous pour mettre en évidence la complexité de la tâche :

- Le flambement global de la colonne par flexion dans le plan perpendiculaire aux étrésoillons. Il s'agit d'un flambement Eulerien classique.
- Le flambement global de la colonne par flexion dans le plan parallèle aux étrésoillons. C'est un cas relativement compliqué où il faut tenir compte de la flexibilité des éléments de connexion. Dans les théories classiques, ces derniers sont souvent remplacés par une âme continue ayant une rigidité au cisaillement équivalente K . La plus ancienne théorie est due à Engesser (1889, 1891, 1909). Dans la section suivante nous allons donner un bref historique du calcul théorique de ce type d'instabilité globale.

- L'instabilité globale des membrures. Il peut s'agir d'un flambement flexionnel Eulérien ou d'une instabilité par torsion accompagnée ou non d'une flexion. Il y a dans ce cas une difficulté relative à la longueur de flambement liée à la difficulté de quantifier l'encastrement partiel des membrures dans les étrésillons.
- Le voilement des éléments plans comprimés, particulièrement déterminant dans le cas des membrures à faibles épaisseurs, tels que des profils formés à froid.
- L'instabilité distorsionnelle dont l'importance croît, comme signalé plus haut, avec la complexité des sections des membrures.
- Toutes les interactions entre ces cinq instabilités.

Lors des dernières décennies, les méthodes qui se sont imposées comme des moyens simples et efficaces pour étudier l'ensemble des modes d'instabilité des profils isolés, dans les domaines linéaires et non linéaires, sont les méthodes type « bandes finies » (Lau et Hancock, 1985 ; Key et Hancock, 1993 ; Cheung et al., 1999 ; Kim et Choi, 2004 ; Ovesy et al. 2005 ; ...) et la théorie des poutres généralisée (GBT) (Schardt, 1989 ; Davies et Leach, 1992, 1994 ; Davies et al., 1994 ; Gonçalves et Camotim, 2004 ; Dinis et al., 2006).

Ces méthodes n'ont cependant jamais été utilisées pour modéliser et étudier la stabilité des colonnes composées. Parmi elles, celle qui nous semble capable de répondre aux objectifs est la méthode des splines bandes finies (Lau et Hancock, 1985). Elle a en effet la capacité, grâce au type particulier de ses fonctions d'interpolations (B-3 splines), de tenir compte de l'effet discret des diagonales et autres étrésillons. Elle présente également l'énorme avantage de permettre la modélisation d'une grande variété de conditions aux limites longitudinales ainsi que la possibilité de prendre en compte des appuis intermédiaires.

L'objectif premier est donc de modifier cette méthode afin d'élaborer un outils numérique simple et efficace pour le calcul de la stabilité élastique de colonnes et poutres composées. Afin de démontrer l'intérêt pratique de la méthode que nous cherchons à développer, nous allons commencer ce chapitre par présenter une revue de la littérature sur le flambement des colonnes composées dans le plan parallèle aux éléments de connexion. Il s'agit d'une instabilité globale qui pose des problèmes théoriques particuliers car il faut tenir compte de l'érosion de la charge critique produite par la déformation des diagonales ou des étrésillons.

Nous présenterons ensuite la méthode des spline bandes finies, une variante de la méthode des bandes finies¹, qui a été choisie comme méthode de base pour établir une nouvelle technique de calcul des colonnes composées. La procédure développée est présentée vers la fin du chapitre. Elle ne sera suivie que par quelques exemples de validation puis par des exemples d'utilisation.

¹ voir Chapitre 2

6.2 Revue de la littérature sur le flambement dans le plan des éléments connexions

6.2.1 Historique

Les premières études théoriques intéressantes et utilisables dans le cadre du flambement des colonnes composées sont l'œuvre d'Engesser (1889, 1891, 1909). Il a obtenu une équation différentielle d'ordre 4 qui a complété la formulation d'Euler sur le flambement des colonnes pleines en prenant en compte les distorsions dues à l'effort tranchant. La souplesse apportée par l'autorisation de ces déformations a donné lieu à des charges critiques plus petites que la charge d'Euler qui suppose des distorsion nulles et donc une rigidité au cisaillement infinie. La différence entre les deux théories est d'autant plus grande que la rigidité au cisaillement est faible.

Plusieurs recherches théoriques et expérimentales sur la stabilité des colonnes composées ont suivi. On peut trouver des présentations claires et exhaustives de l'essentiel des premiers résultats concernant ce sujet dans le livre de Bleich (1952) et dans celui de Timoshenko et Gere (1961).

Plus récemment, Johnston (1971) a trouvé la solution pour les colonnes dont les membrures sont connectées par des étrésillons articulés. Dans ce cas, les éléments de connexion ne font que maintenir l'espacement entre les éléments principaux ; leur rigidité au cisaillement est nulle. L'intérêt de cette solution théorique est qu'elle est la première à voir le problème comme deux éléments connectés et non comme une seule colonne présentant une faible raideur au cisaillement. Elle a également permis de tenir compte de l'existence, fréquente en pratique, de plaques très rigides¹ aux extrémités de la colonne.

Gjelsvik (1990) a présenté une théorie qui tient, cette fois, compte de la rigidité des éléments de connexion. Il les a modélisés par une âme qui relie de manière continue les membrures. Cette âme est supposée ne reprendre que les efforts de cisaillement et elle est connectée aux membrures au niveau de leurs lignes moyennes. Gjelsvik a obtenu une équation différentielle d'ordre 6 qui permet de tenir compte de conditions aux limites particulières telles que l'existence de plaques rigides aux extrémités.

Paul (1995a) a généralisé la théorie de Gjelsvik en supposant que l'âme de connexion est susceptible de reprendre des efforts de flexion en plus de ceux de cisaillement. Il l'a alors modélisée par une poutre de Timoshenko qui se déforme en flexion et en cisaillement. Cette nouvelle théorie permet, en outre, d'envisager la connexion de l'âme équivalente avec les membrures ailleurs qu'au niveau des lignes moyennes de ces dernières. S'agissant d'une généralisation des théories précédentes, nous avons décidé de la présenter dans ce qui suit, et de présenter les méthodes antérieures sous forme de cas particuliers de la théorie de Paul.

Une autre façon d'approcher le problème du flambement des colonnes à étrésillons est de faire une analogie avec les portiques à plusieurs étages et une seule travée. On peut trouver une solution de ce type dans le livre de Timoshenko et Gere (1961) pour les cas où la longueur de l'étrésillon est faible devant la « hauteur d'étage ». D'autres travaux utilisant cette approche peuvent être trouvés dans la littérature (Liu et Xu, 2005).

¹ Stay plates, en anglais

6.2.2 La solution de Paul : une compilation des solutions théoriques

6.2.2.1 La formulation théorique

La figure 6.2 montre le modèle retenu par Paul (1995a et 1995b) pour étudier la colonne composée. L'âme est continûment connectée aux membrures et elle est constituée d'un matériau différent. Les caractéristiques matérielles de cette âme continue doivent être choisies de façon à représenter de manière rationnelle l'âme réelle, qui peut être discontinue comme dans le cas des colonnes à diagonales ou à étrésillons. La procédure pour réaliser ceci est bien établie et on peut la trouver, par exemple, dans le livre de Timoshenko et Gere (1961). Nous allons d'ailleurs en rappeler les principaux cas dans la section 6.2.3 ci-après.

Les principales hypothèses de la théorie de Paul sont :

1. Chaque membrure se comporte comme une poutre de Bernoulli. Ceci veut dire que leurs distorsions sont négligées.
2. La translation transversale (flèche) est la même pour les deux membrures et pour l'âme.
3. L'âme se comporte comme une poutre de Timoshenko, i.e., les sections planes et normales à la ligne moyenne avant déformation restent planes après déformation mais perdent leur normalité.

Pour les besoins de la démonstration et comme montré dans la figure 6.3, on utilise 4 repères : un repère global x,y,z associé à la colonne entière et 3 repères locaux :

1. x,y_U,z : associé à la membrure « supérieure »,
2. x,y_L,z : associé à la membrure « inférieure »,
3. x,y_W,z : associé à l'âme.

Les indices U et L sont utilisés pour les quantités associées, respectivement, aux membrures « supérieure » et « inférieure »¹, alors que l'indice W correspond aux grandeurs relatives à l'âme. Les matériaux des deux membrures sont supposés identiques pour simplifier la présentation. La position de la connexion âme – membrure est a priori arbitraire, et c'est ce qui a motivé l'utilisation de cette méthode pour valider celle que nous souhaitons développer.

La déformée de la colonne sous une charge axiale P est montrée dans la figure 6.4. L'origine O du repère global se déplace de $W(z)$ dans la direction z et de $V(z)$ dans la direction y. U, L et \tilde{O} sont les points sur les axes de la membrure supérieure, de la membrure inférieure et de l'âme, respectivement. U et L ont le même déplacement $V(z)$ selon y. U se déplace de $W_U(z)$ et L de $W_L(z)$ selon la direction z. Les sections au niveau des deux membrures tournent du même angle $-V'(z)$, autour de l'axe x positif. Le prime indique une dérivation par rapport à z. Le point \tilde{O} de l'âme se déplace de $V(z)$ selon y et de $W_W(z)$ selon z. De la figure 6.4, on peut déduire que la distorsion dans l'âme vaut :

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\phi} + V' \quad (6.1)$$

¹ il faudrait que la colonne soit placée horizontalement !

Où $\tilde{\phi}$ est la rotation autour de l'axe x positif de la ligne A_1B_1 reliant les points de connexion de l'âme A_1 et B_1 .

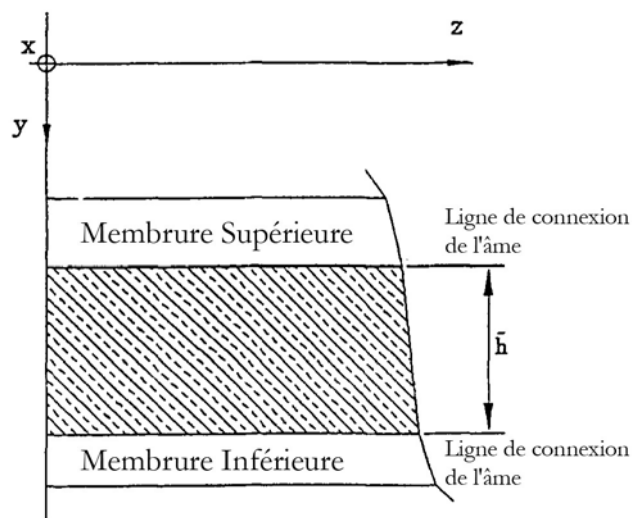


Figure 6.2 Modèle de la colonne composée (Paul, 1995a)

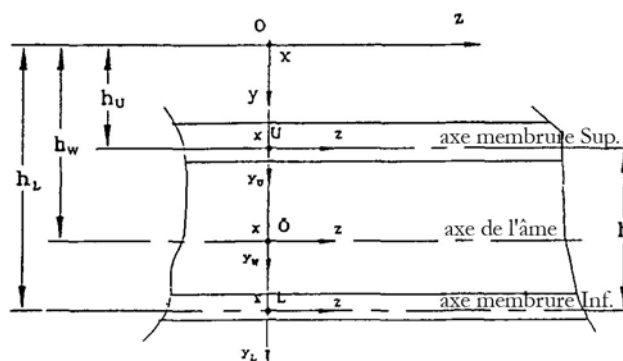


Figure 6.3 Systèmes de coordonnées global et locaux.

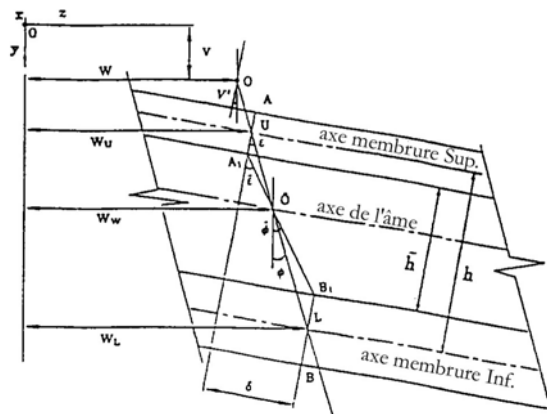


Figure 6.4 Déplacement d'une section de la colonne.

Le déplacement relatif, δ , entre les points A_1 et B_1 ou U et L dans la direction z est égal à :

$$\delta = \tilde{\varepsilon} \tilde{h} = \varepsilon h \quad (6.2)$$

Le symbole tilde ($\tilde{}$) est utilisé pour indiquer les grandeurs associées à la ligne de connexion de l'âme qui peut être placée arbitrairement dans les membrures. Comme indiqué dans la figure 6.4, \tilde{h} est la distance normale entre A_1 et B_1 , alors que h est la distance normale entre U et L. La distorsion nominale d'un panneau connecté en U et L est ε . En combinant les équations (6.1) et (6.2), la relation entre $\tilde{\phi}$, ϕ et V' peut être trouvée :

$$\phi = t_r \tilde{\phi} + (t_r - 1)V' \quad (6.3)$$

Où
$$t_r = \tilde{h}/h \quad (6.4)$$

Si, par exemple, l'âme est attachée aux membrures au niveau des lignes moyennes, on a :

$$t_r = 1 ; \tilde{\phi} = \phi \quad (6.5)$$

Le déplacement longitudinal (selon z) d'un point de l'âme est :

$$w = W_w + y_w \tilde{\phi} = W + h_w \phi + y_w \tilde{\phi} \quad (6.6)$$

En utilisant la loi de Hooke, on peut calculer la contrainte longitudinale dans l'âme :

$$(\sigma_{zz})_w = E_w (W' + h_w \phi' + y_w \tilde{\phi}') \quad (6.7)$$

Où E_w et le module de Young du matériau de l'âme.

En intégrant cette contrainte sur la section transversale de l'âme A_w , on peut trouver l'effort normal N_w et le moment fléchissant M_w associés à l'âme :

$$N_w = E_w (A_w (W' + h_w \phi') + S_w \tilde{\phi}') \quad (6.8.a)$$

$$M_w = E_w (S_w (W' + h_w \phi') + I_w \tilde{\phi}') \quad (6.8.b)$$

De même, il est aisé de démontrer les expressions des efforts normaux et moments fléchissant dans les deux membrures :

$$N_U = E_C (A_U (W' + h_U \phi') - S_U V'') \quad (6.9.a)$$

$$N_L = E_C (A_L (W' + h_L \phi') - S_L V'') \tag{6.9.b}$$

$$M_U = E_C (S_U (W' + h_U \phi') - I_U V'') \tag{6.9.c}$$

$$M_L = E_C (S_L (W' + h_L \phi') - I_L V'') \tag{6.9.d}$$

Où A, S et I désignent, respectivement, la surface, le moment statique et le moment d'inertie de l'âme ou des membrures (suivant l'indice W, U ou L) :

$$S_U = \int_{\Lambda_U} y_U \, dA \ ; \ I_U = \int_{\Lambda_U} y_U^2 \, dA \tag{6.10.a,b}$$

$$S_L = \int_{\Lambda_L} y_L \, dA \ ; \ I_L = \int_{\Lambda_L} y_L^2 \, dA \tag{6.10.a,b}$$

$$S_W = \int_{\Lambda_W} y_W \, dA \ ; \ I_W = \int_{\Lambda_W} y_W^2 \, dA \tag{6.10.a,b}$$

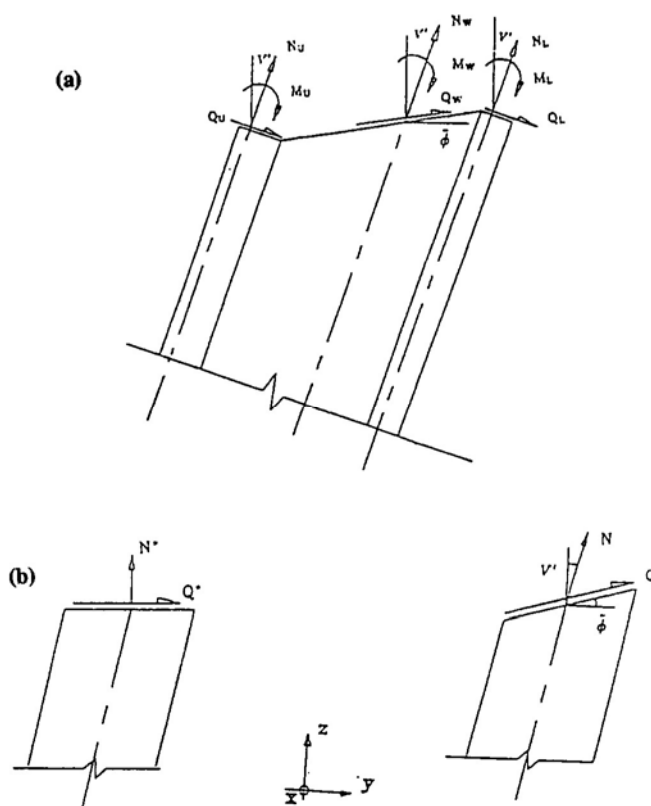


Figure 6.5 Efforts internes agissant sur la colonne déformée.

La figure 6.5 montre les forces locales et globales agissant sur la colonne déformée. À partir de l'équilibre et des équations (6.8) et (6.9), il s'en suit que l'effort normal N est :

$$N = N_U + N_L + N_W \quad (6.11.a)$$

$$N = E_C (A_C W' + (A_U h_U + A_L h_L) \phi' - (S_U + S_L) V'') + E_W (A_W W' + A_W h_W \phi' + S_W \tilde{\phi}') \quad (6.11.b)$$

Où, A_C est l'aire des deux membrures :

$$A_C = A_U + A_L \quad (6.12)$$

Le moment fléchissant total, M , peut être vu comme la contribution des moments dans les membrures, $M_C = M_U + M_L$, du moment dans l'âme, M_W , et du moment résultant des forces axiales dans les membrures et dans l'âme, M_T . M vaut :

$$M = M_U + M_L + M_W + N_U h_U + N_L h_L + N_W h_W \quad (6.13.a)$$

$$M = M_C + M_W + M_T \quad (6.13.b)$$

Où,

$$M_C = E_C ((S_U + S_L) W' + (S_U h_U + S_L h_L) \phi' - (I_U + I_L) V'') \quad (6.14)$$

$$M_W = E_W (S_W W' + S_W h_W \phi' + I_W \tilde{\phi}') \quad (6.15)$$

$$M_T = N_U h_U + N_L h_L + N_W h_W \quad (6.16.a)$$

$$M_T = E_C ((A_U h_U + A_L h_L) W' + (A_U h_U^2 + A_L h_L^2) \phi' - (S_U h_U + S_L h_L) V'') + N_W h_W \quad (6.16.b)$$

L'effort tranchant total, Q , est également la combinaison des contributions des efforts tranchants dans les membrures, $Q_C = Q_U + Q_L$, et dans l'âme, Q_W :

$$Q = Q_C + Q_W \quad (6.17)$$

L'effort tranchant Q_W est relié à la distorsion $\tilde{\epsilon}$ par la loi de Hooke :

$$Q_W = K \tilde{\epsilon} \quad (6.18)$$

Où, K est la rigidité au cisaillement de l'âme. La procédure de détermination de K pour les colonnes à diagonales ou à étrésillons sera rappelée dans la section 6.2.3 ci-après.

La figure 6.6 montre un élément de colonne de longueur dz , décomposé en éléments de membrures et d'âme. La variation de l'effort normal selon z résulte en des efforts de cisaillement répartis agissant le long des lignes de connexion membrures – âme. Comme indiqué sur la figure 6.6, l'effort de cisaillement réparti q_U agit entre l'âme et la membrure supérieure, alors q_L se manifeste entre l'âme et la membrure inférieure. Pour avoir l'équilibre des forces agissant selon l'axe z , on doit avoir :

$$q_U = -N'_U ; q_L = N'_L \tag{6.19.a,b}$$

Aussi, à partir de l'équilibre des moments on peut écrire :

$$Q_U = M'_U + q_U C_U ; Q_L = M'_L + q_L C_L \tag{6.20.a,b}$$

C_U et C_L sont les distances qui séparent les axes des membrures des lignes de connexion membrure – âme, comme indiqué sur la figure 6.6.

A partir des équations (6.19) et (6.20), les efforts tranchants s'écrivent

$$Q_U = M'_U - N'_U C_U ; Q_L = M'_L + N'_L C_L \tag{6.21.a,b}$$

En sommant ces deux forces, on obtient l'effort tranchant repris par les deux membrures $Q_C = Q_U + Q_L$

$$Q_C = M'_U + M'_L - N'_U C_U + N'_L C_L \tag{6.22}$$

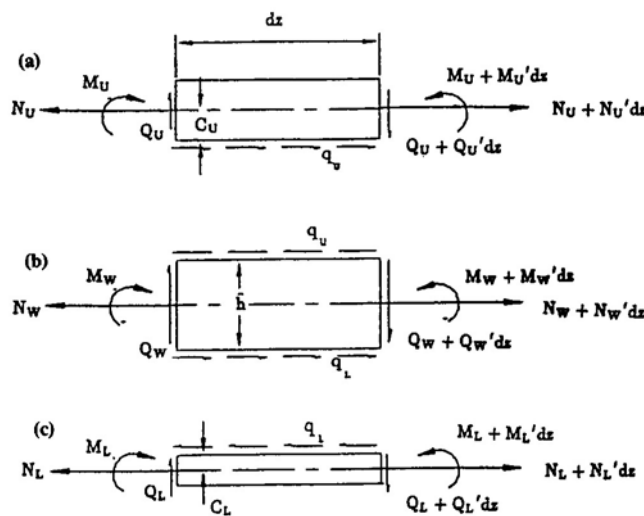


Figure 6.6 Equilibres des membrures et de l'âme : (a) membrure supérieure ; (b) âme ; (c) membrure inférieure.

Dans la figure 6.5, deux jeux de forces globales sont indiqués. Les efforts N et Q sont parallèles aux axes de la colonne déformée, alors que N^* et M^* sont parallèles aux positions initiales des axes. Ceci simplifie l'écriture de l'équilibre global.

En faisant l'hypothèse des petites rotations, l'équilibre global de la colonne conduit à

$$N^* = N = -P ; Q^* = Q - PV' ; Q = M' \quad (6.23-25)$$

Où P est la force axiale de compression appliquée à la colonne.

En supposant que la colonne n'est pas chargée transversalement, on peut écrire que

$$Q^{*'} = 0 \quad (6.26)$$

Les équations (6.24) et (6.26) donnent

$$Q' - PV'' = 0 \quad (6.27)$$

qui peut être combinée à (6.25)

$$M'' - PV'' = 0 \quad (6.28)$$

En combinant les équations (6.13), (6.17), (6.22) et (6.25), on trouve

$$Q_w = M'_w + N'_U(h_U + C_U) + N'_L(h_L - C_L) + N'_w h_w \quad (6.29)$$

En utilisant les expressions de N_U et N_L données par l'équation (6.9), on peut écrire

$$N'_U(h_U + C_U) + N'_L(h_L - C_L) = E_C(S_C W'' + I_{TC} \phi'' - I_{SC} V''') \quad (6.30)$$

Avec

$$S_C = A_U(h_U + C_U) + A_L(h_L - C_L) \quad (6.31.a)$$

$$I_{TC} = A_U(h_U + C_U)h_U + A_L(h_L - C_L)h_L \quad (6.31.b)$$

$$I_{SC} = S_U(h_U + C_U) + S_L(h_L - C_L) \quad (6.31.c)$$

En utilisant les expressions (6.15) et (6.30) dans (6.29) on obtient

$$Q_w = E_w(S_w(W'' + h_w \phi'') + I_w \tilde{\phi}'') + E_C(S_C W'' + I_{TC} \phi'' - I_{SC} V''') + N'_w h_w \quad (6.32)$$

Si la section est symétrique et si le repère global est placé au niveau de la ligne moyenne de la section de la colonne, on a les simplifications suivantes

$$S_C = 0 ; I_{SC} = 0 ; S_W = 0 ; h_W = 0 \quad (6.33.a-d)$$

De l'équation (6.32), il ne reste alors que

$$Q_W = E_W I_W \tilde{\phi}'' + E_C I_{TC} \phi'' \quad (6.34)$$

En remplaçant Q_W par son expression (6.15) et $\tilde{\varepsilon}$ par l'équation (6.1), il s'ensuit

$$V' = -\tilde{\phi} + \frac{E_W I_W}{K} \tilde{\phi}'' + \frac{E_C I_{TC}}{K} \phi'' \quad (6.35)$$

En exploitant l'équation (6.3) donnant la relation entre ϕ et $\tilde{\phi}$, l'expression de V' devient

$$V' = -\tilde{\phi} + \xi_1 \tilde{\phi}'' + \xi_2 V''' \quad (6.36)$$

Où les nouveaux paramètres valent

$$\xi_1 = \frac{E_W I_W + E_C I_{TC} t_r}{K} ; \xi_2 = \frac{E_C I_{TC} (t_r - 1)}{K} \quad (6.37.a,b)$$

Si, en plus, les axes locaux des membrures sont placés au niveau de leurs lignes moyennes, il s'ensuit les simplifications suivantes

$$S_U = S_L = 0 ; S_U h_U + S_L h_L = 0 ; A_U h_U + A_L h_L = 0 \quad (6.38.a-c)$$

En remplaçant les équations (6.33) et (6.38) dans (6.14), (6.15) et (6.16), il découle

$$M_C = -E_C I_C V'' ; M_W = E_W I_W \tilde{\phi}' ; M_T = E_C I_T \phi' \quad (6.39.a-c)$$

Avec

$$I_C = I_U + I_L ; I_T = (A_U h_U^2 + A_L h_L^2) \quad (6.40-41)$$

Le moment fléchissant total, M , est par suite donné par :

$$M = -E_C I_C V'' + E_W I_W \tilde{\phi}' + E_C I_T \phi' \quad (6.42)$$

En remplaçant ϕ par son expression (6.3), il résulte

$$M = (E_w I_w + E_c I_T t_r) \tilde{\phi}' - (E_c I_c + E_c I_T (1 - t_r)) V'' \quad (6.43)$$

Cette expression peut être simplifiée en introduisant les paramètres κ_1 et κ_2

$$M = \kappa_1 \tilde{\phi}' - \kappa_2 V'' \quad (6.44)$$

$$\text{Où} \quad \kappa_1 = E_w I_w + E_c I_T t_r ; \quad \kappa_2 = E_c I_c + E_c I_T (1 - t_r) \quad (6.45.a,b)$$

En combinant les équations (6.28) et (6.44), on a

$$\kappa_1 \tilde{\phi}''' - \kappa_2 V'''' - PV'' = 0 \quad (6.46)$$

En dérivant l'expression (6.36) et en lui rajoutant (6.46) multipliée par $(-\xi_1/\kappa_1)$ afin d'éliminer les $\tilde{\phi}'''$, il découle

$$\tilde{\phi}' = \left(-1 + \frac{\xi_1}{\kappa_1} P \right) V'' + \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) V'''' \quad (6.47)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation (6.46) afin de ne laisser apparaître que les dérivées de V, il s'ensuit

$$(\kappa_1 \xi_2 + \xi_1 \kappa_2) V'''' - (\kappa_1 + \kappa_2 - \xi_1 P) V'''' - PV'' = 0 \quad (6.48)$$

En utilisant (6.47) dans l'équation (6.36), on trouve la relation entre $\tilde{\phi}$ et V.

$$\tilde{\phi} = -V' + \left[\xi_1 \left(\frac{\xi_1}{\kappa_1} P - 1 \right) + \xi_2 \right] V''' + \xi_1 \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) V'''' \quad (6.49)$$

Les équations (6.48) et (6.49) sont les équations différentielles gouvernant le flambement des colonnes composées, en fonction des variables V et $\tilde{\phi}$.

Pour pouvoir écrire les conditions aux limites, il est nécessaire d'avoir l'expression de l'effort tranchant « non incliné » Q^* en fonction de V. A partir des équations (6.24) et (6.25), on peut écrire

$$Q^* = M' - PV' \quad (6.50)$$

Cette relation peut être réécrite en fonction de V seule en utilisant les expressions (6.44) et (6.47).

$$Q^* = (\kappa_1 \xi_2 + \xi_1 \kappa_2) V'''' - (\kappa_1 + \kappa_2 - \xi_1 P) V''' - PV' \quad (6.51)$$

Pour trouver la solution générale des équations obtenues, il est commode de les transformer dans une forme adimensionnelle en introduisant la coordonnée adimensionnelle.

$$\bar{z} = z/L \quad (6.52)$$

L est la longueur de la colonne.

En indiquant par des chiffres romains les dérivées par rapport à \bar{z} , les équations (6.48) et (6.49) gouvernant le flambement des colonnes composées s'écrivent :

$$V^{VI} - 2AV^{IV} - BV^{II} = 0 ; \tilde{\phi}L = -V^I + CV^{III} + DV^V \quad (6.53. a,b)$$

Où les coefficients adimensionnels sont

$$A = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2 - \xi_1 P)L^2}{2(\kappa_1 \xi_2 + \xi_1 \kappa_2)} ; B = \frac{PL^4}{(\kappa_1 \xi_2 + \xi_1 \kappa_2)} \quad (6.54.a,b)$$

$$C = \frac{\xi_1 \left(\frac{\xi_1 P - 1}{\kappa_1} \right) + \xi_2}{L^2} ; D = \frac{\xi_1 \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)}{L^4} \quad (6.54.c,d)$$

Où ξ_1 , ξ_2 et κ_1 , κ_2 ont été définis par les équations (6.37) et (6.45). Les solutions de l'équation différentielle (6.53) sont de la forme :

$$V(\bar{z}) = C_1 + C_2 \bar{z} + C_3 \sin v\bar{z} + C_4 \cos v\bar{z} + C_5 \sinh \mu\bar{z} + C_6 \cosh \mu\bar{z} \quad (6.55.a)$$

$$\tilde{\phi}(\bar{z})L = -C_2 + \alpha [-C_3 \cos v\bar{z} + C_4 \sin v\bar{z}] + \beta [C_5 \cosh \mu\bar{z} + C_6 \sinh \mu\bar{z}] \quad (6.55.b)$$

$$\text{Où} \quad v = \left[(A^2 + B)^{1/2} - A \right]^{1/2} ; \mu = \left[(A^2 + B)^{1/2} + A \right]^{1/2} \quad (6.56.a,b)$$

$$\alpha = v(1 + v^2 C - v^4 D) ; \beta = \mu(-1 + \mu^2 C + \mu^4 D) \quad (6.56.c,d)$$

Les constantes C_1 à C_6 doivent être déterminées à partir des conditions aux limites.

6.2.2.2 Les conditions aux limites

Les différents cas de conditions aux limites peuvent être obtenues en s'aidant de l'expression du travail virtuel. Dans une section transversale quelconque de la colonne, le travail virtuel prend la forme ci-dessous

$$\bar{W} = Q^* V - M_C V' + M_W \tilde{\phi} + M_T \phi \tag{6.57}$$

En utilisant l'équation (6.3) pour remplacer ϕ en fonction de $\tilde{\phi}$, on trouve

$$\bar{W} = \{Q^* V\} + \{-M_C + M_T(t_r - 1)\}V' + \{(M_W + M_T t_r)\tilde{\phi}\} \tag{6.58}$$

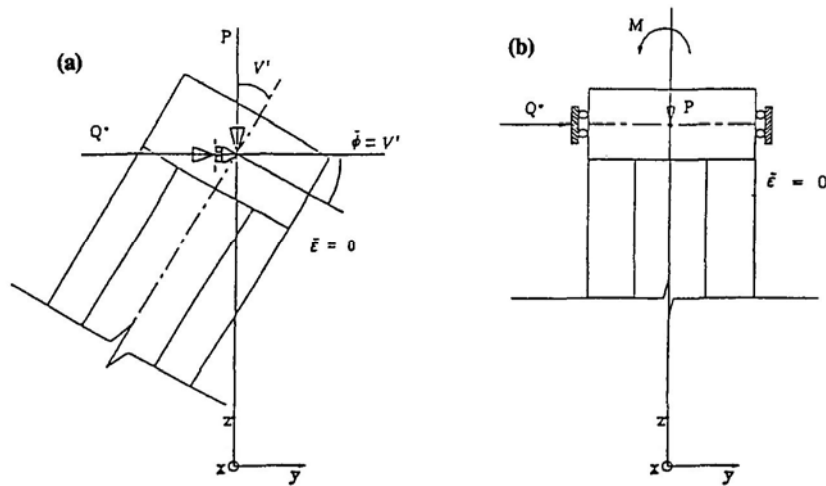


Figure 6.7 Conditions aux limites : (a) Appui simple avec plaque indéformable ; (b) Encastrement avec plaque indéformable.

Cette écriture du travail met en évidence trois forces généralisées associées à la flèche V , à la rotation des sections droites des membrures V' , et à la rotation de la section droite de l'âme $\tilde{\phi}$. Toutes les combinaisons de conditions aux limites peuvent ainsi être trouvées du moment que, dans tout appui, les trois travaux correspondants (les 3 termes entre accolades) doivent être nuls.

Les deux cas de conditions aux limites les plus courants sont l'articulation et l'encastrement en présence de plaques infiniment rigides. Ils sont montrés dans la figure 6.7. La présence de la plaque indéformable à une extrémité de la colonne implique que la distorsion de l'âme, $\tilde{\epsilon}$, est nulle. Au niveau d'un appui simple, le déplacement est nul.

$$V = 0 \tag{6.59}$$

A partir de la figure 6.7, il est évident qu'on a également $\tilde{\phi} = \phi$. L'équation (6.3) se réduit à

$$(\tilde{\phi} + V')(1 - t_r) = 0 \quad (6.60)$$

Conformément à l'équation (6.3), le terme $(1 - t_r)$ n'est nul que dans le cas où l'âme est reliée aux membrures au niveau de leurs lignes moyennes, et que dans le cas général, ce terme est non nul. Il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\tilde{\phi} + V' = 0 \quad (6.61)$$

Au vu de l'équation (6.1), ceci correspond à

$$\tilde{\varepsilon} = 0 \quad (6.62)$$

Ce qui est conforme à ce qui a été dit ci-dessus concernant la présence de la plaque indéformable à l'extrémité de la colonne. En utilisant (6.61), l'expression (6.57) du travail peut être réécrite ainsi

$$\bar{W} = Q^* V + (M_C + M_W + M_T) \tilde{\phi} \quad (6.63)$$

Comme la rotation de l'articulation est permise, $\tilde{\phi} \neq 0$, c'est le moment total qui doit être nul pour annuler le travail. Il s'agit donc de la traditionnelle condition de l'appui simple.

$$M_C + M_W + M_T = M = 0 \quad (6.64)$$

En utilisant l'équation (6.43), la condition ci-dessus devient :

$$\tilde{\phi}' - \chi V'' = 0 \quad (6.65)$$

où

$$\chi = \frac{E_C I_C + E_C I_T (1 - t_r)}{E_W I_W + E_C I_T t_r} \quad (6.66)$$

Les équations (6.59), (6.61) et (6.65) sont donc les trois conditions d'un appui simple. Pour une extrémité encastree avec une plaque indéformable, les trois conditions s'écrivent naturellement

$$V = 0 ; V' = 0 ; \tilde{\phi} = \phi = 0 \quad (6.67)$$

Dans le cas où les deux extrémités possèdent les mêmes conditions aux limites, il est commode d'exploiter la symétrie de la solution en plaçant l'origine de l'axe z au milieu de la colonne. Ainsi, la solution (6.55) se réduit à

$$V(\bar{z}) = C_1 + C_4 \cos v\bar{z} + C_6 \cosh \mu\bar{z} \quad (6.68.a)$$

$$\tilde{\phi}(\bar{z})L = \alpha C_4 \sin v\bar{z} + \beta C_6 \sinh \mu\bar{z} \quad (6.68.b)$$

Les conditions d'appui simple réécrites sous forme adimensionnelle s'écrivent

$$V = 0 ; \tilde{\phi}L + V^I = 0 ; \tilde{\phi}^I L - \chi V^{II} = 0 \quad (6.69.a-c)$$

Pour trouver la solution d'une colonne bi-articulée, il faut écrire les conditions ci-dessus pour la limite $\bar{z} = \pm 1/2$ en utilisant les expressions (6.68). La relation matricielle suivante peut alors être déduite.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(v/2) & \cosh(\mu/2) \\ 0 & (\alpha - v)\sin(v/2) & (\beta + \mu)\sinh(\mu/2) \\ 0 & (\alpha v + \chi v^2)\cos(v/2) & (\beta\mu - \chi\mu^2)\cosh(\mu/2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.70)$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui n'admet de solution non nulle que si le déterminant de la matrice est nul. La plus petite racine définit la charge critique de la colonne composée bi-articulée.

Les conditions d'encastrement (6.67) réécrites sous forme adimensionnelle deviennent

$$V = 0 ; V^I = 0 ; \tilde{\phi}L = 0 \quad (6.71)$$

En substituant la solution (6.68) dans ces conditions, on trouve

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(v/2) & \cosh(\mu/2) \\ 0 & -v \sin(v/2) & \mu \sinh(\mu/2) \\ 0 & \alpha \sin(v/2) & \beta \sinh(\mu/2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.72)$$

En égalisant le déterminant à zéro et en cherchant la plus petite racine on trouve la charge critique de la colonne composée bi-encastree.

Dans la solution de Paul, on ne peut pas donner une formule prête à l'emploi. Pour chaque cas de colonne et en fonction des conditions aux limites, il faut écrire le système d'équations homogènes, calculer le déterminant et rechercher ses racines. Il est donc indispensable d'écrire un programme informatique pour utiliser cette solution, chose qui a été réalisée sous MATLAB (Mathworks, 2005). Ce programme sera exploité lors de la

phase de validation de la méthode numérique que nous cherchons à développer dans ce chapitre.

6.2.2.3 Les autres solutions théoriques

Dans le cas où l'âme est attachée aux membrures au niveau des lignes moyennes ($t_r = 1$; $\tilde{\phi} = \phi$), les équations (6.48) et (6.49) gouvernant le flambement des colonnes composées peuvent se mettre sous la forme suivante

$$-E_c I_c \frac{E_w I_w + E_c I_T}{K} V'''' + \left[EI - (E_w I_w + E_c I_T) \frac{P}{K} \right] V'''' + PV'' = 0 \quad (6.73)$$

$$\phi = -V' + \frac{E_w I_w + E_c I_T}{K} \left[\left(\frac{P}{K} - 1 \right) V'' + \frac{E_c I_c}{K} V'''' \right] \quad (6.74)$$

$$\text{Où} \quad EI = E_w I_w + E_c I_T + E_c I_c \quad (6.75)$$

EI représente la raideur flexionnelle totale de la section. $E_w I_w$ tient compte de la raideur flexionnelle de l'âme. Il peut être négligé pour les colonnes à diagonales ou à étrésillons.

a Solution de Gjelsvik

En négligeant simplement la raideur flexionnelle de l'âme, $E_w I_w = 0$, on retrouve les équations établies par Gjelsvik (1990). La procédure de recherche des charges critiques est identique à celle de la solution de Paul présentée ci-dessus.

b Solution d'Euler

Conformément aux hypothèses d'Euler, la rigidité au cisaillement K de la colonne est très grande, ce qui implique

$$\frac{1}{K} = 0 \quad (6.76)$$

En utilisant cette hypothèse dans les équations (6.73) et (6.74), on retrouve l'équation du flambement des colonnes d'Euler

$$EIV'''' + PV'' = 0 \quad (6.77)$$

$$\tilde{\phi} = \phi = -V' \quad (6.78)$$

En introduisant la coordonnée adimensionnelle \bar{z} et en indiquant par des chiffres romains les dérivées par rapport à \bar{z} , les équations (6.77) et (6.78) deviennent

$$V^{IV} + \eta^2 V^{II} = 0 \quad (6.79)$$

$$\phi(\bar{z})L = -V^I \quad (6.80)$$

où
$$\eta^2 = PL^2/EI \quad (6.81)$$

La solution de cette équation est donnée par

$$V(\bar{z}) = C_1 + C_2 \bar{z} + C_3 \sin \eta \bar{z} + C_4 \cos \eta \bar{z} \quad (6.82)$$

Ce qui nécessite 4 conditions aux limites. Dans le cas d'une extrémité articulée, il est connu que ce sont la flèche et le moment qui doivent être nuls. On peut également retrouver ces conditions à partir des équations (6.69) en utilisant les hypothèses d'Euler

$$V = 0 ; V^{II} = 0 \quad (6.83.a,b)$$

Dans le cas où les deux extrémités sont articulées, il est commode d'exploiter la symétrie de la solution en plaçant l'origine de l'axe z au milieu de la colonne. Il suffit alors d'écrire les conditions ci-dessus pour la limite $\bar{z} = \pm 1/2$, pour obtenir la relation matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\eta/2) \\ 0 & \eta^2 \cos(\eta/2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui n'admet de solution non nulle que si le déterminant de la matrice est nul. La plus petite racine, η_{cr} , définit la charge critique d'Euler de la colonne bi-articulée.

$$\eta_{cr} = \pi \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.85)$$

La deuxième colonne du tableau 6.1 donne les valeurs critiques de η pour différentes conditions aux limites selon la solution d'Euler.

c Solution d'Engesser

Pour retrouver les équations d'Engesser (1889) à partir de la solution de Paul, il suffit de supposer que les rigidités flexionnelles des membrures sont négligeables devant la rigidité flexionnelle de la section de la colonne, i.e., $I_C \approx 0$. Suite à cette hypothèse, les équations (6.73) et (6.74) deviennent

$$EI \left(1 - \frac{P}{K} \right) V'''' + PV'' = 0 \quad (6.86)$$

$$\phi = -V' + \frac{EI}{K} \left(\frac{P}{K} - 1 \right) V''' \quad (6.87)$$

Avec
$$EI = E_w I_w + E_C I_T \quad (6.88)$$

En passant à la coordonnée adimensionnelle \bar{z} , les relations (6.86) et (6.87) deviennent

$$V^{IV} + \mathfrak{g}^2 V^{II} = 0 \quad (6.89)$$

$$\phi(\bar{z})L = -V^I + \frac{EI}{KL^2} \left(\frac{P}{K} - 1 \right) V^{III} \quad (6.90)$$

où
$$\mathfrak{g}^2 = \frac{PL^2}{EI \left(1 - \frac{P}{K} \right)} \quad (6.91)$$

L'équation (6.89) possède la même forme que (6.79). La solution (6.82) peut être reconduite en remplaçant η par \mathfrak{g} . Comme les conditions aux limites d'appuis simples sont les mêmes que pour la solution d'Euler, il est aisé de trouver que la charge critique d'Engesser d'une colonne bi-articulée est définie par

$$\mathfrak{g}_{cr} = \pi \quad (6.92)$$

Le tableau 6.1 donne les valeurs de \mathfrak{g} définissant les charges critiques selon la théorie d'Engesser pour différentes conditions aux limites. Il donne en parallèle les solutions d'après la formulation d'Euler.

Tableau 6.1 Les solutions d'Euler et d'Engesser pour différentes conditions aux limites (Paul, 1995b)

Conditions aux limites	Solution d'Euler	Solution d'Engesser
Articulé – Articulé	$\eta = \pi$	$\vartheta = \pi$
Encastré – Encastré	$\eta = 2\pi$	$\vartheta = 2\pi$
Encastré – Articulé	$\tan \eta = \eta$	$\tan \vartheta = \vartheta(1 - P/K)$
Encastré – Libre	$\eta = \pi/2$	$\vartheta = \pi/2$
Encastré – Encastrement déplaçable	$\eta = \pi$	$\vartheta = \pi$

A part le cas de la colonne encastrée – articulée, on peut remarquer que les charges critiques des deux théories sont trouvées à partir de valeurs identiques de η et ϑ . Dans la plupart des cas pratiques, on peut donc exprimer la charge critique d'Engesser, \bar{P}_{cr} , en fonction de la charge critique d'Euler, P_{cr} , mieux connue par les praticiens, en égalisant (6.81) et (6.91).

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr}}{\left(1 + \frac{P_{cr}}{K}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{P_{cr}} + \frac{1}{K}\right)} \quad (6.93)$$

Il est évident que la charge critique d'Engesser est plus petite que celle d'Euler, $\bar{P}_{cr} < P_{cr}$, et que plus la rigidité au cisaillement K est faible, plus le rapport \bar{P}_{cr}/P_{cr} est petit. Les colonnes composées à diagonales ou à étrésillons présentent, comme on le montrera dans la section 6.2.3 une rigidité K beaucoup plus faible que celle des colonnes à sections pleines. Dans leur cas, l'érosion de la charge critique due au cisaillement ne peut donc pas être ignorée.

d Solution de Johnston

Johnston (1971) a trouvé la solution des colonnes composées dont les membrures sont connectées par des étrésillons bi-articulés. Dans ce cas, les connecteurs, c'est-à-dire l'âme, ne font que maintenir l'espacement entre les membrures. Leurs rigidités au cisaillement et à la flexion sont nulles

$$K = 0 ; E_w I_w = 0 \quad (6.94)$$

Il s'ensuit les équations différentielles modifiées suivantes

$$\phi'' = 0 \quad (6.95)$$

$$E_C I_C V'''' + PV'' = 0 \quad (6.96)$$

Six conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre les équations (6.95) et (6.96). Dans ce cas, il est possible de tenir compte des plaques indéformables aux extrémités, d'où l'intérêt particulier de la solution de Johnston. Les formes adimensionnelles des équations (6.95) et (6.96) sont

$$\phi^{\text{II}}L = 0 \quad (6.97)$$

$$V^{\text{IV}} + \gamma^2 V^{\text{II}} = 0 \quad (6.98)$$

où
$$\gamma^2 = PL^2/E_c I_c \quad (6.99)$$

On peut définir le paramètre γ par rapport à EI qui représente la raideur flexionnelle totale de la section. En substituant (6.94) dans (6.75), on a dans le cas des hypothèses de Johnston

$$EI = E_c I_T + E_c I_c \quad (6.100)$$

On peut en déduire la relation

$$E_c I_c = \frac{\chi}{(\chi+1)} EI ; \chi = \frac{I_c}{I_T} \quad (6.101.a,b)$$

Les solutions des équations (6.97) et (6.98) s'écrivent

$$\phi(\bar{z})L = C_1 + C_2 \bar{z} \quad (6.102)$$

$$V(\bar{z}) = C_3 + C_4 \bar{z} + C_5 \sin \gamma \bar{z} + C_6 \cos \gamma \bar{z} \quad (6.103)$$

Les six constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites. A titre d'exemple, les conditions d'appui simple en présence de plaques indéformables aux extrémités sont données par les équations (6.69). On peut les écrire pour les deux extrémités $\bar{z} = 0$ et $\bar{z} = 1$. On aboutit à la relation matricielle ci-dessous

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \chi\gamma^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \gamma \cos \gamma & -\gamma \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \chi\gamma^2 \sin \gamma & \chi\gamma^2 \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.104)$$

Ici encore, il n'y a pas de solution prête à l'emploi. Pour différentes valeurs de χ et γ , les charges critiques correspondantes sont obtenues en annulant le déterminant.

La solution de Johnston est donnée dans ce chapitre pour compléter l'exposé des méthodes théoriques. Nous utiliserons plutôt la méthode, plus générale, de Paul (1995a) pour la validation de la méthode que nous cherchons à développer avec celles, plus classiques, d'Engesser et d'Euler. Mais avant, nous allons rappeler comment on peut évaluer la rigidité au cisaillement K des colonnes à diagonales et à étrépillons (Timoshenko et Gere, 1961 ; ESDEP, 2005).

6.2.3 Evaluation de la rigidité au cisaillement des colonnes lacées et à étrépillons

6.2.3.1 Colonnes lacées ou à diagonales

Dans les colonnes lacées l'élongation élastique des barres diagonales et horizontales doit être considérée afin de dériver la rigidité au cisaillement K ; l'élongation des membrures (les composants principaux) due à l'effort normal n'est pas prise en considération.

Le premier type de colonne dans cet exposé possède une disposition du laçage en forme de N, comme montré dans la figure 6.8. Un échantillon représentatif de l'âme de la colonne est composé d'une barre diagonale de section A_d et d'une barre horizontale de section A_o . Ces motifs sont espacés d'une distance a ; les membrures sont distantes de h . La longueur des barres diagonales est notée d , celles des barres horizontales est h . Toutes les barres sont supposées faites dans le même matériau de module de Young E .

Pour calculer la flexibilité au cisaillement, il suffit d'appliquer à l'échantillon de l'âme une force de cisaillement unitaire et d'évaluer la distorsion γ correspondante (figure 6.8). La rigidité est simplement l'inverse de la flexibilité.

$$\frac{1}{K} = \gamma = \frac{\delta}{a} \quad (6.105)$$

δ est le déplacement total dû à la contribution δ_1 de l'élongation de la diagonale et à l'apport δ_2 du raccourcissement de la barre horizontale. A partir du principe des travaux virtuels, il est aisé d'écrire

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = N_d \frac{d}{EA_d} N_d + N_o \frac{h}{EA_o} N_o = \frac{d}{h} \frac{d}{EA_d} \frac{d}{h} + 1 \frac{h}{EA_o} 1 \quad (6.106)$$

Ainsi, pour un plan de laçage, la rigidité au cisaillement est donnée par

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{aE} \left(\frac{d^3}{h^2 A_d} + \frac{h}{A_o} \right) = \frac{1}{ah^2 E} \left(\frac{d^3}{A_d} + \frac{h^3}{A_o} \right) \quad (6.107)$$

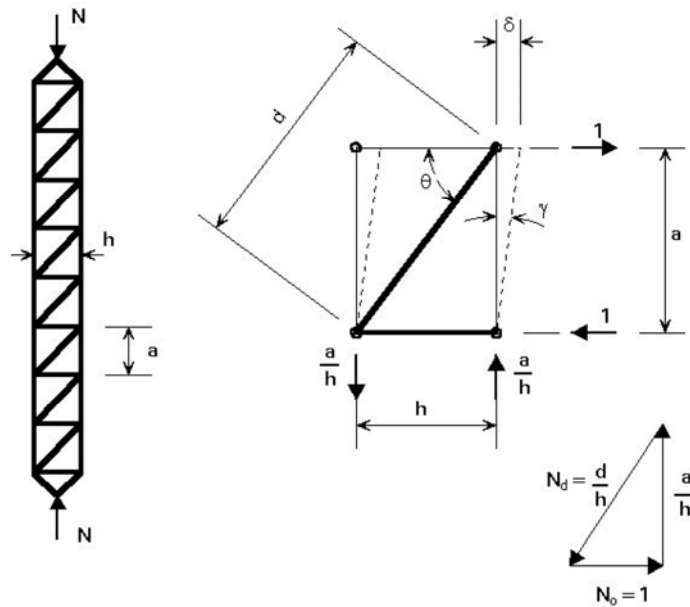


Figure 6.8 Colonne composée à laçage en forme de N (ESDEP, 2005)

Le deuxième exemple de calcul de la rigidité au cisaillement est montré dans la figure 6.9. Il s'agit d'une colonne composée à laçage en forme de A. La hauteur du motif représentatif de l'âme vaut $2a$. Les mêmes symboles de l'exemple précédent sont reconduits. En adoptant la même démarche, on trouve

$$\delta = 2N_d \frac{d}{EA_d} N_d = 2 \frac{d}{h} \frac{d}{EA_d} \frac{d}{h} = 2 \frac{d^3}{h^2 EA_d} \quad (6.108)$$

Par suite, pour un plan de laçage, on a

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta}{2a} = \frac{d^3}{ah^2 EA_d} \quad (6.109)$$

Le troisième exemple de colonne possède un réseau de barres de connexion en formes de croix. La figure 6.10 montre les schémas de deux colonnes qui, en fait, possèdent la même rigidité au cisaillement du moment que les barres horizontales ne contribuent pas à la transmission des efforts de cisaillement.

$$\delta = 2N_d \frac{d}{EA_d} N_d = 2 \frac{d}{2h} \frac{d}{EA_d} \frac{d}{2h} = \frac{1}{2} \frac{d^3}{h^2 EA_d} \quad (6.110)$$

La rigidité par plan de laçage vaut

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta}{a} = \frac{d^3}{2ah^2EA_d} \quad (6.111)$$

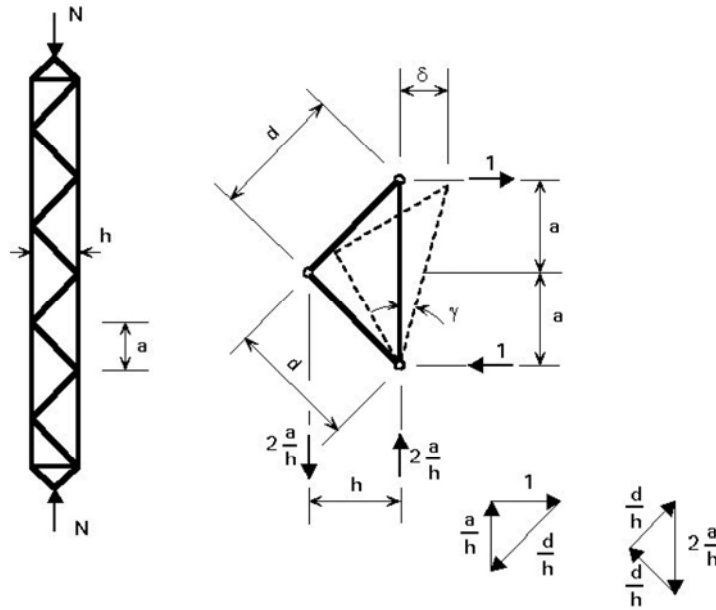


Figure 6.9 Colonne composée à laçage en forme de A (ESDEP, 2005)

6.2.3.2 Colonnes à étrésillons

Dans le cas des colonnes à étrésillons, les déformations flexionnelles des étrésillons et des membrures dans le plan des étrésillons sont considérées dans la détermination de la rigidité au cisaillement K. Les déformations axiales dues à l'effort normal sont négligées.

La section totale est supposée symétrique : les membrures sont identiques et disposées symétriquement par rapport à l'axe de flexion de la colonne ; leurs lignes moyennes sont distantes de h. Le moment d'inertie¹ d'une membrure par rapport à son centre de gravité est désigné par I_{Co} . Il faut noter que, vis-à-vis des notations utilisées dans l'équation (6.40), on a

$$I_{Co} = I_U = I_L = I_C/2 \quad (6.112)$$

¹ pour une flexion dans le plan des étrésillons !

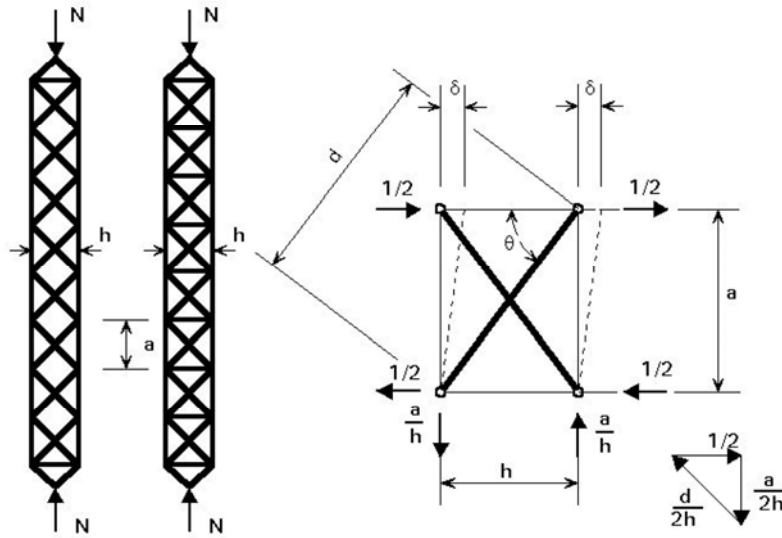


Figure 6.10 Colonne composée à laçage en forme de X (ESDEP, 2005)

L'espacement entre étréssillons est noté a . Le moment d'inertie d'un étréssillon¹ est I_{b_0} . Dans le cas où il existe plusieurs plans de laçage, on désigne par I_b le total des inerties : il est égal à I_{b_0} multiplié par le nombre de plans².

Les membrures et les étréssillons sont constitués du même matériau de module d'élasticité E .

Pour calculer la flexibilité au cisaillement, on applique à un échantillon de l'âme, de hauteur a , une force de cisaillement unitaire (voir figure 6.11) et on évalue la distorsion $\gamma = \delta/a$ correspondante. La rigidité est obtenue en inversant la flexibilité. Le déplacement δ dû au cisaillement unitaire peut être calculé en utilisant le principe des travaux virtuels

$$\delta = 4 \int_0^{a/2} \frac{1}{2} \frac{x}{EI_{C_0}} \frac{1}{2} x dx + 2 \int_0^{h/2} \frac{a}{h} \frac{y}{EI_b} \frac{a}{h} y dy \tag{6.113}$$

La rigidité au cisaillement est donnée par

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta}{a} = \frac{a^2}{24EI_{C_0}} + \frac{ah}{12EI_b} \tag{6.114}$$

Dans le cas fréquent où les étréssillons sont très rigides, la souplesse qu'ils apportent dans la formule (6.114) peut être négligée. L'expression de la rigidité K devient :

$$K = \frac{24EI_{C_0}}{a^2} \tag{6.115}$$

¹ Pour une flexion dans le plan des étréssillons

² En général, on a 2 plans d'étréssillons

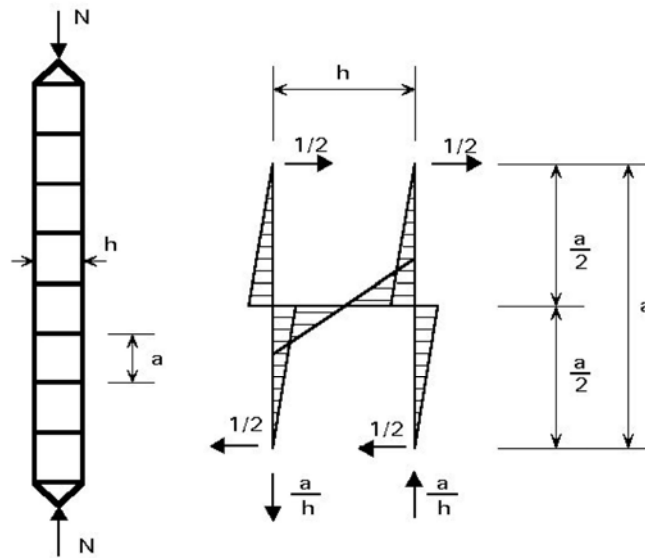


Figure 6.11 Colonne à étrésillons (ESDEP, 2005)

6.3 La méthode des splines bandes fines pour l'étude de la stabilité élastique des colonnes composées

6.3.1 Objectif

Dans la section précédente, nous avons présenté un aspect du problème des colonnes composées. Il s'agit du flambement de la colonne dans le plan des connexions. Dans les codes de calcul les plus récents, seul ce type d'instabilité revêt un caractère particulier. Les autres instabilités qui peuvent concerner la colonne composée, telles que le flambement dans l'autre plan ou le voilement, sont traitées de la manière classique. La démarche des règlements concernant ces deux instabilités est cohérente. En effet, l'instabilité par flexion dans un plan sans étrésillons est typiquement une instabilité Eulérienne. Pour ce qui est du voilement, sa longueur de demi-onde est, en général, assez petite pour que sa contrainte critique ne soit pas influencée par la présence des éléments de connexion.

Il en est autrement de l'instabilité distorsionnelle. Sa longueur de demi-onde est intermédiaire entre celles des instabilités locale et globale. D'ordinaire, elle vaut plusieurs fois la plus grande dimension de la section transversale des membrures (les éléments susceptibles de voiler). Si l'espacement des éléments de connexion est inférieur à la longueur de demi-onde critique, leur effet « d'appui discret » peut retarder l'instabilité distorsionnelle et amplifier la résistance de la colonne.

Dans le cas de l'étude de l'instabilité distorsionnelle en présence de ressorts discrets espacés d'une distance inférieure à la longueur de demi-onde distorsionnelle critique, il est d'usage, à ce jour, de négliger ces ressorts (AISI, 2004b). L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode numérique capable de résoudre efficacement ce problème, en même temps que ceux des autres instabilités des colonnes composées. Nous voulons une

seule méthode pour étudier la stabilité élastique de la section entière, et qui prenne en compte tous les types d'instabilités afin de l'inscrire dans la nouvelle démarche de dimensionnement des profils en acier formés à froid par la DSM (AISI, 2004a).

La méthode à développer doit rester à la portée des ingénieurs en vue de son utilisation dans une procédure réglementaire. La méthode des éléments finis, qui est la méthode numérique la plus puissante dont l'ingénieur dispose, exige des modèles très élaborés ainsi que des moyens de calcul onéreux. Elle ne correspond donc pas à l'objectif fixé.

6.3.2 Justification du choix de la MSBF

Nous avons choisi de prendre comme point de départ la Méthode des Bandes Finies (MBF) car elle est tellement bien intégrée à la démarche DSM qu'elle bénéficie du rare privilège d'être nommément citée dans les règles américaines (AISI, 2004a et 2004b). En effet, elle permet des analyses efficaces de la stabilité élastique des sections à parois minces, et elle est continuellement modernisée afin d'améliorer ses performances (voir chapitres 4 et 5).

La MBF conventionnelle, telle que présentée au chapitre 2, ne permet pas de prendre en charge les effets discrets comme les appuis intermédiaires ou les ressorts concentrés. De ce point de vue, elle ne répond pas au but assigné. Une autre variante de la MBF, appelée Méthode des Splines Bandes Finies (MSBF), a été développée par Fan et Cheung (1983) avec l'objectif de permettre la modélisation d'autres conditions aux limites que l'appui simple et de lever ainsi « l'inconvénient » de la MBF classique. Elle fut ensuite efficacement utilisée pour étudier la stabilité linéaire et non linéaire des structures à parois minces (Lau et Hancock, 1985 ; Boumechra, 1994, ...).

Concernant l'objectif fixé, l'intérêt pour cette méthode réside plutôt dans le caractère localisé de la fonction d'interpolation qui y est utilisée. Pour représenter la variation des déplacements dans le sens longitudinal (Z) de la structure, des fonctions B3-splines, à espacement constant, sont employées. Le déplacement est pris comme la superposition de $(m+3)$ B3-splines locales.

$$f(Z) = \sum_{k=-1}^{m+1} \alpha_k \phi_k(Z) \quad (6.116)$$

Où $\phi_k(Z)$ est une fonction B3-spline locale ; elle est montrée dans la figure 6.12(a) et sa combinaison linéaire dans la figure 6.12.(b). Les coefficients α_k sont les degrés de liberté ou les inconnues de la MSBF ; ils peuvent être vus comme les amplitudes des fonctions B3-spline.

L'utilisation de la fonction B3-spline à intervalles égaux implique la division de la longueur L de la structure en m intervalles égaux de longueur $h = L/m$, en utilisant $m + 3$ sections nodales numérotées de -1 à $m + 1$; deux sections situées en dehors de la longueur sont utilisées afin d'avoir le même nombre de DDL pour toutes les sections nodales situées à l'intérieur du domaine. En effet, une fonction B3-spline locale est une fonction définie par morceaux possédant une continuité C^2 , et qui n'est non nulle que sur 4 intervalles (figure 6.12.a). Avec cette caractéristique, sa combinaison linéaire peut

s'adapter parfaitement à des actions localisées, tel qu'un appui intermédiaire (Lau et Hancock, 1985) ou une force concentrée.

Une amélioration récente de la MSBF a introduit la possibilité d'utiliser des sections nodales non symétriquement espacées dans la direction longitudinale (Kim et Choi, 2004). Cette technique permet de procéder à un raffinement sélectif du maillage afin d'améliorer l'exactitude de la solution à l'endroit des effets concentrés (charges, raccords, liaisons). Il est évident que l'effet discret des étrépillons ou des barres de laçage dans les colonnes composées pourrait être mieux modélisé par cette dernière technique. Cependant dans ce travail, la fonction B3-spline à intervalles égaux est employée pour sa simplicité.

Pour arriver au but de développer une méthode efficace pour l'analyse de la stabilité élastique des colonnes composées, nous avons eu l'idée de combiner les éléments finis « poutre » aux bandes finies. Mais avant de présenter ce travail, nous allons commencer par rappeler les grandes lignes de la MSBF.

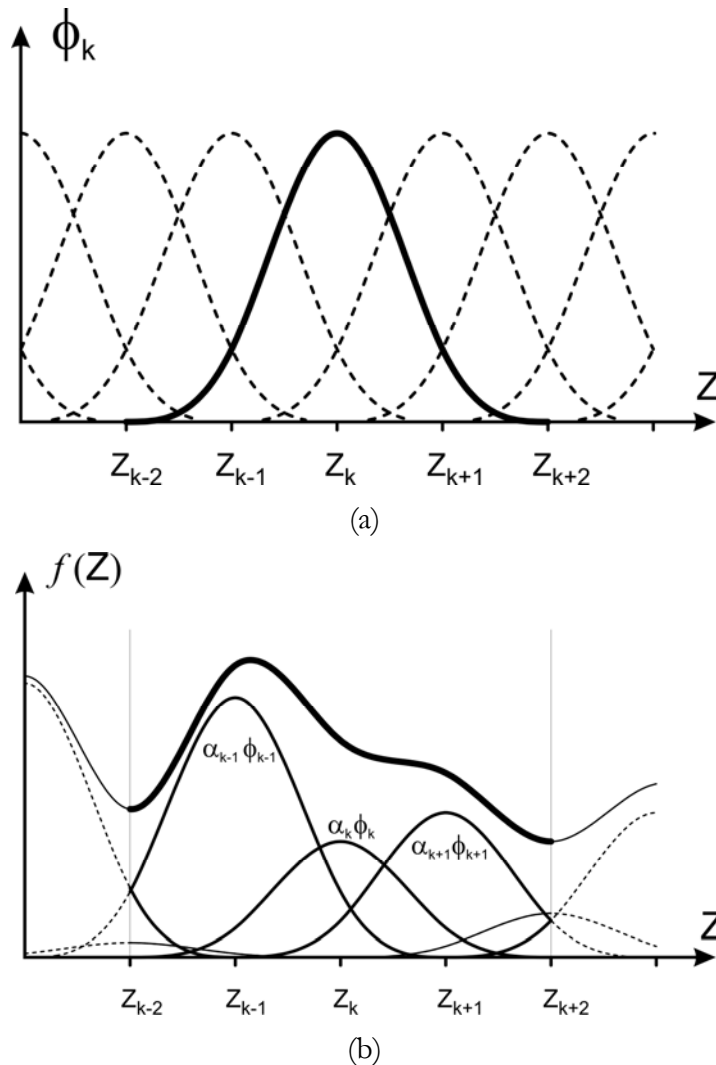


Figure 6.12 (a) Une fonctions B3-spline et (b) une combinaison linéaire de B3-splines

6.3.3 La MSBF

6.3.3.1 Modélisation – Fonctions d’interpolation

Dans la méthode des splines bandes finies, les structures à parois minces sont divisées en bandes longitudinales à l’aide de n lignes nodales. Ces lignes ont toutes la même longueur L et sont parallèles à l’axe Z (voir figure 6.13), direction de l’interpolation spline. L’utilisation de la fonction B3-spline à intervalles égaux implique la division des lignes nodales en m intervalles en utilisant $m+3$ sections nodales numérotées de -1 à $m+1$, et dont deux sont situées en dehors de la longueur (voir figure 6.14). Les inconnues du problème sont au nombre de quatre par section nodale, k , et elles sont notées u_k, v_k, w_k, θ_k . Le nombre total de degrés de liberté dans une modélisation par splines bandes finies d’une structure à parois minces est donc égal à $4n(m+3)$.

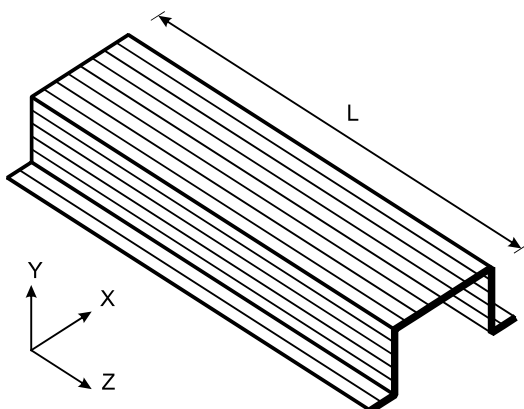


Figure 6.13 Modélisation en bandes d’une structure à parois minces.

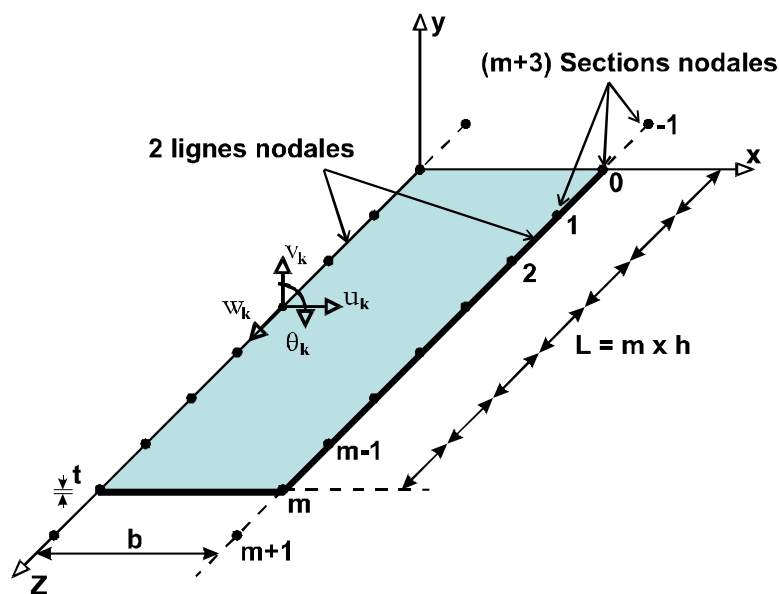


Figure 6.14 Une B3-spline Bande finie typique.

Le vecteur des DDL d'une ligne nodale q comporte 4 vecteurs de paramètres, un par type de déplacement représenté :

$$\mathbf{d}_q = [\mathbf{u}_q^T \quad \mathbf{v}_q^T \quad \mathbf{w}_q^T \quad \boldsymbol{\theta}_q^T]^T \quad (6.117)$$

Chaque vecteur de paramètres contient $m+3$ composantes qui sont les amplitudes du déplacement au niveau des sections nodales de la ligne q .

$$\mathbf{v}_q = \langle v_{-1} \quad v_0 \quad \cdots \quad v_k \quad \cdots \quad v_{m+1} \rangle^T \quad (6.118)$$

Dans la méthode des splines bandes finies, le vecteur total des champs de déplacement $\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T$ à l'intérieur d'une bande est approché par interpolation des DDL, \mathbf{d} , des deux lignes nodales, i et j , qui forment la bande. En notant \mathbf{N} la matrice des fonctions d'interpolation et en partitionnant le vecteur \mathbf{d} en parties membranaire et flexionnelle, on a

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} = [\mathbf{N}_{uw} \quad \mathbf{N}_v] [\mathbf{d}_{uw}^T \mid \mathbf{d}_{v\theta}^T]^T \quad (6.119)$$

L'organisation du vecteur \mathbf{d} est explicitée ainsi

$$\mathbf{d} = [\mathbf{u}_i^T \quad \mathbf{w}_i^T \quad \mathbf{u}_j^T \quad \mathbf{w}_j^T \mid \mathbf{v}_i^T \quad \boldsymbol{\theta}_i^T \quad \mathbf{v}_j^T \quad \boldsymbol{\theta}_j^T]^T \quad (6.120)$$

Les déplacements dans le plan de la bande ou déplacements membranaires, sont approchés par des interpolations linéaires dans le sens transversal et par des interpolations B3-splines dans le sens longitudinal.

$$u = \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} & \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{ui} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varphi_{uj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix}, \quad (6.121.a)$$

$$w = \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} & \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{wi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varphi_{wj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_j \end{Bmatrix} \quad (6.121.b)$$

Quant au déplacement perpendiculaire au plan de la bande ou flèche, il est approché par un polynôme cubique dans le sens transversal et par des interpolations B3-splines dans le sens longitudinal

$$v = \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} & x \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) & \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) & x \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b} \right) \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{vi} & & & \mathbf{0} \\ & \varphi_{\theta i} & & \\ & & \varphi_{vj} & \\ \mathbf{0} & & & \varphi_{\theta j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{v}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (6.122)$$

Dans les expressions ci-dessus, b désigne la largeur de la bande, et φ_{ui} , φ_{wi} , φ_{vi} et $\varphi_{\theta i}$ sont des vecteurs lignes. Chacun d'eux est composée des $m + 3$ B3-splines locales de la ligne nodale i . Leur structure est donnée par l'équation (6.123)

$$\varphi = [\phi_{-1} \quad \phi_0 \quad \cdots \quad \phi_k \quad \cdots \quad \phi_{m+1}] \quad (6.123)$$

Il faut signaler que dans la MSBF, il est nécessaire de modifier certaines fonctions splines locales afin de tenir compte des conditions d'appui dans le sens longitudinal, qui est le sens de l'interpolation spline. On peut trouver une excellente présentation de cette technique d'introduction des conditions aux limites dans le rapport de Lau et Hancock (1985) ou dans le mémoire de Boumechra (1994).

6.3.3.2 Matrices de rigidité

Au-delà des fonctions d'interpolation, la démarche MSBF est identique à celle de la MBF ou encore de la MEF. Les déformations dans une bande finie sont décomposées en deux parties, membranaire et flexionnelle. Les déformations membranaires, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, sont celles du plan moyen de la bande et respectent les hypothèses d'un état de contrainte plane. Les déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_f$, correspondent à la théorie de flexion des plaques minces de Kirchoff et sont par conséquent nulles au niveau du plan moyen et ne dépendent que de la flèche v .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \end{Bmatrix} = \mathbf{N}'_{uw} \mathbf{d}_{uw} = \mathbf{B}_m \mathbf{d}_{uw} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \partial^2 v / \partial x^2 \\ -y \partial^2 v / \partial z^2 \\ 2y \partial^2 v / \partial x \partial z \end{Bmatrix} = \mathbf{N}''_v \mathbf{d}_{v0} = \mathbf{B}_f \mathbf{d}_{v0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.124.a-d)$$

Ainsi, les déformations sont exprimées en fonction de dérivées des fonctions d'interpolation, \mathbf{N} , et des déplacements nodaux, \mathbf{d} . La matrice de rigidité peut être déduite en écrivant l'énergie potentielle de déformation et en considérant une loi de comportement élastique linéaire orthotrope : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$, avec une matrice de proportionnalité symétrique, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$.

$$U = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (6.125)$$

$$\text{Où, } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_z E_1 & 0 \\ \nu_x E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, E_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_z}, E_2 = \frac{E_z}{1 - \nu_x \nu_z}, \nu_z E_x = \nu_x E_z \quad (6.126.a-d)$$

Les constantes, E_x et E_z , sont les modules d'élasticité et les coefficients, ν_x et ν_z , sont les coefficients de Poisson, suivant les deux directions orthogonales x et z , respectivement ; G étant le module de cisaillement.

Comme les comportements membranaire, (u, w) , et flexionnel, (v) , sont découplés, on peut déterminer les matrices de rigidité correspondantes séparément. On forme ensuite la matrice de rigidité de la bande finie :

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ef} \end{bmatrix} \quad (6.127.a-c)$$

$$\mathbf{k}_{em} = \int \mathbf{B}_m^T \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_{ef} = \int \mathbf{B}_f^T \mathbf{E} \mathbf{B}_f dV$$

Les expressions détaillées se trouvent, entre autres, dans le rapport de Lau et Hancock (1985) et dans le mémoire de Boumechra (1994).

6.3.3.3 Matrices de rigidité géométrique

Un autre avantage de la MSBF est qu'elle permet d'envisager, en plus d'un chargement de compression longitudinale, un chargement de compression transversale et un cisaillement dans le plan de la bande (Lau et Hancock, 1985). Pour simplifier l'exposé de la méthode, considérons que la bande n'est soumise qu'à des efforts de compression, par unité de longueur, variant linéairement de T_1 à T_2 , comme indiqué dans la figure 6.15. La matrice de rigidité géométrique peut être calculée en considérant l'énergie potentielle additionnelle due à ces forces en parcourant le déplacement, suivant z , des extrémités longitudinales causé par la partie non linéaire de la déformation ϵ_z de Green-Lagrange :

$$W = \int_0^L \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) dx dz \quad (6.128)$$

Les carrés des dérivées des champs de déplacement peuvent être écrits en fonction de dérivées des fonctions d'interpolation, \mathbf{N} , et des déplacements nodaux, \mathbf{d} . Par exemple, on a :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 = \mathbf{d}_{v0}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{d}_{v0} = \mathbf{d}_{v0}^T \mathbf{G}_f^T \mathbf{G}_f \mathbf{d}_{v0} \quad (6.129)$$

En introduisant cette notation dans l'expression de l'énergie potentielle ci-dessus, on arrive à une définition formelle de la matrice de rigidité géométrique, \mathbf{k}_g :

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_0^L \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \mathbf{G}^T \mathbf{G} \, dx dz \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_g \mathbf{d} \quad (6.130)$$

D'une manière similaire à la matrice de rigidité, on peut calculer les matrices de rigidité géométriques membranaire, \mathbf{k}_{gm} , et flexionnelle, \mathbf{k}_{gf} , séparément :

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{gm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{gf} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{gm} = \int_0^L \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \mathbf{G}_m^T \mathbf{G}_m \, dx dz \quad (6.131.a-c)$$

$$\mathbf{k}_{gf} = \int_0^L \int_0^b \left(T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b} \right) \mathbf{G}_f^T \mathbf{G}_f \, dx dz$$

Pour avoir les expressions détaillées on peut consulter le rapport de Lau et Hancock (1985) ou le mémoire de Boumechra (1994).

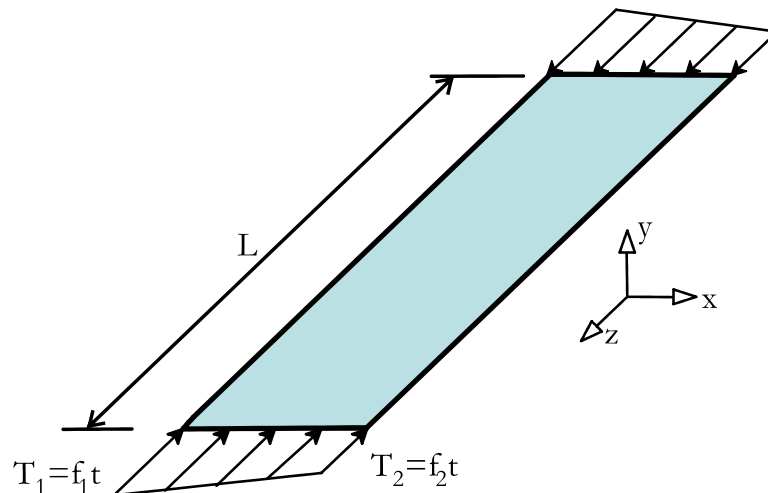


Figure 6.15 Une B3-spline Bande finie Chargée longitudinalement.

6.3.3.4 Matrices globales et assemblage

Les matrices de rigidité et de rigidité géométrique doivent être transformées du repère local de la bande vers un repère global avant de pouvoir les assembler. Dans la MSBF, les bandes finies ne peuvent tourner qu'autour de l'axe longitudinal z, leurs lignes

nodales devant lui rester parallèles. Autrement dit, les axes local z et global Z doivent rester parallèles. L'orientation d'une bande s quelconque par rapport à un repère global est définie par un seul angle $\alpha^{(s)}$, celui que font entre eux les axes local x et global X . Ainsi, les 4 degrés de liberté locaux, $[u_k \ v_k \ w_k \ \theta_k]$, d'une section nodale k de cette bande s sont reliés aux 4 DDL globaux de cette section nodale, $[U_k \ V_k \ W_k \ \Theta_k]$, par :

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(s)} & \sin\alpha^{(s)} \\ -\sin\alpha^{(s)} & \cos\alpha^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} w_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_k \\ \Theta_k \end{Bmatrix} \quad (6.132)$$

En écrivant ces relations pour les $(m+3) \times 2$ sections nodales de la bande, on arrive à relier tous les DDL locaux, $\mathbf{d}^{(s)}$, de la bande s à ses DDL globaux, $\mathbf{D}^{(s)}$.

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad (6.133)$$

Les matrices de rigidité et de rigidité géométrique de la bande s exprimés dans le repère global se calculent alors par la transformation des matrices locales :

$$\mathbf{K}_e^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_e^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_g^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_g^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad (6.134)$$

Les matrices de rigidité et de rigidité géométrique d'une structure à parois minces constituée de ns bandes s'obtiennent par assemblage des matrices globales de toutes les bandes :

$$\mathbf{K}_E = \sum_{\text{assemblage}}^{s=1 \text{ à } ns} \mathbf{K}_e^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_G = \sum_{\text{assemblage}}^{s=1 \text{ à } ns} \mathbf{K}_g^{(s)} \quad (6.135)$$

6.3.3.5 Equation de la stabilité

Dans un problème de stabilité, il s'agit de chercher un chargement multiple du chargement de référence qui est appliqué aux bandes (voir figure 6.15) de façon à avoir l'équilibre. Le coefficient de proportionnalité λ est appelé facteur de charge. On aboutit alors au problème propre suivant :

$$[\mathbf{K}_E - \lambda \mathbf{K}_G] \mathbf{\Delta} = \mathbf{0} \quad (6.136)$$

Le vecteur $\mathbf{\Delta}$ contient tous les degrés de liberté de la structure exprimés dans un référentiel unique : le repère global.

La solution de l'équation (6.136) est constituée de couples de valeurs et vecteurs propres, $(\lambda_p, \mathbf{\Delta}_p)$. La valeur propre λ_p multipliée par le chargement de référence définit un chargement qui provoque l'instabilité de la structure selon une forme décrite par le vecteur propre $\mathbf{\Delta}_p$. La plus petite valeur de λ , notée λ_{cr} , donne ce qu'on appelle la

charge critique. Elle définit la plus petite charge qui provoque une instabilité de la structure selon une forme qui est déterminée par Δ_{cr} .

Après avoir rappelé les grandes lignes de la MSBF, nous allons présenter dans ce qui suit, les modifications que nous lui avons apporté afin qu'elle puisse traiter les colonnes composées.

6.3.4 La MSBF pour l'étude de la stabilité élastique des colonnes composées

Le but de ce chapitre est d'étendre les capacités de la MSBF à l'analyse de la stabilité élastique des colonnes et des poutres composées. L'idée principale est de réussir à y incorporer des éléments poutre afin de pouvoir modéliser les étrésoillons et les diagonales.

Un élément fini poutre classique de type Bernoulli est défini par deux nœuds, i et j . Il possède 6 DDL par nœud, trois translations et trois rotations, tel que montré par la figure 6.16, ce qui donne un total de 12 DDL formant un vecteur noté δ_b . Sa matrice de rigidité k_b dans le repère local, de dimension 12×12 , est donnée dans la plupart des livres d'éléments finis (Cook et al., 1989; Zienkiewicz et Taylor, 1991). Dans les deux notations introduites ci-dessus, l'indice b c'est pour indiquer qu'il s'agit de grandeurs relatives à l'élément poutre (beam); l'emploi de caractères minuscules montre qu'elles sont exprimées dans le repère local de la poutre.

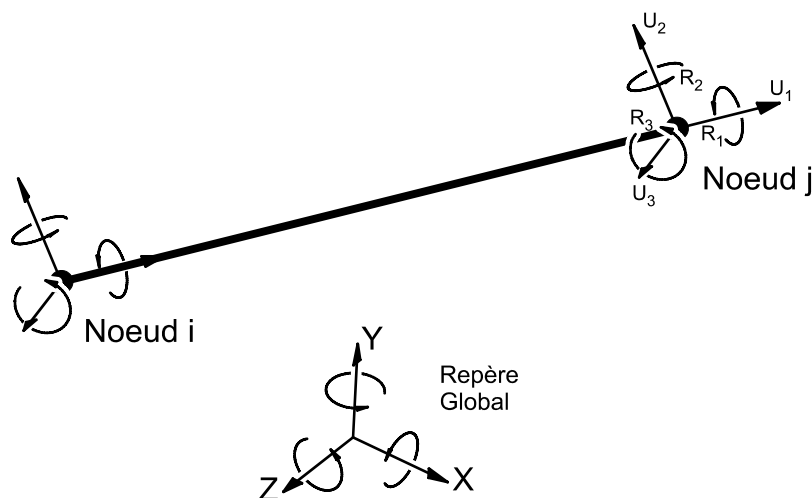


Figure 6.16 Un élément fini poutre

Dans la méthode que nous proposons dans ce chapitre, l'élément fini poutre peut avoir n'importe quelle orientation dans l'espace. La seule condition est que sa connexion avec les autres éléments de la structure, qui sont les bandes finies, doit se faire au niveau des lignes nodales (voir figure 6.17). Ainsi, le nœud i doit se trouver sur une ligne nodale, disons q , à l'ordonnée Z_i ; ses deux autres coordonnées sont évidemment données par celles de la ligne nodale : X_q et Y_q . Le deuxième nœud j se trouve sur la ligne nodale r à la position Z_j ; ses deux autres coordonnées sont X_r et Y_r . A ce niveau, il faut noter qu'il est possible d'avoir les deux nœuds de la poutre sur la même ligne nodale. D'un autre

côté, un nœud de la poutre peut se trouver sur une ligne nodale commune à plusieurs bandes.

Avec les coordonnées des deux nœuds i et j , plus une indication sur l'orientation de l'un des deux axes principaux de la section de la poutre, il est possible de définir la matrice de rotation \mathbf{R} de dimension (12×12) nécessaire pour transformer les DDL et la matrice élémentaire de la poutre du repère local vers le repère global (Cook et al., 1989; Zienkiewicz et Taylor, 1991).

$$\delta_b = \mathbf{R} \delta_B \quad (6.136)$$

$$\mathbf{k}_B = \mathbf{R}^T \mathbf{k}_b \mathbf{R} \quad (6.137)$$

Où, \mathbf{k}_B est la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le repère global. δ_B est le vecteur colonne des degrés de liberté de la poutre exprimés dans le repère global. Il est composé des déplacements généralisés des nœuds i et j :

$$\delta_B = [\delta_i^T \mid \delta_j^T]^T \quad (6.138)$$

Les degrés de liberté du nœud i sont

$$\delta_i = [U_{x_i} \quad U_{y_i} \quad U_{z_i} \quad R_{x_i} \quad R_{y_i} \quad R_{z_i}]^T \quad (6.139)$$

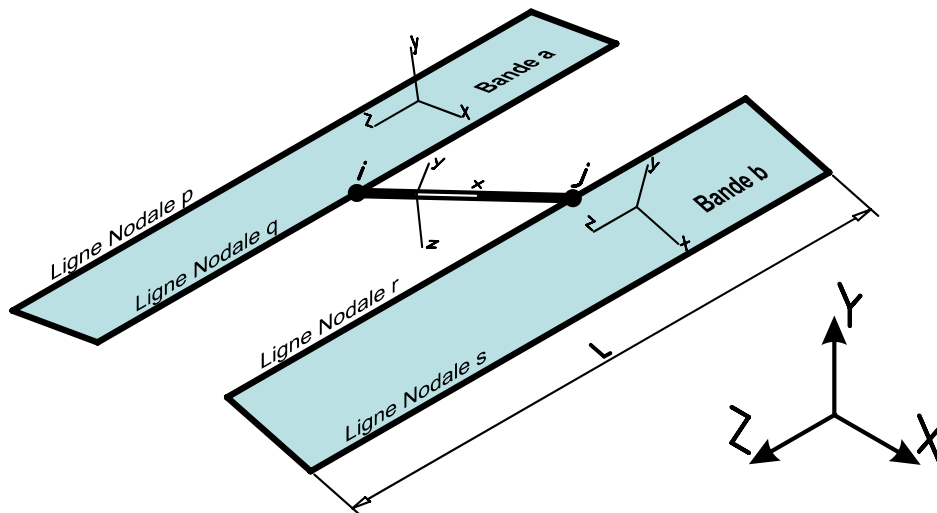


Figure 6.17 Deux bandes connectées par une poutre

La matrice de l'élément poutre ne peut pas être directement assemblée au système global de l'équation (6.136). Le problème est que les DDL de la poutre ne figurent pas parmi les composantes du vecteur Δ . La nature physique même des DDL dans δ_B et dans Δ est différente. Le premier contient les déplacements des nœuds alors que le second

comporte exclusivement les amplitudes des fonctions splines rentrant dans la définition de quatre fonctions de déplacement par ligne nodale.

L'astuce est simplement de voir Δ comme un vecteur composé des DDL globaux des n lignes nodales.

$$\Delta = \left[\mathbf{D}_1^T \quad \mathbf{D}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{D}_q^T \quad \dots \quad \mathbf{D}_n^T \right]^T \quad (6.140)$$

Le vecteur des DDL globaux d'une ligne nodale q contient 4 vecteurs, un par type de déplacement représenté dans la MSBF :

$$\mathbf{D}_q = \left[\mathbf{U}_q^T \quad \mathbf{V}_q^T \quad \mathbf{W}_q^T \quad \mathbf{\Theta}_q^T \right]^T \quad (6.141)$$

Chaque vecteur de paramètres globaux contient $m+3$ composantes qui sont les amplitudes des fonctions B3-splines locales. Par exemple, on a

$$\mathbf{V}_q = \left\langle V_{-1} \quad V_0 \quad \dots \quad V_k \quad \dots \quad V_{m+1} \right\rangle^T \quad (6.142)$$

En utilisant le principe même de l'interpolation spline défini au niveau de l'équation (6.116), il suffit de pré-multiplier ce vecteur par le vecteur ligne φ_{vq} , tel que défini par l'équation (6.123), pour obtenir la fonction $V_q(Z)$.

$$V_q(Z) = \varphi_{vq} \mathbf{V}_q \quad (6.143)$$

$V_q(Z)$ est le déplacement « physique » de tout point de la ligne nodale q dans la direction Y globale. On peut confirmer cette signification physique en posant $x=0$ dans l'interpolation (6.122) : à cette position, le déplacement de la bande est égal au déplacement de la ligne nodale origine, et le résultat est une fonction de z ou Z .

De la même manière, nous trouvons trois autres fonctions de déplacement de la ligne nodale q : les translations parallèles aux deux autres axes globaux et la rotation autour de Z .

$$U_q(Z) = \varphi_{uq} \mathbf{U}_q \quad (6.144)$$

$$W_q(Z) = \varphi_{wq} \mathbf{W}_q \quad (6.145)$$

$$\Theta_q(Z) = \varphi_{\theta q} \mathbf{\Theta}_q \quad (6.146)$$

Avec ces fonctions qui ont une signification physique, nous pouvons utiliser les équations de compatibilité pour égaliser les déplacements du nœud i de la poutre à ceux de la ligne nodale q à la position Z_i . On rappelle que Z_i est la position du nœud i sur la

ligne nodale q. Pour les quatre déplacements explicitement représentés dans la MSBF, il est possible d'écrire directement les quatre égalités suivantes :

$$U_{x_i} = U_q(Z_i) , U_{y_i} = V_q(Z_i) , U_{z_i} = W_q(Z_i) \text{ et } R_{z_i} = \Theta_q(Z_i) \quad (6.147.a-d)$$

Les deux DDL restants, les rotations autour des axes X et Y du point i, peuvent être déduits à partir des dérivées des déplacements de la ligne nodale, qui ont une continuité C^2 , comme suit :

$$R_{x_i} = - \left. \frac{dV_q(Z)}{dZ} \right|_{Z=Z_i} \text{ et } R_{y_i} = \left. \frac{dU_q(Z)}{dZ} \right|_{Z=Z_i} \quad (6.147.e,f)$$

En faisant usage des équations (6.143) à (6.146), il est facile d'écrire (6.147) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} U_{x_i} \\ U_{y_i} \\ U_{z_i} \\ R_{x_i} \\ R_{y_i} \\ R_{z_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{uq}(Z_i) & & & & & \\ & \varphi_{vq}(Z_i) & & & & \\ & & \varphi_{wq}(Z_i) & & & \\ & & & -\varphi'_{vq}(Z_i) & & \\ \varphi'_{uq}(Z_i) & & & & & \\ & & & & & \varphi_{\theta q}(Z_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_q \\ V_q \\ W_q \\ \Theta_q \end{Bmatrix} \quad (6.148)$$

Les deux vecteurs lignes $\varphi'_{uq}(Z_i)$ et $\varphi'_{vq}(Z_i)$ contiennent les valeurs des dérivées premières des $m+3$ B3-splines locales de la ligne nodale q, évaluées à l'ordonnée Z_i .

L'équation (6.148) relie donc les 6 déplacements du nœud i aux $4(m+3)$ DDL de la ligne nodale q :

$$\delta_i = \mathbf{T}_{r_{iq}} \mathbf{D}_q \quad (6.149)$$

Une relation similaire peut être établie entre les déplacements du nœud j et les DDL de la ligne nodale r sur laquelle il est fixé à la position Z_j :

$$\delta_j = \mathbf{T}_{r_{jr}} \mathbf{D}_r \quad (6.150)$$

Pour l'ensemble des 12 DDL de l'élément poutre, ces deux dernières équations donnent :

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{r_{iq}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{r_{jr}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_q \\ \mathbf{D}_r \end{Bmatrix} \quad (6.151)$$

Ou bien sous une forme plus compacte

$$\delta_{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \delta_{\mathbf{B}}^{\text{SBF}} \quad (6.152)$$

(6.152) est une relation entre les DDL globaux de l'élément poutre et les DDL des lignes nodales q et r figurant dans le modèle Splines Bandes Finies.

L'énergie de déformation de l'élément poutre est donnée par :

$$U_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{B}}^{\text{T}} \mathbf{k}_{\mathbf{B}} \delta_{\mathbf{B}} \quad (6.153)$$

En utilisant l'équation (6.152), cette énergie peut s'exprimer en fonction des DDL $\delta_{\mathbf{B}}^{\text{SBF}}$ du modèle splines bandes finies. Elle peut ensuite être ajoutée au bilan énergétique des bandes.

$$U_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{B}}^{\text{SBF T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{k}_{\mathbf{B}} \mathbf{T} \delta_{\mathbf{B}}^{\text{SBF}} \quad (6.154)$$

Il s'en suit que la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le modèle MSBF est :

$$\mathbf{k}_{\mathbf{B}}^{\text{SBF}} = \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{k}_{\mathbf{B}} \mathbf{T} \quad (6.155)$$

Cette matrice doit être assemblée au système d'équations (6.136) au niveau des DDL des lignes nodales q et r.

Il faut signaler que, fort heureusement, le caractère localisé des fonctions B3-splines fait que la plupart des termes de la matrice de transformation \mathbf{T} sont nuls. L'assemblage peut alors être programmé de manière efficace.

6.3.5 SHEBA : le programme élaboré

En raison de la nature localisée des fonctions B3-splines, la plupart des termes de la matrice de transformation sont nuls. Les termes de la matrice de rigidité de la poutre ne concernent que les degrés de liberté de quelques sections nodales. On peut alors optimiser l'assemblage de façon à minimiser la largeur de bande des matrices globales. La durée de calcul en sera considérablement réduite.

En se basant sur la technique développée, un programme informatique a été élaboré en langage PASCAL et il a été baptisé SHEBA (Djafour et al., 1999). Pour calculer les valeurs et vecteurs propres, il utilise la méthode du sous-espace (Bathe, 1982). Le post-processeur permettant de visualiser les modes d'instabilité a été développé en langage AUTOLISP afin de profiter de la puissance graphique de l'environnement AUTOCAD.

Une nouvelle version de SHEBA est actuellement sur le point d'être achevée. Nous avons choisi cette fois-ci de la développer en langage MATLAB. Elle intègre un pré processeur, un processeur et un post-processeur dans une interface utilisateur très conviviale : menus déroulants, graphisme, sorties graphiques sur imprimante, ...

6.4 Exemples numériques

6.4.1 Introduction

SHEBA, le programme élaboré, est employé pour l'analyse de la stabilité de colonnes composées. Des colonnes à étrésillons sont choisies. Une étude comparative est faite et des résultats sont présentés pour valider le modèle.

Bien qu'une grande variété de conditions aux limites puisse être modélisée dans la MSBF, les colonnes composées sont supposées bi-articulées et ayant des plaques indéformables à leurs extrémités afin de supprimer les distorsions au niveau des appuis. Cette hypothèse est réaliste du moment que, dans la pratique, l'extrémité de la colonne est fixée à une poutre et qu'au niveau de la fixation, le boulonnage ou la soudure est renforcée. Mais disons que, schématiquement, les conditions d'appuis que nous avons considérées correspondent au montage expérimental classique lors de l'étude de la stabilité des colonnes composées (Lue et al., 2006) et qui est montré dans la figure 6.18.

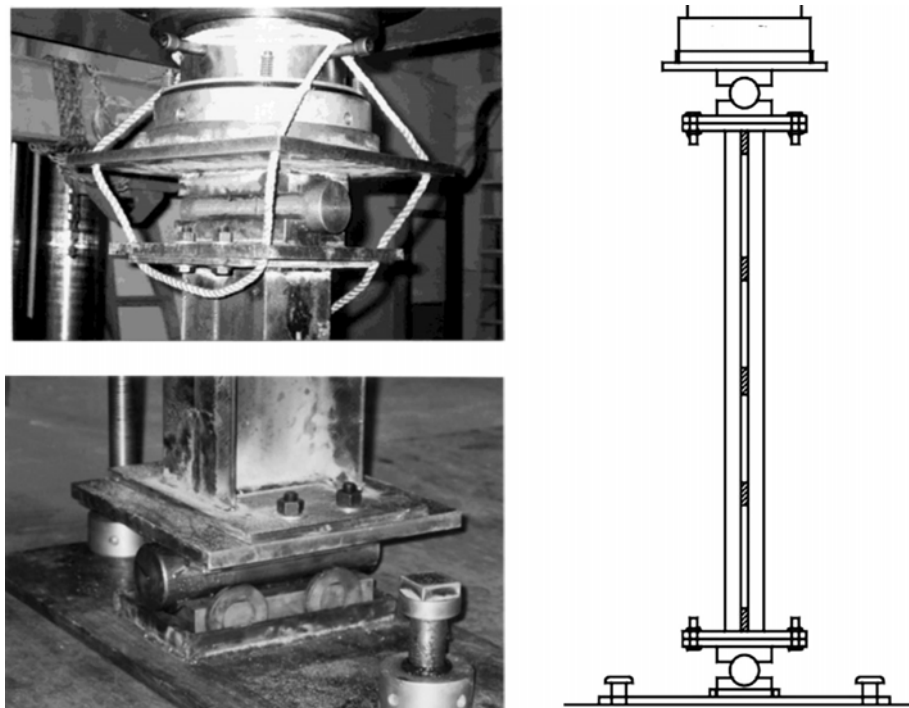


Figure 6.18 Montage expérimental et schéma (Lue et al., 2006)

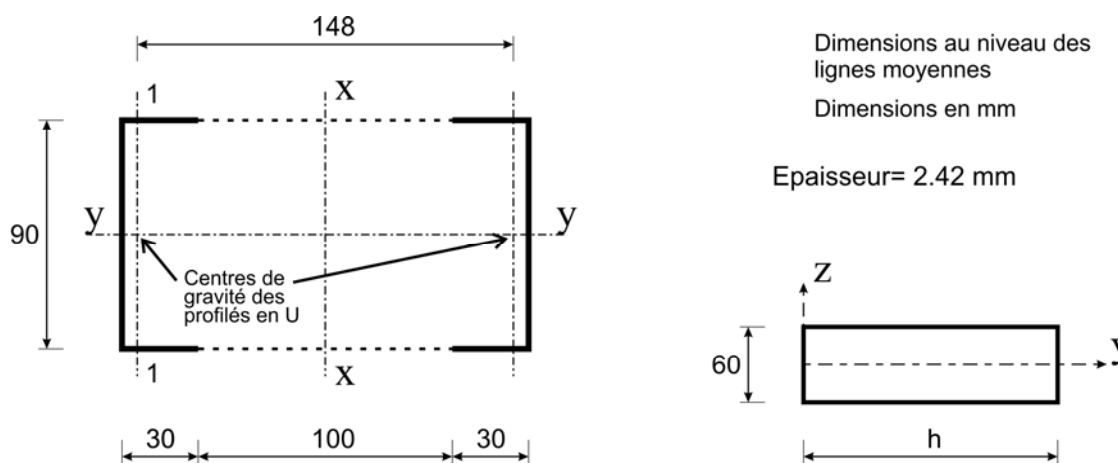
L'analyse que nous allons présenter est effectuée en faisant varier le nombre d'étrésillons et la longueur de la colonne. Les résultats sont alors comparés à ceux obtenus par d'autres méthodes numériques et/ou théoriques.

Il faut néanmoins noter que l'étude comparative n'inclut pas le mode distorsionnel car, à notre connaissance, il n'existe aucun résultat théorique sur la stabilité distorsionnelle en présence de ressorts discrets. Nous validerons donc notre modèle essentiellement par rapport aux résultats du voilement et ceux des instabilités flexionnelles, et en particulier par rapport aux différentes formulations théoriques sur le flambement des colonnes

composées dans le plan parallèle aux étrésillons (voir section 6.2). Nous pensons que si ça marche dans un cas aussi compliqué, nous pouvons espérer que cela marcherait pour le phénomène d'instabilité qui nous intéresse.

6.4.2 La colonne étudiée et sa modélisation

La colonne composée objet de cette étude est une colonne à étrésillons ayant une section doublement symétrique. Elle est composée de deux profils en U (membres) orientés face-à-face. L'âme du profil a 90 mm de hauteur et ses deux semelles ont 30 mm de largeur. Pour former la colonne composée, les membrures sont assemblées par des étrésillons rectangulaires de hauteur 60 mm de façon à ce que la distance entre les bords des semelles soit de 100 mm. L'épaisseur des profils et des étrésillons est de 2,42 mm. Il s'ensuit une distance de 148 mm entre les centres de gravité des sections en U. Cette géométrie est dessinée dans la figure 6.19 ; toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes. D'autres informations géométriques, à savoir les sections et les moments d'inertie des différents éléments de structure formant la colonne composée, sont données dans le tableau 6.2. Quant aux propriétés mécaniques, la colonne est entièrement constituée d'un matériau élastique linéaire de module de Young $E=210$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$.



a - Section transversale de la colonne étudiée

b - Etrésillon

Figure 6.19 Géométrie de la colonne étudiée

Pour caractériser le comportement d'un profil en U isolé vis-à-vis de la compression uniforme, une analyse par la MBF conventionnelle est effectuée en utilisant le programme ASCOP (voir section 2.3.3). Il faut rappeler que, dans cette méthode, les extrémités longitudinales de la colonne sont simplement appuyées et que l'instabilité se produit en développant des ondes harmoniques dans le sens de la longueur. Le résultat de ce travail est présenté dans la figure 6.20 qui donne la variation de la contrainte et de la forme critiques en fonction de la longueur de demi-onde. La courbe d'instabilité présente un minimum correspondant au voilement à une longueur de demi-onde égale à 99 mm. La

contrainte critique correspondante vaut $\sigma_{cr}/E = 2.724 \cdot 10^{-3}$. Le traditionnel flambement d'Euler intervient à des longueurs de demi-ondes supérieures à 0.53 m, environ.

Dans le modèle MSBF, les conditions d'appuis simples aux extrémités $Z=0$ et $Z=L$ sont réalisées en bloquant U et V de toutes les lignes nodales et en laissant les W libres. Quant aux plaques d'extrémité infiniment rigides, elles sont modélisées par des éléments poutres beaucoup plus rigides que les étrépillons (10 fois).

Tableau 6.2 Caractéristiques géométriques de la colonne composée et de ses éléments

Élément de structure	Aire (mm ²)	Moment d'inertie Par rapport au CDG	
		Mineur (mm ⁴)	Majeur (mm ⁴)
Membrure	363.0	30 640.8	441 434.7
Etrésillon	145.2	70.9	43 560.0
Colonne composée	726.0	882 869.5	4 037 906.4

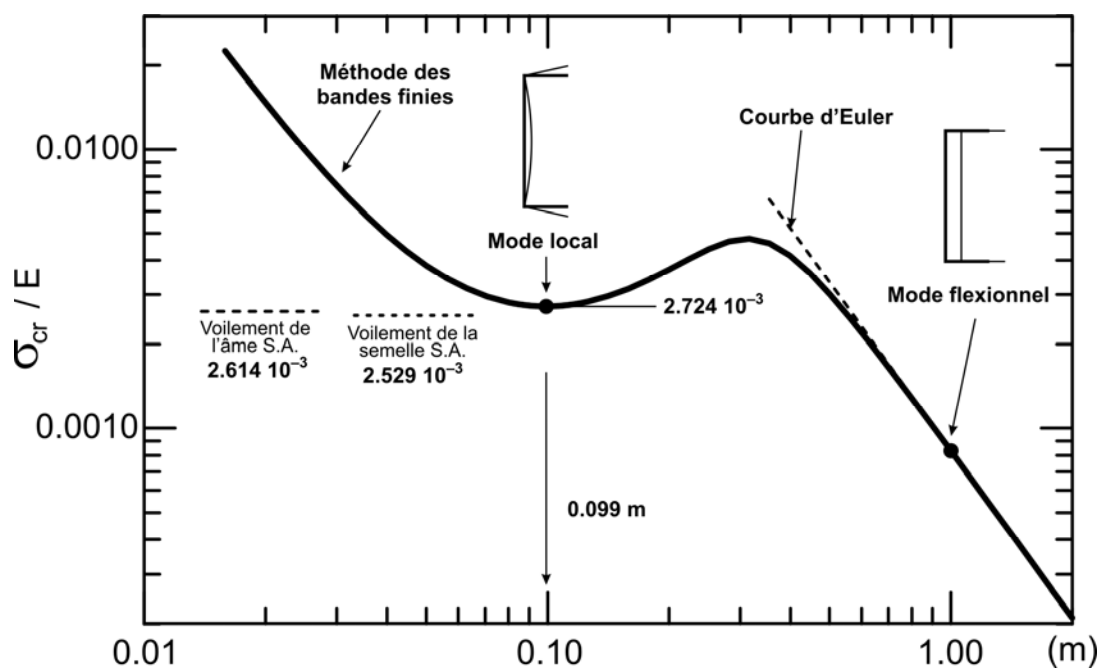


Figure 6.20 Courbe d'instabilité d'une membrure isolée calculée par la MBF

La figure 6.21 présente la modélisation en spline bandes finies des colonnes à étrépillons et le chargement de référence qui leur a été appliqué (compression simple). Chaque âme est divisée en 4 bandes alors que les semelles sont divisées en deux bandes. Ceci donne un total de 16 bandes et 18 lignes nodales. La longueur L de la colonne est divisée en 33 intervalles, ce qui implique l'utilisation de 36 sections nodales.

Les étrépillons sont modélisés par des éléments poutres. Si, par exemple, la colonne est divisée en quatre par trois paires d'étrépillons comme montré dans la figure 6.21, le modèle 3D utilise alors 6 éléments poutres pour représenter les étrépillons en plus des 4 éléments poutres rigides nécessaires à la modélisation des plaques d'extrémité indéformables. Il faut noter que dans tout ce qui suit, le « nombre d'étrépillons » signifie en réalité le nombre de paires d'étrépillons intermédiaires. Ainsi, la figure 6.21 montre le modèle d'une colonne à « 3 étrépillons ». Il utilise $3 \times 2 + 4$ éléments poutres.

Dans les sections qui vont suivre, l'analyse est effectuée en variant le nombre d'éléments de connexion ainsi que la longueur de la colonne. Pour chaque analyse, la colonne possède un grand nombre de modes d'instabilité. Afin de pouvoir convenablement comparer les résultats de SHEBA aux estimations des autres méthodes numériques et/ou théoriques, il est nécessaire d'identifier les modes d'instabilité appropriés. Dans ce travail, l'identification est faite par « inspection visuelle » des modes calculés par SHEBA ce qui est un processus très laborieux. Dans des publications très récentes, Adany et Schafer (2006a et 2006b) ont proposé une technique d'identification modale automatique des résultats de la MBF conventionnelle. Dans le chapitre précédent nous avons proposé une autre technique de calcul des modes purs d'instabilité, que nous pensons plus générale, et nous l'avons utilisée dans le cadre de la MBF classique pour la valider. Il serait intéressant de mettre en application cette technique dans SHEBA. C'est l'objectif du développement de la nouvelle version de SHEBA citée ci-dessus.

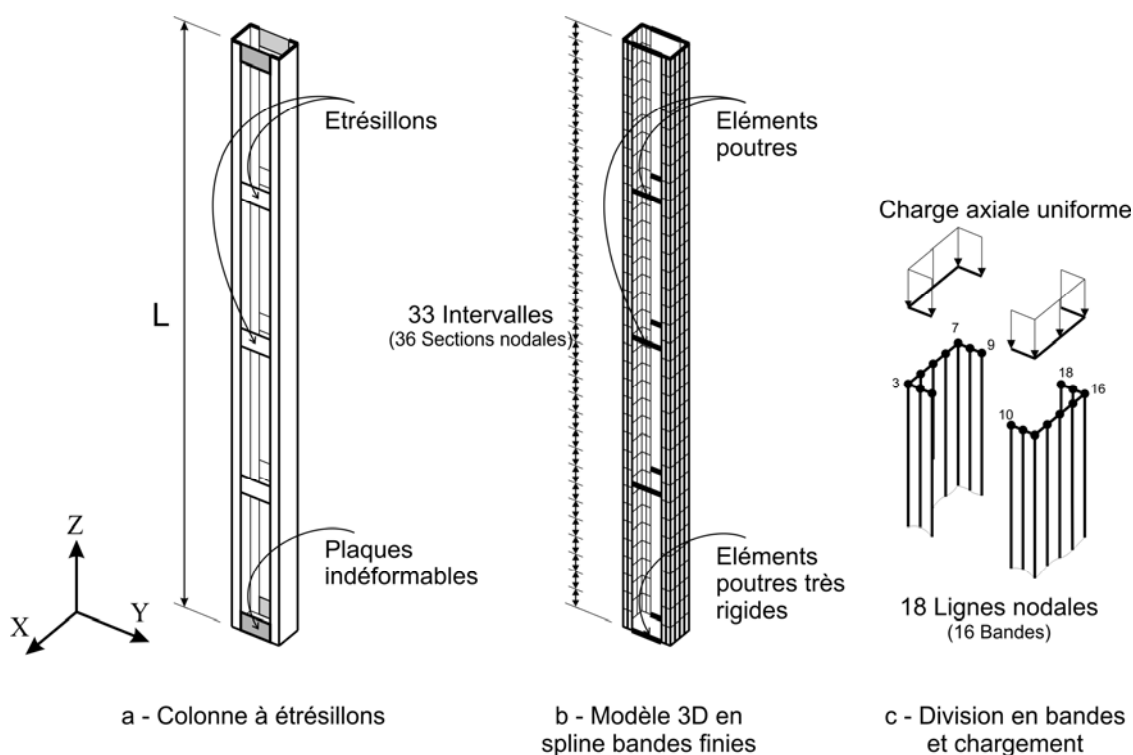


Figure 6.21 Une colonne à étrépillons typique et sa modélisation (cet exemple a « 3 étrépillons »)

6.4.3 Exemple illustratif et identification modale

Il est clair que la contrainte critique est donnée par la plus petite valeur propre ; elle définit la plus basse charge provoquant l'instabilité. Cependant, la connaissance des réponses modales supérieures a quelques avantages. Dans une étude paramétrique, la position de quelques modes peut changer. Le fait de calculer et dessiner plus d'un mode propre permet de suivre, en fonction du paramètre, le comportement d'un mode qui n'est plus critique. Dans cette étude, les résultats des dix premiers modes sont utilisés dans l'identification des modes d'instabilité.

Un exemple typique est une colonne composée ayant 9 étrésillons. Sa longueur L est de 5 mètres. Le tableau 6.3 donne les dix plus basses contraintes d'instabilité avec les formes des modes propres correspondants, représentées dans deux plans (vues de face et de profil). Il est clair que les modes numéro 1 et 3 correspondent aux modes d'instabilité flexionnelle dans le plan XZ avec une et deux demi-ondes, respectivement. Les valeurs des contraintes critiques de ces deux modes sont comparées aux valeurs théoriques d'Euler. Il est clair du tableau 6.4 que la différence est inférieure à 1%.

Le mode dessiné à la position 2 dans le tableau 6.3 est sans nul doute un flambement flexionnel dans le plan YZ qui est le plan des étrésillons. Ce type d'instabilité faisant intervenir la déformabilité des étrésillons est traité analytiquement par des théories telles que celles d'Engesser (1891) ou de Paul (1995a) et où, l'effet discontinu des étrésillons est remplacé par une âme fictive continue ayant une rigidité au cisaillement K . (voir section 6.2). Quoique différentes expressions de K soient disponibles dans la littérature (Timoshenko et Gere, 1961), celle retenue pour comparer ces deux théories aux résultats du programme est celle donnée par l'équation (6.114).

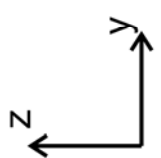
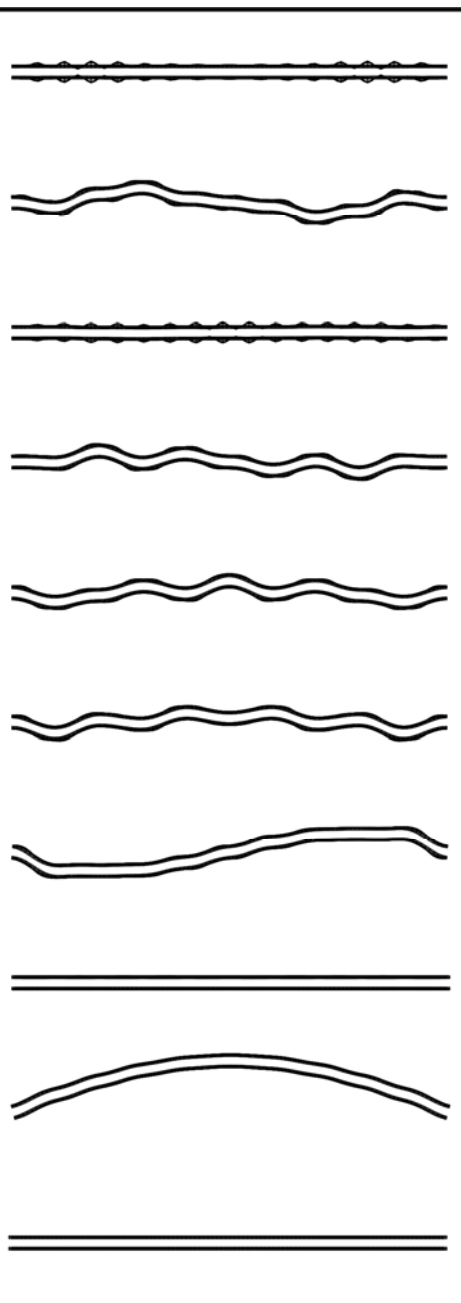
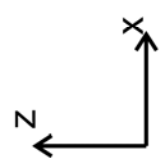
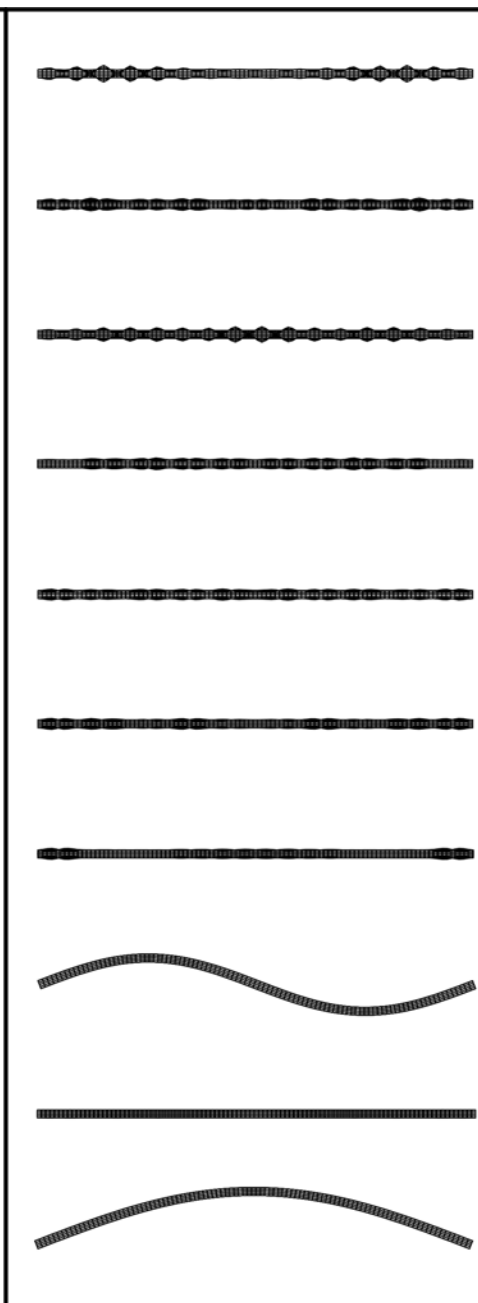
Tableau 6.4 Les 2 modes flexionnels dans le plan XZ

Num. du mode	$\sigma_{cr,num}/E$ ($\times 10^{-3}$)	$\sigma_{cr,Euler}/E$ ($\times 10^{-3}$)	$\sigma_{cr,num}/\sigma_{cr,Euler}$
1	0.479	0.48	0.998
3	1.901	1.92	0.99

Cette expression suppose que les étrésillons sont des poutres de type Bernoulli, ce qui est justement conforme au type de poutre actuellement disponible dans le programme SHEBA. Ces poutres ont une portée h et un moment d'inertie I_b . En plus du module de Young E , les deux autres variables présentes dans cette formule désignent l'espacement a entre étrésillons et le moment d'inertie I_{c_0} des membrures.

Les valeurs des deux moments d'inerties peuvent être tirées du tableau 6.2. Il faut néanmoins faire attention au fait qu'il existe deux plans parallèles d'étrésillons, un de chaque côté des profils. Pour une colonne de longueur 5 m et un nombre d'étrésillons intermédiaires égal à 9, la distance a vaut évidemment 0.5 m. Quant à la portée h , elle est d'abord prise égale à la distance entre les centres de gravité des deux membrures, soit 0.148 m. On utilise alors l'équation (6.93) pour avoir la prédiction d'Engesser (1889). Dans la méthode développée par Paul (1995a et 1995b), il n'existe pas de formule explicite pour la charge critique. Elle est obtenue en annulant le déterminant de la matrice de l'équation (6.70).

Tableau 6.3 Les dix premiers modes de la colonne à 9 étrésillons et de longueur 5 m

Numéro du Mode	σ_{cr} / E ($\times 10^{-3}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		0,479	1,538	1,901	2,809	3,042	3,097	3,113	3,218	3,221	3,241
<p>Forme modale Plan yz</p> 											
<p>Forme modale Plan xz</p> 											

D'un autre coté, la méthode de Paul permet d'envisager une connexion membrures - étrésillons au niveau du bord des semelles des membrures. Dans cette deuxième approche, la partie flexible de l'étrésillon se limite à la distance entre les bords des semelles, soit $h = 0.1$ m. comme montré dans la figure 6.19. Le tableau 6.5 donne les contraintes critiques du premier mode flexionnel dans le plan YZ calculées par SHEBA et par 3 approches théoriques. La valeur obtenue par SHEBA est comprise entre le résultat d'Engesser et la deuxième prédiction de Paul.

Tableau 6.5 Contraintes critiques de flambement dans le plan YZ des étrésillons.

Num. du mode	$\sigma_{cr,num}/E$ ($\times 10^{-3}$)	$\sigma_{cr,Engesser}/E$ ($\times 10^{-3}$)	$\sigma_{cr,Paul1}^*/E$ ($\times 10^{-3}$)	$\sigma_{cr,Paul2}^{**}/E$ ($\times 10^{-3}$)
2	1.538	1.327	1.403	1.605

* Paul 1 avec "h" calculé entre axes des membrures.

** Paul 2 avec "h" calculé à partir des bords des semelles.

Les modes présents aux huitième et dixième positions dans le tableau 6.3 sont, de toute évidence, des modes de voilement des parois planes des membrures en U. Une borne inférieure de la contrainte critique correspondante peut être obtenue par la théorie de voilement des plaques minces en éclatant la section du profil en parois planes et en remplaçant les lignes de connexion par des appuis simples, comme cela est préconisé par une bonne partie des règlements. Une meilleure prédiction peut être obtenue par la méthode des bandes finies conventionnelle (voir figure 6.20). Cette méthode donne un rapport σ_{cr}/E égal à $2.724 \cdot 10^{-3}$, alors que SHEBA donne $3.218 \cdot 10^{-3}$. La différence est de 18%, ce qui est relativement élevé.

Le reste des formes d'instabilité (numéros 4, 5, 6, 7 et 9) apparues parmi les dix premiers modes sont plus difficiles à classer. Elles font penser à un flambement des membrures entre deux étrésillons successifs en interaction avec le voilement pour certains (modes 6,7 et 9). Ces formes permettent de visualiser clairement l'action discrète des 9 étrésillons, particulièrement le mode 5 qui est une forme qui développe 9 demi-ondes selon la longueur de la colonne. En supposant une longueur effective $a = 0.5$ m, la contrainte critique de flambement d'une membrure par rapport à son axe faible calculée par la formule d'Euler vaut $\sigma_{cr}/E = 3.332 \cdot 10^{-3}$. C'est légèrement supérieur aux estimations de SHEBA pour ces modes (voir tableau 6.3). La flexibilité des étrésillons augmente probablement la longueur effective.

6.4.4 Résultats et commentaires

Afin de valider la méthode proposée et le programme élaboré, la démarche présentée ci-dessus a été répétée en prenant la colonne de la figure 6.19 avec une longueur constante de 5 m mais en faisant varier le nombre d'étrésillons intermédiaires de 1 à 29. Parmi tous les modes d'instabilité obtenus, quatre, qui peuvent être qualifiés de « classiques », ont été suivis et l'évolution de leur contrainte en fonction du nombre d'étrésillons est tracée dans

la figure 6.22. Il s'agit des deux premiers modes flexionnels dans le plan XZ, du premier mode flexionnel dans le plan YZ et du voilement des profils.

Concernant les deux premiers modes flexionnels dans le plan XZ, les résultats du programme SHEBA et ceux calculés par la formule d'Euler sont pratiquement identiques. Pour ce qui est de l'instabilité flexionnelle dans le YZ (plan des étrésillons), les résultats du programme élaboré sont comparés à quatre courbes théoriques dont trois tiennent compte de la déformabilité des étrésillons alors que la quatrième suppose un flambement de colonne à section pleine de type Eulérien. Pour un nombre d'étrésillons inférieur à 10, le programme fournit des contraintes comprises entre les prédictions d'Engesser et celles de la théorie de Paul qui suppose que la connexion membrures – étrésillons se fait au niveau du bord des semelles des membrures. Au-delà, les prédictions du programme sortent de ce fuseau pour converger plus rapidement (que les théories d'Engesser et de Paul) vers la solution d'Euler. Il est par conséquent possible d'affirmer que, pour ce type de comportement relativement compliqué, l'allure de la courbe obtenue est raisonnable. D'autre part, il faut signaler que ce comportement a occupé la première position pour un nombre d'étrésillons allant jusqu'à 3. Entre 4 et 12 étrésillons, ce mode est passé à la deuxième position et à partir de 13 étrésillons, il a occupé la troisième position. Il a été relégué aux rangs supérieurs exclusivement par des modes flexionnels dans le plan XZ. C'est-à-dire que pour cette colonne de longueur 5 m, ce mode sera tout le temps critique si la flexion dans le plan XZ est empêchée.

Concernant le voilement, les résultats prédits par le programme pour cette colonne de longueur 5 m sont restés éloignés d'environ 18% de l'estimation calculée par la MBF classique. Or, il est connu (Timoshenko et Gere, 1961) que, lorsque la longueur d'une plaque est très grande devant sa largeur, la contrainte critique et la longueur d'onde de voilement deviennent constantes et indépendantes des conditions aux limites dans le sens de la longueur. Autrement dit, et du moment que la distance entre étrésillons est restée, pour tous les exemples, relativement grande par rapport aux dimensions de la section transversale des membrures, le programme devrait fournir une valeur proche de celle donnée par la méthode des bandes finies ($\sigma_{cr}/E = 2.724 \cdot 10^{-3}$).

Le travail présenté ci-dessus a été répété pour d'autres longueurs de la colonne. Les résultats obtenus pour des longueurs de 4 et 3 m sont donnés dans les figures 6.23 et (6.24), respectivement. Les conclusions et remarques présentées ci-dessus pour la colonne de 5 m restent, pour la plupart, valables. Il faut néanmoins signaler qu'il était impossible de continuer à suivre longtemps la courbe du flambement dans le plan YZ après qu'elle ait dépassé celle du voilement. Ceci est dû à la grande multiplicité des valeurs propres de voilement. En effet, il est connu pour des plaques très longues, différentes formes d'instabilité correspondant à différents nombres de demi ondes ont des contraintes de voilement très voisines. Ceci a pour effet de faire sortir rapidement le mode de flexion dans le plan YZ du lot des dix plus petites valeurs propres.

L'autre remarque importante est que, plus la longueur de la colonne diminue, plus la contrainte de voilement calculée par SHEBA tend vers celle obtenue par la MBF classique. Ceci peut avoir deux explications ou la conjugaison des deux. La première vient du fait que pour les grandes longueurs, le mode de voilement occupe des ordres élevés alors que pour les faibles longueurs il lui est arrivé d'occuper les premières positions. Or, il est bien établi que la précision de la valeur propre diminue avec son ordre lorsque les valeurs et vecteurs propres sont calculés, comme c'est le cas dans SHEBA, par la méthode du sous-espace (Bathe, 1982). La deuxième explication et c'est la plus plausible, vient du

fait que le nombre de sections nodales dans le modèle en splines bandes finies utilisé est maintenu constant pour toutes les longueurs. Ces dernières sont toujours divisées en 33 intervalles, ce qui correspond à 36 sections nodales (voir figure 6.21). La distance entre ces sections, qui conditionne la précision de l'interpolation spline et définit en quelque sorte la finesse du maillage, est alors proportionnelle à la longueur de la colonne. Or, pour bien représenter le voilement qui se manifeste par des ondulations le long de la longueur, il s'agit de bien représenter l'onde dont la longueur est approximativement constante. Il est donc évident que plus cet intervalle est grand, plus il est difficile de représenter cette longueur d'onde. La méthode des bandes finies estime cette longueur à 0.099 m pour le profil en U étudié (voir figure 6.20). Or, pour une longueur de 5 m, l'intervalle entre les sections nodales du modèle est de 0.152 m. C'est ce qui cause principalement les 18% de différence. Il est peut être utile de signaler que pour une longueur de 2 m et 4 étréssillons le programme donne $\sigma_{cr}/E = 2.750 \cdot 10^{-3}$, ce qui représente moins de 1% de différence.

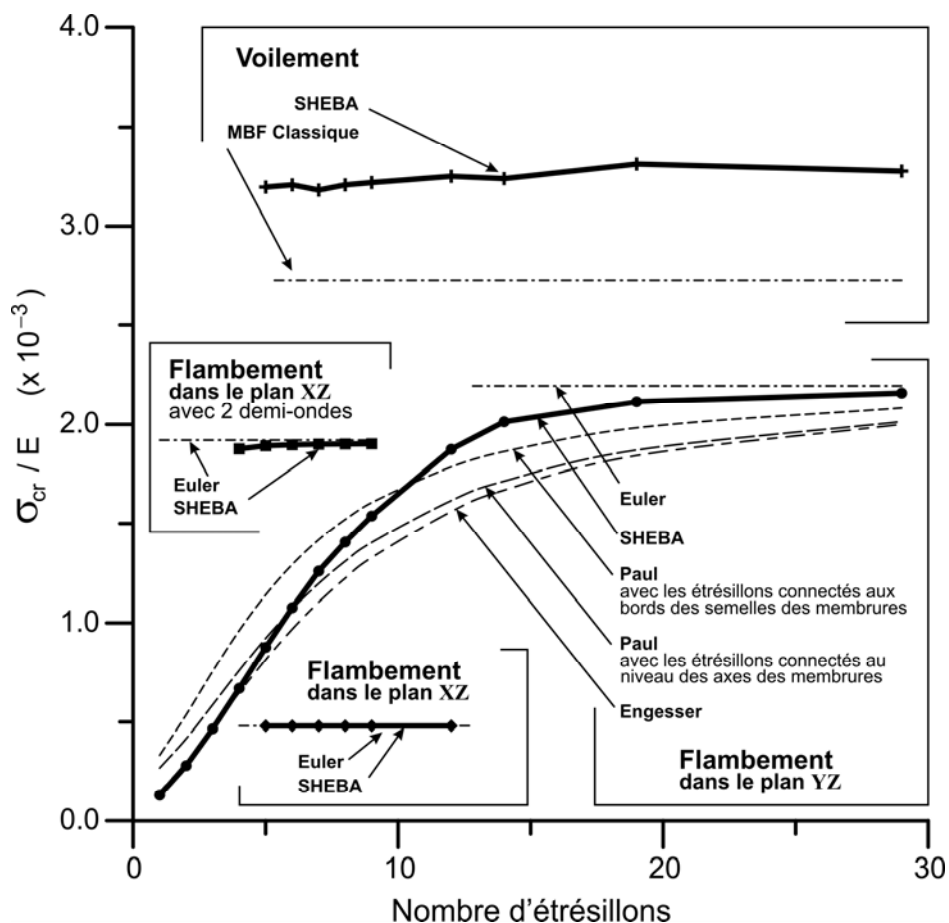


Figure 6.22 Comparaison des contraintes critiques de modes purs de la colonne composée de longueur 5 m.

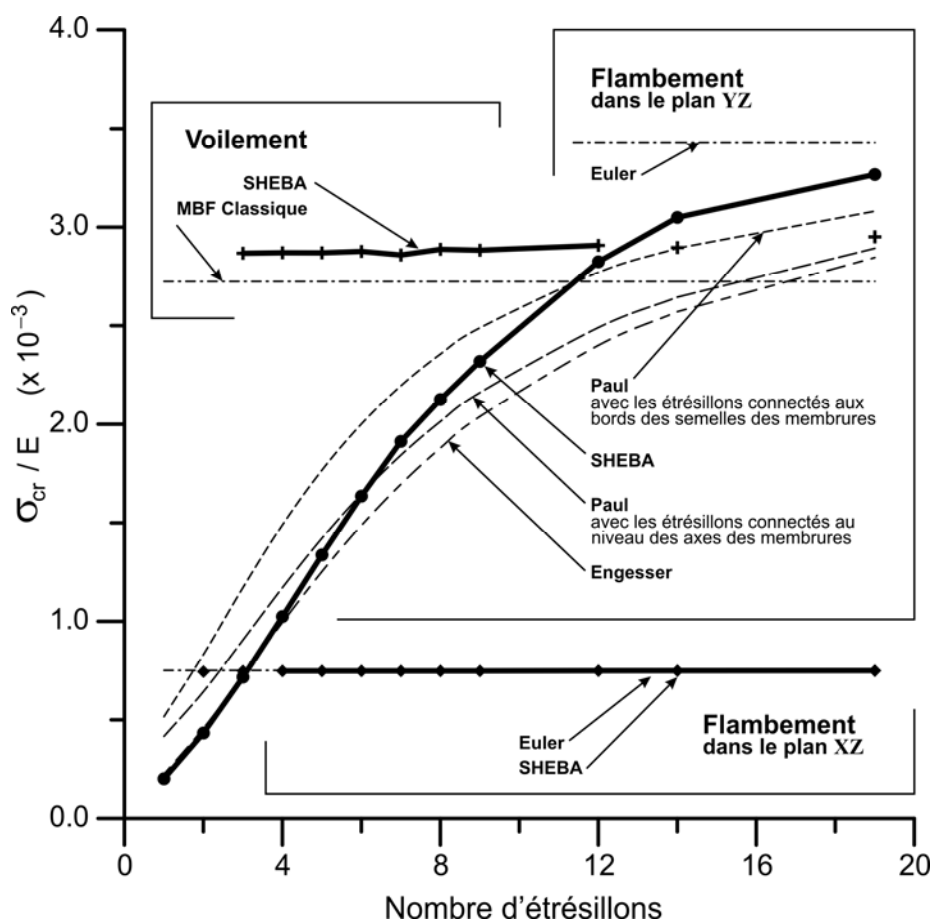


Figure 6.23 Comparaison des contraintes critiques de modes purs de la colonne composée de longueur 4 m.

Pour démontrer la capacité de SHEBA à étudier l'instabilité locale des colonnes composées, l'analyse suivante est réalisée. Une colonne avec un étrésillon intermédiaire est considérée et l'analyse est effectuée en variant la longueur de colonne. La figure 6.25 donne la contrainte d'instabilité en fonction de la longueur de la colonne. Pour dessiner les différentes courbes dans cette figure, les modes d'instabilité appropriés ont été identifiés et les courbes correspondantes ont été construites. Les courbes 1 à 10 correspondent, respectivement, à des voilements avec des nombres de demi-ondes, m , variant de 1 à 10. Il est cependant important de noter que les courbes 7 et 9, c.-à-d. les voilements avec 7 et 9 demi-ondes, ne sont jamais critiques. Elles sont représentées uniquement pour compléter la série. A titre d'exemples, les modes d'instabilité correspondant aux points A, B, C, et D marqués sur la figure 6.25 sont montrés dans la figure 6.26. La courbe 11 arrête l'instabilité locale à $L = 1080\text{mm}$ et correspond à un flambement avec une demi-onde.

Chaque courbe d'instabilité locale sur la figure 6.25 possède un minimum. Dans le tableau 6.6 les contraintes critiques correspondantes sont comparées à celle obtenue par la MBF (figure 6.20). On voit bien que les modes avec un nombre de demi-ondes impair donnent des différences plus significatives avec la prévision MBF que les modes pairs. C'est l'effet de la présence de l'étrésillon à mi-longueur : il est davantage sollicité dans les instabilités avec un nombre impair de demi-ondes. Ceci explique également pourquoi les courbes (7) et (9) ne sont jamais critiques : les courbes de voilement deviennent de plus en

plus larges lorsque m augmente, et la différence entre les courbes impaires et paires rend les courbes (6), (8) et (10) plus critiques.

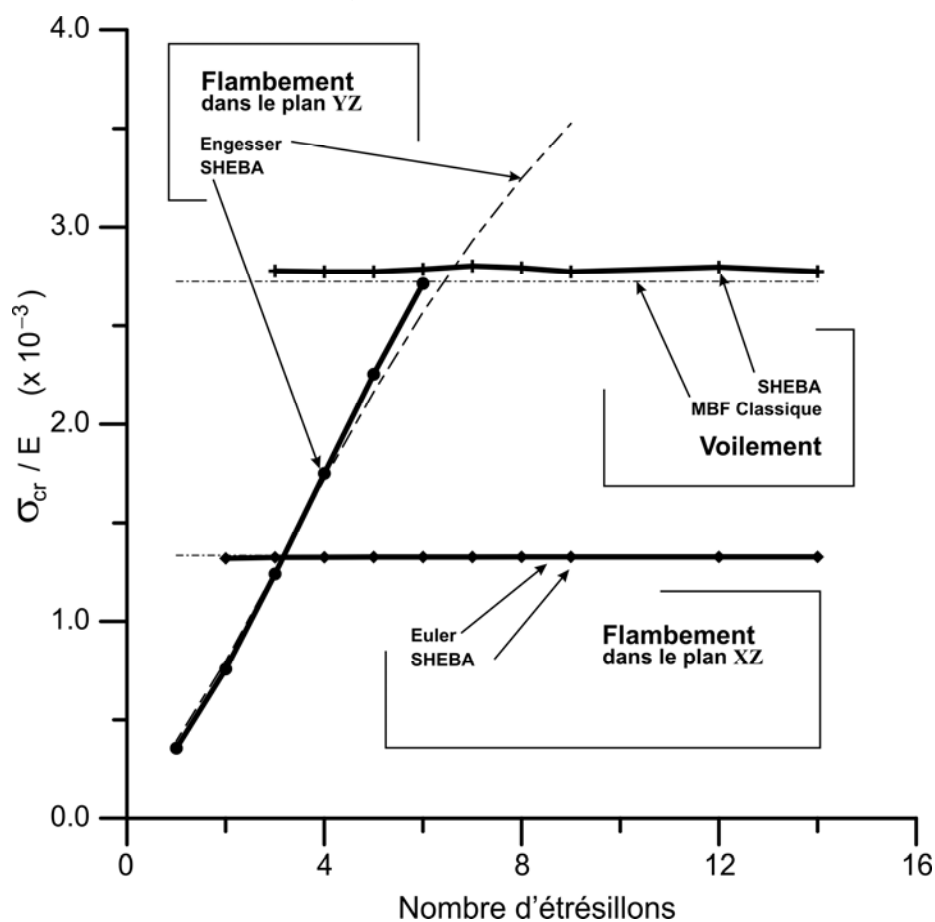


Figure 6.24 Comparaison des contraintes critiques de modes purs de la colonne composée de longueur 3 m.

Ainsi, pour une colonne possédant un seul étrésillon au milieu, le domaine de l'instabilité locale peut être divisé en deux régions. Pour les colonnes très courtes, l'instabilité locale peut se produire avec un nombre de demi-ondes pair ou impair. Mais, lorsque la longueur de colonne devient suffisamment grande, on ne peut observer que des instabilités avec m pair. Donc, les étrésillons ont une influence sur les charges critiques et les modes d'instabilité des colonnes composées courtes.

Tableau 6.6 Minima des courbes de voilement

Nombre de demi-ondes	m=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_{cr}/E	2.957	2.747	2.871	2.752	2.852	2.756	---	2.747	---	2.741
$\times 10^{-3}$	2.724	2.724	2.724	2.724	2.724	2.724	2.724	2.724	2.724	2.724
Différence (%)	8.55	0.84	5.40	1.03	4.70	1.17	---	0.84	---	0.62

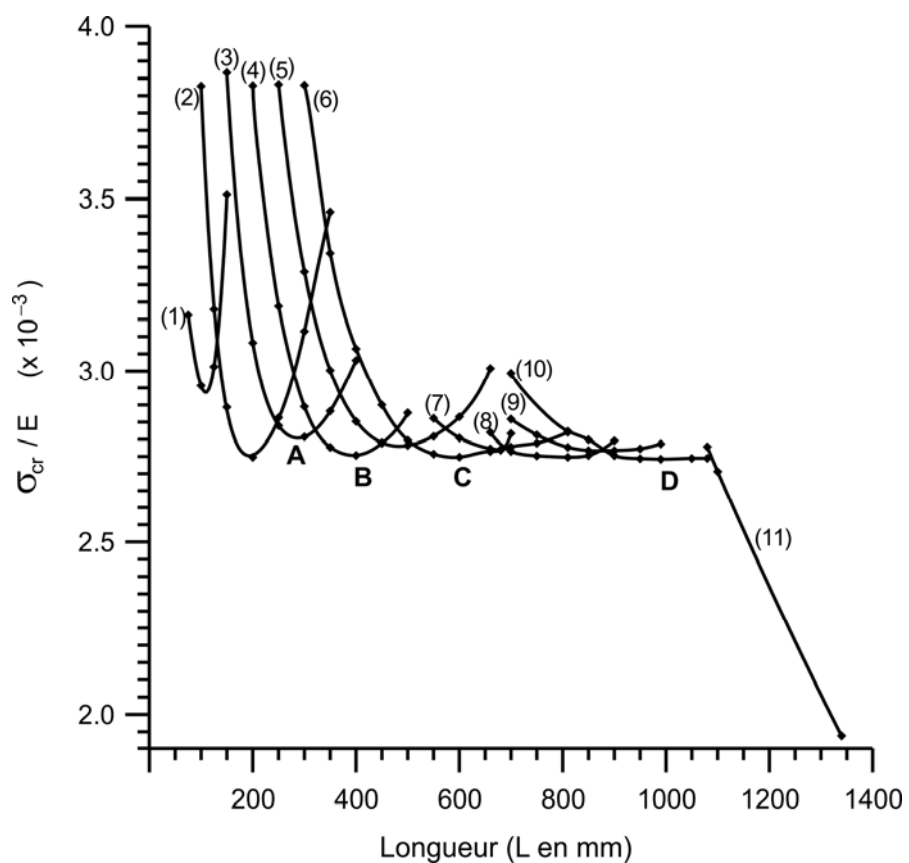


Figure 6.25 Courbes de stabilité d'une colonne ayant un seul étrésillon.

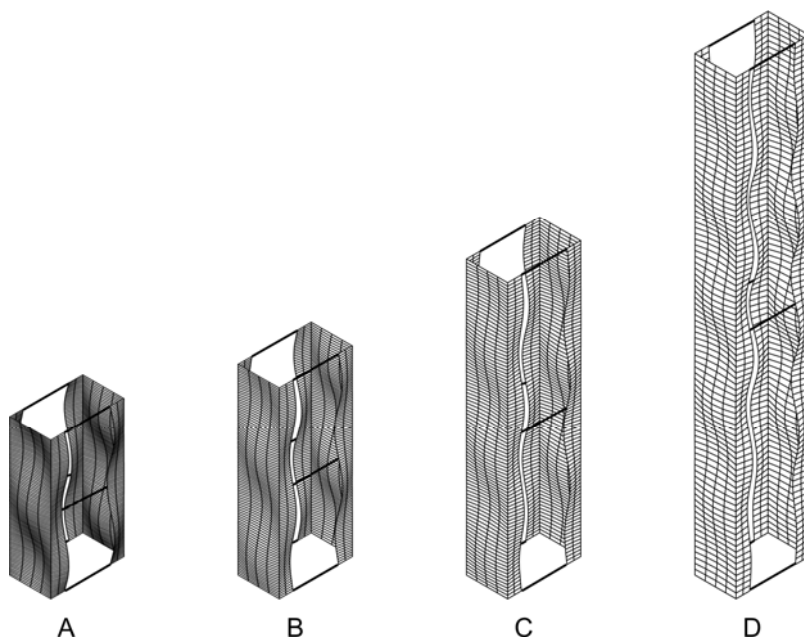


Figure 6.26 Formes d'instabilité locale de la colonne ayant un seul étrésillon.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une nouvelle technique basée sur la méthode des bandes fines pour analyser la stabilité élastique des colonnes composées. Les membrures peuvent avoir n'importe quelle section transversale et n'importe quelles conditions d'appui. La méthode considère la colonne composée comme un tout et calcule ses instabilités élastiques en incorporant tous les modes d'instabilité possibles : locaux, globaux, distorsionnels et couplés.

Une étude comparative est faite et des résultats sont présentés pour valider le modèle. Les colonnes composées étudiées dans ce chapitre sont constituées de deux profils en U reliés par des étrépillons. L'analyse est conduite en variant le nombre des éléments de connexion et la longueur de la colonne.

Les résultats prouvent que le modèle proposé permet de faire une analyse précise et efficace de la stabilité élastique des colonnes composées. On peut donc envisager de le considérer comme une « analyse rationnelle » dans la procédure de conception moderne des profils formés à froid par la méthode de la résistance directe ou DSM (AISI, 2004a).

Conclusion

Trois types d'instabilité de base doivent être prises en compte dans le dimensionnement des éléments de structures formés à froid. Les charges critiques élastiques de ces modes de ruine sont des données importantes dans la procédure de dimensionnement par n'importe quel règlement moderne mais, leur calcul peut être problématique, surtout lorsqu'il s'agit du mode distorsionnel de sections à formes complexes. L'usage des méthodes numériques (MEF, MBF ...) dans la prédiction de l'instabilité élastique devient alors quasiment inévitable.

Néanmoins, l'interprétation des résultats obtenus par la MEF ou la MBF peut parfois nécessiter une certaine expertise et des risques de confusion peuvent exister. Dans le chapitre 2 de cette thèse, nous avons proposé une première technique d'identification du voilement des structures à parois minces. Il s'agit plutôt d'une procédure pour éliminer les voilements improbables qui a été déduite en faisant des raisonnements sur des situations limites.

Dans les règlements américain et australien, le mode distorsionnel est approchée par une l'instabilité globale par flexion et torsion du sous-ensemble semelle – raidisseur qui s'appuie élastiquement sur l'âme. Cette approche est présentée dans le chapitre 3 avec les particularités et les difficultés relatives à ce mode de ruine. A ce niveau, nous pouvons dire qu'il s'agit du mode le moins intuitif des trois types de d'instabilités de base. Il est d'ailleurs le dernier à avoir été intégré dans les codes et règlements de calcul des éléments structuraux en acier formés à froid. C'est essentiellement les travaux du professeur G.J. Hancock qui ont permis de mettre en évidence que la charge de ruine dans le mode distorsionnel peut être prévue à partir de la charge d'instabilité distorsionnelle élastique. Ce résultat a confirmé une hypothèse empirique déjà utilisée pour les modes de ruine par voilement ou par instabilité globale : la charge ultime est une fonction des charges élastiques d'instabilité et de la limite d'élasticité du matériau.

Ce résultat, la difficulté d'estimer la charge critique distorsionnelle, la complexité des formes des éléments structuraux modernes et la lourdeur dans l'utilisation de la méthode de la largeur efficace traditionnelle ont inspiré les professeurs B. Schafer et T. Peköz (1998) pour développer la DSM. Dans cette méthode, les capacités portantes nominales vis-à-vis des trois types d'instabilité sont estimées directement à partir des forces critiques élastiques correspondantes calculées pour la section entière. C'est-à-dire que la section de

la structure à parois minces n'a plus besoin d'être décomposée. La DSM a cependant besoin de méthodes rationnelles fiables et pratiques pour estimer les charges critiques élastiques des instabilités de base des structures à parois minces. L'une des méthodes les plus efficaces dans ce sens est la méthode des bandes finies conventionnelle (MBF). Elle a été presque « institutionnalisée » par les règles américaines (AISI, 2004a). Néanmoins, son utilisation pose parfois quelques problèmes pratiques.

Pour résoudre les problèmes de classification des instabilités de base et du calcul de leurs charges critiques par la MBF, une nouvelle méthode numérique a été récemment développée par l'inventeur de la DSM : il s'agit de la cFSM qui est présentée dans le chapitre 4. Cette méthode se base sur des idées tirées de la GBT qui est la seule méthode théorique capable d'isoler le mode distorsionnel. A travers quelques exemples, nous avons montré que les classifications de la cFSM/GBT peuvent parfois être en contradiction avec la pratique courante et les usages dans l'ingénierie des structures. Nous avons également montré que la classification cFSM/GBT donne lieu, comme les méthodes d'identification classiques, à des discontinuités dans la classification de phénomènes apparemment continus. Ces discontinuités sont liées à la notion de nœud interne principal qui est, à notre sens, juste un objet de modélisation. Il ne devrait pas posséder un statut déterminant dans la classification de phénomènes purement mécaniques.

La méthode cFSM repose sur la détermination de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} définissant l'instabilité distorsionnelle. La démonstration d'Adany et Schafer (2006a) est très compliquée et très contraignante. Dans le chapitre 5, nous avons alors proposé une autre démonstration en utilisant uniquement 2 hypothèses très simples. Le résultat est une formulation beaucoup plus lisible qui n'utilise aucune classification particulière des nœuds. Elle préserve la flexibilité de la méthode numérique qui est la MBF en laissant libre la numérotation des nœuds, la numérotation des éléments, le choix des caractéristiques géométriques et mécaniques,...

Dans le chapitre 5, nous avons également proposé une technique originale de séparation des modes propres. Nous avons utilisé des définitions des instabilités de base indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle. La méthode que nous avons proposée lève certaines des insuffisances de la cFSM. Nous avons entre autres pu étudier des sections fermées, ce qui est impossible par la cFSM et par la plupart des solutions type GBT. La méthode de classification que nous avons proposée nous semble aisément extensible aux méthodes numériques générales (MEF, MSBF, ...). Il serait intéressant de la mettre en œuvre dans d'autres travaux de recherche.

Dans le chapitre 6, nous nous sommes plutôt penchés sur un problème qui n'a jamais été étudié par la MBF. Il s'agit de la stabilité élastique des colonnes composées à diagonales ou à étrépillons. Nous avons proposé une nouvelle technique pour analyser la stabilité élastique d'une colonne composée dans son ensemble, conformément à l'esprit de la DSM. Les membrures peuvent avoir n'importe quelle section transversale et n'importe quelles conditions d'appui. La méthode considère la colonne composée comme un tout et calcule ses instabilités élastiques en incorporant tous les modes d'instabilité possibles : locaux, globaux, distorsionnels et couplés.

Une étude comparative a été faite et des résultats ont été présentés pour valider le modèle. Les colonnes composées étudiées dans cette thèse sont constituées de deux profils en U reliés par des étrépillons. L'analyse est conduite en variant le nombre des éléments de connexion et la longueur de la colonne.

Les résultats prouvent que le modèle proposé permet de faire une analyse précise et efficace de la stabilité élastique des colonnes composées. On peut donc envisager de le considérer comme une « analyse rationnelle » dans la procédure de conception moderne des profils en acier formés à froid par la DSM.

Perspectives

Deux solutions que nous avons entrevues dans cette thèse mais que nous n'avons pas développées méritent qu'on s'y intéresse. La première concerne la discontinuité dans la classification du mode distorsionnel des parois d'extrémité. La grande ressemblance entre les caractéristiques de l'instabilité distorsionnelle et celles observées lors de l'étude de la limite d'une section en U lorsque la largeur des semelles tend vers zéro, nous a permis d'avancer une explication de la discontinuité en question. Nous pensons que lorsque le raidisseur est très petit, nous avons plutôt l'instabilité d'une plaque reposant sur l'appui élastique qui est le raidisseur. Lorsque la dimension du raidisseur augmente nous assistons à un basculement vers une instabilité « Eulérienne » d'un sous-ensemble de parois. Cette division de l'instabilité distorsionnelle en deux types de comportements peut également servir à expliquer la différence entre la méthode européenne (CEN/EC3, 1996) et l'approche américano-australienne (AISI/NAS, 2004a ; AS/NZS 4600, 1996) pour calculer l'instabilité distorsionnelle.

La deuxième perspective est relative à la procédure de classification des instabilités de base que nous avons proposée. En effet, il nous semble qu'elle peut être aisément étendue aux méthodes numériques générales (MEF, MSBF, ...). Il serait alors intéressant de la mettre en œuvre dans un programme MEF.

Enfin, un point qui a été moins mis en évidence, est la possibilité d'utiliser la méthode développée pour le calcul de la stabilité élastique de colonnes et poutres composées dans un domaine de recherche très actuel. Il s'agit des problèmes de stabilité des profils perforés actuellement à l'étude à l'université de Sydney et par l'équipe de Schafer.

Annexe A

Formulation de la matrice R_{GD}

Relation entre les DDL de translation transversale et les autres déplacements transversaux

a Calcul des moments aux nœuds

Différences de rotation aux noeuds dues à U, W. Conformément à l'approche standard de la méthode de flexibilité, la poutre équivalente est d'abord rendue statiquement déterminée en libérant des liaisons : des articulations sont placées à chaque appui interne. Par conséquent, les inconnues sont les moments aux appuis internes. En imposant des déplacements d'appuis au modèle statiquement déterminé, chaque segment de poutre subira des déplacements en corps rigide, alors qu'aux appuis des différences relatives de rotation se produisent. La première étape de la démarche consiste à déterminer ces différences de rotation. Elle est suivie de la détermination des moments redondants.

Comme illustré dans la figure A.1, la différence de rotation au $i^{\text{ème}}$ noeud est déterminée par les rotations des deux segments de poutre contigus provoquées par les déplacements transversaux des nœuds $(i-1)$, (i) et $(i+1)$. La rotation absolue des deux poutres peut être écrite comme suit :

$$\theta^{(i-1)} = \frac{1}{b^{(i-1)}} (w_2^{(i-1)} - w_1^{(i-1)}) \quad \text{et} \quad \theta^{(i)} = \frac{1}{b^{(i)}} (w_2^{(i)} - w_1^{(i)}) \quad (\text{A.1.a,b})$$

Où w désigne le déplacement dans le repère local de la bande. Par suite la différence de rotation est donnée par :

$$\Delta\theta_i = \theta^{(i)} - \theta^{(i-1)} = \frac{1}{b^{(i)}} (w_2^{(i)} - w_1^{(i)}) - \frac{1}{b^{(i-1)}} (w_2^{(i-1)} - w_1^{(i-1)}) \quad (\text{A.2})$$

En utilisant la deuxième ligne de la matrice de changement de repère pour relier les w locaux aux déplacements globaux U et W des noeuds, on arrive à :

$$w_1^{(i-1)} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(i-1)} & \cos\alpha^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{i-1} \\ W_{i-1} \end{Bmatrix} \text{ et } w_2^{(i-1)} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(i-1)} & \cos\alpha^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$w_1^{(i)} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \text{ et } w_2^{(i)} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{i+1} \\ W_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

On peut alors exprimer la différence de rotation en fonction des translations transversales :

$$\Delta\theta_i = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\sin\alpha^{(i-1)}}{b^{(i-1)}} \right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(i-1)}}{b^{(i-1)}} + \frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \right) & \left(-\frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \right) \\ \left(-\frac{\cos\alpha^{(i-1)}}{b^{(i-1)}} \right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(i-1)}}{b^{(i-1)}} + \frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \right) & \left(-\frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ W_{i-1} \\ W_i \\ W_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Puisque la différence de rotation au noeud i est en fonction des déplacements transversaux U , W des noeuds $(i-1)$ à $(i+1)$, et puisque les déplacements transversaux de n'importe quel noeud interne peuvent être exprimés en fonction des déplacements longitudinaux de ce noeud et de ses noeuds voisins, alors la différence de rotation au noeud i peut être exprimée en fonction de cinq déplacements longitudinaux : V_{i-2} à V_{i+2} . Ainsi, les différences de rotation des noeuds 3 à $(n-2)$ peuvent être exprimées en fonction des déplacements longitudinaux de tous les noeuds. En utilisant l'équation (.), cette relation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \\ \vdots \\ \Delta\theta_i \\ \vdots \\ \Delta\theta_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s^{(2)} & s^{(2)}+s^{(3)} & -s^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s^{(3)} & s^{(3)}+s^{(4)} & -s^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -s^{(i-1)} & s^{(i-1)}+s^{(i)} & -s^{(i)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s^{(n-3)} & s^{(n-3)}+s^{(n-2)} & -s^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -c^{(2)} & c^{(2)}+c^{(3)} & -c^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^{(3)} & c^{(3)}+c^{(4)} & -c^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -c^{(i-1)} & c^{(i-1)}+c^{(i)} & -c^{(i)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c^{(n-3)} & c^{(n-3)}+c^{(n-2)} & -c^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{i-1} \\ W_i \\ W_{i+1} \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Où on a introduit les notations :

$$s^{(i)} = \frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \text{ et } c^{(i)} = \frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}}. \quad (\text{A.7.a})$$

L'équation (A.6) peut être réécrite sous une forme plus compacte comme suit :

$$\Delta\theta_L = S_2 \bar{U} - C_2 \bar{W} \quad (\text{A.7.b})$$

Où \bar{U} et \bar{W} ont été déjà définis, $\Delta\theta_L$ est un vecteur à $(n-4)$ composantes qui sont les différences de rotations aux nœuds 3 à $(n-2)$, l'indice L indique qu'il s'agit des différences de rotations dues au chargement cinématique, et S_2 comme C_2 sont des matrices de dimensions $(n-4) \times (n-2)$ contenant des informations strictement géométriques de la section transversale.

Il faut noter que l'équation (A.7.b) définit les rotations relatives des nœuds 3 à $(n-2)$ et qu'il s'agit de toutes les différences de rotations nécessaires du moment que les articulations ne sont introduites qu'au niveau de ces nœuds pour obtenir le système de base statiquement déterminé. Ces différences de rotation sont exprimées en fonction des déplacements transversaux. Elles peuvent également être exprimées en fonction des déplacements nodaux longitudinaux, par l'intermédiaire des équations (4.32) et (4.33).

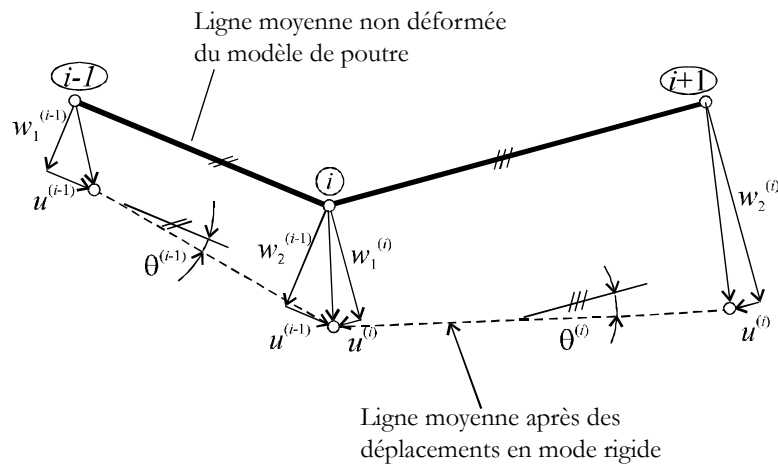


Figure A.1 Le nœud i , avec les deux poutres qui y concourent, du système isostatique de base (Adany et Schafer, 2006a).

Différences de rotations dues aux moments de flexion. La suite de la solution de la poutre équivalente par la méthode de flexibilité consiste à évaluer les différences de rotation dues aux moments redondants qui sont les inconnues hyperstatiques. Le problème est illustré dans la figure A.2 où le modèle de la poutre équivalente est montré, pour une meilleure visibilité, sous une forme « déployée » où tous les segments de poutre sont alignés. Les moments inconnus et les diagrammes des moments fléchissant qui leur sont associés y sont également montrés pour le nœud i et pour son voisinage.

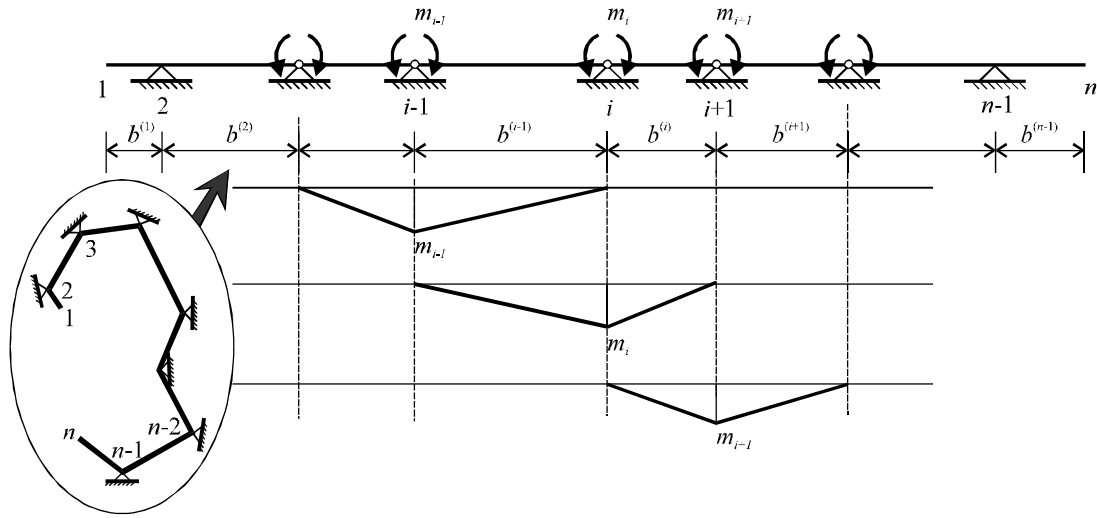


Figure A.2 Diagrammes des moments fléchissants dus aux inconnues hyperstatiques (Adany et Schafer, 2006a).

En utilisant la théorie élémentaire de poutres élastiques, la différence de rotation au noeud i peut être obtenue par la somme des rotations des extrémités des poutres concourant au noeud i :

$$\Delta\theta_i = \frac{m_{i-1}b^{(i-1)}}{6EI} + \frac{m_i b^{(i-1)}}{3EI} + \frac{m_i b^{(i)}}{3EI} + \frac{m_{i+1}b^{(i)}}{6EI} \quad (\text{A.8.a})$$

Où les deux premiers termes définissent la rotation de l'extrémité de la poutre $(i-1)$, alors que les deux autres donnent la rotation de l'origine de la poutre i . EI est la raideur flexionnelle de la poutre ; elle est supposée, comme souligné ci-dessus, constante le long de la poutre.

Cette dernière équation peut être réécrite ainsi :

$$\Delta\theta_i = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} b^{(i-1)} & (2b^{(i-1)} + 2b^{(i)}) & b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i-1} \\ m_i \\ m_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8.b})$$

Pour l'ensemble de la section, on peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \\ \vdots \\ \Delta\theta_i \\ \vdots \\ \Delta\theta_{n-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2b^{(2)} + 2b^{(3)} & b^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^{(3)} & 2b^{(3)} + 2b^{(4)} & b^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b^{(i-1)} & 2b^{(i-1)} + 2b^{(i)} & b^{(i)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{(n-3)} & 2b^{(n-3)} + 2b^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_i \\ \vdots \\ m_{n-2} \end{bmatrix}$$

(A.9)

Ou bien sous une forme plus compacte :

$$\Delta\theta_{\mathbf{R}} = \frac{1}{6EI} \mathbf{B}_1 \mathbf{m} \quad (\text{A.10})$$

$\Delta\theta_{\mathbf{R}}$ est un vecteur à (n-4) composantes qui sont les différences de rotations aux nœuds 3 à (n-2), l'indice \mathbf{R} indique qu'il s'agit des différences de rotations dues aux inconnues hyperstatiques ; \mathbf{B}_1 est une matrice bande de dimension (n-4)×(n-4) contenant des informations strictement géométriques et \mathbf{m} est le vecteur des (n-4) inconnues hyperstatiques. Il est peut-être utile de rappeler qu'au niveau des 4 nœuds restants, les deux extrémités libres plus les 2 appuis du système isostatique de base, il n'y a aucun moment. De plus, si la matrice \mathbf{B}_1 ne contient que des grandeurs géométriques, c'est uniquement parce que l'épaisseur et le matériau ont été supposés constants pour la totalité de la section. Dans le cas contraire, \mathbf{B}_1 contiendrait également des informations sur la distribution de la rigidité.

Les moments nodaux inconnus. Après avoir exprimé les différences de rotation en fonction du chargement cinématique et en fonction des moments de liaison, ces derniers, qui sont les inconnues hyperstatiques, peuvent être déterminés à partir de la condition de continuité des rotations. Les différences de rotation nodales doivent ainsi être nulles et des équations (A.7.b) et (A.10) on peut écrire :

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\mathbf{L}} + \Delta\theta_{\mathbf{R}} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{S}_2 \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_2 \bar{\mathbf{W}} + \frac{1}{6EI} \mathbf{B}_1 \mathbf{m} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Finalement, les inconnues hyperstatiques valent :

$$\mathbf{m} = 6EI \mathbf{B}_1^{-1} (-\mathbf{S}_2 \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_2 \bar{\mathbf{W}}) \quad (\text{A.13})$$

b Les nœuds des appuis internes

Rotations nodales dues au chargement cinématique. La rotation absolue peut être calculée comme la somme des rotations dues au chargement cinématique et aux moments hyperstatiques. La rotation du chargement cinématique est donnée par l'équation (A.1). En choisissant le $i^{\text{ème}}$ segment de poutre et en substituant l'équation (A.3) dans la deuxième équation de l'expression (A.1) on obtient :

$$\theta^{(i)} = \frac{1}{b^{(i)}} \left(\begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i+1} \\ W_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A.14})$$

Qui peut être réécrite ainsi :

$$\theta^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} & -\frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \\ \frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} & -\frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} & -\frac{\sin\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \\ \frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} & -\frac{\cos\alpha^{(i)}}{b^{(i)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ W_{i+1} \end{bmatrix} \quad (A.15)$$

Pour l'ensemble des noeuds des appuis internes, on peut également écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta^{(3)} \\ \theta^{(4)} \\ \vdots \\ \theta^{(i)} \\ \vdots \\ \theta^{(n-2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s^{(3)} & -s^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{(4)} & -s^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^{(i)} & -s^{(i)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^{(n-2)} & -s^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & c^{(3)} & -c^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{(4)} & -c^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^{(i)} & -c^{(i)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{(n-2)} & -c^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{i-1} \\ W_i \\ W_{i+1} \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{bmatrix} \quad (A.16)$$

Où les notations (A.7.a) ont été utilisées. Sous une forme plus compacte, cette équation s'écrit :

$$\bar{\theta}_L = \mathbf{S}_3 \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_3 \bar{\mathbf{W}} \quad (A.17)$$

Où $\bar{\mathbf{U}}$ et $\bar{\mathbf{W}}$ ont été déjà définis, $\bar{\theta}_L$ est un vecteur à (n-4) composantes qui sont les rotations aux origines des poutres 3 à (n-2), l'indice L indique qu'il s'agit des rotations dues au chargement, et \mathbf{S}_3 comme \mathbf{C}_3 sont des matrices de dimensions (n-4)×(n-2) contenant des informations strictement géométriques de la section transversale.

Rotations nodales dues aux inconnues hyperstatiques.

L'étape suivante est le calcul des rotations nodales causées par les moments aux appuis. En considérant que la rotation au premier noeud du $i^{\text{ème}}$ segment de poutre est donnée par les deux derniers termes de l'équation (A.8.a), on peut écrire :

$$\theta^{(i)} = \frac{m_i b^{(i)}}{3EI} + \frac{m_{i+1} b^{(i)}}{6EI} \quad (\text{A.18})$$

Pour l'ensemble des nœuds des appuis internes, on a :

$$\begin{bmatrix} \theta^{(3)} \\ \theta^{(4)} \\ \vdots \\ \theta^{(i)} \\ \vdots \\ \theta^{(n-2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2b^{(3)} & b^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^{(4)} & b^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 2b^{(i)} & b^{(i)} & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2b^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_i \\ \vdots \\ m_{n-2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Ou bien sous forme condensée :

$$\bar{\theta}_R = \frac{1}{6EI} \mathbf{B}_2 \mathbf{m} \quad (\text{A.20})$$

$\bar{\theta}_R$ est un vecteur à (n-4) composantes qui sont les rotations aux nœuds origines des poutre 3 à (n-2), l'indice R indique qu'il s'agit des rotations dues aux inconnues hyperstatiques ; \mathbf{B}_2 est une matrice bi-diagonale de dimension (n-4)×(n-4) contenant des informations strictement géométriques et \mathbf{m} est le vecteur des (n-4) inconnues hyperstatiques.

Les rotations nodales. Les rotations aux nœuds sont finalement données par la somme des rotations dues au chargement cinématique et celles causées par les inconnues hyperstatiques :

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_L + \bar{\theta}_R \quad (\text{A.21})$$

En substituant les équations (A.17) et (A.20) dans l'équation (A.21) et en utilisant ensuite les moments hyperstatiques calculés par (A.13), on aboutit successivement à :

$$\bar{\theta} = \mathbf{S}_3 \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_3 \bar{\mathbf{W}} + \frac{1}{6EI} \mathbf{B}_2 \mathbf{m} = \mathbf{S}_3 \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_3 \bar{\mathbf{W}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} (-\mathbf{S}_2 \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_2 \bar{\mathbf{W}}) \quad (\text{A.22})$$

$\bar{\theta}$ est le vecteur des (n-4) rotations des noeuds 3 à (n-2), alors que les autres vecteurs et matrices ont été discutés précédemment.

L'équation (A.22) exprime les rotations nodales en fonction des déplacements transversaux. Cependant, les déplacements transversaux ont été déjà exprimés en fonction des déplacements longitudinaux. Ainsi, pour exprimer les rotations nodales en fonction des déplacements longitudinaux, ou de gauchissement,) il suffit de remplacer les équations (4.32) et (4.33) dans l'équation (A.22), ce qui mène à l'équation suivante :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{k_m} \left[(\mathbf{S}_3 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2) \mathbf{S}_1 - (\mathbf{C}_3 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2) \mathbf{C}_1 \right] \mathbf{V} = \mathbf{R}_{\bar{\theta}} \mathbf{V} \quad (\text{A.23})$$

Ainsi a été trouvée la relation directe entre les rotations de (n-4) nœuds et les déplacements de gauchissement, qui est symbolisée par la matrice $\mathbf{R}_{\bar{\theta}}$, de l'équation (4.13).

c Nœuds des appuis externes

Rotation au deuxième nœud. Les rotations aux appuis externes, portant les numéros 2 et (n-1), peuvent être calculées en suivant les mêmes étapes de base que pour les nœuds des appuis internes présentées dans la section ci-dessus. La rotation nodale due au chargement cinématique est obtenue par application de l'équation (A.1) :

$$\theta_L^{(2)} = \frac{1}{b^{(2)}} (w_2^{(2)} - w_1^{(2)}) \quad (\text{A.24})$$

$$\theta_L^{(2)} = \frac{1}{b^{(2)}} \left(\begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(2)} & \cos\alpha^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ W_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(2)} & \cos\alpha^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A.25})$$

Qui peut être réécrite ainsi :

$$\theta_L^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\alpha^{(2)}}{b^{(2)}} & -\frac{\sin\alpha^{(2)}}{b^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha^{(2)}}{b^{(2)}} & -\frac{\cos\alpha^{(2)}}{b^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Pour assurer une compatibilité avec les notations et formules des nœuds des appuis internes, on peut également écrire :

$$\theta_L^{(2)} = \begin{bmatrix} s^{(2)} & -s^{(2)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c^{(2)} & -c^{(2)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

en utilisant les notations de l'équation (A.7.a). Sous une forme compacte, on peut écrire :

$$\theta_L^{(2)} = \hat{\mathbf{S}}_3 \bar{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{C}}_3 \bar{\mathbf{W}} \quad (\text{A.28})$$

L'étape suivante consiste à calculer la rotation due au moment hyperstatique par l'intermédiaire de l'équation (A.18). On a :

$$\theta_R^{(2)} = \frac{m_2 b^{(2)}}{3EI} + \frac{m_3 b^{(2)}}{6EI} \quad (\text{A.29})$$

Puisque le moment au nœud 2 est nul, l'équation ci-dessus se simplifie en :

$$\theta_R^{(2)} = \frac{m_3 b^{(2)}}{6EI} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} b^{(2)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_{n-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{m} \quad (\text{A.30})$$

La rotation du nœud est obtenue en superposant celles dues au chargement cinématique et à l'inconnue hyperstatique :

$$\theta_2 = \theta_L^{(2)} + \theta_R^{(2)} \quad (\text{A.31})$$

En substituant les équations (A.28) et (A.30) dans (A.31) et en considérant ensuite l'équation (A.13) donnant les inconnues hyperstatiques, la rotation du nœud 2 est trouvée comme suit :

$$\theta_2 = \left(\hat{\mathbf{S}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 \right) \bar{\mathbf{U}} - \left(\hat{\mathbf{C}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \right) \bar{\mathbf{W}} \quad (\text{A.32})$$

En tenant compte des relations entre les déplacements nodaux longitudinaux et transversaux fournies par les équations (4.32) et (4.33), la rotation du deuxième nœud est finalement exprimée en fonction des déplacements de gauchissement comme suit :

$$\theta_2 = \frac{1}{k_m} \left[\left(\hat{\mathbf{S}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 \right) \mathbf{S}_1 - \left(\hat{\mathbf{C}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \right) \mathbf{C}_1 \right] \mathbf{V} = \mathbf{R}_{\Theta 2} \mathbf{V} \quad (\text{A.33})$$

Ce qui définit la sous-matrice $\mathbf{R}_{\Theta 2}$ de la matrice $\mathbf{R}_{\Theta \mathbf{V}}$ telle que indiquée par l'équation (4.13).

Rotation de l'avant-dernier nœud. Ici, les mêmes étapes que pour le deuxième nœud sont suivies. On commence par déterminer la rotation due au chargement, ce qui peut être fait en calculant la rotation de l'extrémité de la poutre (n-2) :

$$\theta_L^{(n-2)} = \frac{1}{b^{(n-2)}} (w_2^{(n-2)} - w_1^{(n-2)}) \quad (\text{A.34})$$

En remplaçant l'équation (A.4) dans (A.34) et en opérant des arrangements similaires à ceux présentés ci-dessus, on trouve :

$$\theta_L^{(n-2)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & s^{(n-2)} & -s^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & c^{(n-2)} & -c^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sous une forme compacte, on peut écrire :

$$\theta_L^{(n-2)} = \tilde{\mathbf{S}}_3 \bar{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{C}}_3 \bar{\mathbf{W}} \quad (\text{A.35.b})$$

L'étape suivante consiste à calculer la rotation causée par les moments hyperstatiques au nœud extrémité de la poutre (n-2). En prenant les deux premiers termes de l'équation (A.8.a), on a :

$$\theta_R^{(n-2)} = \frac{m_{n-2} b^{(n-2)}}{6EI} + \frac{m_{n-1} b^{(n-2)}}{3EI} \quad (\text{A.36})$$

Sachant que le moment au nœud (n-1) est nul, l'équation ci-dessus devient :

$$\theta_R^{(n-2)} = -\frac{m_{n-2} b^{(n-2)}}{6EI} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -b^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_{n-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{m} \quad (\text{A.37})$$

En suivant les étapes présentés pour le cas similaire du nœud 2, on arrive sans plus de détails à :

$$\theta_2 = (\hat{\mathbf{S}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2) \bar{\mathbf{U}} - (\hat{\mathbf{C}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2) \bar{\mathbf{W}} \quad (\text{A.38})$$

En tenant compte des relations entre les déplacements nodaux longitudinaux et transversaux fournies par les équations (4.32) et (4.33), la rotation du deuxième nœud est finalement exprimée en fonction des déplacements de gauchissement comme suit :

$$\theta_{n-1} = \frac{1}{k_m} \left[(\tilde{\mathbf{S}}_3 - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2) \mathbf{S}_1 - (\tilde{\mathbf{C}}_3 - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2) \mathbf{C}_1 \right] \mathbf{V} = \mathbf{R}_{\Theta_{n-1}} \mathbf{V} \quad (\text{A.39})$$

Ce qui définit la sous-matrice $\mathbf{R}_{\Theta_{n-1}}$ de \mathbf{R}_{Θ_V} telle que indiquée par l'équation (4.13).

d Les 2 nœuds extrêmes

Rotations du premier et du dernier nœud. Puisque le premier et le dernier segment de la poutre équivalente présentée dans la figure A.2 sont des consoles, et puisqu'il n'y a aucun chargement cinématique externe sur ces consoles, il est évident que ces segments demeurent droits (dans la direction transversale). En conséquence, la rotation de tous les points de ce segment en porte-à-faux donné est identique. Ainsi, on peut écrire :

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \mathbf{R}_{\Theta_1} = \mathbf{R}_{\Theta_2} \quad (\text{A.40})$$

et

$$\theta_n = \theta_{n-1}, \quad \mathbf{R}_{\Theta_n} = \mathbf{R}_{\Theta_{n-1}} \quad (\text{A.41})$$

Où θ_2 et θ_{n-1} sont fournies par les expressions (A.33) et (A.39), respectivement. Les sous-matrices \mathbf{R}_{Θ_1} , \mathbf{R}_{Θ_2} , $\mathbf{R}_{\Theta_{n-1}}$ et \mathbf{R}_{Θ_n} sont celles définies dans l'équation (4.13).

Translation du premier nœud. Les seuls DDL qui ne sont pas encore déterminés en fonction des déplacements longitudinaux sont les translations du premier et du dernier nœud. Pour le premier nœud, et en utilisant l'hypothèse des petites rotations, implicitement supposées tout au long de la démonstration ci-dessus, la translation du premier nœud peut être écrite comme suit :

$$w_1^{(1)} = w_2^{(1)} - b^{(1)} \theta^{(1)} \quad (\text{A.42})$$

En exploitant la relation (A.4), on peut écrire :

$$w_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha^{(1)} & \cos\alpha^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \end{bmatrix} = b^{(1)} \begin{bmatrix} -s^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} - b^{(1)} \begin{bmatrix} -c^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Ou bien avec les notations de l'équation (A.7.a) on a :

$$\mathbf{w}_2^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} (\hat{\mathbf{S}}_4 \bar{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{C}}_4 \bar{\mathbf{W}}) \quad (\text{A.44})$$

Sachant que $\theta^{(1)} = \theta_1 = \theta_2$ et en substituant les équations (A.33) et (A.44) dans (A.42), on arrive à :

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} (\hat{\mathbf{S}}_4 \bar{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{C}}_4 \bar{\mathbf{W}}) - \mathbf{b}^{(1)} \left[(\hat{\mathbf{S}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2) \bar{\mathbf{U}} - (\hat{\mathbf{C}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2) \bar{\mathbf{W}} \right] \quad (\text{A.45})$$

Finalement, après réarrangement des termes et la prise en compte des équations (4.32) et (4.33), cette relation devient :

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = \frac{\mathbf{b}^{(1)}}{k_m} \left[(-\hat{\mathbf{S}}_3 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 + \hat{\mathbf{S}}_4) \mathbf{S}_1 + (-\hat{\mathbf{C}}_3 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 + \hat{\mathbf{C}}_4) \mathbf{C}_1 \right] \mathbf{V} \quad (\text{A.46})$$

Le déplacement axial de la poutre est quant à lui déduit des relations (4.19) et (4.21) :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/\mathbf{b}^{(1)} & -1/\mathbf{b}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \alpha^{(1)} k_m} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{(1)} & -\mathbf{c}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Relation qu'on peut réécrire ainsi :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\cos \alpha^{(1)} k_m} \hat{\mathbf{C}}_5 \mathbf{V} \quad (\text{A.48})$$

En opérant la transformation du repère local vers le global, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{W}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha^{(1)} & -\sin \alpha^{(1)} \\ \sin \alpha^{(1)} & \cos \alpha^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{w}_1^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Par suite, les DDL de translation du premier nœud peuvent être obtenus en substituant les équations (A.46) et (A.48) dans (A.49). Pour \mathbf{U}_1 on peut écrire :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{k_m} \hat{\mathbf{C}}_5 \mathbf{V} - \sin \alpha^{(1)} \frac{\mathbf{b}^{(1)}}{k_m} \left[(-\hat{\mathbf{S}}_3 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 + \hat{\mathbf{S}}_4) \mathbf{S}_1 + (-\hat{\mathbf{C}}_3 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 + \hat{\mathbf{C}}_4) \mathbf{C}_1 \right] \mathbf{V} \quad (\text{A.50})$$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{k_m} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_5 + \sin\alpha^{(1)} b^{(1)} \left[\left(\hat{\mathbf{S}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 - \hat{\mathbf{S}}_4 \right) \mathbf{S}_1 + \left(\hat{\mathbf{C}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 - \hat{\mathbf{C}}_4 \right) \mathbf{C}_1 \right] \right\} \mathbf{V}$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_{\mathbf{U}1} \mathbf{V} \quad (\text{A.51})$$

L'expression ci-dessus fournit la sous-matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{U}1}$ de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{UV}}$ telle que montrée par l'équation (4.13).

En réarrangeant l'équation (A.47) on peut écrire :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} 1/b^{(1)} & -1/b^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\alpha^{(1)} k_m} \begin{bmatrix} s^{(1)} & -s^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.52})$$

Relation qu'on peut réécrire ainsi :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\sin\alpha^{(1)} k_m} \hat{\mathbf{S}}_5 \mathbf{V} \quad (\text{A.53})$$

Pour obtenir une expression pour \mathbb{W}_1 , on peut utiliser la deuxième ligne de l'équation (A.49) dans laquelle on utilise les expressions (A.46) et (A.53) :

$$\mathbb{W}_1 = \frac{1}{k_m} \left\{ \hat{\mathbf{S}}_5 - \cos\alpha^{(1)} b^{(1)} \left[\left(\hat{\mathbf{S}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 - \hat{\mathbf{S}}_4 \right) \mathbf{S}_1 + \left(\hat{\mathbf{C}}_3 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 - \hat{\mathbf{C}}_4 \right) \mathbf{C}_1 \right] \right\} \mathbf{V}$$

$$(\text{A.54.a})$$

$$\mathbb{W}_1 = \mathbf{R}_{\mathbb{W}1} \mathbf{V} \quad (\text{A.54.b})$$

Ce qui donne l'expression de la sous-matrice $\mathbf{R}_{\mathbb{W}1}$ de $\mathbf{R}_{\mathbb{WV}}$ dans l'équation (4.13).

Translation du dernier nœud. Les DDL de translation du nœud n peuvent être déterminés selon les mêmes étapes suivies pour le nœud 1. De manière analogue à l'élaboration des équations (A.51) et (A.54), on trouve :

$$\mathbf{U}_n = \frac{1}{k_m} \left\{ \tilde{\mathbf{C}}_5 - \sin\alpha^{(n-1)} b^{(n-1)} \left[\left(\tilde{\mathbf{S}}_3 - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 + \tilde{\mathbf{S}}_4 \right) \mathbf{S}_1 + \left(\tilde{\mathbf{C}}_3 - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 + \tilde{\mathbf{C}}_4 \right) \mathbf{C}_1 \right] \right\} \mathbf{V}$$

$$(\text{A.55})$$

$$\mathbb{W}_n = \frac{1}{k_m} \left\{ \tilde{\mathbf{S}}_5 + \cos\alpha^{(n-1)} b^{(n-1)} \left[\left(\tilde{\mathbf{S}}_3 - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{S}_2 + \tilde{\mathbf{S}}_4 \right) \mathbf{S}_1 + \left(\tilde{\mathbf{C}}_3 - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_2 + \tilde{\mathbf{C}}_4 \right) \mathbf{C}_1 \right] \right\} \mathbf{V}$$

$$(\text{A.56})$$

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{R}_{\mathbf{U}_n} \mathbf{V} \text{ et } \mathbf{W}_n = \mathbf{R}_{\mathbf{W}_n} \mathbf{V} \quad (\text{A.57})$$

Ce qui donne l'expression de la sous-matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{U}_n}$ de $\mathbf{R}_{\mathbf{UV}}$ et celle de la sous-matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{W}_n}$ de $\mathbf{R}_{\mathbf{WV}}$, telles que définies dans l'équation (4.13).

$$\tilde{\mathbf{S}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -s^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_5 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & s^{(n-1)} & -s^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_5 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c^{(n-1)} & -c^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.61})$$

Bibliographie

- Adany, S., (2004). *Buckling mode classification of members with open thin-walled cross sections by using the finite strip method*. Research Report, Johns Hopkins University.
- Adany, S., and B.W. Schafer, (2006a). Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation. *Thin-Walled Structures*, 44, 563–584.
- Adany, S., and B.W. Schafer, (2006b). Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples. *Thin-Walled Structures*, 44, 585–600.
- American Iron and Steel Institute, (AISI), (1999). *Specification for the design of cold-formed steel structural members with commentary*. 1996 edition, supplement no.1. Washington, DC.
- American Iron and Steel Institute, (AISI), (2004a). *North American specification for the design of cold-formed steel structural members*. 2001 edition with supplement 2004 (AISI/COFS/NASPEC 2004) and commentary (AISI/COFS/NASPEC 2004). Washington, DC.
- American Iron and Steel Institute, (AISI), (2004b). *Commentary on Appendix 1 Design of Cold-formed Steel Structural Members with the Direct Strength Method*. American Iron and Steel Institute, Washington, DC.
- Australia Standards (AS), (1993). *Steel Storage Racking*, AS4084.
- Australia Standards / New Zealand Standards (AS/NZS), (1996). *Cold-formed steel structures*. AS/NZS 4600.
- Badawy Abu-Sena, A.B., J.C. Charpman, and P.C. Davidson, (2001). Interaction between critical torsional flexural and lip buckling in channel sections. *Journal of Constructional Steel Research*, 57, 925-944.
- Bathe, K. J., (1982). *Finite elements procedures in engineering analysis*. Prentice Hall Inc., New York.
- Batista, E.M., (1989). *Etude de la stabilité des profils à parois minces et section ouverte de type U et C*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- Bleich, F., (1952). *Buckling strength of metal structures*. New York: McGraw-Hill; p. 167–192.

- Boumechra, N., (1994). *Etude du raidissage longitudinal d'un panneau métallique soumis à une compression, flexion et cisaillement par la méthode des splines bandes finies*. Mémoire de Magister, U.S.T.O, Oran.
- Camotim, D., and R. Gonçalves, (2003). GBT-based local and global buckling analysis of C-section and RHS stainless steel columns. *The Steel Construction Institute*, 82-92.
- CFS (2006). CFS Version 5.0, RSG Software, www.rsgsoftware.com, visited on April 25, 2006.
- Cheung, M.S., G. Akhras, and W. Li, (1999). Thermal buckling analysis of thick anisotropic composite plates by finite strip method. *Structural Engineering and Mechanics*, 7 (5).
- Cheung, Y.K. (1976). *Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon Press, New York.
- Cheung, Y.K., (1997). *Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon Press, New York.
- Chilver, A.H. (1951). The behavior of thin-walled structural members in compression. *Engineering*, pp. 281-282.
- Chilver, A.H. (1953). The stability and strength of thin-walled steel struts. *The Engineer*, pp. 180-183.
- Comité Européen de Normalisation (CEN), (1996). *Eurocode 3: design of steel structures, part 1.3: general rules. Supplementary rules for thin gauge members and sheeting*. ENV 1993-1-3.
- Computers and structures, (2007). SAP v10.
- Cook, R.D., D.S. Malkus, and M.E. Plesha, (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 3rd Ed.
- Davies, J.M., (2000). Recent Advances in cold formed steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 55, 267-288.
- Davies, J.M., and P. Leach, (1992). Some application of generalised beam theory. *11th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, Missouri, 479-501.
- Davies, J.M., and P. Leach, (1994). First-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31, 187-220.
- Davies, J.M., P. Leach, and D. Heinz, (1994). Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31, 221-241.
- Denn, M.M., (1969). *Optimization by variational methods*. McGraw-Hill, New York.
- Dinis, P.B., D. Camotim, and N. Silvestre, (2006). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary branched open sections. *Thin-Walled Structures*, 44, 20-38.

- Djafour, M., (1991). *Utilisation de la méthode des bandes finies dans l'étude du comportement des tôles trapézoïdales minces soumises à la flexion*. Mémoire de magister, USTO, Oran.
- Djafour, M., and A. Megnounif, (1993). *Méthodes numériques de calcul des systèmes propres*. Polycopié, Université de Tlemcen.
- Djafour, M., A. Megnounif, and D. Kerdal, (1999). Elastic stability of built-up columns using the spline finite strip method. *6th International Colloquium on stability and ductility of steel structures SDSS'99*. Timisoara, Romania, 9-11 Septembre 1999, Elsevier Science Ltd, Oxford, 477-484.
- Djafour, M., A. Megnounif, and D. Kerdal, (2001). The compound spline finite strip method for the elastic stability of U and C built-up columns. *International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation (SEMC 2001)*. Cape Town, south Africa, April 2-4 2001, Elsevier Science Ltd, Oxford, 836-842.
- Dubina, D., (2001). The ECBL approach for interactive buckling of thin-walled steel members. *Steel and Composite Structures*, 1, 75-96.
- Elzein, A. (1991). *Plate Stability by Boundary Element Method*. Springer-Verlag, New York.
- Engesser, F., (1889). Die knickfestigkeitgerader stabe *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 35, 455.
- Engesser, F., (1891). Die knickfestigkeitgerader stabe *zentralblatt der bauverwaltung*, 11, 483 Berlin.
- Engesser, F., (1909). Über die Knickfestigkeit von Rahmenstaben *zentralblatt der bauverwaltung*, 29, 136 Berlin.
- ESDEP, (2005). *Lecture 7.6 Built-up columns*. ESDEP, Work Group 7 <http://www.kuleuven.ac.be/bwk/materials/Teaching/master/wg07/l0600.htm>
- Fan, S.C., and Y.K. Cheung, (1983). Analysis of shallow shells by spline finite strip method. *Engineering Structures*, 5, 255-262.
- Gjelsvik, A., (1990). Buckling of built-up columns, with or without stay plates. *Journal Engineering Mechanics*, ASCE. 116(5)
- Gonçalves, R., and D. Camotim, (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers and Structures*, 82, 1473-1484.
- Hancock, G.J. (1978). Local, Distortional and Lateral Buckling of I-Beams. *Journal of the Structural Division*, ASCE. 104(11)
- Hancock, G.J. (1997). Design for Distortional Buckling of Flexural Members. *Thin-Walled Structures*, 27(1), 3-12.
- Hancock, G.J., (2003). Cold-formed steel structures, review article. *Journal of Constructional Steel Research*, 59, 473-487.

- Hancock, G.J., Y.B. Kwon, and E.S. Bernard, (1994). Strength Design Curves for Thin-Walled Sections Undergoing Distortional Buckling. *J. of Constructional Steel Research*, Elsevier, 31(2-3), pp. 169-186.
- Harik, I.E., X. Liu, and R. Ekambaram, (1991). Elastic stability of plates with varying rigidities. *Computers and Structures*, 38 (2) 161-168.
- Harvey, J.M. (1953). Structural strength of thin-walled channel sections. *Engineering*, pp. 291-293.
- Johnston, B. G., (1971). Spaced steel columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE. 95(5).
- Kerdal, D., M. Djafour, and A. Megnounif, (1995a). Stabilité élastique des profils en C soumis à la compression. *Revue Algérie Equipement*, 21, 18-22.
- Kerdal, D., M. Djafour, and A. Megnounif, (1995b). Etude du voilement de profils en U soumis à la compression. *Revue Algérie Equipement*, 22, 7-11.
- Kesti, J., and J.M. Davies, (1999). Local and distortional buckling of thin-walled short columns. *Thin-Walled Structures*, 34, 115-134.
- Key, P.W., and G.J. Hancock (1993). A Finite Strip Method for the Elastic-Plastic Large Displacement Analysis of Thin-Walled and Cold-Formed Steel Sections. *Thin Walled Structures*, 16, 3-29.
- Kim, K.H., and C.K. Choi, (2004). A non-symmetric non-periodic B3-spline finite strip method. *Structural Engineering and Mechanics*, 18 (2).
- Kwon, Y.B., and G.J. Hancock, (1992). Strength Tests of Cold-Formed Channel Sections undergoing Local and Distortional Buckling. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1992, 117(2), pp 1786 – 1803.
- Lau, S.C. and G.J. Hancock, (1985). *Buckling of thin flat walled structures by a spline finite strip method*. Research report N°R487, University of Sidney, Australia.
- Lau, S.C., and G.J. Hancock, (1987). Distortional Buckling Formulas for Channel Columns. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1987, 113(5), pp 1063 – 1078.
- Lau, S.C and G.J. Hancock, (1988). *Inelastic Buckling of Channel Columns in the Distortional Mode*. Research report N°R578, University of Sidney, Australia.
- Liu, Y., and L. Xu, (2005). Storey-based stability analysis of multi-storey unbraced frames. *Structural Engineering and Mechanics*, 19 (6).
- Lue, D.M., T. Yen, and J.L. Liu, (2006). Experimental investigation on built-up columns. *Journal of Constructional Steel Research*, In press.
- Lundquist, E.E., and E.Z. Stowel, (1943). Principles of Moment Distribution Applied to the Stability of Structures Composed of Bars or Plates. *NACA*, L-326.
- MathWorks (2005). MATLAB. Release 14 SP3. www.mathworks.com.

- Ovesy, H.R., S.A.M. GhannadPour, and G. Morada, (2005). Geometric non-linear analysis of composite laminated plates with initial imperfection under end shortening, using two versions of finite strip method. *Composite Structures*, 71 (3-4), 307-314.
- Papangelis, J.P., and G.J. Hancock, (1995). Computer analysis of thin-walled structural members. *Computers and Structures*, 56 (1), 157-176.
- Papangelis, J.P., and G.J. Hancock, (2006). *Thin-wall: cross-section analysis and finite strip analysis of thin-walled structures, thin-wall v2.1*. Center for Advanced Structural Engineering, University of Sidney, <<http://www.civil.usyd.edu.au/case/thinwall>> visited on 2 oct. 2006.
- Paul, M., (1995a). Theoretical and experimental study on buckling of built-up columns. *Journal of engineering mechanics*, ASCE, 121 (10), 1098-1105.
- Paul, M., (1995b). Buckling loads for built-up columns with stay plates. *Journal of engineering mechanics*, ASCE, 121 (11), 1200-1208.
- Plank, R.J., and W.H. Wittrick, (1974). Buckling under Combined Loading of Thin, Flat-Walled Structures by a Complex Finite Strip Method. *Int Jour Num Meth in Engg*, Vol 8, pp 323 – 339.
- Rondal, J., (1984). *Contribution à l'étude de la stabilité des profils creux à parois minces*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- Rondal, J., (2000). Cold formed steel members and structures, general report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55, 155-158.
- Rusch, A., and J. Lindner, (2001). Remarks to the direct strength method. *Thin-Walled Structures*, 39, 807-820.
- Schafer, B.W., (1997). *Cold-Formed Steel Behavior and Design: Analytical and Numerical Modeling of Elements and Members with Longitudinal Stiffeners*. Ph.D. Thesis. Cornell University. Ithaca, New York.
- Schafer, B.W., (2000). *Distortional buckling of cold-formed steel columns*. Final report, AISI.
- Schafer, B.W., (2002). *Design manual for Direct Strength Method of cold-formed steel design*. Draft - January 7, 2002, AISI.
- Schafer, B.W., (2006). *CUFSM: elastic buckling analysis of thin-walled members by finite strip analysis, CUFSM v2.6*. <<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>> visited on 2 oct. 2006.
- Schafer, B.W., and S. Adany, (2006). Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. *18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, October 26-27, 2006, Orlando, Florida.
- Schafer, B.W., and T. Peköz, (1998). Direct strength prediction of cold formed steel members using numerical elastic buckling solutions. *2nd International conference on thin-*

- walled structures: *Thin-walled structures, research and development*. Singapore, Elsevier Science Ltd, Oxford, 137-144.
- Schafer; B. W., A. Sarawit; and T. Peköz (2006). Complex Edge Stiffeners for Thin-Walled Members. *Journal of structural engineering*, ASCE, 123 (2), 212-226.
- Schardt, R., (1989). *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Springer, Berlin. (in German).
- Sharp, M.L., (1966). Longitudinal Stiffeners for Compression Members. *J. of the Structural Div.*, ASCE, 92(ST5), pp. 187-211.
- Silvestre, N., and D. Camotim, (2002a). First Order Generalized Beam Theory for Arbitrary Orthotropic Materials. *Thin Walled Structures*, 40(9), 755-789.
- Silvestre, N., and D. Camotim, (2002b). Second Order Generalised Beam Theory for Arbitrary Orthotropic Materials. *Thin Walled Structures*, 40(9), 791-820.
- Sputo, T., and J. Tovar, (2005). Application of direct strength method to axially loaded perforated cold formed steel studs: Longwave buckling. *Thin-Walled Structures*, 43, 1852-1881.
- Sridharan, S., (2000). Numerical simulation and computational models for coupled instabilities. *3rd International Conference on coupled instabilities in metal structures CIMS'2000*. Lisbon, Portugal. 21-23 Septembere 2000. Imperial College Press, London.
- Teng, J.G., J. Yao, and Y. Zhao, (2003). Distortional buckling of channel beam-columns. *Thin-Walled Structures*, 41, 595-617
- Timoshenko, S. P., and J. M. Gere, (1961). *Theory of elastic stability*. Mc Graw-Hill, New York.
- Tovar, J., and T. Sputo, (2005). Application of direct strength method to axially loaded perforated cold formed steel studs: Distortional and local buckling. *Thin-Walled Structures*, 43, 1882-1912.
- Von Karman, T., E. E. Sechler, and L. H. Donnell, (1932). The Strength of Thin Plates in Compression. *Transactions*, ASME, vol. 54, APM 5405.
- Winter, G., (1947). Strength of Thin Steel Compression Flanges. *Transactions of ASCE*, Paper No. 2305, Trans., 112, 1.
- Yu, C., (2005). *Distortional Buckling of Cold-Formed Steel Members in Bending*. Ph.D. Thesis, Johns Hopkins University, Baltimore, MD.
- Yu, W.W., (2000). *Cold-Formed Steel Design*. John Wiley & Sons, Inc.
- Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, (1991). *The Finite Element Method*. 4th Ed., Mc Graw-Hill, New York.

Liste des Figures

Figure 1.1 Eléments de structures en acier formés à froid ayant des sections ouvertes.....	2
Figure 1.2 Les éléments structuraux en acier formés à froid sont des structures à parois minces.....	2
Figure 1.3 Les deux modes harmoniques : (a) local et (b) distorsionnel.....	3
Figure 1.4 Deux modes Globaux : (a) Flexionnel et (b) Flexionnel – torsionnel.....	4
Figure 1.5 Sections composées (a) ouvertes et (b) fermées.....	7
Figure 2.1 Voilement d’une section en C uniformément comprimée.....	11
Figure 2.2 Instabilité distorsionnelle d’une section en C uniformément comprimée.....	12
Figure 2.3 Instabilité globales d’une section en C uniformément comprimée.....	13
Figure 2.4 Maillages en éléments finis et en bandes finies.....	15
Figure 2.5 Géométrie, DDL, chargement appliqué et repère local d’une bande finie.....	15
Figure 2.6 Interface du logiciel CUFISM/post-traitement.....	23
Figure 2.7 Interface du logiciel VisASCOP.....	23
Figure 2.8 Géométrie des sections de types U et C.....	24
Figure 2.9 Coefficient de voilement pour une section en U, avec et sans interaction entre les parois (Batista, 1989).....	26
Figure 2.10 Coefficient de voilement pour une section en C (Batista, 1989).....	26
Figure 2.11 Charges critiques d’une section en C.....	27
Figure 2.12 Forme d’instabilité présentant une déformation exagérée du raidisseur.....	28
Figure 2.13 Coefficient de voilement pour une section en C calculé à partir des résultats de VisASCOP et en prenant b_1 comme largeur de référence.....	28
Figure 2.14 Coefficient de voilement pour une section en U calculé à partir des résultats de VisASCOP et en prenant b_1 comme largeur de référence.....	32
Figure 2.15 Coefficient de voilement pour une section en U calculé à partir des résultats de VisASCOP et en prenant b_2 comme largeur de référence.....	33
Figure 2.16 Longueurs de demi-onde pour une section en U.....	34
Figure 2.17 Délimitation de la zone où le voilement de l’âme des sections en C est possible en tant qu’élément raidi. (a) Coefficient de voilement de l’âme K_{v1} . (b) Zone de voilement probable de l’âme.....	36
Figure 2.18 Délimitation des zones où le voilement de la semelle des sections en C est possible en tant qu’élément non raidi et en tant qu’élément raidi. (a) Coefficient de voilement de la semelle K_{v2} . (b) Zones de voilement probable de la semelle.....	37
Figure 2.19 Délimitation de la zone où le voilement du raidisseur des sections en C est possible en tant qu’élément plan non raidi. (a) Coefficient de voilement de la semelle K_{v2} . (b) Zone de voilement probable du raidisseur.....	38
Figure 2.20 Les zones correspondant à différents types d’instabilité des profils en C.....	39
Figure 2.21 Solution Eurocode 3 pour modéliser l’instabilité distorsionnelle : (a) système « réel » (b) système équivalent (CEN/EC3, 1996).....	43
Figure 3.1 L’instabilité distorsionnelle (http://www.civil.usyd.edu.au).....	46

Figure 3.2 Charges critiques d'une section en C.....	47
Figure 3.3 Semelle élastiquement appuyée sur la jonction âme – semelle : (a) section de la colonne étudiée ; (b) semelle isolée.....	50
Figure 3.4 Caractéristiques géométriques des semelles des sections en C et en Z (Schafer 2002).....	54
Figure 3.5 Exemple de maillage MEF d'un profil en C (Yu, 2005).....	56
Figure 3.6 Sections des colonnes étudiées à l'université de Sydney.....	57
Figure 3.7 Charges ultimes des colonnes ayant un mode de ruine distorsionnel (université de Sydney).....	58
Figure 3.8 Elément plan raidi uniformément comprimé.....	60
Figure 3.9 Evolution de la distribution des contraintes lors du chargement d'un élément raidi.....	60
Figure 3.10 Largeur efficace d'un élément plan raidi uniformément comprimé	60
Figure 3.11 Largeurs efficaces de sections en C fléchie et comprimée (les parties noircies sont inefficaces)	61
Figure 3.12 Courbes de résistance pour les instabilités distorsionnelle et locale.	65
Figure 4.1 Sections en C avec et sans raidisseur d'âme (Exemple 1) (Adany, 2004).....	71
Figure 4.2 Charges critiques pour l'exemple 1 (Adany, 2004).	71
Figure 4.3 Formes d'instabilité de l'exemple 1 à une longueur de demi-onde de 850 mm, lieu de l'instabilité distorsionnelle (Adany, 2004).....	72
Figure 4.4 Formes d'instabilité de l'exemple 1 à une longueur de demi-onde de 170 mm. (Adany, 2004).....	72
Figure 4.5 Sections en C avec et sans raidisseur de bord (Exemple 2) (Adany, 2004).....	73
Figure 4.6 Charges critiques pour l'exemple 2 (Adany, 2004).	74
Figure 4.7 Formes d'instabilité de l'exemple 2 correspondant à la charge critique minimum (distorsionnelle) (Adany, 2004).....	74
Figure 4.8 Formes d'instabilité de l'exemple 2 à une longueur de demi-onde de 170 mm. (Adany, 2004).....	74
Figure 4.9 Exemple 3 : Instabilité distorsionnelle d'une section en I ? (Adany, 2004)	76
Figure 4.10 Une courbe des charges critiques avec deux minima locaux (exemple 4) (Adany, 2004).....	78
Figure 4.11 Formes déformées caractéristiques pour l'exemple 4 (Adany, 2004).	78
Figure 4.12 Forces critiques de l'exemple 5 (Adany, 2004).....	79
Figure 4.13 Sections déformées de l'exemple 5 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).	80
Figure 4.14 Forces critiques de l'exemple 6 (Adany, 2004).....	81
Figure 4.15 Sections déformées de l'exemple 6 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).	81
Figure 4.16 Forces critiques de l'exemple 7 (Adany, 2004).....	82
Figure 4.17 Sections déformées de l'exemple 7 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).	82
Figure 4.18 Forces critiques de l'exemple 8 (Adany, 2004).....	83
Figure 4.19 Sections déformées de l'exemple 8 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).	83
Figure 4.20 Forces critiques de l'exemple 9 (Adany, 2004).....	84
Figure 4.21 Sections déformées de l'exemple 9 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).	84
Figure 4.22 Système de coordonnées, Déplacements (Adany et Schafer, 2006a).....	88

Figure 4.23 Description d'une section ouverte à connexions simples (Adany et Schafer, 2006a).....	89
Figure 4.24 Distribution des déplacements longitudinaux (fonctions de gauchissement) pour les modes globaux (Adany et Schafer, 2006a).	92
Figure 4.25 Etat de déformation membranaire général d'une bande dans la MBF (Adany et Schafer, 2006a).....	98
Figure 4.26 Etat de déformation membranaire d'une bande dans le cas de la GBT (Adany et Schafer, 2006a).....	99
Figure 4.27 Section transversale (a) et la poutre continue équivalente sans (b) et avec (c) déformations (Adany et Schafer, 2006a).	103
Figure 4.28 Un nœud interne principal d'une section à connexions multiples avec les bandes et les nœuds principaux adjacents (Adany, 2004).	104
Figure 4.29 Forces critiques des modes purs de l'exemple 4 (Adany 2004).	110
Figure 4.30 Forces critiques des modes purs de l'exemple 5 (Adany 2004).	111
Figure 4.31 Forces critiques des modes purs de l'exemple 6 (Adany 2004).	111
Figure 4.32 Forces critiques des modes purs de l'exemple 7 (Adany 2004).	112
Figure 4.33 Forces critiques des modes purs de l'exemple 8 (Adany 2004).	112
Figure 4.34 Forces critiques des modes purs de l'exemple 9 (Adany 2004).	113
Figure 4.35 Décomposition modale pour l'exemple 5 (Adany 2004).	114
Figure 4.36 Décomposition modale pour l'exemple 9 (Adany 2004).	114
Figure 5.1 Sections déformées de l'exemple 3 à différentes longueurs de demi-ondes (Adany, 2004).	121
Figure 5.2 Forces critiques des modes purs de l'exemple 3 (Adany, 2004).	122
Figure 5.3 Décomposition modale pour l'exemple 3 (Adany 2004).	122
Figure 5.4 Exemple de section en I avec 2 minima locaux et sa décomposition modale la cFSM.	123
Figure 5.5 Sections déformées du profil en I avec deux minima locaux.	123
Figure 5.6 Courbes des forces critiques et décompositions modales pour les exemples 1 (a) et (b) (Adany 2004).	124
Figure 5.7 Courbes des forces critiques et décompositions modales pour les exemples 2 (a) et (b) (Adany 2004).	125
Figure 5.8 Une paroi plane formée par 4 bandes.....	133
Figure 5.9 (a) Une section sigma et (b) son modèle MBF.....	138
Figure 5.10 La matrice \mathbf{R}_{GD} de la section sigma.....	139
Figure 5.11 Forces critiques des modes purs de l'exemple 4.	148
Figure 5.12 Forces critiques des modes purs de l'exemple 5.	149
Figure 5.13 Forces critiques des modes purs de l'exemple 6.	149
Figure 5.14 Forces critiques des modes purs de l'exemple 7.	150
Figure 5.15 Forces critiques des modes purs de l'exemple 8.	150
Figure 5.16 Forces critiques des modes purs de l'exemple 9.	151
Figure 5.17 Exemple 10 : Colonne creuse à section rectangulaire (Camotim et Gonçalves, 2003).	152
Figure 5.18 Forces critiques des modes purs de l'exemple 10.	152
Figure 5.19 Modes purs d'instabilité de l'exemple 10.	152
Figure 5.20 Exemples 11 et 12 : Colonnes à sections fermées avec raidisseurs intermédiaires.	153
Figure 5.21 Forces critiques des modes purs de l'exemple 11.	154
Figure 5.22 Modes d'instabilité de l'exemple 11.	154

Figure 5.23 Forces critiques des 3 premiers modes de l'exemple 12 obtenues par la MBF (en interaction).....	155
Figure 5.24 Décomposition en modes purs du mode 1 de l'exemple 12.....	156
Figure 5.25 Décomposition en modes purs du mode 2 de l'exemple 12.....	156
Figure 5.26 Décomposition en modes purs du mode 3 de l'exemple 12.....	157
Figure 5.27 Modes d'instabilité de l'exemple 12.....	157
Figure 6.1 Colonnes composées	160
Figure 6.2 Modèle de la colonne composée (Paul, 1995a).....	164
Figure 6.3 Systèmes de coordonnées global et locaux.....	164
Figure 6.4 Déplacement d'une section de la colonne.....	164
Figure 6.5 Efforts internes agissant sur la colonne déformée.....	166
Figure 6.6 Equilibres des membrures et de l'âme : (a) membrure supérieure ; (b) âme ; (c) membrure inférieure.....	168
Figure 6.7 Conditions aux limites : (a) Appuis simple avec plaque indéformable ; (b) Encastrement avec plaque indéformable.....	173
Figure 6.8 Colonne composée à laçage en forme de N (ESDEP, 2005).....	182
Figure 6.9 Colonne composée à laçage en forme de A (ESDEP, 2005).....	183
Figure 6.10 Colonne composée à laçage en forme de X (ESDEP, 2005).....	184
Figure 6.11 Colonne à étrésillons (ESDEP, 2005).....	185
Figure 6.12 (a) Une fonctions B3-spline et (b) une combinaison linéaire de B3-splines.....	187
Figure 6.13 Modélisation en bandes d'une structure à parois minces.....	188
Figure 6.14 Une B3-spline Bande finie typique.....	188
Figure 6.15 Une B3-spline Bande finie Chargée longitudinalement.....	192
Figure 6.16 Un élément fini poutre	194
Figure 6.17 Deux bandes connectées par une poutre.....	195
Figure 6.18 Montage expérimental et schéma (Lue et al., 2006).....	199
Figure 6.19 Géométrie de la colonne étudiée.....	200
Figure 6.20 Courbe d'instabilité d'une membrure isolée calculée par la MBF.....	201
Figure 6.21 Une colonne à étrésillons typique et sa modélisation (cet exemple a « 3 étrésillons »).....	202
Figure 6.22 Comparaison des contraintes critiques de modes purs de la colonne composée de longueur 5 m.....	207
Figure 6.23 Comparaison des contraintes critiques de modes purs de la colonne composée de longueur 4 m.....	208
Figure 6.24 Comparaison des contraintes critiques de modes purs de la colonne composée de longueur 3 m.....	209
Figure 6.25 Courbes de stabilité d'une colonne ayant un seul étrésillon.....	210
Figure 6.26 Formes d'instabilité locale de la colonne ayant un seul étrésillon.....	210
Figure A.1 Le nœud i, avec les deux poutres qui y concourent, du système isostatique de base (Adany et Schafer, 2006a).....	219
Figure A.2 Diagrammes des moments fléchissants dus aux inconnues hyperstatiques (Adany et Schafer, 2006a).....	220

Liste des Tableaux

Tableau 2.1 Quelques valeurs du coefficient de voilement des plaques uniformément comprimées et simplement appuyées dans une direction	25
Tableau 2.2 Valeurs limites de b_2 définissant la limite inférieure d'apparition du voilement des sections en U calculées par la méthode simplifiée.	31
Tableau 2.3 Les modes d'instabilité, local, distorsionnel et pour de faibles longueurs de demi-ondes, correspondants à des sections représentatives des 8 zones de la classification.....	41
Tableau 6.1 Les solutions d'Euler et d'Engesser pour différentes conditions aux limites (Paul, 1995b).....	179
Tableau 6.2 Caractéristiques géométriques de la colonne composée et de ses éléments	201
Tableau 6.4 Les 2 modes flexionnels dans le plan XZ.....	203
Tableau 6.3 Les dix premiers modes de la colonne à 9 étrésillons et de longueur 5 m	204
Tableau 6.5 Contraintes critiques de flambement dans le plan YZ des étrésillons.....	205
Tableau 6.6 Minima des courbes de voilement.....	209

ملخص

يُهتم بثلاثة أنواع من الانبعاج القاعدي عند تصميم الأعمدة و الروافد من الحديد المشكل على البارد. يصعب حساب الحمولة المرنة لهته الانبعاجات، لاسيما عندما يخص الأمر بالانبعاج لانحرافي للأشكال المعقدة. فيصبح ضروري استعمال طريقة العناصر المحدودة أو طريقة الشرائط المحدودة. لكن تحليل نتائج الحسابات الرقمية يحتاج إلى خبرة كبيرة كما يوجد احتمال كبير للوقوع في حالات لبس. أول اقتراح في هذه الرسالة هو تقنية للتعرف على نوع الانبعاج المحلي في الأعمدة و الروافد من الحديد المشكل على البارد. يجب من الأخرى وصفها بطريقة لاستبعاد الانبعاجات الغير المحتملة، تم استنتاجها بعد دراسة حول حدود الأشكال.

تم حديثا تطوير طريقة رقمية جديدة (cFSM) لحل مشكلة التعرف على أنواع الانبعاجات و حساب حمولاتها المرنة باستعمال طريقة الشرائط المحدودة. اعتمدت هذه الطريقة على افتراضات GBT التي تعتبر الطريقة النظرية الوحيدة التي تتمكن من عزل الانبعاج لانحرافي. من خلال بعض الأمثلة يتم تبين أن تصنيفات cFSM/GBT قد تؤدي إلى تناقضات مع التصنيف المألوف عند المهندسين. يتم أيضا تبين أن cFSM/GBT قد تعطي تصنيفا غير مستمر لعروض مستمرة.

ترتكز cFSM على مصفوفة إرغام R_{GD} لتعريف الانبعاج لانحرافي. البرهان الأصلي لهذه المصفوفة صعب جدا و جذا مرغما. في هذه الدراسة يتم تقديم برهان آخر يستعمل افتراضا فقط وهو أسهل بكثير من الطريقة الأصلية. أصبحت الطريقة سهلة الفهم و القراءة و لا تحتاج إلى أي تصنيف خاص لعقد النموذج الرقمي. الطريقة الجديدة تحافظ على سهولة التعامل مع ترفيق العقد و الشرائط و التعامل مع خصوصيات الشرائط.

فيما بعد يتم تقديم طريقة جديدة لعزل الانبعاجات القاعدية، تستعمل تعريفات سهلة لأنواع الانبعاج، مستقلة عن الطريقة و عن النموذج الرقمي. هذه الطريقة تتعدى بعض نقائص cFSM. فهي تستطيع مثلا دراسة الأشكال المغلقة التي لا يمكن دراستها ب cFSM و بأغلب الحلول من نوع GBT.

يُهتم آخر جزء من هذه الرسالة بمسألة لم يتم دراستها من قبل، حسب علمنا، بطريقة الشرائط المحدودة، ألا و هي دراسة انبعاج الأعمدة و الروافد المركبة. فيتم تقديم حل رقمي جديد لهذه المسألة. يمكن أن يكون للقناة أي شكل و أن تُربط بأي نوع من أنواع القيود. الطريقة الجديدة تتعامل مع العمود أو الرافد المركب ككل لا يتجزأ كما تمكن من دراسة كل أنواع الانبعاج المحتملة.

كلمات مفتاحية: الانبعاج؛ الحديد المشكل على البارد؛ الانبعاج لانحرافي؛ cFSM؛ الأعمدة و الروافد المركبة

Résumé

Trois types d'instabilité de base doivent être prises en compte dans le dimensionnement des éléments de structures formés à froid. Le calcul des charges critiques élastiques de ces modes de ruine peut être problématique, surtout lorsqu'il s'agit du mode distorsionnel de sections à formes complexes. L'usage des méthodes numériques (MEF, MBF ...) devient alors quasiment inévitable. Néanmoins, l'interprétation des résultats obtenus numériquement peut nécessiter une certaine expertise et des risques de confusion peuvent exister. Dans cette recherche, une technique d'identification du voilement des structures à parois minces est d'abord proposée. Il s'agit plutôt d'une procédure pour éliminer les voilements improbables qui a été déduite suite à des raisonnements sur des situations limites.

Pour résoudre les problèmes de classification des instabilités de base et du calcul de leurs charges critiques par la MBF, une nouvelle méthode numérique a été récemment développée : il s'agit de la cFSM. Cette méthode se base sur des idées tirées de la GBT qui est la seule méthode théorique capable d'isoler le mode distorsionnel. A travers quelques exemples, il est montré que les classifications de la cFSM/GBT peuvent parfois être en contradiction avec la pratique courante et les usages dans l'ingénierie des structures. Il est également montré que la classification cFSM/GBT donne lieu, comme les méthodes d'identification classiques, à des discontinuités dans la classification de phénomènes apparemment continus.

La cFSM repose sur la détermination de la matrice de contrainte R_{GD} définissant l'instabilité distorsionnelle. La démonstration initiale est très compliquée et très contraignante. Dans cette thèse, une autre démonstration utilisant uniquement 2 hypothèses très simples est proposée. Le résultat est une formulation beaucoup plus lisible qui n'utilise aucune classification particulière des nœuds. Elle préserve la flexibilité de la méthode numérique qui est la MBF en laissant libre la numérotation des nœuds, la numérotation des éléments, le choix des caractéristiques géométriques et mécaniques,...

Ensuite, une technique originale de séparation des modes propres est formulée. Elle utilise des définitions des instabilités de base indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle. Cette méthode lève certaines des insuffisances de la cFSM. Elle peut, entre autres, étudier les sections fermées, ce qui est impossible par la cFSM et par la plupart des solutions type GBT.

La dernière partie de cette étude s'intéresse à un problème qui n'a jamais été étudié par la MBF. Il s'agit de la stabilité élastique des colonnes composées. Une nouvelle technique numérique est alors présentée. Les membrures peuvent avoir n'importe quelle section transversale et n'importe quelles conditions d'appui. La méthode considère la colonne composée comme un tout et calcule ses instabilités élastiques en incorporant tous les modes d'instabilité possibles.

Mots clés: Stabilité ; Parois minces ; Instabilité distorsionnelle ; cFSM ; Élément composé.

Abstract

Three basic buckling modes are taken into account in the design of the cold-formed steel members. The calculation of the corresponding elastic critical loads can be problematic, particularly the distortional critical load of members with complex cross sections. The use of numerical methods (FEM, FSM...) becomes almost inevitable. However, the identification of numerical results requires expertise and risks of confusion exist. In this research, the first result is an identification technique of the local buckling modes of thin-walled members. It is rather a method to eliminate improbable local buckling modes which was deduced from analyses of extreme cases.

To identify the basic instabilities and to calculate their critical loads using the finite strip method (FSM), a new numerical method was recently developed: the cFSM. This method uses assumptions from the GBT, which is the only theoretical method able to isolate the distortional mode. In this thesis, it is shown that, sometimes, classifications from the cFSM/GBT can be in contradiction with the current engineering practice. It is also shown that cFSM/GBT classification leads to discontinuities in the classification of apparently continuous phenomena.

The cFSM uses a constraint matrix, R_{GD} , to define the distortional buckling mode. The original formulation is very complicated and very constraining. In this thesis, another demonstration, using only 2 very simple assumptions, is proposed. The resulting formulation is much clearer and does not use any particular classification of the model nodes. It preserves the flexibility of the numerical method (the FSM), i.e. flexibility in node numbering, elements numbering, elements characteristics ...

Next, a new technique to isolate the basic buckling modes is provided. It uses basic instabilities definitions independent from the numerical method and model. This technique eliminates some lacks of the cFSM. For example, it can identify pure buckling modes of members with closed cross sections, which is impossible by the cFSM and common GBT solutions.

The last part of this thesis assesses a problem which was never studied by the FSM. A new technique based on the spline finite strip method is proposed for the elastic stability analysis of built-up columns. The channels can have any arbitrary cross section and any boundary conditions. The method is able to predict buckling solutions for the entire built-up cross section incorporating all the possible failure modes.

Keywords: Stability; Thin-walled; Distortional buckling; cFSM; Built-up member.