



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID –TLEMCEM-
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE
LABORATOIRE D'INGENIERIE DES SYSTEMES MECANQUES ET MATERIAUX



Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Génie Mécanique

Présenté par :

Belalia Sid Ahmed

Thème

Développement d'Eléments Finis Courbés Version-*p* pour les Plaques de Formes Géométriques Arbitraires

Soutenu devant le jury composé de

<i>Président</i>	Mr. MEFTAH Khouane	MCA	UABB. Tlemcen
<i>Directeur de thèse</i>	Mr. HOUMAT Abderrahim	Professeur	UABB. Tlemcen
<i>Examineur</i>	Mr. HADJOUI Abdelhamid	Professeur	UABB. Tlemcen
<i>Examineur</i>	Mr. KERALD Djamel Eddine	Professeur	USTO. Oran
<i>Examineur</i>	Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL. Sidi Bel Abbas
<i>Invité</i>	Mr. CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	UABB. Tlemcen

Année universitaire 2010-2011



*Je dédie cette thèse : À ma famille
À mon épouse
À mon fils Abderrahmène*

Remerciements



Cette thèse a été réalisée au sein de la faculté de Technologie sous la direction de monsieur le professeur Abderrahim Houmat. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses compétences sa confiance, ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité durant mes trois cycles de recherches (Ingénieur, Magister et Doctorat).

Je tiens à remercier les membres du jury, particulièrement monsieur MEFTAH Khouane qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et messieurs les professeurs. Kerdal Djamel Eddine, Hadjoui Abdelhamid et Tounsi Abdelouahed qui ont accepté d'examiner ma thèse.

Enfin mes remerciements vont aussi à tous mes collègues pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme je remercie toute personne de près ou de loin qui ont aidé à la réalisation de cette thèse.

Résumé

Afin de surmonter les difficultés de maillage par éléments finis des plaques avec des formes géométriques complexes, un nouveau élément- p courbé est développé dans cette thèse. Il permet une représentation exacte d'un domaine courbé sans affecter indûment la précision de l'approximation locale à l'aide des fonctions "Mapping". La théorie du premier ordre des plaques en matériaux à gradient fonctionnel et les hypothèses de la non-linéarité géométrique de Von Karman sont utilisées. Le matériau est supposé être dépendant de la température et les propriétés des matériaux varient selon une loi de puissance de distribution le long de l'épaisseur. Les fonctions de forme de l'élément- p triangulaire sont exprimées en termes de polynômes orthogonaux de Legendre déplacés. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange et la méthode de l'équilibre harmonique et sont résolues itérativement par la méthode de linéarisation du mode propre. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences et modes propres des plaques. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de l'élément- p courbé développé. Plusieurs exemples sont traités. Les paramètres de fréquences linéaires et non linéaires sont calculés pour différentes plaques isotropes et en matériaux à gradient fonctionnel avec différentes formes géométriques. Une discussion est établie pour déterminer l'influence des différents paramètres physiques et géométriques et des conditions aux limites sur le comportement nonlinéaire.

Mots clés: Élément- p courbé ; Théorie du premier ordre des plaques ; Vibration des plaques ; Non-linéarité géométrique de Von Karman ; Matériaux à gradient fonctionnel ; Plaque de forme géométrique arbitraire.

Abstract

In order to overcome the difficulties of meshing plates with complex geometrical forms by finite elements, a new curved p -element is developed in this work. It allows an exact representation of a curved domain without unduly affecting the precision of the local approximation using the mapping functions. In the formulation, the first order shear deformation theory of plates with functionally graded materials and the assumptions of the geometrical non-linearity of Von Karman are used. The material is assumed to be temperature dependent and the properties of materials graded in the thickness direction according to the power-law distribution in terms of volume fractions of the constituents. The shape functions of the triangular p -element are expressed in terms of the shifted Legendre orthogonal polynomials. The equations of motion are obtained by applying Lagrange's equations and the harmonic balance method and are solved iteratively. A program is elaborated for the calculation of the eigenvalues and eigenvectors of the system. The results obtained are compared with those available in the literature and show the fast convergence, exactitude and effectiveness of the curved p -element developed. Several examples are treated. The linear and nonlinear frequency parameters are calculated for various isotropic and functionally graded plates with arbitrary geometrical forms. A discussion is established to determine the influence of the physical and geometrical parameters as well as the boundary conditions on the nonlinear behavior.

Key words: Curved p -element ; First order shear deformation theory; Vibration of plates ; Von Karman Geometrical nonlinearity ; Functionally graded Materials ; Plate with arbitrary geometrical form.

ملخص

من أجل التغلب على مشاكل الربط للعناصر المتناهية للصفائح ذوات الاشكال الكيفية، نموذج لعنصر p - منحنى طُوِّرَ في هذه الأطروحة. يُمكن تقديمها دقيقا لمجال منحنى بدون تعيين الدقة للتقريب المحلي بواسطة دالات «Mapping». نظرية الدرجة الاولى للصفائح ذوات المواد المتدرجة وظيفيا «FGM»، ومعطيات اللاخطية هندسية لـ «Von Karman» قد أُستعملت. المادة مفترضة متعلقة بالحرارة، و خصائص المواد تتغير حسب قانون اسي توزيعي تبعا للسُمك. دالات الشكل للعنصر p - المثلي معبرة بكثيرات الحدود المتعامدة المتحركة لـ «Legendre». معادلات الحركة الاهتزازية مُتحصل عليها بتطبيق معادلات «Lagrange» وطريقة التوازن التوافقي «HBM»، ثم حلهم تكرارا بطريقة الجعل الخطي للشكل الخاص «LUM». برنامج عددي أُعد لحساب الذبذبات الخاصة الخطية واللاخطية للصفائح ذوات الاشكال الكيفية، ذوات المواد موحدة الخواص او المواد المتدرجة وظيفيا. النتائج المحصل عليها و المقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع بينت سرعة التقارب، الدقة و فعالية العنصر p - المنحنى المستعمل. عدة أمثلة عُولجت و مناقشة حُققت من أجل تحديد تأثير مختلف العوامل الفيزيائية، الهندسية و الشروط الحدودية للصفحة.

الكلمات المفتاحية : عنصر p - منحنى ؛ نظرية الدرجة الاولى للصفائح ؛ اهتزازات الصفائح ؛ اللاخطية هندسية لـ Von Karman ؛ المواد المتدرجة وظيفيا FGM ؛ الصفائح ذوات الاشكال الكيفية.

Sommaire

Sommaire	i
Liste des figures	v
Listes des tableaux	ix
Listes des symboles	xiii
Introduction	1
Motivation et objectif.....	1
Organisation du document	2
Chapitre 1 : Revue de littérature	
Objectif	4
1.1. Développement et mise en œuvre de la version- p	5
1.1.1. Avantage de la version- p	7
1.1.2. Inconvénients de la version- p	7
1.2. Développement de la théorie du premier ordre des plaques en vibrations	8
1.3. Plaques de formes géométriques arbitraires	11
1.4. Revue des procédés des plaques à gradient fonctionnel	12
1.5. Pourquoi développer un élément- p courbé ?	14
Chapitre 2 : Description de la version-p de la MEF	
Objectif	15
2.1. Introduction.....	16
2.2. Fondements des éléments- p	16
2.2.1. Champs de déplacement.....	16
2.3. Fonctions de forme hiérarchiques.....	18
2.3.1. Éléments unidimensionnels.....	18
2.3.1.1. Polynômes de Legendre déplacés.....	19
2.3.1.2. Fonctions de forme hiérarchiques unidimensionnelles	20
2.3.2. Éléments- p bidimensionnels	22
2.3.2.1. Espaces polynomiaux	22
2.3.2.2. Éléments- p quadrilatéral	23
2.3.2.3. Éléments- p triangulaire	26
2.4. Modélisation géométrique des éléments- p courbés	29
2.4.1. Les fonctions "mapping"	29

2.4.2. Carreaux de Coons	31
2.4.3. Elément quadrilatéral courbé	32
2.4.4. Elément triangulaire courbé	34
2.4.5. Exemples	36

Chapitre 3 : Théorie du matériau à gradient fonctionnel

Objectif	39
3.1. Introduction.....	40
3.2. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel	44

Chapitre 4 : Théorie du premier ordre des plaques

Objectif	50
4.1. Plaques comme structure fondamentale	51
4.1.1. Définition	51
4.1.2. Hypothèses de la théorie du premier ordre des plaques.....	51
4.1.3. Equations cinématiques.....	52
4.1.4. Relations déformation–déplacement.....	53
4.1.5. Equations des efforts et moments	55
4.1.6. Facteurs de correction du cisaillement transversal.....	57
4.1.7. Relations contrainte–déformation	58
4.2. Energie de déformation de la plaque à gradient fonctionnel	59
4.3. Energie cinétique de la plaque à gradient fonctionnel.....	59
4.4. Equations du mouvement.....	60

Chapitre 5 : Modélisation par l'élément- p courbé

Objectif	61
5.1. Formulation par l'élément- p courbé	62
5.1.1. Détermination des matrices de rigidité	63
5.1.1.1. Matrice de rigidité élémentaire extensionnelle	65
5.1.1.2. Matrice de rigidité élémentaire non-linéaire de couplage extension- flexion.....	66
5.1.1.3. Matrice de rigidité élémentaire non-linéaire flexionnelle	67
5.1.1.4. Matrice de rigidité élémentaire linéaire flexionnelle due aux rotations.....	68
5.1.1.5. Matrice de rigidité élémentaire linéaire flexionnelle due au cisaillement transversal.....	69
5.1.1.6. Matrice de rigidité élémentaire linéaire de couplage extension-rotation	70

5.1.1.7. Matrice de rigidité élémentaire linéaire de couplage flexionnel	71
5.1.2. Détermination de la matrice masse	72
5.2. Equations du mouvement périodique et l'application de la méthode de l'équilibrage harmonique	74
5.3. Intégration numérique.....	75
 Chapitre 6 : Description des techniques de programmation	
Objectif	77
6.1. Logiciels et matériel.....	78
6.2. Organigramme	78
6.3. Description du programme	78
6.3.1. Fichiers de données	78
6.3.1.1. Paramètres des éléments.....	78
6.3.1.2. Paramètres physiques	78
6.3.1.3. Paramètres géométriques.....	81
6.3.1.4. Conditions aux limites.....	81
6.3.2. Programmation.....	82
6.3.2.1. Calcul des propriétés des matériaux.....	82
6.3.2.2. Description géométrique de la plaque par l'élément- p	82
6.3.2.3. Formation des matrices $K, \bar{K}, \bar{K}^{-1}, \tilde{K}, M$	83
6.3.2.4. Calcul des coordonnées (ξ_0, η_0) du point dont l'amplitude est maximale.....	83
6.3.2.5. Normalisation du vecteur propre.....	83
6.3.2.6. Formation des matrices de rigidité non-linéaires \hat{K}, \tilde{K}	84
6.3.2.7. Calcul des valeurs propres par la méthode de Jacobi.....	84
6.3.3. Fichiers de sortie	87
6.4. La méthode de linéarisation des modes	87
 Chapitre 7 : Résultats et interprétation	
Objectif	90
7.1. Convergence et validation des résultats de la vibration linéaire.....	91
7.1.1. Convergence.....	91
7.1.1.1. Plaques circulaires.....	91
7.1.1.2. Plaques elliptiques.....	94
7.1.2. Validation.....	94

7.1.2.1. Plaques circulaires	94
7.1.2.2. Plaques elliptiques	95
7.2. Vibration linéaire: étude paramétrique	97
7.2.1. Plaques sectorielles	97
7.2.2. Etude de vibration non-linéaire	103
7.2.2.1. Validation des plaques circulaires	103
7.2.2.2. Validation des plaques elliptiques	104
7.2.2.3. Vibration non-linéaire des plaques sectorielles	105
7.3. Etude des plaques en matériaux à gradient fonctionnel	111
7.3.1. Convergence et validation des plaques à gradient fonctionnel en vibration linéaire	111
7.3.2. Etude de la vibration non linéaire des plaques à gradient fonctionnel	116
7.3.3. Vibration libre d'une plaque à gradient fonctionnel	123
Conclusions	126
Références bibliographiques	128
Annexe A	144
Annexe B	150

Liste des figures

<i>Figure 2.1</i> : Polynôme de Legendre déplacé	20
<i>Figure 2.2</i> : Élément unidimensionnel	20
<i>Figure 2.3</i> : Structure hiérarchique d'une matrice de rigidité correspondant au degré du polynôme $p=3$	21
<i>Figure 2.4</i> : Fonctions de forme hiérarchiques.....	21
<i>Figure 2.5</i> : Famille Serendipity.....	22
<i>Figure 2.6</i> : Famille Lagrange.....	23
<i>Figure 2.7</i> : Élément bidimensionnel quadrilatéral.	23
<i>Figure 2.8</i> : Fonctions de forme des nœuds-sommets.....	24
<i>Figure 2.9</i> : Fonctions de forme quadratiques des côtés.	25
<i>Figure 2.10</i> : Fonctions de forme cubiques des côtés	25
<i>Figure 2.11</i> : Fonctions de forme du 4 ^{ème} ordre des côtés	25
<i>Figure 2.12</i> : Fonctions de forme du 5 ^{ème} ordre des côtés	25
<i>Figure 2.13</i> : Fonctions de forme du 6 ^{ème} ordre des côtés	25
<i>Figure 2.14</i> : Première fonction de forme interne quadratique	25
<i>Figure 2.15</i> : Fonctions de forme internes cubiques	25
<i>Figure 2.16</i> : Fonctions de forme internes du 4 ^{ème} ordre.....	26
<i>Figure 2.17</i> : Élément triangulaire..	26
<i>Figure 2.18</i> : Fonctions de forme des nœuds-sommets.....	27
<i>Figure 2.19</i> : Fonctions de forme quadratiques des côtés.	27
<i>Figure 2.20</i> : Fonctions de forme cubiques des côtés	27
<i>Figure 2.21</i> : Fonctions de forme du 4 ^{ème} ordre des côtés	28
<i>Figure 2.22</i> : Fonctions de forme du 5 ^{ème} ordre des côtés	28
<i>Figure 2.23</i> : Fonctions de forme du 6 ^{ème} ordre des côtés	28
<i>Figure 2.24</i> : Première fonction de forme interne	28
<i>Figure 2.25</i> : Fonctions de forme internes cubiques	28
<i>Figure 2.26</i> : Fonctions de forme internes du 4 ^{ème} ordre.....	29
<i>Figure 2.27</i> : Définition d'un carreau de Coons.....	31
<i>Figure 2.28</i> : Élément quadrilatéral de référence	32
<i>Figure 2.29</i> : Élément triangulaire de référence.....	35
<i>Figure 2.30</i> : Élément quadrilatéral avec deux cotés courbés formant une plaque sectorielle annulaire.....	37
<i>Figure 2.31</i> : Élément triangulaire avec un coté courbé formant un quart d'ellipse	38

Figure 3.1 : Représentation des matériaux existants en fonction de leurs densités ρ et de leurs modules de Young E [Ashby 2005].....	40
Figure 3.2 : Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.....	41
Figure 3.3 : Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section.....	41
Figure 3.4 : Machine (EFF) : a) à base de matière liquide (basse pression); b) à base de matière solide (haute pression)	42
Figure 3.5 : a) une lame à parois minces en rotation dans une turbine ; b) dent d'implantation en matériaux à gradient fonctionnel –Ti/20HAP.	43
Figure 3.6 : Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel	44
Figure 3.7 : Fraction volumique du métal le long de l'épaisseur.....	45
Figure 3.8 : Variation du module de Young en fonction de la température pour le Matériau à gradient fonctionnel (SUS304/Si ₃ N ₄).....	48
Figure 3.9 : Variation du module de Young en fonction de la température pour le matériau à gradient fonctionnel (Ti-AL-4V/Aluminum oxide)	48
Figure 4. 1 : Plaque de forme géométrique arbitraire	51
Figure 4. 2 : Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation selon la théorie du premier ordre des plaques [Reddy (2004)]	53
Figure 4. 3 : Forces et moments agissant sur un élément de plaque	56
Figure 4. 4 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).....	57
Figure 5.1 : Élément triangulaire de référence.....	62
Figure 6.1 : Organigramme du programme élaboré.....	80
Figure 6.2 : Numérotation des nœuds et côtés de l'élément- p	81
Figure 7.1 : Modélisation géométrique d'une plaque elliptique par un élément- p triangulaire courbé.....	91
Figure 7.2 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire encastrée $h/b=0.001$	92
Figure 7.3 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire encastrée $h/b=0.1$	92
Figure 7.4 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire simplement appuyée $h/b=0.001$	93

Figure 7.5 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire simplement appuyée $h/b=0.1$	93
Figure 7.6 : Convergence des paramètres de fréquences fondamentales d'une plaque elliptique encastrée ($h/b=0.001$) pour différentes excentricités (b/a).....	94
Figure 7.7 : Variation du premier paramètre de fréquence d'une plaque elliptique sectorielle en fonction de l'angle ϕ ($a/b=2, h/b=0.05$)	98
Figure 7.8 : Variation du premier paramètre de fréquence d'une plaque elliptique sectorielle en fonction de l'angle ϕ ($a/b=2, h/b=0.1$)	98
Figure 7.9 : Variation du premier paramètre de fréquence d'une plaque elliptique sectorielle en fonction de l'angle ϕ ($a/b=5, h/b=0.05$)	99
Figure 7.10 : Variation du premier paramètre de fréquence d'une plaque elliptique sectorielle en fonction de l'angle ϕ ($a/b=5, h/b=0.1$)	99
Figure 7.11 : Graphes des six premiers modes d'une plaque sectorielle elliptique avec $\phi=30^\circ$: a) $a/b=1$; b) $a/b=2$	100
Figure 7.12 : Graphes des six premiers modes d'une plaque sectorielle elliptique avec $\phi=60^\circ$: a) $a/b=1$; b) $a/b=2$	101
Figure 7.13 : Graphes des six premiers modes d'une plaque sectorielle elliptique avec $\phi=90^\circ$: a) $a/b=1$; b) $a/b=2$	102
Figure 7.14 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle elliptique encastrée avec $a/b=2$: a) $\phi=90^\circ$; b) $\phi=60^\circ$, c) $\phi=30^\circ$	106
Figure 7.15 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle elliptique encastrée avec $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$	107
Figure 7.16 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle elliptique encastrée avec $h/b=0.05$ et $\phi=30^\circ$	108
Figure 7.17 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle circulaire simplement appuyée avec $\phi=90^\circ$	108
Figure 7.18 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle circulaire simplement appuyée avec $\phi=60^\circ$	109
Figure 7.19 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle circulaire simplement appuyée avec $\phi=30^\circ$	109
Figure 7.20 : Courbes d'épine dorsale du 2 ^{ème} mode pour une plaque sectorielle circulaire encastrée avec $\phi=90^\circ$	110
Figure 7.21 : Courbes d'épine dorsale du 3 ^{ème} mode pour une plaque sectorielle circulaire encastrée avec $\phi=90^\circ$	110
Figure 7.22 : Variation des deux premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée en fonction de l'exposant (n) ($\phi=90^\circ, h/b=0.05$)..	115

Figure 7.23 : Variation des deux premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée en fonction de l'exposant (n) ($\phi=60^\circ$, $h/b=0.05$).. 115

Figure 7.24 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque métallique circulaire encastrée : a) $h/b=0.001$; b) $h/b=0.1$ 117

Figure 7.25 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (SUS304/Si₃N₄, $\alpha = 90^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$). 117

Figure 7.26 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (SUS304/Si₃N₄, $\alpha = 60^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$) 118

Figure 7.27 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (Ti-AL-4V/Aluminum oxide, $\alpha = 90^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$). 118

Figure 7.28 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (Ti-AL-4V/Aluminum oxide, $\alpha = 60^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$) 119

Figure 7.29 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (AL/AL₂O₃, $\alpha = 90^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$)..... 119

Figure 7.30 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (AL/AL₂O₃, $\alpha = 60^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$)...... 120

Figure 7.31 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (AL/AL₂O₃, $\alpha = 90^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$)..... 120

Figure 7.32 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (AL/ZrO₂, $\alpha = 60^\circ$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$)..... 121

Figure 7.33 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée ($\alpha = 60^\circ$, $h/b=0.1$, $n=1$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$) 122

Figure 7.34: Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée ($\alpha = 90^\circ$, $h/b=0.1$, $n=1$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$ 122

Figure 7.35: Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée ($\alpha = 60^\circ$, $h/b=0.05$, $T=300$ K, $k=\pi^2/12$)..... 123

Figure 7.36: Géométrie de la plaque arbitraire à gradient fonctionnel 124

Figure 7.37: Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental de la plaque arbitraire à gradient fonctionnel encastrée (SUS304/Si₃N₄, $h=0.1$, $k=\pi^2/12$) 125

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Module d'élasticité du céramique et du métal en Pa pour E_F	46
Tableau 3.2 : Coefficient de Poisson du céramique et du métal pour ν_F	47
Tableau 3.3 : Coefficient de dilatation thermique du céramique et du métal en K^{-1} pour α_F	47
Tableau 3.4 : Conductivité thermique du céramique et du métal en $W\ mK^{-1}$ pour K_F	47
Tableau 3.5 : Propriétés des composants des matériaux à gradient fonctionnel (Zhao el al., 2009).....	49
Tableau 6.1 : Introduction des conditions aux limites des nœuds.....	81
Tableau 6.2 : Introduction des conditions aux limites des côtés.....	82
Tableau 7.1 : Comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque circulaire encastree	95
Tableau 7.2 : Comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque circulaire simplement appuyée	95
Tableau 7.3 : Comparaison des paramètres de fréquences linéaires fondamentales des plaques elliptiques encastrees $h/b=0.001$	96
Tableau 7.4 : Comparaison des six premiers paramètres de fréquences linéaires des plaques elliptiques encastrees.....	96
Tableau 7.5 : Comparaison des rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L pour le mode fondamental des plaques circulaires encastrees.....	103
Tableau 7.6 : Comparaison des rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L pour le mode fondamental des plaques elliptiques encastrees ($a/b=2$).....	105
Tableau 7.7 : Convergence et comparaison des paramètres de fréquences linéaires d'une plaque circulaire à gradient fonctionnel encastree pour différentes valeurs de n ($\nu = 28$ et $T=300K$).....	111
Tableau 7.8 : Comparaison des paramètres de fréquences linéaires d'une plaque circulaire à gradient fonctionnel encastree pour différentes valeurs de n ($\nu = 0.28$ et $T=300K$).....	112
Tableau 7.9 : Paramètres de fréquences linéaires d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel encastree pour différentes valeurs de n ($\alpha =30^\circ$ et $T=300 K$).....	113
Tableau 7.10 : Paramètres de fréquences linéaires d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel encastree pour différentes valeurs de n ($\alpha =60^\circ$ et $T=300 K$).....	113
Tableau 7.11 : Paramètres de fréquences linéaires d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel encastree pour différentes valeurs de n ($\alpha =90^\circ$ et $T=300 K$).....	114
Tableau 7.12 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque à gradient fonctionnel encastree (SUS304/Si ₃ N ₄ , $h=0.1$).....	124

Tableau A.1 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCC) avec $a/b=5$	144
Tableau A.2 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCC) avec $a/b=2$	144
Tableau A.3 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SSS) avec $a/b=5$	145
Tableau A.4 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SSS) avec $a/b=2$	145
Tableau A.5 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCS) avec $a/b=5$	146
Tableau A.6 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCS) avec $a/b=2$	146
Tableau A.7 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SCS) avec $a/b=5$	147
Tableau A.8 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SCS) avec $a/b=2$	147
Tableau A.9 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFC) avec $a/b=5$	148
Tableau A.10 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFC) avec $a/b=2$	148
Tableau A.11 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFS) avec $a/b=5$	149
Tableau A.12 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFS) avec $a/b=2$	149
Tableau B.1 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (SUS304/Si ₃ N ₄ , $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).....	150
Tableau B.2 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (SUS304/Si ₃ N ₄ , $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).....	150
Tableau B.3 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (SUS304/Si ₃ N ₄ , $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).....	151
Tableau B.4 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (SUS304/Si ₃ N ₄ , $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).....	151
Tableau B.5 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (SUS304/Si ₃ N ₄ , $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).....	151

Tableau B.6 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).....152

Tableau B.7 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).....152

Tableau B.8 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).....152

Tableau B.9 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).....153

Tableau B.10 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).....153

Tableau B.11 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).....153

Tableau B.12 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).....154

Tableau B.13 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).....154

Tableau B.14 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).....154

Tableau B.15 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).....155

Tableau B.16 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).....155

Tableau B.17 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).....155

Tableau B.18 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).....156

Tableau B.19 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).....156

Tableau B.20 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).....156

Tableau B.21 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).....157

Tableau B.22 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).....157

Tableau B.23 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).....157

Tableau B.24 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).....158

Liste des symboles

x, y	Coordonnées Cartésiennes.
ξ, η	Coordonnées locales.
a	Demi-grand axe de la plaque elliptique.
b	Demi-petit axe de la plaque elliptique.
h	Épaisseur de la plaque.
ϕ	Angle de secteur.
t	Temps.
\bar{u}	Déplacement longitudinal dans la direction x ,
\bar{v}	Déplacement longitudinal dans la direction y ,
\bar{w}, w	Déplacement transversal dans la direction z ,
u	Déplacement longitudinal dans la direction x pour $z=0$,
v	Déplacement longitudinal dans la direction y pour $z=0$,
θ_x	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x ,
θ_y	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y .
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	Efforts normaux par unité de longueur.
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	Moments de flexion par unité de longueur.
Q_x, Q_y	Efforts tranchants par unité de longueur.
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation.
$[C]$	Matrice d'élasticité.
P_r^*	Polynôme de Legendre déplacé d'ordre r .
n	Nombre des fonctions de forme.

p	Degré du polynôme.
ρ	Densité de masse.
E	Module de Young.
P	Propriétés des matériaux.
ρ_m	Densité du Métal.
E_m	Module de Young du Métal.
$G = E/2(1+\nu)$	Module de cisaillement.
$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$	Rigidité à la flexion.
$C = Eh/(1-\nu^2)$	Rigidité à l'extension.
ν	Coefficient de Poisson.
k	Facteur de correction de cisaillement transversal.
U	Energie de déformation.
T	Energie cinétique.
$\bar{\mathbf{K}}$	Matrice de rigidité extensionnelle.
\mathbf{K}	Matrice de rigidité flexionnelle.
$\hat{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}$	Matrices de rigidités non-linéaires.
\mathbf{K}_{NL}	Matrice de rigidité non-linéaire globale.
$\bar{\mathbf{M}}$	Matrice masse extensionnelle.
\mathbf{M}	Matrice masse flexionnelle.
$\bar{\mathbf{q}}$	Vecteur de déplacement extensionnel.
\mathbf{q}	Vecteur de déplacement flexionnel.
ξ_i, η_j	Abscisses des points de la quadrature de Gauss-Legendre.
w_i, w_j	Poids de la quadrature de Gauss-Legendre.

m	Nombre de points de la quadrature de Gauss-Legendre.
w_{\max}	Amplitude maximale.
ω	Pulsation propre.
$\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$	Paramètre de fréquence pour les plaques isotropes.
$\Omega = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_m(1-\nu^2)}{E_m}}$	Paramètre de fréquence pour les plaques à gradient fonctionnel.

Introduction

Motivation et objectif

Avec l'utilisation croissante des codes d'analyse par éléments finis, l'élaboration d'un code de calcul fiable et robuste à l'usage des ingénieurs est nécessaire. Parmi les méthodes des éléments finis implantées récemment dans ces codes de calcul est la version- p . Cette version s'est imposée pour sa robustesse et sa flexibilité. Elle est utilisée pour résoudre des problèmes complexes de technologie, notamment en mécanique, aéronautique, marine, nucléaire, biomécanique et d'autres domaines de génie civil.

Une telle méthode a fait l'objet d'une recherche approfondie, dans le but d'obtenir des solutions précises, avec un coût minimal de préparation du modèle et de calcul. Dans la version- p , un maillage d'éléments finis est séquentiellement amélioré, de telle sorte que l'erreur de discrétisation soit réduite en vue d'une meilleure précision. L'efficacité de calcul par éléments finis dépend de plusieurs facteurs, notamment le type de maillage, l'estimateur d'erreurs, le solveur d'équations, et la technique de programmation informatique utilisés. Actuellement, certains codes commerciaux à base d'éléments finis ont intégré la version- p qui assure une meilleure précision des résultats. Cependant, l'efficacité de calcul de ces programmes n'a pas encore atteint un point optimal, surtout dans le cas des problèmes à géométries complexes.

L'objectif de cette thèse est le développement d'éléments finis courbé version- p pour la modélisation dynamique des plaques de formes géométriques arbitraires, et plus précisément, le comportement vibratoire non-linéaire des plaques en matériaux à gradient fonctionnel avec la prise en compte des effets de cisaillement transversal, inertie de rotation, non-linéarité géométrique et paramètres physiques et géométriques.

Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée en sept chapitres.

Le premier chapitre présente une vision globale de l'état de l'art du développement de la version- p de la méthode des éléments finis. Après, un historique de la dynamique des plaques basée sur la théorie du premier ordre et les vibrations des plaques en matériau à gradient fonctionnel est présenté.

Le deuxième chapitre présente d'une manière approfondie les particularités de la version- p de la méthode des éléments finis. Ainsi, ces particularités seront utilisées pour les problèmes dynamiques des plaques de formes arbitraires. Ce chapitre commence par une introduction à la version- p avec ses avantages et ses inconvénients suivie d'une description des fonctions de formes hiérarchiques unidimensionnelles et bidimensionnelles utilisées dans cette version, Dans la dernière partie de ce chapitre une modélisation géométrique des éléments- p par des fonctions "Mapping" est présentée.

La présentation de la théorie des matériaux à gradient fonctionnel est donnée dans le troisième chapitre. Le début de ce dernier est réservé à une généralité sur la nécessité d'utiliser les matériaux à gradient fonctionnel. Ensuite, l'état microstructural des matériaux à gradient fonctionnel avec des exemples réels et théoriques est représenté graphiquement. Aussi, une formulation des propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel et de la fraction volumique est donnée en détail. Enfin, un modèle analytique des matériaux à gradient fonctionnel est schématisé graphiquement, et ce pour mieux comprendre la variation des propriétés physiques de ce type de matériaux.

Le quatrième chapitre présente la théorie du premier ordre des plaques et ses hypothèses fondamentales (les hypothèses de Mindlin). Dans ce chapitre, les déplacements, les déformations (hypothèses de van Karman) et les expressions des énergies de déformation et cinétique de la plaque en matériaux à gradient fonctionnel sont déterminés, ainsi que l'équation du mouvement vibratoire libre de la plaque.

Le cinquième chapitre est consacré à la formulation par la version- p de la méthode des éléments finis pour obtenir les matrices de rigidité linéaires, non-linéaires et de masse des plaques épaisses à gradient fonctionnel. Les équations du mouvement vibratoire obtenues en appliquant l'équation de Lagrange et la méthode de l'équilibrage harmonique sont résolues itérativement.

Le sixième chapitre décrit, en détail, le programme de calcul élaboré avec ses différentes étapes. La description de ce chapitre inclut : les logiciels et matériels utilisés (software et hardware), l'organigramme, le dictionnaire des paramètres, les sous-programmes les plus importants, et les fichiers d'entrée et de sortie.

Le septième chapitre présente les différents résultats obtenus par les éléments- p courbés pour différents cas. En premier lieu des exemples de convergence et de validation sont présentés. Ensuite, les vibrations linéaires et non-linéaires des plaques pour quatre types de matériaux à gradient fonctionnel sont étudiées en fonction des paramètres physiques, géométriques, et des conditions aux limites. Cela mène à une discussion profonde sur l'effet de ces paramètres sur le comportement de durcissement.

Cette thèse se termine par une conclusion générale recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les futures perspectives.

Chapitre 1

Revue de littérature

Objectif

L'objectif de ce chapitre est de donner un historique général du développement des calculs par éléments finis basés sur la version-p. Cette méthode a été marquée par différentes étapes importantes telles que l'introduction de la méthode des fonctions de mélange. Un historique détaillé du développement et la mise en œuvre de la version-p avec ses avantages et ses inconvénients est donné dans la première partie de ce chapitre. Dans la deuxième partie un état de l'art très riche de l'évolution de la théorie du premier ordre des plaques en vibrations. Dans la troisième partie de ce chapitre un résumé des travaux trouvés dans la littérature consacrée aux plaques de formes géométriques arbitraires. Vu la naissance récente d'un nouveau matériau composite (matériau à gradient fonctionnel) et son utilisation dans cette thèse, une brève revue bibliographique du développement de ce matériau est présentée dans la quatrième partie. Une réponse à la question ; pourquoi développer un élément-p ? clôture ce chapitre.

1.1. Développement et mise en œuvre de la version- p

Le déploiement de la version- p de la méthode des éléments finis remonte à 1970, lorsque Zienkiewicz et *al.* (1970) ont proposé l'utilisation des éléments avec des ordres variables (appelés éléments de mélange) pour l'analyse tridimensionnelle comme manière efficace d'ajouter des degrés de liberté supplémentaires dans les régions des gradients élevés. Au lieu de créer des noeuds, ils ont créé des variables de bord pour aboutir à une interpolation d'ordre élevé. Ces variables ont également présenté le concept de maillage hiérarchique et le fondement de l'implémentation de la version- p .

Peano (1975,1976) a présenté des familles des fonctions hiérarchiques d'interpolation pour les éléments triangulaires qui, dans la théorie, pourraient être employés pour produire des éléments arbitraires d'ordre supérieur. Les fonctions d'interpolation ont été tracées directement sur un élément réel en utilisant des coordonnées d'aire. Katz et *al.* (1978) et Rossow et Katz (1978) ont prolongé le travail de Peano pour inclure l'idée d'un élément de référence afin d'améliorer l'efficacité informatique. Le traçage des transformations pour les cotés droits de l'élément triangulaire a été présenté. Zienkiewicz et *al.* (1981) ont ressuscité les fonctions d'interpolation présentées en 1970 et ont montré comment des éléments quadrilatéraux hiérarchiques ont pu être formulés. Cette formulation présente certains avantages [Zienkiewicz et *al.* (1981)] :1) la génération d'une discrétisation initiale peut être mise à profit pour le calcul des solutions raffinées; 2) le système d'équations est mieux conditionné; 3) les solutions obtenues sont moins sensibles aux imprécisions numériques. Babuska et *al.* (1981) dans un article principal ont présenté la base mathématique rigoureuse de la version- p . Les auteurs ont présenté le taux asymptotique de convergence de la version- p . Cette évaluation a montré que le taux de convergence de la version- p est deux fois de celui de la version- h . Les années 80 ont été marquées par le développement des codes éléments finis basés sur la version- p ; certains ont été commercialisés, comme par exemple Probe [Szabo (1985)] et Fiesta [Babuska et Suri (1990)]. Bien que moins populaire que la version- h , la version- p est aujourd'hui en plein essor, et de plus en plus de codes- p sont maintenant disponibles sur le marché; parmi les plus diffusés, sont Pro/Mechanica, StressCheck [ESRD 1998] et Ansys. C'est pendant cette même période qu'ont été établis les taux de convergence de l'erreur de la version- p [Gui et Babuska (1986)] et que des estimateurs d'erreur ont été consacrés aux versions $-p$ et $-hp$ [Oden et *al.* (1989)]. Szabo et Babuska (1991) ont publié un livre entièrement consacré à la version- p . Il contient un examen de la version- p dans une et deux

dimensions avec des chapitres sur l'application d'élasto-statique en deux et trois dimensions et la formulation des éléments- p des plaques et des coques.

Comme il est indiqué dans le travail de Campion et Jarvis (1996), la version- p rapproche la variation inconnue par utilisation des solutions avec des polynômes d'ordre élevé. Le nombre d'éléments requis pour utiliser la version- p est nettement inférieur à celui qu'on utiliserait dans la version- h , parce que les approximations d'ordre supérieur permettent de modéliser des variations plus complexes. Ainsi, les éléments- p sont plus grands que les éléments- h , et le mappage géométrique en conséquence est plus exigeant pour les éléments- p . L'approche standard du mappage géométrique isoparamétrique de la version- h est insuffisant.

Lorsque la version- p est utilisée, le maillage reste fixe. Il est donc important pour la précision de modéliser la géométrie de la structure avec un nombre fixe d'éléments. Il faut pour cela une nouvelle méthode qui est capable de décrire des géométries complexes en utilisant seulement quelques éléments. La méthode de la fonction de mélange (Blending Function Method) a été initialement développée par Coons (1964) qui a décrit des méthodes pour construire des surfaces utilisées pour la conception assistée par ordinateur. Gordon (1971) a étendu ce travail, et a présenté une nouvelle classe de méthodes pour l'approximation des fonctions à plusieurs variables. Ces méthodes ont été développées pour la représentation et le rapprochement des formes complexes en conception assistée par ordinateur et à l'application d'usinage à commande numérique. Le concept principal est l'utilisation des fonctions de mélanges en tant que moyens d'approximation. Les fonctions de mélanges employées par Coons (1964) dans son article étaient les fonctions cardinales pour une interpolation de Hermite de deux points par des polynômes de degrés impairs. Gordon (1971) a utilisé une variété de fonctions de mélange dans son document, y compris les fonctions de Hermite et de Lagrange. Gordon et Hall (1973a-b) ont montré comment la méthode de la fonction de mélange pourrait être utilisée pour construire des systèmes de coordonnées curvilignes, et aussi pour décrire des géométries arbitraires.

Le premier travail qui a introduit la méthode de mélange dans la version- p de la MEF est celui de Szabo et Babuska (1990). Le résultat de cette combinaison a donné pour les éléments- p une représentation exacte des bords arbitrairement courbés [Dey et al. (1997), Kirfilyfalvi et Szabo. (1997), Düster et al. (2001)]. Düster et al. (2001) ont présenté une implémentation tridimensionnelle de la version- p pour des problèmes structuraux des solides minces avec des surfaces arbitraires courbées. Houmat (2006) a développé un élément- p

quadrilatéral courbé basé sur des fonctions de forme trigonométriques appliqué à la vibration libre de formes arbitraires de membranes. En se basant sur les mêmes types de fonctions de forme, le même auteur (2008) a fait une analyse de vibration libre dans le plan pour des plaques de formes curvilignes à l'aide d'un élément- p triangulaire courbé.

La version- p de la méthode des éléments finis présente de nombreux avantages [Babuska et Szabo (1982), Babuska et Suri (1990), Szabo et Babuska (1991) et Szabo (1991)] et toutefois certaines limitations.

1.1.1. Avantage de la version- p

- Elle est plus précise et sa convergence est plus rapide que celle de la version- h . Le taux de convergence est parfois exponentiel et parfois algébrique, mais il est toujours plus élevé que celui de la version- h .
- La qualité des solutions est peu sensible aux distorsions des éléments, ce qui permet l'utilisation d'éléments aplatis ou de grand rapport de côtés sans trop pénaliser la précision.
- Aucun verrouillage numérique dû à l'incompressibilité de certains matériaux n'est observé. Cependant, lorsque le coefficient de Poisson est plus proche de 0.5, la convergence asymptotique de la version- p s'obtient à partir d'un degré plus élevé.
- Comme une formulation hiérarchique est adoptée pour la représentation des déplacements, la matrice de rigidité relative à un degré donné imbrique celles de degrés inférieurs. Ceci permet d'obtenir de manière économique une séquence de solutions au lieu d'une seule solution comme le cas de la version- h .
- La géométrie peut être représentée de manière exacte, ce qui évite les erreurs liées à sa modélisation (voir la partie 2.4).
- La tâche de modélisation est réduite car le maillage contient peu d'éléments et peut être directement obtenue par division des structures en macro-éléments.

1.1.2. Inconvénients de la version- p

- Tout d'abord, la version- p convient bien pour une analyse détaillée des composantes d'une structure modérément complexe. En effet, dans ce cas le nombre de points singuliers est souvent réduit et l'on bénéficie pleinement de la vitesse de convergence élevée de la méthode. Un champ de contrainte de qualité supérieure est obtenu avec peu de degrés de liberté, ce qui permet une analyse locale précise. Par contre, la version- h semble plus adéquate pour obtenir une solution globale car le maillage

structuré d'une pièce mécanique comportant plusieurs niveaux de détails est très difficile à réaliser et aboutit souvent à un grand nombre d'éléments.

- Pour des problèmes dont la solution contient un nombre infini de points singuliers, la version- p n'est pas meilleure que la version- h du point de vue de convergence.
- Pour un même nombre de degrés de liberté, la matrice de raideur relative à la version- p est plus dense. Ceci signifie que, pour le même nombre de degrés de liberté, les demandes en mémoire centrale et en temps de calcul. seront plus importantes. Mais en choisissant des méthodes de résolutions appropriées, le gain de précision l'emporte sur l'augmentation du temps de calcul [Carnevali et al. 1993].

1.2. Développement de la théorie du premier ordre des plaques en vibrations

L'étude de la vibration libre des plaques remonte aux années 1800. Chladni (1802), un physicien allemand, a étudié les vibrations d'une plaque carrée avec des cotés complètement libres et a observé le comportement vibratoire de cette plaque. Rayleigh (1877) a présenté sa méthode bien connue avec une solution générale de fréquences propres de vibrations pour plusieurs structures. Ritz a amélioré la procédure de Rayleigh en 1909 en supposant un ensemble de nouvelles fonctions test admissibles. Cette approche est connue sous le nom de la méthode de Rayleigh-Ritz ou la méthode de Ritz. Elle est parmi les méthodes approximatives les plus utilisées dans l'analyse des vibrations des structures.

Depuis lors, il y a eu de grandes recherches sur la vibration des plaques de différentes formes géométriques, avec différentes conditions aux limites et chargements tel que sont rapportés dans les références [Timoshenko et Gere (1961), Hinton (1988), Kim (1988), Liew (1990) et Xiang (1993)] et publications [Dickinson et Di Blasio (1986), Mizusawa et Leonard (1990)]. La plupart de ces travaux utilisent la théorie des plaques minces où les déformations de cisaillement sont négligées, comme le montre la série des références de Leissa (1969,1977a-b,1981a-b,1987), la série de références de Bert pour les plaques sandwichs et composites [Bert (1976,1979,1982,1985,1991a-b)] et d'autres articles de synthèse [Reddy (1985), Kapania et Raciti (1989)]. Cet effet de cisaillement est significatif, cependant, dans les plaques plus épaisses [Mindlin (1951), Srinivas et Rao (1970)]. Lorsque l'effet de cisaillement est ignoré, l'erreur des solutions de vibrations des plaques est élevée. Les recherches sur l'intégration de l'effet cisaillement transversal pour les plaques ont donné beaucoup de théories. La théorie du premier ordre des plaques ou de Reissner-Mindlin [Mindlin (1951), Srinivas et Rao (1970), Reissner (1945)], la théorie modifiée de plaque de

Mindlin donné par Bergan et Wang (1984), Yang *et al.* (1966) et Whitney et Pagano (1970) et d'autres théories d'ordre supérieur telle que proposée par Nelson et Lorch (1974), Lo *et al.* (1977, Levinson (1980), Murthy (1981), Reddy (1984), Senthilnathan (1989) et Doong *et al.* (1991). Dans les théories d'ordre supérieur les champs de déplacements sont développables suivant les puissances de coordonnées d'épaisseur.

Dans l'analyse des vibrations des plaques isotropes épaisses, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est, habituellement, largement suffisante. Bien que dans la théorie, la distribution de la contrainte de cisaillement soit supposée constante à travers l'épaisseur. Cette théorie donne des solutions raisonnablement précises lorsqu'elle est utilisée en conjonction avec un facteur de correction de cisaillement, k . Ce facteur est bien détaillé dans les travaux de Srinivas et Rao (1970) et Senthilnathan *et al.* (1989). Les valeurs de ce facteur, couramment utilisés, sont $k = 5/6$ [Reissner (1954)] et $k = \pi^2/12$ [Mindlin (1951)]. Toutefois, Nanni (1971) a montré que le facteur de correction de cisaillement, k , peut être exprimé en termes de coefficient de Poisson, donnée par $k = 20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2)$. Une étude récente excellente de Noor et Burton (1989) a montré qu'une précision acceptable peut être obtenue pour l'analyse des vibrations libres d'une plaque épaisse en matériaux composites, en utilisant la théorie des plaques de Mindlin, pour voir la possibilité de trouver le facteur de correction de cisaillement. Le sommaire ci-dessus est un aperçu très bref de l'historique de vibration linéaire des plaques basées sur la théorie du premier ordre de plaque. Pour en savoir plus, la monographie de Liew *et al.* (1995) présente un détail riche du développement de la théorie du premier ordre des plaques.

Le lancement de la version- p aux applications de vibrations des plaques revient à Bardell (1991,1992,1999), suivi par d'autres chercheurs [Beslin et Nicolas (1997), Houmat (1997a-b), (2001a-b), Leung et Chan (1998), Woo *et al.* (2003)]. La version- p est devenue un grand support aux problèmes de vibrations de plaques. A noter que les travaux cités précédemment traitent des formes régulières de plaques (carré, rectangle, triangulaire, circulaire et sectoriel).

Avec l'évolution du calcul numérique, des travaux remarquables de recherches dans la vibration des plaques avec divers effets (physiques, types de chargement, etc.) sont produits, parmi ces effets, la non-linéarité géométrique de Von Karman (1910,1932). Dans des travaux récents [Han (1993), Han et Petyt (1997a-b), Ribeiro (1998)], un modèle a été développé pour l'étude de vibration non-linéaire des plaques sur la base de la version- p de la méthode des éléments finis. Il a été démontré que la version- p nécessite moins de degrés de liberté par

rapport aux autres méthodes. Le premier travail qui applique la méthode des éléments finis hiérarchiques (HFEM) et la méthode de l'équilibre harmonique (HBM) à la vibration non linéaire géométrique des plaques rectangulaires isotropes minces est celui de Han (1993) dans sa thèse. Ribeiro (2003) a fait une étude de vibrations non-linéaire libres des plaques isotropes modérément épaisses par la version- p . Les effets de l'inertie rotatoire, du cisaillement transversal et de la non-linéarité géométrique, dus à des déplacements modérément grands, sont pris en considération par l'auteur. Leung et Zhu (2004) ont présenté un élément- p trapézoïdal pour la vibration non-linéaire libres et forcées des plaques biaises et trapézoïdales de Mindlin.

Dans son article de (2008b) Houmat a employé un élément- p sectoriel pour résoudre le problème de vibration libre à grandes d'amplitudes des plaques sectorielles annulaires composites stratifiées avec des plis orthotropiques. Le même auteur dans son travail de (2009) a étudié la vibration libre non-linéaire d'une plaque elliptique annulaire composite stratifiée avec des plis orthotropiques elliptiques. Les effets des déformations de cisaillement, l'inertie de rotation et la non-linéarité géométrique sont pris en considération. Le problème est résolu numériquement par un nouveau élément- p sectoriel elliptique enrichi par le polynôme de Legendre. Les équations du mouvement libre non-linéaire sont obtenues par la méthode de l'équilibrage harmonique et itérativement résolues par la méthode de linéarisation du mode propre. Un élément- p triangulaire courbé est développé par Belalia et Houmat (2010) pour l'analyse de la vibration libre linéaire et non-linéaire des plaques sectorielles elliptiques isotropes modérément épaisses. La théorie des plaques de Mindlin et les hypothèses de la non-linéarité géométrique de Von Karman sont employées. Des expressions simples des fonctions de forme hiérarchiques pour l'élément- p triangulaire sont données en fonction des polynômes orthogonaux de Legendre déplacés. La géométrie de l'élément- p est représentée exactement par la méthode de la fonction de mélange. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange à l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. La méthode de l'équilibre harmonique est utilisée et le système d'équations est résolu par itération. Les résultats pour les fréquences linéaires fondamentales des plaques elliptiques encadrées ont montré la convergence rapide et l'exactitude élevée de l'élément proposé. Des valeurs nouvelles pour les six premières fréquences linéaires et leurs formes modales associées à des plaques sectorielles elliptiques encadrées ont été également obtenues. Les effets des paramètres géométriques tels que l'excentricité d'ellipse, le rapport d'épaisseur et l'angle de secteur sur les courbes d'épine dorsale ont été examinés.

1.3. Plaques de formes géométriques arbitraires

La géométrie de la plaque joue un rôle très important dans le choix des méthodes de résolution des problèmes de vibration des plaques. En conséquence, diverses méthodes comme celle de Rayleigh-Ritz, de Galerkin ainsi que la méthode des éléments finis ont été utilisées selon la convenance des problèmes. Un grand nombre de travaux sur les études de vibrations des plaques est disponible dans la littérature.

D'excellentes recherches ont été faites par Leissa (1969-1977-1981-1987) pour les plaques minces et Liew et *al.* (1995) pour les plaques épaisses. La plupart des études précédentes, cependant, ont été confinées à des plaques de formes simples tels que les plaques carrées, rectangulaires, circulaires, rhombes, triangulaires, etc. Bogner et *al.* (1966) se sont occupés d'un élément très précis mais pour les plaques rectangulaires seulement. Laura et Gutierrez (1976) ont utilisé le tracé isogone [Schinzin (1991)] et ont résolu les vibrations des plaques de formes polygonales régulières. Bucco et Mazumdar (1979) ont étudié le mouvement harmonique des flexions des plaques avec des formes arbitraires en utilisant une combinaison de la méthode des bandes finie et la méthode des contours de déflexion. La méthode des bandes finies [Cheun et Chong (1984)] et la méthode des bandes finies spline [Cheung et *al.* (1989)] ont été également utilisées pour résoudre des problèmes de vibrations liés aux formes arbitraires.

Le groupe de chercheurs chapoté par Liew et *al.* (1991,1992,1993,1995,1998) a, sur la base de l'approche de Ritz, ont effectué beaucoup de travaux numériques et théoriques sur des plaques polygonales régulières, des plaques courbées appuyées, des plaques assemblées de forme arbitraire, des plaques perforées aux coins arrondis et des plaques ayant des bords droits orthogonaux. En outre, Lam et Liew (1992) ont proposé une méthode générale pour estimer les fréquences propres des plaques circulaires et elliptiques, et aussi une méthode numérique précise et efficace pour la vibration libre des plaques elliptiques minces se trouvant sur un appui simple de forme circulaire ou elliptique. Kitipornchai et *al.* (1994) ont utilisé la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour l'étude des vibrations des plaques de formes générales avec des conditions aux limites arbitraires. Les vibrations de plaques arbitraires de plate-forme trapézoïdale ont été étudiées par Kitipornchai et *al.* (1994) et Lim et *al.* (1996). Liew et Liu (1997) ont appliqué la méthode de quadrature différentielle à l'étude statique des plaques de Kirchhoff avec des formes géométriques arbitraires.

L'approche la plus commune dans la méthode des éléments finis pour l'analyse des plaques de géométries arbitraires est d'approcher les bords courbés avec un grand nombre des côtés droits des éléments triangulaires [Anderson (1968), Argyris (1966), Herman (1966), Petyt (1968)] ou de développer des éléments spéciaux permettant une représentation exacte des bords courbés [Olson et Lindberg (1969)]. Chernuka et *al.* (1972) ont utilisé un élément triangulaire avec un des côtés modifiés pour inclure un côté courbé. Raju et Hinton (1980) ont utilisé la théorie des plaques de Mindlin et un élément fini quadrilatéral pour étudier les vibrations non linéaires des plaques épaisses carrées, rectangulaires, circulaires et elliptiques. Mais tous les éléments ci-dessus ne peuvent pas être généralisés pour représenter un côté arbitrairement courbé. Geannakakes (1995) a défini la géométrie des plaques arbitraires avec des coordonnées naturelles pour l'analyse de vibrations libres en utilisant des polynômes orthogonaux normalisés. Un nouvel élément à quatre nœuds a été présenté par Barik et Mukhopadhyay (1998) pour l'analyse de vibrations libres des plaques avec des formes géométriques arbitraires. Houmat (2006,2008) a développé deux éléments- p (quadrilatéral et triangulaire) courbés pour l'applications aux vibrations libres des membranes et des plaques curvilignes avec des formes arbitraires.

1.4. Revue des procédés des plaques à gradient fonctionnel

Depuis le début de l'histoire humaine, les gens ont utilisé les métaux comme le cuivre et le fer pour fabriquer des armes, outils, véhicules et des objets à l'usage quotidien. Cependant, l'utilisation de métaux et leurs alliages a toujours été limitée, en raison de leurs propriétés de résistances faibles à des températures élevées. Cette restriction a nécessité l'utilisation de matériaux de pointe comme les matériaux à gradient fonctionnel qui sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métaux.

Les recherches avancées sur le traitement de la structure des métaux, céramiques, intermétalliques et les composites ont contribué au développement des propriétés et des performances de ces matériaux. Les céramiques, céramiques-métaux et les intermétalliques avancés sont destinés à devenir la base fonctionnelle pour les structures mono-matériel ou multi-matériel complexes [Glaeser (1997)]. Les matériaux à gradient fonctionnel, qui sont d'abord développés par un groupe de chercheurs japonais dans les années 1984 [Yamanouchi et *al.* (1990)], sont des composites de pointe, conçus pour avoir une variation lisse spatiale de propriétés des matériaux afin d'améliorer la performance globale.

Un bref historique de littérature sur les matériaux à gradient fonctionnel prouve que peu d'études ont été effectuées pour étudier le comportement vibratoire des structures à gradient fonctionnel. Praveen et Reddy (1998) ont fait une analyse non linéaire statique et dynamique des plaques en céramique-métal à gradient fonctionnel soumis à des charges transversales dynamiques par la méthode des éléments finis à une température constante. En 2000, Reddy a développé une formulation par éléments finis pour les plaques épaisses à gradient fonctionnel selon la théorie d'ordre élevé de plaques, et a étudié les réponses dynamiques non-linéaires des plaques à gradient fonctionnel soumises à une pression uniforme. Yang et *al.* (2003) ont présenté une analyse de vibration à grande amplitude avec contraintes initiales d'une plaque à gradient fonctionnel avec des couches piézo-électriques en utilisant la méthode de quadrature différentielle et la méthode de Galerkin. Chen (2005), Chen et *al.* (2006), Fung et Chen (2006), et Chen et Tan (2007) ont étudié la vibration à grande amplitude des plaques avec contraintes initiales, avec ou sans imperfections géométriques initiales. Dans leurs études, les contraintes initiales ont été prises pour flexion pure et étirement des plaques. Les formulations ont été basées sur la théorie du premier ordre des plaques et la théorie des plaques minces.

En outre, Allahverdizadeh et *al.* (2008a-c) ont étudié les vibrations non-linéaires libres et forcées des plaques à gradient fonctionnel circulaires minces sur la base de la théorie classique des plaques. Toutefois, dans les références citées ci-dessus [Praveen et Reddy (1998), Reddy (2000), Yang et *al.* (2003), Chen (2005), Chen et *al.* (2006), Chen et Tan (2007), Allahverdizadeh et *al.* (2008a-c)], les propriétés du matériau ont été soit assumées être indépendantes de la température ou prises en compte dans une température constante d'environnement ($T=300$ K). Depuis toujours, les matériaux à gradient fonctionnel sont utilisés dans un environnement à haute température. De ce fait les propriétés du matériau à gradient fonctionnel doivent être dépendants de la température.

Kitipornchai et *al.* (2004) et Yang et Huang (2007) ont étudié respectivement, les vibrations non-linéaires libres et forcées des plaques à gradient fonctionnel stratifiés imparfaites avec différentes conditions aux limites et les propriétés des matériaux dépendent de la température. Les travaux de Huang et Shen (2004, 2006) ont fourni une analyse non-linéaire des vibrations libres et forcées des plaques à gradient fonctionnel composées de couches piézoélectriques dans des environnements thermiques avec la prise en compte du cisaillement transversal. D'autres études sont concernées avec les vibrations libres et forcées des plaques FGM, par exemple [Yang et Shen (2001, 2002), Cheng et Reddy (2003), Vel et

Batra (2004), Kim (2005), Elishakoff et *al.* (2005), Prakash et Ganapathi (2006), Efraim et Eisenberger (2007), Li et *al.* (2008)]. Selon les règles de mélange des matériaux, Abrate (2006) a constaté que les fréquences naturelles des plaques FGM sont proportionnelles à celles de la plaque homogène correspondante.

Jusqu'à maintenant, aucun travail sur le développement et l'application des éléments- p courbés pour les problèmes de vibrations (linéaires et/ou non-linéaire) des plaques épaisses (isotropes et/ou à gradient fonctionnel) de forme géométriques arbitraires n'a vu le jour. C'est la motivation de cette thèse dont l'objectif est de développer des éléments courbés de la version- p pour les plaques de forme géométriques arbitraires.

1.5. Pourquoi développer un élément- p courbé ?

Dans le cadre de calcul des plaques à l'usage mécanique, aéronautique et marin, il est souhaitable de pouvoir prendre en compte des géométries arbitraires afin de modéliser des trous, des défauts géométriques quelconques, ou des formes arbitraires complexes. La modélisation des formes géométriques arbitraires par la version- p est impossible, puisque cette version est basée sur les formes géométriques régulières (carré, rectangle, cercle, etc...). Pour enlever cette contrainte, l'idée consiste à développer des éléments- p courbés polyvalents pour traiter, avec un seul type d'élément, le problème de modélisation cité précédemment. On choisit d'étendre les possibilités d'un élément- p au calcul des plaques. La formulation avec la méthode de la fonction de mélange "blending function" permet de rendre plus simple l'utilisation de l'élément- p . Les degrés de libertés ne sont que des déplacements dans un repère local, ce qui rend plus facile la modélisation du problème des structures complexes ainsi que l'exploitation des résultats.

Chapitre 2

Description de la version-p de la MEF

Objectif

L'objectif de ce chapitre est d'étudier, d'une manière approfondie, les particularités de la version-p de la méthode des éléments finis afin de l'utiliser pour les problèmes dynamiques des plaques avec des formes géométriques arbitraires. Ce chapitre est divisé en plusieurs parties. Une introduction à la version-p est présentée dans la première partie. Dans la deuxième partie, le fondement du déplacement-p est formulé. Les fonctions de formes hiérarchiques utilisées dans la version-p et leurs tracés sont donnés dans la troisième partie pour les cas unidimensionnel et bidimensionnel. Dans la dernière partie, des fonctions "mapping" dans les éléments-p quadrilatéral et triangulaire sont utilisées pour définir la géométrie des plaques.

2.1. Introduction

Le développement des calculs par éléments finis basés sur la version- p a été marqué par différentes étapes importantes. Tout d'abord, Zienkiewicz et *al.* (1970) ont proposé le concept des fonctions de forme hiérarchiques. Il faut attendre l'introduction de la formulation hiérarchique [Peano (1975)] pour déceler la naissance d'une version- p efficace. Les mathématiciens [Babuska et *al.* (1981)] intéressés par la convergence de la version- p ont, établi, ultérieurement, une base théorique solide de celle-ci. Les années 80 ont été marquées par le développement et la commercialisation de codes éléments finis basés sur la version- p [Probe (1985), Fiesta (1990), ESRD (1998) et Ansys]. En 1991, Szabo et Babuska (1991) ont publié un livre consacré principalement à la version- p .

2.2. Fondements des éléments- p

2.2.1. Champs de déplacement

Dans la méthode des éléments finis, un domaine physique continu est divisé en un nombre fini d'éléments. Pour l'analyse de mécanique des solides, un champ de déplacement continu dans chaque élément est exprimé par des fonctions d'approximation et des déplacements aux points choisis dans l'espace de l'élément. Les plus simples de tels points sont les noeuds aux sommets.

Vu la fonction d'approximation la plus simple sous forme linéaire (bilinéaire ou trilinéaire pour des éléments plaque et solide, respectivement), le champ de déplacement de l'élément, $\{u\}$ peut être écrit comme suit [Cook et *al.* (1989)] :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i = [N_i] \{d_i\} \quad (2.1)$$

où "i" indique le numéro du nœud de sommet, $[N_i]$ comprend les fonctions de forme de l'élément d'ordre 1, $\{d_i\}$ est le vecteur des déplacements nodaux inconnus, et "n" est le nombre de nœuds de sommet. En utilisant l'équation de Lagrange appliquées aux énergies (déformation et cinétique), l'équation de vibration libre obtenue par élément fini est :

$$[[K_{ii}] - \omega^2 [M_{ii}]] \{d_i\} = 0 \quad (2.2)$$

où $[K_{ii}]$ et $[M_{ii}]$ sont les matrices de rigidité et de masse élémentaires.

La représentation d'un champ continu pour une structure étudiée par des champs de plusieurs morceaux donne des erreurs dans la solution de discrétisation par éléments finis. Ces erreurs peuvent être réduites par deux approches: en diminuant les tailles des éléments, ou en utilisant des champs d'approximation d'ordre plus élevé.

L'approche conventionnelle en développant un élément d'ordre plus élevé est d'ajouter plus de noeuds. Puis, un nouvel ensemble de fonctions de forme de l'élément est développé pour tous les noeuds. Les fonctions de forme peuvent être générées à partir du polynôme de Lagrange [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Les champs de déplacement des éléments semblables à l'équation (2.1) et l'équation de l'élément fini correspondante peut être écrite comme suit :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^m N_i' d_i' = [N']\{d'\} \quad (2.3)$$

et

$$[[K'] - \omega^2 [M']]\{d'\} = 0 \quad (2.4)$$

où $[N']$ contient toutes les nouvelles fonctions de forme de l'élément d'ordre supérieur à 1, $\{d'\}$ est le vecteur de déplacements nodaux, et "m" est le nombre de tous les noeuds de l'élément, $[K']$ est la nouvelle matrice de rigidité élémentaire et $[M']$ est la nouvelle matrice masse élémentaire. Ceci est présenté sous le nom élément-h d'ordre plus élevé, et habituellement cet ordre ne dépasse pas trois. Un inconvénient de cet élément est qu'un nouvel ensemble de fonctions de forme est exigé au moment de changer l'ordre de l'élément. Tous les calculs tels que les matrices masse et de rigidité élémentaires des vecteurs doivent être répétés.

Une autre approche en développant un élément d'ordre plus élevé est d'utiliser un espace polynomial qui laisse l'ordre du polynôme accroître sans changer l'ordre des polynômes inférieurs existants. Le polynôme de Legendre se trouve dans cette catégorie. Pour être précis, les polynômes de Legendre ont une propriété d'orthogonalité d'un polynôme d'ordre p à tous les ordres inférieurs à p . Les fonctions de forme hiérarchiques, générées à partir du polynôme de Legendre, gardent la propriété d'orthogonalité [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. L'ordre de l'élément évolué peut être obtenu en ajoutant des fonctions de forme d'ordre plus élevé dans les fonctions de forme actuelles de l'élément. Le champ de déplacement de l'élément est semblable à l'équation (2.1) et l'équation de l'élément fini correspondante peut être écrite comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i + \sum_{j=1}^s N_{h,j} d_{h,j} = [N_i]\{d_i\} + [N_h]\{d_h\} \quad (2.5)$$

et

$$\left[\begin{array}{cc} K_{ii} & K_{ih} \\ K_{ih}^T & K_{hh} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} M_{ii} & M_{ih} \\ M_{ih}^T & M_{hh} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_h \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

où $[N_h]$ contient toutes les nouvelles fonctions de forme hiérarchiques introduites, $\{d_h\}$ est le vecteur des déplacements-*p*, "*s*" est le nombre de fonctions de forme hiérarchiques, $[K_{ih}]$, $[K_{hh}]$, $[M_{ih}]$ et $[M_{hh}]$ sont les sous-matrices de rigidité et de masse élémentaires correspondantes aux nouvelles fonctions de forme hiérarchiques introduites. Un avantage d'utiliser les éléments-*p* est que ces éléments peuvent être améliorés efficacement à tout ordre désiré. La sous-matrice $[K_{ij}]$ dans l'équation (2.2), est réutilisée dans l'équation (2.6). Seulement $[K_{ih}]$ et $[K_{hh}]$ sont calculées dans l'équation (2.6). Un inconvénient d'utiliser les éléments-*p* est que les déplacements-*p* obtenus par l'analyse d'élément fini ne sont pas toutes des valeurs globales de déplacement. Seulement les déplacements nodaux, $\{d_i\}$ ont des valeurs globales de déplacement. Le déplacement-*p* est la valeur de l'amplitude de la fonction de forme associée.

2.3. Fonctions de forme hiérarchiques

Les fonctions de forme hiérarchiques ont été introduites pour la première fois par Zienkiewicz, et al (1970). Néanmoins, elles n'ont été mises sous une forme utile qu'en 1975 par Peano. Babuska, et al (1981) qui ont établi une base théorique pour les éléments-*p* en 1981. Après ces travaux, des formes standard de fonctions de forme hiérarchiques ont été représentées dans divers travaux [Babuska et al. (1989), Szabo et Babuska (1991), Zienkiewicz et Taylor (1994)].

2.3.1. Éléments unidimensionnels

Pour un modèle cinématiquement admissible, le champ des déplacements doit être continu. Par conséquent, les fonctions de forme doivent l'être aussi. Pour faciliter les traitements numériques, il faut choisir des fonctions relativement simples, par exemple, des polynômes. De plus, pour réduire l'erreur numérique, il faut que le système d'équations des éléments finis soit bien conditionné, et surtout pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Toutes ces conditions impliquent le choix des fonctions de forme construites à partir des fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés d'orthogonalité tels que les polynômes de Legendre déplacés [Abramowitz et Stegun (1965)].

2.3.1.1 Polynômes de Legendre déplacés

En introduisant d'abord les polynômes orthogonaux de Legendre $P_i(\xi)$ définis entre $[-1, +1]$.

$$P_0(\xi) = 1 \quad (2.7)$$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

Ce sont des solutions de l'équation différentielle suivante pour $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (2.9)$$

Les polynômes de Legendre déplacés forment un ensemble de fonctions analogues aux polynômes de Legendre, mais définis sur l'intervalle $[a, b]$.

$$P_n^*(\xi) = P_n\left(\frac{2\xi - a - b}{b - a}\right), \quad (2.10)$$

Ils sont orthogonaux sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour un intervalle défini entre $[0, 1]$, l'équation (2.10) devient

$$P_n^*(\xi) = P_n(2\xi - 1) \quad (2.11)$$

Ces polynômes présentent les propriétés suivantes :

♣ *Orthogonalité :*

$$\int_0^1 P_n^*(\xi) \cdot P_m^*(\xi) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{1}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases} \quad (2.12)$$

♣ *Formule de récurrence :*

$$P_{n+1}^*(\xi) = \frac{1}{n+1} \left[(-2n-1 + (4n+2)\xi) P_n^*(\xi) - n P_{n-1}^*(\xi) \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

♣ *Normalisation :*

$$P_n^*(1) = 1 \quad (2.14)$$

▲ *Encadrement :*

La figure 2.1 montre le graphe du polynôme de Legendre déplacé $P_n^*(\xi)$ avec $n=1,2,\dots,7$ et $0 \leq \xi \leq 1, \forall n$:

$$|P_n^*(\xi)| \leq 1 \quad \text{pour } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.15)$$

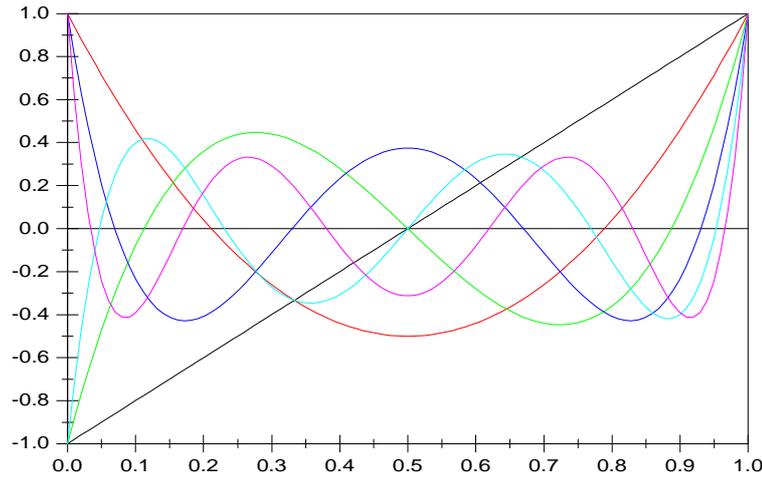


Figure 2.1 : Polynôme de Legendre déplacé.

2.3.1.2. Fonctions de forme hiérarchiques unidimensionnelles

Suivant les caractéristiques des polynômes de Legendre déplacés, on peut obtenir les fonctions de forme hiérarchiques d'un élément unidimensionnel (figure 2.2) :

$$N_1(\xi) = 1 - \xi \quad (2.16.1)$$

$$N_2(\xi) = \xi \quad (2.16.2)$$

$$N_{i+1}(\xi) = \sqrt{2i-1} \int_0^\xi P_{i-1}^*(t) dt \quad i \geq 2 \quad (2.16.3)$$

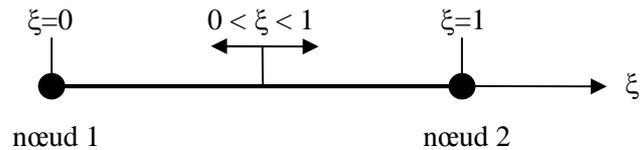


Figure 2.2 : Élément unidimensionnel.

où N_1 et N_2 sont les fonctions de forme des nœuds (1 et 2) de l'élément- p unidimensionnel. Les fonctions N_i , $i=3,4,\dots$ sont des fonctions de forme internes. Les fonctions de forme internes sont nommées 'hiérarchiques' car l'ensemble des fonctions de forme de degré p inclut ceux des degrés inférieurs $p-1, p-2, \dots, 1$. La figure 2.3 illustre la structure hiérarchique d'une matrice de rigidité correspondant au degré du polynôme $p=3$. Les fonctions de forme nodales permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les fonctions de forme hiérarchiques permettent d'enrichir le champ de déplacements à l'intérieur de l'élément.

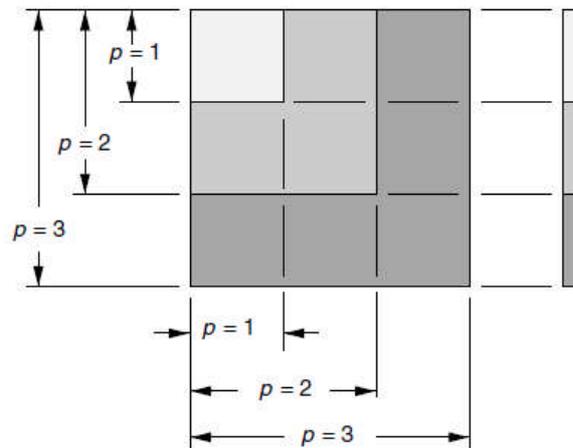


Figure 2.3 : Structure hiérarchique d'une matrice de rigidité correspondant au degré du polynôme $p=3$.

La figure 2.4 illustre les six premières fonctions de forme hiérarchiques interne d'un élément unidimensionnel.

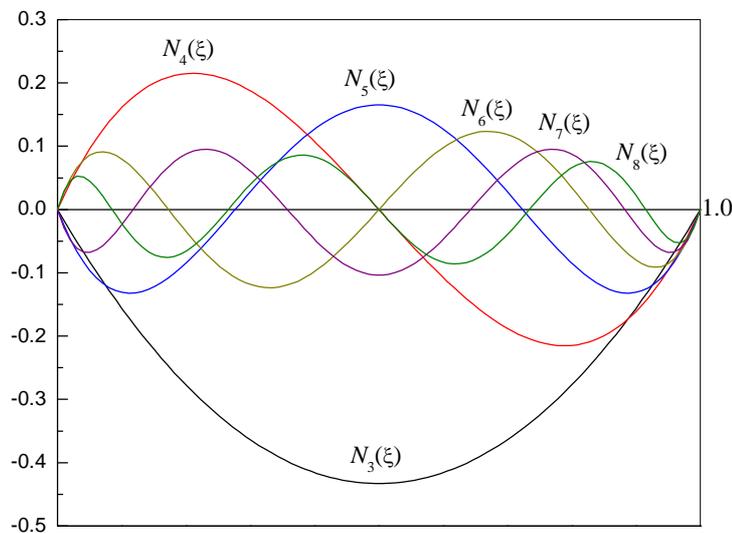


Figure 2.4 : Fonctions de forme hiérarchiques.

2.3.2. Eléments-p bidimensionnels

2.3.2.1. Espaces polynomiaux

Pour un domaine carré ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$), il existe trois familles d'espaces polynomiaux [Zienkiewicz et Taylor (1994)] :

▲ *Famille Serendipity ou espace $S^p(\Omega)$ (Figure 2.5) :*

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i+j = 0, 1, \dots, p$. et en plus, si $p=1$, le monôme $\xi\eta$ et, si $p \geq 2$, les monômes $\xi^p \eta$ et $\xi \eta^p$. Ces monômes supplémentaires n'augmentent pas le degré sur les côtés de l'élément de référence.

▲ *Famille Lagrange ou espace $S^{p,q}(\Omega)$ (Figure 2.6) :*

Il correspond à l'ensemble des monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i = 0, 1, \dots, p$ et $j = 0, 1, \dots, q$.

▲ *Famille mixte ou Espace $\hat{S}^{p,q}(\Omega)$:*

Il est composé de l'ensemble des monômes communs $S^p(\Omega)$ et à $S^{p,q}(\Omega)$;
formellement : $\hat{S}^{p,q}(\Omega) = S^p(\Omega) \cap S^{p,q}(\Omega)$

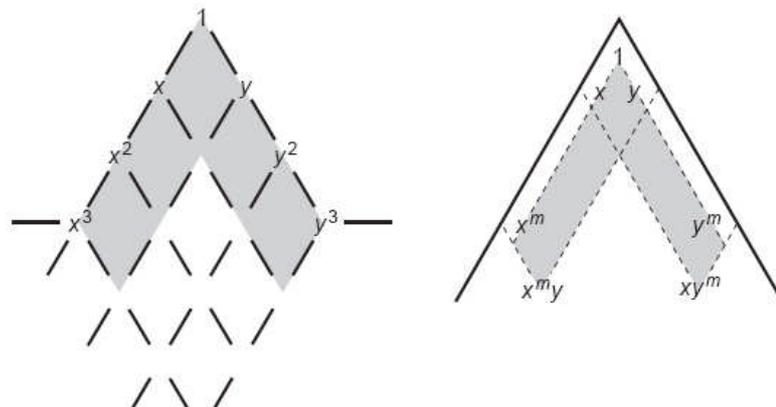


Figure 2.5 : Famille Serendipity.

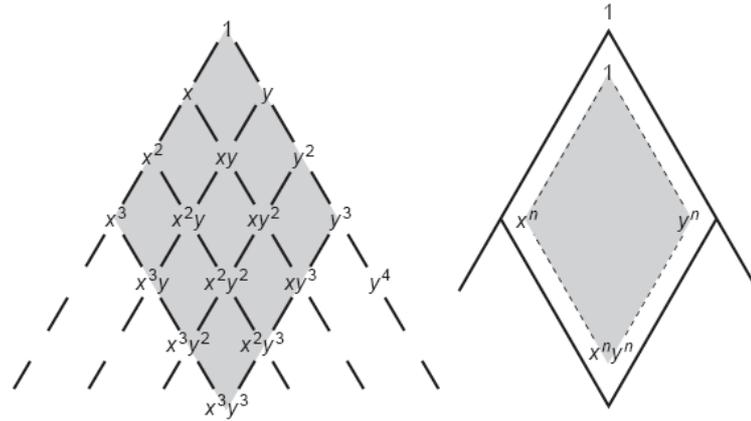


Figure 2.6 : Famille Lagrange.

2.3.2.2. Élément-p quadrilatéral

Un élément quadrilatéral possède quatre nœuds aux sommets, quatre côtés et une face (figure 2.7). Ses fonctions de forme sont obtenues par combinaison des fonctions de forme de deux éléments unidimensionnels avec deux directions différentes (ξ et η), et elles sont divisées en trois groupes correspondant à la géométrie de l'élément comme suit :

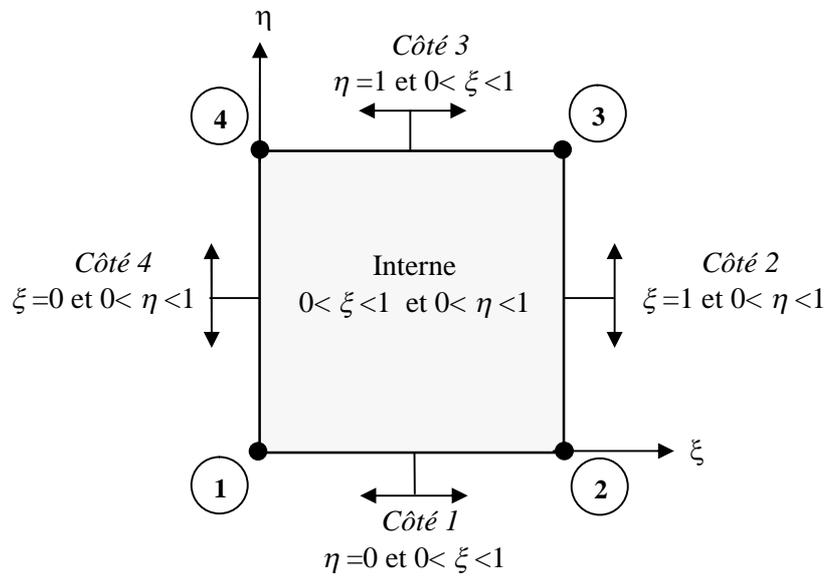


Figure 2.7 : Élément bidimensionnel quadrilatéral.

▲ **Fonctions de forme nodales.**

Il existe quatre fonctions de la forme bilinéaire qui sont les mêmes que les fonctions de forme de l'élément quadrilatéral à quatre nœuds. Les degrés de liberté correspondants sont les déplacements nodaux.

$$\text{Nœud 1 : } N^{n1}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_1(\eta) \quad (2.17.1)$$

$$\text{Nœud 2 : } N^{n2}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_1(\eta) \quad (2.17.2)$$

$$\text{Nœud 3 : } N^{n3}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_2(\eta) \quad (2.17.3)$$

$$\text{Nœud 4 : } N^{n4}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_2(\eta) \quad (2.17.4)$$

▲ **Fonctions de forme des côtés**

Chaque côté contient $(p-1)$ fonctions de forme hiérarchiques :

$$\text{Côté 1 : } N^{c1}(\xi, \eta) = N_1(\eta)N_{i+2}(\xi) \quad (2.18.1)$$

$$\text{Côté 2 : } N^{c2}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_{i+2}(\eta) \quad (2.18.2)$$

$$\text{Côté 3 : } N^{c3}(\xi, \eta) = N_2(\eta)N_{i+2}(\xi) \quad (2.18.3)$$

$$\text{Côté 4 : } N^{c4}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_{i+2}(\eta) \quad (2.18.4)$$

avec $i = 1, \dots, p$

▲ **Fonctions de forme internes**

Il existe $(p-1)(p-1)$ fonctions de forme internes, et elles sont exprimées comme :

$$N^{\text{int}}(\xi, \eta) = N_{i+2}(\xi)N_{j+2}(\eta) \quad (2.19)$$

avec $i, j = 1, \dots, p; i + j = 2, \dots, p$

Quelques exemples de fonctions de forme sont tracés dans les figures 2.8-16 [Solin et al. (2004)] :

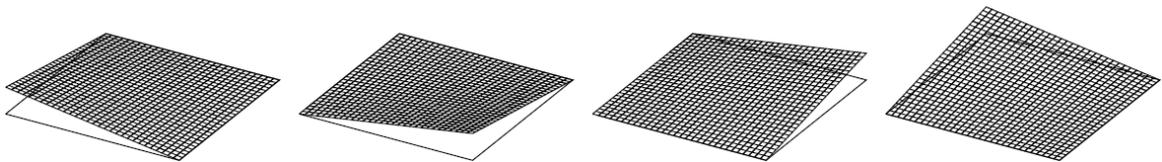


Figure 2.8 : Fonctions de forme des nœuds-sommets.

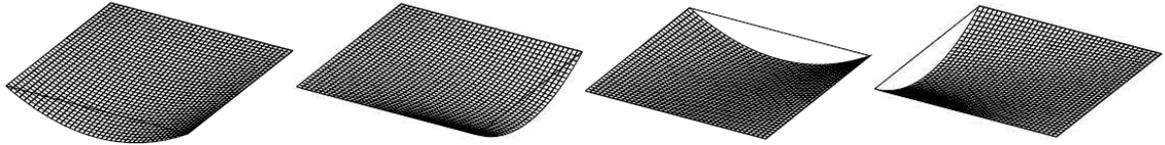


Figure 2.9 : Fonctions de forme quadratiques des côtés.

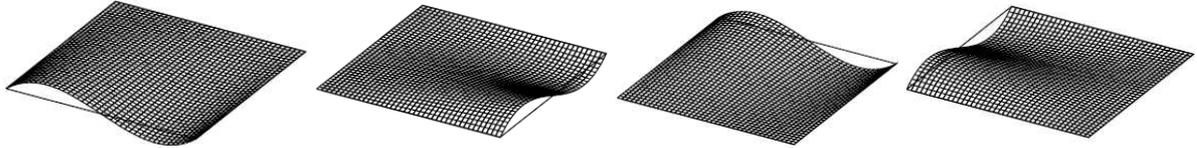


Figure 2.10 : Fonctions de forme cubiques des côtés.

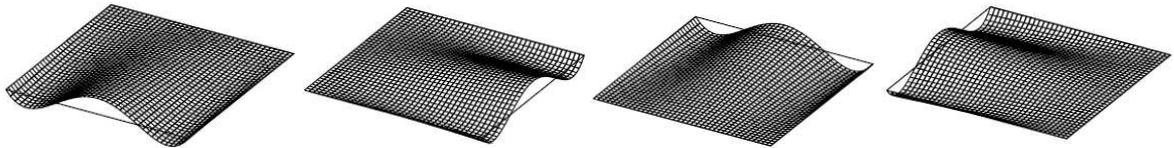


Figure 2.11 : Fonctions de forme du 4^{ème} ordre des côtés.

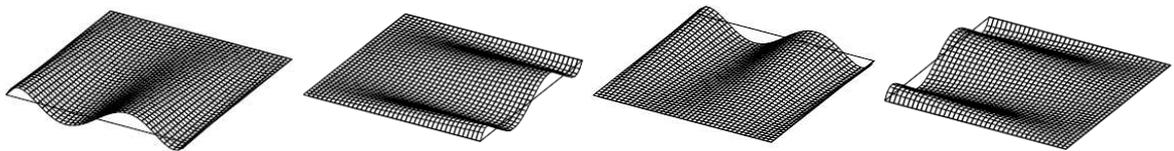


Figure 2.12 : Fonctions de forme du 5^{ème} ordre des côtés.

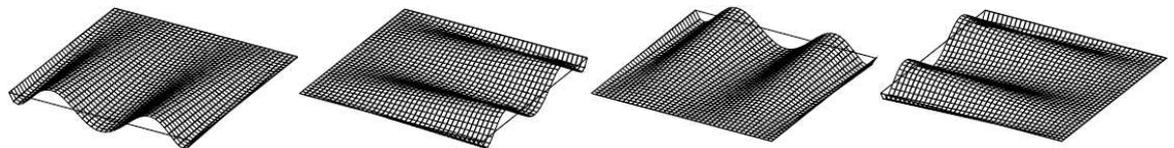


Figure 2.13 : Fonctions de forme du 6^{ème} ordre des côtés.

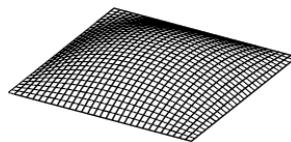


Figure 2.14 : Fonction de forme interne quadratique.

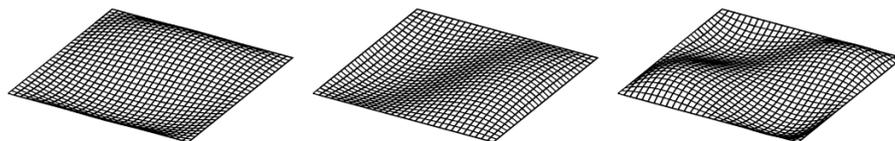


Figure 2.15 : Fonctions de forme internes cubiques.

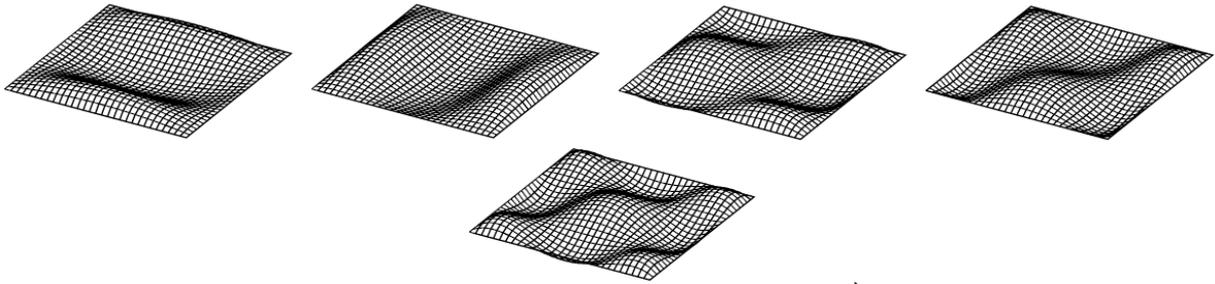


Figure 2.16 : Fonctions de forme internes du 4^{ème} ordre.

2.3.2.3. Élément-p triangulaire

Les propriétés des polynômes de Legendre déplacés permettent l'introduction des fonctions de forme hiérarchiques pour le domaine triangulaire défini dans l'intervalle $[0,1]$, voir la figure (2.17).

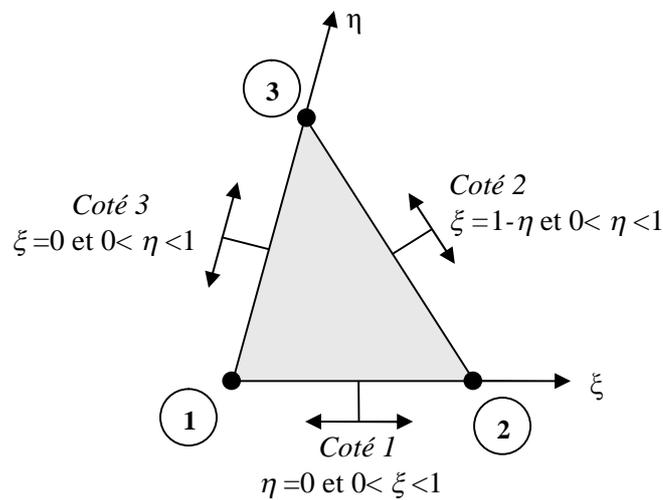


Figure 2.17 : Élément triangulaire.

Les fonctions de forme hiérarchiques peuvent être classées en trois catégories :

▲ Fonctions de forme nodales

Il existe trois fonctions de forme nodales

$$\text{Nœud 1 : } N^{n1}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (2.20.1)$$

$$\text{Nœud 2 : } N^{n2}(\xi, \eta) = \xi \quad (2.20.2)$$

$$\text{Nœud 3 : } N^{n3}(\xi, \eta) = \eta \quad (2.20.3)$$

♣ **Fonctions de forme des côtés**

Chaque côté contient $(p-1)$ fonctions de forme hiérarchiques :

$$\text{Côté 1 : } N^{c1}(\xi, \eta) = \xi(1 - \xi - \eta)P_i^*(\xi) \quad (2.21.1)$$

$$\text{Côté 2 : } N^{c2}(\xi, \eta) = \xi\eta P_i^*(\eta) \quad (2.21.2)$$

$$\text{Côté 3 : } N^{c3}(\xi, \eta) = \eta(1 - \xi - \eta)P_i^*(\eta) \quad (2.21.3)$$

avec $i = 0, \dots, p-2$

♣ **Fonctions de forme internes**

Il existe $(p-1)(p-2)/2$ fonctions forme internes, et elles sont exprimées comme :

$$N^{\text{int}}(\xi, \eta) = \xi\eta(1 - \xi - \eta)P_i^*(\xi)P_j^*(\eta) \quad (2.22)$$

avec $i = 0, \dots, p-3, j = p-i-3$

Les figures 2.18-26 illustrent quelques fonctions de forme (nœuds-sommets, côtés et internes) hiérarchiques de l'élément- p triangulaire [Solin et al. (2004)].

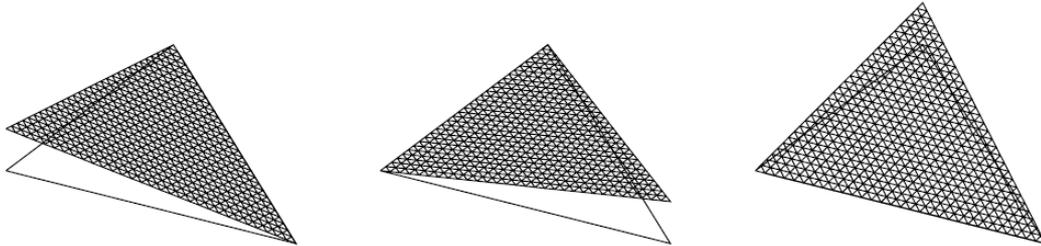


Figure 2.18 : Fonctions de forme des nœuds-sommets.

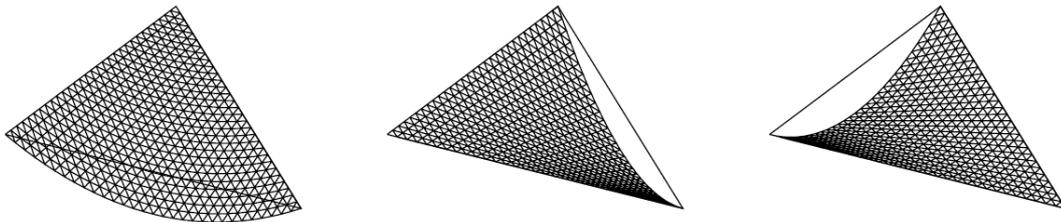


Figure 2.19 : Fonctions de forme quadratiques des côtés.

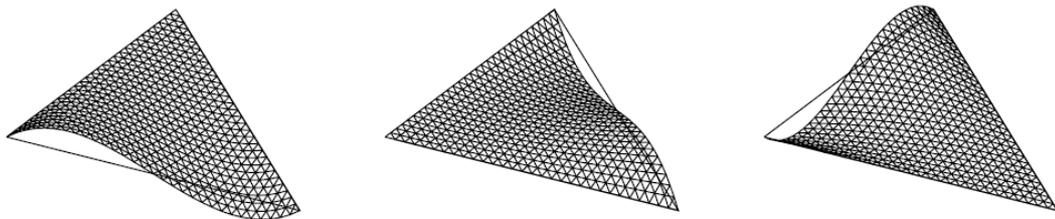


Figure 2.20 : Fonctions de forme cubiques des côtés.

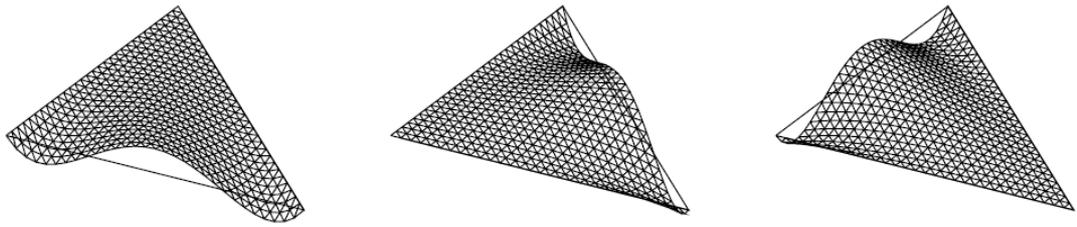


Figure 2.21 : Fonctions de forme du 4^{ème} ordre des côtés.

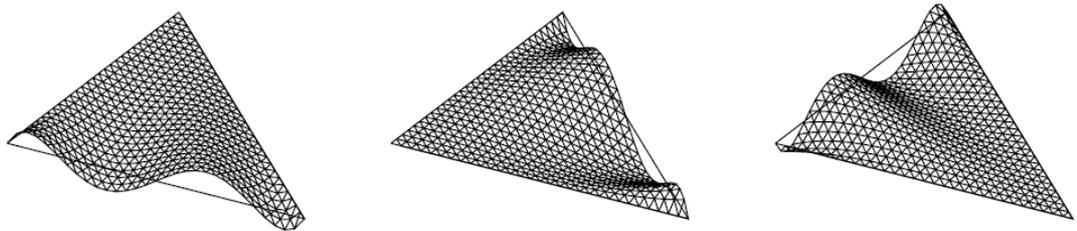


Figure 2.22 : Fonctions de forme du 5^{ème} ordre des côtés.

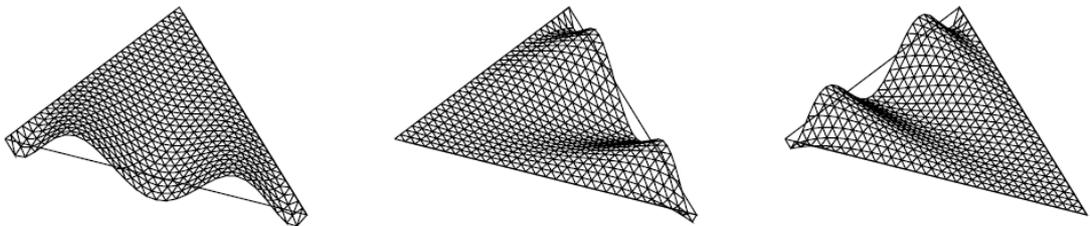


Figure 2.23 : Fonctions de forme du 6^{ème} ordre des côtés.

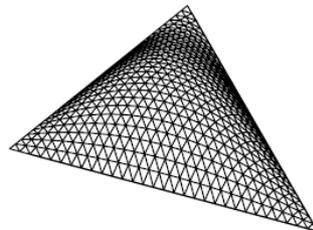


Figure 2.24 : Fonction de forme interne quadratique.

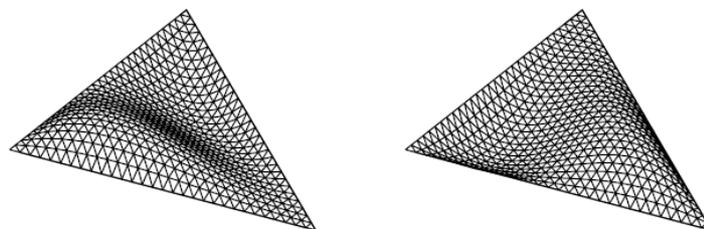


Figure 2.25 : Fonctions de forme internes cubiques.

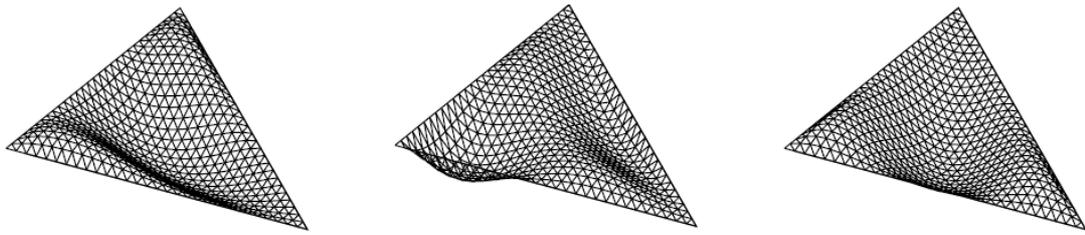


Figure 2.26 : Fonctions de forme internes du 4^{ème} ordre.

2.4. Modélisation géométrique des éléments- p courbés

Lorsque les éléments sont de grande taille, la transformation quadratique isoparamétrique utilisée dans la version- h n'est plus suffisante pour représenter la géométrie souvent complexe des éléments. La surface du domaine maillé est seulement approchée et des singularités géométriques artificielles sont introduites à cause de la faible continuité au niveau des interfaces des éléments [ESRD (1998)]. Afin de remédier à ce problème, il est indispensable d'introduire des fonctions "mapping" plus élaborées où la position d'un élément est définie à partir des fonctions géométriques pour décrire exactement le modèle.

2.4.1. Les fonctions "mapping"

Les fonctions "mapping" des éléments finis paramétriques donnent la relation entre la géométrie réelle des éléments dans le système de coordonnées x, y, z et la géométrie cubique du système de coordonnées locales ξ, η, ζ . Ces fonctions sont utilisées pour générer la matrice Jacobienne de transformation qui est utilisée dans le calcul des différentes matrices et vecteurs élémentaires.

Les détails des fonctions "mapping", le calcul de la matrice jacobienne et leur utilisation dans la formulation des éléments- h isoparamétriques sont clairement décrits dans les ouvrages de référence [Cook et al. (1989) et Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Pour les éléments- p , le calcul et l'utilisation de la matrice Jacobienne suivent la même procédure que celle des éléments- h linéaire. En outre, les fonctions "mapping" d'un éléments- p ayant des côtés droits sont les mêmes que ceux de l'éléments- h . La différence se trouve dans les fonctions "mapping" des côtés courbés ou des faces. Dans un élément- h isoparamétrique, les fonctions d'interpolation utilisées sont les mêmes dans le champ de déplacement de l'élément et dans les fonctions "mapping". Cependant, dans un élément- p , les fonctions "mapping" spéciales qui

fournissent des géométries exactes ou des géométrie très précises sont nécessaires et ceci pour deux raisons:

- 1) Les éléments- p dans un maillage ont généralement une grande taille [Szabo et Babuska (1991)], et
- 2) une précision de la matrice Jacobienne est nécessaire pour le calcul des matrices de rigidité et de masse et le vecteur de charge [Campion et Jarvis (1996)].

Un bref détail des fonctions "mapping" pour un élément- p quadrilatéral à deux dimensions est décrit ci-dessous. Plus de détails peuvent être trouvés dans les deux dernières références citées précédemment.

Pour un élément- p quadrilatéral à côtés droits (un élément quadrilatéral à quatre nœuds), les fonctions "mapping" de coordonnées (x, y) sont des fonctions linéaires des coordonnées du nœud aux sommets, qui peuvent être écrites comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$x = [N_i(\xi, \eta)]\{C_x\} \quad (2.23)$$

$$y = [N_i(\xi, \eta)]\{C_y\} \quad (2.24)$$

où $[N_i]$ sont les fonctions de forme de l'élément, $\{C\}$ sont les coordonnées des nœuds aux sommets de l'élément, et les indices x et y indiquent la relation au système de coordonnées x, y , respectivement. Ces fonctions tracent exactement les coordonnées (x, y) d'un élément quadrilatéral ayant des côtés droits dans le système de coordonnées x, y à partir d'un élément carré dans le système de coordonnées ξ, η . Les fonctions (2.23) et (2.24) sont utilisées pour tous les degrés de l'élément. Par conséquent, un élément- p d'ordre 1, qui a des côtés droits, est un élément isoparamétrique et pour un ordre supérieur à 1, c'est un élément sub-paramétrique [Cook et al. (1989)].

Pour un élément quadrilatéral aux cotés courbés un ordre élevé des fonctions "mapping" est nécessaire. La relation entre les deux systèmes de coordonnées x, y et ξ, η , sont appelées relations curvilignes [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Les fonctions "mapping" curvilignes représentent un élément de côtés courbés dans le système de coordonnées x, y à partir d'un élément de forme carrée dans le système de coordonnées ξ, η . La forme générale des fonctions "mapping" curvilignes peut être écrite comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$x = \Psi_x(\xi, \eta) \quad (2.25)$$

$$y = \Psi_y(\xi, \eta) \quad (2.26)$$

avec Ψ_x et Ψ_y sont les fonctions "mapping" des coordonnées (x, y) . Ces fonctions curvilignes sont appliquées à un élément particulier qui a des côtés courbés. Par exemple, dans un maillage d'une plaque avec un trou transversal, les fonctions "mapping" curvilignes sont appliquées uniquement aux éléments qui définissent le rayon du trou, et les relations (2.23) et (2.24) sont appliquées pour les autres éléments qui ont des côtés droits.

2.4.2. Carreaux de Coons

Au début des années 60, S.A. Coons (1964), a émis une formulation mathématique puissante pour représenter des surfaces transfinies. Cette formulation a été améliorée par la suite [Coons (1987)], et est apparue comme une méthode très générale pour la représentation de surfaces. En effet, outre les surfaces complexes, un bon nombre de surfaces simples peuvent être considérées comme cas particuliers des carreaux de Coons (cylindre, surface réglée, surface de révolution,...).

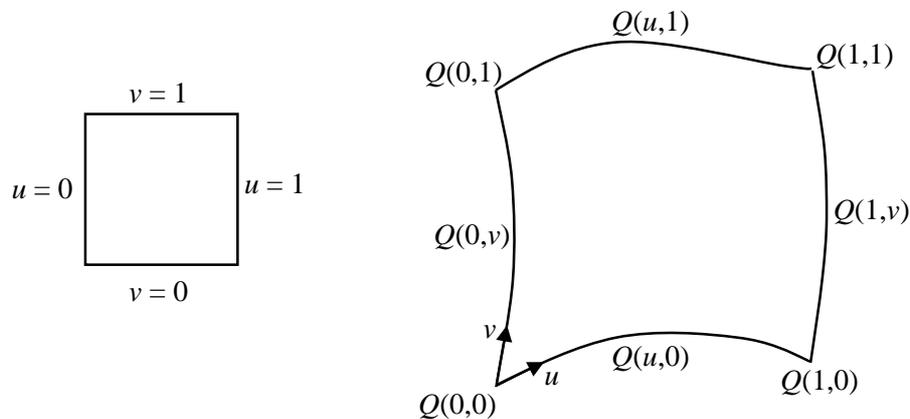


Figure 2.27 : Définition d'un carreau de Coons.

Considérons une surface délimitée par quatre courbes compatibles, c'est-à-dire se coupant aux quatre sommets du carreau (figure 2.27). Soient u et v les deux paramètres utilisés pour définir le carreau ; ils varient entre 0 et 1. Si $\bar{Q}(0,0)$, $\bar{Q}(1,0)$, $\bar{Q}(1,1)$ et $\bar{Q}(0,1)$ définissent les

vecteurs position des quatre coins et $\vec{Q}(u,0)$, $\vec{Q}(1,v)$, $\vec{Q}(u,1)$ et $\vec{Q}(0,v)$ les quatre courbes frontières. Alors, la formule de Coons bilinéaire s'écrit [Yamagushi (1988)] :

$$\begin{aligned} \vec{P}(u,v) = & \vec{Q}(u,0)(1-v) + \vec{Q}(u,1)v + \vec{Q}(0,v)(1-u) + \vec{Q}(1,v)u \\ & - \vec{Q}(0,0)(1-u)(1-v) - \vec{Q}(0,1)(1-u)v - \vec{Q}(1,0)u(1-v) - \vec{Q}(1,1)uv \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cette méthode permet de définir une gamme importante de surfaces complexes, ainsi que la plupart des surfaces simples, et uniquement à partir de la définition de 4 courbes. Pour ces raisons, on implantera la formulation des carreaux de Coons bilinéaires dans les éléments-p utilisés dans ce travail.

2.4.3. Élément quadrilatéral courbé

Un élément quadrilatéral est constitué d'un domaine limité par quatre courbes ($C_1(\xi)$, $C_2(\eta)$, $C_3(\xi)$, $C_4(\eta)$) (Figure 2.28). Il peut être défini par ses quatre nœuds-sommets dont les coordonnées sont désignées par (X_i, Y_i) , $i=1,2,3,4$ qui sont des points de passage des quatre courbes. Deux nœuds-sommets consécutifs sont reliés par une courbe. Deux nœuds-sommets consécutifs sont reliés par une courbe.

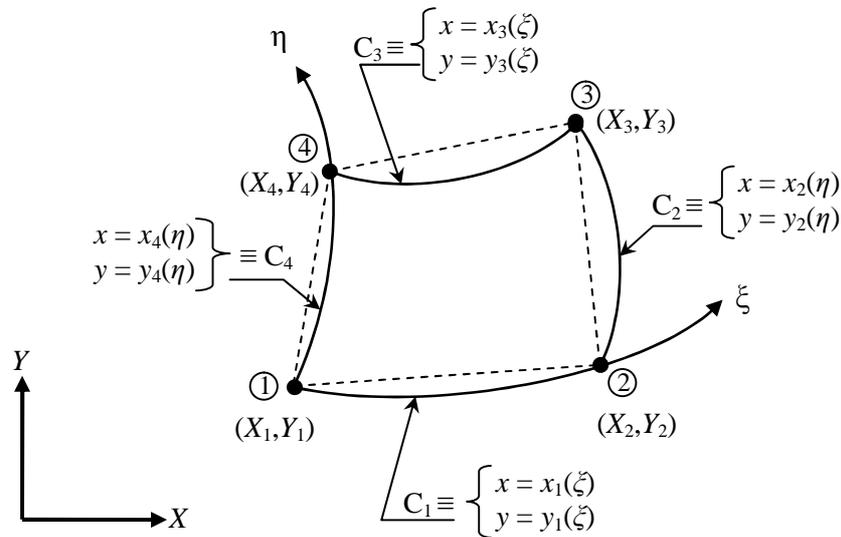


Figure 2.28 : Élément quadrilatéral de référence.

En se basant sur la formule de Coons bilinéaire les coordonnées cartésiennes d'un point (ξ, η) sont évaluées via la méthode des fonctions de mélange "blending function method" :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & (1-\eta)x_1(\xi) + \xi x_2(\eta) + \eta x_3(\xi) + (1-\xi)x_4(\eta) - \\ & (1-\xi)(1-\eta)X_1 - \xi(1-\eta)X_2 - \xi\eta X_3 - (1-\xi)\eta X_4 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$y(\xi, \eta) = (1-\eta)y_1(\xi) + \xi y_2(\eta) + \eta y_3(\xi) + (1-\xi)y_4(\eta) - (1-\xi)(1-\eta)Y_1 - \xi(1-\eta)Y_2 - \xi\eta Y_3 - (1-\xi)\eta Y_4 \quad (2.29)$$

Les transformations des dérivations partielles du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

La matrice Jacobienne de transformation est la matrice des dérivées partielles des coordonnées réelles (x et y) par rapport aux coordonnées locales (ξ et η) dans l'élément de référence. Cette matrice est unique et indépendante du degré d'approximation de l'élément- p . C'est une des raisons pour lesquelles, la géométrie doit être représentée de manière exacte et être définie indépendamment du degré d'approximation du champ des déplacements.

Dans le cas bidimensionnel, la matrice Jacobienne est définie par:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,1}(\xi, \eta) & J_{1,2}(\xi, \eta) \\ J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{2,2}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Les termes de la matrice Jacobienne pour l'élément- p quadrilatéral courbé sont obtenus à partir des équations (2.31)

$$J_{1,1}(\xi, \eta) = (1-\eta) \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} + x_2(\eta) + \eta \frac{dx_3(\xi)}{d\xi} - x_4(\eta) + (1-\eta)X_1 - (1-\eta)X_2 - \eta X_3 + \eta X_4 \quad (2.32.1)$$

$$J_{1,2}(\xi, \eta) = (1-\eta) \frac{dy_1(\xi)}{d\xi} + y_2(\eta) + \eta \frac{dy_3(\xi)}{d\xi} - y_4(\eta) + (1-\eta)Y_1 - (1-\eta)Y_2 - \eta Y_3 + \eta Y_4 \quad (2.32.2)$$

$$J_{2,1}(\xi, \eta) = -x_1(\xi) + \xi \frac{dx_2(\eta)}{d\eta} + x_3(\xi) + (1-\xi) \frac{dx_4(\eta)}{d\eta} + (1-\xi)X_1 + \xi X_2 - \xi X_3 - (1-\xi)X_4 \quad (2.32.3)$$

$$J_{2,2}(\xi, \eta) = -y_1(\xi) + \xi \frac{dy_2(\eta)}{d\eta} + y_3(\xi) + (1-\xi) \frac{dy_4(\eta)}{d\eta} + (1-\xi)Y_1 + \xi Y_2 - \xi Y_3 - (1-\xi)Y_4 \quad (2.32.4)$$

L'équation (2.30) devient

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

où \mathbf{J}^{-1} est la matrice inverse de la matrice Jacobienne donnée par :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{2,2}(\xi, \eta) & -J_{1,2}(\xi, \eta) \\ -J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{1,1}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne est obtenu par :

$$|\mathbf{J}| = J_{1,1}(\xi, \eta)J_{2,2}(\xi, \eta) - J_{1,2}(\xi, \eta)J_{2,1}(\xi, \eta) \quad (2.35)$$

2.4.4. Élément triangulaire courbé

Un triangle courbé est constitué d'un domaine limité par trois courbes ($C_1(\xi)$, $C_2(\xi, \eta)$, $C_2(\eta)$) (figure 2.29). Il peut être défini par ses trois nœuds-sommets dont les coordonnées sont désignées par (X_i, Y_i) , $i=1, 2, 3$ qui sont des points de passage des trois courbes.

La méthode des fonctions de mélange dans le cas de l'élément triangulaire courbé donne les équations cartésiennes en fonction des coordonnées locales comme suit :

$$x(\xi, \eta) = (1-\xi-\eta)X_1 + \xi X_2 + \eta X_3 + \frac{1-\xi-\eta}{1-\xi} (x_1(\xi) - (1-\xi)X_1 - \xi X_2) + \frac{\xi}{1-\eta} (x_2(\eta) - (1-\eta)X_2 - \eta X_3) + \frac{1-\xi-\eta}{1-\eta} (x_3(\eta) - (1-\eta)X_1 - \eta X_3) \quad (2.36)$$

$$y(\xi, \eta) = (1-\xi-\eta)Y_1 + \xi Y_2 + \eta Y_3 + \frac{1-\xi-\eta}{1-\xi} (y_1(\xi) - (1-\xi)Y_1 - \xi Y_2) + \frac{\xi}{1-\eta} (y_2(\eta) - (1-\eta)Y_2 - \eta Y_3) + \frac{1-\xi-\eta}{1-\eta} (y_3(\eta) - (1-\eta)Y_1 - \eta Y_3) \quad (2.37)$$

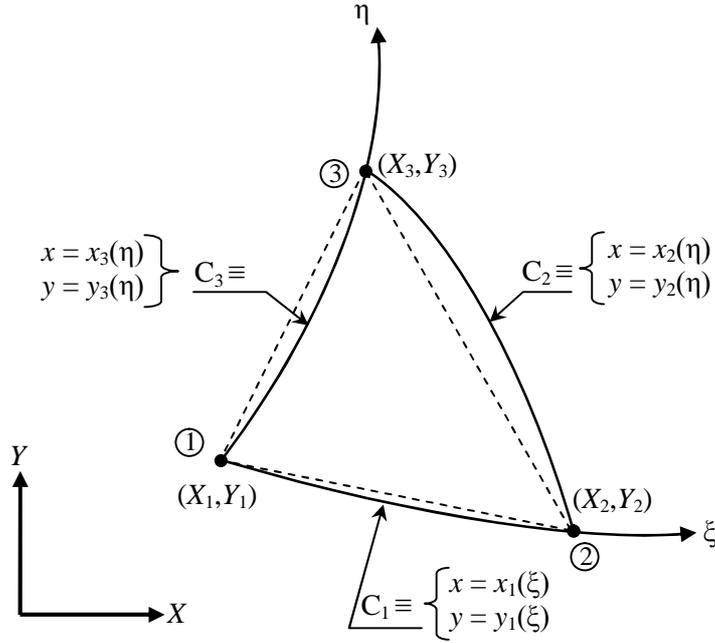


Figure 2.29 : Élément triangulaire de référence.

Les équations précédentes sous forme plus développées deviennent:

$$x(\xi, \eta) = \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1-\xi} x_1(\xi) + \frac{\xi}{1-\eta} x_2(\eta) + \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1-\xi} x_3(\eta) - (1-\xi-\eta)X_1 - \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1-\xi} X_2 \quad (2.38)$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1-\xi} y_1(\xi) + \frac{\xi}{1-\eta} y_2(\eta) + \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1-\xi} y_3(\eta) - (1-\xi-\eta)Y_1 - \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1-\xi} Y_2 \quad (2.39)$$

Les termes de la matrice Jacobienne pour l'élément-p triangulaire courbé sont obtenus à partir des équations (2.31, 2.38 et 2.39) :

$$J_{1,1}(\xi, \eta) = \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} - \frac{\eta}{(1-\xi)} \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} + \frac{\eta}{(1-\xi)^2} x_1(\xi) + \frac{x_2(\eta)}{(1-\eta)} - \frac{x_3(\eta)}{(1-\eta)} + X_1 + \frac{\eta}{(1-\xi)^2} X_2 - X_2 \quad (2.40.1)$$

$$J_{1,2}(\xi, \eta) = \frac{dy_1(\xi)}{d\xi} - \frac{\eta}{(1-\xi)} \frac{dy_1(\xi)}{d\xi} + \frac{\eta}{(1-\xi)^2} y_1(\xi) + \frac{y_2(\eta)}{(1-\eta)} - \frac{y_3(\eta)}{(1-\eta)} + Y_1 + \frac{\eta}{(1-\xi)^2} Y_2 - Y_2 \quad (2.40.2)$$

$$J_{2,1}(\xi, \eta) = -\frac{x_1(\xi)}{(1-\xi)} - \frac{\xi x_2(\eta)}{(1-\eta)^2} - \frac{(2-\xi)x_3(\eta)}{(1-\eta)^2} - \frac{\eta}{(1-\eta)} \frac{dx_3(\eta)}{d\eta} + X_1 + \frac{\xi}{(1-\xi)} X_2 \quad (2.40.3)$$

$$J_{2,2}(\xi, \eta) = -\frac{y_1(\xi)}{(1-\xi)} - \frac{\xi y_2(\eta)}{(1-\eta)^2} - \frac{(2-\xi)y_3(\eta)}{(1-\eta)^2} - \frac{\eta}{(1-\eta)} \frac{dy_3(\eta)}{d\eta} + Y_1 + \frac{\xi}{(1-\xi)} Y_2 \quad (2.40.4)$$

2.4.5. Exemples

Pour bien comprendre l'application des éléments- p courbés aux plaques de formes géométriques arbitraires, on considère deux exemples simples:

- ♣ le premier exemple est un élément quadrilatéral avec deux côtés courbés pour donner une représentation géométrique exacte d'une plaque sectorielle annulaire, la plaque possède ; un rayon intérieur a et un rayon extérieur $a+b$.

Les coordonnées des quatre nœuds-sommets de l'élément sont données par :

$$\text{Nœud 1 :} \quad X_1=a, \quad Y_1=0 \quad (2.41.1-2)$$

$$\text{Nœud 2 :} \quad X_2=a+b, \quad Y_2=0 \quad (2.42.1-2)$$

$$\text{Nœud 3 :} \quad X_3=0, \quad Y_3=a+b \quad (2.43.1-2)$$

$$\text{Nœud 4 :} \quad X_4=0, \quad Y_4=a \quad (2.44.1-2)$$

Les équations des côtés sont obtenues par un calcul purement géométrique :

$$\text{Côté 1 :} \quad x_1(\xi) = a + b\xi, \quad y_1(\xi) = 0 \quad (2.45.1-2)$$

$$\text{Côté 2 :} \quad x_2(\eta) = (a+b)\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad y_2(\eta) = (a+b)\sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (2.46.1-2)$$

$$\text{Côté 3 :} \quad x_3(\xi) = 0, \quad y_3(\xi) = a + b\xi \quad (2.47.1-2)$$

$$\text{Côté 4 :} \quad x_4(\eta) = (a)\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad y_4(\eta) = (a)\sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (2.48.1-2)$$

On injecte les équations obtenues ($X_i, Y_i, x_i(\xi; \eta)$ et $y_i(\xi; \eta)$ avec $i = 1, \dots, 4$) dans les fonctions de mélange du rectangle données par les équations (2.28-29), on obtient le traçage de la plaque sectorielle annulaire (figure 2.30).

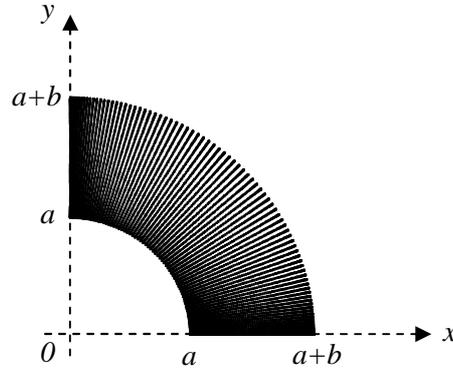


Figure 2.30 : Elément quadrilatéral avec deux côtés courbés formant une plaque sectorielle annulaire.

- ▲ le deuxième exemple est un élément triangulaire avec un côté courbé pour donner une représentation géométrique exacte d'une plaque sectorielle elliptique (figure 2.31), les dimensions de l'ellipse suivant les axes x et y sont $2a$ et $2b$ respectivement, et l'angle du secteur est $\phi = \pi/2$.

Les coordonnées des trois nœuds-sommets de l'élément sont données par :

$$\text{Nœud 1 : } X_1 = 0, Y_1 = 0 \quad (2.49.1-2)$$

$$\text{Nœud 2 : } X_2 = a, Y_2 = 0 \quad (2.50.1-2)$$

$$\text{Nœud 3 : } X_3 = ab / (b^2 + a^2 \tan^2(\phi))^{1/2}, Y_3 = b(1 - X_3^2 / a^2)^{1/2} \quad (2.51.1-2)$$

Les équations des côtés sont données par :

$$\text{Côté 1 : } x_1(\xi) = a\xi, y_1(\xi) = 0 \quad (2.52.1-2)$$

$$\text{Côté 2 : } x_2(\eta) = (a - X_3) \cos\left(\frac{\eta\pi}{2}\right) + X_3, y_2(\eta) = b \left(1 - \left(\frac{x_2(\eta)}{a}\right)^2\right)^{1/2} \quad (2.53.1-2)$$

$$\text{Côté 3 : } x_3(\eta) = \eta (X_3^2 + Y_3^2)^{1/2} \cos(\phi), y_3(\eta) = \eta (X_3^2 + Y_3^2)^{1/2} \sin(\phi) \quad (2.54.1-2)$$

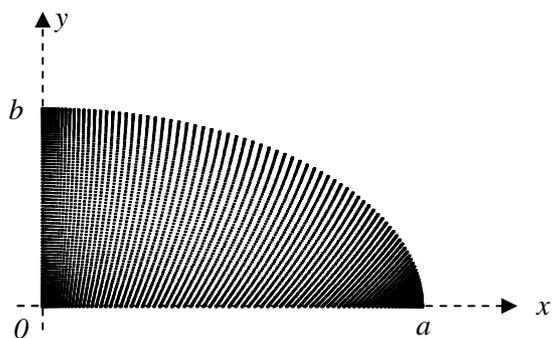


Figure 2.31 : Élément triangulaire avec un côté courbé formant un quart d'ellipse.

Chapitre 3

Théorie du matériau à gradient fonctionnel

Objectif

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie du matériau à gradient fonctionnel. Au début de ce chapitre, une introduction générale est présentée qui comporte la nécessité de trouver un nouveau matériau, une représentation graphique des phases constitutives graduées, particule/matrice dans une direction, l'état microstructurel des matériaux à gradient fonctionnel et des exemples réels et théoriques. Dans la deuxième partie de ce chapitre, une formulation des propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel est donnée en détail, qui comprend une compréhension de la fraction volumique. Un modèle analytique des matériaux à gradient fonctionnel est schématisé graphiquement pour mieux comprendre l'évolution des propriétés physiques de ce type de matériaux. A la fin de ce chapitre, une variation du module de Young en fonction de la température est présentée pour différents matériaux pour montrer l'avantage et l'inconvénient des métaux, céramiques et matériaux à gradient fonctionnel pour l'usage à hautes températures.

3.1. Introduction

Les matériaux composites les plus légers avec des rapports élevés résistance/poids et poids/rigidité ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique, navale et autres applications en ingénierie. La figure 3.1 donne une présentation des différents ensembles des matériaux existants en fonction de leurs densités ρ et de leurs modules de Young E . Toutefois, le matériau composite traditionnel est incapable d'être employé dans des environnements à haute température. En général, les métaux ont été utilisés dans le domaine industriel pendant de nombreuses années en raison de leur excellente résistance et ténacité. A haute température, la résistance du métal est réduite similairement à un matériau composite traditionnel. Les matériaux céramiques ont d'excellentes caractéristiques de résistance à la chaleur. Toutefois, les applications des céramiques sont généralement limitées en raison de leur faible résistance.

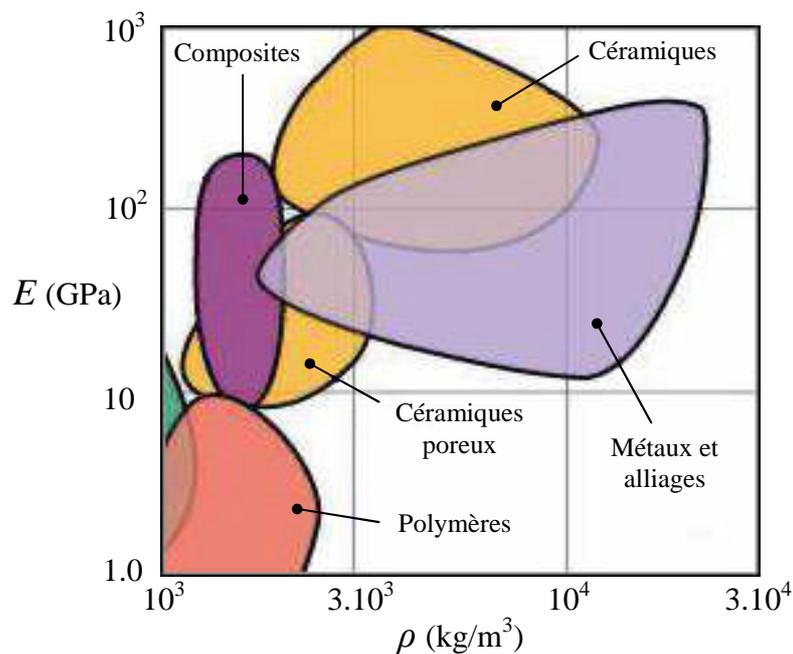


Figure 3.1 : Représentation des matériaux existants en fonction de leurs densités ρ et de leurs modules de Young E [Ashby (2005)].

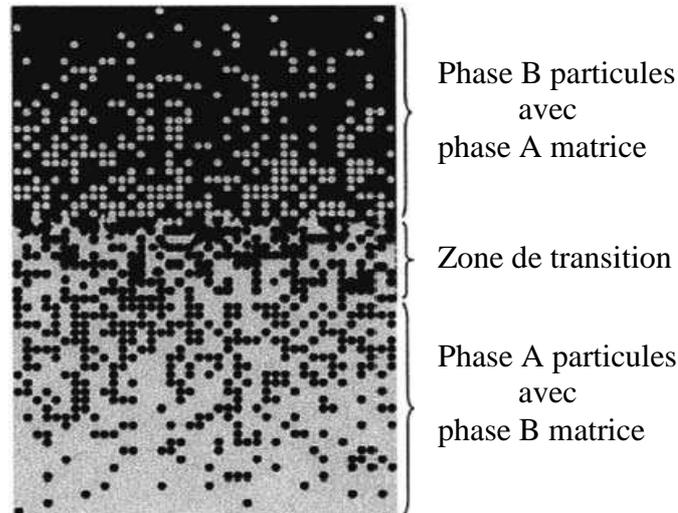


Figure 3.2 : Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin et *al.* (2004)].

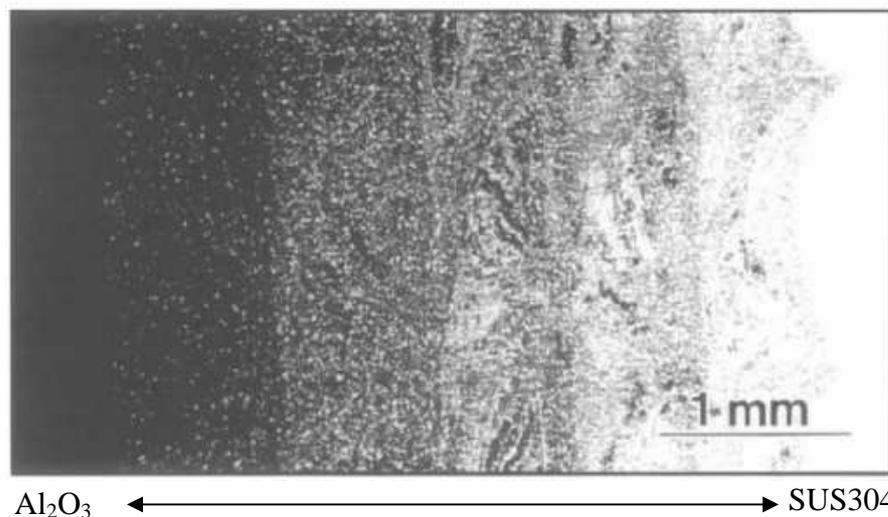


Figure 3.3 : Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al_2O_3 -SUS304) [Hilmas et *al.* (1997)].

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites appelé matériaux à gradient fonctionnel (MGF) a tiré une attention considérable des chercheurs. Un MGF typique, avec un effet élevé de couplage flexion-extension, est un composite homogène fabriqué à partir de différentes phases de composants de matériaux (le plus souvent en céramique et métal). Un exemple de ce matériau est illustré dans la figure 3.2 [Yin et *al.* (2004)] où les particules sphériques ou presque sphériques sont intégrées au sein d'une matrice isotrope. La figure 3.3 montre une micrographie par microscope électronique à balayage de la section transversale

d'une billette typique en matériau à gradient fonctionnel fabriquée par un mélange de métal - SUS304- et de céramique - Al_2O_3 -. Pour assurer ce mélange gradué de matériau, on a besoin de machines (Extrusion Freeform Fabrication -EFF-) très développées. Deux types de machines utilisées dans des processus de fabrication des MGF sont montrées dans les figures 3.4, respectivement; a) machine à base de matière liquide (basse pression) et b) machine à base de matière solide (haute pression).

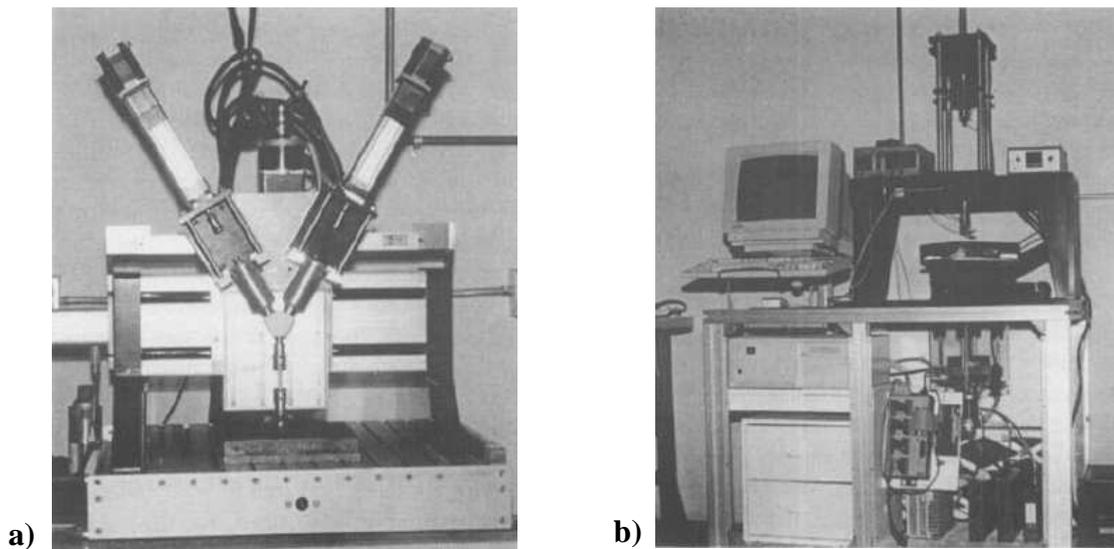


Figure 3.4 : Machine (EFF) [Greg et al. (1997)] : a) à base de matière liquide (basse pression) ; b) à base de matière solide (haute pression).

Dans un matériau à gradient fonctionnel, les différentes phases microstructurelles ont des fonctions différentes, et le matériau à gradient fonctionnel global atteint le statut multi-structural par gradation de leurs propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des constituants du matériau, leurs propriétés matérielles présentent un passage lisse et continu d'une surface à une autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et l'atténuation des concentrations de contraintes thermiques. Cela est dû au fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des environnements de haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique assure une meilleure performance mécanique et réduit la possibilité d'une rupture catastrophique.

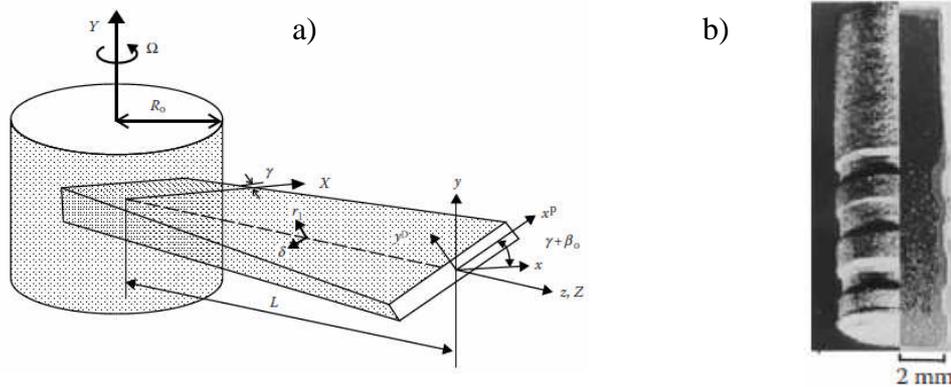


Figure 3.5 : a) une lame à parois minces en rotation dans une turbine [Librescu et Song (2005)] ; b) dent d'implantation en matériaux à gradient fonctionnel (Ti/20HAP) [Watari et al. (2004)].

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit pour la première fois au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais [Yamanoushi et al. (1990), Koizumi (1993)]. Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basée sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion [Hirai et Chen (1999), Chan (2001), Uemura (2003)]. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température. Un exemple d'une lame en matériau à gradient fonctionnel en rotation à parois minces est illustré par la figure 3.5-a [Librescu et Song (2005)]. Les applications potentielles des matériaux à gradient fonctionnel sont diverses et nombreuses. Des applications des matériaux à gradient fonctionnel ont été récemment rapportées dans la littérature, par exemple, les capteurs de MGF [Müller et al. (2003)] et les vérins [Qiu et al. (2003)], armure de MGF métal/céramique (Liu et al 2003), détecteurs photoélectriques de MGF [Paszkiwicz et al. (2008)], et MGF dentaires [Watari et al. (2004)] figure 3.5-b. Un certain nombre de revues traitant les divers aspects de MGF ont été publiées au cours des dernières années [Fuchiyama et Noda (1995), Markworth et al. (1995), Tanigawa (1995), Noda (1999), Paulino et al. (2003)]. Ils montrent que la plupart des études de recherche des MGF au début avaient plus porté sur l'analyse des contraintes thermiques et mécaniques de la rupture. Une recherche complète menée en flexion, flambage, et l'analyse des vibrations des plaques et coques en MGF a été présentée par Shen (2004). Récemment, Birman et Byrd (2007) ont présenté une recherche bibliographique des principales évolutions en MGF qui inclut transfert de chaleur, contrainte, stabilité et analyses dynamiques, expérimentation, fabrication et conception, applications et rupture.

3.2. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Plusieurs MGF sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle est généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase graduellement varie dans la direction de gradation, les propriétés effectives de MGF changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les MGF comme modèles : Pour la première, une variation par morceaux de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée, et le MGF est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d, couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 3.6-a) ; Pour la deuxième, une variation continue de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée (figure 3.6-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (3.1)$$

où h est l'épaisseur de la plaque et n ($0 \leq n \leq \infty$) est un exposant de la fraction volumique qui dicte la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche MGF. Comme il est présenté dans la figure 3.7, la variation de la valeur de n génère un nombre infini de la distribution de la composition.

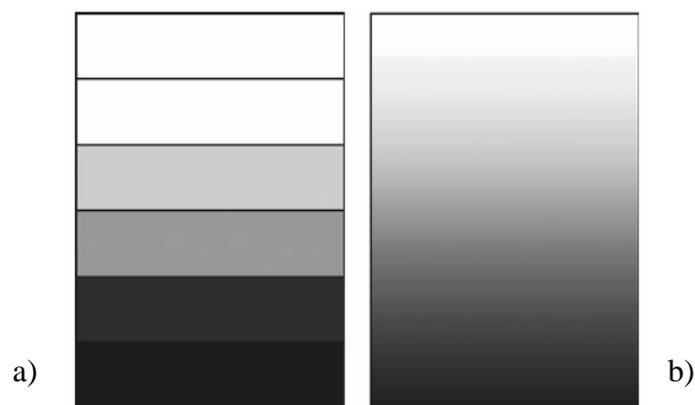


Figure 3.6 : Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel :
a) première approche; b) deuxième approche.

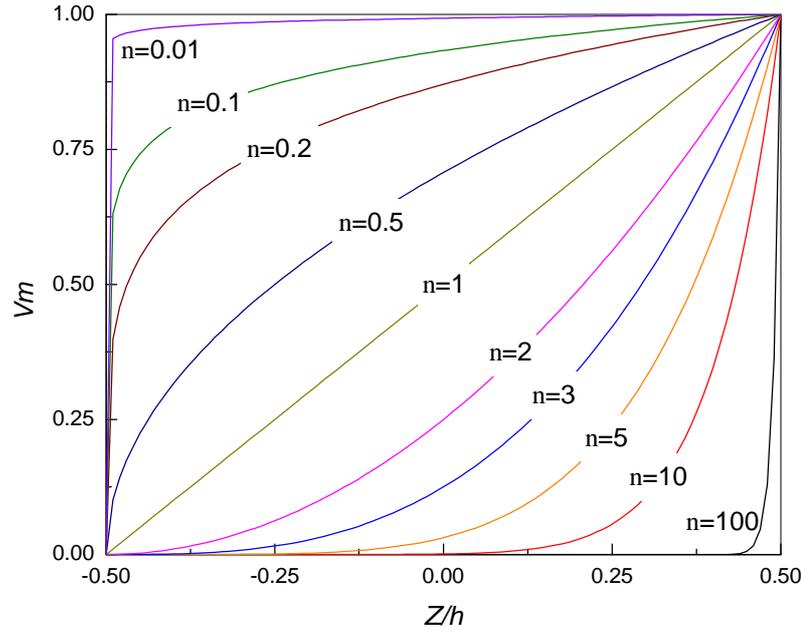


Figure 3.7 : Fraction volumique du métal le long de l'épaisseur.

Afin de modéliser avec précision les propriétés matérielles des MGF, les propriétés doivent être dépendantes de la température et de la position. Ce résultat est obtenu en utilisant une simple règle de mélange des matériaux composites [le modèle de Voigt (Shen, 2009)]. Les propriétés des matériaux effectives P_F de la couche MGF, comme E_F module de Young, et α_F coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimées par :

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (3.2)$$

où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i . La somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (3.3)$$

A savoir que les structures MGF sont généralement utilisées dans les environnements à haute température où des changements importants dans les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs sont à prévoir [Reddy et Chin (1998)], il est essentiel de prendre en considération cette dépendance de température pour une prévision précise de la réponse mécanique. Ainsi, le module de Young E_F , le coefficient de Poisson ν_F , le coefficient de

dilatation thermique α_F , et la conductivité thermique κ_F qui sont supposés être dépendants de la température, peuvent être exprimés, comme une fonction non-linéaire de la température [Touloukian (1967)]:

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (3.4)$$

où P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température T (en K) et ils sont propres aux matériaux constitutifs. Les valeurs typiques pour le module de Young E_F , le coefficient de Poisson ν_F , le coefficient de dilatation thermique α_F et la conductivité thermique κ_F des céramiques et des métaux sont donnés dans les tableaux 3.1- 3.4 [Reddy et Chin (1998)]. A partir des équations (3.1), on assume que les propriétés matérielles effectives E_F , ν_F , α_F , κ_F et ρ_F de la plaque MGF sont évaluées dans la direction de l'épaisseur selon une loi de puissance de distribution qui est exprimée comme suit [Praven et Reddy (1998)] :

$$E_F(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n + E_m(T) \quad (3.5)$$

$$\nu_F(z, T) = (\nu_c(T) - \nu_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n + \nu_m(T) \quad (3.6)$$

$$\rho_F(z, T) = (\rho_c(T) - \rho_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n + \rho_m(T) \quad (3.7)$$

$$\alpha_F(z, T) = (\alpha_c(T) - \alpha_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n + \alpha_m(T) \quad (3.8)$$

$$\kappa_F(z, T) = (\kappa_c(T) - \kappa_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n + \kappa_m(T) \quad (3.9)$$

Tableau 3.1 : Module d'élasticité du céramique et du métal en Pa pour E_F .

Matériau	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Zirconia	244.27e+9	0	-1.371e-3	1.214e-6	-3.681e-10
Aluminum oxide	349.55e+9	0	-3.853e-4	4.027e-7	-1.673e-10
Silicon nitride	348.43e+9	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
Ti-6Al-4V	122.56e+9	0	-4.586e-4	0	0
Stainless steel	201.04e+9	0	+3.079e-4	-6.534e-7	0
Nickel	223.95e+9	0	-2.794e-4	-3.998e-9	0

Tableau 3.2 : Coefficient de Poisson du céramique et du métal pour ν_F .

Matériau	P_0	$P_{.1}$	P_1	P_2	P_3
Zirconia	0.2882	0	1.133e-4	0	0
Aluminum oxide	0.2600	0	0	0	0
Silicon nitride	0.2400	0	0	0	0
Ti-6Al-4V	0.2884	0	1.121e-4	0	0
Stainless steel	0.3262	0	-2.002 e-4	3.797e-7	0
Nickel	0.3100	0	0	0	0

Tableau 3.3 : Coefficient de dilatation thermique du céramique et du métal en K^{-1} pour α_f

Matériau	P_0	$P_{.1}$	P_1	P_2	P_3
Zirconia	12.766e-6	0	-1.491e-3	1.006e-5	-6.778e-11
Aluminum oxide	6.8269e-6	0	1.838e-4	0	0
Silicon nitride	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
Ti-6Al-4V	7.5788e-6	0	6.638e-4	-3.147e-6	0
Stainless steel	12.330e-6	0	8.086e-4	0	0
Nickel	9.9209e-6	0	8.705e-4	0	0

Tableau 3.4 : La conductivité thermique du céramique et du métal en $W mK^{-1}$ pour κ_F .

Matériau	P_0	$P_{.1}$	P_1	P_2	P_3
Zirconia	1.7000	0	1.276e-4	6.648e-8	0
Aluminum oxide	-14.087	-1123.6	-6.227e-3	0	0
Silicon nitride	13.723	0	-1.032e-3	5.466e-7	-7.876e-11
Ti-6Al-4V	1.0000	0	1.704e-2	0	0
Stainless steel	15.379	0	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
Nickel (300K≤T≤635K)	187.66	0	-2.869e-3	4.005e-6	-1.983e-9
Nickel (635K≤T)	58.754	0	-4.614e-4	6.670e-6	-1.523e-10

Les figure 3.8-3.9 représentent la variation du module de Young en fonction de la température pour deux types de MGF SUS304/Si₃N₄ et Ti-AL-4V/Aluminum oxide, respectivement. Les valeurs de l'exposant de la fraction volumique sont prises égales à (0.0, 0.5, 1.0, 2.0 et ∞). De ces figures, on constate l'avantage et l'inconvénient des métaux, céramiques et MGF à haute température.

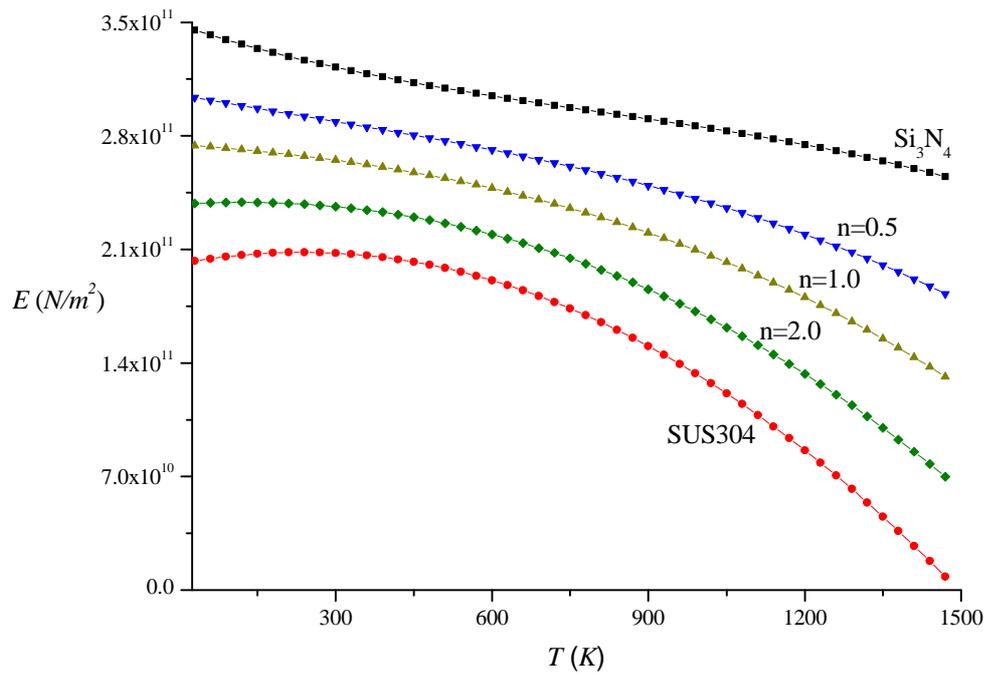


Figure 3.8 : Variation du module de Young en fonction de la température pour le matériau à gradient fonctionnel (SUS304/Si₃N₄).

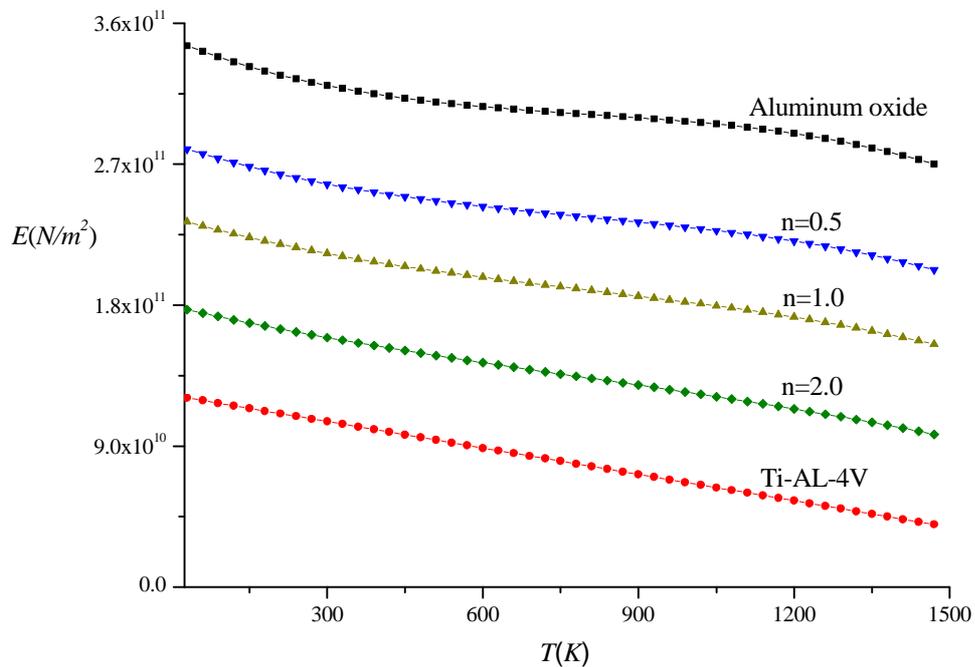


Figure 3.9: Variation du module de Young en fonction de la température pour le matériau à gradient fonctionnel (Ti-AL-4V/Aluminum oxide).

Le tableau 3.5 donne les valeurs du module de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique pour différents métaux et céramiques utilisés dans cette thèse pour une température ($T=300\text{ K}$).

Tableau 3.5: Propriétés des composants de MGF [Zhao et al. (2009)].

Matériau	Propriétés		
	$E(\text{N/m}^2)$	ν	$\rho(\text{kg/m}^3)$
Stainless steel SUS304	$207.78e^9$	0.3177	8166.
Silicon nitride Si_3N_4	$322.27e^9$	0.24	2370.
Ti-6Al-4V	$105.70e^9$	0.298	4429.
Aluminium oxide	$320.20e^9$	0.26	3750.
Aluminium (Al)	$70.00e^9$	0.30	2707.
Alumina (Al_2O_3)	$380.00e^9$	0.30	3800.
Zirconia (ZrO_2)	$151.00e^9$	0.30	3000.

Chapitre 4

Théorie du premier ordre des plaques

Objectif

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie du premier ordre des plaques. Sa formulation est basée sur les hypothèses de Mindlin dans une approche bidimensionnelle d'élasticité. La présentation des hypothèses de la théorie du premier ordre des plaques est donnée, suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation de Green–Lagrange dans le cas des grands déplacements est utilisé pour obtenir les relations déformation–déplacement. En suite une analyse détaillée est faite sur l'introduction du facteur de correction du cisaillement transversal dans la formulation des plaques épaisses. Le tenseur de contraintes pour les plaques en matériau à gradient fonctionnel est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée. Les fonctionnelles des énergies cinétique et de déformation sont utilisées pour l'obtention de l'équation du mouvement vibratoire libre de la plaque.

4.1. Plaques comme structure fondamentale

4.1.1. Définition

D'une manière générale, les plaques sont considérées comme un volume compris entre deux surfaces planes de telle sorte que la distance h (épaisseur) entre ces deux surfaces, soit petite par rapport aux deux autres dimensions. Suite à cette caractéristique géométrique très importante, le modèle tridimensionnel se réduit à un modèle bidimensionnel. La plaque admet aussi un plan de symétrie passant par le milieu de l'épaisseur appelé surface moyenne ou encore feuillet moyen (Figure 4.1).

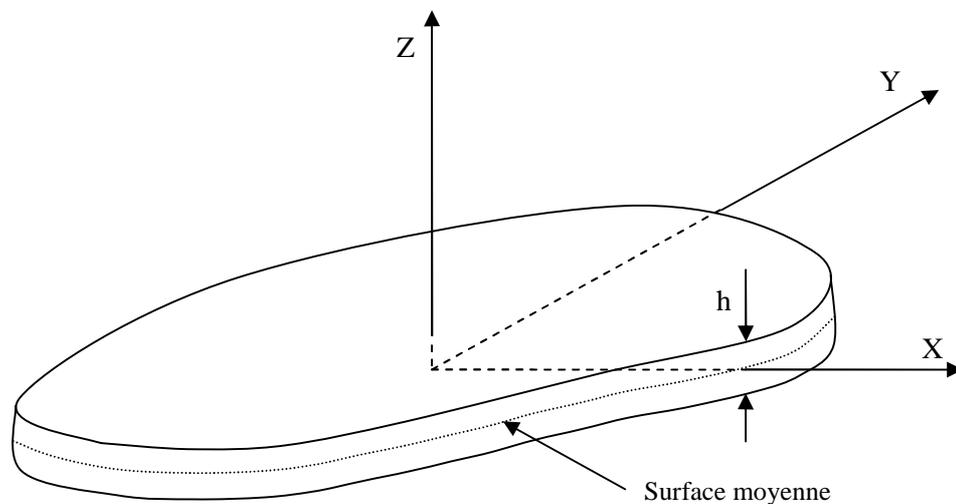


Figure 4.1 : Plaque de forme géométrique arbitraire.

4.1.2. Hypothèses de la théorie du premier ordre des plaques

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par (Kirchhoff 1850) :

- 1) Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque;
- 2) La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes;
- 3) Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après déformation;
- 4) L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

La troisième hypothèse veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Wittrick (1987) a précisé qu'en excluant ces

effets, l'erreur dans la théorie de plaque de Kirchhoff est proportionnelle à l'épaisseur. Si la théorie de plaque de Kirchhoff est employée, les fréquences obtenues sont au dessus de celles prévues. Une théorie plus sophistiquée de plaque est ainsi nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Il y a eu beaucoup de théories de plaques épaisses prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible.

Reissner (1944,1945) a proposé la théorie de plaque épaisse la plus simple en introduisant l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin (1951) a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues. Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que :

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que :

- L'effet de l'inertie rotation est inclu.

Dans la littérature, les vibrations des plaques fondées sur les hypothèses du premier ordre de cisaillement transversal sont largement mentionnées sous le nom de plaques de Mindlin, Reissner-Mindlin ou Hencky-Mindlin.

4.1.3. Equations cinématiques

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (figure 4.2) est exprimé sous la forme [Mindlin (1951)]:

$$\bar{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \quad (4.1)$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z\theta_x(x, y, t) \quad (4.2)$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (4.3)$$

Les quantités u , v , w , θ_x et θ_y qui sont des fonctions inconnues, sont appelées déplacements généralisés du système.

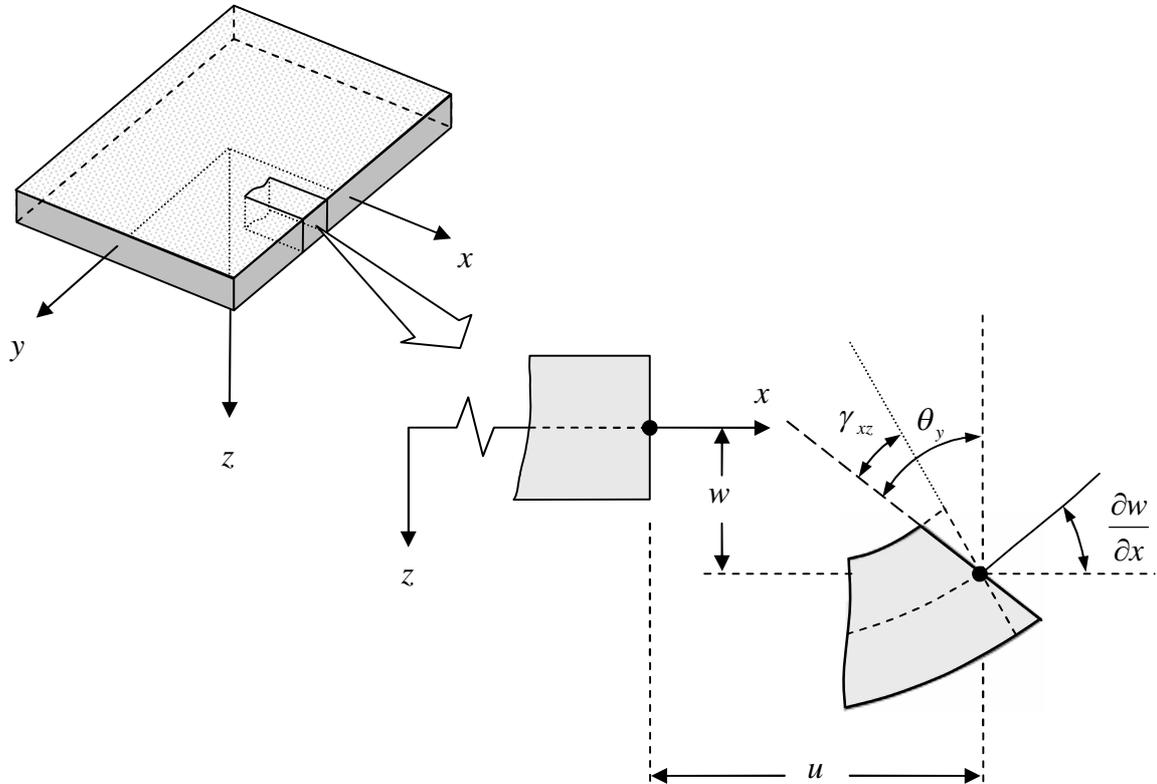


Figure 4.2 : Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation selon la théorie du premier ordre des plaques [Reddy (2004)].

4.1.4. Relations déformation–déplacement

Dans la majorité des problèmes abordés dans la littérature, les déplacements et les déformations de la structure ont été supposés implicitement petits. D'un point de vue pratique, ceci veut dire que la géométrie des éléments reste quasiment inchangée lorsque ceux-ci sont soumis à des sollicitations ; par conséquent, on peut utiliser au premier ordre les approximations de déformations linéaires infinitésimales.

En pratique, de telles hypothèses sont fréquemment mises à défaut, même lorsque les déformations restent petites et que la limite élastique des matériaux ordinaires n'est pas dépassée. Si l'on veut connaître avec précision les déplacements pour certaines structures, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités géométriques [Zienkiewicz (1979)].

Dans le cas des grands déplacements, le tenseur de déformation de Lagrange, également appelé tenseur de déformation de Green–Lagrange ou tenseur de déformation de Green–Saint-Venant, est défini en termes de dérivées partielles de déplacement comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

où $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$.

Dans la théorie de Von Karman (1910,1939) ou la théorie de la non-linéarité géométrique des plaques, on assume que les déplacements dans le plan (u et v) sont infinitésimaux et seulement les termes non-linéaires dépendant du déplacement transversal (w) dans l'équation (4.4) sont considérés [Amabili (2008)]. Tous les autres termes non-linéaires sont négligés. En utilisant les hypothèses de Von Karman en même temps que la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement et en injectant les équations (4.1–3) dans l'équation (4.4), les relations déformations-déplacements et courbures-déplacements seront exprimées par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (4.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \quad (4.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \quad (4.9)$$

$$\chi_x = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$\chi_y = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \quad (4.11)$$

$$\chi_{xy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (4.12)$$

Sous forme vectorielle, ces équations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

A noter que les déformations ε_{xx} , ε_{yy} et γ_{xy} sont linéaires à travers l'épaisseur de la plaque tandis que les déformations γ_{xz} et γ_{yz} sont constantes.

4.1.5. Equations des efforts et des moments

Les équations exprimant les forces et les moments internes (figure 4.3) sont obtenues par l'intégration des contraintes :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz \quad (4.14-15)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} dz \quad (4.16-17)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot z dz \quad (4.18-19)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z dz \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot z dz \quad (4.20-21)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (4.22-23)$$

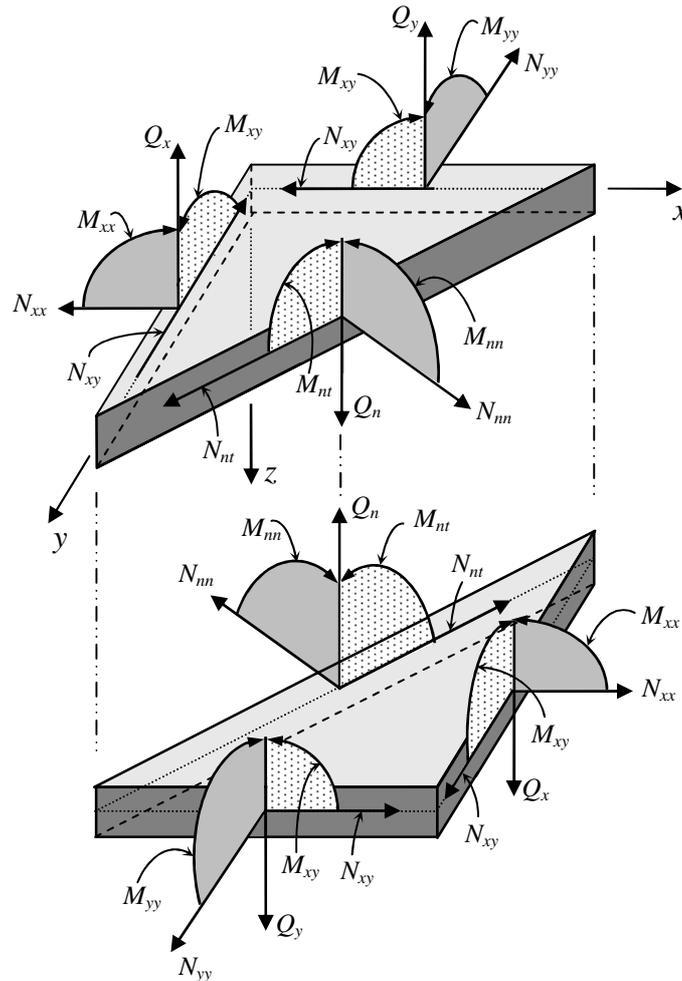


Figure 4.3 : Forces et moments agissant sur un élément de plaque.

Puisque les déformations angulaires (γ_{xz} et γ_{yz}) sont représentées en tant que constantes dans la direction de l'épaisseur de la plaque, les contraintes tangentielles de cisaillement sont également constantes dans la même direction. Ceci contredit le fait bien connu que les contraintes tangentielles de cisaillement sont paraboliques (c-à-d équation quadratique) à travers l'épaisseur de la plaque (figure 4.4). Tandis que cette anomalie entre la variation parabolique des contraintes tangentielles et l'état constant de ces mêmes contraintes prévues par la théorie de premier ordre ne peuvent pas être corrigés dans les limitations de la cinématique de la théorie de premier ordre, par contre les efforts tranchants Q_x et Q_y peuvent être corrigés en multipliant les intégrales dans les équations (4.22-23) par le paramètre k , appelé facteur de correction du cisaillement:

$$Q_x = k \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \qquad Q_y = k \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \qquad (4.24-25)$$

Le facteur k est calculé de sorte que l'énergie de déformation due aux efforts de cisaillement transversal obtenue par la théorie de premier ordre des plaques est égale (ou équivalente) à l'énergie de déformation due aux efforts de cisaillement transversal prévus par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

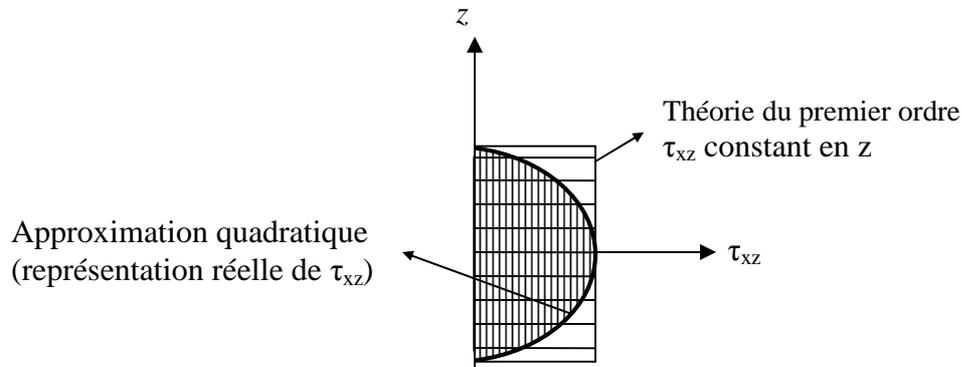


Figure 4.4 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

4.1.6. Facteurs de correction du cisaillement transversal

Mindlin (1951) a montré que pour une plaque isotopique, le facteur de correction de cisaillement dépend du coefficient de Poisson et il peut varier de $k=0.76$ pour $\nu=0$ à $k=0.91$ pour $\nu=0.5$. Suivant la suggestion de Mindlin le facteur de correction de cisaillement est donné par l'équation cubique suivante [Liew et *al.* (1998)]:

$$k^3 - 8k^2 + \frac{8(2-\nu)k}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu} = 0 \quad (4.26)$$

Par exemples, si $\nu=0.3$, alors $k=0.86$ et si $\nu=0.176$, alors $k=\pi^2/12$.

D' autre part, Reissner (1945), qui a assumé une variation parabolique de la distribution des contraintes tangentielles selon l'épaisseur de la plaque, implique que le facteur de correction de cisaillement de Reissner prend la valeur :

$$k = \frac{5}{6} \quad (4.27)$$

Basé sur une solution analytique tridimensionnelle de vibration des plaques rectangulaires isotropes simplement appuyées, Wittrick (1987) a fait un calibrage du facteur de correction du cisaillement de Mindlin. Il a proposé le facteur de correction de cisaillement suivant :

$$k = \frac{5}{6-\nu} \quad (4.28)$$

Le facteur de correction de cisaillement de Wittrick donne une valeur de 0.877 pour $\nu=0.3$ qui correspond étroitement à la valeur de 0.88 obtenu auparavant par Srinivas et *al.* (1970) et Dawe (1978). Il s'avère que le facteur de correction de cisaillement de Wittrick est le meilleur jusqu'à présent car il a une forme simple et tient compte de l'effet du coefficient de Poisson.

4.1.7. Relations contrainte-déformation

La relation d'élasticité linéaire entre les contraintes et les déformations, appelée loi de Hooke généralisée, peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (4.29)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre, l'état de contrainte est un état de contraintes planes et le système d'équations (4.30) sera réduit à un système d'équations moins condensé donné par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{66} & 0 & 0 \\ & sym & & C_{44} & 0 \\ & & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Pour une plaque à gradient fonctionnel, et d'après les équations (3.5-6), le module de Young et le coefficient de Poisson ($E(z,T)$ et $\nu(z,T)$) dépendent de la position (z) et de la température (T). D'où les coefficients de la matrice élastique $[C]$ donnés par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E_F(z, T)}{1 - \nu_F^2(z)}, \quad (4.32.1)$$

$$C_{12} = \nu_F(z) C_{11}, \quad (4.32.2)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E_F(z)}{2(1 + \nu_F(z))}. \quad (4.32.3)$$

4.2. Energie de déformation de la plaque à gradient fonctionnel

La fonctionnelle de l'énergie de déformation U_P de la plaque à gradient fonctionnel est donnée par :

$$U_P = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (4.33)$$

L'équation (4.33) sous une forme plus développée s'écrit:

$$\begin{aligned} U_P = \frac{1}{2} \iint \left((A_{11} \varepsilon_{xx}^2 + A_{22} \varepsilon_{yy}^2 + 2A_{12} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + A_{66} \gamma_{xy}^2) \right. \\ \left. + 2(B_{11} \varepsilon_{xx} \chi_x + B_{12} \varepsilon_{xx} \chi_y + B_{12} \varepsilon_{yy} \chi_x + B_{22} \varepsilon_{yy} \chi_y + B_{66} \chi_{xy}^2) \right. \\ \left. + (D_{11} \chi_x^2 + D_{22} \chi_y^2 + 2D_{12} \chi_x \chi_y + D_{66} \chi_{xy}^2) + k(A_{44} \gamma_{xz}^2 + A_{55} \gamma_{yz}^2) \right) dx dy \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4.35.1)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4.35.2)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4.35.3)$$

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (4.35.4)$$

4.3. Energie cinétique de la plaque à gradient fonctionnel

L'expression de l'énergie cinétique T de la plaque à gradient fonctionnel épaisse est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \iint \left(I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy \quad (4.36)$$

où les constantes I_1 et I_3 sont exprimées par :

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) dz \quad (4.37.1)$$

$$I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) z^2 dz \quad (4.37.2)$$

4.4. Equations du mouvement

L'équation régissant le mouvement vibratoire libre peut être dérivée de l'équation de Lagrange qui exige que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U_p}{\partial q_i} = 0 \quad (4.38)$$

De l'équation (4.38), on obtient les matrices masse et de rigidité

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = [M] \{\ddot{q}\} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial q_i} = [[K_L] + [K_{NL}(q)]] \{q\} \quad (4.40)$$

L'équation du mouvement vibratoire libre de la plaque épaisse possède la forme suivante :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [[K_L] + [K_{NL}(q)]] \{q\} = 0 \quad (4.41)$$

Il y a lieu de déterminer en détail toutes ces matrices.

Chapitre 5

Modélisation par l'élément- p courbé

Objectif

Ce chapitre est consacré à la modélisation des plaques à gradient fonctionnel en vibration libre non-linéaire par un élément- p triangulaire courbé. Elle se base sur la formulation par la version- p de la méthode des éléments finis en vibration libre présentée dans le chapitre 2. Les matrices de rigidité et de masse sont obtenues à partir de la formulation énergétique des plaques épaisses de Mindlin. Etape par étape, les termes de ces matrices vont apparaître comme des blocs dans les matrices globales. En appliquant l'équation de Lagrange et la méthode de l'équilibrage harmonique, les équations du mouvement vibratoire sont résolues itérativement. La méthode itérative pour le calcul non-linéaire est décrite en détail dans le chapitre 6. L'intégration numérique est abordée puisqu'une intégration exacte ne peut être utilisée à cause de la variation du déterminant de la matrice jacobienne.

5.1. Formulation par l'élément- p courbé

En se basant sur l'élément- p présenté dans la section 2.4 (figure 5.1), les matrices de rigidité et masse élémentaires sont formulées en utilisant les équations (4.39-40) obtenues précédemment.

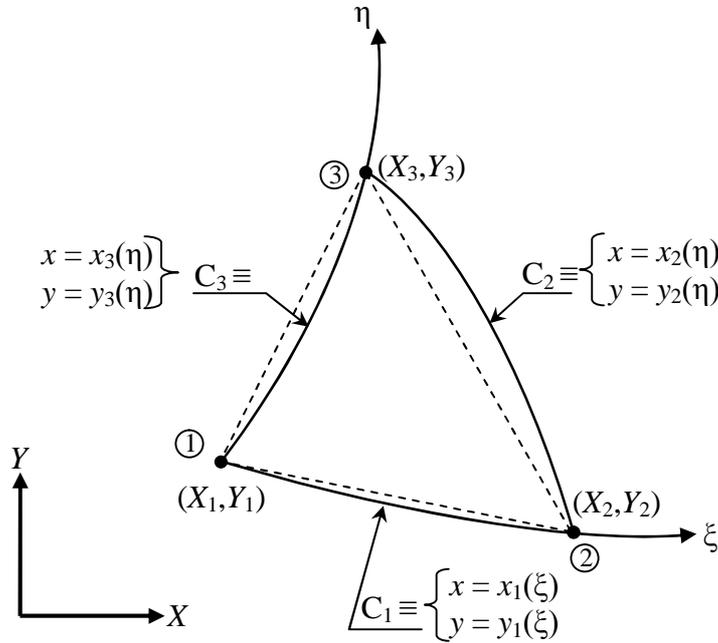


Figure 5.1 : Élément triangulaire de référence.

Dans le cas de la version- p , les déplacements et les rotations d'un point de l'élément- p peuvent être exprimés par :

$$u = \sum_{\beta=1}^r \bar{q}_{2\beta-1}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \tag{5.1}$$

$$v = \sum_{\beta=1}^r \bar{q}_{2\beta}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \tag{5.2}$$

$$w = \sum_{\beta=1}^r q_{3\beta-2}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \tag{5.3}$$

$$\theta_x = \sum_{\beta=1}^r q_{3\beta-1}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \tag{5.4}$$

$$\theta_y = \sum_{\beta=1}^r q_{3\beta}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \tag{5.5}$$

5.1.1. Détermination des matrices de rigidité

On reprend les équations (4.34) de l'énergie de déformation de la plaque épaisse :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \left(C_{11} (\varepsilon_{xx})^2 + 2C_{12} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + C_{22} (\varepsilon_{yy})^2 + C_{66} (\gamma_{xy})^2 + kC_{44} (\gamma_{xz})^2 + kC_{55} (\gamma_{yz})^2 \right) dV \quad (5.6)$$

Après la substitution des relations déformations-déplacements et courbures-déplacements (4.5-12) dans l'équation (5.6) de l'énergie de déformation, on obtient :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \left(C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + 2C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^2 + C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right)^2 + kC_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + kC_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 \right) dV \quad (5.7)$$

Le développement de l'équation (5.7) donne une somme de cinq termes :

$$U_p = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 \quad (5.8)$$

Les cinq termes sont :

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V \left(C_{11} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 \right) + C_{22} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 \right) + 2C_{12} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) dV \quad (5.9)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_V \left(C_{11} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{22} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 \right) - 2C_{12} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \right) + C_{66} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - 2z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) \right) dV \quad (5.10)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_V \left(kC_{44} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (\theta_y) + (\theta_y)^2 \right) + kC_{55} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) (\theta_x) + (\theta_x)^2 \right) \right) dV \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
U_4 = \frac{1}{2} \int_V & \left(2zC_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - 2zC_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + 2C_{12}z \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right. \\
& \left. + 2zC_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) \right) dV \quad (5.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_5 = \frac{1}{2} \int_V & \left(zC_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - zC_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + zC_{12} \left(\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\
& \left. + 2zC_{66} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) \right) dV \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Dans l'équation de U_1 on peut séparer les termes contenant seulement les déplacements extensionnels (u et v) pour avoir \bar{U}_1 , les termes contenant seulement le déplacement flexionnel (w) pour avoir \bar{U}_3 et les termes qui restent pour avoir \bar{U}_2 .

$$U_1 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \int_V & \left(C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \\
& \left. C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dV \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_2 = \frac{1}{2} \int_V & \left(C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{12} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. 2C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \right) dV \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{1}{4} C_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{4} C_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 + \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{66} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dV \quad (5.16)$$

A partir des équations (5.1-5), on obtient les dérivées partielles des déplacements et des rotations par rapport aux coordonnées locales telles que :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \quad (5.17.1-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \quad (5.18.1-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \quad (5.19.1-2)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \quad (5.20.1-2)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \quad (5.21.1-2)$$

5.1.1.1. Matrice de rigidité élémentaire extensionnelle

En introduisant les dérivées partielles obtenues dans les équations (5.17-21) et les coordonnées locales adimensionnelles pour l'élément triangulaire ainsi que la matrice Jacobienne dans l'expression de l'énergie de déformation \bar{U}_1 on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{11} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right)^2 + A_{22} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right)^2 + 2A_{12} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + A_{66} \left(\left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) + \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.22)$$

A partir de l'équation (4.40), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{q}_{2\alpha-1}} = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(2A_{11} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) + 2A_{12} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + 2A_{66} \left(\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{q}_{2\alpha}} = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(2A_{22} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) + 2A_{12} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. + 2A_{66} \left(\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.24)$$

D'où les composantes de la matrice de rigidité élémentaire extensionnelle $[\bar{K}]$ sont données par :

$$\bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} + A_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.25.1)$$

$$\bar{K}_{2\alpha-1,2\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} + A_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.25.2)$$

$$\bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} + A_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.25.3)$$

$$\bar{K}_{2\alpha,2\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} + A_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.25.4)$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta} \\ \bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

5.1.1.2. Matrice de rigidité élémentaire non-linéaire de couplage extension-flexion

La matrice de rigidité non-linéaire élémentaire de couplage extension-flexion est obtenue à partir de l'équation de l'énergie de déformation \bar{U}_2 .

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 = \frac{1}{2} \int_V \left(C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{12} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + 2C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \right) dV \end{aligned} \quad (5.27)$$

Dans le repère local, l'équation (5.27) devient :

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{11} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \right. \\ + A_{22} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \\ + A_{12} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \\ + A_{12} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \\ + 2A_{66} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \\ \left. + 2A_{66} \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.28)$$

En introduisant l'équation (5.28) dans l'équation (4.40), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{q}_{2\alpha-1}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{11} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \right. \\ + A_{12} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \\ \left. + 2A_{66} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{q}_{2\alpha}} = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{22} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \right. \\
& + A_{12} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \\
& \left. + 2A_{66} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (5.30)$$

On obtient les composantes de la matrice de rigidité non-linéaire élémentaire de couplage extension-flexion $[\hat{K}]$:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{2\alpha-1,3\beta-2} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2A_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \right) Q_{3k-2}
\end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{2\alpha,3\beta-2} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} + A_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2A_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \right) Q_{3k-2}
\end{aligned} \quad (5.32)$$

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{2\alpha-1,3\beta-2} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{2\alpha,3\beta-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

5.1.1.3. Matrice de rigidité élémentaire non-linéaire flexionnelle

La matrice de rigidité non-linéaire élémentaire flexionnelle est obtenue à partir de l'équation de l'énergie de déformation \bar{U}_3 , c'est-à-dire des termes dépendant seulement du déplacement transversal w . donc,

$$\bar{U}_3 = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{1}{4} C_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{4} C_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 + \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{66} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dV \quad (5.34)$$

L'équation (5.34) devient :

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(\frac{A_{11}}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\lambda=1}^n q_{3\lambda-2} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} \right) \right. \\
& + \frac{A_{22}}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\lambda=1}^n q_{3\lambda-2} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \eta} \right) \\
& + \frac{A_{12}}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\lambda=1}^n q_{3\lambda-2} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \eta} \right) \\
& + \frac{A_{12}}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\lambda=1}^n q_{3\lambda-2} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} \right) \\
& + \frac{A_{66}}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\lambda=1}^n q_{3\lambda-2} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \eta} \right) \\
& \left. + \frac{A_{66}}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\lambda=1}^n q_{3\lambda-2} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} \right) \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Les composantes de la matrice de rigidité non-linéaire élémentaire flexionnelle $[\tilde{K}]$ sont donné par :

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{3\alpha-2,3\beta-2} = & \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^n \sum_{\lambda=1}^n \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} \right. \right. \\
& + A_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \eta} + (A_{12} + 2A_{66}) \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \eta} \\
& \left. \left. + (A_{12} + 2A_{66}) \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} \right) |J| d\xi d\eta \right) Q_{3\kappa-2} Q_{3\lambda-2}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\alpha 3-2, \beta 3-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

5.1.1.4. Matrice de rigidité élémentaire linéaire flexionnelle due aux rotations

La matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle due aux rotations est obtenue à partir de l'équation de l'énergie de déformation U_2 . Donnée par :

$$\begin{aligned}
U_2 = & \frac{1}{2} \int_V \left(C_{11} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{22} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 \right) - 2C_{12} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \right) \right. \\
& \left. + C_{66} \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - 2z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) dV
\end{aligned} \tag{5.38}$$

L'expression de l'énergie de déformation U_2 dans le repère local devient :

$$\begin{aligned}
U_2 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(D_{11} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) + D_{22} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right. \\
& - 2D_{12} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) + D_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) - 2 \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \right) \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (5.39)$$

Les composantes de la matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle dues aux rotations $[K_\theta]$ sont données par :

$$K_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(D_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (5.40.1)$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(-D_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} - D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (5.40.2)$$

$$K_{3\alpha,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(-D_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} - D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (5.40.3)$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(D_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \quad (5.40.4)$$

$$[K_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\alpha 3-1,3\beta-1} & K_{\alpha 3-1,3\beta} \\ 0 & K_{\alpha 3,3\beta-1} & K_{\alpha 3,3\beta} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

5.1.1.5. Matrice de rigidité élémentaire linéaire flexionnelle due au cisaillement transversal

La matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal est obtenue à partir de l'équation de l'énergie de déformation U_3 (équation (5.11)). Cette énergie s'écrit en fonction des coordonnées locales comme suit :

$$\begin{aligned}
U_3 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{44} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) + 2 \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} N_\beta \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} N_\beta \right) \right) + A_{55} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right. \\
& \left. \left. - 2 \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} N_\beta \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} N_\beta \right) \right) \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (5.42)$$

La matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal possède la forme suivante :

$$[K_C] = \begin{bmatrix} K_{\alpha 3-2,3\beta-2} & K_{\alpha 3-2,3\beta-1} & K_{\alpha 3-2,3\beta} \\ K_{\alpha 3-1,3\beta-2} & K_{\alpha 3-1,3\beta-1} & K_{\alpha 3-1,3\beta} \\ K_{\alpha 3,3\beta-2} & K_{\alpha 3,3\beta-1} & K_{\alpha 3,3\beta} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Ses composantes sont données par :

$$K_{3\alpha-2,3\beta-2} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{44} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} + A_{55} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.1)$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(-A_{55} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} N_\beta \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.2)$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{44} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} N_\beta \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.3)$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-2} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(-A_{55} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} N_\beta \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.4)$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{55} N_\alpha N_\beta \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.5)$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta} = 0 \quad (5.44.6)$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{44} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.7)$$

$$K_{3\alpha,3\beta-1} = 0 \quad (5.44.8)$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(A_{44} N_\alpha N_\beta \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.44.9)$$

La matrice de rigidité linéaire est $[K] = [K_C] + [K_\theta]$

5.1.1.6. Matrice de rigidité élémentaire linéaire de couplage extension-rotation

La matrice de rigidité linéaire élémentaire de couplage extension-rotation est déterminée à partir de l'énergie de déformation U_4 (équation (5.12)). Elle est donnée par :

$$U_4 = \frac{1}{2} \int_V \left(2zC_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - 2zC_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + 2C_{12}z \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right. \\ \left. + 2zC_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) \right) dV \quad (5.45)$$

Ou encore en fonction des coordonnées locales comme suit :

$$\begin{aligned}
U_4 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(2B_{11} \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) - 2B_{22} \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right. \\
& + 2B_{12} \left(- \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \bar{q}_{2\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \right) \\
& + 2B_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \right) \\
& \left. + \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_{2\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.46}$$

La matrice de rigidité linéaire de couplage extension-rotation est donnée par :

$$[\check{K}] = \begin{bmatrix} 0 & \check{K}_{2\alpha-1,3\beta-1} & \check{K}_{2\alpha-1,3\beta} \\ 0 & \check{K}_{2\alpha,3\beta-1} & \check{K}_{2\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

avec

$$\check{K}_{2\alpha-1,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(B_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} - B_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{5.48.1}$$

$$\check{K}_{2\alpha-1,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(B_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} + B_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{5.48.2}$$

$$\check{K}_{2\alpha,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(B_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} - B_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{5.48.3}$$

$$\check{K}_{2\alpha,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(B_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} + B_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{5.48.4}$$

5.1.1.7. Matrice de rigidité élémentaire linéaire de couplage flexionnel

A partir de l'énergie de déformation U_5 (équation (5.13)), la matrice de rigidité linéaire élémentaire de couplage flexionnel est déterminée en fonction des coordonnées locales par :

$$\begin{aligned}
U_5 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(B_{11} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \right) - \right. \\
& B_{22} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \right) + \\
& B_{12} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \eta} \right) \right) - \\
& \left. B_{12} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \xi} \right) \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \eta} \right) \right) - \\
 & B_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \xi} \right) \right) + \\
 & B_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \eta} \right) \right) - \\
 & B_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^n q_{3\kappa-2} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \xi} \right) \right) \Big| \mathbf{J} | d\xi d\eta \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

La matrice de rigidité linéaire de couplage flexionnel est obtenue par :

$$\left[\widehat{\mathbf{K}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2\widehat{K}_{\alpha 3-1,3\beta-2} & 2\widehat{K}_{\alpha 3,3\beta-2} \\ \widehat{K}_{\alpha 3-1,3\beta-2} & 0 & 0 \\ \widehat{K}_{\alpha 3,3\beta-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \widehat{K}_{3\alpha-1,3\beta-2} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{1-\xi} \int_0^{\xi} \left(-B_{22} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \eta} \right) - B_{12} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \xi} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - B_{66} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \xi} \right) - B_{66} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \xi} \right) \right) \Big| \mathbf{J} | d\xi d\eta \right) Q_{3k-2} \quad (5.51.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{K}_{3\alpha,3\beta-2} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{1-\xi} \int_0^{\xi} \left(B_{11} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \xi} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \eta} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + B_{66} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \eta} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{\kappa}}{\partial \eta} \right) \right) \Big| \mathbf{J} | d\xi d\eta \right) Q_{3k-2} \quad (5.51.2)
 \end{aligned}$$

5.1.2. Détermination de la matrice masse

L'expression de l'énergie cinétique T de la plaque à gradient fonctionnel épaisse est donnée par l'équation (4.36) :

$$T = \frac{1}{2} \iint \left(I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy \quad (5.52)$$

En utilisant les équations (5.1-5), l'équation (5.52) devient:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(I_1 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{d\bar{q}_{2\alpha-1}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{d\bar{q}_{2\beta-1}}{dt} N_\beta \right) + I_1 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{d\bar{q}_{2\alpha}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{d\bar{q}_{2\beta}}{dt} N_\beta \right) \right. \\
 & + I_1 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{dq_{3\alpha-2}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta-2}}{dt} N_\beta \right) + I_3 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{dq_{3\alpha-1}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta-1}}{dt} N_\beta \right) \\
 & \left. + I_3 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{dq_{3\alpha}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta}}{dt} N_\beta \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

De la formule (4.39), on trouve :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{q}_{2\alpha-1}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(I_1 \left(\frac{d\bar{q}_{2\alpha-1}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{d\bar{q}_{2\beta-1}}{dt} N_\beta \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right) \quad (5.54.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{q}_{2\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(I_1 \left(\frac{d\bar{q}_{2\alpha}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{d\bar{q}_{2\beta}}{dt} N_\beta \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right) \quad (5.54.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_{3\alpha-2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(I_1 \left(\frac{dq_{3\alpha-2}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta-2}}{dt} N_\beta \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right) \quad (5.54.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_{3\alpha-1}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(I_3 \left(\frac{dq_{3\alpha-1}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta-1}}{dt} N_\beta \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right) \quad (5.54.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_{3\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(I_3 \left(\frac{dq_{3\alpha}}{dt} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta}}{dt} N_\beta \right) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \right) \quad (5.54.5)$$

Les composantes de la matrice masse extensionnelle $[\bar{M}]$ et flexionnelle $[M]$ sont données par :

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{M}_{2\alpha-1,2\beta-1} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.55.1)$$

et

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (5.55.2)$$

où

$$\bar{M}_{2\alpha-1,2\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} I_1 (N_\alpha N_\beta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.56.1)$$

$$\bar{M}_{2\alpha,2\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} I_1 (N_\alpha N_\beta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.56.2)$$

$$M_{3\alpha-2,3\beta-2} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} I_1(N_\alpha N_\beta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.56.3)$$

$$M_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} I_3(N_\alpha N_\beta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.56.4)$$

$$M_{3\alpha,3\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} I_3(N_\alpha N_\beta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.56.5)$$

5.2. Equations du mouvement périodique et application de la méthode de l'équilibrage harmonique

Après la détermination des matrices masse et de rigidité, les équations du mouvement vibratoire libre de la plaque sont obtenues à partir de l'équation de Lagrange. En appliquant les conditions aux limites en ignorant les lignes et les colonnes liées aux DDL restreints dans les matrices globales, les équations régissant le mouvement sont écrites comme suit :

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{q} + [\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}]\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}]\mathbf{q} + [2\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}]\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.58)$$

Si les côtés de la plaque sont immobiles, les déplacements membranaires deviennent beaucoup plus petits que le déplacement flexionnel. Dans ce cas, l'inertie membranaire peut être négligée et les équations du mouvement peuvent être découplées. Ainsi, l'équation (5.57) devient :

$$\overline{\mathbf{q}} = -\overline{\mathbf{K}}^{-1}[\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}]\mathbf{q} \quad (5.59)$$

L'insertion de (5.59) dans (5.58) donne

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} - \check{\mathbf{K}}^T \overline{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \overline{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \overline{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}} - \check{\mathbf{K}}^T \overline{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}]\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.60)$$

Les matrices de rigidité $\check{\mathbf{K}}$ et $\hat{\mathbf{K}}^T \overline{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}$ sont des fonctions quadratiques de \mathbf{q} . La matrice de rigidité $\check{\mathbf{K}}$ résulte des déformations membranaires non-linéaires seulement. La matrice de rigidité $\hat{\mathbf{K}}^T \overline{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}$ représente le couplage entre les déformations membranaires non-linéaires.

Il y a deux procédures classiques pouvant être appliquées pour obtenir les solutions des équations différentielles non-linéaires : méthode de perturbation et méthode de l'équilibrage

harmonique. Les méthodes de perturbation, telles que les échelles multiples et la moyenne [Nayfeh (1983,1995)], sont fondées sur un petit paramètre et sont par conséquent limitées aux systèmes faiblement non-linéaires. La méthode de l'équilibrage harmonique [Minckens (1984), Szemplinska (1990), Hamdan et Burton (1993)] est fondée sur l'hypothèse d'une solution en temps sous la forme d'une série de Fourier, ce qui réduit le problème à celui de la résolution d'un système d'équations différentielles non-linéaires dans les variables d'espace. Parmi les avantages de la méthode de l'équilibrage harmonique : Elle ne se limite pas aux problèmes faiblement non-linéaires ; elle est simple et facile à implémenter dans les codes de calcul. Dans cette thèse, la méthode de l'équilibrage harmonique est appliquée.

Parce que la non-linéarité du système est cubique, seules les harmoniques impaires sont considérées [Szemplinska (1990)]. Par conséquent, pour une première approximation la solution \mathbf{q} est exprimée comme suit:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \cos(\omega t) \quad (5.61)$$

L'équation (5.61) est injectée dans les équations du mouvement l'équation (5.60) pour donner une équation de la forme :

$$\mathbf{F}(\omega, t) = \left[\left[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} \right] \cos(\omega t) + \left[\frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \cos^3(\omega t) \right] \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.62)$$

En appliquant la méthode de l'équilibrage harmonique [Ribeiro et Petyt (1999)], les équations du mouvement sont dérivées dans le domaine fréquentiel pendant une période. L'équation (5.62) devient :

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{F}(\omega, t) \cos(\omega t) dt = \left[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.63)$$

Le problème généralisé non-linéaire de valeurs propres donné par l'équation (5.63) peut être résolu itérativement en utilisant la méthode de linéarisation du mode propre. Cette méthode est décrite en détail dans le chapitre 6.

5.3. Intégration numérique

Dans certains cas particuliers, on peut calculer analytiquement les intégrales présentés dans les éléments des matrices de rigidité et masse. Par exemple, pour un triangle, le Jacobien est

constant, et les intégrales se ramènent à des monômes que l'on sait intégrer exactement. Mais le calcul explicite de ces intégrales est généralement impossible. Par conséquent, ces intégrales sont calculées numériquement en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre. Celle-ci donne une approximation de l'intégrale sous forme d'une somme pondérée des valeurs de l'intégrale en un certain nombre de points de l'élément appelés points d'intégration.

L'équation fondamentale de la quadrature de Gauss-Legendre pour la construction des points et poids d'intégration pour un triangle de référence est donnée par :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i^* w_j^* g(\xi_i^*, \eta_j^*) |\mathbf{J}(\xi_i^*, \eta_j^*)| \quad (5.64)$$

où

$$\xi_i^* = \frac{1}{2}(1 + \xi_i) \quad (5.65)$$

$$w_i^* = \frac{w_i}{2} \quad (5.66)$$

$$\eta_j^* = \frac{1}{2}(1 - \xi_i^*)(1 + \eta_j) \quad (5.67)$$

$$w_j^* = \frac{1}{2}(1 - \xi_i^*)w_j \quad (5.68)$$

Les scalaires w_i^* et w_j^* sont appelés poids d'intégration, et les coordonnées ξ_i^* et η_j^* sont les coordonnées des m points d'intégration dans l'élément de référence.

Pour un domaine triangulaire, Dunavant (1985) a proposé une formule symétrique basée sur les règles de quadrature de Gauss permettant d'intégrer efficacement des fonctions de degrés élevés sur des éléments triangulaires. Cette méthode a été adoptée dans les codes de calculs basés sur la version- p [Cugnon et *al.* (1995a)]. Même si certains points sont hors du domaine, les résultats obtenus lors de nombreux tests réalisés ont toujours été satisfaisants.

Vu le degré élevé des matrices de rigidités non-linéaires et le Jacobien qui n'est pas constant, l'intégration du produit du Jacobien et les fonctions de formes et leurs dérivées nécessitent un grand nombre de points. De là le nombre de points de quadrature utilisé dans ce travail est compromis entre la précision et la stabilité numérique. Un choix assez précis consiste à utiliser $m=2p+2$ points d'intégration.

Chapitre 6

Description des techniques de programmation

Objectif

L'objectif principal des quatre chapitres précédents devait améliorer la construction des matrices locales afin de les rendre plus appropriées à l'application de la version-p. Ce chapitre présente l'implémentation des formules mathématiques obtenues précédemment dans un code de calcul écrit en langage Fortran 90. Basé sur la théorie des plaques à gradient fonctionnel du premier ordre, la non-linéarité géométrique de Von Karman et la formulation par l'élément-p courbé, ce code permettra de déterminer les fréquences et modes propres linéaires et non-linéaires des plaques vibrantes de formes géométriques arbitraires. Une description inclut les logiciels et matériel utilisés (software et hardware), organigramme, dictionnaire des paramètres, sous-programmes, fichier de données et fichier de sortie. L'algorithme de la méthode de linéarisation du mode propre est développé pour le calcul des valeurs et vecteurs propres non-linéaires.

6.1. Logiciels et matériel

Les logiciels utilisés dans ce travail, le Matlab 6.5 pour le calcul symbolique des fonctions de forme et leurs dérivées, l'Origin 6.0 pour le traçage des courbes et des graphes, le langage de programmation utilisé est le Fortran 90. Le matériel utilisé pour la programmation est un micro-ordinateur avec un processeur Pentium 4 (3.0 GHz) et 1 Go de Ram.

6.2. Organigramme

La figure 6.1 montre les différentes étapes du programme élaboré.

6.3. Description du programme

6.3.1. Fichier de données

Le fichier de données contient toutes les données nécessaires pour le programme tels que les paramètres des éléments (NTE, NTN, NTN_R, connectivité des éléments et les nœuds restreints,...), physiques (modules de Young, coefficients de Poisson, densité,...) et géométriques (dimensions et forme de la plaque).

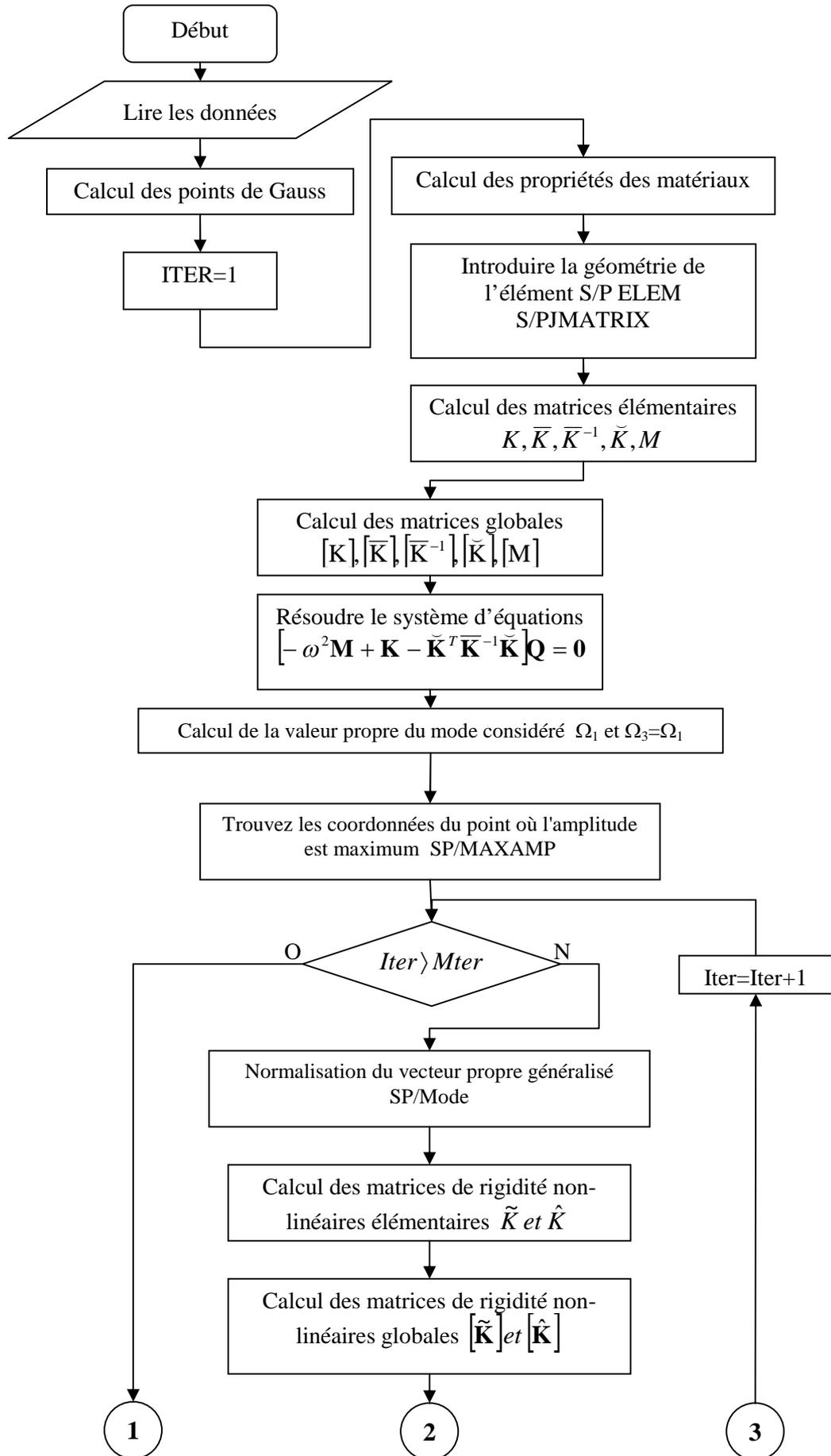
6.3.1.1. Paramètres des éléments

Les paramètres de l'élément- p stockés dans le fichier de données sont les suivants :

- ▲ NTE : Nombre total d'éléments
- ▲ NTN : Nombre total de nœuds
- ▲ NTC : Nombre total de côtés
- ▲ NNR : Nombre de nœuds restreints
- ▲ NCR : Nombre de côtés restreints
- ▲ NMH : Degré du polynôme de l'élément- p
- ▲ NMODE : Numéro du mode spécifique
- ▲ LL(J) : Connectivité des éléments
- ▲ LNR : Nœuds restreints
- ▲ LCR : Côtés restreints

6.3.1.2. Paramètres physiques

- ▲ SC : Facteur de correction de cisaillement
- ▲ Em : Module de Young du métal
- ▲ Ec : Module de Young de la céramique
- ▲ PRm : Coefficient de Poisson du métal



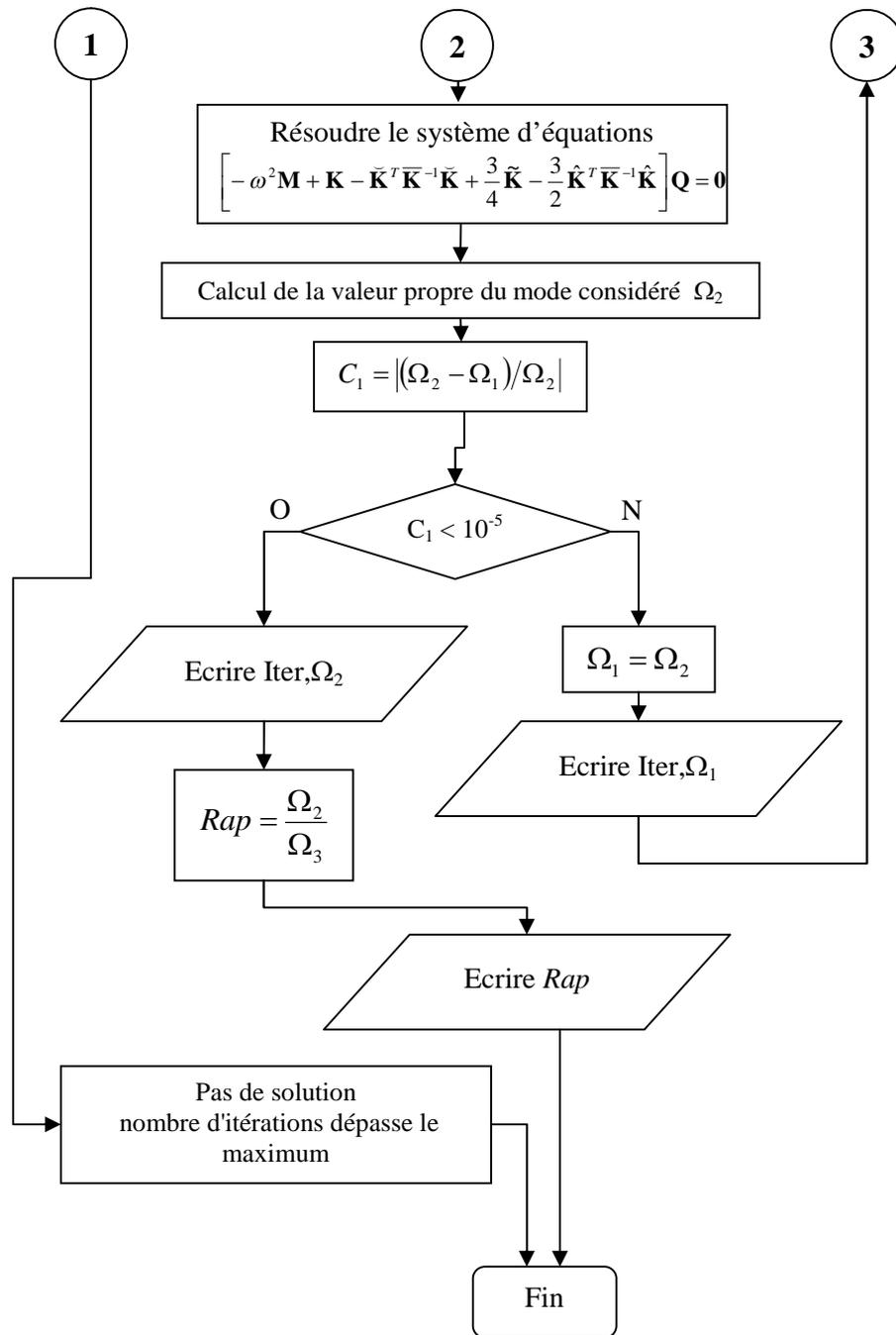


Figure 6.1 : Organigramme du programme élaboré.

- ▲ PRc : Coefficient de Poisson de la céramique
- ▲ ROm : Densité du métal
- ▲ ROc : Densité de la céramique
- ▲ EN : Exposant de la fraction volumique

6.3.1.3. Paramètres géométriques

- ▲ h : Epaisseur de la plaque
- ▲ $X(i), Y(i)$: Coordonnées des nœuds aux sommets des éléments

6.3.1.4. Conditions aux limites

Il suffit de reporter les valeurs imposées (nulles) des déplacements des nœuds de frontière dans le système d'équations (6.1) pour pouvoir le résoudre. L'élément- p triangulaire représenté dans la figure 6.2 contient 3 nœuds aux sommets et 3 côtés, et chaque nœud possède 5 degrés de liberté :

- ▲ u : Déplacement suivant l'axe x .
- ▲ v : Déplacement suivant l'axe y .
- ▲ w : Déplacement suivant l'axe z .
- ▲ θ_x : Rotation de la section droite autour de l'axe x .
- ▲ θ_y : Rotation de la section droite autour de l'axe y .

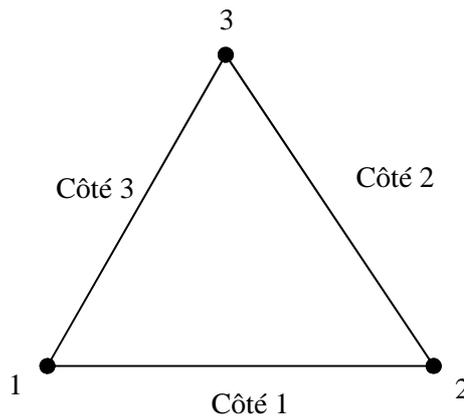


Figure 6.2 : Numérotation des nœuds et côtés de l'élément- p .

Les conditions aux limites s'effectuent suivant l'ordre de numérotation des nœuds et des côtés de l'élément- p triangulaire (Figure 6.2).

L'introduction des conditions aux limites de l'élément- p dans le fichier des données se fait dans l'ordre donné par les tableaux 6.1 et 6.2.

Tableau 6.1: Introduction des conditions aux limites des nœuds.

Nœuds	u	v	w	θ_x	θ_y
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

Tableau 6.2: Introduction des conditions aux limites des côtés.

Côtés	u	v	w	θ_x	θ_y
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

La valeur « 1 » est associée avec un degré de liberté restreint, et la valeur « 0 » est associée avec un degré de liberté est libre. Les conditions aux limites sont appliquées directement dans le programme en supprimant la ligne et la colonne des matrices de rigidité et de masse correspondant aux degrés de liberté restreints.

6.3.2. Programmation

Le programme élaboré permet d'étudier la vibration libre avec la non-linéarité géométrique des plaques à gradient fonctionnel et formes arbitraires par un élément- p triangulaire courbé. Il permet de déterminer les fréquences et vecteurs propres linéaires et non-linéaires et les rapports entre les fréquences. Ces étapes sont illustrées dans l'organigramme de la figure 6.1. Les principaux sous-programmes utilisés dans le programme principal sont présentés ci-dessous.

6.3.2.1. Calcul des propriétés des matériaux

Dans la formulation du matériau à gradient fonctionnel, les constantes d'élasticité données dans les équations (4.35 et 4.37) sont fonctions des propriétés matérielles effectives (équation 3.5-7). Ces constantes sont calculées dans le sous programme PROMAT à l'aide d'une intégration numérique.

6.3.2.2. Description géométrique de la plaque par l'élément- p

La géométrie de la plaque est décrite dans le sous programme ELEM à l'aide des coordonnées des nœuds et les fonctions des côtés et leurs dérivées. Le sous-programme JMATRIX calcule le déterminant et les composantes de la matrice Jacobienne utilisés dans le calcul des matrices de rigidité et masse élémentaires.

6.3.2.3. Formation des matrices $K, \bar{K}, \bar{K}^{-1}, \check{K}, M$

En se basant sur les composantes des matrices élémentaires obtenues par l'équation de Lagrange dans le chapitre précédent et la formulation de l'élément- p triangulaire courbé présenté dans la section 5.1, les matrices élémentaires (matrices de rigidité et matrice masse) sont calculées dans les sous-programmes suivants :

- ▲ S/P STIFF1 : Calcul de la matrice de rigidité linéaire membranaire \bar{K}
- ▲ S/P INVERT : Calcul de la matrice de rigidité linéaire membranaire inverse \bar{K}^{-1}
- ▲ S/P STIFF2 : Calcul de la matrice de rigidité linéaire flexionnelle K
- ▲ S/P STIFF6 : Calcul de la matrice de rigidité de couplage \check{K}
- ▲ S/P MASSE : Calcul de la matrice masse M

L'assemblage de ces matrices élémentaires dans les matrices globales se fait ensuite en ignorant les lignes et les colonnes correspondant aux nœuds et côtés restreints déjà lus à partir du fichier de données. A ce stade, l'équation du système vibratoire linéaire libre est obtenue comme suit :

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \check{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}}] \mathbf{Q} = 0 \quad (6.1)$$

La résolution de ce système se fait par l'algorithme de Jacobi pour obtenir les valeurs et vecteurs propres correspondants.

6.3.2.4. Calcul des coordonnées (ξ_0, η_0) du point dont l'amplitude est maximale

Le S/P AMPMAX calcule les amplitudes à partir du vecteur propre correspondant au mode spécifique, ensuite il recherche les coordonnées du point dont l'amplitude est maximale.

6.3.2.5. Normalisation du vecteur propre

La normalisation du vecteur propre à chaque itération se fait dans le S/P MODE en utilisant deux amplitudes, la première est l'amplitude maximale calculée dans l'élément par le S/P AMPMAX et la deuxième est l'amplitude spécifique dépendant de l'épaisseur de la plaque.

6.3.2.6. Formation des matrices de rigidité non-linéaires \hat{K}, \tilde{K}

Après la normalisation du vecteur propre du mode spécifié, ce dernier est utilisé dans le calcul des matrices de rigidité non-linéaires dans les sous programmes suivants :

- ▲ S/P STIFF3 : Calcul de la matrice de rigidité non-linéaire de couplage \hat{K}
- ▲ S/P STIFF4 : Calcul de la matrice de rigidité non-linéaire flexionnelle \tilde{K}

L'assemblage de ces matrices élémentaires dans les matrices globales se fait en ignorant dans celles-ci les lignes et les colonnes correspondant aux nœuds et côtés restreints déjà lus à partir du fichier de données. Un système d'équations linéaire de la vibration non-linéaire libre de la plaque obtenu est comme suit :

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

De la même façon, la résolution de ce système se fait toujours par l'algorithme de Jacobi pour obtenir les valeurs et vecteurs propres non-linéaires.

6.3.2.7. Calcul des valeurs propres par la méthode de Jacobi

Cette section est consacrée au calcul des valeurs et des vecteurs propres. Le problème des valeurs propres est important à tous les niveaux scientifiques et également dans les calculs numériques d'ingénieur. Résoudre un problème généralisé de valeurs propres consiste à trouver des couples $\lambda_i, \{X_i\}$ qui satisfont la relation suivante :

$$[K]\{X_i\} = \lambda_i [M]\{X_i\} \quad (6.3)$$

La résolution de cette équation qui consiste à trouver « n » premières valeurs et vecteurs propres s'effectue en utilisant la méthode de Jacobi (1846) très largement utilisée pour les systèmes de moyennes dimensions.

Condition d'application

Les matrices masse [M] et de rigidité [K] doivent être symétriques et définies positives.

❖ Idée

Les matrices [K] et [M] sont transformées en matrices diagonales en utilisant des transformations successives où les matrices de transformation sont déterminées en se basant sur la matrice à transformer [DUONG (2008)]:

$$\begin{aligned}
 [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\
 [K^2] &= [Q^1]^T [K^1] [Q^1] & [M^2] &= [Q^1]^T [M^1] [Q^1] \\
 \dots & & & \\
 \dots & & & \\
 [K^{k+1}] &= [Q^k]^T [K^k] [Q^k] & [M^{k+1}] &= [Q^k]^T [M^k] [Q^k] \\
 \dots & & & \\
 \dots & & & \\
 [K^{k \rightarrow \infty}] &= [K^d] & [M^{k \rightarrow \infty}] &= [M^d]
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Grâce aux transformations, les matrices $[K^k]$; $[M^k]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$; $[M^d]$ lorsque k tend vers l'infini. Les valeurs et vecteurs propres peuvent être déduits des matrices diagonales :

$$\begin{aligned}
 [\lambda] &= [K^d][M^d]^{-1} \Leftrightarrow \lambda_i = K_{ii}^d / M_{ii}^d \\
 [X] &= [Q^1][Q^2] \dots [Q^k] \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

❖ **Démonstration**

Les valeurs et vecteurs propres définis par l'équation (6.3) peuvent être autrement définis comme suit :

$$([K] - \lambda[M])\{X\} = 0 \tag{6.6}$$

La condition d'existence du vecteur $\{X\}$ non nul est $[K] - \lambda[M]$ singulière :

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0 \tag{6.7}$$

Transformons les matrices $[K]$ et $[M]$ par la matrice de transformation $[Q]$:

$$[\bar{K}] = [Q]^T [K] [Q] \quad [\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q] \tag{6.8}$$

Les valeurs et vecteurs propres des nouvelles matrices (équation (6.8)), $\bar{\lambda}$ et $\{\bar{X}\}$, sont définis par :

$$([\bar{K}] - \bar{\lambda}[\bar{M}])\{\bar{X}\} = 0 \tag{6.9}$$

ou

$$[Q]^T ([K] - \bar{\lambda} [M]) [Q] \{ \bar{X} \} = 0 \quad (6.10)$$

Comme $\bar{\lambda}$ est la valeur propre des matrices $[\bar{K}]$ et $[\bar{M}]$, elle satisfait donc :

$$\det([\bar{K}] - \bar{\lambda} [\bar{M}]) = 0 \quad (6.11)$$

Où encore :

$$\begin{aligned} \det([\bar{K}] - \bar{\lambda} [\bar{M}]) &= \det([Q]^T ([K] - \bar{\lambda} [M]) [Q]) \\ &= \det([Q]^T) \det([Q]) \det([K] - \bar{\lambda} [M]) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

On déduit que :

$$\det([K] - \bar{\lambda} [M]) = 0 \quad (6.13)$$

Donc les valeurs propres $\bar{\lambda}$ du système transformé sont identiques aux valeurs propres λ du système original si $\det [Q] = 0$.

Les vecteurs propres $[\bar{X}]$ du système transformé satisfont la relation définie par l'équation (6.10). Donc, on peut déduire les vecteurs propres $[X]$ du système original par :

$$[\bar{X}] = [Q] [X] = 0 \quad (6.14)$$

Les transformations successives des matrices originales amènent à des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$. Les valeurs et vecteurs propres des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$ sont calculés par :

$$[\lambda^d] = [K^d] [M^d]^{-1} \quad (6.15)$$

$$[X^d] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Sous transformations successives, les valeurs propres $[\lambda]$ restent les mêmes $[\lambda] = [\bar{\lambda}]$ et les vecteurs propres $[X]$ sont calculés par :

$$[X] = [Q^1][Q^2] \dots [Q^k][X^d] \quad (6.17)$$

Alors, l'équation (6.10) est démontrée.

❖ Matrices de transformation

La $k^{\text{ème}}$ matrice de transformation $[Q^k]$ possède la structure suivante :

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & a & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & b & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

où $Q^k(i, j) = a$ et $Q^k(i, j) = b$ sont calculés pour qu'un terme (i, j) non diagonal et non nul de $[K^k]$ soit nul après la transformation. Donc, après chaque transformation, un terme devient nul et après plusieurs transformations successives, les termes non diagonaux deviennent tous nuls. La matrice finale est diagonale.

6.3.3. Fichier de sortie

Le fichier de sortie contient les paramètres calculés par le programme élaboré tels que :

- ▲ NEQB : Nombre d'équation du système,
- ▲ XI0, ETA0 : Coordonnées du point dont l'amplitude est maximale,
- ▲ OM1 : Paramètre de fréquence linéaire,
- ▲ OM2 : Paramètre de fréquence non-linéaire,
- ▲ ITER : Nombre d'itération,
- ▲ OMR : Rapports des paramètres de fréquence,
- ▲ ITEMPS : Temps d'exécution en secondes.

6.4. La méthode de linéarisation des modes

Dans l'équation (5.63), les matrices non-linéaires $\tilde{\mathbf{K}}$ et $\hat{\mathbf{K}}$ dépendent du mode propre normalisé considéré. Par conséquent les valeurs et les vecteurs propres de cette équation sont différents des valeurs et des vecteurs propres du problème linéaire. Dans le calcul itératif des

matrices de rigidité non-linéaires, le vecteur propre ne peut pas être utilisé directement, il doit être normalisé selon l'amplitude spécifique vibratoire à un certain emplacement de la plaque. Par exemple, quand le principe de la non-linéarité géométrique est appliqué pour trouver la fréquence fondamentale et le mode fondamental pour une plaque carrée avec des conditions aux limites symétriques, l'amplitude spécifique au centre de la plaque peut être utilisée pour normaliser le mode propre.

L'algorithme de la méthode de linéarisation des modes utilisée dans l'analyse de vibration libre non-linéaire des plaques est donné par Han et Petyt (1997), comme suit :

Algorithme de la méthode de linéarisation des modes

- Étape I:

Introduire les données nécessaires et résoudre le système linéaire pour déterminer les valeurs et vecteurs propres. λ_1, Φ_1 du mode indiqué.

$$[\mathbf{K}_L - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{q} = 0 \quad (6.19)$$

- Étape II:

Normalisation des modes propres.

Calcul du déplacement transversal w_m au point (ξ_0, η_0) dont l'amplitude maximale à partir du vecteur propre déjà calculé Φ_i .

$$w_m = N^w(\xi_0, \eta_0) \cdot \Phi_i \quad (6.20)$$

Calculer ensuite Φ_i par

$$\Phi_i = w_{\max} \cdot \Phi_i / w_m \quad (6.21)$$

où w_{\max} est l'amplitude spécifiée au point (ξ_0, η_0) , et l'indice inférieur " i " indique la $i^{\text{ème}}$ itération, $N^w(\xi_0, \eta_0)$ est la fonction de forme du déplacement transversal au point (ξ_0, η_0) .

- Étape III:

Formulation des matrices de rigidité non-linéaires selon le mode Φ_i dans les sous-programmes STIFF3 et STIFF4.

$$\mathbf{K}_{NL} = \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \quad (6.22)$$

- Étape IV:

Résoudre le nouveau système linéaire pour déterminer les valeurs et vecteurs propres pour le mode indiqué.

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{q} = 0 \quad (6.23)$$

Une solution améliorée du nouveau système d'équations pour le mode indiqué λ_{i+1} et Φ_{i+1} est obtenue.

- Étape V:

Test de convergence

$$C_{i+1} = \left| \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+1}} \right| \quad (6.24)$$

Si $(C_{i+1} > C_r)$ alors aller à l'étape II, où C_r est l'échelon de critère de convergence ($C_r = 10^{-5}$).

- Étape VI:

Afficher les résultats et fin du programme

Chapitre 7

Résultats et interprétations

Objectif

Ce chapitre présente les résultats obtenus par les éléments-p courbés pour différents cas. En premier lieu et pour prouver l'efficacité de cet élément, deux types de plaques sont considérées : plaques circulaires et plaques elliptiques avec différentes excentricités. Pour la première fois une représentation à deux dimensions des six premiers modes pour les plaques sectorielles elliptiques encastrées est illustrée dans la deuxième partie. La troisième partie est consacrée aux vibrations non-linéaires des plaques circulaires et elliptiques. Ensuite, une étude de vibration linéaire et non-linéaire est menée pour quatre types de matériaux à gradient fonctionnel en fonction de plusieurs paramètres physiques, géométriques et conditions aux limites. Dans cette partie une discussion est donnée sur l'effet de ces paramètres sur le durcissement dû à la non-linéarité géométrique.

7.1. Convergence et validation des résultats de la vibration linéaire

La convergence et la validation doivent être réalisées pour assurer l'exactitude et la précision des résultats avec un temps optimal. L'étude de convergence et de validation se fera d'abord pour les plaques circulaires et elliptiques encastrees et simplement appuyées. Les résultats sont donnés pour le paramètre de fréquence Ω_L exprimé en fonction de la pulsation propre de vibration, par:

$$\Omega_L = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (7.1)$$

Vu la symétrie des conditions aux limites, nous modélisons seulement le quart de la plaque avec un élément- p triangulaire courbé comme le montre la figure 7.1, avec un angle de secteur $\phi = 90^\circ$.

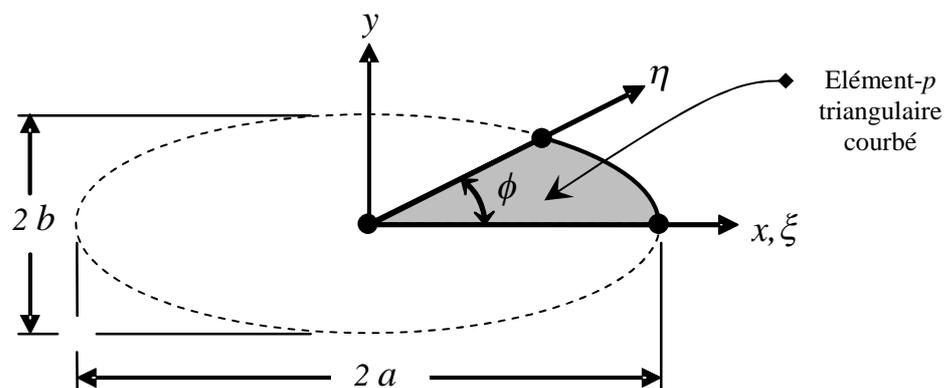


Figure 7.1 : Modélisation géométrique d'une plaque elliptique par un élément- p triangulaire courbé.

7.1.1. Convergence

7.1.1.1. Plaques circulaires

L'étude porte sur :

- deux types de plaques: plaque mince ($h/b=0.001$) et plaque modérément épaisse ($h/b=0.1$).
- deux types de conditions aux limites (encastrement et appui simple).

Les résultats des quatre premiers paramètres de fréquences flexionnels pour des plaques circulaires en fonction du degré du polynôme d'interpolation p sont présentés dans les figures

7.2-5. Les allures des graphes dans ces figures montrent la rapidité de la convergence vers les solutions exactes [Irie et al. (1980)] en augmentant le degré du polynôme d'interpolation ($p=6, \dots, 11$).

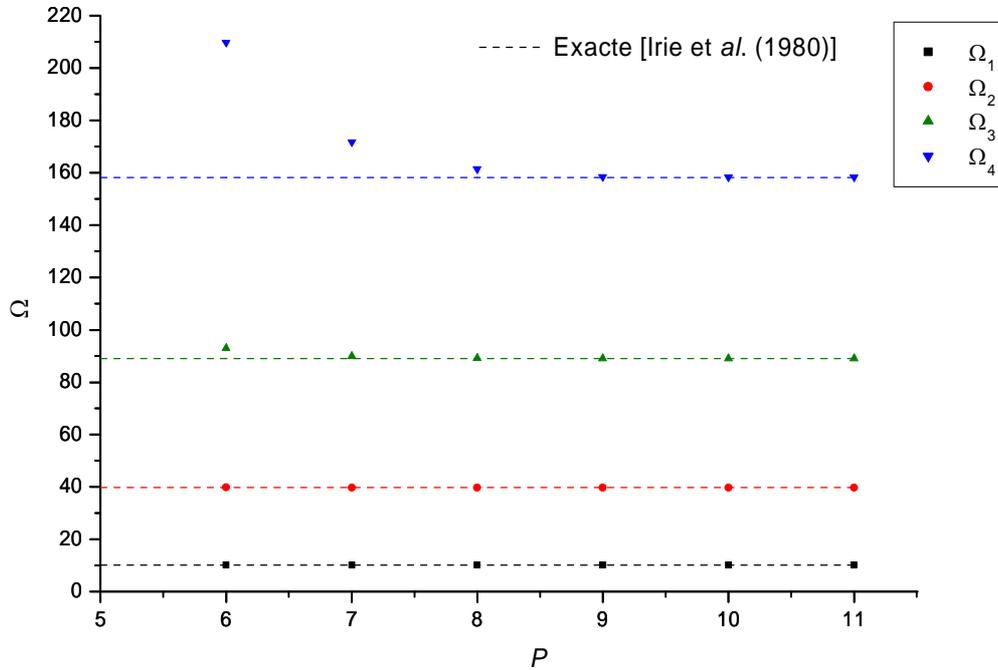


Figure 7.2 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire encadrée ($h/b=0.001$).

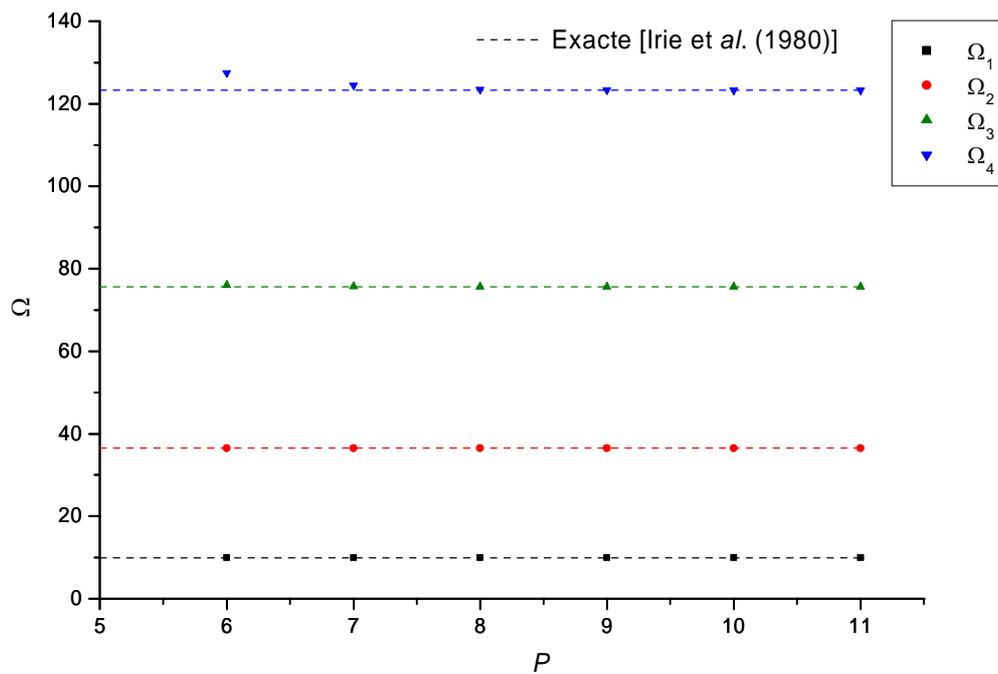


Figure 7.3 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire encadrée ($h/b=0.1$).

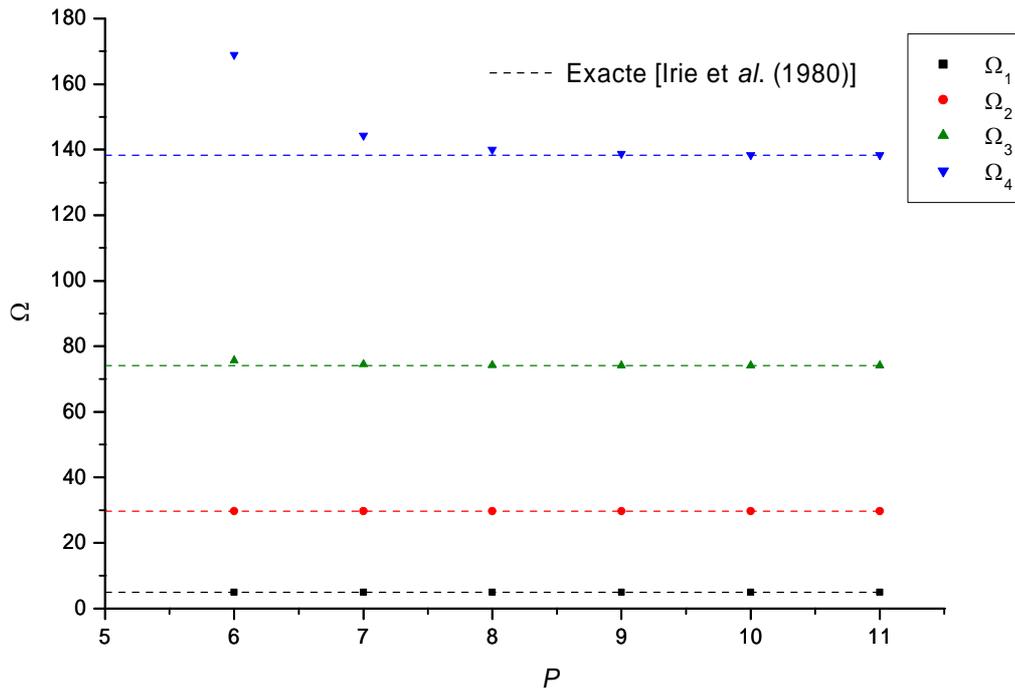


Figure 7.4 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire simplement appuyée ($h/b=0.001$).

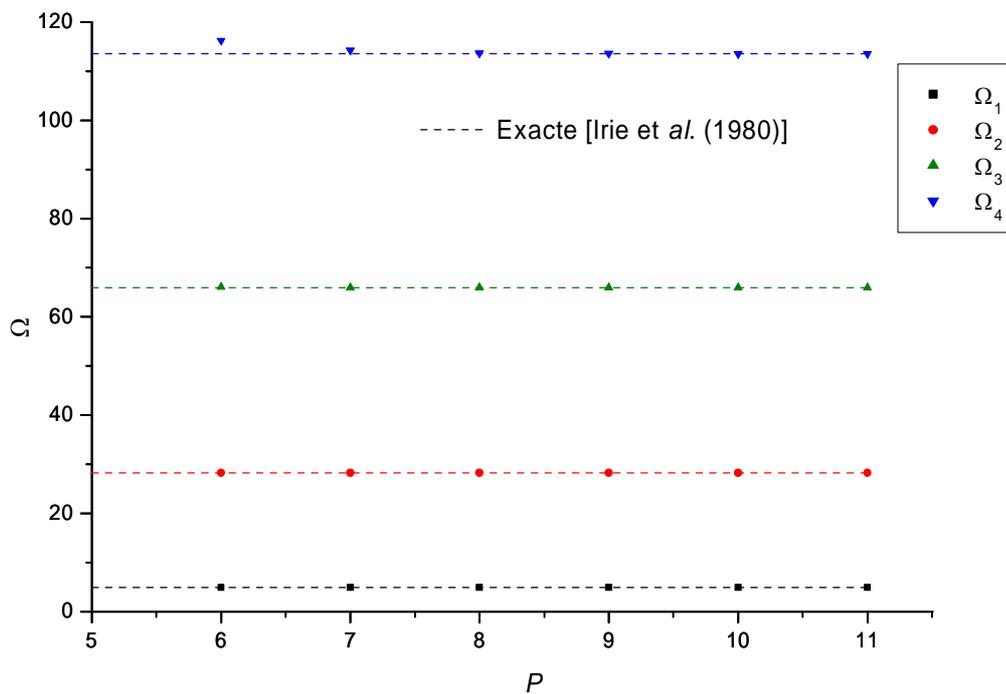


Figure 7.5 : Convergence des quatre premiers paramètres de fréquences d'une plaque circulaire simplement appuyée ($h/b=0.1$).

A partir de ces figures, nous remarquons que la convergence est très rapide en augmentant le degré du polynôme p . Et pour $p \geq 8$, les allures des courbes deviennent presque des droites.

7.1.1.2. Plaques elliptiques

Dans cet exemple, nous étudions une plaque elliptique mince ($h/b=0.001$) encadrée avec différentes excentricités ($b/a=0.1, 1.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8$ et 1.0). La plaque est modélisée par un élément- p triangulaire courbé (voir figure 7.1). Les résultats du mode fondamental pour la plaque elliptique en fonction du degré du polynôme d'interpolation p sont représentés dans la figure 7.6. Les allures des graphes montrent que la convergence est toujours atteinte avec seulement quelques degrés du polynôme d'interpolation. A partir des résultats obtenus nous remarquons une stabilité de convergence, pour $p \geq 8$, deux paramètres de fréquences successives sont les mêmes jusqu'à trois ou quatre chiffres après la virgule.

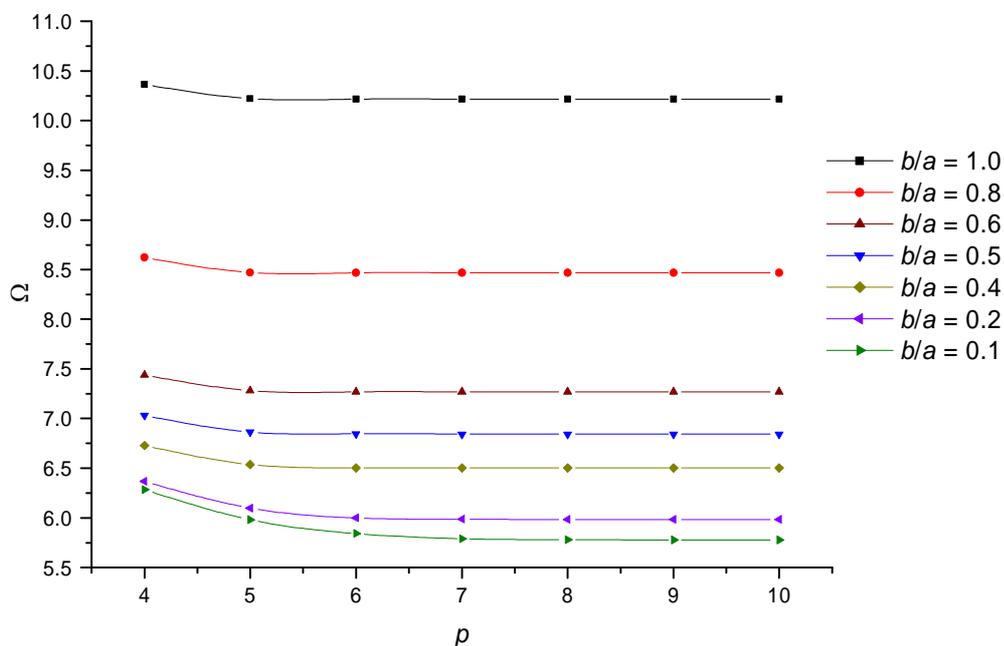


Figure 7.6 : Convergence des paramètres de fréquences fondamentales d'une plaque elliptique encadrée ($h/b=0.001$) pour différentes excentricités (b/a).

7.1.2. Validation

Des exemples numériques sont présentés dans cette partie pour montrer l'efficacité et la précision de l'élément- p triangulaire courbé. Nous considérons les exemples étudiés précédemment pour la validation.

7.1.2.1. Plaques circulaires

Les résultats obtenus en utilisant le modèle présent pour les plaques circulaires encadrées et simplement appuyées sont montrés dans les tableaux 7.1 et 7.2 avec les résultats trouvés dans la littérature qui traitent le même problème avec différentes théories et méthodes. Dans

cet exemple, l'épaisseur de la plaque prend les valeurs $h/b=0.001, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ et 0.25 . Les tableaux 7.1-2 montrent clairement que les résultats obtenus sont identiques avec ceux obtenus par Liew et al. (1997b) avec au moins cinq chiffres significatifs. A noter que dans cette référence, les auteurs utilisent la méthode de quadrature différentielle (DQM).

Tableau 7.1: Comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque circulaire encastree.

Mode	Méthode	h/b					
		0.001	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
1	Présent	10.216	10.145	9.9408	9.6286	9.2400	8.8068
	Liew et al. (1997b)	10.216	10.145	9.9408	9.6286	9.2400	8.8068
2	Présent	39.771	38.855	36.479	33.393	30.211	27.253
	Liew et al. (1997b)	39.771	38.855	36.479	33.393	30.211	27.253
3	Présent	89.106	84.995	75.664	65.551	56.862	49.420
	Liew et al. (1997b)	89.102	84.995	75.664	65.551	56.862	49.420
4	Présent	158.17	146.40	123.32	102.09	85.571	73.054
	Liew et al. (1997b)	158.18	146.40	123.32	102.09	85.571	73.054

Tableau 7.2: Comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque circulaire simplement appuyée.

Mode	Méthode	h/b					
		0.001	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25
1	Présent	4.9351	4.9247	4.8938	4.8440	4.7773	4.6963
	Liew et al. (1997b)	4.9351	4.9247	4.8938	4.8440	4.7773	4.6963
2	Présent	29.720	29.323	28.240	26.715	24.994	23.254
	Liew et al. (1997b)	29.720	29.323	28.240	26.715	24.994	23.254
3	Présent	74.155	71.756	65.942	59.062	52.514	46.775
	Liew et al. (1997b)	74.155	71.756	65.942	59.062	52.514	46.775
4	Présent	138.32	130.35	113.57	96.775	82.766	71.603
	Liew et al. (1997b)	138.31	130.35	113.57	96.775	82.766	71.603

7.1.2.2. Plaques elliptiques

Les plaques étudiées dans cette partie sont des plaques elliptiques minces encastrees. Plusieurs valeurs d'excentricité de l'ellipse ($b/a = 1.0, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2$ et 0.1) sont considérées. Une comparaison des résultats obtenus avec les valeurs existantes de la théorie des plaques minces [Leissa (1969), Jones (1975) et Prasad *et al.* (1992)] est présentée dans le Tableau 7.3. Les résultats de Leissa (1969) ont une bonne corrélation avec les résultats

actuels. Les six premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque elliptique modérément épaisse sont présentés dans le tableau 7.4 et comparés avec les valeurs de Wang et *al.* (1995). Les résultats donnés dans ce tableau s'accordent avec ceux de la référence.

Remarque : Un nouveau paramètre de fréquence ($\Omega_L = \omega \bar{b}^2 \sqrt{\rho h / D}$) est utilisé dans le tableau 7.4. Ce paramètre de fréquence est utilisé par Wang et *al.* (1995), avec les dimensions ($\bar{a} = 2a, \bar{b} = 2b$).

Tableau 7.3: Comparaison des paramètres de fréquences linéaires fondamentales des plaques elliptiques encastées ($h/b=0.001$).

b/a	Present	Leissa (1969)	Jones (1975)	Prasad <i>et al.</i> (1992)
1.0	10.216	10.216	10.216	10.216
0.8	8.467	8.467	8.477	8.473
0.6	7.270	7.270	7.321	7.321
0.5	6,844	6.845	6.817	6.936
0.4	6.503	6.504	6.606	6.657
0.2	5.986	5.996	6.340	6.343
0.1	5.779	5.831	6.276	6.277

Tableau 7.4: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences linéaires des plaques elliptiques encastées.

\bar{a}/\bar{b}	h/\bar{b}	Méthode	Mode					
			1	2	3	4	5	6
2	0.001	Présent	27.377	39.497	55.975	69.856	77.000	88.046
		Wang et <i>al.</i> (1995)	27.38	39.50	55.96	69.84	76.96	88.04
	0.05	Présent	26.802	38.409	54.006	66.722	73.579	83.324
		Wang et <i>al.</i> (1995)	26.81	38.42	54.00	66.72	73.60	83.36
	0.1	Présent	25.292	35.681	49.297	59.493	65.826	73.009
		Wang et <i>al.</i> (1995)	25.31	35.72	49.32	59.56	65.92	73.12
3	0.001	Présent	25.244	31.818	40.106	50.230	62.327	66.705
		Wang et <i>al.</i> (1995)	25.24	31.82	40.08	50.16	62.20	66.68
	0.05	Présent	24.730	31.040	38.952	48.523	59.806	63.791
		Wang et <i>al.</i> (1995)	24.74	31.05	38.96	48.52	59.84	63.80
	0.1	Présent	23.374	29.051	36.095	44.493	54.215	57.018
		Wang et <i>al.</i> (1995)	23.39	29.08	36.13	44.52	54.28	57.08

7.2. Vibration linéaire : étude paramétrique

Dans cette partie, une étude de l'influence des paramètres géométriques et des conditions aux limites sur les vibrations libres des plaques sectorielles elliptiques est présentée.

7.2.1. Plaques sectorielles

L'analyse des vibrations libres des plaques sectorielles elliptiques modérément épaisses encadrées est considérée. Les figures 7.7-10 montrent la variation du premier paramètre de fréquence linéaire pour une plaque sectorielle elliptique encadrée en fonction de l'angle ϕ ($\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ et 90°). Les plaques sectorielles elliptiques modérément épaisses ($h/b = 0.05, 0.1$) avec deux valeurs d'excentricité de l'ellipse sont prises en considération ($a/b = 2; 5$). Les conditions aux limites appliquées à la plaque sont les suivantes (EEE, AAA, EEA, AEA, ELE et ELA) avec (E : encadré, A : appui simple, L : libre). L'ordre utilisé pour les conditions aux limites est l'ordre de numérotation des cotés de l'élément- p . À partir de ces graphes, les paramètres de fréquences diminuent lorsque l'angle ϕ et l'excentricité de l'ellipse augmentent. Nous constatons aussi que l'influence des conditions aux limites sur les paramètres de fréquences est plus importante pour le cas $a/b = 2$ que pour le cas $a/b = 5$, et cela est dû au fait que la plaque dans le cas $a/b = 2$ devient plus petite et donc plus rigide.

Les résultats des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques pour les excentricités $a/b = 2$ et 5 et pour les rapports d'épaisseur $h/b = 0.001, 0.05, 0.1$ et l'angle de secteur ($\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ et 90°) avec les conditions aux limites (EEE, AAA, EEA, AEA, ELE et ELA) sont donnés dans l'Annexe A.

Les figures 7.11-13 montrent les six premiers modes d'une plaque sectorielle elliptique avec deux rapports d'excentricité $a/b = 1$ et 2 . L'épaisseur de la plaque est prise comme $h/b = 0.1$. Le graphe montre clairement la différence entre les formes des modes des plaques sectorielles circulaires ($a/b = 1$) et celles des plaques sectorielles elliptiques ($a/b = 2$) et l'influence de l'angle du secteur sur les formes de mode.

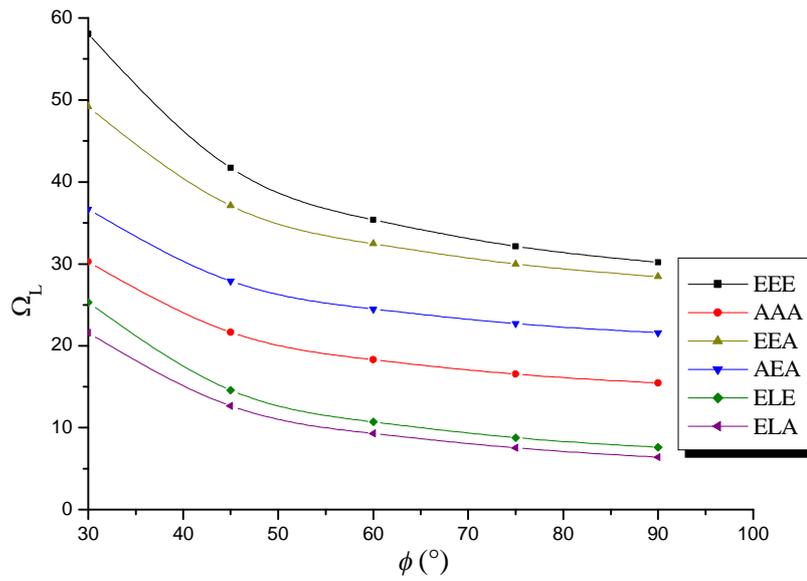


Figure 7.7 : Variation du premier paramètre de fréquence d’une plaque elliptique sectorielle en fonction de l’angle ϕ ($a/b = 2$, $h/b=0.05$).

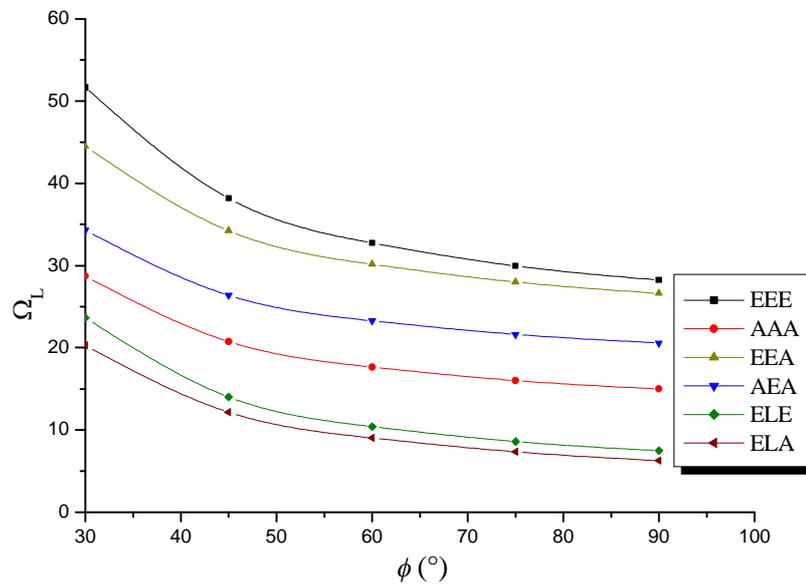


Figure 7.8 : Variation du premier paramètre de fréquence d’une plaque elliptique sectorielle en fonction de l’angle ϕ ($a/b = 2$, $h/b=0.1$).

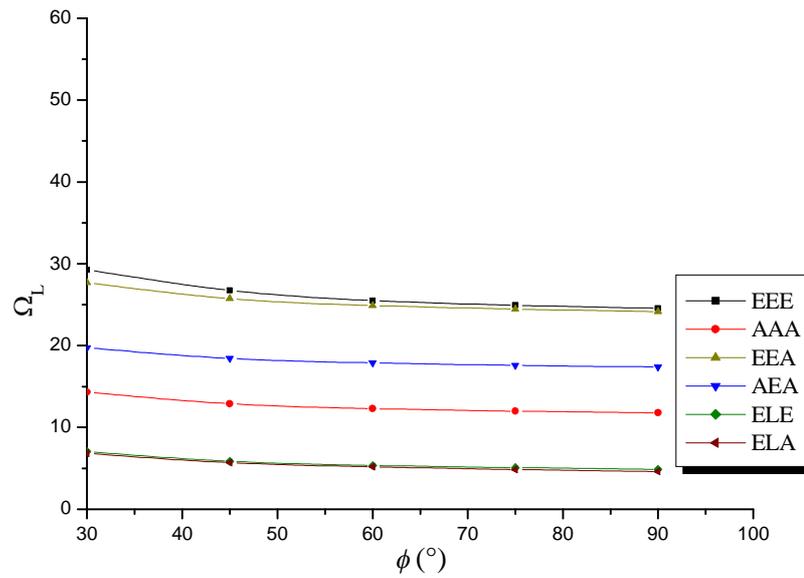


Figure 7.9 : Variation du premier paramètre de fréquence d’une plaque elliptique sectorielle en fonction de l’angle ϕ ($a/b = 5$, $h/b=0.05$).

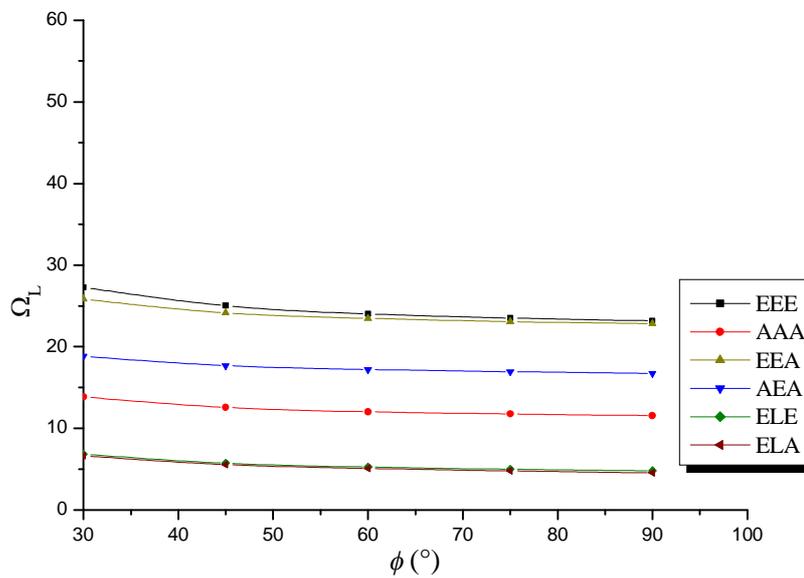


Figure 7.10 : Variation du premier paramètre de fréquence d’une plaque elliptique sectorielle en fonction de l’angle ϕ ($a/b = 5$, $h/b=0.1$).

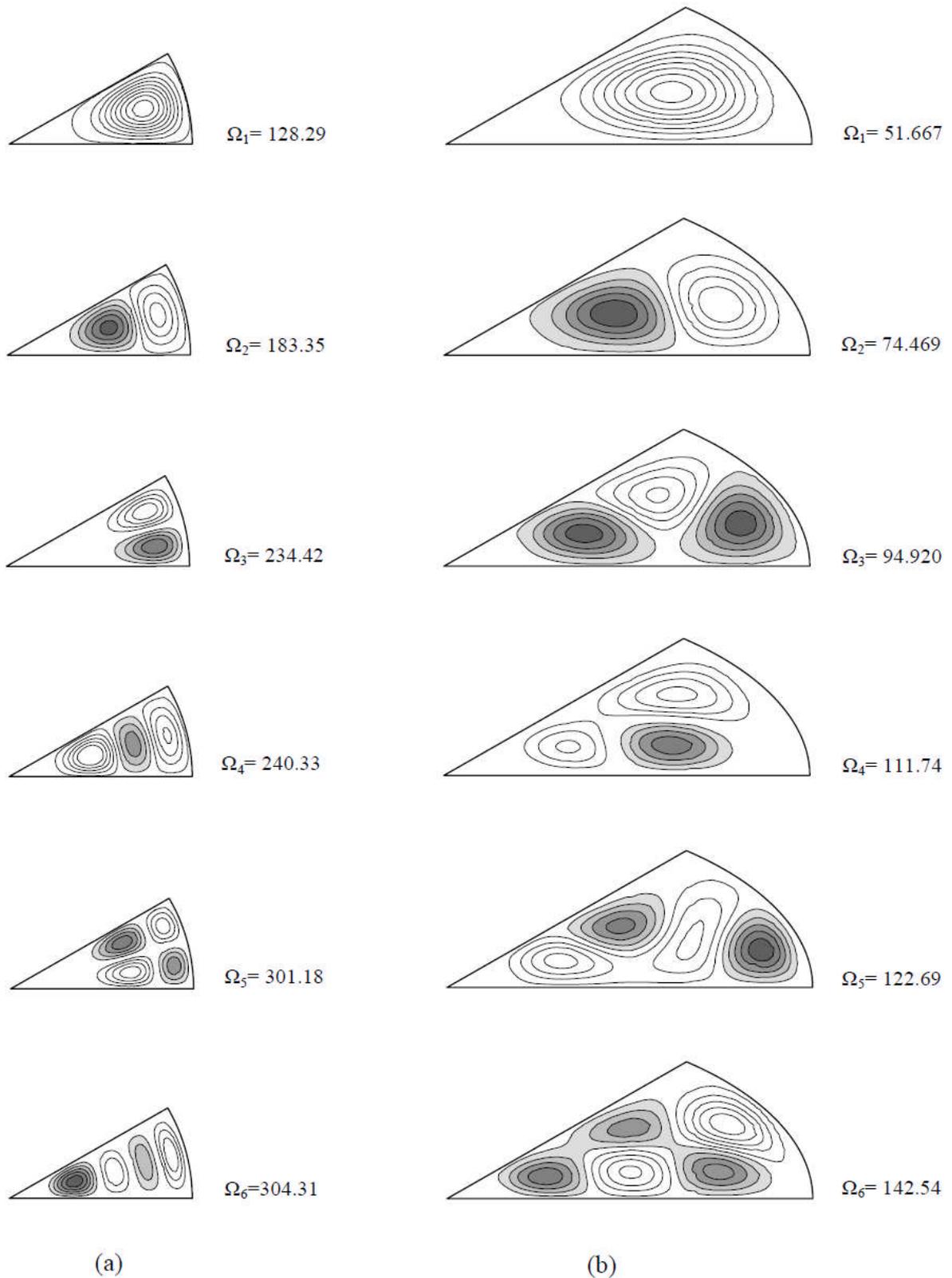


Figure 7.11 : Graphes des six premières modes d'une plaque sectorielle elliptique avec

$\phi = 30^\circ$: a) $a/b = 1$; b) $a/b = 2$.

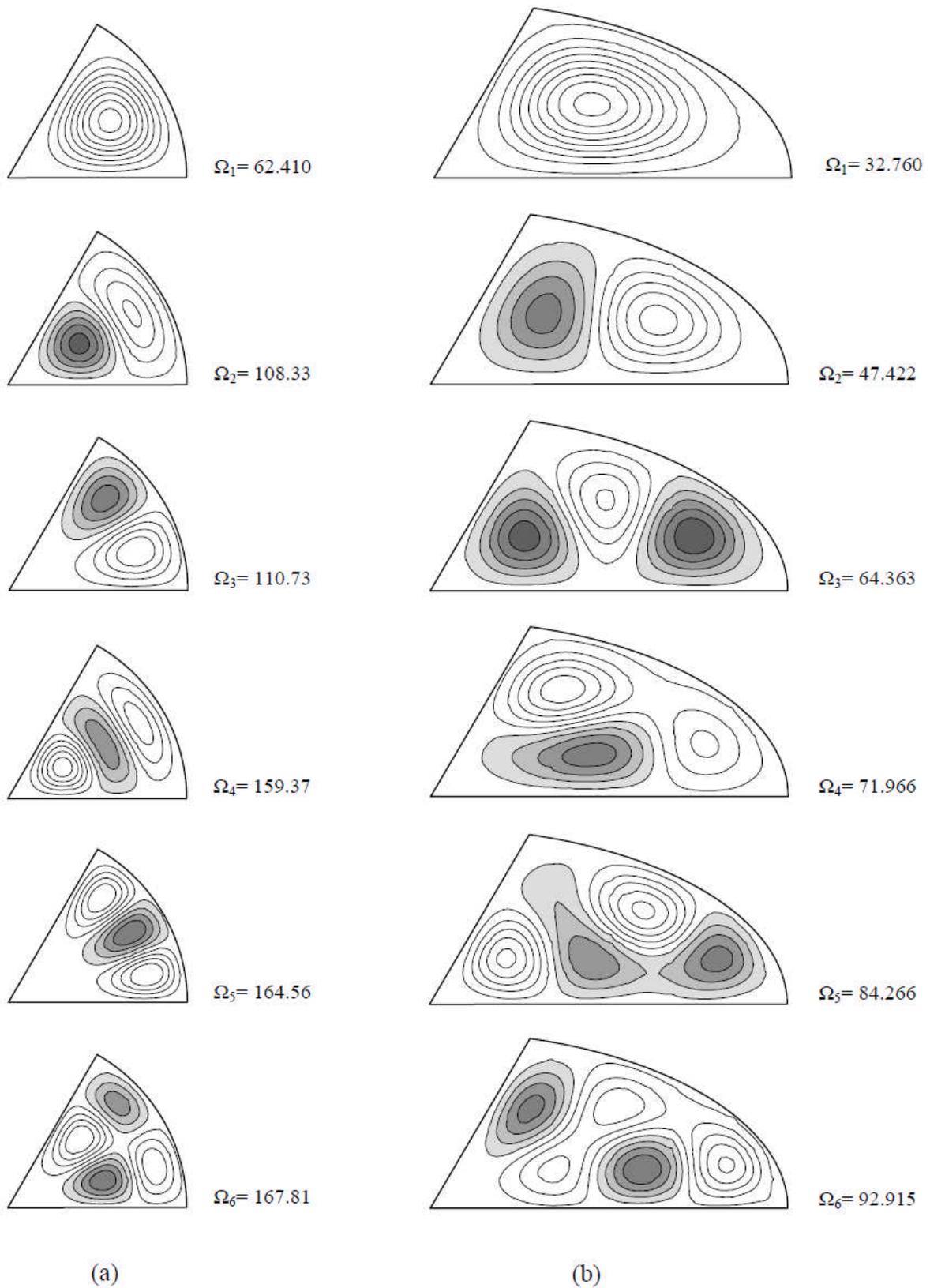


Figure 7.12 : Graphes des six premières modes d'une plaque sectorielle elliptique avec $\phi = 60^\circ$: a) $a/b = 1$; b) $a/b = 2$.

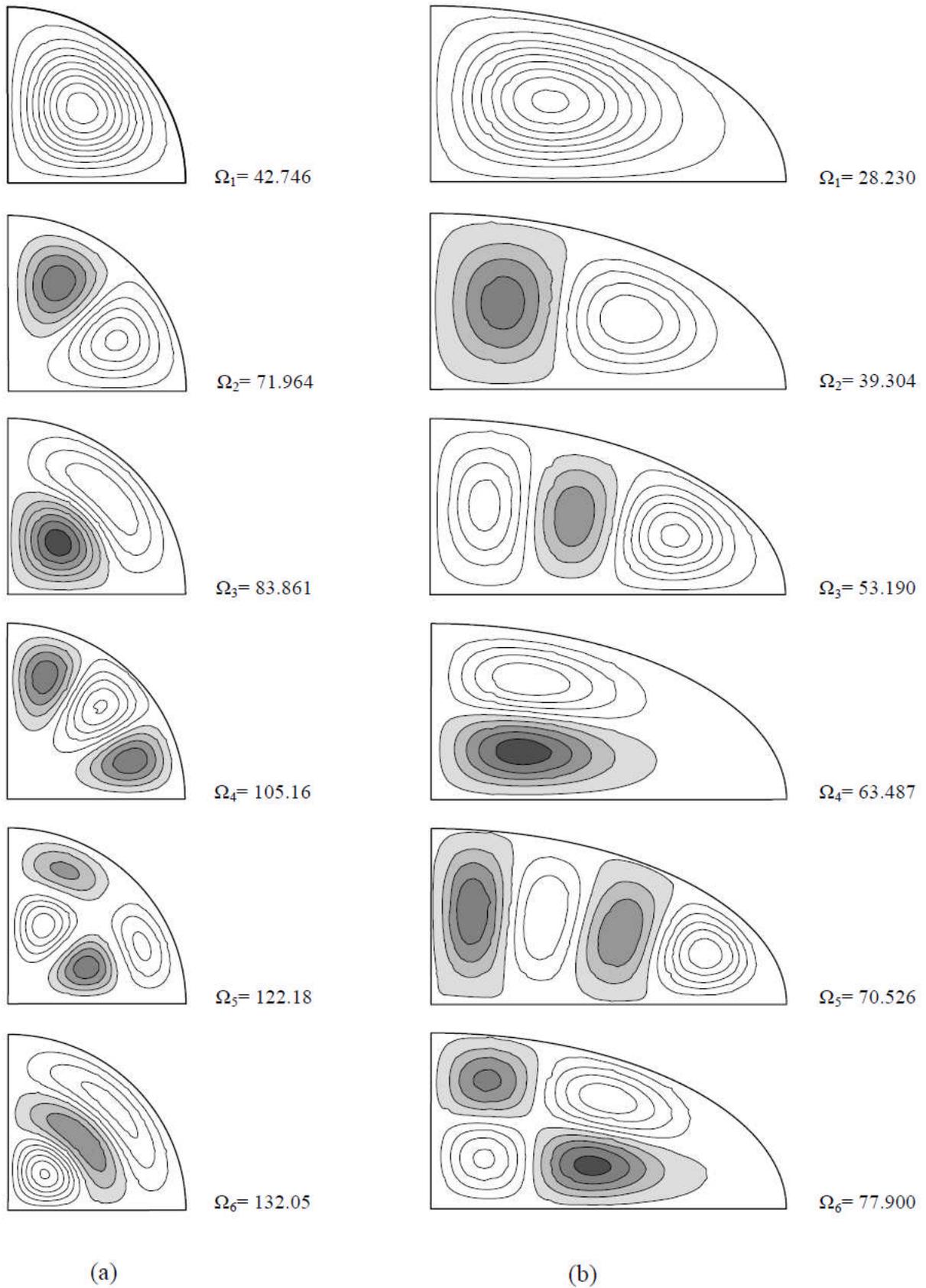


Figure 7.13 : Graphes des six premières modes d'une plaque sectorielle elliptique avec $\phi = 90^\circ$: a) $a/b = 1$; b) $a/b = 2$.

7.2.2. Etude de vibration non-linéaire

Cette partie concerne la validation des résultats obtenus par l'élément- p courbé pour les vibrations libres non-linéaires des plaques circulaires et elliptiques minces et modérément épaisses, suivie d'une étude paramétrique pour les vibrations non-linéaires des plaques sectorielles circulaires et elliptiques.

7.2.2.1. Validation des plaques circulaires

Dans le premier exemple de vibrations non-linéaire, le rapport des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L en fonction de l'amplitude maximale adimensionnelle $|w_{\max}|/h$ pour le mode fondamental des plaques circulaires encastées est étudié. Trois rapports d'épaisseurs $h/b=0.001, 0.05$ et 0.1 sont considérés, le tableau 7.5 donne une comparaison des résultats obtenus avec les valeurs des références trouvées dans la littérature. Les résultats de l'élément- p triangulaire courbé pour l'épaisseur $h/b=0.001$ concordent très bien avec ceux de Huang et Al-Khatta (1977).

Tableau 7.5: Comparaison des rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L pour le mode fondamental des plaques circulaires encastées.

h/b	Méthode	$ w_{\max} /h$				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.001	Présent	1.0075	1.0296	1.0654	1.1135	1.1723
	Huang et Al-Khatta (1977)	1.0075	1.0296	1.0654	1.1135	1.1724
	% (erreur)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0085
0.05	Présent	1.0075	1.0298	1.0657	1.1142	1.1733
	Raju et Rao (1976)	1.0073	1.0286	1.0627	1.1079	1.1624
	% (erreur)	0.0198	0.1167	0.2823	0.5686	0.9377
	Liu et Chen (1996)	1.0099	1.0394	1.0863	1.1495	1.2248
	% (erreur)	0.2376	0.9236	1.8963	3.0709	4.2047
0.1	Présent	1.0077	1.0304	1.0671	1.1163	1.1764
	Raju et Rao (1976)	1.0074	1.0290	1.0636	1.1093	1.1640
	% (erreur)	0.0279	0.1360	0.3291	0.6310	1.0653
	Liu et Chen (1996)	1.0102	1.0399	1.0874	1.1510	1.2274
	% (erreur)	0.2474	0.9135	1.8668	3.0147	4.1551

Nous remarquons que l'erreur relative des rapports des paramètres de fréquences non-linéaires pour une plaque avec $h/b=0.001$ ne dépasse pas 0.0085 % pour une amplitude maximale 1.0. Cependant, les résultats de l'élément- p triangulaire courbé pour les épaisseurs $h/b=0.05$ et 0.1 sont bornées dans l'intervalle fermé par les valeurs de Raju et Rao (1976) et de Liu et Chen (1996), mais ils sont beaucoup plus proches des valeurs de Raju et Rao (1976). Dans le cas de la plaque modérément épaisse $h/b=0.05$ et 0.1, l'erreur relative calculée par rapport à Raju et Rao (1976) donne une variation très petite de 0.0198 % à 0.9377 % et par rapport à Liu et Chen (1996), elle est légèrement plus grande de 0.2376 % à 4.2047 %. Il convient de noter que Raju et Rao (1976) utilisent la méthode des éléments finis et la théorie des plaques de Mindlin. D'autre part, Liu et Chen (1996) utilisent un élément fini axisymétrique et la théorie d'élasticité tridimensionnelle.

7.2.2.2. Validation des plaques elliptiques

Comme deuxième exemple de vibration non-linéaire, nous étudions une plaque elliptique encadrée. Le tableau 7.6 donne les résultats du rapport des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L en fonction de l'amplitude maximale adimensionnelle $|w_{\max}|/h$ pour le mode fondamental des plaques elliptiques encadrées et une comparaison avec les valeurs obtenues par Raju et Hinton (1980). Trois rapports d'épaisseurs $h/b=0.001, 0.05$ et 0,1 sont considérés. Les résultats de l'élément- p triangulaire courbé pour l'épaisseur $h/b=0.001$ concordent très bien avec ceux de Raju et Hinton (1980) qui sont basés sur la théorie des plaques de Mindlin. Nous modélisons le quart de la plaque par un seul élément- p par contre dans le modèle de Raju et Hinton (1980) le quart de la plaque est modélisé par huit éléments finis (version- h). L'avantage de la méthode utilisée résulte du fait que la convergence est rapide par rapport à celle utilisée par Raju et Hinton (1980) malgré l'utilisation d'un seul élément et un nombre réduit de degrés du polynôme d'interpolation. Nous remarquons que l'erreur relative entre les deux résultats est très petite et varie de 0.0099 % à 0.8752 % pour une amplitude maximale de 1.0.

Dans les deux exemples de vibrations non-linéaires des plaques circulaires et elliptiques étudiés précédemment, l'utilisation du processus itératif (la méthode de linéarisation du mode propre présentée dans le chapitre précédent) donne de bons résultats du point de vue de convergence même pour une amplitude maximale de ordre de l'épaisseur ($|w_{\max}|/h=1.$) dans le cas des plaques épaisses.

Tableau 7.6 : Comparaison des rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L pour le mode fondamental des plaques elliptiques encastées avec ($a/b=2$).

h/b	Méthode	$ w_{\max} /h$				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.001	Présent	1.0074	1.0293	1.0649	1.1132	1.1727
	Raju et Hinton (1980)	1.0073	1.0285	1.0627	1.1185	1.1641
	% (erreur)	0.0099	0.0778	0.2070	0.4738	0.7388
0.05	Présent	1.0074	1.0295	1.0653	1.1137	1.1735
	Raju et Hinton (1980)	1.0073	1.0286	1.0629	1.1089	1.1646
	% (erreur)	0.0099	0.0875	0.2258	0.4329	0.7642
0.1	Présent	1.0075	1.0299	1.0662	1.1153	1.1757
	Raju et Hinton (1980)	1.0074	1.0288	1.0634	1.1093	1.1655
	% (erreur)	0.0099	0.1069	0.2633	0.5409	0.8752

7.2.2.3. Vibration non-linéaire des plaques sectorielles

Les rapports de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires pour le mode fondamental des plaques sectorielles elliptiques minces ($h/b=0.001$) et modérément épaisses ($h/b=0.05, 0.1$) avec l'angle de secteur ($\phi = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$) et un rapport d'excentricité ($a/b=2$) sont tracés en fonction de l'amplitude maximale $|w_{\max}|/h$ adimensionnelle dans la figure 7.14. Les coordonnées du point d'amplitude maximum dépendent de l'angle du secteur et de l'excentricité de l'ellipse ainsi que des conditions aux limites. Les coordonnées des points d'amplitude maximale pour $\phi = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ sont respectivement (0.539, 0.462), (0.961, 0.426) et (1.361, 0.304). Nous observons que l'augmentation du rapport de l'épaisseur h/b de 0.001 à 0.1 provoque une augmentation de l'effet de durcissement. Cette augmentation est plus importante pour des valeurs plus petites de l'angle ϕ . En outre, l'effet de durcissement devient plus important pour des valeurs plus élevées du rapport (h/b) et cela est normal puisque la plaque devient plus épaisse.

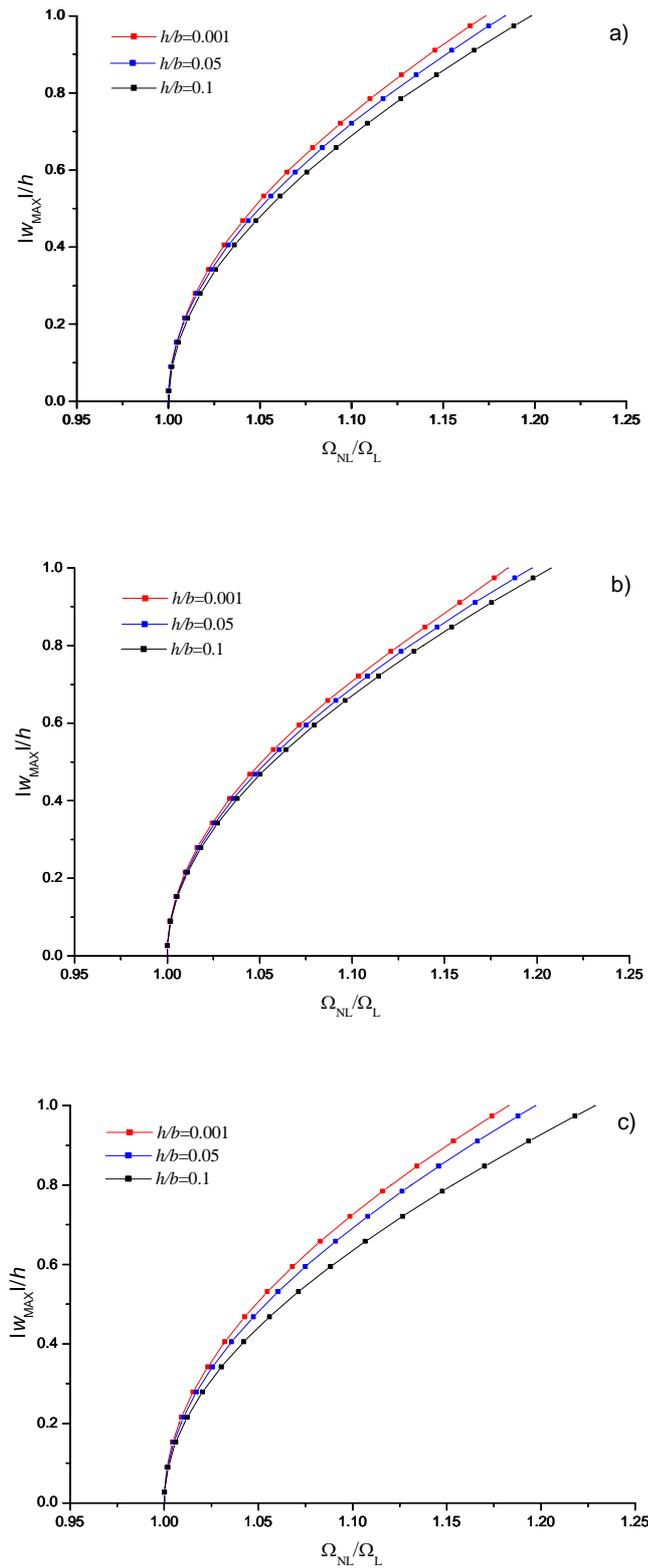


Figure 7.14 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle elliptique encastree avec $a/b = 2$: a) $\phi = 90^\circ$; b) $\phi = 60^\circ$, c) $\phi = 30^\circ$.

Les courbes d'épine dorsale pour deux valeurs de $\phi = 60^\circ, 30^\circ$ avec différentes valeurs de l'excentricité de l'ellipse sont tracées dans les figures. 7.15-16. L'excentricité de l'ellipse a/b prend les valeurs 2 et 0.5. La plaque est considérée modérément épaisse avec un rapport $h/b=0.05$. Nous remarquons une augmentation de l'effet de durcissement avec l'augmentation de l'excentricité de l'ellipse. Nous observons aussi que la diminution de l'angle du secteur ϕ de 60° à 30° conduit à une augmentation importante de l'effet de durcissement.

Les figures. 7.17-19 tracent les courbes d'épine dorsale pour des plaques sectorielles circulaires simplement appuyées. Trois valeurs de l'angle du secteur et du rapport d'épaisseur sont prises en considération ($\phi = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$, et $h/b = 0.001, 0.05, 0.1$).

Les courbes d'épine dorsale pour le 2^{ème} et 3^{ème} mode d'une plaque sectorielle circulaire encastrée avec un angle de secteur $\phi = 90^\circ$ sont tracées dans les figures. 7.20-21. Trois rapports d'épaisseur sont considérés $h/b=0.001, 0.05, 0.1$. L'effet de durcissement dans le 2^{ème} et 3^{ème} mode est clairement montré dans ces figures.

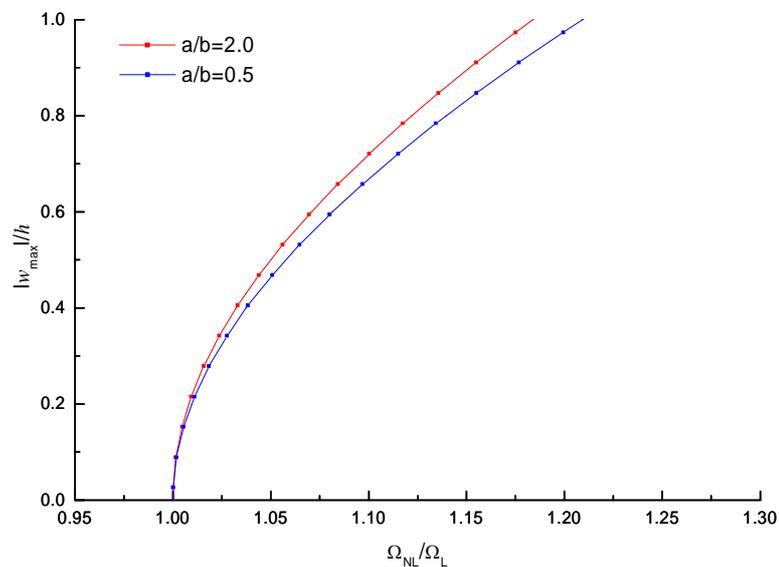


Figure 7.15 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle elliptique encastrée avec $h/b = 0.05$ et $\phi = 60^\circ$.

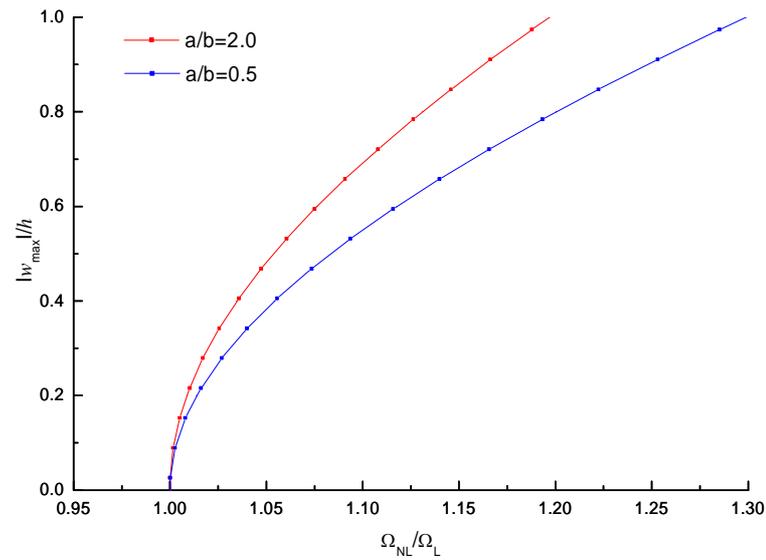


Figure 7.16 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle elliptique encastrée avec $h/b = 0.05$ et $\phi = 30^\circ$.

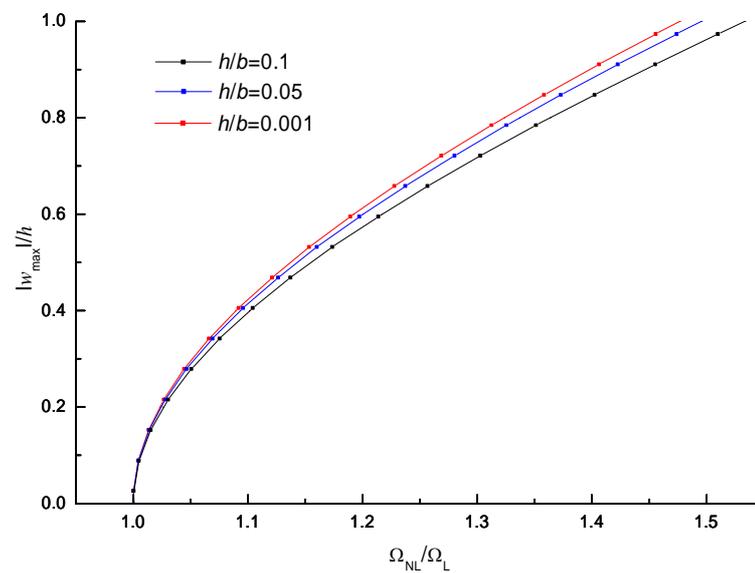


Figure 7.17 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle circulaire simplement appuyée avec $\phi = 90^\circ$.

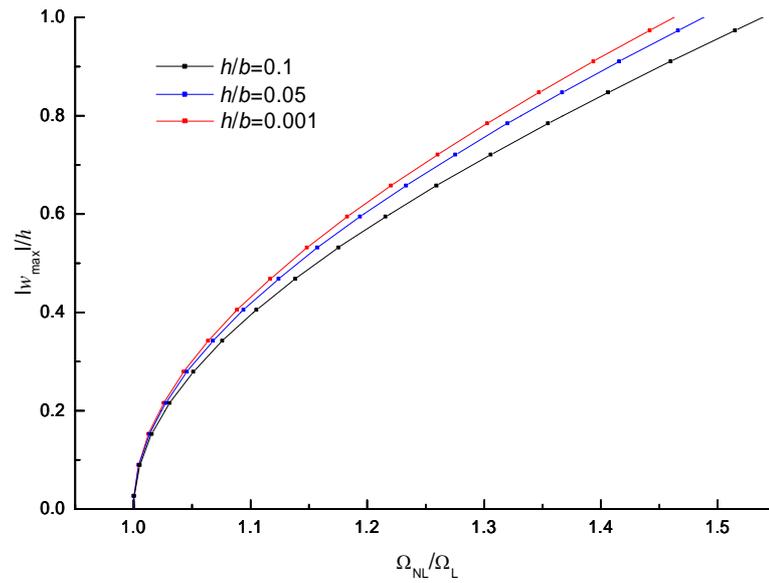


Figure 7.18 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle circulaire simplement appuyée avec $\phi = 60^\circ$.

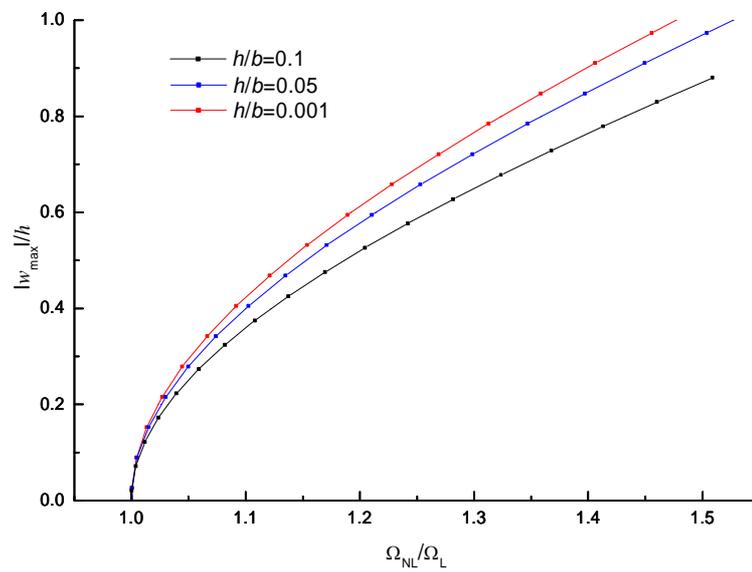


Figure 7.19 : Courbes d'épine dorsale du mode fondamental pour une plaque sectorielle circulaire simplement appuyée avec $\phi = 30^\circ$.

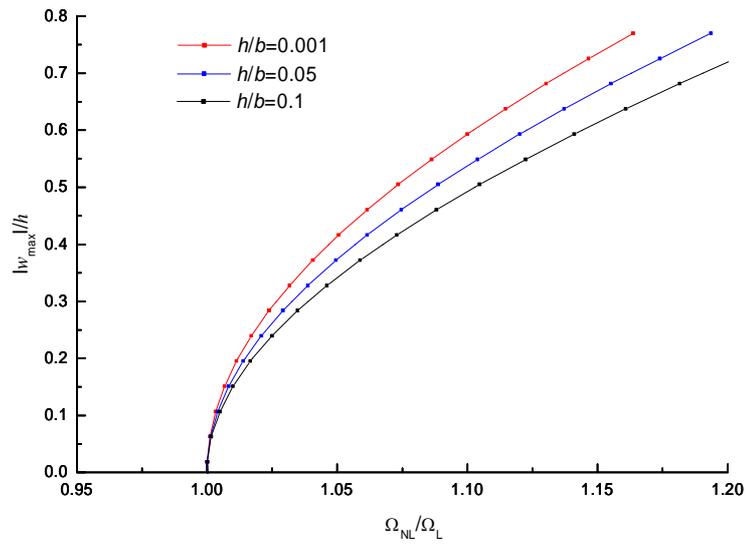


Figure 7.20 : Courbes d'épine dorsale du 2^{ème} mode pour une plaque sectorielle circulaire encastrée avec $\phi = 90^\circ$.

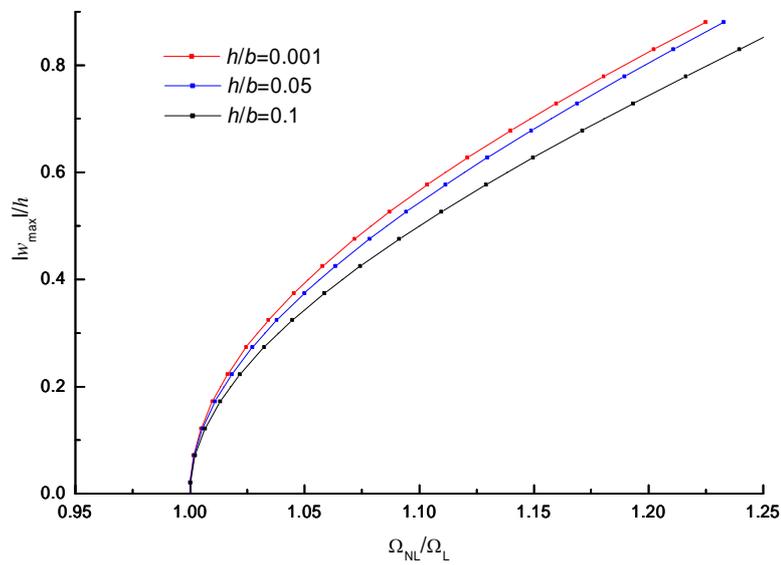


Figure 7.21 : Courbes d'épine dorsale du 3^{ème} mode pour une plaque sectorielle circulaire encastrée avec $\phi = 90^\circ$.

7.3. Etude des plaques en matériaux à gradient fonctionnel

Dans cette section, les résultats sont donnés pour le paramètre de fréquence Ω exprimé en fonction de la pulsation propre de vibration ω , par :

$$\Omega = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_m(1-\nu^2)}{E_m}} \quad (7.2)$$

7.3.1. Convergence et validation des plaques à gradient fonctionnel

Dans cette partie, une étude de convergence et de validation est donnée pour les plaques à gradient fonctionnel. Les études sont effectuées pour la convergence de vibration libre axisymétrique des plaques minces circulaires encastrées. Dans cette section, la plaque à gradient fonctionnel -SUS304/Si3N4- est considérée. Le tableau 7.7 donne la convergence et la comparaison du mode fondamental d'une plaque circulaire mince encastrée avec l'épaisseur $h/b = 0.001$ et l'exposant de fraction volumique variant de la céramique ($n=0$) au métal ($n=\infty$). Nous observons une convergence très rapide qui se produit par augmentation du degré du polynôme p de 4 à 10. Une comparaison des résultats actuels avec ceux existants de la théorie des plaques minces est montrée dans le même tableau.

Tableau 7.7 : Convergence et comparaison des paramètres de fréquences linéaires d'une plaque circulaire à gradient fonctionnel encastrées pour différentes valeurs de n ($\nu = 0.28$ et $T=300K$).

n	p							Allahverdizadeh et al. (2008a)
	4	5	6	7	8	9	10	
Céramique	23.9703	23.6337	23.6169	23.6163	23.6162	23.6162	23.6162	23.5873
0.01	23.6307	23.2985	23.2817	23.2810	23.2810	23.2809	23.2809	23.2964
0.1	21.2281	20.9271	20.9116	20.9109	20.9107	20.9106	20.9106	21.2723
0.5	16.5288	16.2924	16.2805	16.2801	16.2800	16.2800	16.2800	17.2985
0.8	15.1025	14.8875	14.8767	14.8764	14.8763	14.8763	14.8763	16.0439
1	14.5009	14.2954	14.2851	14.2848	14.2848	14.2848	14.2848	15.4879
5	11.8294	11.6703	11.6622	11.6619	11.6619	11.6619	11.6619	12.4211
10	11.2592	11.1076	11.0999	11.0996	11.0996	11.0996	11.0996	11.5676
100	10.4856	10.3395	10.3322	10.3319	10.3319	10.3319	10.3319	10.3896
1000	10.3740	10.2315	10.2262	10.2271	10.2276	10.2277	10.2277	10.2338
10000	10.3690	10.2234	10.2161	10.2158	10.2158	10.2158	10.2158	10.2176
Métal	10.3690	10.2234	10.2161	10.2158	10.2158	10.2158	10.2158	10.2160

Nous remarquons une différence importante entre les résultats de Allahverdizadeh et al. (2008a) et les valeurs actuelles. Pour les valeurs de l'exposant de la fraction volumique ($0.1 \leq n \leq 10$), il est clair qu'il y a une différence significative dans les résultats. Elle est probablement due aux deux points suivants: 1) La théorie des plaques utilisées dans les deux

travaux est différente, Allahverdizadeh et al. (2008a) utilisent la théorie des plaques minces, alors que la théorie du premier ordre des plaques est utilisée dans ce travail; 2) Dans le cas de la plaque circulaire, une singularité apparaît avec un rayon interne zéro dans la formulation de Allahverdizadeh et al. (2008a), et une approximation est faite en utilisant un rayon interne égal à 0.0001. Ce problème de la singularité ne se pose pas dans le travail présent car le rayon interne de la plaque circulaire est pris égal à zéro.

Pour mieux valider notre travail, le tableau 7.8 donne une comparaison des deux premiers modes fondamentaux d'une plaque circulaire mince encadrée avec $h/b = 0.001$ et l'exposant de fraction volumique variant du céramique au métal. Nous remarquons une bonne corrélation du travail fait avec celui de la méthode des éléments finis (MEF^{*}). Ce qui confirme l'efficacité de l'élément- p courbé pour la modélisation des plaques à gradient fonctionnel.

Tableau 7.8 : Comparaison des paramètres de fréquences linéaires d'une plaque circulaire à gradient fonctionnel encadrée pour différentes valeurs de n ($\nu = 0.28$ et $T=300K$).

n	Ω_1		Ω_2			
	Présent	p -MEF [*]	Allahverdizadeh et al. (2008a)	Belalia	p -MEF [*]	Allahverdizadeh et al. (2008a)
Ceramic	23.6162	23.6049	23.5873	91.9418	91.9116	-
0.01	23.2809	23.2708	23.2964	90.6364	90.6108	-
0.1	20.9106	20.9034	21.2723	81.4073	81.3927	82.8410
0.5	16.2800	16.2547	17.2985	63.3673	63.2919	67.0527
0.8	14.8763	14.8431	16.0439	57.8970	57.7952	62.0397
1	14.2848	14.2489	15.4879	55.5918	55.4816	59.8276
5	11.6619	11.6429	12.4211	45.3904	45.3343	48.1363
10	11.0996	11.0911	11.5676	43.2077	43.1859	45.0113
100	10.3319	10.3313	10.3896	40.2237	40.2274	40.4821
1000	10.2277	10.2160	10.2338	39.8175	39.7786	39.8233
10000	10.2158	10.2158	10.2176	39.7717	39.7778	39.7968
Metal	10.2158	10.2158	10.2160	39.7717	39.7778	39.7710

Remarque : p -MEF^{*} est un code de calcul par éléments finis utilisant la version- p basée sur la théorie des coques épaisses.

Les tableaux 7.9-11 donnent les paramètres de fréquence linéaires des quatre premiers modes d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel (SUS304/Si3N4) encadrée pour différentes valeurs de n , trois angles de secteur $\phi = 30^\circ, 60^\circ$ et 90° , et trois rapports d'épaisseur $h/b = 0.001, 0.05$ et 0.1 sont considérés. De ces tableaux, la variation des paramètres de fréquences linéaires est clairement montrée en fonction de l'exposant de fraction volumique (n).

Tableau 7.9 : Paramètres de fréquences linéaires d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel encastrée pour différentes valeurs de n ($\phi=30^\circ$ et $T=300$ K).

h/b	Mode	n						
		Céramique	0.1	0.5	1	5	10	Métal
0.001	1	425.095	377.470	295.070	259.840	213.126	203.360	188.264
	2	683.049	608.441	473.623	419.086	341.698	327.220	299.243
	3	943.286	840.017	657.249	578.107	472.987	451.373	417.879
	4	1012.85	952.215	736.756	656.520	502.850	487.387	429.673
0.05	1	375.609	333.181	260.404	228.600	185.941	177.208	164.495
	2	570.615	506.024	395.567	347.073	281.589	268.252	249.041
	3	761.905	675.287	528.042	463.131	375.084	357.228	331.727
	4	782.883	694.196	551.334	483.348	390.895	372.187	340.668
0.1	1	295.504	262.030	204.439	178.913	143.720	136.768	127.473
	2	423.651	375.578	292.889	256.187	205.252	195.230	182.014
	3	542.669	480.969	374.996	327.911	262.238	249.352	232.572
	4	556.361	495.636	386.364	337.769	270.025	256.740	238.423

Tableau 7.10 : Paramètres de fréquences linéaires d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel encastrée pour différentes valeurs de n ($\phi=60^\circ$ et $T=300$ K).

h/b	Mode	n						
		Céramique	0.1	0.5	1	5	10	Métal
0.001	1	170.775	151.556	118.597	104.345	85.6388	81.7051	75.6304
	2	328.105	291.008	227.739	200.395	164.470	156.915	145.256
	3	336.274	298.246	233.360	205.299	168.504	160.776	148.836
	4	523.336	472.546	369.764	325.060	266.845	254.611	232.336
0.05	1	161.897	143.643	112.343	98.7495	80.710	76.9602	71.3314
	2	300.057	266.163	208.091	182.827	149.165	142.190	131.865
	3	307.273	272.560	213.084	187.204	152.709	145.571	135.004
	4	466.669	413.827	323.362	283.847	231.672	220.765	204.839
0.1	1	142.567	126.445	98.7840	86.6603	70.2471	66.9127	62.1766
	2	248.533	220.325	172.013	150.770	121.729	115.881	107.783
	3	254.038	225.201	175.818	154.104	124.412	118.434	110.164
	4	367.028	325.262	253.824	222.340	178.976	170.300	158.413

Tableau 7.11 : Paramètres de fréquences linéaires d'une plaque sectorielle circulaire à gradient fonctionnel encastrée pour différentes valeurs de n ($\phi=90^\circ$ et $T=300$ K).

h/b	Mode	n						
		Céramique	0.1	0.5	1	5	10	Métal
0.001	1	110,163	97,7652	76,5025	67,3088	55,2423	52,7053	48.7884
	2	198.449	176.119	137.789	121.214	99.4907	94.9266	87.8835
	3	237.134	211.027	164.350	144.855	118.890	113.203	104.983
	4	314.512	298.788	218.358	192.060	157.539	150.311	139.208
0.05	1	106,385	94,3976	73,8402	64,9251	53,1383	50,6791	46,9529
	2	187.548	166.389	130.116	114.365	93.487	89.1494	82.6271
	3	222.227	197.144	154.163	135.498	110.703	105.551	97.8375
	4	286.436	254.079	198.648	174.556	142.496	135.852	125.955
0.1	1	97,3354	86,3400	67,4814	59,2476	48,1928	45,9258	42,6303
	2	164.404	145.779	113.878	99.9144	81.025	77.1797	71.6996
	3	191.794	170.049	132.818	116.510	94.377	89.8806	83.5221
	4	241.026	213.655	166.835	146.302	118.335	112.670	104.737

Nous remarquons pour une augmentation dans l'angle de secteur ou dans le rapport d'épaisseur entraîne une diminution importante dans les valeurs des paramètres de fréquence.

Vu l'influence de plusieurs paramètres sur la vibration libre des plaques à gradient fonctionnel, les tableaux B.1-24 dans l'annexe B donnent la variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles (encastrées et simplement appuyées) à gradient fonctionnel (SUS304/Si3N4 et Al/Al₂O₃) en fonction des paramètres ($\phi=60^\circ$, 90° ; $h/b=0.001$, 0.05 , 0.1 ; et $n=0.$, 0.1 , 0.5 , 1 , 3 , 5 , 10).

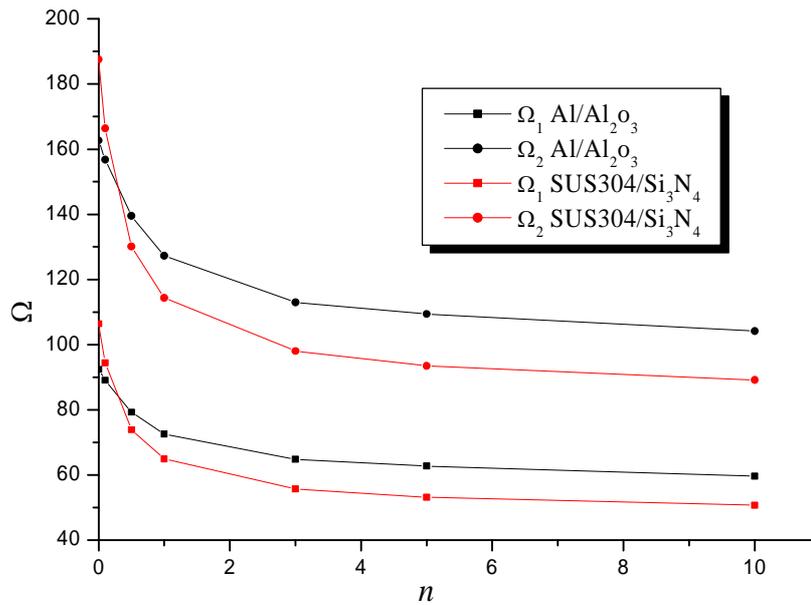


Figure 7.22 : Variation des deux premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree en fonction de l'exposant de fraction volumique (n) ($\phi=90^\circ$, $h/b=0.05$).

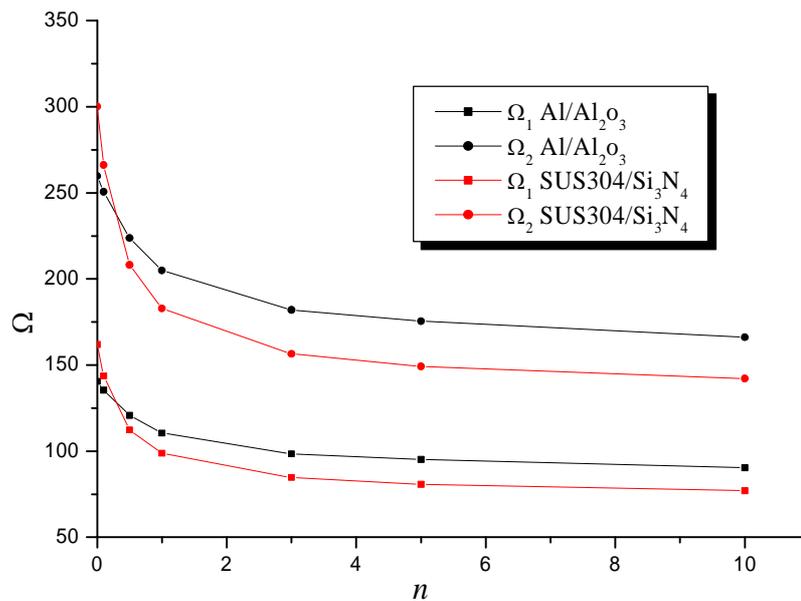


Figure 7.23 : Variation des deux premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree en fonction de l'exposant de fraction volumique (n) ($\phi=60^\circ$, $h/b=0.05$).

Les figures 7.22-23 illustrent la variation des deux premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree en fonction de l'exposant de la fraction volumique (n) pour $\phi=90^\circ$ et 60° . Dans cet exemple, deux types de matériaux à gradient fonctionnel sont considérés Al/Al₂O₃ et SUS304/Si₃N₄. L'épaisseur de la plaque est $h/b=0.05$. De ces figures nous remarquons deux points importants : 1) la variation est plus

importante pour la plaque SUS304/Si₃N₄ que pour la plaque Al/Al₂O₃; 2) une diminution importante des valeurs des paramètres de fréquences est obtenue pour une augmentation de l'exposant de la fraction volumique n de 0 à 1. Dans cet intervalle, le mélange contient plus de céramique que de métal. Pour les valeurs de $n \geq 3$, la variation est moins influencée puisque le métal devient le constituant massif du mélange.

7.3.2. Etude de la vibration non linéaire des plaques à gradient fonctionnel

Il est clair que la convergence de la fréquence non-linéaire dépend de la convergence de la fréquence linéaire. Dans cette section, nous utilisons un degré du polynôme $p = 8$ pour lequel nous avons obtenu une excellente précision dans la section précédente.

La figure 7.24 montre la variation des rapports de paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L en fonction des amplitudes $|w_{max}|/h$ des plaques circulaires métalliques encadrées. Deux plaques sont considérées : plaque mince ($h/b=0.001$) et plaque modérément épaisse ($h/b=0.1$). Les résultats de l'élément- p triangulaire courbé sont identiques avec les valeurs de la théorie des plaques minces données par Huang et Al-Khatta (1977) comme le montre la figure 7.24. Dans le cas des plaques modérément épaisses, la comparaison des résultats avec ceux de Raju et Rao (1976) montre une très bonne concordance.

La vibration libre non-linéaire des quatre types de plaques sectorielles à gradient fonctionnel (SUS304/Si₃N₄, Ti-AL-4V/Aluminum oxide, AL/AL₂O₃ et AL/ZrO₂) est étudiée. Deux angles de secteur $\phi = 90^\circ$ et 60° et deux rapports d'épaisseur $h/b = 0,05$ et $0,1$ sont considérés. Les valeurs de l'exposant de la fraction volumique sont prises égales à $n=0.5, 2, 5$ et 10 . Les rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L en fonction de l'amplitude maximale adimensionnelle $|w_{max}|/h$ pour le mode fondamental des plaques sectorielles encadrées sont calculés. Les courbes résultantes d'épine dorsales sont tracées dans les figures 7.25-32. Les coordonnées du point de l'amplitude maximale pour le mode fondamental changent en fonction de l'angle de secteur. Pour $\phi = 90^\circ$ et 60° les coordonnées du point de l'amplitude maximale sont respectivement $x=0,382$; $y=0,366$ et $x=0,604$; $y=0,297$.

Les effets des propriétés physiques, de l'angle de secteur, du rapport d'épaisseur et de l'exposant de la fraction volumique sur les courbes d'épine dorsale sont étudiés. L'observation suivante peut être effectuée. Le comportement de durcissement est clairement montré dans les allures des graphes. Le comportement durcissant augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur $h/b = 0.05$ à 0.1 mais diminue lorsque l'exposant de la fraction volumique n augmente. Ce comportement des matériaux à gradient fonctionnel provient de la variation des

paramètres physiques de ces matériaux. D'après les équations (3.5-7), si nous augmentons l'exposant de la fraction volumique n , les propriétés matérielles effectives du mélange tendent vers les propriétés physiques du métal. D'après le tableau 3.5, le module d'élasticité le plus petite est celui du métal pour les quatre types des matériaux à gradient fonctionnel utilisé. Cette diminution dans le module d'élasticité a donnée une diminution dans le comportement de durcissement.

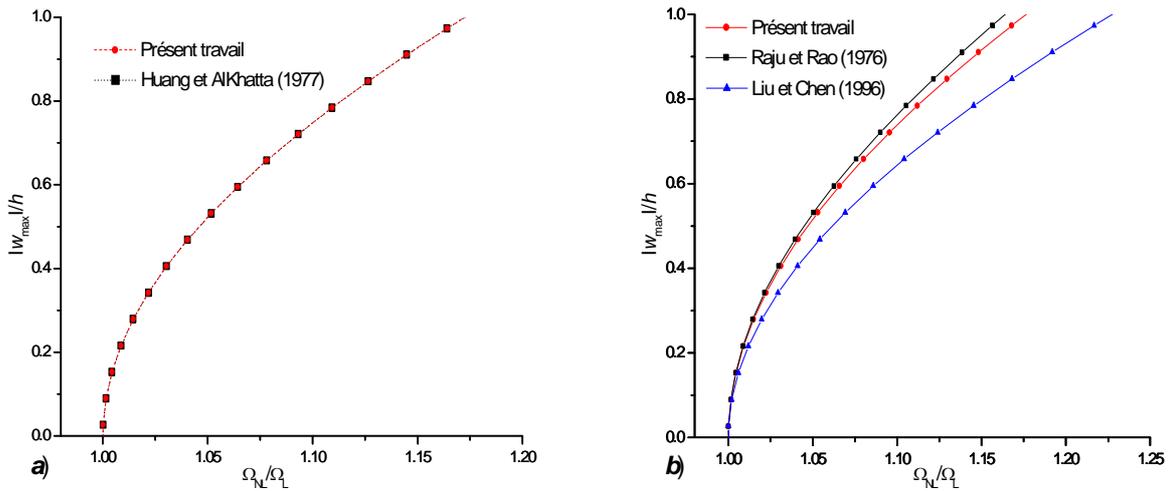


Figure 7.24 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque métallique circulaire encastree : a) $h/b=0.001$; b) $h/b=0.1$.

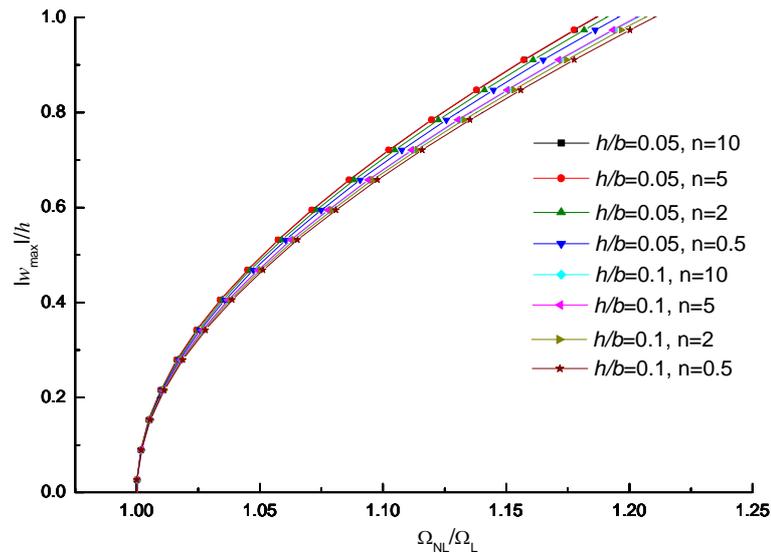


Figure 7.25 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree (SUS304/Si₃N₄, $\phi = 90^\circ$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

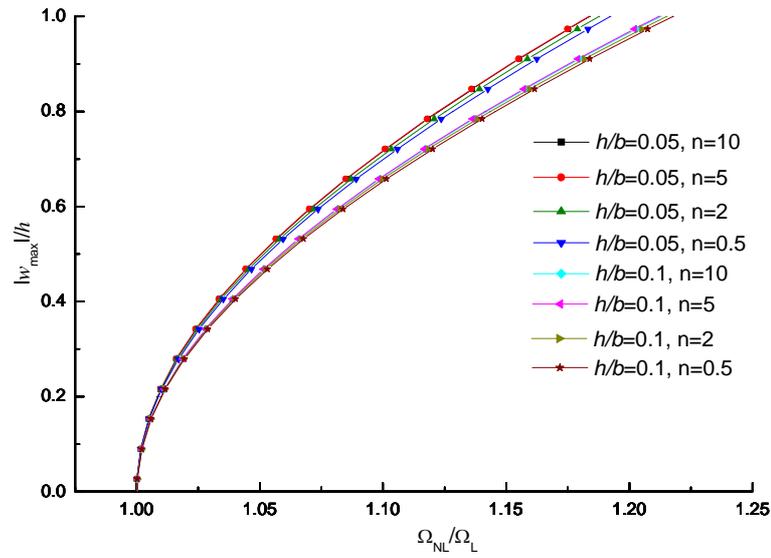


Figure 7.26 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree ($SUS304/Si_3N_4$, $\phi = 60^\circ$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

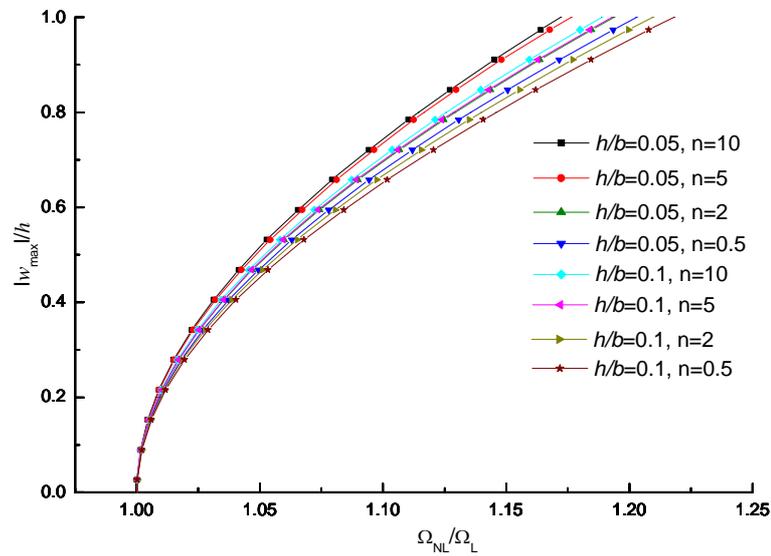


Figure 7.27 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree ($Ti-AL-4V/Aluminum\ oxide$, $\alpha = 90^\circ$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

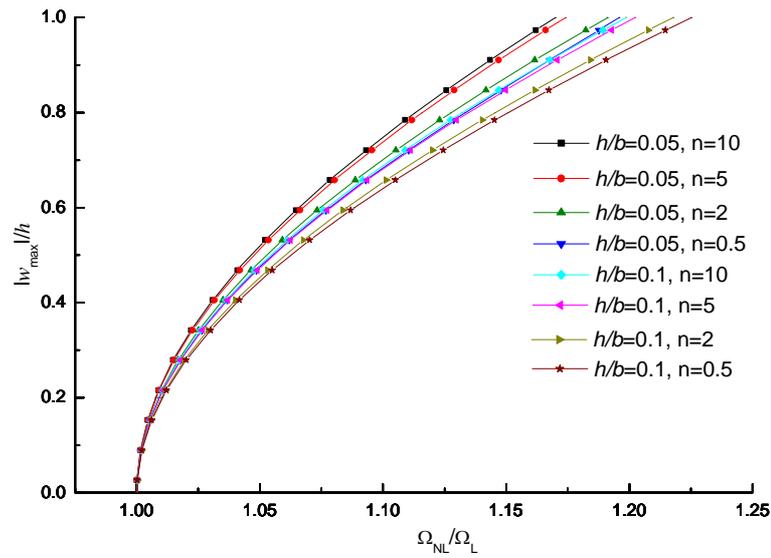


Figure 7.28 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree (Ti-AL-4V/Aluminum oxide, $\phi = 60^\circ$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

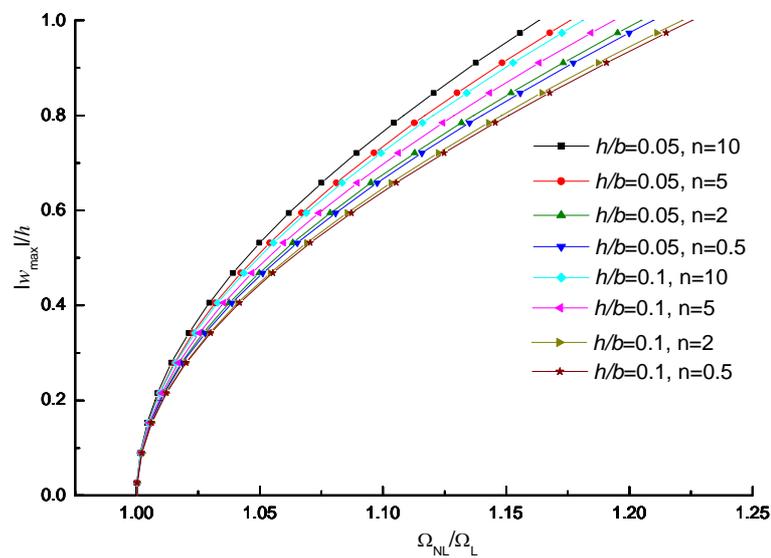


Figure 7.29 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree (AL/AL₂O₃, $\phi = 90^\circ$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

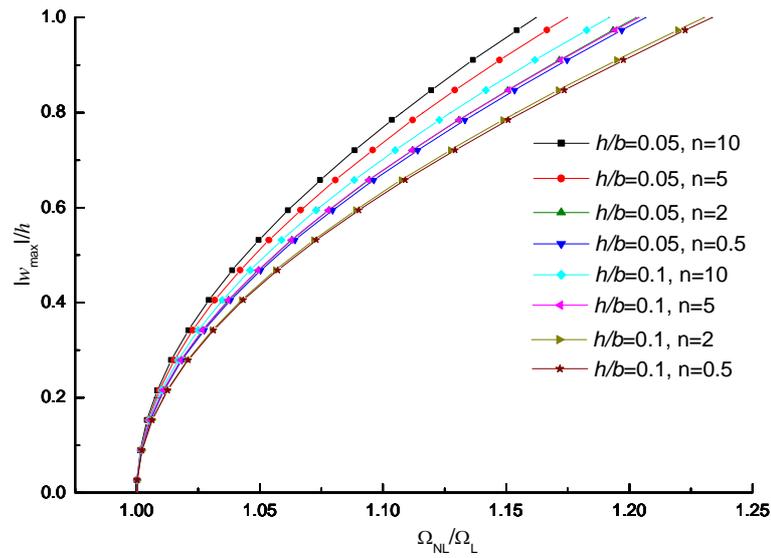


Figure 7.30 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree (AL/AL₂O₃, $\phi = 60^\circ$, T=300 K, $k=\pi^2/12$).

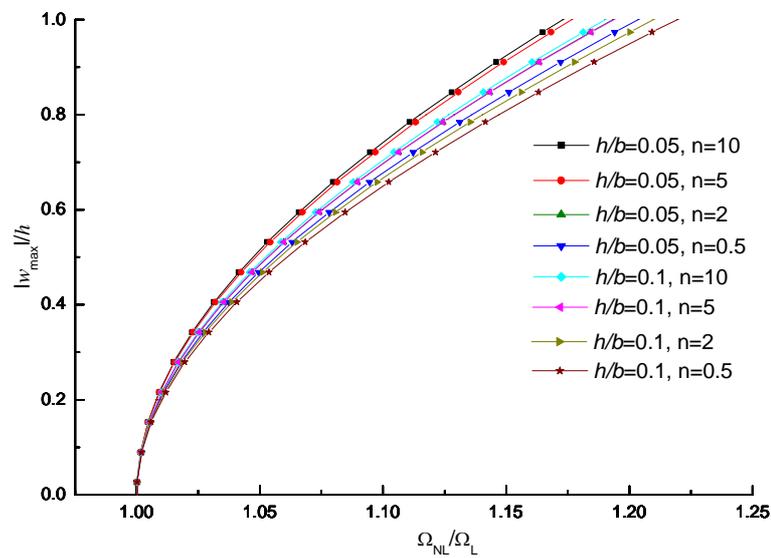


Figure 7.31 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree (AL/ZrO₂, $\phi = 90^\circ$, T=300 K, $k=\pi^2/12$).

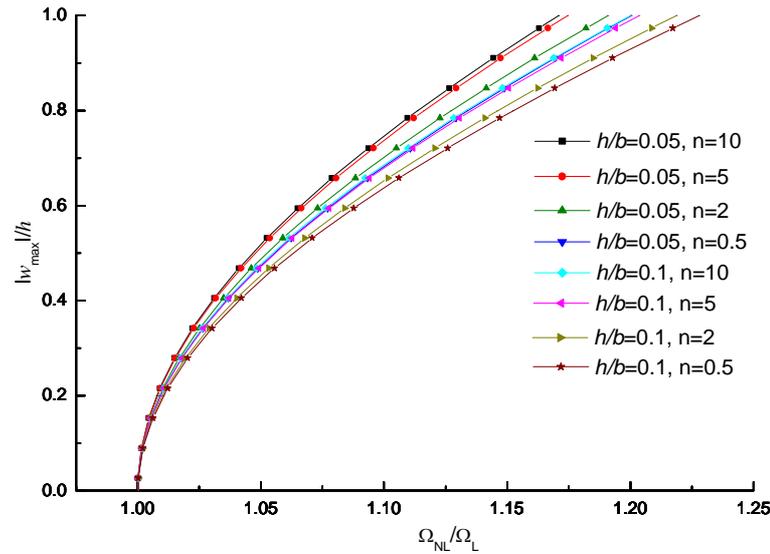


Figure 7.32 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree (AL/ZrO_2 , $\phi=60^\circ$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

Les figures 7.33-34 montrent respectivement les courbes d'épine dorsale de la plaque sectorielle à gradient fonctionnel pour $\phi=60^\circ$ et 90° . La valeur de l'exposant de la fraction volumique et le rapport d'épaisseur sont respectivement $n=1$ et $h/b=0.1$. Le comportement de l'effet de durcissement est plus important dans le cas de AL/Al_2O_3 et moins significatif dans le cas de $SUS304/Si_3N_4$. Pour les cas de AL/ZrO_2 et de $Ti-AL-4V/Aluminum\ oxide$, l'effet de durcissement est presque le même pour des variations similaires des paramètres. Ce comportement des matériaux à gradient fonctionnel provient principalement de la variation des paramètres physiques de ces matériaux. D'après le tableau 3.5, nous montrons que la plus petite valeur du module d'élasticité est $70.00e^9\text{ N/m}^2$ et la valeur la plus grande est $380.00e^9\text{ N/m}^2$ et pour la masse volumique ρ la valeur la plus petite est 2370 kg/m^3 et la valeur la plus grande est 8166 kg/m^3 . Cette variation importante des propriétés physiques donne un comportement très différent d'un matériau à gradient fonctionnel à un autre.

La figure 7.35 montre les courbes d'épine dorsale de la plaque sectorielle pour différents matériaux à gradient fonctionnel. Les paramètres géométriques de la plaque sont $\phi=60^\circ$ et $h/b=0.05$, et les valeurs de l'exposant de la fraction volumique sont $n=0.5$ et 5.0 . Une diminution de l'exposant de la fraction volumique entraîne une augmentation de l'effet durcissant.

L'effet de durcissement dans les plaques sectorielles à gradient fonctionnel peut diminuer ou augmenter selon les paramètres géométriques de la plaque et les paramètres physiques des matériaux utilisés.

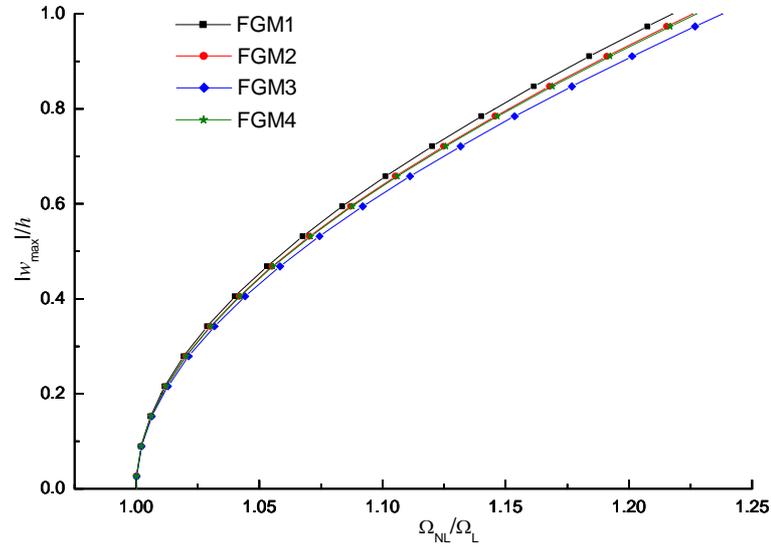


Figure 7.33 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree ($\phi= 60^\circ$, $h/b=0.1$, $n=1$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

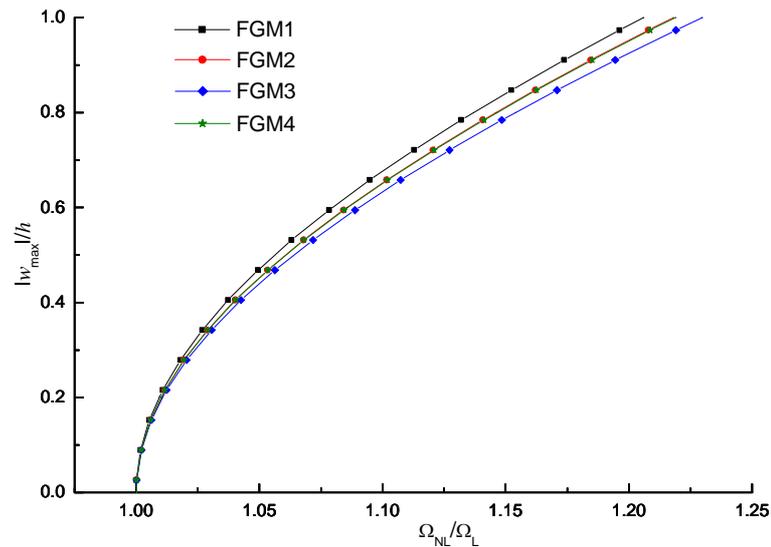


Figure 7.34 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastree ($\phi= 90^\circ$, $h/b=0.1$, $n=1$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

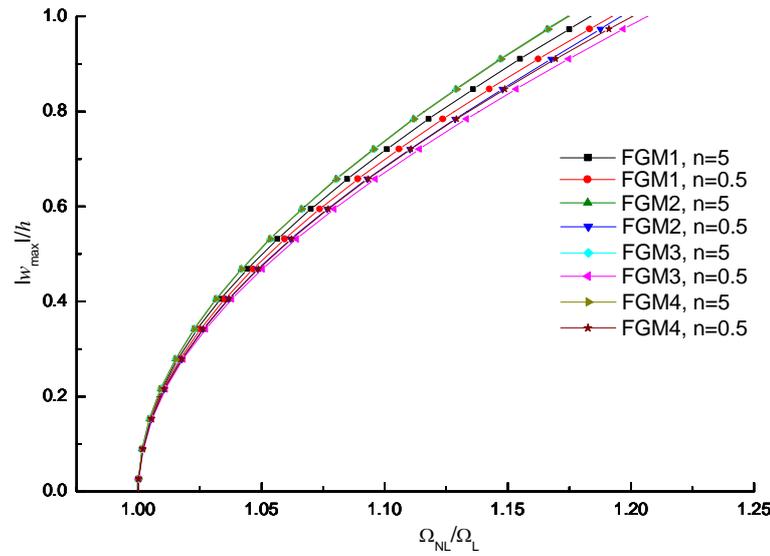


Figure 7.35 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque sectorielle à gradient fonctionnel encastrée ($\phi= 60^\circ$, $h/b=0.05$, $T=300\text{ K}$, $k=\pi^2/12$).

7.3.3. Vibration libre d'une plaque à gradient fonctionnel

Dans cette partie, nous étudions les vibrations libres d'une plaque arbitraire à gradient fonctionnel. La géométrie de cette plaque est donnée dans la figure 7.36 avec une épaisseur $h=0.1$. La plaque est modélisée par un seul élément- p triangulaire courbé, Les trois frontières de la plaque arbitraire sont obtenues par un coté sinusoïdal, un coté courbé, et un coté droit. Le tableau 7.12 donne la variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L de la plaque à gradient fonctionnel encastrée. Le matériau utilisé est le SUS304/Si₃N₄ et les valeurs de l'exposant de la fraction volumique sont $n = 0.0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ et ∞ .

A partir de cet exemple, il est clairement montré l'avantage majeur des éléments- p courbés pour la modélisation de différents types de plaques.

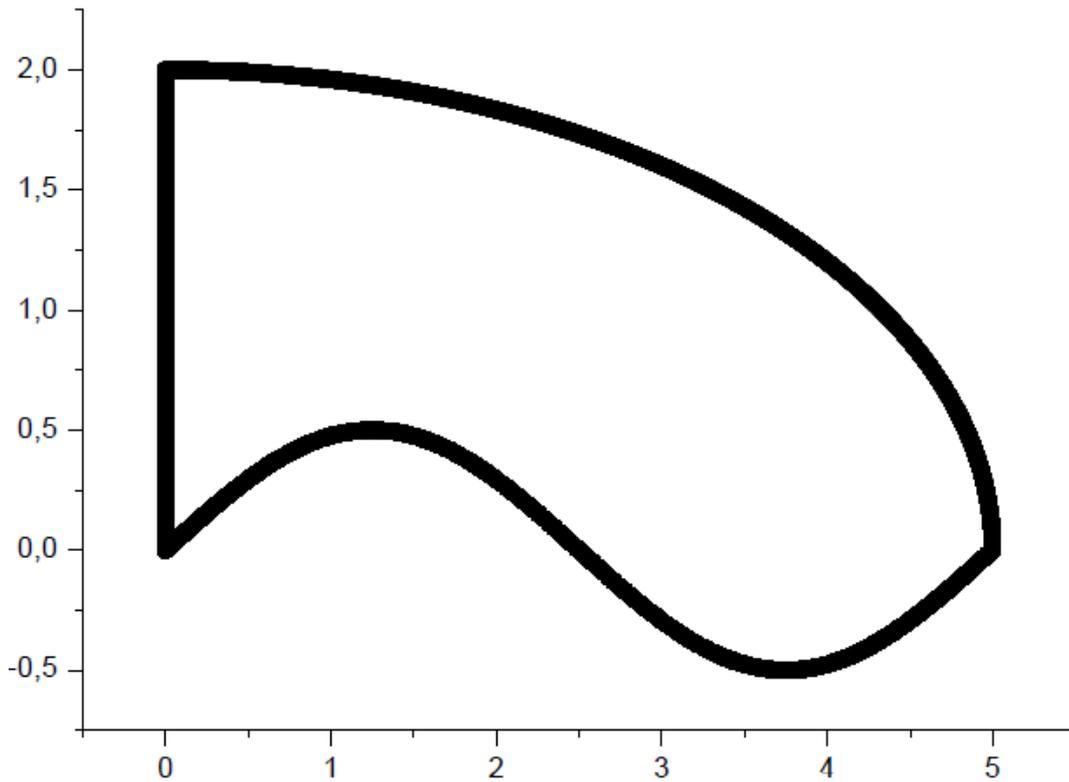


Figure 7.36 : Géométrie de la plaque arbitraire à gradient fonctionnel.

Tableau 7.12 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L d'une plaque à gradient fonctionnel encastree (SUS304/Si₃N₄, $h=0.1$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
Céramique	18.763	24.073	27.345	34.691	47.155	48.957
0.1	16.649	21.360	24.263	30.780	41.834	43.433
0.5	13.021	16.703	18.974	24.067	32.699	33.943
1.0	11.448	14.682	16.676	21.146	28.716	29.799
2.0	10.300	13.205	14.992	18.998	25.783	26.742
5.0	9.3656	11.959	13.452	16.635	22.075	23.592
Métal	8.2775	10.571	11.888	14.703	19.516	20.858

La vibration libre non-linéaire de la plaque arbitraire à gradient fonctionnel encastree (SUS304/Si₃N₄) est étudiée. Les valeurs de l'exposant de la fraction volumique sont prises en tant que $n = 0.0, 1.0$ et 10 . Les rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L sont calculés en fonction de l'amplitude maximale

adimensionnelle $|w_{\max}|/h$ pour le mode fondamental de la plaque encastree. Les courbes résultantes d'épine dorsale sont tracées dans la figure 7.37. Les coordonnées du point de d'amplitude maximale pour le mode fondamental sont $x=2.972$ et $y=0.536$.

L'effet de durcissement apparaît clairement dans les allures des graphes. Cet effet est plus important pour $n=1$. lorsque le mélange du matériau à gradient fonctionnel est linéaire.

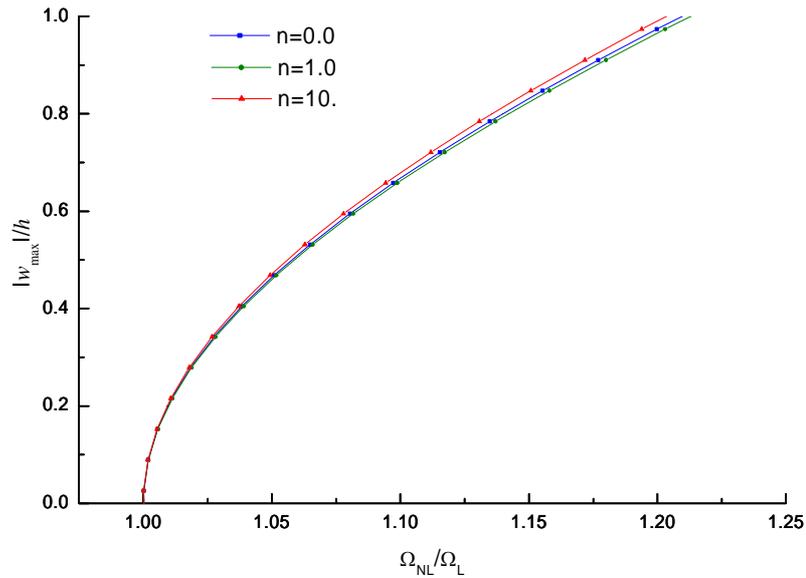


Figure 7.37 : Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental de la plaque à gradient fonctionnel encastree (SUS304/Si₃N₄, $h=0.1$, $k=\pi^2/12$).

Conclusions

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse apporte plusieurs solutions aux problèmes de vibrations des plaques de formes géométriques arbitraires.

Tout d'abord, un élément- p triangulaire courbé est développé pour l'analyse des vibrations non-linéaires des plaques modérément épaisses. A l'aide de ses cotés courbés, cet élément permet de modéliser n'importe quelle forme géométrique de plaque. La définition géométrique correcte de cet élément est formulée par les fonctions de mélange. Ces fonctions permettent de calculer les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque dans la plaque à partir de ses coordonnées locales dans l'élément. La théorie du matériau à gradient fonctionnel est utilisée pour les plaques épaisses. Les propriétés du matériau varient selon une loi de puissance de distribution le long de l'épaisseur. La théorie du premier ordre des plaques et les hypothèses de Von Karman de la non-linéarité géométrique sont utilisées. Les fonctions de forme hiérarchiques pour l'élément- p triangulaire sont construites à partir des polynômes orthogonaux de Legendre déplacés. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange et la méthode de l'équilibrage harmonique et sont résolues itérativement par la méthode de linéarisation du mode propre.

Les résultats obtenus concordent avec ceux disponibles dans la littérature. Plusieurs exemples ont été traités pour déterminer l'influence des différents paramètres géométriques et physiques sur les vibrations linéaires et non-linéaires des plaques épaisses. Ce travail nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes:

1. La convergence monotone et uniforme de l'élément- p triangulaire courbé est vérifiée en augmentant le degré du polynôme d'interpolation p . Les résultats de l'élément- p triangulaire s'accordent avec les solutions disponibles dans la littérature.
2. L'excentricité de l'ellipse et de l'angle de secteur influent sur les modes des plaques sectorielles encastées.
3. Les effets des rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires Ω_{NL}/Ω_L en fonction de l'amplitude maximale adimensionnelle $|w_{\max}|/h$ pour le mode fondamental des plaques circulaires et des plaques elliptiques sont différents.
4. La variation de l'effet de durcissement dépend des différents paramètres géométriques tel que rapport d'épaisseur, angle du secteur, et excentricité de l'ellipse.

5. Les effets des propriétés des matériaux à gradient fonctionnel, angle de secteur, rapport d'épaisseur, et exposant de la fraction volumique sur les courbes d'épine dorsale sont différents. Le durcissement augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur et diminue lorsque l'exposant de la fraction volumique augmente.
6. L'effet de durcissement est plus important dans le cas du mélange (AL/Al₂O₃) et moins significatif dans le cas du mélange (SUS304/Si₃N₄). Pour les deux mélanges (AL/ZrO₂) et (Ti-AL-4V/Aluminium oxyde), l'effet de durcissement est similaire. Ceci résume l'influence des paramètres physiques tel que le module de Young, le coefficient de Poisson, et la masse volumique sur le durcissement.

Les perspectives des études qui peuvent être menées dans le futur sont :

- ❖ Introduction de la géométrie de la plaque dans le code élaboré à l'aide d'un logiciel de dessin assisté par ordinateur (DAO).
- ❖ L'étude des vibrations non-linéaires forcées des plaques à gradient fonctionnel avec des formes géométriques arbitraires.
- ❖ L'analyse thermique des vibrations libres et forcées des plaques à gradient fonctionnel avec des formes géométriques arbitraires.
- ❖ L'étude de stabilité dans un milieu à haute température des plaques à gradient fonctionnel avec des formes géométriques arbitraires.

Références bibliographiques

Abramowitz, M., and Stegun., I.A., (1965).

Handbook of Mathematical Functions.

Dover, New York.

Abrate, S., (2006).

Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates.

Composites Science and Technology, 66, 2383–2394.

Allahverdizadeh, A., Naei, M.H., Bahrami, M.N., (2008a).

Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates.

J. Sound Vib. 310, 966–984.

Allahverdizadeh, A., Naei, M.H., Bahrami, M.N., (2008b).

Vibration amplitude and thermal effects on nonlinear behavior of thin circular functionally graded plates.

Int. J. Mech. Sci. 50, 445-454.

Allahverdizadeh, A., Rastgo, A., and Naei, M.H., (2008c).

Nonlinear analysis of a thin circular functionally graded plate and large deflection effects on the forces and moments.

Journal of Engineering Materials and Technology-ASME, 130, Article Number: 011009.

Amabili, M., (2008).

Nonlinear vibrations and stability of shells and plates

Cambridge university press. New york,

Anderson, R.G., Iron, B.M., Zienkiewicz, O.C., (1968).

Vibration and stability of plates using finite elements.

Int. J. Solids Struct. 4; 1031-1055.

Argyris, J.H., (1966).

Continua and discontinua.

Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Ohio, AFFDL-TR-66-80 ;11-189.

Ashby., M.F., (2005).

Materials selection in Mechanical Design.

Butterworth and Heinemann.

Babuska. I., Szabo., B.A., and Katz., I.N., (1981).

The p-version of the finite element method.

SIAM J. Numer. Anal. 18, pp. 515-545.

Babuska, I., and Szabo, B.A, (1982).

On the rates of convergence of the finite element method.

Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, pp. 323-341.

Babuska, I., Griebel M., and Pitkaranta, J., (1989).

The Problem of Selecting the Shape Functions for a p-type Finite Element,”

International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 1891-1908.

Babuska, I, and Suri., M., (1990).

The p- and hp-versions of the finite element method.

An overview", Comput. Methods Appl. Mech. Eny. 80, pp. 5-26.

Bardell, N.S., (1991).

Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method,

Journal of Sound and Vibration 151 (2); 263–289.

Bardell, N.S., (1992).

The free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method,

Computers & Structure 45 (5–6); 841–874.

Bardell N.S., Langley R.S., Dunsdon J.M. and Aglietti G.S. (1999).

An h-p finite element vibration analysis of open conical sandwich panels and conical sandwich frusta,

Journal of Sound and Vibration 226 (2); 345–377.

Barik, M., and Mukhopadhyay, M., (1998).

Finite element free flexural vibration analysis of arbitrary plates.

Finite Elements in Analysis and Design, 29;137-151.

Belalia, S.A., and Houmat, A., (2010).

Non-linear free vibration of elliptic sector plates by a curved triangular p-element.

Thin-Walled Structures 48 ; 316–326.

Bergan, P.G., and Wang, X., (1984).

Quadrilateral plate bending elements with shear deformations.

Computers and Structures 19, 25–34.

Bert, C.W., (1976).

Dynamics of composite and sandwich panels, Parts I and II.

The Shock and Vibration Digest 8(11), 15–24.

Bert, C.W., (1979).

Recent research in composite and sandwich plate dynamics.

The Shock and Vibration Digest 11(10), 13–23.

Bert, C.W., (1982).

Research on dynamics of composite and sandwich plates.

The Shock and Vibration Digest 14(10), 17–34.

Bert, C.W., (1985).

Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, part IV.

The Shock and Vibration Digest 17(11), 3–25.

Bert, C.W., (1991).

Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V: part I.

The Shock and Vibration Digest 23(6), 3–14.

Bert, C.W., (1991).

Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V: part II.

The Shock and Vibration Digest 23(7), 9–21.

- Beslin, O., and Nicolas, J., (1997).
Hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions,
Journal of Sound and Vibration 202 (5); 633–655.
- Birman, V., and Byrd, L.W., (2007).
Modeling and analysis of functionally graded materials and structures.
Applied Mechanics Reviews, 60, 195–216.
- Bogner., F.K., Fox., R.L., and Schmit., L.A., (1966).
The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.
Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., AFFDF-TR-66-80,397-443.
- Bucco, D., and Mazumdar, J., (1979).
Vibration analysis of plates of arbitrary shape-a new approach.
Journal of Sound and Viibration 67, 253-262.
- Campion., S.D., and Jarvis., J.L., (1996).
An investigation of the implementation of the p-version finite element method.
Finite Elements in Analysis and Design 23; 1-21.
- Carnevali, P., Morris, R.B., and Taylor, G., (1993).
New basis functions and computational procedures for p-version of finite element analysis
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 36, pp. 3759-3779.
- Chan S.H. (2001),
Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine,
International Journal of Thermal Science, 40, 255-261.
- Chen, J.L., and Chong, KP., (1984).
Vibration of irregular plates by finite strip method with spined function in : A.P. Boresi, KP. Chong, Engineering mechanics in civil engineering.
Proc. 5th Engineering Mechanic Div. ASCE 1, 256-260.
- Chen, C.S., 2005.
Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate.
Composite Structures, 68, 295–302.
- Chen, C.S., Chen T.J., and Chien, R.D., 2006.
Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates.
Thin-Walled Structures, 44, 844–851.
- Chen, C.S., and Tan, A.H., 2007.
Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration of initially stresses functionally graded plates.
Composite Structures, 78, 529–536.
- Shen, H.S., (2009).
Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells.
CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Cheng, Z.Q., and Reddy, J.N., (2003).
Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach.
Journal of Engineering Mechanics ASCE, 129, 896–900.

Chernuka, M.W., Cowper, G.R., Lindberg, G.M., and Olson, M.D., (1972).

Finite element analysis of plates with curved edges.

Int. J. Num. Methods Eng. 4 ; 49-65.

Cheung, Y.K., Tham, L.G., and Li, W.Y., (1989).

Free vibration and static analysis of general plate by spline strip,

Comput Mech, 3; 187-197.

Chladni, E.F.F., (1802).

Die Akustik . Leipzig.

Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E., (1989).

Concepts and Applications of Finite Element Analysis.

John Wiley & Sons, Inc., New York, 3rd Ed.

Coons., S.A., (1964).

Surfaces for computer-aided design of space forms.

Project MAC, Design Division, Department of Mechanical Engineering, MIT.

Coons., S.A., (1987).

Méthode matricielle.

Hermès, Paris.

Cugnon F., Damhaut L. and Beckers P. (1995).

Développement d'un prototype de code-P en statique linéaire en 2 dimensions.

Convention Université de Liège - Région Wallonne n, 2763, Rapport N 2, LTAS SF-218.

Dawe, D. J., (1978).

Finite Strip Models for Vibration of Mindlin Plates.

Journal of Sound and Vibration. 59; 441-452.

Dey, Shephard., S., and Flaherty., JE., (1997).

Geometry representation issues associated with p-version finite element computation.

Computer Methods in applied Mechanics and Engineering; 150: 39-55.

Dickinson, S.M., and Di, Blasio, A., (1986).

On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz method for the study of the exural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates.

Journal of Sound and Vibration 108, 51–62.

Doong, J. L., LEE, C., and FUNG, C.P., (1991).

Vibration and stability of laminated plates based on a modified plate theory.

Journal of Sound and Vibration 151, 193–201.

Dunavant, D., (1985).

High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle.

Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 21, pp. 1129-1148.

Duong, V.A., (2008).

Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites.

Thèse de doctorat. École nationale des ponts et chaussées, France.

Düster, A., Bröker, H., Rank, E., (2001).

The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures.

Int. J. Numer. Methods Eng. 52, 673-703.

Efraim, E., and Eisenberger, M., (2007).

Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates.

Journal of Sound and Vibration, 299, 720–738.

Elishakoff, I., Gentilini, C., and Viola, E., (2005).

Forced vibrations of functionally graded plates in the three-dimensional setting.

AIAA Journal, 43, 2000–2007.

Fuchiyama, T., and Noda, N., (1995).

Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material.

JSAE Review, 16, 263–268.

Fung, C.P., and Chen C.S., (2006).

Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration of functionally graded plates.

European Journal of Mechanics -A/Solids, 25, 425–436.

Geannakakes, G.N., (1995).

Natural frequencies of arbitrarily shaped plates using the Rayleigh-Ritz method together with natural co-ordinate regions and normalized characteristic orthogonal polynomials.

J. Sound Vib. 182; 441-478.

Glaeser, A.M., (1997).

The use of transient FGM interlayers for joining advanced ceramics.

Composites. 28B; 71-84.

Gmür, T., (1997).

Dynamique des structures : analyse modale numérique.

Presses polytechniques et universitaires Romandes.

Gordon., W.J., (1971).

Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation.

SLAM, J. Numer. Anal. 8(1), pp. 158-177.

Gordon., W.J., and Hall., C.A., (1973a).

Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation.

Int. J. Numer. Methods Eny. 7, pp. 461 477, 1973.

Gordon., W.J., and Hall., C.A., (1973b).

Transfinite element methods: blending-function interpolation over arbitrary curved element domains.

Numer. Math. 21, pp. 109-129, 1973.

Greg E. Hilmas, John L. Lombardi, and Robert A. Hoffinan. (1997).

Advances in the Fabrication of Functionally Graded Materials using Extrusion Freeform Fabrication.

Functionally Graded Materials 1996, Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Gui, W., and Babuska, I., (1986).

The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension - Part I: The error analysis of the p-version .

Numerische Mathematik, Vol. 49, pp. 577-612.

Hamdan, M.N., and Burton, T.D., (1993).

On the steady state response and stability of non-linear oscillators using harmonic balance.

Journal of sound and vibration. 166; 255-266.

Han, W., (1993).

The analysis of isotropic and laminated rectangular plates including geometrically non-linearity using the p-version finite element method

Ph.D. Thesis, University of Southampton.

Han, W., et Petyt, M., (1997a).

Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method – I: The fundamental mode of isotropic plates,

Computers & Structures 63; 295–308.

Han, W., et Petyt, M., (1997b).

Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method – II: 1st mode laminated plates and higher modes of isotropic and laminated plate.

Computers & Structures 63; 309-318.

Herman, L.R., (1966).

A bending analysis for plates.

Proc. Conf. Matrix Mth. Struct. Mech. Ohio, AFFDL-TR-66-80 ;577-602.

Hinton, E., (1988).

Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells.

Swansea, U.K.: Pineridge Press.

Hirai, T., and Chen, L., (1999).

Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan,

Materials Science Forum, 308–311, 509–514.

Houmat, A., (2006).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p-version of the finite-element method.

Thin-Walled Structures 44; 943–951.

Houmat, A., (1997a).

Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes,

Journal of Sound and Vibration 201 (4); 465–472.

Houmat, A., (1997b).

An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations,

Journal of Sound and Vibration 206 (2); 201–215.

Houmat, A., (2000).

A triangular Fourier p-element for the analysis of membrane vibrations,

Journal of Sound and Vibration 230 (1); 31–43.

Houmat, A., (2001a).

A sector Fourier p-element for free vibration analysis of sectorial membranes,

Computers & Structures 79; 1147–1152.

Houmat, A., (2001b).

A sector Fourier p-element applied to free vibration analysis of sectorial plates,

Journal of Sound and Vibration 243 (2); 269–282.

Houmat, A., (2004).

Three-dimensional hierarchical finite element free vibration analysis of annular sector plates,
Journal of Sound and Vibration 276; 181–193.

Houmat, A., (2006).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p-version of the finite-element method.

Thin-Walled Struct. 44:943-951.

Houmat, A., (2008a).

In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p-element.

Thin-Walled Struct. 46: 103-111.

Houmat, A., (2008b).

Large amplitude free vibration of shear deformable laminated composite annular sector plates by a sector p-element.

Int. J. Non Linear Mech. 43, 834-843.

Houmat, A., (2009).

Nonlinear free vibration of shear deformable laminated composite annular elliptical plate.

Acta Mechanica. 208, 281–29.

Huang, C.L.D., and Al-Khatta, I.M., (1977).

Finite amplitude vibration of circular plate,

International Journal of Nonlinear Mechanics, 12; 297-306.

Huang, X.L., and Shen, H.S., (2004).

Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments.

International Journal of Solids and Structures, 41, 2403–2427.

Huang, X.L., and Shen, H.S., (2006).

Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments.

Journal of Sound and Vibration, 289, 25–53.

Irie, T. Yamada, G., and Aomura., S., (1980).

Natural frequencies of Mindlin circular plates.

Transaction of the American society of mechanical engineers, journal of applied mechanics, 47, 652-655.

Jacobi., C.C.J., (1846).

Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen.

German, Crelle's Journal 30: 51–94.

Jones, R., (1975).

An approximate expression for the fundamental frequency of vibration of plates.

Journal of Sound and Vibration. 38: 503-504

Kapania, R.K., and Raciti, S., (1989).

Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: vibrations and wave propagation.

American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 27, 935–946.

Katz, I.N., Peano, A.G., and Rossow, M.P., (1978).

Nodal variables tbr complete conforming finite elements of arbitrary polynomial order.
Comp. Math, Appl. 4, pp. 85-112.

Kim, C.S., (1988).

The vibration of beams and plates studied using orthogonal polynomials.
Ph.D. Thesis, University of Western Ontario, Canada.

Kim, Y.W., (2005).

Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates.
Journal of Sound and Vibration, 284, 531–549.

Kirfilyfalvi. G. and Szabo. B. (1997).

Quasi-regional mapping for the p-version of the finite element method.
Finite Elements in Analysis and Design 27; 85-97.

Kitipornchai, S., Xiang, Y., and Liew, K.M., (1994).

Vibration analysis of corner supported Mindlin plates of arbitrary shape using the Lagrange multiplier method.
J. Sound Vib. 173; 457-470.

Kitipornchai, S., Xiang, Y., Liew, K.M., and Lim, M.K., (1994).

A global approach for vibration of thick trapezoidal plates Original Research Article.
Computers & Structures.53 ; 83-92

Kitipornchai, S., Yang, J., and Liew, K.M., (2004).

Semi-analytical solution for nonlinear vibration of laminated FGM plates with geometric imperfections.
International Journal of Solids and Structures, 41, 2235–2257.

Knight, C.E., (1993).

The Finite Element Method in Mechanical Design,
PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Koizumi, M., (1993).

The concept of FGM.
Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials, 34, 3–10.

Lam, K.Y., Liew, K.M., and Chow, S.T., (1992).

Use of two-dimensional orthogonal polynomials for vibration analysis of circular and elliptical plates.
J. Sound Vib. 154; 261-269.

Laura, P.A.A., and Gutierrez, R., (1977).

Fundamental frequency of vibration of clamped plates of arbitrary shape subjected to a hydrostatic state of in-plane stress.
Journal of Sound and Vibration Volume 48, Issue 3-8, Pages 327-332.

Leissa, A.W., (1969).

Vibration of Plates.
NASA SP -169 Washington, D.C.: Office of Technology Utilization.

Leissa, A.W., (1977).

Recent research in plate vibrations: classical theory.

The Shock and Vibration Digest 9(10), 13–24.

Leissa, A.W., (1977).

Recent research in plate vibrations: complicating effects.

The Shock and Vibration Digest 9(11), 21–35.

Leissa, A.W., (1981).

Plate vibration research, 1976–1980: classical theory.

The Shock and Vibration Digest 13(9), 11–22.

Leissa, A.W., (1981).

Plate vibration research, 1976–1980: complicating effects.

The Shock and Vibration Digest 13(10), 19–36.

Leissa, A.W., (1987).

Recent research in plate vibrations, 1981–1985, Part II: complicating effects.

The Shock and Vibration Digest 19(3), 10–24.

Leung, A.Y.T., and Chan, J.K.W., (1998).

Fourier p -element for the analysis of beams and plates,

Journal of Sound and Vibration 212; 179–185.

Leung, A.Y.T., and Zhu, B., (2004).

Geometric nonlinear vibration of clamped Mindlin plates by analytically integrated trapezoidal p -element,

Thin-Walled Structures, 42; 931-954.

Levinson, M., (1980).

An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates.

Mechanics Research Communications 7, 343–350.

Li, Q., Iu, V.P., and Kou, K.P., (2008).

Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates.

Journal of Sound and Vibration, 311, 498–515.

Liew, K.M., (1990a).

The development of 2-D orthogonal polynomials for vibration of plates.

Ph.D. Thesis, National University of Singapore.

Liew, K.M. Lam, K.Y, (1990b).

Application of two-dimensional orthogonal plate function to flexural vibration of skew plates.

J. Sound Vib. 139; 241-252.

Liew, K.M. Lim, M.K, 1993.

Transverse vibration of trapezoidal plates of variable thickness: symmetric trapezoids.

J. Sound Vib. 165; 45-67.

Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., 1995.

Research On Thick Plate Vibration: A Literature Survey.

Journal of Sound and Vibration 180(1), 163–176.

Liew, K.M., Liu, F.L., (1997a).

Differential cubature method: A solution technique for Kirchhoff plates of arbitrary shape.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 145; 1-10.

Liew, K.M. Han, J.B., and Xiao, Z.M., (1997b).

Vibration analysis of circular mindlin plates using the differential quadrature method.
Journal of Sound and Vibration, 205(5):617–630.

Liew, K.M, Wang, C.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., 1998.

Vibration of Mindlin plates: programming the p-version Ritz method.
Elsevier.

Lim, CM., Liew, K.M, ., and Kitipornchai, S., (1996).

Vibration of arbitrarily laminated plates of general trapezoidal planform.
J. Acoust. Soc. Amer. 100(6) ;3674-3685.

Liu, C.F., and Chen, G.T., (1996).

Geometrically nonlinear axisymmetric vibrations of polar orthotropic circular plates.
International Journal of the Mechanical Sciences, 38; 325-333.

Liu, L.S., Zhang, Q.J., and Zhai, P.C., (2003).

The optimization design of metal-ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method.
Materials Science Forum, 423–425, 791–796

Librescu, L., and Song, S.Y., (2005),

Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability.
Journal of Thermal Stresses, 28, 649-712.

Lo, K.H., Christensen, R.M., and Wu, E.M., (1977).

A higher-order theory of plate deformation, part 1: homogeneous plates/part 2: laminated plates.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 44, 663–676.

Markworth, A.J., Ramesh, K.S., and Parks, W.P. (1995).

Review: modelling studies applied to functionally graded materials.
Journal of Material Sciences, 30, 2183–2193.

Mickens, R.E., (1984).

Comments on the method of harmonic balance.
Journal of sound and vibration. 94; 456-460.

Mindlin, R.D., (1951).

Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 18, 31–38.

Mizusawa, T., and Leonard J.W., (1990).

Vibration and buckling of plates with mixed boundary conditions.
Engineering Structures 12, 285–290.

- Müller, E., Drasar, C., Schilz, J., and Kaysser, W.A., (2003).
Functionally graded materials for sensor and energy applications.
Materials Science and Engineering, A362, 17–39.
- Murthy, M.V.V., (1981).
An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate.
NASA Technical Paper 1903.
- Nanni, J., (1971).
Das eulersche knickproblem unter berucksichtigung der querkrafte.
Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik 22, 156–185.
- Nayfeh, A.H, (1983).
Introduction to perturbation Techniques.
New York: John Willey.
- Nayfeh, A.H, and Mook, (1995).
Nonlinear oscillations.
New York: John Willey and Sons.
- Nelson, R.B., and Lorch, D.R., (1974).
A refined theory for laminated orthotropic plates.
American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 41, 177–183.
- Noda, N., (1999).
Thermal stresses in functionally graded material.
Journal of Thermal Stresses, 22, 477–512.
- Noor, A.K. and Burton W.S., (1989).
Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates.
Applied Mechanics Reviews 42, 1–13.
- Oden, J.T., Demkowicz, L., Rachowicz, W., and Westermann, T.A., (1989).
Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 2 : A posteriori error estimation.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 77, pp. 113-180.
- Olson, M.D., and Lindberg, G.M., (1969).
Annular and circular sector finite element for plate bending.
Int. J. Meth. Sci. 11; 17-23.
- Paszkiwicz, B., Paszkiwicz, R., Wosko, M., Radziewicz, D., Sciana, B., Szyszka, A., Macherzynski, W., and Tlaczala, M. (2008),
Functionally graded semiconductor layers for devices application.
Vacuum, 82, 389–394.
- Paulino, G.H., Jin, Z.H., and Dodds, Jr., R.H., (2003).
Failure of functionally graded Materials, in Comprehensive Structural Integrity, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss).
Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- Peano., A.G., (1975).
Hierarchies of conforming finite elements.
D.Sc. Thesis, Washington University, St. Louis, MO.

Peano., A.G., (1976).

Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending.

Comp. Maths. Appl. 2, pp. 211-224.

Petyt, M., (1968).

Finite element vibration analysis of cracked plates in tension.

Technical report AFML-TR-67-396, Ohio.

Prakash, T., and Ganapathi, M., (2006).

Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method.

Composites Part B, 37, 642–649.

Prasad KL., Rao AV, and Rao, BN., (1992).

Free vibration of simply supported and clamped elliptical plates,

Journal of Sound and Vibration. 158:383-386.

Praveen, G.V., Reddy, J.N., (1998).

Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates.

Int. J. Solids Struct. 35, 4457-4476.

Qiu, J., Tani, J., Ueno, T., Morita, T., Takahashi, H., and Du, H. (2003).

Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators.

Smart Materials and Structures, 12, 115–121.

Raju, K.K., and Rao, G.V., (1976).

Axisymmetric vibrations of circular plates including the effects of geometric non-linearity, shear deformation, and rotary inertia.

Journal of Sound and Vibration, 47; 179-184.

Raju, KK., and Hinton, E., (1980).

Nonlinear vibrations of thick plates using Mindlin plate elements,

Int J Num Meth Eng. 15: 249-257

Ramaiah, G.K., (1980).

Flexural vibrations and elastic stability of annular plates under uniform in-plate tensile forces along inner edge.

Journal of Sound and Vibration 72, 11–23.

Rayleigh, L., (1877).

Theory of Sound, Volume 1.

London: Macmillan; reprinted 1945 by Dover, New York.

Reddy, J.N., (1984).

A simple higher-order theory for laminated composite plates.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 51, 745–752.

Reddy, J.N., (1985).

A review of the literature on finite-element modelling of laminated composite plates and shells.

The Shock and Vibration Digest 17(4), 3–8.

Reddy, J.N., Chin, C.D., (1998).

Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. J.
Therm. Stresses. 21, 593–626.

Reddy, J.N., Wang, C.M., Kitipornchai, S., (1999).

Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates.
Eur. J. Mech. A. Solids. 18, 185-199.

Reddy, J.N., (2000).

Analysis of functionally graded plates.
Int. J. Numer. Methods Eng. 47, 663-684.

Reddy, J.N., (2004).

An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.
Oxford university press.

Reissner, E., (1945).

The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 12,
69–77.

Ribeiro, P.M.L., (1998).

Geometrically nonlinear vibration analysis of beams and plates by the hierarchical finite element method
Ph.D. Thesis, University of Southampton.

Ribeiro, P., Petyt, M., (1999).

Non-linear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods.
Int. J. Mech. Sci. 41, 437-459.

Ribeiro, P., (2003).

A hierarchical finite element for geometrically nonlinear vibration of thick plates,
Acta Mechanica, 38; 115-130.

Ritz, W., (1909).

Methode zur losung gewisser variations probleme der mathematischen physik.
Journal für Reine und Angewandte Mathematik 135, 1–61. Uber eine neue.

Robinson, J., (1986).

An introduction to hierarchical displacement elements and the adaptivetechnique.
Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 2, pp. 377-388, 1986.

Rossow., M.P., and Katz., I.N., (1978).

Hierarchical finite elements and precomputed arrays.
Int. J. Numer. Methods Eng.12, pp. 977 999.

Sathyamoorthy, M., (1996).

Large amplitude circular plate vibration with transverse shear and rotatory inertia effects,
Journal of Sound and Vibration, 194; 463-469.

Schinzin, R., and Laura., P.A.A., (1991).

Conformal mapping : Methods and applications.
Elsevier, Amsterdam.

Senthilnathan, N.R., (1989).

A simple higher-order shear deformation plate theory.

Ph.D. Thesis, National University of Singapore.

Simon, D., Campion, John, L., Jarvis, (1996)

An investigation of the implementation of the p-version finite element method

Finite Elements in Analysis and Design 23; 1-21

Shen, H.S., (2002).

Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments.

Int. J. Mech. Sci. 44, 561-584.

Shen H.-S. (2004).

Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells (in Chinese).

Advances in Mechanics, 34, 53-60.

Solin, P., Segeth, K. and Dolezel. I., (2004).

Higher-Order Finite Element Methods.

Chapman & Hall/CRC.

Srinivas, S., and Rao, A.K., (1970).

Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates.

International Journal of Solids and Structures 6, 1463–1481.

Szabo, B.A., (1985).

Probe theoretical manual - Release 1.0.

Noetic Technologies Corp., St. Louis, MO.

Szabo., B.A., and Babuska., I., (1990).

Finite Element Analysis.

Wiley-Interscience, New York, 1991.

Szabo, B.A., (1991).

Reliability in finite element computations.

Proceedings of the 18th MSC European User's Conference 1991.

Szemplinska, S.W., (1990).

The behaviour of non-linear vibrating systems.

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tanigawa, Y., (1995).

Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials.

Applied Mechanics Reviews, 48, 287–300.

Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., (1961).

Theory of Elastic Stability.

New York: McGraw-Hill.

Touloukian, Y.S., (1967).

Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials.

McMillan, New York.

Uemura, S., (2003).

The activities of FGM on new applications.

Materials Science Forum, 423–425, 1–10.

Vel, S.S., and Batra, R.C., (2004).

Three dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates.

Journal of Sound and Vibration, 272, 703–730.

Von Karman, T., (1910).

Festigkeitsprobleme in Maschinenbau,

Encycl der Math Wiss, vol. 4, pp. 348–351.

Von Karman, T., Sechler, Ef, and Donnel, L.H., (1932).

The strength of thin plates in compression,

Trans ASME, vol. 54, pp. 53–57..

Wang, CM, Xiang, Y, and Kitipornchai, S., (1995).

Vibration frequencies of elliptical and semi-elliptical Mindlin plates,

Struct Eng Mech. 1995; 3: 35-48.

Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., Uo M., and Kawasaki, T., (2004).

Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application.

Composites Science and Technology, 64, 893–908.

Wittrick, W.H., (1987).

Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on mindlin's plate theory.

Journal of Applied Mechanics, 23; 441–464.

Whitney, J.M., and Pagano, N.J., (1970).

Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates.

American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics 37, 1031–1036.

Woo, J., Meguid, S.A., (2001).

Nonlinear behavior of functionally graded plates and shallow shells.

Int. J. Solids Struct. 38, 7409-7421

Woo, K.S., Hong, C.H., Basu, P.K., and Seo, C.G., (2003).

Free vibration of skew Mindlin plates by *p*-version of F.E.M.,

Journal of Sound and Vibration 268 (4), 637–656.

Xiang, Y., (1993).

The numerical developments in solving the buckling and vibration of Mindlin plates.

Ph.D. Thesis, The University of Queensland.

Yamagushi, F., (1988).

Curves and surfaces in computer aided geometric design.

Springer-Verlag, Berlin.

Yamanouchi, M., Hirai, T., Shiota, I., (1990a)

Overall view of the P/M fabrication of functionally gradient materials.

Proceedings of first international symposium on functionally gradient materials, Sendai, Japan, pp. 59–64.

- Yamanoushi, M., Koizumi, M., Hirai, T., and Shiota, I., (1990b).
Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Japan.
- Yang, P.C., Norris, C.H., and Stavsky, Y., (1966).
Elastic wave propagation in heterogeneous plates.
International Journal of Solids and Structures 2, 665–684.
- Yang, J., and Shen, H.S., (2001).
Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates.
Composite Structures, 54, 497–508.
- Yang, J., and Shen, H.S., (2002).
Vibration characteristics and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environment.
Journal of Sound and Vibration, 255, 579–602.
- Yang J., Kitipornchai S. and Liew K.M., (2003).
Large amplitude vibration of thermoelectric-mechanically stressed FGM laminated plates.
Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 3861–3885.
- Yang, J., and Huang, X.L., (2007).
Nonlinear transient response of functionally graded plates with general imperfections in thermal environments.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 2619–2630.
- Yin, H.M., Sun L.Z., and Paulino, G.H, (2004).
Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions.
Acta Materialia, 52, 3535–3543.
- Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M., (2009).
Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method.
J. Sound Vib. 319, 918-939.
- Zienkiewicz., O.C., Irons., B.M., Scott., F.C, and Campbell., J.S., (1970).
Three-dimensional stress analysis.
Proc. IUTAM Symp. High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, pp. 413-431.
- Zienkiewicz., O.C., (1979).
La méthode des éléments finis.
McGraw-Hill Book Inc. Paris.
- Zienkiewicz., O.C., Kelly., D.W., J.P., Gago, S.R., and Babuska. I. (1981).
Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement.
Proc. MAFELAP, Brunel University, pp. 313-346.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor., R.L., (1994).
The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Programs,
McGraw-Hill Book Company Europe.

Webographie

- ESRD, Inc. (1998).
 Web Site. <http://www.esrd.com>

Annexe A

Les tableaux A.1-12 donnent la variation des six premiers paramètres de fréquence linéaire Ω_L des plaques sectorielles elliptiques pour les excentricités $a/b=2$ et 5 en fonction des rapports d'épaisseur $h/b = 0.001, 0.05, 0.1$, les conditions aux limites (EEE, AAA, EEA, AEA, ELE et ELA) et l'angle de secteur ($\phi=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ et 90°).

Tableau A.1 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCC) avec $a/b=5$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	30.960	40.267	56.303	81.314	89.875	105.79
	45°	27.425	34.274	45.724	67.213	74.017	87.345
	60°	26.368	32.445	43.852	67.191	71.314	86.782
	75°	25.754	31.368	41.725	66.401	70.073	86.812
	90°	25.306	30.506	34.823	49.349	68.406	68.695
0.05	30°	29.269	35.909	45.294	58.518	75.151	82.856
	45°	26.742	32.330	40.894	55.593	68.933	79.878
	60°	25.502	29.884	35.766	45.266	61.713	65.824
	75°	24.943	29.113	35.828	48.409	64.652	73.402
	90°	24.551	28.218	33.010	41.36	57.056	63.529
0.1	30°	27.274	32.925	40.316	50.399	64.780	67.964
	45°	25.034	29.764	36.536	46.962	60.526	65.632
	60°	24.014	27.853	32.774	40.042	52.043	58.432
	75°	23.518	27.135	32.378	41.789	57.394	60.663
	90°	23.183	26.468	30.561	36.961	48.763	56.717

Tableau A.2 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCC) avec $a/b=2$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	61.334	95.551	134.26	159.62	196.59	260.38
	45°	43.239	66.623	93.623	110.768	131.48	166.29
	60°	36.451	54.915	79.984	89.458	116.04	131.04
	75°	33.012	48.511	71.193	80.010	104.42	110.83
	90°	30.953	44.527	64.628	75.798	96.286	100.06
0.05	30°	58.049	86.862	113.89	137.07	154.55	184.70
	45°	41.701	63.228	85.679	100.555	117.24	142.01
	60°	35.364	52.435	72.978	82.550	98.450	109.85
	75°	32.141	46.588	65.543	75.464	92.869	97.422
	90°	30.182	42.805	59.116	71.828	80.799	89.902
0.1	30°	51.667	74.469	94.920	111.74	122.69	142.54
	45°	38.179	56.147	73.803	85.497	96.682	114.55
	60°	32.760	47.422	64.363	71.966	84.266	92.915
	75°	29.952	42.516	58.303	66.333	78.913	83.366
	90°	28.230	39.304	53.190	63.487	70.526	77.900

Tableau A.3 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SSS) avec $a/b=5$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	14.752	19.970	27.136	38.554	53.139	61.212
	45°	13.126	17.344	23.105	33.730	46.864	52.717
	60°	12.459	16.172	21.241	30.887	44.668	49.038
	75°	12.113	15.564	20.332	29.351	43.897	45.864
	90°	11.899	15.223	19.717	28.440	42.323	43.610
0.05	30°	14.316	19.215	25.432	35.263	49.258	51.836
	45°	12.896	16.857	21.936	29.382	42.511	46.456
	60°	12.309	15.840	20.253	26.860	39.738	44.160
	75°	11.992	15.275	19.331	25.600	38.087	43.054
	90°	11.788	14.900	18.754	24.877	37.053	42.483
0.1	30°	13.857	18.450	24.175	32.493	44.698	48.054
	45°	12.568	16.287	20.957	27.537	38.919	43.519
	60°	12.036	15.358	19.440	25.342	36.406	41.555
	75°	11.744	14.836	18.601	24.209	34.927	40.652
	90°	11.551	14.485	18.065	23.538	34.043	40.175

Tableau A.4 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SSS) avec $a/b=2$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	31.412	55.987	81.239	102.95	122.46	152.29
	45°	22.245	40.555	59.350	73.550	86.253	112.07
	60°	18.671	33.480	51.953	59.468	76.133	88.584
	75°	16.828	29.440	46.706	53.052	70.150	74.740
	90°	15.691	26.785	42.229	50.213	64.018	67.986
0.05	30°	30.256	53.725	76.478	95.435	111.06	137.77
	45°	21.652	39.352	57.313	70.197	81.791	103.88
	60°	18.294	32.580	50.104	57.137	72.040	82.950
	75°	16.546	28.717	45.028	51.405	66.183	70.878
	90°	15.449	26.172	40.725	48.813	60.061	65.182
0.1	30°	28.692	49.677	68.811	84.812	96.533	116.64
	45°	20.768	36.984	52.757	64.003	73.231	91.448
	60°	17.645	30.849	46.553	52.787	65.302	74.307
	75°	16.011	27.316	42.035	47.888	60.289	64.378
	90°	14.980	24.977	38.184	45.654	54.980	59.705

Tableau A.5: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCS) avec $a/b = 5$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	28.865	36.132	48.540	71.389	79.426	94.896
	45°	26.522	32.046	41.745	62.641	71.855	84.458
	60°	25.682	31.695	43.403	63.157	69.526	83.751
	75°	25.015	29.396	37.666	51.654	67.103	75.066
	90°	24.721	28.860	36.612	49.639	66.247	73.192
0.05	30°	27.689	34.015	43.340	59.017	73.522	81.739
	45°	25.728	30.575	37.774	49.418	66.926	73.258
	60°	24.910	29.055	35.234	45.988	64.381	68.450
	75°	24.464	28.241	33.961	43.998	61.947	64.104
	90°	24.168	27.737	33.251	42.773	58.478	63.138
0.1	30°	25.829	31.356	38.993	50.473	64.146	68.270
	45°	24.171	28.439	34.348	43.582	58.661	61.834
	60°	23.476	27.143	32.262	40.919	55.857	58.646
	75°	23.089	26.437	31.198	39.410	52.877	57.044
	90°	22.825	25.981	30.570	38.499	50.588	56.390

Tableau A.6: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CCS) avec $a/b = 2$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	51.538	82.323	113.77	140.62	172.74	224.18
	45°	38.428	59.721	84.934	100.98	123.69	149.24
	60°	33.431	50.614	76.221	85.144	111.82	148.76
	75°	30.779	44.891	64.767	76.908	96.839	102.21
	90°	29.133	41.453	58.882	73.530	89.520	91.841
0.05	30°	49.149	76.170	102.65	125.68	142.30	178.32
	45°	37.096	56.983	78.083	93.204	107.67	131.05
	60°	32.428	48.201	68.026	78.664	94.869	105.62
	75°	29.981	43.288	60.991	72.866	85.405	92.858
	90°	28.422	40.054	55.734	69.894	76.961	87.093
0.1	30°	44.519	66.824	86.971	104.56	115.86	139.16
	45°	34.228	51.360	68.490	80.514	90.570	108.51
	60°	30.158	43.987	60.594	68.929	81.208	89.887
	75°	28.007	39.770	54.840	64.267	74.206	80.245
	90°	26.628	36.964	50.436	61.900	67.686	75.722

Tableau A.7 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SCS) avec $a/b=5$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	20.326	26.247	35.013	52.759	64.225	75.289
	45°	18.810	23.380	29.818	45.351	58.086	66.838
	60°	18.177	22.227	28.704	41.775	55.865	63.018
	75°	17.849	21.553	27.381	39.597	54.762	56.779
	90°	17.651	21.278	27.004	38.711	54.095	55.195
0.05	30°	19.728	25.095	32.605	43.874	60.539	64.823
	45°	18.437	22.701	28.523	37.489	54.518	57.582
	60°	17.891	21.655	26.661	34.943	51.364	54.516
	75°	17.590	21.088	25.727	33.637	48.882	53.051
	90°	17.390	20.723	25.206	32.932	47.094	52.404
0.1	30°	18.845	23.767	30.253	39.380	54.166	56.749
	45°	17.701	21.608	26.698	34.291	48.104	51.733
	60°	17.216	20.675	25.092	32.121	45.096	49.697
	75°	16.943	20.161	24.257	30.995	43.126	48.719
	90°	16.756	19.820	23.757	30.359	41.918	48.214

Tableau A.8 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (SCS) avec $a/b=2$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	37.937	64.392	91.991	116.63	136.20	171.28
	45°	28.628	48.203	69.622	84.696	100.56	126.99
	60°	25.038	40.825	60.836	70.241	89.043	101.67
	75°	23.176	36.673	55.252	64.269	81.933	86.913
	90°	22.012	33.990	50.749	61.483	76.120	80.683
0.05	30°	36.652	61.382	85.004	106.41	122.34	151.15
	45°	27.887	46.499	65.963	79.840	92.114	114.57
	60°	24.491	39.555	58.338	66.958	82.156	93.191
	75°	22.712	35.626	52.803	61.674	75.584	81.445
	90°	21.584	33.042	48.426	59.142	68.931	76.087
0.1	30°	34.307	55.721	75.193	92.434	103.64	124.61
	45°	26.382	42.987	59.546	71.193	80.554	98.580
	60°	23.276	36.864	53.159	60.457	72.712	81.607
	75°	21.642	33.353	48.421	56.003	67.314	72.269
	90°	20.599	31.025	44.607	53.866	61.845	67.914

Tableau A.9 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFC) avec $a/b = 5$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	7.3327	12.041	19.679	30.657	35.822	44.085
	45°	5.9990	9.3316	14.480	23.761	29.788	37.208
	60°	5.4286	8.1427	12.369	21.251	27.463	33.882
	75°	5.1074	7.4975	11.327	19.801	26.300	31.613
	90°	4.9032	7.1166	10.845	18.893	25.692	30.809
0.05	30°	7.0534	11.281	17.339	27.203	32.612	39.176
	45°	5.8600	8.9054	13.263	20.324	28.016	31.599
	60°	5.3586	7.9351	11.545	16.909	26.222	27.256
	75°	5.0702	7.3797	10.555	15.130	24.536	25.686
	90°	4.8731	7.0035	9.9388	14.124	23.094	25.093
0.1	30°	6.8515	10.801	16.297	24.935	29.949	35.360
	45°	5.7414	8.6392	12.677	18.882	26.186	28.769
	60°	5.2719	7.7437	11.142	15.919	24.300	25.305
	75°	4.9999	7.2257	10.249	14.317	22.443	24.359
	90°	4.8117	6.8678	9.6694	13.378	21.155	23.878

Tableau A.10 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFC) avec $a/b = 2$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	26.162	55.420	72.797	96.737	117.52	147.53
	45°	14.872	32.330	46.902	60.278	71.576	99.863
	60°	10.868	23.137	38.168	42.661	57.837	71.278
	75°	8.8843	18.463	32.705	34.753	51.954	55.008
	90°	7.6865	15.591	27.428	31.937	45.131	47.529
0.05	30°	25.308	52.894	67.837	88.528	106.67	127.38
	45°	14.583	31.430	44.823	57.395	68.125	90.197
	60°	10.721	22.670	36.934	41.001	56.153	64.845
	75°	8.7907	18.149	31.704	33.749	49.500	51.152
	90°	7.6174	15.351	26.609	31.157	42.061	45.800
0.1	30°	23.656	47.661	59.445	76.299	90.012	104.01
	45°	14.000	29.408	40.951	51.777	60.526	78.055
	60°	10.410	21.573	34.340	37.929	50.884	58.205
	75°	8.5882	17.433	29.873	31.540	45.400	46.740
	90°	7.4695	14.833	25.283	29.304	39.001	42.198

Tableau A.11 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFS) avec $a/b = 5$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	6.9978	11.206	17.390	25.968	34.085	39.900
	45°	5.7598	8.7664	13.117	21.015	28.338	32.524
	60°	5.2220	7.7149	11.478	18.471	26.500	30.196
	75°	4.8972	7.1085	10.569	16.738	25.730	28.162
	90°	4.6495	6.6656	9.8818	15.389	25.237	26.288
0.05	30°	6.8338	10.741	16.046	23.599	31.448	34.690
	45°	5.6793	8.5294	12.452	18.025	26.508	29.103
	60°	5.1738	7.5823	10.843	15.390	24.292	26.384
	75°	4.8606	7.0056	9.8910	13.964	22.643	25.313
	90°	4.6195	6.5737	9.2118	13.014	21.300	24.755
0.1	30°	6.6525	10.342	15.276	22.062	28.952	32.129
	45°	5.5701	8.2993	11.989	17.074	24.737	27.147
	60°	5.0910	7.4102	10.512	14.658	22.607	24.910
	75°	4.7917	6.8634	9.6217	13.321	21.062	24.054
	90°	4.5594	6.4504	8.9750	12.420	19.860	23.577

Tableau A.12 : Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles elliptiques (CFS) avec $a/b = 2$.

h/b	ϕ	Mode					
		1	2	3	4	5	6
0.001	30°	22.416	45.493	64.886	84.450	101.71	126.59
	45°	12.982	27.806	42.455	54.565	64.923	90.709
	60°	9.4666	20.197	34.568	39.336	53.868	63.981
	75°	7.6418	16.076	28.882	32.996	46.902	49.192
	90°	6.4787	13.434	24.183	30.345	39.877	44.696
0.05	30°	21.583	44.001	60.913	78.497	94.365	113.13
	45°	12.667	27.164	40.766	52.184	61.715	82.996
	60°	9.3052	19.819	33.597	37.907	51.659	59.881
	75°	7.5448	15.829	28.238	32.050	45.232	47.907
	90°	6.4133	13.250	23.596	29.606	38.054	43.148
0.1	30°	20.280	40.655	54.320	69.114	82.004	95.683
	45°	12.154	25.751	37.589	47.725	55.708	73.209
	60°	9.0202	19.002	31.558	35.250	47.335	54.460
	75°	7.3587	15.283	26.870	30.003	42.006	44.030
	90°	6.2795	12.855	22.595	27.889	35.674	39.941

Annexe B

Les tableaux B.1-24 donnent la variation des six premiers paramètres de fréquence linéaire Ω_L des plaques sectorielles (encastrées et simplement appuyées) MGF (SUS304/Si₃N₄ et Al/Al₂O₃) en fonction des paramètres ($\phi=60^\circ, 90^\circ, h/b=0.001, 0.05, 0.1$ et $n=0., 0.1, 0.5, 1., 3., 5.$ et $10.$)

Tableau B.1: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	52.7054	94.9268	113.3060	150.3136	180.1091	194.7581
5.0	55.2423	99.4919	118.8886	157.5401	188.9533	208.2358
3.0	57.8632	104.2015	124.5170	165.0278	197.8096	217.0284
1.0	67.3088	121.2120	144.2053	192.0600	229.8677	236.6405
0.5	76.5025	137.7840	164.4147	218.3588	261.2232	279.9575
0.1	97.7652	176.1105	210.1791	279.1115	334.5334	362.0958
0.0	110.1627	198.4517	237.0811	314.5057	377.2790	414.2593

Tableau B.2: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastrées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	50.6791	89.1495	105.5517	135.8528	161.0859	175.6480
5.0	53.1383	93.4877	110.7037	142.4965	168.9754	184.2788
3.0	55.7018	98.0284	116.1031	149.4775	177.2821	193.3728
1.0	64.9251	114.3659	135.4983	174.5563	207.1222	225.9724
0.5	73.8402	130.1163	154.1633	198.6484	235.7510	257.1932
0.1	94.3976	166.3897	197.1447	254.0790	301.5839	328.9934
0.0	106.3850	187.5489	222.2272	286.4369	340.0234	370.9381

Tableau B.3: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encadrées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	45.9258	77.1798	89.8806	112.6705	130.7970	141.3001
5.0	48.1928	81.0256	94.3778	118.3351	137.3942	148.4474
3.0	50.6026	85.1492	99.2146	124.4518	144.5431	156.2061
1.0	59.2476	99.9145	116.5102	146.3023	170.0734	183.8791
0.5	67.4814	113.8780	132.8188	166.8351	194.0017	209.7629
0.1	86.3400	145.7797	170.0493	213.6555	248.5078	268.6955
0.0	97.3354	164.4042	191.7949	241.0264	280.3866	303.1694

Tableau B.4: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encadrées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	81.7074	157.0537	160.8818	255.0638	267.1171	275.1443
5.0	85.6440	164.6632	168.6097	271.6827	279.9688	288.3513
3.0	88.4155	100.2806	175.5326	176.6727	293.2639	301.9116
1.0	104.3525	200.6695	205.4340	331.4688	341.2703	351.3920
0.5	118.6052	228.0842	233.5066	377.0204	387.9735	399.4600
0.1	151.5481	290.8819	298.4138	448.5707	495.8959	510.5253
0.0	170.7572	327.5958	336.2121	491.1515	558.7853	575.2588

Tableau B.5: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encadrées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	76.9603	142.1910	145.5719	220.7653	228.7850	234.7522
5.0	80.7108	149.1659	152.7097	231.6728	240.0848	246.3458
3.0	84.6381	156.5147	160.2310	243.2329	252.0658	258.6486
1.0	98.7530	182.8869	187.2336	284.6312	294.9949	302.7585
0.5	112.3476	208.1597	213.1154	324.0953	335.9214	344.8003
0.1	143.6490	266.2509	272.6019	414.6646	429.8309	441.2351
0.0	161.9024	300.1544	307.3189	467.5779	484.6950	497.5691

Tableau B.6: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encadrées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	66.9128	115.8816	118.4343	170.3008	175.8297	179.2676
5.0	70.2472	121.7292	124.4123	178.9768	184.7913	188.4072
3.0	73.8289	128.0797	130.9053	188.4742	194.6045	198.4213
1.0	86.6604	150.7709	154.1040	222.3406	229.5912	234.1400
0.5	98.7841	172.0134	175.8181	253.8249	262.1064	267.3289
0.1	126.4452	220.3254	225.2017	325.2621	335.8814	342.6189
0.0	142.5680	248.5332	254.0387	367.0286	379.0238	386.6552

Tableau B.7: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encadrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	62.3494	111.7188	134.2872	176.7406	211.5908	230.7152
5.0	65.4077	116.7547	141.1870	184.7493	221.5632	246.1000
3.0	67.3077	119.9378	145.4287	189.8716	227.8289	255.6087
1.0	75.0859	134.3954	162.0556	212.9870	255.7077	286.2869
0.5	82.0837	147.4653	176.5200	233.7237	280.0291	301.7608
0.1	92.3584	166.3438	198.8180	263.5303	316.0607	347.6845
0.0	95.9427	172.8245	206.1941	273.7530	328.2665	353.0485

Tableau B.8: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encadrées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	59.6219	104.1630	123.8964	158.3954	187.3975	205.5412
5.0	62.7363	109.4238	130.8141	166.7495	197.3320	217.7058
3.0	64.7843	113.0157	135.4986	172.5689	204.3655	226.1966
1.0	72.5652	127.2971	152.0080	194.6941	230.9799	254.2584
0.5	79.2894	139.4972	165.8203	213.1812	253.0020	277.0100
0.1	89.0340	156.7983	185.7608	239.2508	283.8701	309.6721
0.0	92.4118	162.6965	192.6789	248.1272	294.3392	320.9873

Tableau B.9: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	53.4208	89.0097	103.8147	129.4428	149.6823	162.2805
5.0	56.5833	94.4250	110.6078	137.8533	159.4664	173.6802
3.0	58.8728	98.5319	115.7858	144.3999	167.2487	182.6889
1.0	66.5174	112.0925	131.5291	164.7710	191.4709	208.4458
0.5	72.5895	122.4888	143.2356	179.7699	209.0340	226.6423
0.1	81.1385	136.7382	159.4206	200.1034	232.5658	251.4113
0.0	84.0619	141.5287	164.9241	206.9218	240.3967	259.7886

Tableau B.10: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	96.6001	184.9187	189.8255	261.2175	314.9732	324.3763
5.0	101.3414	194.7570	198.9424	320.5026	329.7069	339.9001
3.0	104.2692	200.2293	204.5615	321.9682	338.9652	349.6157
1.0	116.3556	223.6437	228.6132	367.6149	379.6449	390.7561
0.5	127.2158	244.0810	250.2743	373.9718	415.8836	427.9417
0.1	143.1829	275.3795	281.9196	455.5168	468.3033	482.2777
0.0	148.7372	285.8917	292.8610	466.6043	486.4330	500.8926

Tableau B.11: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	90.3155	166.1187	169.8752	256.9589	265.7928	272.3762
5.0	95.1823	175.4825	179.3219	272.2464	281.1367	288.2833
3.0	98.4557	182.0143	185.9393	283.2537	292.2147	299.9210
1.0	110.4878	204.9767	209.5681	319.8251	330.7485	339.3570
0.5	120.6884	223.8132	229.0139	348.8710	361.3508	370.7478
0.1	135.3765	250.6138	256.5782	389.8509	404.0624	414.6978
0.0	140.4532	259.8279	266.0171	403.8941	418.6129	429.6138

Tableau B.12: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel encastées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	77.4377	133.0299	135.9210	194.4977	200.6834	204.2107
5.0	82.3487	142.0858	145.1702	208.4879	215.0380	218.8159
3.0	86.0398	149.2335	152.4648	219.8672	226.6956	230.8229
1.0	97.6130	170.4101	174.1243	252.1489	260.2056	265.1142
0.5	106.3961	185.5761	189.6596	274.2668	283.1763	288.6560
0.1	118.5852	206.1347	210.6893	303.7763	313.6758	319.8864
0.0	122.7320	213.0552	217.7578	313.6538	323.8606	330.2533

Tableau B.13: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	27.7012	61.4352	75.7876	106.1226	131.7072	145.4212
5.0	29.0674	64.4195	79.4753	111.2611	138.0880	152.4256
3.0	30.4784	67.5372	83.3131	117.9624	146.0883	161.4062
1.0	35.4402	78.5519	96.9030	137.2362	169.9682	187.8250
0.5	40.1933	89.2059	110.0405	155.9061	193.0996	213.3590
0.1	51.2135	113.8642	140.4683	199.0974	246.6060	272.4749
0.0	57.6719	128.2695	158.2474	224.3109	277.8408	307.0157

Tableau B.14: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	26.9941	59.1432	72.5489	100.3534	123.7122	135.6451
5.0	28.3226	62.0221	76.0897	105.2406	129.7576	142.2867
3.0	29.7020	65.0165	79.7730	110.3364	136.0632	149.2183
1.0	34.5589	75.6976	92.8945	128.5501	158.5735	173.9286
0.5	39.1968	85.9764	105.5132	146.0759	180.2117	197.6537
0.1	49.9282	109.7239	134.6778	186.5412	230.1822	252.4527
0.0	56.2163	123.6095	151.7392	210.2077	259.4301	284.5398

Tableau B.15: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	25.7081	54.5097	66.0759	88.9502	107.7955	117.1004
5.0	26.9746	57.1872	69.3358	93.3484	113.1586	122.9408
3.0	28.2980	59.9996	72.7643	97.9973	118.8407	129.1366
1.0	32.9559	69.9928	84.9297	114.5141	138.9978	151.0893
0.5	37.3840	79.5242	96.5137	130.2036	158.0946	171.8542
0.1	47.6137	101.5040	123.2314	166.3370	202.0597	219.6564
0.0	53.6153	114.3968	138.9178	187.5656	227.9172	247.7855

Tableau B.16: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	43.2016	102.1948	105.9495	183.5555	194.2730	200.7249
5.0	45.3218	107.1428	111.1132	192.4122	203.7057	210.4463
3.0	47.5108	112.2529	116.4450	201.5642	213.4613	220.4914
1.0	55.2563	130.5660	135.4495	234.5206	248.3746	256.5146
0.5	62.7048	148.3284	153.8157	266.5425	282.1767	291.4489
0.1	79.9623	189.4213	196.3395	340.5575	360.3628	372.2586
0.0	90.0645	213.3723	221.1936	383.4633	405.9972	419.4235

Tableau B.17: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	41.6851	96.4710	99.7762	167.5199	175.5120	181.8150
5.0	43.7281	101.1695	104.6608	175.7166	184.1232	190.7260
3.0	45.8525	106.0680	109.7539	184.2924	193.1389	200.0576
1.0	53.3715	123.5635	127.8698	214.9069	225.2583	233.3486
0.5	60.5699	140.3922	145.2427	244.2804	256.0143	265.2548
0.1	77.2103	179.2511	185.3713	312.0670	326.9862	338.8723
0.0	86.9527	201.9790	208.8659	351.7628	368.5720	381.9983

Tableau B.18: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (SUS304/Si₃N₄, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	38.9972	85.7712	88.4185	140.9704	146.7529	151.4687
5.0	40.9172	90.0106	92.8087	148.0185	154.1079	159.0603
3.0	42.9301	94.4892	97.4482	155.5310	161.9546	167.1651
1.0	50.0385	110.3887	113.8615	182.1467	189.7078	195.8626
0.5	56.7973	125.4898	129.4061	207.2414	215.8239	222.8782
0.1	72.3948	160.2757	165.2210	264.9299	275.8512	284.9564
0.0	81.5470	180.7133	186.2841	298.8968	311.2172	321.5222

Tableau B.19: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	33.9942	73.5796	91.3591	128.0160	158.4611	176.3895
5.0	36.6024	77.8368	97.1339	135.1207	167.1370	187.2315
3.0	38.0945	80.3883	100.5494	139.4469	172.4190	193.7459
1.0	41.3095	88.8757	110.5376	154.6192	191.3814	213.4987
0.5	43.9689	96.3227	119.2089	168.0073	208.0543	230.7608
0.1	48.5477	107.7103	132.8734	188.2094	233.0838	257.5516
0.0	50.3683	111.8432	137.9436	195.4443	242.0374	267.3968

Tableau B.20: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	32.9923	70.4558	86.8449	118.7813	146.2082	161.2200
5.0	35.5559	74.6997	92.5147	125.7436	154.7550	171.6144
3.0	37.0680	77.3610	96.0548	130.2561	160.3454	178.3646
1.0	40.3213	85.8373	106.1152	145.1946	179.0199	198.0496
0.5	42.9315	93.0039	114.4721	157.7435	194.5653	214.1404
0.1	47.3698	103.8304	127.4127	176.3351	217.4481	238.5170
0.0	49.1250	107.7388	132.1727	182.9346	225.5539	247.3355

Tableau B.21: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=90^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	31.1995	64.3511	78.1551	104.0280	125.6157	136.9161
5.0	33.6596	68.4984	83.5428	110.7746	133.8239	146.5276
3.0	35.1796	71.2920	87.2041	115.5601	139.7692	153.4833
1.0	38.4704	79.6303	97.1952	129.9644	157.6509	172.5394
0.5	40.9960	86.2409	104.9048	141.0649	171.2068	186.6284
0.1	45.1945	95.9993	116.4611	157.0064	190.4592	207.0239
0.0	46.8376	99.4859	120.6427	162.5878	197.1592	214.2355

Tableau B.22: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.001$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	52.4438	122.1054	127.1771	218.6772	231.9265	239.0843
5.0	56.0484	129.0108	134.7928	230.7510	244.9703	252.1911
3.0	58.1477	133.1681	139.3226	238.1105	252.8691	260.1990
1.0	63.5636	147.4138	153.7108	264.0873	280.3172	288.6336
0.5	68.1832	159.9945	166.2608	287.1351	304.2981	313.8567
0.1	75.7064	179.0866	185.6632	321.7067	340.5554	351.8110
0.0	78.5749	185.9668	192.7699	334.0705	353.6111	365.3501

Tableau B.23: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.05$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	50.3907	114.5166	118.9081	197.6103	207.2416	214.1728
5.0	53.9581	121.4437	126.4900	209.5912	220.0124	227.1445
3.0	56.1148	125.8873	131.3036	217.5723	228.4981	235.8689
1.0	61.5395	140.0230	145.6197	243.0635	255.2472	263.7902
0.5	65.9960	151.8397	157.4126	263.9829	276.9325	286.5953
0.1	73.1732	169.5122	175.3298	294.7405	308.8612	319.9809
0.0	75.8992	175.8438	181.8458	305.6143	320.2094	331.7520

Tableau B.24: Variation des six premiers paramètres de fréquences linéaires Ω_L des plaques sectorielles à gradient fonctionnel simplement appuyées (Al/Al₂O₃, $h/b=0.1$ et $\phi=60^\circ$).

n	Mode					
	1	2	3	4	5	6
10	46.7870	100.6366	104.0591	163.7587	170.5407	175.5934
5.0	50.2425	107.3522	111.3144	175.0739	182.4902	187.7314
3.0	52.4528	112.0602	116.3662	183.4673	191.3588	196.8303
1.0	57.8465	125.7124	130.2438	207.3363	216.2940	222.8042
0.5	62.0274	136.1783	140.6926	224.8427	234.3588	241.7347
0.1	68.6247	151.3724	156.0658	249.5614	259.8696	268.2860
0.0	71.1106	156.7490	161.5784	258.1492	268.7683	277.4707

Résumé :

Afin de surmonter les difficultés de maillage par éléments finis des plaques avec des formes géométriques complexes, un nouveau élément-p courbé est développé dans cette thèse. Il permet une représentation exacte d'un domaine courbé sans affecter indûment la précision de l'approximation locale à l'aide des fonctions "Mapping". La théorie du premier ordre des plaques en matériaux à gradient fonctionnel et les hypothèses de la non-linéarité géométrique de Von Karman sont utilisées. Le matériau est supposé être dépendant de la température et les propriétés des matériaux varient selon une loi de puissance de distribution le long de l'épaisseur. Les fonctions de forme de l'élément-p triangulaire sont exprimées en termes de polynômes orthogonaux de Legendre déplacés. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange et la méthode de l'équilibre harmonique et sont résolues itérativement par la méthode de linéarisation du mode propre. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences et modes propres des plaques. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de l'élément-p courbé développé. Plusieurs exemples sont traités. Les paramètres de fréquence linéaires et non linéaires sont calculés pour différentes plaques isotropes et en matériaux à gradient fonctionnel avec différentes formes géométriques. Une discussion est établie pour déterminer l'influence des différents paramètres physiques et géométriques et des conditions aux limites sur le comportement nonlinéaire.

Mots clés: Élément-p courbé ; Théorie du premier ordre des plaques ; Vibration des plaques ; Non-linéarité géométrique de Von Karman ; Matériaux à gradient fonctionnel ; Plaque de forme géométrique arbitraire.

Abstract:

In order to overcome the difficulties of meshing plates with complex geometrical forms by finite elements, a new curved p-element is developed in this work. It allows an exact representation of a curved domain without unduly affecting the precision of the local approximation using the mapping functions. In the formulation, the first order shear deformation theory of plates with functionally graded materials and the assumptions of the geometrical non-linearity of Von Karman are used. The material is assumed to be temperature dependent and the properties of materials graded in the thickness direction according to the power-law distribution in terms of volume fractions of the constituents. The shape functions of the triangular p-element are expressed in terms of the shifted Legendre orthogonal polynomials. The equations of motion are obtained by applying Lagrange's equations and the harmonic balance method and are solved iteratively. A program is elaborated for the calculation of the eigenvalues and eigenvectors of the system. The results obtained are compared with those available in the literature and show the fast convergence, exactitude and effectiveness of the curved p-element developed. Several examples are treated. The linear and nonlinear frequency parameters are calculated for various isotropic and functionally graded plates with arbitrary geometrical forms. Discussion is established to determine the influence of the physical and geometrical parameters as well as the boundary conditions on the nonlinear behavior.

Key words: Curved p-element; First order shear deformation theory; Vibration of plates; Von Karman Geometrically non-linear; Functionally graded Materials; Plate arbitrary geometrical forms.

ملخص

من أجل التغلب على مشاكل الربط للعناصر المتناهية للصفائح ذات الأشكال الكيفية، نموذج عنصر-p منحني طُوّر في هذه الأطروحة. يُمكن تقديمًا دقيقًا لمجال منحني بدون تعيين الدقة للتقريب المحلي بواسطة دالات «Mapping». نظرية الدرجة الأولى للصفائح ذات المواد المتدرجة وظيفيًا «FGM»، ومعطيات اللاخطية هندسية لـ «Von Karman» قد أُستعملت. المادة مفترضة متعلقة بالحرارة، و خصائص المواد تتغير حسب قانون اسي توزيعي تبعًا للسُمك. دالات الشكل للعنصر-p المثلثي معبرة بكثيرات الحدود المتعامدة المتحركة لـ «Legendre». معادلات الحركة الاهتزازية مُتحصل عليها بتطبيق معادلات «Lagrange» وطريقة التوازن التوافقي «HBM»، ثم حلّهم تكرارًا بطريقة جعل الخطي للشكل الخاص «LUM». برنامج عددي أُعد لحساب الذبذبات الخاصة الخطية واللاخطية للصفائح ذات الأشكال الكيفية، ذات المواد موحدة الخواص أو المواد المتدرجة وظيفيًا. النتائج المحصل عليها و المقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع بُيّنت سرعة التقارب، الدقة و فعالية العنصر-p المنحني المستعمل. عدة أمثلة حُلّجت و مناقشة حُققت من أجل تحديد تأثير مختلف العوامل الفيزيائية، الهندسية و الشروط الحدودية للصفحة.

الكلمات المفتاحية : عنصر-p منحني ؛ نظرية الدرجة الأولى للصفائح ؛ اهتزازات الصفائح ؛ اللاخطية هندسية لـ Von Karman ؛ المواد المتدرجة وظيفيًا ؛ الصفائح ذات الأشكال الكيفية.