

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Probabilités et statistiques.

LE FILTRE DE KALMAN

Présenté Par : DJAOUANI Yamina

Mémoire soutenu devant le jury composé de :

<i>Mme</i> M. DALI YOUCEF	MCA UABB TLEMCEN	Présidente
<i>Mr</i> A. ALLAM	MCA UABB TLEMCEN	Examineur
<i>Mme</i> N. BENSMAN	MCB UABB TLEMCEN	Examinatrice
<i>Mme</i> W. BENYELLES	MCB UABB TLEMCEN	Encadreur

Année universitaire : 2019/2020

Remerciements

- Tout d'abord, je remercie DIEU, le tout puissant de m'avoir accordé la force pour dépasser toutes les difficultés et réaliser ce mémoire.
- Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Mme W. BENYELLES. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.
- J'exprime également ma gratitude à Mme M. DALI YUCEF de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
- Je tiens à remercier Mr A. ALLAM et Mme N. BENSMAINE d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et faire partie du jury.
- J'adresse aussi mes sincères remerciements à tous mes professeurs de l'université de Tlemcen département de mathématiques qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.
- Enfin, je remercie mes très chers parents pour leur soutien constant, inconditionnel et leurs encouragements à tout moment.

Table des matières

1	Intruduction générale	1
2	Introduction à l'estimation optimale	1
2.1	Rappel de la méthode des moindres carrés	1
2.1.1	Les fonctions quadratiques	2
2.1.2	Dérivation de la forme quadratique	3
2.1.3	Valeurs propres d'une fonction quadratique	4
2.1.4	Minimisation d'une fonction quadratique	4
2.1.5	Méthode des moindres carrés	5
2.2	Le critère d'estimation optimal	7
2.2.1	Propriétés de l'espérance conditionnelle	9
2.3	Estimateur linéaire optimal	10
2.3.1	Définitions et notions de bases	10
2.3.2	Propriétés	13
2.3.3	Caractérisation (le principe d'orthogonalité)	14
2.3.4	Lien avec l'espérance conditionnelle	15
2.4	Application à l'estimation linéaire	17
2.4.1	Principe	17
3	Filtre de Kalman	19
3.1	Définitions	19
3.2	Principe du filtre de Kalman	20
3.3	Algorithme du filtre de Kalman	20
3.4	Exemples	24
4	Application à la poursuite de cible mobile	34
4.1	Modélisation du Problème	34
4.2	Poursuite en coordonnées cartésiennes	36
4.2.1	Implémentation du Filtre de Kalman sur données synthétiques	36
4.2.2	Influence du bruit	43
4.2.3	Application	51
5	Conclusion : Les limites du Filtre de Kalman	57

Chapitre 1

Intruduction générale

L'estimation est une branche des mathématiques-statistiques qui permet à partir de mesures effectuées (observations) sur un système ; d'estimer la valeur de différents paramètres (l'information utile) de ce système pour déterminer et prévoir l'état du système. Pour le faire, il existe deux approches : Variationnelle basée sur la théorie du contrôle optimal et séquentielle basée sur la théorie d'estimation optimale.

Dans de nombreux domaines (télécommunication, géo-localisation, contrôle industriel, finance, médecine, physique, mécanique,robotique. . . .) l'information utile n'est pas accessible directement car elle est noyée dans l'information observée. Cette problématique fait appel au développement des méthodes d'estimation et la question qui se pose est comment estimer le mieux possible l'information utile ? Par exemple :

$$IIN(t)=Iu(t)+B$$

IIN : les observations (information INutile).

Iu(t) : information utile.

B : un bruit blanc.

L'estimation optimale : consiste à trouver un estimateur qui minimise l'erreur quadratique. Dans des cas particuliers, il existe un estimateur sans biais, à variance minimale, mais pour cela, il faut que le système respecte quelques contraintes :

1. le bruit doit être gaussien.
2. le système doit être linéaire.

Ainsi, on parle de l'estimation optimale linéaire gaussienne ou tout simplement la méthode des moindres carrés.

La méthode des moindres carrés est la première méthode d'estimation optimale fondée par Gauss (1795) et Legendre (1810), ils l'ont développée simultanément et appliquée à l'estimation des paramètres d'orbite de Cérès.

Après, dans les années 40, Kolmogorov et Wiener ont résolu le problème du filtrage linéaire continu au sens des moindres carrés pour les processus stochastiques

stationnaires, donnant naissance au filtre de Wiener.

Ensuite, en 1960 Kalman proposa dans son article "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" une généralisation de filtre de Wiener qui s'affranchit de la stationnarité des processus stochastiques.

Le filtre de Kalman a été adopté par la plupart des chercheurs surtout après son application dans le programme spatiale APOLLO (estimation de la trajectoire terrestre).

Le filtre de Kalman est un filtre récursif pour l'estimation optimale de l'état du système. Ses applications sont nombreuses dans les métiers de l'ingénieur, il sera utilisé pour estimer des conditions initiales inconnues (balistiques), prédire des trajectoires de mobiles (trajectographie) et localiser un engin (navigation, radar, robotique...). Concrètement, il permet d'estimer l'état d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. Ce qui conduit à son utilisation dans une large gamme de domaines technologiques (tels que le traitement du signal, l'automatique, le radar et les systèmes de communication. . .).

Historiquement, Rudolf Kalman (né en 1930), poursuit des études scientifiques dans les domaines de l'électronique et de l'automatique et soutint une thèse en 1957 sur le comportement des solutions des équations récurrentes du second degré. A partir de 1955, il travailla dans différentes entreprises en tant qu'automaticien. En 1958, alors qu'il travaillait au Research Institute for Advanced Studies à Blatmore, il eut l'idée originale d'employer le formalisme des équations d'état au filtre de Wiener, ce qui lui permit de construire l'estimateur que nous connaissons aujourd'hui.

En 1960, alors que Kalman visitait la NASA, un des responsables, F.Schmidt comprit la possibilité d'appliquer les résultats de Kalman pour le projet APOLLO pour l'estimation et la commande de la trajectoire. Schmidt travailla sur le sujet et on peut dire que ce fut la première réelle implantation du filtre.

Le filtre de Kalman est un outil mathématique puissant, l'objectif de ce travail, est de nous donner les clés pour mieux comprendre le filtre de Kalman et ainsi, être en mesure de le construire et l'adapter au problème auquel nous sommes confrontés. Dans le premier chapitre de ce document, nous rappelons les bases de l'estimation de la méthode des moindres carrés ainsi que les estimateurs linéaires optimaux.

Dans le second chapitre de ce document, nous caractérisons mathématiquement le filtre de Kalman classique et nous définissons son algorithme.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à des applications, plus concrètes, qui proviennent de problèmes réels telle la poursuite d'une cible mobile et nous étudierons la réponse d'un système linéaire à un signal aléatoire de façon tout à fait complémentaire à la réponse d'un système linéaire à un signal déterministe.

En conclusion, nous traiterons des différentes limites susceptibles d'apparaître. Nous évoquerons alors les différents moyens permettant de pallier ces problèmes. Nous laissons volontairement de côté les filtres à temps continu et les filtres de lissage.

Chapitre 2

Introduction à l'estimation optimale

2.1 Rappel de la méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés utilisée en statistique (développée par Legendre et Gauss) a pour but l'estimation des quantités non mesurées à partir d'autres valeurs mesurées, avec une grande précision. Dans le cas particulier où la quantité à estimer est le vecteur d'état d'un système linéaire invariant, les observateurs d'état utilisant l'emplacement des pôles (ou les observations de Luenberger) peuvent devenir des outils efficaces pour l'identification. Dans ce chapitre, nous présenterons plusieurs concepts de base de l'estimation, dans le but d'introduire le filtrage de Kalman dans le chapitre suivant.

En résumé, ce filtrage peut être considéré comme une observation d'état pour des systèmes linéaires dynamiques à coefficients variables dans le temps. Cependant, contrairement à des observations plus standards, utilisant une méthode de placement des pôles, le filtrage de Kalman utilise les propriétés probabilistes des signaux.

Nous examinerons ici, le cas statique (par opposition au cas dynamique). Les inconnues à estimer sont toutes stockées dans un vecteur de paramètres x tandis que les mesures sont stockées dans un vecteur de mesures y . Afin d'effectuer cette estimation, nous allons principalement examiner l'approche dite méthode des moindres carrés qui cherche à trouver le vecteur p qui minimise la somme des carrés des erreurs.

Le système d'équations sera de type $f(x) = y$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ (*inconnue*) et $y \in \mathbb{R}^m$ (en général $n \leq m$, car souvent on a plus de mesures que d'inconnues)

2.1.1 Les fonctions quadratiques

Dans le cas où la dépendance entre l'échelle vectorielle est linéaire ie que

$$f(x) = y \Leftrightarrow M \cdot x = y$$

la méthode des moindres carrés est utilisée pour créer une fonction quadratique. Ce paragraphe rappelle plusieurs concepts attachés à ces fonctions, qui sont d'une nature particulière.

A préciser que si $n = m$ alors $x = M^{-1} \cdot y$ or ceci n'est pas notre cas, car majoritairement on a plus de mesures (en supposant que la matrice soit inversible).

Définition 1 Une fonction quadratique $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a la forme suivante :

$$f(x) = x^t \cdot Q \cdot x + Lx + c$$

avec

Q une matrice symétrique.

$x^t \cdot Q \cdot x$ est dite la forme quadratique de la fonction.

$Lx + c$ est dite la forme affine de la fonction.

Exemple 2 (fil rouge) soit f une fonction quadratique avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - x_2 + 5 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 5 \end{aligned}$$

Remarque 3 1) Q aurait pu être choisi comme suit $Q = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais dans

ce cas elle ne serait pas symétrique

2) $Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi définie est symétrique donc notre système sera unique et a en plus des propriétés liées aux valeurs propres des matrices symétriques qui nous seront utiles ultérieurement.

3) $x^t \cdot Q \cdot x = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ terme quadratique en fonction de x_i^2 et/ou des $x_i x_j$ avec $i \neq j$.

4) $Lx + c = 3x_1 - x_2 + 5$ terme affine ie composante linéaire plus constante.

2.1.2 Dérivation de la forme quadratique

Proposition 4 Toute forme quadratique de type : $f(x) = x^t \cdot Q \cdot x$ a une dérivée de la forme :

$$\frac{df}{dx}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = 2 x^t \cdot Q$$

Dans plusieurs littérature, la dérivée est dite le Jacobien de f

Preuve. On considère la forme quadratique précédemment définie :

$$f(x) = x^t \cdot Q \cdot x$$

On définit son développement de Taylor d'ordre 1 dans le voisinage très proche de x , la formule sera :

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x) \cdot \delta x + o(\|\delta x\|) \quad (2.1)$$

où $o(\|\delta x\|)$ est négligeable comparé à $\|\delta x\|$, avec δx évidemment très petit.

Il est évident aussi que $\frac{df}{dx}$ sera représenté par une matrice $1 \times n$, tout comme la fonction que nous linéarisons $f, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} f(x + \delta x) &= (x + \delta x)^t Q (x + \delta x) \\ &= x^t \cdot Q \cdot x + x^t \cdot Q \cdot \delta x + (\delta x)^t \cdot Q \cdot x + (\delta x)^t \cdot Q \cdot (\delta x) \\ &= x^t \cdot Q \cdot x + 2 x^t \cdot Q \cdot \delta x + o(\|\delta x\|) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $o(\|\delta x\|) = (\delta x)^t \cdot Q \cdot (\delta x)$ qui est négligeable.

De plus la symétrie de Q on remarque que $x^t \cdot Q \cdot \delta x = ((\delta x)^t \cdot Q \cdot x)^t$ car pour toute matrice AB son transposé sera $(AB)^t = B^t A^t$ et pour tout scalaire $a^t = a$; Or $x^t \cdot Q \cdot \delta x \in \mathbb{R}$ ainsi $x^t \cdot Q \cdot \delta x + (\delta x)^t \cdot Q \cdot x = 2 x^t \cdot Q \cdot \delta x$.

Regardons de plus près nos deux équations (2.1 et 2.2) en superposant les deux écritures, on en déduit que

$$\frac{df}{dx}(x) = 2 x^t \cdot Q$$

CQFD ■

Exemple 5 (fil rouge) ainsi la dérivée de notre forme quadratique sera :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= 2 x^t \cdot Q + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 & -3x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 + 3 & -6x_1 + 2x_2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.1.3 Valeurs propres d'une fonction quadratique

Le fait que la matrice Q soit symétrique nous donne une idée sur les valeurs propres et vecteurs propres, ainsi, ses valeurs propres sont toujours réelles et ses vecteurs propres orthogonaux deux à deux. le seul problème mathématique auquel on sera confronté c'est si les valeurs propres sont négatives ou de signes différents .

Si toutes les valeurs propres sont positives, notre forme quadratique $x^t \cdot Q \cdot x$ est dite positive.

Si toutes les valeurs propres sont strictement positives, notre forme quadratique $x^t \cdot Q \cdot x$ est dite définie positive.

Si notre fonction quadratique est définie positive alors il existe une et une seule solution qui la minimise.

2.1.4 Minimisation d'une fonction quadratique

Théorème 6 Si la matrice Q est définie positive , la fonction quadratique

$$f(x) = x^t \cdot Q \cdot x + Lx + c$$

atteint son minimum en un et un seul point noté

$$x^* = -\frac{1}{2}Q^{-1}L^t$$

et dit le minimiseur.

Ainsi le minimum est donc

$$f(x^*) = -\frac{1}{4}L Q^{-1}L^t + c$$

Preuve. La fonction f étant une fonction convexe et différentiable on calcule son minimiseur quand $\frac{df}{dx}(x^*) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x^*) &= 0 \Leftrightarrow 2 x^{*t} \cdot Q + L = 0 \\ &\Leftrightarrow x^{*t} \cdot Q = -\frac{1}{2}L \\ &\Leftrightarrow x^* = -\frac{1}{2}Q^{-1}L^t \end{aligned}$$

ainsi le minimum est :

$$\begin{aligned} f(x^*) &= x^{*t} \cdot Q \cdot x^* + Lx^* + c \\ &= \left(-\frac{1}{2}Q^{-1}L^t\right)^t Q \left(-\frac{1}{2}Q^{-1}L^t\right) + L \left(-\frac{1}{2}Q^{-1}L^t\right) + c \\ &= +\frac{1}{4}L \cdot Q^{-1} \cdot L^t - \frac{1}{2}L \cdot Q^{-1} \cdot L^t + c \\ &= -\frac{1}{4}L Q^{-1}L^t + c \end{aligned}$$

■

Exemple 7 On a la fonction quadratique suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 5$$

Il est facile de vérifier que la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive car ses valeurs propres sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (les deux étant des nombres positifs), alors cette forme quadratique a un minimiseur

$$\begin{aligned} x^* &= -\frac{1}{2} Q^{-1} L^t \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc son minimum est

$$\begin{aligned} f(x^*) &= -\frac{1}{4} L Q^{-1} L^t + c \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \\ &= -\frac{45}{4} \end{aligned}$$

Exemple 8 La fonction quadratique $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

la matrice de sa forme quadratique Q est un scalaire (1×1), $Q = 3$ strictement positif donc notre forme quadratique est définie positive et il existe une solution unique qui atteint le minimum de cette fonction.

$$\text{son minimiseur } x^* = -\frac{1}{2} Q^{-1} L^t = -\frac{1}{2} \frac{1}{3} 6 = -1$$

Conclusion le minimum de la fonction est :

$$f(x^*) = -\frac{1}{4} L Q^{-1} L^t + c = -\frac{1}{4} 6 \frac{1}{3} 6 + 7 = 4$$

2.1.5 Méthode des moindres carrés

On peut voir l'estimation comme l'obtention d'un ordre de grandeur pour certaines quantités d'un système à partir de mesures d'autres quantités du même système. Le problème de l'estimation qu'on va considérer dans ce chapitre est le suivant : envisageons un système pour lequel nous avons effectué diverses mesures $y = (y_1, \dots, y_p)$ et

un modèle $\mathfrak{M}(x)$ dépendant des paramètres du vecteur x . On veut estimer x , de telle façon que le résultat $f(x)$ généré par le modèle $\mathfrak{M}(x)$ soit le plus proche possible des mesures effectuées y .

Cas linéaire

Admettons que notre modèle linéaire soit : $f(x) = M \cdot x$ on veut que $f(x) = y$

Or cette dernière écriture (égalité) $f(x) = y$ est un abus car souvent $\dim(y) > \dim(x)$, de plus, les mesures y subissent forcément un bruit dans la réalité. Pour cela, on va chercher le meilleur x qui minimisera $e(x) = \|f(x) - y\|^2$ qui est dit critère des moindres carrés

En effet,

$$\begin{aligned}
 e(x) &= \|f(x) - y\|^2 \\
 &= \|M \cdot x - y\|^2 \\
 &= (M \cdot x - y)^t (M \cdot x - y) \\
 &= (x^t \cdot M^t - y^t) (M \cdot x - y) \\
 &= x^t \cdot M^t \cdot M \cdot x - x^t \cdot M^t \cdot y - y^t \cdot M \cdot x + y^t y \\
 &= x^t \cdot M^t \cdot M \cdot x - 2y^t \cdot M \cdot x + y^t y \\
 &= x^t \cdot Q \cdot x + L \cdot x + c
 \end{aligned}$$

où $\|v\|^2 = v^t v$

$M^t \cdot M$ est une matrice symétrique : $(M^t \cdot M)^t = M^t \cdot M$

Le critère des moindres carrés a la forme d'une fonction quadratique donc, on va pouvoir le minimiser (c'est notre but), tout en supposant que toutes les valeurs propres de $M^t \cdot M$ soient strictement positives, ce qui nous donnera, une solution unique pour la minimisation (en appliquant le théorème précédent).

Par conséquent, le minimiseur unique \hat{x} est :

$$\hat{x} = (M \cdot M^t)^{-1} \cdot M^t \cdot y$$

On pose K la matrice : $K = (M \cdot M^t)^{-1} \cdot M^t$

Le vecteur \hat{x} est dit estimateur des moindres carrés, et ainsi on peut estimer les valeurs de y en utilisant notre relation linéaire prédéfinie au début.

Donc l'estimateur de y notée \hat{y} est défini :

$$\begin{aligned}
 \hat{y} &= f(\hat{x}) \\
 &= M \cdot \hat{x} \\
 &= M \cdot (M \cdot M^t)^{-1} \cdot M^t \cdot y \\
 &= M \cdot K \cdot y
 \end{aligned}$$

\hat{y} sont dites aussi les mesures filtrées.

On définit aussi un vecteur des résidus, noté r :

$$\begin{aligned} r &= \hat{y} - y \\ &= M \cdot Ky - y \\ &= (M \cdot K - I)y \end{aligned}$$

La norme de ce vecteur représente la distance entre y et l'hyperplan $f(\mathbb{R}^n)$, si cette norme est grande cela ne peut être interprété que de deux manières soit une ou erreur dans le modèle choisi ou les données mesurées y sont innexacts.

Cas non linéaire

Si $f(x)$ sont générées par un modèle non linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, l'estimateur des moindres carrés est donnée par

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x) - y\|^2$$

dans ce cas on a deux approches différentes qui cherchent un minimum à savoir, comme la méthode de Newton et de Monté Carlo.

2.2 Le critère d'estimation optimal

RAPPEL : Considérons deux vecteurs aléatoires $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, P_X)$ et $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, P_Y)$.

Supposons que le vecteur Y correspond au vecteur aléatoire d'observations, qui ne sera disponible qu'une fois la campagne de mesure effectuée, et le vecteur aléatoire X est celui qu'il faut estimer. Notre problème est d'estimer le mieux possible X sachant qu'on a la mesure y (i.e sachant $Y = y$ la réalisation de Y). La réponse à ce problème revient à trouver un estimateur \hat{X} qui dépend de Y et qui doit vérifier que la norme de l'erreur de l'estimation sera la plus petite possible comme un critère d'optimalité, i.e $\|X - \hat{X}\|_2^2 = \mathbb{E}((X - \hat{X})^t (X - \hat{X}))$ soit minimale, c'est le critère d'erreur quadratique. En d'autre termes, le meilleur estimateur doit atteindre le minimum de l'erreur quadratique. Dans un premier temps, on va montrer qu'il s'agit de l'espérance conditionnelle, dans le cas général. Ensuite, on va se limiter aux estimateurs linéaires optimaux (au sens de la minimisation de l'erreur quadratique) plus faciles à calculer analytiquement que l'espérance conditionnelle, et enfin on montre que dans le cas gaussien (où le vecteur (X, Y) est gaussien), notre estimateur linéaire optimal coïncide avec l'espérance conditionnelle.

On note par $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace des vecteurs aléatoires X de carré intégrable i.e $\mathbb{E}(X^t X) < +\infty$.

Définition 9 *L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire*

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(X^t Y)$$

et de la norme quadratique associée $\|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(X^t X)}$

Dans ce qui va suivre, on prend X et $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Définition 10 *Un estimateur \hat{X} est une fonction mesurable $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ censée nous donner une estimation de X connaissant la mesure $Y = y$.*

Soit $\hat{X}(y)$ un estimateur de X sachant $Y = y$. Naturellement \hat{X} n'est pas égal à X , une mesure de l'erreur d'estimation est donnée par l'erreur quadratique conditionnelle

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X}(Y))^t (X - \hat{X}(Y)) | Y = y]$$

Définition 11 *Estimateur du minimum d'erreur quadratique conditionnelle*

L'estimateur du minimum d'erreur quadratique conditionnelle est un estimateur $\hat{X}(Y)$ tel que

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X}(Y))^t (X - \hat{X}(Y)) | Y = y] \leq \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t (X - \Phi(Y)) | Y = y]$$

pour tout autre estimateur $\Phi(Y)$ et pour toute réalisation y de l'observation.

c.à.d

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X}(Y))^t (X - \hat{X}(Y)) | Y = y] = \min_{\Phi(\cdot)} \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t (X - \Phi(Y)) | Y = y]$$

Proposition 12 *L'estimateur du minimum d'erreur quadratique conditionnelle de X sachant $Y = y$ est l'espérance conditionnelle, i.e.*

$$\hat{X}(y) = \mathbb{E}(X | Y = y)$$

Preuve. Soit $\Phi(\cdot)$ un estimateur,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t (X - \Phi(Y)) | Y = y] = \\ &= \mathbb{E}(X^t X | Y = y) - \mathbb{E}(X^t \Phi(Y) | Y = y) - \mathbb{E}(\Phi(Y)^t X | Y = y) + \mathbb{E}(\Phi(Y)^t \Phi(Y) | Y = y) \\ &= \mathbb{E}(X^t X | Y = y) - 2\Phi(y)^t \mathbb{E}(X | Y = y) + \Phi(y)^t \Phi(y) \\ &= \Phi(y)^t \Phi(y) - 2\Phi(y)^t \mathbb{E}(X | Y = y) + [\mathbb{E}(X | Y = y)]^t \cdot \mathbb{E}(X | Y = y) - [\mathbb{E}(X | Y = y)]^t \cdot \mathbb{E}(X | Y = y) \\ & \quad + \mathbb{E}(X^t X | Y = y) \\ &= [\Phi(y) - \mathbb{E}(X | Y = y)]^t \cdot [\Phi(y) - \mathbb{E}(X | Y = y)] + \mathbb{E}(X^t X | Y = y) - [\mathbb{E}(X | Y = y)]^t \cdot \mathbb{E}(X | Y = y) \end{aligned}$$

et le vecteur $\Phi(y)$ qui minimise cette expression est : $\Phi(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$ avec $\mathbb{E}(X^t X|Y = y)$ finie. ■

Donc, l'espérance conditionnelle est l'estimateur qui réalise le minimum de l'erreur quadratique conditionnelle, or on aimerait avoir un résultat inconditionnel.

Proposition 13 *L'estimateur du minimum d'erreur quadratique est l'espérance conditionnelle, i.e. pour tout estimateur $\Phi(Y)$ de X*

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y))^t \cdot (X - \mathbb{E}(X|Y))] \leq \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t \cdot (X - \Phi(Y))]$$

ou bien

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y))^t \cdot (X - \mathbb{E}(X|Y))] = \min_{\Phi(\cdot)} \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t \cdot (X - \Phi(Y))]$$

Preuve. Soit $\hat{X}(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - \hat{X}(Y))^t (X - \hat{X}(Y))] &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{E}[(X - \hat{X}(Y))^t (X - \hat{X}(Y)) | Y = y] dF_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{E}[(X - \hat{X}(y))^t (X - \hat{X}(y)) | Y = y] dF_Y(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{E}[(X - \Phi(y))^t (X - \Phi(y)) | Y = y] dF_Y(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t (X - \Phi(Y)) | Y = y] dF_Y(y) \\ &\leq \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t \cdot (X - \Phi(Y))] \end{aligned}$$

■

2.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit (X, Y) un couple aléatoire de $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, avec $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Proposition 14 1. *Biais* : $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X) \Leftrightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y) - X) = 0$

2. *Orthogonalité* : $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y))\Phi^t(Y)] = 0 \quad \forall \Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

3. *Distance minimale* :

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y))^t (X - \mathbb{E}(X|Y))] \leq \mathbb{E}[(X - \Phi(Y))^t \cdot (X - \Phi(Y))] \quad \forall \Phi$$

$$\Leftrightarrow \|X - \mathbb{E}(X|Y)\|_2 \leq \|X - \Phi(Y)\|_2 \quad \forall \Phi$$

Or, l'obtention d'une expression analytique de l'estimateur $\mathbb{E}(X|Y)$ n'est généralement pas facile et on préfère se limiter aux **estimateurs linéaires** optimaux

2.3 Estimateur linéaire optimal

2.3.1 Définitions et notions de bases

Définition 15 *) Soient X et Y des vecteurs aléatoires, on note mathématiquement leur moyenne par :

$$\bar{X} = \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \mathbb{E}(Y)$$

**) On définit la matrice de covariance par :

$$\Gamma_{XY} = \mathbb{E}[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})^t]$$

***) Ainsi les matrices de covariance associées à X et Y sont respectivement :

$$\Gamma_X = \Gamma_{XX} = \mathbb{E}[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^t]$$

$$\Gamma_Y = \Gamma_{YY} = \mathbb{E}[(Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^t]$$

- Un vecteur aléatoire X est dit "Blanc" si toutes ses composantes x_i sont indépendantes l'une de l'autre et dans ce cas la matrice de covariance Γ_X est diagonale.
- Les matrices de covariance sont symétriques et positives ie que toutes les valeurs propres sont des nombres réels et positifs.

Définition 16 On dit que l'estimateur de X sachant $Y = y$ noté par \hat{X} est orthogonal à l'espace engendré par le vecteur aléatoire Y si et seulement si

$$\mathbb{E}[(\hat{X} - X)(Y - \bar{Y})^t] = 0$$

Théorème 17 Soient X , u ainsi que Y , trois vecteurs aléatoires (ultérieurement ces vecteurs seront généralement Gaussiens) liés par la relation

$$Y = AX + u + b$$

avec (A, b : des valeurs déterministes) on suppose que X et u sont indépendants, u centrée (ultérieurement u jouera le rôle du bruit)

alors on a :

$$\bar{Y} = A\bar{X} + b$$

$$\text{et} \quad \Gamma_Y = A \cdot \Gamma_X \cdot A^t + \Gamma_u$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \mathbb{E}(AX + u + b) \\ &= A\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(u) + \mathbb{E}(b), \quad \text{car } \mathbb{E}(\cdot) \text{ linéaire} \\ &= A\mathbb{E}(X) + b, \quad \text{car } u \text{ centré} \\ &= A\bar{X} + b \end{aligned}$$

d'un autre coté :

$$\begin{aligned}
\Gamma_Y &= \mathbb{E}((Y - \bar{Y}) \cdot (Y - \bar{Y})^t) \\
&= \mathbb{E}\left[(AX + u + b - A\bar{X} - b) \cdot (AX + u + b - A\bar{X} - b)^t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(A(X - \bar{X}) + u) \cdot ((X - \bar{X})^t A^t + u^t)\right] \\
&= A \cdot \mathbb{E}\left[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^t\right] \cdot A^t + A\mathbb{E}\left[(X - \bar{X})u^t\right] + \mathbb{E}\left[u(X - \bar{X})^t\right] A^t + E(u u^t) \\
&= A \cdot \Gamma_X \cdot A^t + \Gamma_u
\end{aligned}$$

les termes $\mathbb{E}\left[(X - \bar{X})u^t\right], \mathbb{E}\left[u(X - \bar{X})^t\right]$ s'annulent du fait des l'hypothèses faites sur X et u . ■

Définition 18 *Un estimateur linéaire \hat{X} est une fonction de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire de la forme :*

$$\hat{X} = KY + b \quad (2.3)$$

où $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $b \in \mathbb{R}^n$

Théorème 19 *Soient deux vecteurs aléatoires X et Y , il existe un unique estimateur linéaire optimal au sens de la minimisation de l'erreur quadratique, non-biaisé et orthogonal; donné par :*

$$\hat{X} = \bar{X} + K(Y - \bar{Y}) \quad (2.4)$$

où

$$K = \Gamma_{XY} \Gamma_Y^{-1} \quad (2.5)$$

est appelé **gain de Kalman**.

Preuve. La preuve est basée sur la recherche de $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ qui réalisent le minimum de l'erreur quadratique.

On a

$$\mathbb{E}((X - \hat{X})^t (X - \hat{X})) = Tr \mathbb{E}((\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^t)$$

où Tr est la trace d'une matrice carrée.

Soit \hat{X} l'estimateur linéaire optimal, donc

$$\mathbb{E}((X - \hat{X})^t (X - \hat{X})) = \min_{K,b} Tr \mathbb{E}((KY + b - X)(KY + b - X)^t) := \min_{K,b} Q(K, b)$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((KY + b - X)(KY + b - X)^t) &= \mathbb{E}[(KY + b - \bar{X} - (X - \bar{X})) (KY + b - \bar{X} - (X - \bar{X}))^t] \\
&= \mathbb{E}[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^t] + \mathbb{E}[(KY + b - \bar{X})(KY + b - \bar{X})^t] - \mathbb{E}[(X - \bar{X})(KY + b - \bar{X})^t] - \mathbb{E}[(KY + b - \bar{X})(X - \bar{X})^t]
\end{aligned}$$

Après calcul, on trouve

$$\mathbb{E}((KY+b-X)(KY+b-X)^t) = \Gamma_X + K\Gamma_Y K^t + (b - \bar{X} + K\bar{Y})(b - \bar{X} + K\bar{Y})^t - \Gamma_{XY} K^t - K\Gamma_{YX}$$

Alors

$$Q(K, b) = Tr\Gamma_X + Tr(K\Gamma_Y K^t) + Tr((b - \bar{X} + K\bar{Y})(b - \bar{X} + K\bar{Y})^t) - Tr(\Gamma_{XY} K^t) - Tr(K\Gamma_{YX})$$

On utilise $\frac{\partial Tr(BA^t)}{\partial A} = B$, $\frac{\partial Tr(AB^t)}{\partial A} = B$, $\frac{\partial Tr(ABA^t)}{\partial A} = 2AB$ pour calculer b_{opt} et K_{opt} .

Calcul de b_{opt} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(K, b)}{\partial b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial Tr((b - \bar{X} + K\bar{Y})(b - \bar{X} + K\bar{Y})^t)}{\partial b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b + 2(K\bar{Y} - \bar{X}) &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{opt} &= \bar{X} - K\bar{Y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Calcul de K_{opt} :

$$\frac{\partial Q(K, b)}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow 2K\Gamma_Y - 2\Gamma_{XY} + 2K\bar{Y}\bar{Y}^t + 2(b - \bar{X})\bar{Y}^t = 0 \quad (2.7)$$

On remplace l'expression de b_{opt} (2.6) dans (2.7), on retrouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(K, b_{opt})}{\partial K} &= 2K\Gamma_Y - 2\Gamma_{XY} = 0 \\ \Leftrightarrow K_{opt} &= \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1} \end{aligned}$$

Donc, il nous reste à vérifier que $Q(K_{opt}, b_{opt})$ est un minimum :

$$\begin{aligned} r(K, b) &= \frac{\partial^2 Q(K, b)}{\partial b^2} = 2 \\ t(K, b) &= \frac{\partial^2 Q(K, b)}{\partial K^2} = 2\Gamma_Y + 2\bar{Y}\bar{Y}^t \\ s(K, b) &= \frac{\partial^2 Q(K, b)}{\partial b \partial K} = 2\bar{Y}^t \\ \Delta &= s^2(K_{opt}, b_{opt}) - r(K_{opt}, b_{opt})t(K_{opt}, b_{opt}) \\ &= 4\bar{Y}\bar{Y}^t - 4\Gamma_Y - 4\bar{Y}\bar{Y}^t = -4\Gamma_Y < 0 \quad \text{car } \Gamma_Y \text{ définie positive.} \end{aligned}$$

alors, $\Delta < 0$ et $r(K_{opt}, b_{opt}) > 0 \Rightarrow Q(K_{opt}, b_{opt})$ est un minimum.

Enfin, l'estimateur linéaire optimal est donné par :

$$\hat{X} = K_{opt}Y + b_{opt} = \bar{X} + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(Y - \bar{Y})$$

Maintenant montrons qu'il est sans biais ie

$$\mathbb{E}(\text{biais}) = \mathbb{E}(\text{erreur}) = \mathbb{E}(\varepsilon) = \mathbb{E}(\hat{X} - X) = 0?$$

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon) &= \mathbb{E}(\hat{X} - X) = \mathbb{E}(\bar{X} + K(Y - \bar{Y}) - X) \\ &= \bar{X} + K\bar{Y} - K\bar{Y} - \bar{X} \\ &= 0 \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

L'orthogonalité :

Il suffit de vérifier que $\mathbb{E}(\varepsilon (Y - \bar{Y})^t) = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon (Y - \bar{Y})^t) &= \mathbb{E}[(\hat{X} - X)(Y - \bar{Y})^t] \\ &= \mathbb{E}[(-(X - \bar{X}) + K(Y - \bar{Y}))(Y - \bar{Y})^t] \\ &= \mathbb{E}[K(Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^t] - E[(\bar{X} - X)(Y - \bar{Y})^t] \\ &= K\Gamma_Y - \Gamma_{XY} \\ &= 0 \quad \text{car } K = \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1} \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

■

2.3.2 Propriétés

Proposition 20 *La matrice de covariance de l'erreur de l'estimation linéaire optimale est :*

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_X - K\Gamma_{YX} \tag{2.8}$$

Preuve. Par définition ,la matrice de covariance de ε est :

$$\begin{aligned} \Gamma_\varepsilon &= \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^t) \\ &= \mathbb{E}((K\tilde{Y} - \tilde{X})(K\tilde{Y} - \tilde{X})^t) \quad \text{avec } \tilde{X} = X - \bar{X}, \tilde{Y} = Y - \bar{Y} \\ &= K\Gamma_Y K^t - K\Gamma_{YX} - \Gamma_{XY} K^t + \Gamma_X \\ &= (K\Gamma_Y - \Gamma_{XY})K^t - K\Gamma_{YX} + \Gamma_X \end{aligned}$$

D'après (2.5) ; on a

$$(K\Gamma_Y - \Gamma_{XY}) = 0$$

Alors

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_X - K\Gamma_{YX}$$

■

Proposition 21 *Il n'existe aucun estimateur linéaire qui permet d'obtenir une matrice de covariance sur l'erreur Γ_ε plus petite que celle donnée par l'estimation optimale (au sens de la minimisation de l'erreur quadratique).*

Preuve. Toute matrice possible pour notre cas s'écrit sous la forme de $K = K_0 + \Pi$ avec $K_0 = \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}$ et Π étant une matrice arbitraire

$$\begin{aligned}\Gamma_\varepsilon &= (K_0 + \Pi)\Gamma_Y(K_0 + \Pi)^t - \Gamma_{XY}(K_0 + \Pi)^t - (K_0 + \Pi)\Gamma_{YX} + \Gamma_X \\ &= (K_0 + \Pi)(\Gamma_Y K_0^t + \Gamma_Y^t \Pi^t) - (\Gamma_{XY} K_0^t + \Gamma_{XY} \Pi^t) - (K_0 \Gamma_{YX} + \Pi \Gamma_{YX}) + \Gamma_X \\ &= K_0 \Gamma_{YX} + \Pi \Gamma_{YX} + K_0 \Gamma_Y \Pi^t + \Pi \Gamma_Y \Pi^t - K_0 \Gamma_{YX} - \Pi \Gamma_{YX} - \Gamma_{XY} \Pi^t - K_0 \Gamma_{YX} + \Gamma_X \\ \text{car } \Gamma_Y K_0^t &= \Gamma_{YX} \quad \text{et} \quad \Gamma_{XY} K_0^t = K_0 \Gamma_{YX} \\ &= \Gamma_X - K_0 \Gamma_{YX} + \Pi \Gamma_Y \Pi^t.\end{aligned}$$

Puisque $\Pi \Gamma_Y \Pi^t$ est toujours symétrique positive, la matrice de covariance Γ_ε est minimale pour $\Pi = 0$

c.à.d $K = K_0 = \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}$ ce qui correspond à notre estimateur linéaire optimal.

■

2.3.3 Caractérisation (le principe d'orthogonalité)

Le théorème suivant nous donne à la fois, une caractérisation géométrique et une condition nécessaire et suffisante pour que notre estimateur linéaire optimal atteigne le minimum de l'erreur quadratique.

Théorème 22 *Soit X ($\in \mathbb{R}^n$) un vecteur aléatoire inconnu qui doit être estimé à partir du vecteur d'observation Y ($\in \mathbb{R}^m$), avec $\hat{X} = KY + b$ (l'estimateur linéaire de X) où $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ quelconque, alors l'estimateur \hat{X} atteint le minimum d'erreur quadratique ssi :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{X} - X) &= 0_{n \times 1} \\ \mathbb{E}[(\hat{X} - X)(Y - \bar{Y})^t] &= 0_{n \times m}\end{aligned}$$

Preuve. (\Rightarrow) Direct par le théorème précédent.

(\Leftarrow) Il suffit de vérifier que $b = \bar{X} - K\bar{Y}$ et $K = \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}$ (d'après le théorème précédent).

Hypothèses : $\hat{X} = KY + b$, sans biais et orthogonal.

1. Sans biais :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon) &= \mathbb{E}(\hat{X} - X) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(KY + b - X) = 0 \\
&\Leftrightarrow K\mathbb{E}(Y) + b - \mathbb{E}(X) = 0 \\
&\Leftrightarrow K\bar{Y} + b - \bar{X} = 0 \\
&\Leftrightarrow b = \bar{X} - K\bar{Y}
\end{aligned}$$

2. Orthogonalité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\hat{X} - X)(Y - \bar{Y})^t] &= 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[(KY + b - X)(Y - \bar{Y})^t] = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}[(K(Y - \bar{Y}) + K\bar{Y} + b - (X - \bar{X}) - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})^t] = 0 \\
&\Leftrightarrow K\Gamma_Y - \Gamma_{XY} + (K\bar{Y} + b - \bar{X})\mathbb{E}((Y - \bar{Y})^t) = 0 \\
&\Leftrightarrow K = \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1} \text{ car } \mathbb{E}((Y - \bar{Y})^t) = 0
\end{aligned}$$

■

2.3.4 Lien avec l'espérance conditionnelle

Proposition 23 Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien de dimension $N = n+m$, d'espérance et de covariance

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_Z = \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{YX} \\ \Gamma_{XY} & \Gamma_Y \end{pmatrix}$$

Alors la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ notée par $\mathcal{L}(X|Y = y)$ est gaussienne d'espérance

$$\bar{X} + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(y - \bar{Y})$$

et de covariance

$$\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX}$$

Preuve. On suppose (pour simplifier) que Γ_Z et Γ_X sont inversibles

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{|\Gamma_Z|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \bar{X} \\ y - \bar{Y} \end{pmatrix}^T \Gamma_Z^{-1} \begin{pmatrix} x - \bar{X} \\ y - \bar{Y} \end{pmatrix}\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \frac{1}{|\Gamma_Y|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (y - \bar{Y})^T \Gamma_Y^{-1} (y - \bar{Y})\right)}
\end{aligned}$$

On utilise la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} I & -\Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \Gamma_Z \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{XY}^t & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX} & 0 \\ 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

En prenant le déterminant dans (2.9), on obtient

$$1 \times |\Gamma_Z| \times 1 = |\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX}| \times |\Gamma_Y|$$

La formule (2.9) implique aussi

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{XY}^t & I \end{pmatrix}^{-1} \Gamma_Z^{-1} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX})^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma_Y^{-1} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\Gamma_Z^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{XY}^t & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX})^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma_Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x - \bar{X} \\ y - \bar{Y} \end{pmatrix}^T \Gamma_Z^{-1} \begin{pmatrix} x - \bar{X} \\ y - \bar{Y} \end{pmatrix} = (x - \hat{X})^T (\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX})^{-1} (x - \hat{X}) + (y - \bar{Y})^T \Gamma_Y^{-1} (y - \bar{Y})$$

où

$$\hat{X} = \bar{X} + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(y - \bar{Y})$$

c'est à dire

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{(2)^{n/2}} \frac{1}{|R|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \hat{X})^T R^{-1}(x - \hat{X})\right)$$

avec

$$R = (\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{YX})$$

■

Remarque 24 *La proposition précédente nous assure que dans le cas gaussien l'estimateur linéaire optimal (au sens de la minimisation de l'erreur quadratique) est le meilleur parmi tous les estimateurs existants.*

2.4 Application à l'estimation linéaire

2.4.1 Principe

Supposons que $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$ soient reliés par la relation suivante :

$$Y = CX + \beta \quad (2.10)$$

où $\beta \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur aléatoire centré indépendant de X et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matrice de covariance de X et β sont notées Γ_X et Γ_β et on cherche à trouver \hat{X} l'estimateur linéaire non-biaisé orthogonal ; pour cela on va calculer $\bar{Y}, \Gamma_Y, \Gamma_{XY}$

$$\bar{Y} = \mathbb{E}(CX + \beta) = C\bar{X} \quad (2.11)$$

$$\Gamma_Y = C\Gamma_X C^T + \Gamma_\beta \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{XY} = \mathbb{E}(\tilde{X}(Y - \bar{Y})^t) = \mathbb{E}(\tilde{X}(C(X - \bar{X}) + \beta)^t) = \mathbb{E}(\tilde{X}\tilde{X}^t)C^t + \mathbb{E}(\tilde{X}\beta) = \Gamma_X C^t \quad (2.13)$$

Par conséquent, notre estimateur \hat{x} avec la matrice de covariance sur l'erreur peuvent être obtenu à partir de $\Gamma_X, \Gamma_\beta, C, \bar{X}$, en utilisant les formules suivantes :

D'après (2.11) l'innovation est :

$$\tilde{Y} = Y - C\bar{X} \quad (2.14)$$

D'après (2.12) la matrice de covariance de l'innovation est :

$$\Gamma_Y = C\Gamma_X C^T + \Gamma_\beta$$

D'après (2.5) et (2.13) le gain de Kalman est :

$$K = \Gamma_X C^T \Gamma_Y^{-1} \quad (2.15)$$

On a, d'après (2.4) l'estimateur :

$$\hat{X} = \bar{X} + K\tilde{Y} \quad (2.16)$$

D'après (2.8) et (2.13) la matrice de covariance de l'estimation est :

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_X - K C \Gamma_X \quad (2.17)$$

Exemple 25 Etant donné le système suivant :
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$
 et on veut trouver les

valeurs du vecteur $X = (x_1, x_2)^t$, en utilisant la méthode d'estimation linéaire. Alors, le système précédent se recrit sous la forme suivante :

$$Y = CX + \beta \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

On prend (a priori) : $\bar{X} = (0, 0)^t$, $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sqrt{10}$ et β un vecteur de bruits blanc indépendant de X avec $\sigma_{\beta_1} = 1$ et $\sigma_{\beta_2} = \sigma_{\beta_3} = 2$. Alors $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ et

$\Gamma_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On suppose que x_1 et x_2 sont indépendants, par conséquent Γ_X est

donnée par : $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

On obtient :

$$\tilde{Y} = Y - C\bar{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_Y = C\Gamma_X C^T + \Gamma_\beta = \begin{pmatrix} 131 & 120 & -10 \\ 120 & 134 & 10 \\ -10 & 10 & 24 \end{pmatrix}$$

$$K = \Gamma_X C^T \Gamma_Y^{-1} = \begin{pmatrix} -0.06667725 & 0.2627401 & 0.2794094 \\ 0.33656136 & -0.1357358 & -0.2198762 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = \bar{X} + K\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1.305763 \\ 1.742340 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_X - K C \Gamma_X = \begin{pmatrix} 0.6572472 & -0.4603905 \\ -0.4603905 & 0.4191141 \end{pmatrix}$$

Le code sous R :

```
# initialisation :
y=c(8,7,0)
C=matrix(c(2,3,3,2,1,-1),3,2,byrow = T)
R=diag(c(1,4,4))
x_int=c(0,0)
P_int=diag(c(10,10))

# Calcul
y_bar=y-C%*%x_int
P=C%*%P_int%*%t(C)+R
K=P_int%*%t(C)%*%solve(P)
x_est=x_int+K%*%y_bar
P_est=P_int-K%*%C%*%P_int
```

Chapitre 3

Filtre de Kalman

3.1 Définitions

Définition 26 *Un filtre est un système qui consiste à donner les informations utiles dans un flux d'informations.*

Définition 27 *Un système dynamique est défini en général (dans le cas discret ou continu) par deux équations : l'équation d'état et l'équation de la mesure.*

Définition 28 *L'équation d'état est la loi décrivant l'évolution d'un système. Par exemple la poursuite d'une cible mobile, le mouvement des planètes dans le système solaire ou bien la réaction chimique au cours du temps.*

Définition 29 *L'équation de la mesure est la loi décrivant la donnée réelle de l'évolution d'un système en fonction d'état du système et de bruit.*

Dans ce mémoire, on s'intéresse au système dynamique suivant, où les équations d'état et de la mesure se définissent par des équations linéaires récursives.

$$(S) : \begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + u_k + \alpha_k \\ Y_k = C_k X_k + \beta_k \end{cases}$$

Où :

A_k : est la matrice de transition. Elle décrit l'évolution du vecteur d'état de l'instant k à l'instant $k + 1$, de taille $n \times n$

u_k : Vecteur représentant les commandes appliquées au système à l'instant k .

C_k : Matrice d'observation (mesure). Elle est en fait le lien entre les paramètres du système et les mesures, de taille $m \times n$.

α_k : Bruit de modélisation lié à l'incertitude que l'on a sur l'état du système, de taille $n \times 1$

β_k : Bruit de mesure, de taille $m \times 1$

Les bruits sont considérés comme blancs, gaussiens, centrés, indépendants entre eux et indépendants de l'état initial du système avec Γ_{α_k} la matrice de covariance de α_k et Γ_{β_k} la matrice de covariance de β_k .

D'après le système (S), on a

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{k+1} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} X_0 \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \quad \text{où le vecteur } (X_0, \alpha_0, \dots, \alpha_k)^t \text{ est un vecteur gaussien (par hypothèse).}$$

par conséquent, $(X_1, X_2, \dots, X_{k+1})^t$ un vecteur gaussien (par transformation affine de $(X_0, \alpha_0, \dots, \alpha_k)^t$).

même chose pour $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)^t$ qui est un vecteur gaussien par transformation affine de $(X_0, \beta_0, \dots, \beta_k)^t$.

ainsi le vecteur $(X_1, \dots, X_{k+1}, Y_1, \dots, Y_k)^t$ noté par $(X_{1:k+1}, Y_{1:k})^t$ est aussi un vecteur gaussien puisqu'il s'écrit comme transformation affine du vecteur gaussien $(X_0, \alpha_{0:k}, \beta_{0:k})^t$ (par hypothèse).

3.2 Principe du filtre de Kalman

Supposons avoir traité k mesures et vouloir estimer l'état du système (S) à l'instant $k + 1$. Pour le faire on utilise le filtre de Kalman.

Le filtre de Kalman se décompose en deux étapes : prédiction et correction.

La prédiction consiste à représenter l'état du système (S) qu'on va noter $X_{k+1|k}$ par son espérance $\hat{X}_{k+1|k}$ et sa matrice de covariance $\Gamma_{k+1|k}$ qui représente l'erreur d'estimation prédite, ainsi la mesure $Y_{k+1|k}$ est prédite par la mesure $\hat{Y}_{k+1|k}$.

Dans la correction (mise à jour) on va corriger l'état prédit une fois que la mesure sera disponible à l'instant $k + 1$. La correction fait appel à la notion d'erreur de la mesure et l'erreur d'estimation prédite qui sont traduites par le **gain de Kalman**. L'idée de la correction est la suivante : Si l'erreur de la mesure est grande par rapport à celle d'état prédit on se base dans notre calcul d'estimation sur l'état prédit sinon sur notre mesure à l'instant $k + 1$.

3.3 Algorithme du filtre de Kalman

Après une étape d'initialisation, le filtre de Kalman est utilisé en répétant récursivement une étape de prédiction puis une étape de mise à jour. Cela permet de suivre et d'estimer l'évolution de l'état d'un système.

Initialisation L'état initial est supposé une variable aléatoire Gaussienne, indépendante des bruits, de moyenne et de matrice de covariance connues données par :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{0|0} &= \mathbb{E}(X_0) \\ \Gamma_{0|0} &= \mathbb{E}((X_0 - \hat{X}_{0|0})(X_0 - \hat{X}_{0|0})^t)\end{aligned}$$

Etape de prédiction Etant donné l'état estimé $\hat{X}_{k|k}$ et sa matrice de covariance $\Gamma_{k|k}$ à l'instant k , on effectue la prédiction de l'état à l'instant $k + 1$, ainsi que la prédiction de la mesure. On obtient l'état prédit $\hat{X}_{k+1|k}$ avec sa matrice de covariance associée $\Gamma_{k+1|k}$, d'après l'équation d'état

$$\hat{X}_{k+1|k} = A_k \hat{X}_{k|k} + u_k \quad (3.1)$$

$$\Gamma_{k+1|k} = A_k \Gamma_{k|k} A^T + \Gamma_{\alpha_k} \quad (3.2)$$

D'après (l'équation de la mesure), la prédiction de la mesure $\hat{Y}_{k+1|k}$ est donnée par l'équation :

$$\hat{Y}_{k+1|k} = C_{k+1} \hat{X}_{k+1|k} \quad (3.3)$$

Etape de correction Une fois la mesure Y_{k+1} sera disponible, on calcule l'innovation \tilde{Y}_{k+1} qui représente l'erreur de prédiction de l'observation. Et sa matrice de covariance S_{k+1} . L'état prédit peut alors être corrigé par cette innovation \tilde{Y}_{k+1} pondérée par le gain du filtre K_{k+1} . On en déduit alors l'état $\hat{X}_{k+1|k+1}$, avec sa matrice de covariance associée $\Gamma_{k+1|k+1}$. [Pour les calculer on applique les mêmes résultats que dans le paragraphe précédent (Application à l'estimation linéaire)].

$$\tilde{Y}_{k+1} = Y_{k+1} - C_{k+1} \hat{X}_{k+1|k} \quad (3.4)$$

$$S_{k+1} = C_{k+1} \Gamma_{k+1|k} C_{k+1}^t + \Gamma_{\beta_{k+1}} \quad (3.5)$$

$$K_{k+1} = \Gamma_{k+1|k} C_{k+1}^t S_{k+1}^{-1} \quad (3.6)$$

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1} \tilde{Y}_{k+1} \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{k+1|k+1} = \Gamma_{k+1|k} - K_{k+1} C_{k+1} \Gamma_{k+1|k} \quad (3.8)$$

Remarques :

- * L'état corrigé (estimé) $\hat{X}_{k+1|k+1}$ par le filtre de Kalman est l'espérance conditionnelle de X_{k+1} sachant $Y_{0:k+1}$, qui coïncide avec notre estimateur linéaire optimal i.e $\hat{X}_{k+1|k+1} = \mathbb{E}(X_{k+1}/Y_{0:k+1})$, alors que l'état prédit est défini par : $\hat{X}_{k+1|k} = \mathbb{E}(X_{k+1}/Y_{0:k})$
- * On peut retrouver les équations du filtre de Kalman pour les deux étapes, en basant sur la définition du système dynamique (S) et la proposition (23) :

1. **Initialisation** : Soit $X_0 \sim \mathcal{N}(m_0, \Gamma_0)$ indépendante des bruits, et on pose que :

$$\hat{X}_{0|0} = \mathbb{E}(X_0/Y_0) = m_0$$

$$\Gamma_{0|0} = \mathbb{E}((X_0 - \hat{X}_{0|0})(X_0 - \hat{X}_{0|0})^t) = \Gamma_0$$

Cela veut dire qu'on a supposé que l'état initial X_0 et l'état estimé $X_{0|0}$ à l'instant initial ont la même loi .

2. **Etape de prédiction** : Pour k quelconque, le système (S) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + u_k + \alpha_k \\ Y_k = C_k X_k + \beta_k \end{cases}$$

Etat prédit : Calcul de $\hat{X}_{k+1|k}$ et $\Gamma_{k+1|k}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{0:k} \end{pmatrix}$ est vecteur un gaussien, alors $\mathcal{L}(X_{k+1}/Y_{0:k})$ est aussi gaussienne, d'espérance :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k} &= \mathbb{E}(X_{k+1}/Y_{0:k}) \\ &= \mathbb{E}(A_k X_k + u_k + \alpha_k / Y_{0:k}) \\ &= A_k \mathbb{E}(X_k / Y_{0:k}) + \mathbb{E}(u_k / Y_{0:k}) + \mathbb{E}(\alpha_k / Y_{0:k}) \\ &= A_k \hat{X}_{k|k} + u_k \quad (\text{car } Y_{0:k} \text{ et } \alpha_k \text{ sont indépendants et } \mathbb{E}(\alpha_k) = 0) \end{aligned}$$

et de matrice de covariance :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+1|k} &= \mathbb{E}((X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})^t) \\ &= \mathbb{E}[(A_k(X_k - \hat{X}_{k|k}) + \alpha_k)(A_k(X_k - \hat{X}_{k|k}) + \alpha_k)^t] \\ &= A_k \mathbb{E}[(X_k - \hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})^t] A_k^t + \mathbb{E}(\alpha_k \alpha_k^t) \\ &= A_k \Gamma_{k|k} A_k^t + \Gamma_{\alpha_k} \end{aligned}$$

$$*\mathbb{E}(\alpha_k (X_k - \hat{X}_{k|k})^t) = \mathbb{E}(\alpha_k) \mathbb{E}(X_k - \hat{X}_{k|k})^t = 0 \text{ et } \mathbb{E}((X_k - \hat{X}_{k|k}) \alpha_k^t) = \mathbb{E}(X_k - \hat{X}_{k|k}) \mathbb{E}(\alpha_k^t) = 0.$$

Mesure prédite : On a par construction le vecteur $\begin{pmatrix} Y_{k+1} \\ Y_{0:k} \end{pmatrix}$ est gaussien (avec $Y_{k+1} = C_{k+1} X_{k+1} + \beta_{k+1}$), par conséquent $\mathcal{L}(Y_{k+1}/Y_{0:k})$ est aussi gaussienne, d'espérance :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{k+1|k} &= \mathbb{E}(Y_{k+1}/Y_{0:k}) \\ &= \mathbb{E}(C_{k+1} X_{k+1} + \beta_{k+1} / Y_{0:k}) \\ &= C_{k+1} \mathbb{E}(X_{k+1} / Y_{0:k}) \quad (\text{car } Y_{0:k} \text{ et } \beta_{k+1} \text{ sont indépendants et } \mathbb{E}(\beta_{k+1}) = 0) \\ &= C_{k+1} \hat{X}_{k+1|k} \end{aligned}$$

et de matrice de covariance :

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \mathbb{E}((Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k})(Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k})^t) \\
&= \mathbb{E}[(C_{k+1}(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k}) + \beta_{k+1})(C_{k+1}(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k}) + \beta_{k+1})^t] \\
&= C_{k+1}\mathbb{E}[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})^t]C_{k+1}^t + \mathbb{E}(\beta_{k+1}\beta_{k+1}^t) \\
&= C_{k+1}\Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t + \Gamma_{\beta_{k+1}}
\end{aligned}$$

$$*\mathbb{E}(\beta_{k+1}(X_k - \hat{X}_{k|k})^t) = \mathbb{E}(\beta_{k+1})\mathbb{E}(X_k - \hat{X}_{k|k})^t = 0.$$

$$*\mathbb{E}((X_k - \hat{X}_{k|k})\beta_{k+1}^t) = \mathbb{E}(X_k - \hat{X}_{k|k})\mathbb{E}(\beta_{k+1}^t) = 0.$$

On déduit que la loi du vecteur $\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{pmatrix}$ sachant $Y_{0:k}$ est gaussienne (car $\begin{pmatrix} X_{k+1} & Y_{0:k+1} \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien), d'espérance :

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{k+1|k} \\ \hat{Y}_{k+1|k} \end{pmatrix}$$

et de matrice de covariance :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{k+1|k} & \Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t(*) \\ C_{k+1}\Gamma_{k+1|k}(\#) & C_{k+1}\Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t + \Gamma_{\beta_{k+1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(*) \mathbb{E}((X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})(Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k})^t) &= \mathbb{E}((X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})(C_{k+1}(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k}) + \beta_{k+1})^t) \\
&= \Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t
\end{aligned}$$

$$(\#) \mathbb{E}((Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})^t) = C_{k+1}\Gamma_{k+1|k}.$$

3. **Etape de correction** : Par conséquent, $\mathcal{L}(X_{k+1}/Y_{0:k+1})$ est gaussienne (on applique la proposition 23), d'espérance :

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1|k+1} &= \mathbb{E}(X_{k+1}/Y_{0:k+1}) \\
&= \hat{X}_{k+1|k} + \Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t(C_{k+1}\Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t + \Gamma_{\beta_{k+1}})^{-1}(Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k}) \\
&= \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k})
\end{aligned}$$

et de matrice de covariance :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k+1|k+1} &= \Gamma_{k+1|k} - \Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t(C_{k+1}\Gamma_{k+1|k}C_{k+1}^t + \Gamma_{\beta_{k+1}})^{-1}C_{k+1}\Gamma_{k+1|k} \\
&= \Gamma_{k+1|k} - K_{k+1}C_{k+1}\Gamma_{k+1|k} \\
&= (I - K_{k+1}C_{k+1})\Gamma_{k+1|k}
\end{aligned}$$

3.4 Exemples

Exemple 30 On considère le problème de filtrage linéaire en dimension 1 :

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k \\ Y_k = X_k + V \end{cases}$$

Où V est un bruit blanc gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendant de $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \lambda^2)$

1. **Filtre de Kalman** : Le filtre s'écrit :

(a) **Prédiction** :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k} &= \hat{X}_{k|k} \\ \Gamma_{k+1|k} &= \Gamma_{k|k} \end{aligned}$$

(b) **Correction** :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{k+1|k} &= \hat{X}_{k+1|k} = \hat{X}_{k|k} \\ S_{k+1} &= \Gamma_{k+1|k} + \sigma^2 = \Gamma_{k|k} + \sigma^2 \\ K_{k+1} &= \Gamma_{k+1|k} S_{k+1}^{-1} = \frac{\Gamma_{k|k}}{\Gamma_{k|k} + \sigma^2} \\ \hat{X}_{k+1|k+1} &= \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1|k}) \\ &= \hat{X}_{k|k} + \frac{\Gamma_{k|k}}{\Gamma_{k|k} + \sigma^2}(y_{k+1} - \hat{X}_{k|k}) \\ \Gamma_{k+1|k+1} &= (1 - K_{k+1})\Gamma_{k+1|k} = (1 - K_{k+1})\Gamma_{k|k} \end{aligned}$$

Avec l'initialisation : $\hat{X}_{0|0} = \mu_0$ et $\Gamma_{0|0} = \lambda^2$

2. **Convergence du filtre** :

(a) **Etude de la variance** :

$$\Gamma_{k+1|k+1} = \left(1 - \frac{\Gamma_{k|k}}{\Gamma_{k|k} + \sigma^2}\right)\Gamma_{k|k} = \frac{\sigma^2}{\Gamma_{k|k} + \sigma^2}\Gamma_{k|k} = \frac{\Gamma_{k|k}}{1 + \frac{\Gamma_{k|k}}{\sigma^2}}$$

On peut donc obtenir une expression explicite pour la variance $\Gamma_{k|k}$:

$$\Gamma_{k|k} = \frac{\lambda^2}{1 + k\frac{\lambda^2}{\sigma^2}} \quad (3.9)$$

(b) **Gain de Kalman** : On utilise (3.9), on obtient :

$$K_{k+1} = \frac{\Gamma_{k|k}}{\Gamma_{k|k} + \sigma^2} = \frac{\lambda^2}{(k+1)\lambda^2 + \sigma^2} \quad (3.10)$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_{k+1} = 0$$

(c) **Convergence de l'espérance conditionnelle** : D'après (3.10), l'équation de l'espérance conditionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k+1} &= \hat{X}_{k|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - \hat{X}_{k|k}) \\ &= \hat{X}_{k|k} + \frac{\lambda^2}{(k+1)\lambda^2 + \sigma^2}(Y_{k+1} - \hat{X}_{k|k}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour k assez grand : $\hat{X}_{k+1|k+1} \simeq \hat{X}_{k|k}$

Simulation :

Initialisation : $X_0 \sim \mathcal{N}(1, 2)$ et $V \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Code sous R :

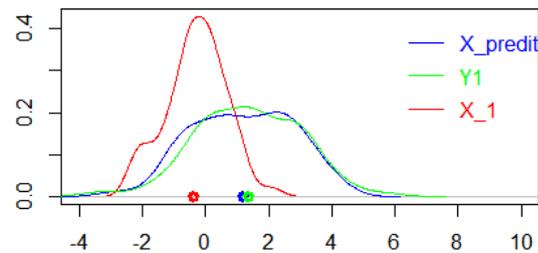
```
x=rnorm(100,1,sqrt(2))# Generalisation de l'etat du systeme
v=rnorm(100,0,1)# Generalisation du bruit de mesure
y=x+v# Calcul des mesures
m=1
## Le filtre de Kalman (etat estime)
for(i in 1:100)
{ K[i]=2/((2*i)+1)# Gain_Kalman.
  x_est[i]=m+(K[i]*(y[i]-m))# etat estime.
  m=x_est[i]# etat predit.
  R[i]=2/((2*i)+1)# variance=Gain_Kalman dans cet exemple.
}

## L'etape k=1
x_predit=x # la realisation de la variable predite d'etat (X_1/0)
x1=rnorm(100,x_est[1],sqrt(R[1]))# la realisation de la variable mise a jour
d'etat (X_$1/1$)
plot(density(x1),col="red",xlim=c(-4,10),xlab = "",ylab = "",main = "")
lines(density(x_predit),col="blue")
lines(density(y),col="green")
```

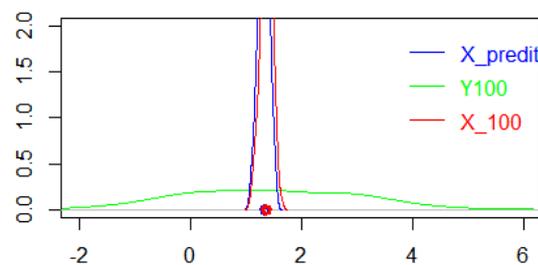
```
legend("topright",c("X_predit","Y1","X_1"),text.col = c("blue","green","red"),
      bty="n",lty=c(1,1,1),col=c("blue","green","red"))
points(mean(x),0,col="blue",lwd=3)# etat predict ( $\hat{x}_1/0$ )
points(mean(y),0,col="green",lwd=3)# la mesure(y1)
points(x_est[1],0,col="red",lwd=3)# etat estime par le F_Kalman ( $\hat{x}_1/1$ )

## k=100
x_predit1=rnorm(100,x_est[99],sqrt(R[99]))# la realisation de la variable predite
d'etat (X_100/99)
x100=rnorm(100,x_est[100],sqrt(R[100]))# la realisation de la variable mise a jour
d'etat (X_100/100)
plot(density(y),col="green",ylim=c(0,2),xlim=c(-2,6),ylab = "",xlab = "",main = "")
lines(density(x_predit1),col="blue",)
lines(density(x100),col="red")
legend("topright",c("X_predit","Y100","X_100"),text.col = c("blue","green","red"),
      bty="n",lty=c(1,1,1),col=c("blue","green","red"))
points(x_est[99],0,col="blue",lwd=3)# etat predict ( $\hat{x}_{100}/99$ )
points(mean(y),0,col="green",lwd=3)# la mesure (y100)
points(x_est[100],0,col="red",lwd=3)# etat estime par le F_Kalman ( $\hat{x}_{100}/100$ )
```

Les deux figures suivantes représentent : Les densités des lois conditionnelles d'état prédit et d'état corrigé, avec la densité de la mesure, à l'instant $k = 1$ et $k = 100$.



Les densités des lois conditionnelles d'état prédit et d'état corrigé, avec la densité de la mesure à l'instant $k = 1$.

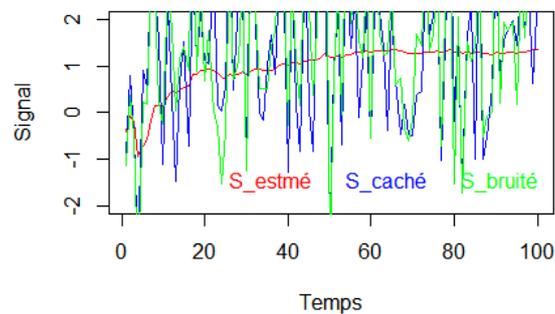


Les densités des lois conditionnelles d'état prédit et d'état corrigé, avec la densité de la mesure à l'instant $k = 100$.

```
## Le signal
plot(c(1:100),x_est,col="red",type='l',ylim = c(-2,2),xlab = "Temps",ylab = "Signal")
# il s'agit du vecteur (\^{x}0/0,\^{x}1/1,...\^{x}100/100)
une realisation de la variable etat estime \^{X}=X_Kalman
lines(c(1:100),x,col="blue")# signal cache
lines(c(1:100),y,col="green")# signal bruité
```

```
legend("bottomright",c("S_estm\\U{e9}\\U{e9}", "S_cach\\U{e9}", "S_bruit\\U{e9}"),
text.col = c("red", "blue", "green"), bty="n", text.font = 1, horiz = TRUE)
```

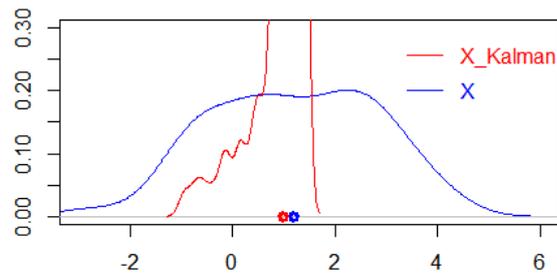
La figure suivante représente : Le signal bruité caché et estimé (\hat{x} par Kalman) en fonction du temps, c.à.d la réalisation des lois de $Y \equiv S_bruité$, $X \equiv S_caché$ et $X_Kalman \equiv S_estimé$.



Le signal bruité, caché et estimé en fonction du temps.

```
# Comparaison : La densit\\U{e9}s de la variable cach\\U{e9}e X vs estimee par le filtre
de Kalman \\{X}=X_Kalman
plot(density(x), col="blue", ylim=c(0,0.3), xlim=c(-3,6), xlab="", ylab="", main="" )
lines(density(x_est), col="red")
legend("topright", c("X_Kalman", "X"), text.col = c("red", "blue"), bty="n", lty=c(1,1),
col=c("red", "blue"))
points(mean(x), 0, col="blue", lwd=3)
points(mean(x_est), 0, col="red", lwd=3)
```

La figure suivante représente : Les densités des lois d'état réel et estimé par le filtre de Kalman.

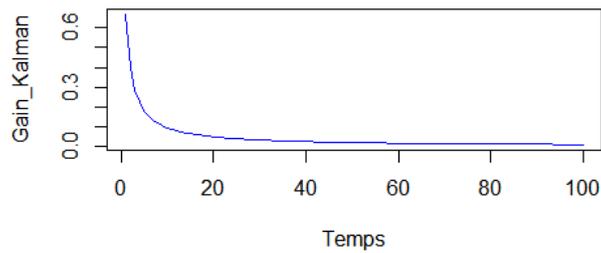


Les densités des lois d'état réel et estimé par le filtre de Kalman.

```
## Gain de Kalman
```

```
plot(c(1:100),K,type='l',col="blue",xlab = "Temps",ylab = "Gain_Kalman")
```

La figure suivante représente : Le gain de Kalman en fonction du temps.

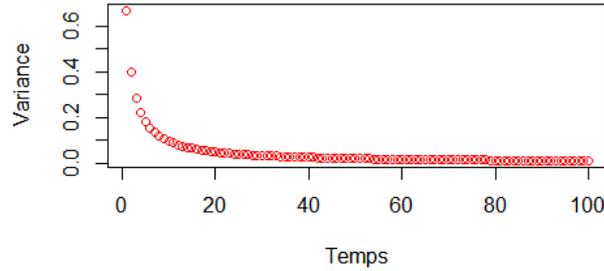


Le gain de Kalman en fonction du temps.

```
## Variance (erreur d'estimation)
```

```
plot(c(1:100),R,,col="red",xlab = "Temps",ylab = "Variance")
```

La figure suivante représente : La variance (erreur d'estimation) en fonction du temps.



La variance en fonction du temps.

Exemple 31 Dans cet exemple, la vitesse angulaire Θ d'un moteur à courant continu vérifie la relation suivante :

$$\Theta = x_1 U + x_2 Tr$$

Où U est la tension d'entrée, Tr est le couple résistant et $X = (x_1, x_2)^t$ est le vecteur des paramètres à estimer.

La table si-dessous donne les mesures collectées pour différentes conditions expérimentales.

k	1	2	3	4	5
$U(V)$	4	10	10	13	15
$Tr(Nm)$	0	1	5	5	3
$\Theta(rad/sec)$	5	10	11	14	17

Avant d'appliquer le filtre de Kalman, on va prendre le système suivant :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_k + \alpha_k \\ Y_k = (U_k, Tr_k) X_k + \beta_k \end{cases}$$

Où $\beta_k \sim \mathcal{N}(0, 9)$ (bruit de mesure) et $\alpha_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ (bruit du système).

avec l'initialisation : $X_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$ i.e $\hat{X}_{0/0} = (1, -1)^t$ et $\Gamma_{0/0} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On suppose que la suite de vecteur $[\alpha_k, \beta_k]^t$ est indépendante et que α_i et β_j sont indépendants quels que soient i et j .

Application du FK : $k = 1$

Prédiction :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{1|0} &= A\hat{X}_{0|0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Gamma_{1|0} &= A\Gamma_{0|0}A^T + \Gamma_{\alpha_0} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Correction :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_1 &= Y_1 - C_1\hat{X}_{1|0} = 5 - (4, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \\ S_1 &= C_1\Gamma_{1|0}C_1^t + \Gamma_{\beta_1} = (4, 0) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 = 89 \\ K_1 &= \Gamma_{1|0}C_1^tS_1^{-1} = 1/89 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.224719 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{X}_{1|1} &= \hat{X}_{1|0} + K_1\tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{89} \\ 0 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 1.224719 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{1|1} = \Gamma_{1|0} - K_1C_1\Gamma_{1|0} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.224719 \\ 0 \end{pmatrix} (4, 0) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.505618 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On va refaire les mêmes étapes pour $k = 2 : 5$, on retrouve les résultats suivants :

1. Les états prédits :

k	0	1	2	3	4
$x_{1_{k+1 k}}$	1	1.224719	1.111300	1.1880862	1.3678670
$x_{2_{k+1 k}}$	-1	-1.000000	-1.045199	-0.7921771	-0.7769423

2. Les états corrigés :

k	1	2	3	4	5
$x_{1_{k k}}$	1.224719	1.111300	1.1880862	1.3678670	1.2837440
$x_{2_{k k}}$	-1.000000	-1.045199	-0.7921771	-0.7769423	-0.7396714

3. Matrices de covariances prédites :

k	0	1	2	3	4
$\Gamma_{k+1 k}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.51 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.14 & -0.55 \\ -0.55 & 6.78 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.82 & -1.58 \\ -1.58 & 4.38 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.69 & -1.68 \\ -1.68 & 5.37 \end{pmatrix}$

4. Matrices de covariances corrigées :

k	1	2	3	4	5
$\Gamma_{k k}$	$\begin{pmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14 & -0.55 \\ -0.55 & 5.78 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.82 & -1.58 \\ -1.58 & 3.38 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.69 & -1.68 \\ 1.68 & 4.37 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.25 & -1.04 \\ -1.04 & 5.08 \end{pmatrix}$

5. La vitesse angulaire Θ après estimation :

k	1	2	3	4	5
$\Theta(\text{rad/sec})$	4.898876	10.0678	7.919976	13.89756	17.03715

Le code R correspondant aux résultats précédents :

La fonction FK retourne : l'état prédit et corrigé à chaque itération ainsi la matrice de covariance prédite et corrigée.

```
FK<-function(H,R,F,Q,x0,P0,y)
{
  L=length(x0)
  ## Prediction
  x_pre=F%*%x0
  P1=F%*%P0%*%t(F)+Q

  ##Correction
  innov=y-H%*%x_pre
  S=H%*%P1%*%t(H)+R
  K=P1%*%t(H)%*%solve(S)
  x2=x_pre+(K%*%innov)
  P2=P1-K%*%H%*%P1
  M=matrix(c(x_pre,P1,x2,P2),L,L*2+2)
  return(M)
}

# Initialisation
y=c(5,10,8,14,17)
C=matrix(c(4,0,10,1,10,5,13,5,15,3),5,2,byrow = T)
R=9
A=diag(1,2,2)
Q=diag(1,2,2)
x_int=c(1,-1)
P_int=diag(4,2,2)

# Calcul
est_kalman=matrix(NA,2,5)
est_pred=matrix(NA,2,5)
```

```
P_kalman=list(matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),
matrix(NA,2,2))
P_pred=list(matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),
matrix(NA,2,2))
x0=x_int
P0=P_int
for(i in 1:5)
{ M1=FK(t(C[i,]),R,A,Q,x0,P0,y[i])
  x0=M1[,4]
  P0=M1[,5:6]
  P_pred[[i]]=M1[,2:3]
  P_kalman[[i]]=P0
  est_pred[,i]=M1[,1]
  est_kalman[,i]=x0
}
# La vitesse angulaire  $\theta$  aprs estimation :
theta=matrix(NA,5,1)
for(i in 1:5){theta[i]=t(C[i,]%%est_kalman[,i])}
```

Chapitre 4

Application à la poursuite de cible mobile

On s'intéresse au problème de poursuite de cible mobile à partir des mesures bruitées.

4.1 Modélisation du Problème

Les filtres de Kalman appliqués à la poursuite de cible mobile nécessitent une connaissance un tant soit peu minimale de la physique. En effet, les cibles mobiles se déplacent en suivant les lois de la physique. Pour les systèmes accélérés, on suppose que cette accélération a est constante durant l'intervalle de temps T entre les échantillonnages par le système, par conséquent, la position (à une dimension) s'écrit selon l'équation suivante :

$$p_x(t) = p_{x_0} + \dot{p}_{x_0}t + a\frac{t^2}{2} \quad \text{avec } t \in [0, T] \quad (4.1)$$

et la vitesse est donnée par :

$$\dot{p}_x(t) = \dot{p}_{x_0} + at \quad (4.2)$$

où p_{x_0} est la position initiale et sa dérivée \dot{p}_{x_0} est la vitesse initiale.

Les équations (4.1) et (4.2) décrivent la dynamique de la cible mobile. Pour simplifier, on s'intéresse à la position de la cible et à sa vitesse, donc on suppose cette fois que la vitesse est constante, dans ce cas, la dynamique de la cible s'écrit comme suit :

$$p_x(t) = p_{x_0} + \dot{p}_x t \quad \text{avec } t \in [0, T] \quad (4.3)$$

$$\dot{p}_x(t) = \dot{p}_x \quad (4.4)$$

Des équations physiques à un système linéaire matriciel : Si on a un système en dimension 2 et que les équations (4.3) et (4.4) s'appliquent, on peut choisir d'avoir le vecteur d'état suivant : $X = [p_x, \dot{p}_x, p_y, \dot{p}_y]^t$, où p_x est la position en abscisse, et \dot{p}_{x_0} la vitesse en abscisse. (idem pour p_y , en ordonné). Alors, la dynamique de la cible s'écrit comme suit : (pour $t = T$).

$$\begin{cases} p_x(T) = p_{x_0} + \dot{p}_x T \\ \dot{p}_x(T) = \dot{p}_x \\ p_y(T) = p_{y_0} + \dot{p}_y T \\ \dot{p}_y(T) = \dot{p}_y \end{cases}$$

Dans ce cas, l'évolution de ce système entre l'instant (l'itération) k et $k + 1$ est donnée par :

$$\begin{cases} p_{x_{k+1}} = p_{x_k} + \dot{p}_{x_k} T \\ \dot{p}_{x_{k+1}} = \dot{p}_{x_k} \\ p_{y_{k+1}} = p_{y_k} + \dot{p}_{y_k} T \\ \dot{p}_{y_{k+1}} = \dot{p}_{y_k} \end{cases}$$

Et avec l'écriture matricielle, on a :

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_k \quad (4.5)$$

Où $X_k = [p_{x_k}, \dot{p}_{x_k}, p_{y_k}, \dot{p}_{y_k}]^t$ une réalisation du vecteur d'état X à l'instant k .

Par contre, en réalité la dynamique de la cible est inconnue puisqu'elle n'est pas toujours linéaire et sa vitesse constante (la cible peut tourner ou accélérer, à tout moment). C'est pour cette raison qu'un modèle probabiliste se prête bien à la modélisation de la dynamique de la cible. Par ailleurs, nous disposons d'un capteur qui relève des informations sur la cible (signal observé) avec une période T , ces informations étant une fonction des états cachés de la cible. Le capteur n'est pas parfait ce qui induit des erreurs de mesure, il mesure la position en abscisse et en ordonnée de la cible (une observation est donc un vecteur colonne de dimension 2). Donc, le filtre de Kalman cherche à annuler le caractère aléatoire dû aux erreurs de mesure et à la dynamique inconnue de la cible.

On modélise le problème sous forme de deux équations, appelées équation d'état qui porte sur la dynamique de la cible telle que le vecteur d'état à l'instant $k + 1$ est défini par la relation (4.5) plus un terme de bruit de moyenne nulle, et équation d'observation qui porte sur les mesures du capteur telles que les informations observées

sont les positions (en abscisse, en ordonnée) de la cible à l'instant k plus un terme d'erreur (bruit) de moyenne nulle. Alors, le problème peut s'écrire comme suit :

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_k + U_k \quad (4.6)$$

$$Y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_k + V_k \quad (4.7)$$

avec $U_k \sim \mathcal{N}(0_{4 \times 1}, Q)$, $V_k \sim \mathcal{N}(0_{2 \times 1}, R)$.

Dans les problématiques de poursuite, on choisit généralement Q et R sous les

formes suivantes : $Q = \sigma_Q^2 \begin{pmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \sigma_{p_x}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{p_y}^2 \end{pmatrix}$

Initialisation : $X_0 \sim \mathcal{N}(m_{0|0}, P_{0|0})$.

On suppose que la suite de vecteurs $[U_k, V_k]^t$ est indépendante, indépendante de X_0 et que U_k et V_i sont indépendants quels que soient k et i .

4.2 Poursuite en coordonnées cartésiennes

4.2.1 Implémentation du Filtre de Kalman sur données synthétiques

Dans cette partie, on va implanter de façon récursive le filtre de Kalman sur données synthétiques, afin de retrouver la trajectoire cachée à partir de la trajectoire observée. Pour cela, on va suivre les étapes suivantes :

1. Initialisation des paramètres du modèle :

$$\sigma_Q = 1, \sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30, T = 1, T_N = 100$$

$x_{int} = (3, 40, -4, -20)^T$ et $P_{int} = I_{4 \times 4}$ avec les matrices du système (matrice de transition et de mesure).

2. Généralisation de la trajectoire des états cachés à partir de l'équation (4.6) (la vraie trajectoire)
3. Généralisation de la trajectoire des observations (mesures) à partir de l'équation (4.7).
4. Application du Filtre de Kalman (la trajectoire estimée).

Simulation : (Codes sous R)

Pour faire notre simulation, on a besoin des codes de base suivants :

1. La fonction "vect_x" retourne une matrice de taille $4 \times T_N$, qui représente les réalisations des états cachés selon l'équation (4.6). (i.e états réels)
2. La fonction "vect_y" retourne une matrice de taille $2 \times T_N$, qui représente les observations selon l'équation (4.7). (i.e mesures)
3. La fonction "FK" retourne une matrice de taille 4×5 , la première colonne représente l'état estimé par le filtre de Kalman (pour une seule itération) et le reste des colonnes (de 2 à 5) représentent la matrice de covariance de l'état caché.
4. La fonction "G_Traj" : Trace la vraie trajectoire dans le plan, la trajectoire observée et la trajectoire estimée par le filtre de Kalman.
5. La fonction "G_Px" : Trace la position vraie, observée et estimée en abscisse en fonction du temps.
6. La fonction "G_Py" : Trace la position vraie, observée et estimée en ordonnée en fonction du temps.
7. La fonction "G_Er" : Trace l'erreur a priori et a posteriori (en norme 2) en fonction du temps.

```
vect_x<-function(F,Q,x_int,T)
{
  u<-mvrnorm(T,c(0,0,0,0),Q)#
  vect<-matrix(NA,4,T)
  for(i in 1:T)
  {vect[,i]=F%*%x_int+u[i,]
  x_int=vect[,i]}
  return(vect)
}
```

```
vect_y<-function(H,R,x,T)
{
  y<-matrix(NA,2,T)
  v<-mvrnorm(T,c(0,0),R)
  for(i in 1:T)
  {y[,i]=H%*%x[,i]+v[i,]}
  return(y)
}
```

```
FK<-function(H,R,F,Q,x0,P0,y)
{ x1=matrix(NA,4,1)
```

```

x2=matrix(NA,4,1)
innov=matrix(NA,2,1)
P1=matrix(NA,4,4)
P2=matrix(NA,4,4)
S=matrix(NA,2,2)
K=matrix(NA,4,2)
M=matrix(NA,4,5)

# Prediction
x_pre=F%*%x0
P1=F%*%P0%*%t(F)+Q

# Correction
innov=y-H%*%x_pre
S=H%*%P1%*%t(H)+R
K=P1%*%t(H)%*%solve(S)
x2=x_pre+(K%*%innov)
P2=P1-K%*%H%*%P1
M=matrix(c(x2,P2),4,5)
return(M)
}

G_Traj<-function(x,y,est_kalman)
{
plot(y[1,],y[2,],col="green",xlab = "Position x",ylab = "Position y")
lines(x[1,],x[3,],col="blue")
lines(est_kalman[1,],est_kalman[3,],col="red")
legend("topright",c("T_vraie","T_observ\U{e9}e","T_estim\U{e9}e"),
text.col = c("blue","green","red"),bty = "n")
}

G_Px<-function(x,y,est_kalman,T)
{
plot(c(1:T),y[1,],col="green",xlab = "Temps",ylab = "Position x")
lines(c(1:T),x[1,],col="blue")
lines(c(1:T),est_kalman[1,],col="red")
legend("topleft",c("Px_vraie","Px_observ\U{e9}e","Px_estim\U{e9}e"),
text.col = c("blue","green","red"),bty="n")
}

```

```

}

G_Py<-function(x,y,est_kalman,T)
{
  plot(c(1:T),y[2,],col="green",xlab = "Temps",ylab = "Position y")
  lines(c(1:T),x[3,],col="blue")
  lines(c(1:T),est_kalman[3,],col="red")
  legend("bottomleft",c("Py_vraie","Py_observ\U{e9}e","Py_estim\U{e9}e"),
  text.col = c("blue","green","red"),bty="n")
}

G_Er<-function(x,y,est_kalman,T,H)
{ # Erreur a priori
  e1=matrix(NA,2,T)# e1[,k]: vecteur d'erreur a priori a l'instant k.
  e11=matrix(NA,T,1)# e11[k] : la norme "2" de e1[,k]
  for(i in 1:T)
  { e1[,i]=y[,i]-H%*%x[,i]
    e11[i]=norm(e1[,i],type="2")}
  # Erreur a posteriori
  e2=matrix(NA,2,T)# e2[,k]: vecteur d'erreur a posteriori a l'instant k.
  e22=matrix(NA,T,1)# e22[k] : la norme "2" de e2[,k]
  for(i in 1:T)
  { e2[1,i]=x[1,i]-est_kalman[1,i]
    e2[2,i]=x[3,i]-est_kalman[3,i]
    e22[i]=norm(e2[,i],type="2")}
  # Graphe
  plot(c(1:T),e11,type = 'l',col="blue",xlab = "Temps",ylab = "Erreur")
  lines(c(1:T),e22,col="red")
  legend("topleft",c("E_a priori","E_ a posteriori"),text.col = c("blue","red"),
  bty="n")
}

# Application :
## Initialisation
T=1;Tn=100
F=matrix(c(1,T,0,0,0,1,0,0,0,0,1,T,0,0,0,1),4,4,byrow = TRUE)# matrice de transition
H=matrix(c(1,0,0,0,0,0,1,0),2,4,byrow = TRUE)# matrice de mesure
sigma_Q=1;sigma_px=30;sigma_py=30

```

```
Q=sigma_Q^2*matrix(c(1/3,1/2,0,0,1/2,1,0,0,0,0,1/3,1/2,0,0,1/2,1),4,4)
R=matrix(c(sigma_px^2,0,0,sigma_py^2),2,2)
x_int=c(3,40,-4,-20)
P_int=matrix(c(1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1),4,4,byrow = TRUE)

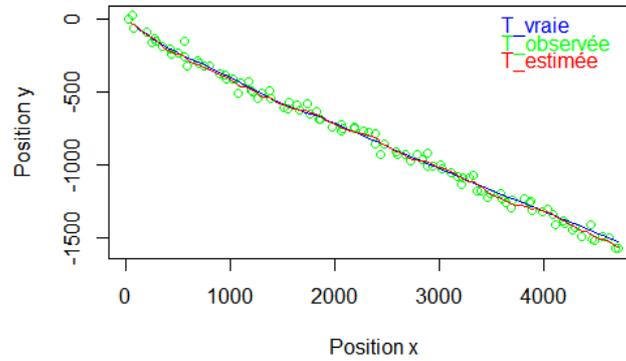
## Les etats reelles
xx=vect_x(F,Q,x_int,Tn)

## Observations (mesures)
yy=vect_y(H,R,xx,Tn)

## Estimation (par F_Kalman)
P0=P_int
x0=x_int
M1=matrix(NA,4,5)
est_kalman=matrix(NA,4,Tn)
for(i in 1:Tn)
{ y=yy[,i]
  M1=FK(H,R,F,Q,x0,P0,y)
  x0=M1[,1]
  P0=M1[,2:5]
  est_kalman[,i]=x0
}

## Graphe (Trajectoire)
G_Traj(xx,yy,est_kalman)
```

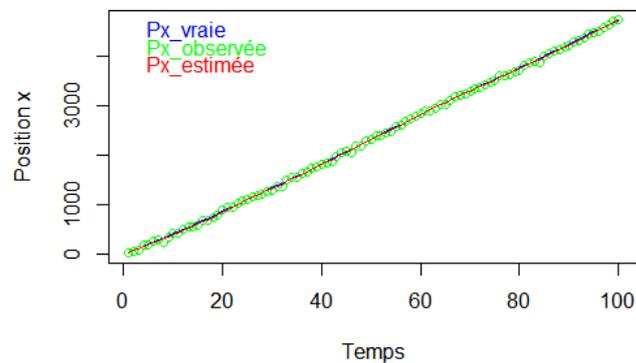
La figure suivante représente : La trajectoire vraie, estimée et observée.



La trajectoire vraie, estimée et observée d'une cible mobile.

```
## Graphe (La position vraie estimée et observée en abscisse en fonction du temps)  
G_Px(xx,yy,est_kalman,Tn)
```

La figure suivante représente : La position vraie, estimée et observée en abscisse en fonction du temps.

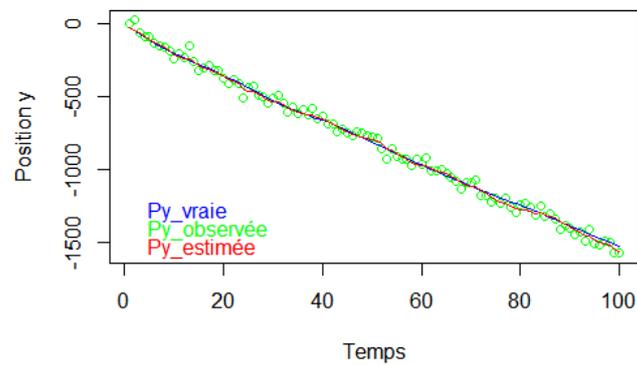


La position vraie, estimée et observée en abscisse en fonction du temps.

```
## Graphe (La position vraie estimée et observée en ordonnée en fonction du temps)
```

`G_Py(xx,yy,est_kalman,Tn)`

La figure suivante représente : La position vraie, estimée et observée en ordonnée en fonction du temps.

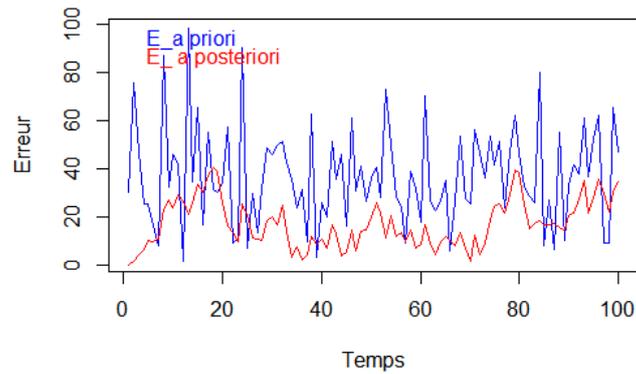


La position vraie, estimée et observée en ordonnée en fonction du temps.

Graphe (L'erreur a priori et a posteriori)

`G_Er(xx,yy,est_kalman,Tn,H)`

La figure suivante représente : L'erreur a priori et a posteriori en norme 2 (euclidien) en fonction du temps.



L'erreur a priori et a posteriori en fonction du temps.

4.2.2 Influence du bruit

Pour avoir l'influence du bruits sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et posteriori, dans un premier temps, on va varier le bruit de mesure (c.à.d on varie σ_{p_x} et σ_{p_y}) puis le bruit du système (le bruit de processus d'état c.à.d on varie σ_Q).

Bruit de mesure :

on fixe σ_Q et on varie σ_{p_x} et σ_{p_y} . En effet, la simulation est faite pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = [20, 30, 60, 90, 120]$.

#Code sous R :

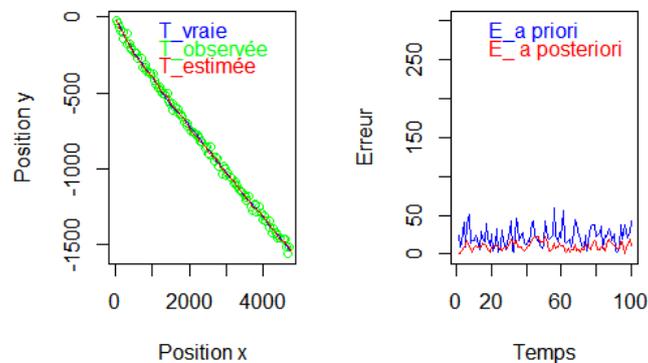
```
sigma_px=c(20,30,60,90,120)
sigma_py=c(20,30,60,90,120)
for(i in 1:5)
{ R=matrix(c(sigma_px[i]^2,0,0,sigma_py[i]^2),2,2)
  yy=vect_y(H,R,xx,Tn)
  # estimation
  P0=P_int
  x0=x_int
  M1=matrix(NA,4,5)
  est_kalman=matrix(NA,4,Tn)
  for(i in 1:Tn)
```

```

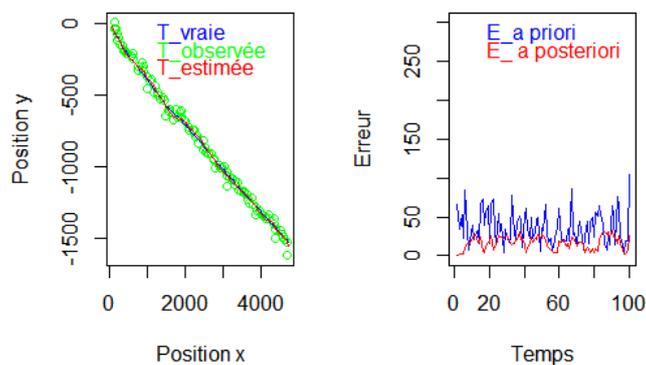
{ y=yy[,i]
  M1=FK(H,R,F,Q,x0,P0,y)
  x0=M1[,1]
  P0=M1[,2:5]
  est_kalman[,i]=x0
}
# Graphe (Trajectoire VS L'erreur a priori/posteriori)
par(mfrow=c(1,2))
G_Traj(xx,yy,est_kalman)
G_Er(xx,yy,est_kalman,Tn,H)# ylim=c(0,300)
}

```

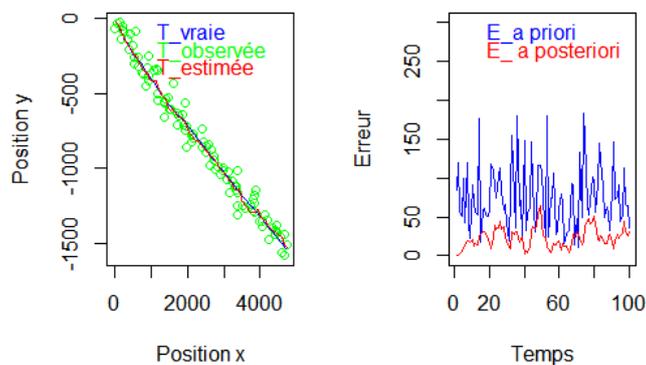
Les figures suivantes représentent : L'effet du bruit de mesure sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = [20, 30, 60, 90, 120]$.



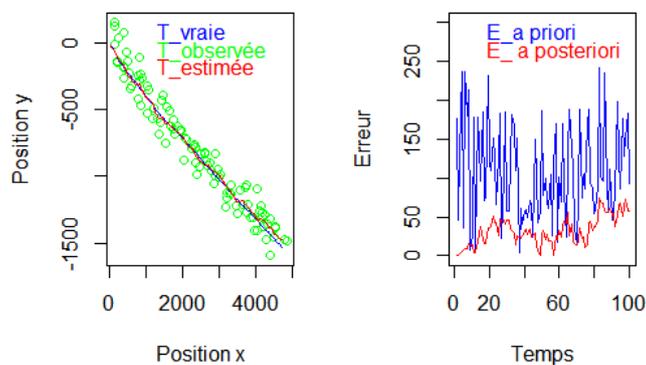
L'effet du bruit de mesure sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 20$.



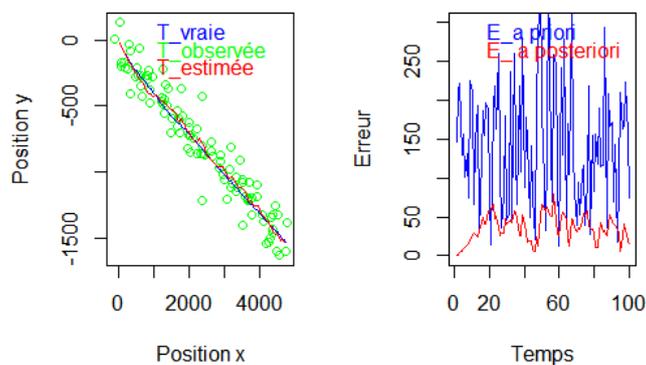
L'effet du bruit de mesure sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30$.



L'effet du bruit de mesure sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60$.



L'effet du bruit de mesure sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 90$.



L'effet du bruit de mesure sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 120$.

Commentaire :

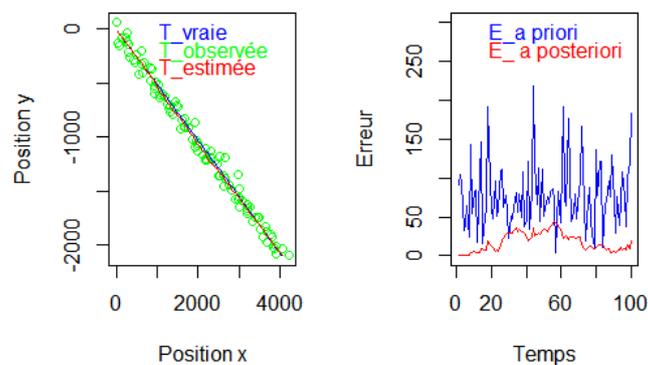
Lorsque le bruit de mesure augmente, la trajectoire observée devient très bruitée, alors que, à chaque fois la trajectoire estimée par le filtre de Kalman est plus proche de la vraie trajectoire que celle de la trajectoire observée, c'est le principe de FK (c.à.d le calcul de l'état estimé est basé sur l'état du système). Par conséquent, l'erreur a priori augmente plus vite que l'erreur a posteriori à chaque fois le bruit augmente.

Bruit du système :

Cette fois, on fixe σ_{p_x} et σ_{p_y} et on varie σ_Q . La simulation est faite pour $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60$ et $\sigma_Q = [0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10]$.

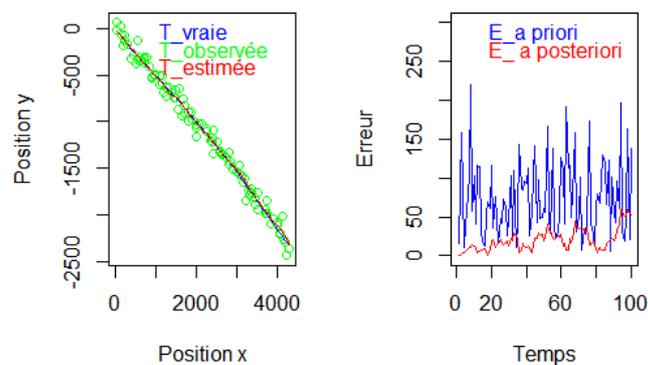
```
# Code sous R :
sigma_Q=c(0.1,0.5,1,2,5,10);sigma_px=60;sigma_py=60
R=matrix(c(sigma_px^2,0,0,sigma_py^2),2,2)
for(i in 1:6)
{ Q=sigma_Q[i]^2*matrix(c(1/3,1/2,0,0,1/2,1,0,0,0,0,1/3,1/2,0,0,1/2,1),4,4)
  xx=vect_x(F,Q,x_int,Tn)
  yy=vect_y(H,R,xx,Tn)
  P0=P_int
  x0=x_int
  M1=matrix(NA,4,5)
  est_kalman=matrix(NA,4,Tn)
  for(i in 1:Tn)
  { y=yy[,i]
    M1=FK(H,R,F,Q,x0,P0,y)
    x0=M1[,1]
    P0=M1[,2:5]
    est_kalman[,i]=x0
  }
# Graphe (Trajectoire VS L'erreur a priori/posteriori)
par(mfrow=c(1,2))
G_Traj(xx,yy,est_kalman)
G_Er(xx,yy,est_kalman,Tn,H)# ylim=c(0,300)
}
```

Les figures suivantes représentent : L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60$ et $\sigma_Q = [0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10]$.



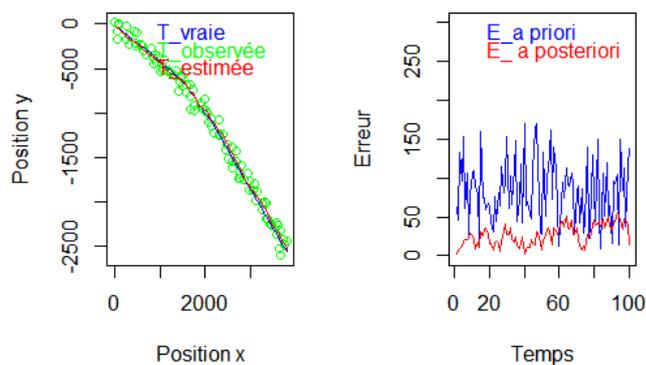
L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour

$$\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60 \text{ et } \sigma_Q = 0.1.$$



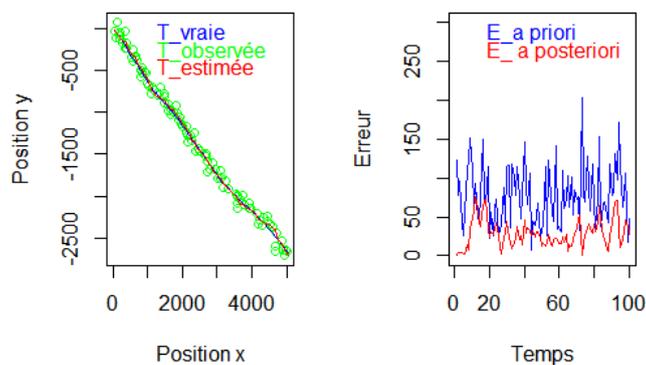
L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour

$$\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60 \text{ et } \sigma_Q = 0.5.$$



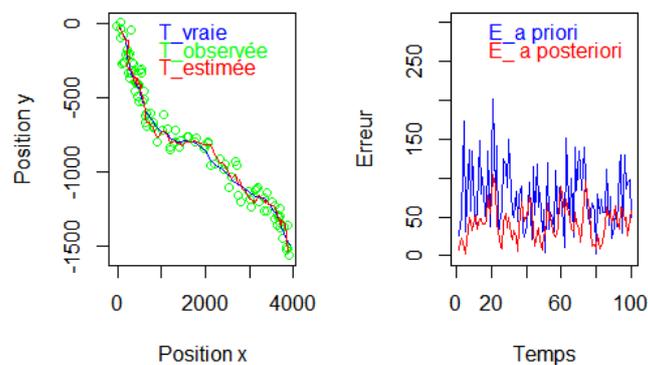
L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour

$$\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60 \text{ et } \sigma_Q = 1.$$



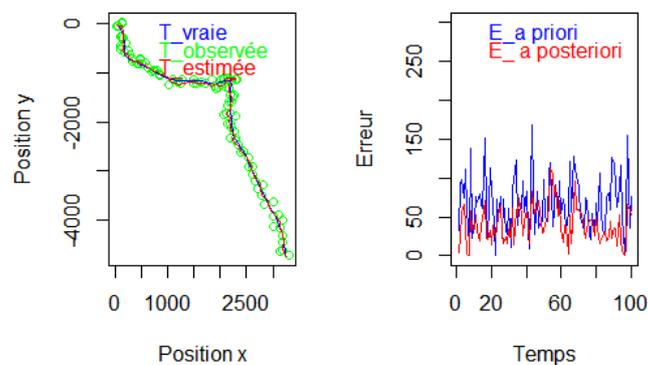
L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour

$$\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60 \text{ et } \sigma_Q = 2.$$



L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour

$$\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60 \text{ et } \sigma_Q = 5.$$



L'effet du bruit du système sur l'application du filtre de Kalman et l'erreur a priori et a posteriori pour

$$\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60 \text{ et } \sigma_Q = 10.$$

Commentaire :

Si le bruit du système est très petit ($\sigma_Q = 0.1$) c.à.d on fait confiance à notre système alors la trajectoire estimée coïncide avec la vraie trajectoire (figure 1) et à chaque fois le bruit augmente, elle va s'éloigner de la vraie trajectoire. Par conséquent, l'erreur a posteriori augmente vers l'erreur a priori (puisque le FK cette fois est basé sur les observations qui ont moins bruitées par rapport aux états du système).

4.2.3 Application

On va appliquer le filtre de Kalman sur des données réelles de deux types d'avions : avion de ligne et avion de voltige. Lors d'un meeting aérien, on a filmé la trajectoire de ces avions et on souhaite extraire leurs trajectoires sur ordinateur de façon automatique. Pour cela, on va appliquer un algorithme de détection d'objets sur chacune des séquences vidéos basées sur la couleur des avions, qui retourne des observations bruitées de la trajectoire de chaque avion.

Contrairement au cas précédent, il se peut qu'à un instant donné k , l'algorithme de détection n'ait pas détecté l'avion, c'est le cas si l'avion passe derrière un nuage par exemple. Dans ce cas, le vecteur d'observation à l'instant k retourne un vecteur ligne nul de dimension deux. Alors le filtre de Kalman va prendre en compte cette absence de détection à l'instant k et cherchera le meilleur estimateur d'état à partir de $y_{0:k-1}$, autrement dit, l'état estimé à l'instant k est l'état prédit dans cette instant i.e $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1}$.

Simulation :

La simulation est faite pour : les paramètres $\sigma_Q = 1, \sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30, T = 1, T_N = 100, x_{int} = (3, 40, -4, -20)^T$ et $P_{int} = I_{4 \times 4}$.

Les observations (vecteur y_{avion_ligne} et vecteur $y_{avion_voltige}$) sont téléchargeables à l'adresse suivante : <http://www-public.it-sudparis.eu/~petetin/cours.html>, ainsi les vraies données (vecteur x_{avion_ligne} et vecteur $x_{avion_voltige}$).

Avion de ligne :

Code sous R :

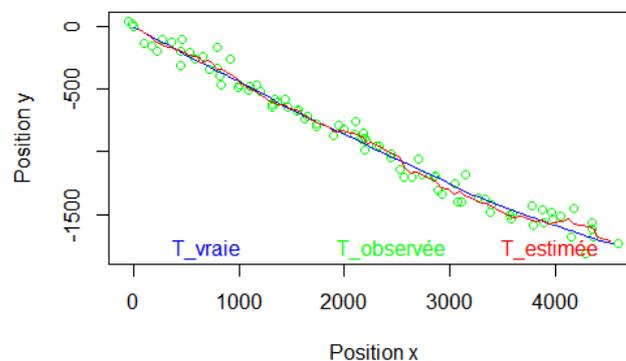
```
sigma_Q=1;sigma_px=30;sigma_py=30
Q=sigma_Q^2*matrix(c(1/3,1/2,0,0,1/2,1,0,0,0,0,1/3,1/2,0,0,1/2,1),4,4)
R=matrix(c(sigma_px^2,0,0,sigma_py^2),2,2)
x_int=c(3,40,-4,-20)
P_int=matrix(c(1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1),4,4,byrow = TRUE)
```

```

# Estimation
P0=P_int
x0=x_int
M1=matrix(NA,4,5)
est_kalman=matrix(NA,4,Tn)
for(i in 1:Tn)
{ y=y_ligne[,i]
  if(y[1]==0 && y[2]==0)#etape de prediction seulement(mesure introuvable)
  { x0=F%*%x0
    P0=F%*%P0%*%t(F)+Q
    est_kalman[,i]=x0
  }
  else{ M1=FK(H,R,F,Q,x0,P0,y)
        x0=M1[,1]
        P0=M1[,2:5]
        est_kalman[,i]=x0
      }
}
# Graphe (Trajectoire)
par(mfrow=c(1,1))
G_Traj(x_ligne,y_ligne,est_kalman)

```

La figure suivante représente : La trajectoire vraie, estimée et observée.



La trajectoire vraie, estimée et observée
"Avion_Ligne".

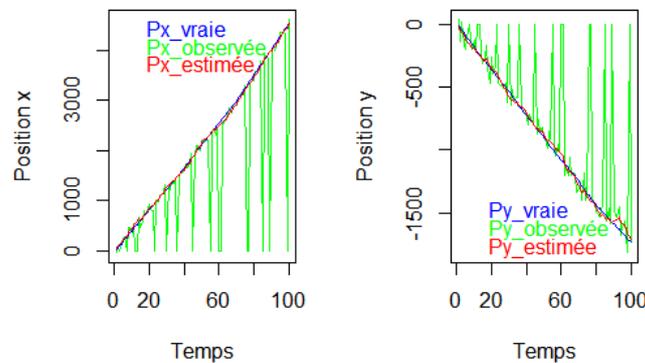
Graphe (La position vraie estimée et observée en abscisse vs en ordonnée en fonction du temps)

```
par(mfrow=c(1,2))
```

```
G_Px(x_ligne,y_ligne,est_kalman,Tn)# type='l'
```

```
G_Py(x_ligne,y_ligne,est_kalman,Tn)# type='l'
```

La figure suivante représente : La position vraie, estimée et observée en abscisse et en ordonnée en fonction du temps.



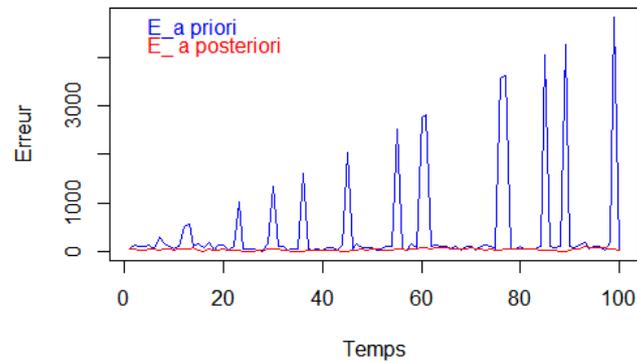
La position vraie, estimée et observée en abscisse et en ordonnée en fonction du temps "Avion_Ligne".

```
# Graphe(L'erreur a priori/posteriori)
```

```
par(mfrow=c(1,1))
```

```
G_Er(x_ligne,y_ligne,est_kalman,Tn,H)
```

La figure suivante représente : L'erreur a priori et a posteriori en fonction du temps.



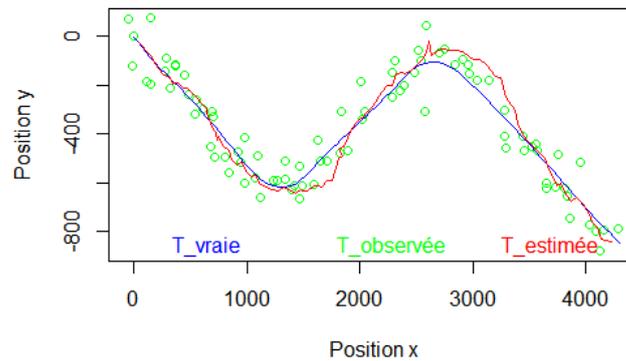
L'erreur a priori et a posteriori en fonction du temps
"Avion_Ligne".

Avion de voltige :

```
# Code sous R :
## Estimation
P0=P_int
x0=x_int
M1=matrix(NA,4,5)
est_kalman=matrix(NA,4,Tn)
for(i in 1:Tn)
{ y=y_voltige[,i]
  if(y[1]==0 && y[2]==0)
  { x0=F%*%x0
    P0=F%*%P0%*%t(F)+Q
    est_kalman[,i]=x0
  }
  else{ M1=FK(H,R,F,Q,x0,P0,y)
        x0=M1[,1]
        P0=M1[,2:5]
        est_kalman[,i]=x0
      }
}
## Graphe (Trajectoire)
```

```
par(mfrow=c(1,1))
G_Traj(x_voltige,y_voltige,est_kalman)
```

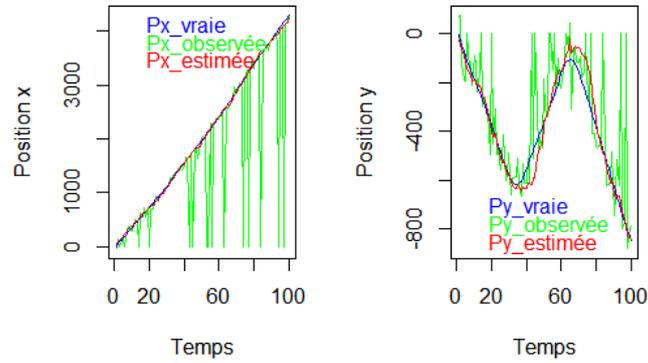
La figure suivante représente : La trajectoire vraie, estimée et observée.



La trajectoire vraie, estimée et observée
"Avion_Voltige".

```
## Graphe (La position vraie estimée et observée en abscisse vs en ordonnée en
fonction du temps)
par(mfrow=c(1,2))
G_Px(x_voltige,y_voltige,est_kalman,Tn)# type='l'
G_Py(x_voltige,y_voltige,est_kalman,Tn)# type='l'
```

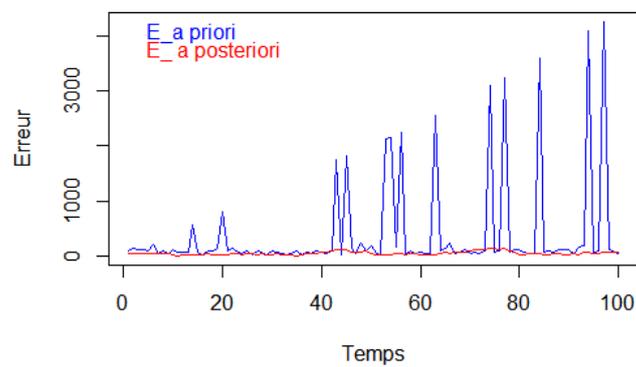
La figure suivante représente : La position vraie, estimée et observée en abscisse et en ordonnée en fonction du temps.



La position vraie, estimée et observée en abscisse et en ordonnée en fonction du temps "Avion_Voltige".

```
## Graphe(L'erreur a priori/posteriori)
par(mfrow=c(1,1))
G_Er(x_voltige,y_voltige,est_kalman,Tn,H)# ylim="...."
```

La figure suivante représente : L'erreur a priori et a posteriori en fonction du temps.



L'erreur a priori et a posteriori en fonction du temps
"Avion_Voltige".

Chapitre 5

Conclusion : Les limites du Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est une méthode récursive optimale, ces valeurs sont données par une moyenne pondérée entre le résultat d'une phase de prédiction et celle d'une phase de correction, avec une précision représentée par une matrice de covariance d'erreur d'estimation à chaque itération. Cependant, lors de l'application du filtre de Kalman sur un système réel, on risque d'avoir une absence de la théorie :

Tout d'abord, Le filtre de Kalman prend en compte la modélisation du système. En effet, le système doit être modéliser assez précisément afin d'obtenir un filtre efficace. Or, en réalité, les systèmes sont difficiles à modéliser ainsi moins lineaires. Dans ce cas, le filtre n'est pas assez performant et l'erreur d'estimation ne convergera pas assez rapidement, par conséquent, le temps de calcul sera très important.

Ensuite, le filtre de Kalman a été développée pour les modèles lineaires gaussiens (Bruits gaussiens). Comme, l'hypothèse des bruits gaussiens n'est pas essentielle pour le fonctionnement du filtre c'est à dire, si les processus des bruits ne sont pas gaussiens mais que l'on dispose de leur deux premiers moments, les équations du filtre de Kalman peuvent être utilisées, elles permettent le calcul du meilleur estimateur lineaire au sens de la minimisation de l'erreur quadratique. Autrement dit, il peut exister un estimateur non lineaire mieux que notre estimateur (au même sens de la minimisation de l'erreur quadratique), dont la matrice de covariance d'erreur Γ_{ϵ_2} est plus petite que celle donnée par l'estimation lineaire Γ_{ϵ_1} au sens que $\Gamma_{\epsilon_1} - \Gamma_{\epsilon_2}$ est définie positive.

Enfin, la matrice de covariance Γ d'erreur d'estimation est symétrique, définie positive (par construction). Or, dues aux erreurs de calculs : Erreurs d'arrondi et la précision numérique (seulement un nombre fini de bits sont utilisés pour présenter les nombres), notre matrice Γ perde l'une où l'autre de ces caractéristiques. Donc,

on peut par exemple symétriser explicitement la matrice Γ (i.e on prend $\Gamma = \frac{\Gamma + \Gamma^t}{2}$) à chaque itération, ou bien d'utiliser des formes de calculs de cette matrice nécessitant plus de calculs, mais garantissant la persistance de ces caractéristiques. Dans notre exemple précédent (Exemple32), on a supposé que la suite de vecteur $[\alpha_k, \beta_k]^t$ est indépendante, indépendante de X_0 et que α_i et β_j sont indépendants quels que soient i et j . Par conséquent, dans la théorie les matrices de covariances prédites et corrigées sont diagonales. Or, dans l'application du filtre de Kalman, on voit bien que ce n'est plus le cas à partir de la deuxième itération. Donc, à chaque itération, on prend juste la diagonale de notre matrice qui sera la nouvelle matrice qu'on va utiliser dans la prochaine itération. Les résultats de l'exemple après modification sont donnés par :

1. Les états prédits :

k	0	1	2	3	4
$x_{1_{k+1 k}}$	1	1.224719	1.111300	1.1934758	1.3332650
$x_{2_{k+1 k}}$	-1	-1.000000	-1.045199	-0.7999679	-0.6779118

2. Les états corrigés :

k	1	2	3	4	5
$x_{1_{k k}}$	1.224719	1.111300	1.1934758	1.3332650	1.2765569
$x_{2_{k k}}$	-1.000000	-1.045199	-0.7999679	-0.6779118	-0.7083237

3. Matrices de covariances prédites :

k	0	1	2	3	4
$\Gamma_{k+1 k}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.51 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.14 & 0 \\ 0 & 6.78 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.69 & 0 \\ 0 & 3.85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.46 & 0 \\ 0 & 3.90 \end{pmatrix}$

4. Matrices de covariances corrigées (non diagonales) :

k	1	2	3	4	5
$\Gamma_{k k}$	$\begin{pmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14 & -0.55 \\ -0.55 & 5.78 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.69 & -1.32 \\ -1.32 & 2.85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.46 & -1.08 \\ -1.08 & 2.90 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.17 & -0.69 \\ -0.69 & 3.53 \end{pmatrix}$

5. Matrices de covariances corrigées (diagonales) :

k	1	2	3	4	5
$\Gamma_{k k}$	$\begin{pmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14 & 0 \\ 0 & 5.78 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.69 & 0 \\ 0 & 2.85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.46 & 0 \\ 0 & 2.90 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.17 & 0 \\ 0 & 3.53 \end{pmatrix}$

Le code R :

```
P_kalman1=list(matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),
matrix(NA,2,2))
P_kalman2=list(matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),
matrix(NA,2,2))
P_pred1=list(matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),matrix(NA,2,2),
```

```
matrix(NA,2,2))
# Calcul :
x0=x_int
P0=P_int
for(i in 1:5)
{ M1=FK(t(C[i,]),R,A,Q,x0,P0,y[i])
  x0=M1[,4]
  P0=M1[,5:6]
  P_kalman1[[i]]=P0
  P0=diag(diag(P0),2,2)
  P_kalman2[[i]]=P0
  est_kalman[,i]=x0
  P_pred1[[i]]=M1[,2:3]
  est_pred[,i]=M1[,1]
}
```

Bibliographie

- [1] Rudolf Emil Kalman. A New Approach to Filtering and Prediction Problems. Journal of Basic Engineering. March 1960.
- [2] Luc Jaulian. La robotique mobile_ cours et exercices. ISTE Editions Ltd. 2015.
- [3] Fabian Campillo. Filtrage en temps discret. DEA de Mathématique Appliquées. Université de Provence 1997.
- [4] Fabian Campillo. Filtrage de Kalman_ Application en Trajectographie. DESS d'Ingénierie Mathématique. Université Aix_Marseille 1 et 2. 1996.
- [5] Salhi Mohamed. Observateurs et détection de défauts. Mémoire. Université Annaba 2019.
- [6] Arnaud Guyader. Espérance conditionnelle et Chaînes de Markov. License MASS3. Université Rennes 2.
- [7] C.Keramsi, T. Porteboeuf et F. Theory. Les filtres de Kalman. Mars 2011.
- [8] Steven M. Kay. Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory.
- [9] L. R. Weill and P. N. De Land. The Kalman Filter : an Introduction to the Mathematics of Linear Least Mean Square Recursive Estimation.

Résumé :

Dans ce mémoire, on s'intéresse au filtre de Kalman et ses applications dans la poursuite d'une cible mobile.

Le filtre de Kalman est une méthode récursive d'estimation optimale qui consiste à approximer l'état d'un système linéaire de bruits gaussiens sous le critère de la minimisation d'erreur quadratique. On remarquera, par la suite, que l'espérance conditionnelle est notre estimateur linéaire optimal. En pratique, à chaque itération, ce filtre calcule une moyenne pondérée par le gain de Kalman entre l'état prédit et la mesure effectuée.

Mots clés : estimation par la méthode des moindres carrés, filtre, filtre de Kalman, exemple pour la poursuite d'une cible mobile.

Méthode des moindres carrés = least square method

Abstract:

In this thesis, we are interested in the Kalman filter and its applications in the pursuit of moving target.

The Kalman filter is a recursive method of optimal estimation consists in approximating the state of a linear system of Gaussian noises under the criterion of minimization of the error of square least method. We will notice, in the following, that the conditional expectation is our optimal linear estimator. In practice, at each iteration, this filter calculates an average weighted by the Kalman gain between the predicted state and the measurement taken.

Keywords: least squares estimation, filter, Kalman filter, example for tracking a moving target.

الملخص:

في هذه المذكرة ، نهتم بمرشح كالمان وتطبيقاته في السعي وراء هدف متحرك. مرشح كالمان هو طريقة تكرارية للتقدير الأمثل والتي تتمثل في تقريب حالة نظام ذو ضوضاء غاوسية خطية تحت معيار تقليل الخطأ التريبيعي. سوف نلاحظ ، فيما يلي ، أن التوقع الشرطي هو مقدرنا الخطي الأمثل. أما في الممارسة العملية ، ففي كل تكرار يحسب هذا المرشح متوسط مرجح بواسطة كسب كالمان بين الحالة المتوقعة والقياس المأخوذ.

الكلمات الأساسية : تقدير المربعات الصغرى ، مرشح ، مرشح كالمان ، مثال لتتبع هدف متحرك.