République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté de Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Équations aux dérivées partielles
présenté par

KALFAT Imane

Soutenu le : 15/ 10/ 2020

Sur une classe de problèmes elliptiques à terme singulier

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. S. Bensid	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Président
Mr. A. Rimouche	Maître de Conférences B	U. Tlemcen	Examinateur
Mme. Y. Nasri	Professeur	U. Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire :2019-2020

Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mon exemple éternel, mon soutien moral, celui qui m'a toujours tendu la main, à toi mon père.

À celle qui m'a donné la vie, qui se sacrifie pour me voir réussir, à toi ma mère.

À celui qui croit en moi, me soutient et m'épaule à chaque instant, à toi mon époux.

À mes beaux parents, en témoignage de mon affection, mon respect et ma profonde reconnaissance.

À la plus loyale des petites sœurs Hind. Merci pour ta présence à mes cotés et ton aide indéfectible.

À Nassim, le modèle des frères, celui qui a toujours su me donner le sourire.

À la lumière de mes jours, la source de ma joie, la raison de mon bonheur, à toi ma petite fille Chanez.

Remerciements

En premier lieu, je remercie ***Dieu*** *tout puissant de m'avoir donné la force pour accomplir ce travail et faire face à toute difficulté.*

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon encadrante ***Mme Nasri Yasmina****, pour m'avoir soutenue et encouragée, ses précieux conseils et ses larges connaissances furent indispensables à la conduite de ce travail et son exigence m'a grandement stimulée.*

Je remercie chaleureusement ***Mr Bensid*** *pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury de cette soutenance.*

Mes vifs remerciements s'adressent à ***Mr Rimouche*** *d'avoir accepté d'évaluer mon travail.*

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à ***Mr Dib Hassan****, pour sa disponibilité et pour avoir eu la patience de répondre à mes innombrables questions.*

Enfin je remercie ma très chère camarade et amie ***Mlle Batahri Amira****, pour le support moral et intellectuel qu'elle m'a apporté.*

Table des matières

Introduction

Un problème mathématique est en général la modélisation de phénomènes physiques liés à de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides, l'aéronautique ou encore l'astrophysique. Il est représenté le plus souvent par des équations aux dérivées partielles. On trouve plusieurs types de problèmes et par conséquent de multiples techniques de résolutions qui ne cessent de se développer au cours des années et qui sont à l'origine de divers travaux de recherches.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux problèmes elliptiques non linéaires à exposant critique de type Hardy-Sobolev avec une singularité qui se trouve sur le bord du domaine étudié.

La présence de cette singularité entraine une perte de compacité dans les injections de Sobolev et cela suscite une étude différente vu que les méthodes classiques ne s'appliquent pas.

Dans ce mémoire, nous allons détailler une partie du papier de Ghoussoub-Kang [7]. Ils montrent que la géométrie du domaine joue un rôle important dans l'existence de la solution.

Le mémoire est composé de trois chapitres :
Dans le chapitre 1, nous rappelons les différents résultats et définitions élémentaires utiles pour la suite du travail.
Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'un problème non linéaire avec condition au bord de Dirichlet, nous verrons que l'existence de solutions dépend du signe des courbures principales ainsi que d'autres paramètres.
Pour le chapitre 3 nous traiterons le même problème avec la condition au bord de Neu-

mann. Nous verrons que c'est la positivité de la courbure moyenne qui nous assure l'existence de solutions positives.

Notations

Notations générales

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $\partial\Omega$: Frontière de Ω.
- $\bar{\Omega}$: Fermeture de Ω.
- $supp(f)$: Support de la fonction f.
- $B_r(0)$: Boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon r.
- $E \hookrightarrow F$: Injection de l'espace E dans l'espace F.
- $\|.\|_p$: Norme dans l'espace $L^p(\Omega)$.
- $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ Laplacien de u .
- $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ Gradient de u.
- $C^k(\Omega)$: Espace des fonctions de classe k dans Ω.
- $C_0^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω à support compacte.
- $C^{0,\alpha}(\Omega) :=\{u \in C(\Omega); \sup\limits_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$.
- $D^{1,2}(\Omega)$: Completion de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\nabla u\|_2$.
- $u \rightharpoonup u_0$: u converge faiblement vers u_0.
- $o(1)$: Fonction f définie dans un espace X telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = 0$.
- $O(1)$: Fonction bornée au voisinage de x_0.

Chapitre 1

Notions préliminaires

L'objectif de ce Chapitre est de rappeler quelques principaux résultats qui seront utilisés au cours de ce mémoire.

1.1 Espaces et injections de Sobolev

La majorité des définitions et Théorèmes sont pris du livre de Brézis ([2]).

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

– *On définit l'espace $L^p(\Omega)$, pour $1 \leqslant p < \infty$, par :*

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|f\|_p = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

– *On définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :*

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists c > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leqslant c \text{ pp sur } \Omega\}.$$

La norme associée à $L^\infty(\Omega)$ est :

$$\|f\|_\infty := \inf\{C > 0; |f(x)| \leqslant C \text{ pp sur } \Omega\}.$$

Définition 1.2. *L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, il est réflexif pour $1 < p < \infty$, et séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient deux fonctions $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et on a*

$$\int_\Omega |f.g| \leqslant \|f\|_p.\|g\|_q.$$

Théorème 1.2 (Théorème de la convergence dominée)**.** *Soit$\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ presque partout quand $n \longrightarrow +\infty$ et $|f_n| \leqslant g$ (avec $g \in L^1(\Omega)$). Alors*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$$

1.1.2 Espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Définition 1.3. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega); \forall i = 1, ..., n\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p.$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\Big(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle_{L^2}$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \Big(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1. *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach, pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$ *et séparable pour* $1 \leqslant p < \infty$. $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

1.1.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.4. *Soit* $m \geqslant 2$ *un entier et soit* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *On définit* $W^{m,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \backslash \forall |\alpha| \leqslant m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi;\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

où $D^\alpha \varphi := \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $g_\alpha = D^\alpha u$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \sum_{0 \leqslant |x| \leqslant m} \|Du\|_p$$

est un espace de Banach.

Définition 1.5. *Soit* U *un ouvert de* Ω. *On dit que* U *est étoilé s'il existe* $v \in U$ *tel que pour tout* $u \in U$ *on a* $[v,u] \subset U$. *où* $[v,u]$ *est défini par* $\{tv + (1-t)u, t \in [0,1]\}$.

1.1.4 Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.6. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_0^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *On pose*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable, il est réflexif si* $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* H^1.

Remarque 1.1. *Comme* $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, *on a* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, *par contre si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *alors en général* $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.7. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$, *on désigne par* $W^{-1,p'}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *et par* $H^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^1(\Omega)$. *On identifie* $L^2(\Omega)$ *à son dual, mais on n'identifie pas*

$H_0^1(\Omega)$ *à son dual et on a le schéma suivant*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

1.1.5 Injections de Sobolev

. Injections continues

Lemme 1.1. *Soit* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *On a*

- *si* $1 \leqslant p < n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, *où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,
- *si* $p = n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [p, \infty[$,
- *si* $p > n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

Avec injections continues.

Remarque 1.2. *De plus si* $p > n$ *on a* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

. Injections compactes

Théorème 1.3. *(Rellich-Kondrachov)([13])*
Soit Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^n$ *et* $p \geqslant 1$, *Alors*

- *Si* $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ *où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.
- *Si* $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, \infty[$
- *Si* $p > n$ *et* $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{n}$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$,

  Avec injections compactes.

Théorème 1.1 (Formule de Green)**.** *([13]) Soient* Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *et* u, v *deux fonctions de classe* C^2 *sur* $\bar{\Omega}$, *alors on a*

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\sigma)v(\sigma)d\sigma.$$

Théorème 1.4 (Inégalité de Poincaré)**.** *([2]) On suppose que* Ω *est un ouvert borné, alors il existe une constante* C *telle que*

$$\|u\|_p \leqslant C\|\nabla u\|_p \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lemme 1.2 (Lemme de Brézis-Lieb)**.** *([3]) Soit* $\{f_n\}_n$ *une suite bornée de fonctions de* L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ *telle que* $f_n \longrightarrow f$ *presque partout quand* $n \longrightarrow +\infty$ *alors on a*

$\|f_n\|_p^p = \|f_n - f\|_p^p + \|f\|_p^p + o(1)$.
$\|f_n\|_p^p \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf\|f_n\|_p^p$.

Théorème 1.5 (Principe du maximum fort). *([13]) Soit Ω un domaine borné. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifiant $-\Delta u \leqslant 0$ et si u atteint un maximum positif à l'intérieur de Ω, alors u est constante sur Ω.*

Théorème 1.6 (Identité de Pohozaev). *([8]) Soient Ω un ouvert de classe C^1, g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans lui même avec G sa primitive s'annulant en 0 et $u \in H^1(\Omega) \cap H^2_{Loc}(\bar{\Omega})$ une fonction satisfaisant l'équation*

$$-\Delta u = g(u) \ \textit{dans} \ \Omega$$

Si de plus $G(u) \in L^1(\Omega)$ et $n(\sigma)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$, alors pour tout $\nu \in \mathbb{R}^n$ fixé, u satisfait l'identité suivante :

$$\frac{n-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2(\sigma-\nu).n(\sigma)d\sigma = n\int_{\Omega}G(u(x))dx$$

Définition 1.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On considère le problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

– *Les valeurs propres du problème* (1.1) *forment une suite infinie de réels tels que*

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leqslant \lambda_2(\Omega) \leqslant ... \to \infty.$$

– *Chaque valeur propre est de multiplicité finie.*
– *Les fonctions propres correspondantes forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.*

On note l'ensemble des valeurs propres par $\sigma(\Omega) := \{\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), ...\}$.

1.2 Condition de Palais-Smale

Pour certains problèmes il nous est impossible de vérifier la condition de Palais-Smale globale. A cet effet on peut la définir localement.

Définition 1.9 (Condition de Palais-Smale). *([14]) Soient X un espace de Banach, et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de*

Palais-Smale (au niveau c), si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que $J(u_n) \longrightarrow c$, et $J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans X' (dual de l'espace X) contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Théorème 1.7. *([14]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et soit E une fonctionnelle définie par :*

$$E(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u(x))dx$$

Supposons que $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable en $x \in \Omega$, continument différentiable en $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$, avec $F_u = \frac{\partial}{\partial u}F$ et $F_v = \frac{\partial}{\partial_v}F$, et que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $|F(x, u, v)| \leqslant C(1 + |u|^{r_1} + |v|^2)$, *où* $r_1 \leqslant \frac{2n}{n-2}$, *si* $n \geqslant 3$,
2. $|F_u(x, u, v)| \leqslant C(1 + |u|^{r_2} + |v|^t)$, *où* $t < 2$, *si* $n \leqslant 2$, *respectivement,* $r_2 \leqslant \frac{n+2}{n-2}$, $t \leqslant \frac{n+2}{n}$, *si* $n \geqslant 3$,
3. $|F_v(x, u, v)| \leqslant C(1 + |u|^{r_3} + |v|)$, *où* $r_3 \leqslant \frac{n}{n-2}$, *si* $n \geqslant 3$.

Alors on définit une fonctionnelle E de classe C^1.
De plus, $DE(u)$ est défini par

$$\langle \nu, DE(u)\rangle := \int_\Omega (F_u(x, u, \nabla u))\nu + \int_\Omega (F_u(x, u, \nabla u)).\nabla \nu dx.$$

Théorème 1.8 (Théorème du Col)**.** *([1]) Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :*

1) il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geqslant a$;

2) il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.

Alors, J possède une valeur critique c telle que $c \geqslant a$. De façon plus précise, si on pose :

$$\beta := \Big\{\varphi([0, 1]); \varphi \in C([0, 1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_0\Big\}$$

et

$$c = \inf_{A\in\beta} \max_{v\in A} J(v)$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geqslant a$.

1.3 Courbures principales et courbure moyenne

En géométrie différentielle des surfaces, les deux courbures principales d'une surface sont les courbures de cette surface selon deux directions perpendiculaires appelées directions principales. L'application de Gauss est une application naturelle différentiable sur une surface de $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans la sphère unité S^2, et dont la différentielle permet d'accéder à la seconde forme fondamentale.

Définition 1.10 (Application de Gauss)**.** *Soit Σ une surface orientée de classe C^{k+1}. Pour un point p de Σ, il existe un unique vecteur normal unitaire $\Gamma(p)$ compatible avec l'orientation de Σ. L'application de Gauss est l'application de classe C^k.*
$\Gamma : \Sigma \longrightarrow S^2$
On dispose d'une identification naturelle : $T_p\Sigma = T_{\Gamma(p)}S^2$.

Définition 1.11 (Endomorphisme de Weingarten)**.** *On définit l'endomorphisme de Weingarten noté W_p (appelé aussi opérateur de forme) comme étant la différentielle de l'application de Gauss, qui est auto-adjoint pour le produit scalaire I_p, ce dernier est diagonalisable et la forme quadratique associée est la seconde forme fondamentale de Σ en p.*

Définition 1.12 (Courbures principales et courbure moyenne)**.** *- On appelle courbures principales les valeurs propres (réelles) de l'endomorphisme de Weingarten W en p.*
- On appelle courbure moyenne la moyenne de ces valeurs propres c'est à dire la demie trace de W_p ($\frac{1}{2}tr(W_p)$).

Chapitre 2

Problème non linéaire avec condition de Dirichlet

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, tel que $0 \in \partial\Omega$, $0 < s < 2$ et $2^*(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev.
Ce type de problèmes est lié à l'inégalité de Hardy-Sobolev [8]

$$\Big(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\Big)^{\frac{2}{2^*(s)}} \leqslant C\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \text{ pour tout } u \in C_0^\infty(\Omega);$$

où C est une constante positive.

Les problèmes avec exposant critique sont nommés : problèmes non compactes, cela est dû au fait que l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}dx)$ n'est pas compacte.
L'étude de ce type de problèmes a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche durant ces dernières décennies.
Dans le cas où $s = 0$, le problème (2.1) a été étudié dans le célèbre article de Brézis-Nirenberg [4]. Ils ont montré que

- Si $0 < \lambda < \lambda_1$ (λ_1 est la première valeur propre du Δ dans $H_0^1(\Omega)$), le problème admet au moins une solution positive pour $n \geqslant 4$.
- Si Ω est une boule ; il existe une solution si et seulement si $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$.
- Si $\lambda \leqslant 0$ et Ω un domaine étoilé par rapport à l 'origine, le problème n'a pas de solution non triviale (d'après l'identité de Pohozaev [8]).
Plusieurs travaux ont été développés dans ce sens :
Pour le cas où $0 < s < 2$, on a un problème singulier que ce soit quand $0 \in \Omega$ ou $0 \in \partial\Omega$. Dans le cas ou la singularité est à l'intérieur du domaine on retrouve les travaux de Kang-Peng ([12]). Ils ont généralisé les travaux de Brézis-Nirenberg [4] en faisant intervenir le poids de type Hardy-Sobolev. L'existence de la solution dans ce dernier dépend de la dimension du paramètre λ, ainsi que la meilleure constante de Hardy.
Par contre dans le cas où le point singulier est sur la frontière du domaine on trouve peu de travaux.
Dans ce chapitre,nous nous intéressons au papier de Ghoussoub-Kang [7] avec la condition au bord de Dirichlet. Ils montrent que l'existence de solution dépend du signe des courbures principales au voisinage du point 0.

2.2 Résultat principal

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant,

Théorème 2.1. *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 4)$ dont la frontière est de classe C^2. Supposons que $0 < s < 2$, $0 \in \partial\Omega$ et que les courbures principales de $\partial\Omega$ au voisinage de 0 sont non positives. Alors, le problème* (2.1) *admet au moins une solution positive pour tout $0 < \lambda < \lambda_1$.*

Soit $J\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.1),

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx. \tag{2.2}$$

La fonctionnelle J est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$. Les solutions du problème (2.1) sont des points critiques de J.

Remarque 2.1. *On retrouve le même résultat lorsque $\lambda = 0$, le problème* (2.1) *n'a pas de solution non triviale si Ω est un domaine étoilé.*

2.3 Lemmes auxiliaires

La démonstration du Théorème (2.1) est basée sur le Théorème du col [1]
Vérifions d'abord les conditions géométriques.

Lemme 2.1. *Si* $0 < s < 2$, $0 < \lambda < \lambda_1$. *Alors*

1) Il existe $R > 0$ *et* $\alpha > 0$ *tel que si* $\|u\|_{H_0^1} = R$, $J(u) \geqslant \alpha$.

2) Il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $||u_0||_{H_0^1} > R$ *et* $J(u_0) < \alpha$.

Preuve. 1) En utilisant la définition de λ_1 et l'inégalité de Hardy-Sobolev, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} J(u) & \geq & \frac{1}{2}(1-\frac{\lambda}{\lambda_1})||u||^2_{H_0^1} - c||u||^{2^*(s)}_{H_0^1} \\ & \geq & ||u||^2_{H_0^1}\left(\frac{1}{2}(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}) - c||u||^{2^*(s)-2}_{H_0^1}\right) \end{array}$$

où c est une constante positive.

Donc il existe $R > 0$ tel que 1) est satisfaite, il suffit de prendre
$R = ||u||_{H_0^1} \leqslant \left(\frac{1}{2c}(1-\frac{\lambda}{\lambda_1})\right)^{\frac{1}{2^*(s)}}$

2) Pour tout $t > 0$, on a,

$$J(tu) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda\frac{t^2}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx,$$

pour $t \to +\infty$, on a $J(tu) \to -\infty$, par conséquent il existe $t_0 > 0$ assez grand tel que 2) est vérifiée.

□

Lemme 2.2. *Supposons que* $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ *est telle que* $u_m \longrightarrow u$ *presque partout dans* Ω *et faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *alors,*

1) $\displaystyle\int_\Omega \frac{|u_m|^p}{|x|^s}dx - \int_\Omega \frac{|u_m - u|^p}{|x|^s}dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^s}dx$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

2) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

3) si $u_m \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $D^{1,2}(\Omega)$, *alors*

$$\frac{|u_m|^{p-2}u_m}{|x|^s} - \frac{|u_m - u|^{p-2}(u_m - u)}{|x|^s} \longrightarrow \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^s}$$

dans $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Les deux premières relations découlent du lemme de Brézis-Lieb [3]
Nous démontrons la 3 ème relation pour $p = 2^*(s)$. Par le Théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\Big|\frac{|u_m|^{2^*(s)-2}u_m}{|x|^s} - \frac{|u_m-u|^{2^*(s)-2}(u_m-u)}{|x|^s}\Big| \leq (2^*(s)-1)\Big(|u_m|+|u|\Big)^{2^*(s)-2}\frac{|u|}{|x|^s}.$$

Pour $r > 0$ et $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big|\int_{|x|>r}\Big[\frac{|u_m|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}u_m - \frac{|u_m-u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}(u_m-u)\Big]w\Big| &\leq c\int_{|x|>r}\frac{|u_m|^{2^*(s)-2}+|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}|u||w| \\ &= c\int_{|x|>r}\frac{|u_m|^{2^*(s)-2}|u||w|+|u|^{2^*(s)-2}|u||w|}{|x|^{\frac{s(2^*(s)-2)+2s}{2^*(s)}}},\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Big|\int_{|x|>r}\Big[\frac{|u_m|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}u_m - \frac{|u_m-u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}(u_m-u)\Big]w\Big| &\leqslant c\Big(\int_{|x|>r}(\frac{|u_m+u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}\Big)^{\frac{2-s}{n-s}} \\ &\times \Big(\int_{|x|>r}\frac{|w|^{2^*(s)}}{|x|^s}\Big)^{\frac{1}{2^*(s)}}\Big(\int_{|x|>r}\frac{|w|^{2^*(s)}}{|x|^s}\Big)^{\frac{1}{2^*(s)}} \\ &\leqslant c\|w\|\Big(\int_{|x|>r}\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{1}{2^*(s)}}.\end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue à partir de l'inégalité de Hardy-Sobolev.
D'un autre coté, on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{|x|>r}\frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s}wdx\Big| &\leqslant \int_{|x|>r}\frac{|u|^{2^{*(s)-1}}}{|x|^{s(1-\frac{1}{2^*(s)})}}.\frac{w}{|x|^{\frac{s}{2^*(s)}}}dx \\ &\leqslant \Big(\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{2^*(s)-1}{2^*(s)}}.\Big(\frac{|w|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{1}{2^*(s)}} \\ &\leqslant C\|w\|\Big(\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{1}{2^*(s)}}\end{aligned}$$

Par le Théorème de convergence dominée, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ et $k > 0$ tel que pour tout $m > k$, on a

$$\Big|\int_{|x|>r}\Big(\frac{|u_m^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} - \frac{|u_m-u|^{2^*(s)-2}(u_m-u)}{|x|^s} - \frac{|u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}\Big)wdx\Big| \leqslant \varepsilon\|w\|.$$

D'autre part, sur $B_r(0)$ on a

$$\int_{|x|<r}\frac{|u_m-u|^{2^*(s)-2}(u_m-u)}{|x|^s}wdx \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et
$$\int_{|x|<r} \frac{|u|_m^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} w dx \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{|x|<r} \frac{|u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s} w.$$
ceci découle des estimations ci-dessus et de la définition de la convergence faible.
Par conséquent,
$$\int_{|x|<r} \Big(\frac{|u_m^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} - \frac{|u_m - u|^{2^*(s)-2}(u_m - u)}{|x|^s} \Big) dx \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{|x|<r} \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} w dx.$$

□

On pose
$$\mu_s(\Omega) := inf\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx / u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = 1 \}.$$
$\mu_s(\Omega)$ est appelée la meilleure constante de Hardy-Sobolev.
Nous remarquons que la fonctionnelle J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale globale. A cet effet, on détermine le niveau de compacité pour lequel la condition sera satisfaite.

Lemme 2.3. *La fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale pour :*
$$c < c_0 := \frac{2-s}{2(n-s)} \mu_s(\Omega)^{\frac{n-s}{2-s}}$$

Preuve. Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Palais-Smale au niveau c vérifiant les conditions suivantes :
$$J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R},$$
$$J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, on a
$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = c + o(1), \tag{2.3}$$
$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 dx - \int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = o(1). \tag{2.4}$$

Multiplions (2.4) par $\frac{1}{2^*(s)}$, nous obtenons

$$\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*(s)}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = o(1), \tag{2.5}$$

En faisant la soustraction entre (2.3) et (2.5)on obtient

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)})(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx) \leqslant c + o(1),$$

puisque $\lambda < \lambda_1$, on obtient,

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)})(1-\frac{\lambda}{\lambda_1})\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leqslant c + o(1).$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Comme $H_0^1(\Omega)$ est réflexif on a :

$u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$

$\frac{u_n}{x} \rightharpoonup \frac{u}{x}$ dans $L^2(\Omega)$

$u_n \longrightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q < 2^* = \dfrac{2n}{n-2}$.

$u_n \longrightarrow u$ pp sur Ω.

On pose $\varphi_n := u_n - u$. En appliquant le Lemme de Brézis-Lieb, nous avons,

$$\begin{aligned}
|\nabla u_n|_2^2 &= |\nabla u|_2^2 + |\nabla \varphi_n|_2^2 + o(1),\\
|u_n|_2^2 &= |u|_2^2 + |\varphi_n|_2^2 + o(1),\\
|\frac{u_n}{x}|_2^2 &= |\frac{u}{x}|_2^2 + |\frac{\varphi_n}{x}|_2^2 + o(1).
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats du lemme 2.2 on a,

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx + \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx + o(1).$$

Par la suite

$$J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = c + o(1) \tag{2.6}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx = \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx + \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx + o(1).$$

Comme $\langle J'(u), u\rangle = 0$, alors

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx = \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx + o(1).$$

On peut supposer qu'il existe une sous suite notée toujours φ_n telle que :

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k \quad et \quad \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k$$

D'après la définition de $\mu_s(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx \geqslant \mu_s(\Omega)\Big(\int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\Big)^{\frac{2}{2^*(s)}}.$$

donc $k \geqslant \mu_s(\Omega) k^{\frac{2}{2^*(s)}}$.

- Si $k = 0$, c'est trivial.
- Si $k > 0$ alors $k \geqslant (\mu_s(\Omega))^{\frac{2-s}{n-s}}$.

Montrons que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$. Supposons $k \geqslant (\mu_s(\Omega))^{\frac{2-s}{n-s}}$.
En passant à la limite dans (2.6), nous obtenons

$$J(u) + \frac{2-s}{2(n-s)} k = c < \frac{2-s}{2(n-s)} (\mu_s(\Omega))^{\frac{n-s}{2-s}}$$

On a $J(u) \geqslant 0$, par conséquent $c \geqslant \frac{k}{n}$ c'est à dire $c \geqslant \frac{2-s}{2(n-s)}(\mu_s(\Omega))^{\frac{n-s}{2-s}}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi $k = 0$ et $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

$\square$

Pour la suite de la démonstration, nous faisons appel à quelques résultats auxiliaires. Définissons

$$c := \inf_{g\in\Gamma} (\max_{t\in[0,1]} J(g(t)))$$

où $\Gamma := \{g \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : g(0) = 0, J(g(1)) < 0\}$.
Soit u solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u + \dfrac{u^{2^*(s)-1}}{|y|^s} &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n_+, \\ u(y) &> 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n_+, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ tel que } x_n > 0\}$.
La solution du problème (2.7) satisfait les propriétés citées dans le lemme suivant :

Lemme 2.4. *([11]) Soit $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ solution de (2.7) alors elle satisfait,*

1.
$$\begin{cases} u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^n}) & si \quad s < 1 + \frac{2}{n}, \\ u \in C^{1,\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^n}), \ \textit{pour tout } 0 < \beta < 1 & si \quad s = 1 + \frac{2}{n}, \\ u \in C^{1,\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^n}), \ \textit{pour tout } 0 < \beta < \frac{n(2-s)}{n-2} & si \quad s > 1 + \frac{2}{n}. \end{cases}$$

2. *Il existe une constante C telle que $|u(y)| \leqslant C(1+|y|)^{1-n}$ et $|\nabla u(y)| \leqslant C(1+|y|)^{-n}$.*

3. *$u(y', y_n)$ est symétrique par rapport à l'axe y_n ; i.e $u(y'; y_n) = u(|y'|, y_n)$.*

Dans ce qui suit nous définissons les notations suivantes :
On suppose que dans un voisinage de 0, $\partial\Omega$ est représenté par $x_n = \varphi(x')$, où
$x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $\varphi(0) = 0$, $\nabla'\varphi(0) = 0$, $\nabla' = (\partial_1, ..., \partial_{n-1})$,et $-e_n = (0, 0, ..., -1)$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$ en 0.
Définissons

$$\phi(x) := (x', x_n - \varphi(x')).$$

On choisit r_0 assez petit de façon à ce qu'on ait deux voisinages de 0, U et $\tilde{U}$, tels que

$$\phi(U) = B_{r_0}(0), \phi(U \cap \Omega) = B_{r_0}^+(0) \ ,$$

$$\phi(\tilde{U}) = B_{\frac{r_0}{2}}(0) \ , \ \phi(\tilde{U} \cap \Omega) = B_{\frac{r_0}{2}}^+(0).$$

On note $B_{r_0}^+(0) = B_{r_0} \cap \mathbb{R}_+^n$ pour tout $r_0 > 0$.
On suppose que $w \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ est une solution de (2.7) i.e :

$$\mu_s(\mathbb{R}_+^n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla w|^2 dy}{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{w^{2^*(s)}}{|y|^s} dy\Big)^{\frac{2}{2^*(s)}}} = \Big(\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{w^{2^*(s)}}{|y|^s} dy\Big)^{\frac{2^*(s)-2}{2^*(s)}}$$

Alors $u(y) := \mu_s(\mathbb{R}_+^n)^{\frac{1}{2-2^*(s)}} w(y)$ est une solution positive de l'équation

$$\begin{cases} \Delta u + \mu_s(\mathbb{R}_+^n) \dfrac{u^{2^*(s)-1}}{|y|^s} & = & 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^n, \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\mathbb{R}_+^n \end{cases}$$

avec $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u^{2^*(s)}}{|y|^s} dy = 1.$

Soit $\varepsilon > 0$, on définit

$$v_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} u\Big(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}\Big), \text{ pour } x \in \Omega \cap U, \text{ et } \hat{v}_\varepsilon := \eta v_\varepsilon \text{ sur } \Omega. \tag{2.8}$$

où $\eta \in C_0^\infty(U)$ est une fonction plateau positive telle que $\eta \equiv 1$ sur $\tilde{U}$.
Rappelons une propriété qui nous sera utile dans la suite de la démonstration

Théorème 2.2. *([7]) Si Ω est un domaine de classe C^2 tel que $0 \in \partial\Omega$:*

1. *$\mu_s(\Omega) \leqslant \mu_s(\mathbb{R}_n^+)$*
2. *si $\partial\Omega$ est régulière au voisinage de l'origine et $\mu_s(\Omega) < \mu_s(\mathbb{R}_n^+)$, alors μ_s est atteint.*
3. *si les courbures principales de $\partial\Omega$ au point 0 sont négatives. Alors $\mu_s(\Omega) < \mu_s(\mathbb{R}_n^+)$ pour $n \geqslant 4$.*

Remarque 2.2. *Lorsque $0 \in \Omega$, $\mu_s(\Omega)$ n'est atteinte que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, pour plus de détails voir [5].*

Lemme 2.5. *On a les estimations suivantes :*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx &= \mu_s(\mathbb{R}^n_+) - K_1 H(0)(1+o(1))\varepsilon + K_2 H(0)(1+o(1))\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \displaystyle\int_\Omega \hat{v}_\varepsilon^2 dx &= \varepsilon^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_+} u^2 dy + O(\varepsilon^n), \\ \displaystyle\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{v_\varepsilon^{2^*(s)}}{|x|^s} dx &= 1 - \dfrac{2^*(s) K_1}{2\mu_s(\mathbb{R}^n_+)} H(0)(1+o(1))\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{cases} \tag{2.9}$$

où
$H(0) = \frac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$ *est la courbure moyenne au point* 0 *,*
$K_1 := \frac{2s\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u(y^{2^*(s)}|y'|^2 y_n)}{|y|^{2+s}} dy,$ *et* $K_2 := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(\partial_n u)(y',0)|^2 |y'|^2 dy'.$

Preuve. Commençons par démontrer la relation suivante :

$$\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega\cap U} \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \int_{\Omega\cap U} \eta(\Delta\eta) v_\varepsilon^2 dx. \tag{2.10}$$

Comme $\eta \in C_0^\infty(U)$ alors, $\hat{v}_\varepsilon(x) = \eta(x) v_\varepsilon(x)$ ce qui implique

$$\nabla \hat{v}_\varepsilon(x) = \eta(x)\nabla v_\varepsilon(x) + v_\varepsilon(x)\nabla\eta(x).$$

D'où

$$|\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 = \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 + 2\eta(x) v_\varepsilon(x) \langle \nabla v_\varepsilon(x), \nabla \eta(x)\rangle + v_\varepsilon^2 |\nabla \eta(x)|^2$$

Rappelons que

$$\langle \nabla v_\varepsilon, \nabla \eta\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}.$$

Puisque $\eta(x) \equiv 0$ en dehors de U, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx &= \int_{\Omega\cap U} |\nabla \hat{v}_\varepsilon| dx \\
&= \int_{\Omega\cap U} \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + 2\int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x) \langle \nabla v_\varepsilon(x), \nabla \eta(x)\rangle dx \\
&+ \int_{\Omega\cap U} v_\varepsilon^2(x) |\nabla \eta(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

A l'aide d'une intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x) \langle \nabla v_\varepsilon(x), \nabla \eta(x)\rangle dx &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega\cap U} v_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\eta(x) v_\varepsilon(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\Big) dx \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega\cap U} v_\varepsilon \Big[v_\varepsilon (\frac{\partial \eta}{\partial x_j})^2 + \eta(x) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \eta(x) v_\varepsilon(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\Big] dx \\
&= -\int_{\Omega\cap U} v_\varepsilon^2 |\nabla \eta|^2 dx - \int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x) \langle \nabla v_\varepsilon(x), \nabla \eta(x)\rangle dx \\
&- \int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x)^2 (\Delta \eta) dx
\end{aligned}$$

par suite,

$$2\int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x) \langle \nabla v_\varepsilon(x), \nabla \eta(x)\rangle dx = -\int_{\Omega\cap U} v_\varepsilon^2(x) |\nabla \eta(x)|^2 dx - \int_{\Omega\cap U} \eta(x) v_\varepsilon(x)^2 (\Delta \eta) dx$$

En remplaçant cette dernière dans la première intégrale, nous obtenons (2.10)

$$\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega\cap U} \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \int_{\Omega\cap U} \eta(\Delta \eta) v_\varepsilon^2 dx.$$

Procédons à la majoration de (2.10)
Prenons la première intégrale $\int_{\Omega\cap U} \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 dx$ et posons Φ un difféomorphisme local entre $\Omega \cap U$ et $B_{r_0}^+(0)$ défini comme suit

$$\begin{cases}
\Phi_k(x) &= x_k \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\
\Phi_k(x) &= x_n - \varphi(x') \text{ si } k = n.
\end{cases}$$

Considérons le changement de variable $y := \frac{\phi(x)}{\varepsilon}$ le jacobien sera égal à $\frac{1}{\varepsilon^n}$ et $dy = \frac{1}{\varepsilon^n}$.

Calculons $|\nabla v_\varepsilon|^2$. On sait que $v_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} u\Big(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}\Big)$, alors

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial y_k} = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} ((\sum_{k=1}^{n-1} \delta_{k_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial y_k}) + (\delta_{k_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) \frac{\partial u}{\partial y_n})$$

où

$$\delta_{k_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Ainsi

- Si $1 \leqslant j \leqslant n-1$, alors

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon^{\frac{-n}{2}} \Big(\frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} . \frac{\partial u}{\partial y_n} \Big) \text{ et } (\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j})^2 = \varepsilon^{-n} \Big[(\frac{\partial u}{\partial y_j})^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y_j} . \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} . \frac{\partial u}{\partial y_n} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x_j})^2 (\frac{\partial u}{\partial y_n})^2 \Big]$$

- Si $j = n$, alors

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon^{\frac{-n}{2}} \frac{\partial u}{\partial y_n} \text{ et } (\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j})^2 = \varepsilon^{-n} (\frac{\partial u}{\partial y_n})^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\nabla_x v_\varepsilon|^2 &= \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j})^2 \\ &= \varepsilon^{-n} \Big[|\nabla_y u|^2 - 2 (\frac{\partial u}{\partial y_n}) \langle \nabla' \varphi, \nabla' u \rangle + (\frac{\partial u}{\partial y_n})^2 |\nabla' \varphi|^2 \Big]. \end{aligned}$$

Remarquons que si $x \in \Omega \cap U$ alors $\Phi(x) \in B^+_{r_0}$ autrement dit $y \in B^+_{r_0/\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap U} \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 dx &= \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta^2 (\Phi^{-1}(\varepsilon y)) . |\nabla u|^2 dy - 2 \int_{B^+_{\frac{r_0}{2}}} \eta^2 (\Phi^{-1}(\varepsilon y)) (\frac{\partial u}{\partial y_n}) \langle \nabla' \varphi, \nabla' u \rangle dy \\ &+ \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta^2 (\Phi^{-1}(\varepsilon y)) (\frac{\partial u}{\partial y_n})^2 |(\nabla' \varphi)(\Phi^{-1}(\varepsilon y))^2| dy. \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ alors

$$\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta^2 (\Phi^{-1}(\varepsilon y)) . |\nabla u|^2 dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 dy$$

et

$$\int_{\Omega \cap U} \eta (\Delta \eta) v_\varepsilon^2 (x) dx = \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta ((\Phi^{-1}(\varepsilon y)) . (\Delta \eta)(\Phi^{-1}(\varepsilon y))) . \varepsilon^{2-n} u^2(y) . \varepsilon^n dy.$$

On arrive donc à la majoration suivante

$$\begin{array}{rcl}\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx & = & \int_{\Omega\cap U} \eta^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \int_{\Omega\cap U} \eta(\Delta\eta) v_\varepsilon^2 dx \\ & \leqslant & \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u(y)|^2 dy - 2\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \nabla' u(y) \cdot (\nabla'\phi)(\varepsilon y') dy \\ & + & \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 (\partial_n u(y))^2 |(\nabla'\phi)(\varepsilon y')|^2 dy \\ & - & \varepsilon^2 \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))(\nabla\eta)(\phi^{-1}(\varepsilon y)) u(y)^2 dy. \end{array}$$

Rappelons que $\phi(x) := (x', x_n - \varphi(x'))$ et $\nabla' = (\partial_1, ..., \partial_{n-1})$
alors $|\nabla'\phi(y')| = O(|y'|)$.
En utilisant le fait que $|\nabla'\phi(y')| = O(|y'|)$ et l'estimation de la décroissance de $|\nabla u|$ dans le lemme2.4 ;
on remarque que

$$\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 (\partial_n u(y))^2 |(\nabla'\varphi)(\varepsilon y')|^2 dy \leqslant C_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{-2n} |y|^2 dy = O(\varepsilon^2).$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u(y)|^2 dy - 2\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \nabla' u(y) \cdot (\nabla'\varphi)(\varepsilon y') dy + O(\varepsilon^{2\cdot}).$$

En utilisant une intégration par parties et le Lemme 2.4 on obtient

$$\begin{array}{rcl} I & := & -2\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \nabla' u(y) \cdot (\nabla'\varphi)(\varepsilon y') dy \\ & = & -\frac{2}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \nabla' u(y) \cdot \nabla'[\varphi(\varepsilon y')] dy \\ & = & \frac{4}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y)) \nabla'[\eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))] \cdot \partial_n u(y) \nabla' u(y) \varphi(\varepsilon y') dy \\ & + & \frac{2}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \nabla'\partial_n u(y) \cdot \nabla' u(y) \varphi(\varepsilon y') dy \\ & + & \frac{2}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{ii} u(y) \varphi(\varepsilon y') dy \\ & = & \frac{2}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{ii} u(y) \varphi(\varepsilon y') dy + O(\varepsilon^n). \end{array}$$

En utilisant l'équation (2.7) et en appliquant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
I' &:= \tfrac{2}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n u(y) \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{ii} u(y)\varphi(\varepsilon y')dy \\
&= -\frac{2\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \frac{\partial_n[u(y)^{2^*(s)}]}{|y|^s}\varphi(\varepsilon y')dy \\
&- \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \partial_n[(\partial_n u(y))^2]\varphi(\varepsilon y')dy \\
&= -\frac{2s\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \frac{u(y)^{2^*(s)} y_n}{|y|^{s+2}}\varphi(\varepsilon y')dy \\
&+ \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}\cap\partial\mathbb{R}^n_+} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 (\partial_n u(y))^2\varphi(\varepsilon y')dS_y + O(\varepsilon^n) := J_1 + J_2 + O(\varepsilon^n).
\end{aligned}$$

Comme $\partial\Omega$ est C^2 en 0 ; φ peut être exprimée comme suit

$$\varphi(y') = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i^2 + o(1)(|y'|)^2. \tag{2.11}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{2s\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \frac{u(y)^{2^*(s)} y_n}{|y|^{s+2}}\varphi(\varepsilon y')dy \\
&= -\frac{2s\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}\setminus B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}}} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 \frac{u(y)^{2^*(s)} y_n}{|y|^{s+2}}\varphi(\varepsilon y')dy \\
&- \frac{2s\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}}} \frac{u(y)^{2^*(s)} y_n}{|y|^{s+2}}\varphi(\varepsilon y')dy =: J_{1,1} + J_{1,2}, \\
|J_{1,1}| &\leqslant C_\varepsilon \int_{\frac{r_0}{2}\leqslant|\varepsilon y|<r_0} |y|^{2^*(s)(1-n)+1-s}dy = O(\varepsilon^{\frac{n(n-s)}{n-2}}).
\end{aligned}$$

Notons que

$$\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n_+\setminus B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}}} u(y)^{2^*(s)}|y|^{1-s}dy = O(\varepsilon^{\frac{n(n-s)}{n-2}}). \tag{2.12}$$

En utilisant(2.11) et (2.13),on a

$$\begin{aligned}
J_{1,2} &= -\frac{2s\varepsilon\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u(y)^{2^*(s)} y_i^2 y_n}{|y|^{2+s}}dy(1+o(1)) + O(\varepsilon^{\frac{n(n-s)}{n-2}}) \\
&= -\frac{2s\varepsilon\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)(n-1)}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u(y)^{2^*(s)}|y'|^2 y_n}{|y|^{2+s}}dy\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\Big)(1+o(1)) + O(\varepsilon^{\frac{n(n-s)}{n-2}}) \\
&= -K_1 H(0)(1+o(1))\varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

où $K_1 := \frac{2s\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u(y^{2^*(s)}|y'|^2 y_n)}{|y|^{2+s}}dy.$

Dans l'estimation ci dessus, on a utilisé le fait que $u(y', y_n) = u(|y'|, y_n)$.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \cap \partial\mathbb{R}^n_+} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 (\partial_n u(y))^2 \varphi(\varepsilon y') dS_y \\
&= \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{(B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \setminus B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}}) \cap \mathbb{R}^n_+} \eta(\phi^{-1}(\varepsilon y))^2 (\partial_n u(y))^2 \varphi(\varepsilon y') dS_y \\
&+ \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}} \cap \partial\mathbb{R}^n_+} (\partial_n u(y))^2 \varphi(\varepsilon y') dS_y =: J_{2,1} + J_{2,2}, \text{ et} \\
|J_{2,1}| &\leqslant \tfrac{C}{\varepsilon}\int_{\frac{r_0}{2} < |\varepsilon y'| \leqslant r_0} |(\partial_n u(y', 0))|^2 |\varphi(\varepsilon y')| dy' \\
&\leqslant C\varepsilon \int_{\frac{r_0}{2} < |\varepsilon y'| \leqslant r_0} |y'|^{-2n+2} dy' = O(\varepsilon^n).
\end{aligned}$$

Notons que

$$\varepsilon \int_{|\varepsilon y'| > r_0/2} |(\partial_n u)(y', 0)|^2 |y'|^2 dy' = O(\varepsilon^n). \tag{2.13}$$

En utilisant(2.13) et (2.15) on a

$$\begin{aligned}
J_{2,2} &= \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ((\partial_n u)(y', 0)^2 y_i^2 dy' (1 + o(1)) + O(\varepsilon^n), \\
&= \tfrac{\varepsilon}{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(\partial_n u)(y', 0)|^2 |y'|^2 dy' \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + O(\varepsilon^2), \\
&= K_2 H(0)(1 + o(1))\varepsilon + O(\varepsilon^n).
\end{aligned}$$

où $K_2 := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(\partial_n u)(y', 0)|^2 |y'|^2 dy'$, et $H(0) = \frac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$.

Ainsi

$$\int_\Omega |\nabla \hat{v}_\varepsilon|^2 dx = \mu_s(\mathbb{R}^n_+) - K_1 H(0)(1 + o(1))\varepsilon + K_2(1 + o(1))H(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

En opérant par le changement de variable suivant $y = \frac{\phi(x)}{\varepsilon}$, on obtient

$$\int_\Omega \hat{v}_\varepsilon^2 dx = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} u^2 dy + O(\varepsilon^n). \tag{2.14}$$

En effet

$$\int_\Omega \hat{v}_\varepsilon^2 dx = \int_\Omega \eta^2 v_\varepsilon^2(x) dx = \int_{\Omega \cap U} \eta^2(x) v_\varepsilon^2(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \eta^2\Big(\phi^{-1}(\varepsilon y)\Big) \varepsilon^{2-n} u^2(y) \varepsilon^n dy \text{ (car } \eta \equiv 1 \text{ sur } B^+_{\frac{r_0}{2\varepsilon}}) \\
&= \varepsilon^2 \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} u^2(y) dy + \varepsilon^2 \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \setminus B^+_{\frac{r_0 2}{2\varepsilon}}} \eta^2\Big(\phi^{-1}(\varepsilon y)\Big) u^2(y) dy \\
&= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} u^2(y) dy + \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B^+_{\frac{r_0 2}{2\varepsilon}}} u^2(y) dy + \varepsilon^2 \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \setminus B^+_{\frac{r_0 2}{2\varepsilon}}} \eta^2\Big(\phi^{-1}(\varepsilon y)\Big) u^2(y) dy
\end{aligned}$$

Comme $|u(y)| \leqslant C(1+|y|)^{1+n}$ et $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, alors chacun de ces deux termes suivants est borné :
$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus B^+_{\frac{r_0 2}{2\varepsilon}}} u^2(y)dy$ et $\varepsilon^2 \int_{B^+_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \setminus B^+_{\frac{r_0 2}{2\varepsilon}}} \eta^2\Big(\phi^{-1}(\varepsilon y)\Big)u^2(y)dy$. D'où l'estimation (2.16).
De plus, l'intégrale $\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{v_\varepsilon^{2^*(s)}}{|x|^s}dx$ peut être estimée en faisant le changement de variable $y = \frac{\phi(x)}{\varepsilon}$, alors

$$\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{v_\varepsilon^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \int_{B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}}} \frac{u^{2^*(s)}}{\left|\frac{\phi^{-1}(\varepsilon y)}{\varepsilon}\right|^s}dy. \tag{2.15}$$

Alors $\phi^{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y'))$, ce qui nous mène à $|\phi^{-1}(y)|^2 = |y|^2 + 2y_n\varphi(y') + (\varphi(y'))^2$; et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left|\frac{\phi^{-1}(\varepsilon y)}{\varepsilon}\right|^s} &= \frac{1}{|y|^s} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2y_n\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{(\varphi(\varepsilon y'))^2}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^{\frac{s}{2}}} \\ &= \frac{1}{|y|^s}\Big(1 - \frac{sy_n\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} - \frac{s(\varphi(\varepsilon y'))^2}{2\varepsilon^2|y|^2}\Big) \\ &+ \frac{1}{|y|^s}O\Big(\Big(\frac{2y_n\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{(\varphi(\varepsilon y'))^2}{\varepsilon^2|y|^2}\Big)^2\Big). \end{aligned} \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{v_\varepsilon^{2^*(s)}}{|x|^s}dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u^{2^*(s)}}{|y|^s}dy - \frac{s}{\varepsilon}\int_{B^+_{\frac{r_0/2}{\varepsilon}}} \frac{u(y)^{2^*(s)}y_n\varepsilon(\varepsilon y')}{|y|^{2+s}}dy + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 - s\varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u(y)^{2^*(s)}y_i^2 y_n}{|y|^{2+s}}dy(1+o(1)) + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 - \frac{s\varepsilon}{n-1}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u(y)^{2^*(s)}|y'|^2 y_n}{|y|^{2+s}}dy\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\Big)(1+o(1)) + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 - \frac{2^*(s)K_1}{2\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}H(0)(1+o(1))\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

□

2.4 Preuve du théorème 2.1

Lemme 2.6. *Supposons que Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $0 \in \partial\Omega$ et $\partial\Omega$ de classe C^2 au point 0. Si $n \geqslant 4$, $\lambda < \lambda_1$ et les courbures principales de $\partial\Omega$ au point 0 sont négatives. Alors, il existe une fonction non négative $v_0 \in H^1_0 \setminus \{0\}$ telle que $J(v_0) < 0$ et $\max_{0\leqslant t\leqslant 1} J(tv_0) < \frac{2-s}{2(n-s)}\mu_s(\mathbb{R}^n_+)^{\frac{n-s}{2-s}}$.*

Preuve. Pour la démonstration on fait appel aux estimations du lemme 2.5. On a,

$$\begin{aligned} J(t\hat{v}_\varepsilon) &\leqslant \tfrac{t^2}{2}(\mu_s(\mathbb{R}^n_+) - K_1 H(0)(1+o(1))\varepsilon + O(\varepsilon^2)) - \tfrac{\lambda t^2}{2}(\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} u^2 dy + O(\varepsilon^n)) \\ &- \tfrac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}(1 - \tfrac{2^*(s)}{2\mu_s(\mathbb{R}^n_+)} H(0)\varepsilon(1+o(1)) + O(\varepsilon^2)). \end{aligned}$$

Par construction de J et le fait que $2^*(s) > 2$, d'après les conditions géométriques du lemme 2.1, $\exists T > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$J(T\hat{v}_\varepsilon) < 0.$$

$$\begin{aligned} J(t\hat{v}_\varepsilon) &\leqslant \Big(\tfrac{\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}{2} t^2 - \tfrac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\Big) + \Big(\tfrac{t^2}{2}(K_2 - K_1 + o(1)) + \tfrac{t^{2^*(s)}}{2\mu_s(\mathbb{R}^n_+)}(K_1 + o(1))\Big) H(0) \\ &+ \lambda \tfrac{t^2}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} u^2 dy\Big)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) \\ &=: g_1(t) + g_2(t) H(0)\varepsilon + \tfrac{\lambda t^2}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} u^2 dy\Big)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Comme $2^*(s) > 2$ donc $g_1(t)$ atteint son maximum au point t_1

$$g_1(t_1) = \Big((\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)})\mu_s(\mathbb{R}^n_+)\Big)^{\frac{n-s}{2-s}}$$

où $t_1 = \mu_s(\mathbb{R}^n_+)^{\frac{n-s}{2-s}}$.
Comme $H(0) < 0$ et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient que $J(t\hat{v}_\varepsilon) < g_1(t_1)$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Par conséquent en prenant ε assez petit et $v_0 = T\hat{v}_\varepsilon$, on obtient

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} J(tv_0) < \frac{2-s}{2(n-s)} \mu_s(\mathbb{R}^n_+)^{\frac{n-s}{2-s}}$$

□

Preuve du Théorème. 2.1

D'après les lemmes précédents, la fonctionnelle J satisfait toutes les conditions du théorème du Col[1]. Alors le problème (2.1) admet une solution u non triviale. D'un autre coté on a $J(u) = J(|u|)$ et $J(u) = c$, avec $c > 0$, par conséquent, la solution u est positive.

□

Chapitre 3

Problème non linéaire avec condition de Neumann

3.1 Introduction

Dans ce chapitre , on étudie l'existence de solutions positives du problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ est un domaine borné avec $0 \in \partial\Omega$, λ un paramètre réel et $2^*(s) = \dfrac{2(n-s)}{n-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev pour $0 < s < 2$.

Dans le cas où $s = 0$, le problème a été traité par Wang [15]. Il a montré l'existence de solutions positives sous certaines conditions sur la frontière $\partial\Omega$.
S'inspirant des problèmes non singuliers, Ghoussoub et Kang [7] généralisent les travaux antérieurs pour un problème singulier dont la singularité se trouve sur le bord du domaine considéré.
L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème de Neumann considéré dans l'article de Ghoussoub-Kang [7]. On remarque que les conditions qui nous assure l'existence de solutions sont complètement différentes entre la condition au bord de Dirichlet et de Neumann et dépendent des hypothèses sur le bord.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 3)$ dont la frontière est de classe C^2. Supposons que $0 < s < 2$, $0 \in \partial\Omega$ et que la courbure moyenne de $\partial\Omega$ au voisinage de 0 est positive. Alors, le problème de Neumann* (3.1) *admet une solution positive pour tout $\lambda < 0$.*

Soit $I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1) définie par

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx. \tag{3.2}$$

La fonctionnelle I est de classe C^1 sur $H^1(\Omega)$, les solutions du problème 3.1 sont les points critiques de I.
L'espace $H^1(\Omega)$ est est muni de la norme

$$\|u\|_{H^1} = (\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

3.2 Résultats auxiliaires

Le problème considéré a une structure variationnelle, à cet effet vérifions les conditions géométriques du Théorème du Col [1]

Lemme 3.1. *Supposons que $0 < s < 2$ et $\lambda < 0$. Alors,*

1) il existe $\varphi > 0$ et $R > 0$ tel que $I(u) \geqslant \varphi$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

2) il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ avec $\|u_0\|_{H^1} > R$ telle que $I(u_0) \leqslant \varphi$.

Preuve. On remarque que pour $\lambda < 0$ la norme associée à $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme suivante :

$$\|u\|_{H^1} = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev-Hardy, nous obtenons

$$I(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - C\|u\|_{H^1}^{2^*(s)},$$

où C est une constante positive. Ainsi, il existe $u \in H^1(\Omega)$ tel que $I(u) \geqslant \varphi > 0$ avec $\|u\|_{H^1} = R$ pour R assez petit.
D'un autre coté, nous avons

$$I(tu)=\frac{t^2}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2dx-\lambda|u|^2)dx-\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx$$

quand $t\longrightarrow+\infty$, on a $I(tu)\longrightarrow-\infty$, par conséquent il existe u_0 tel que $\|u_0\|>R$, tel que $I(u_0)<0$. □

Pour vérifier la condition de Palais-Smale nous faisons appel au lemme suivant :

Lemme 3.2. *([10]) Soit $h(x')$une fonction de classe C^1 définie sur $\{x'\in\mathbb{R}^{n-1},|x'|<1\}$ et satisfaisant $\nabla h(0)=0$, soit $\tilde{B}:=B_1(0)\cap\{x_n>h(x')\}$. Alors pour tout $\phi\in H_0^1(B_1(0))$ on a :*

1. *si $h\equiv 0$, alors*
$$2^{\frac{2-2^*(s)}{2^*(s)}}\mu_s\Big(\int_{\tilde{B}}\frac{|\phi|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{2}{2^*(s)}}\leqslant\int_{\tilde{B}}|\nabla\phi|^2dx.$$
où $\mu_s:=\mu_s(\Omega)=inf\{\int_\Omega|\nabla u|^2dx/u\in H^1(\Omega)et\int_\Omega\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx=1\}.$
2. *pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que si $|\nabla h|\leqslant\delta$, alors*
$$(2^{\frac{2-2^*(s)}{2^*(s)}}\mu_s-\varepsilon)\Big(\int_{\tilde{B}}\frac{|\phi|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{2}{2^*(s)}}\leqslant\int_{\tilde{B}}|\nabla\phi|^2dx.$$

Définissons
$$c:=\inf_{g\in\Gamma}\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}I(g(t))\Big).$$
avec
$$\Gamma:=\{g\in C\Big([0,1],H^1(\Omega)\Big):g(0)=0,I(g(1))<0\}.$$

Lemme 3.3. *Si $c<c_0:=\dfrac{2-s}{4(n-s)}\mu_s(\Omega)^{\frac{n-s}{2-s}}$, alors I satisfait la condition de Palais-Smale au niveau c.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $(P-S)_c$ pour la fonctionnelle I. Montrons que cette suite est bornée.
On a,
$$I(u_n)=\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u_n|^2dx-\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{|u_n^{2^*(s)}|}{|x|^s}dx=c+o(1)\tag{3.3}$$
$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx-\lambda\int_\Omega|u_n|^2dx-\int_\Omega\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx=\langle\varepsilon_n,u_n\rangle\tag{3.4}$$

avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ dans $H^1(\Omega)$. En combinant (3.3) et (3.4) nous obtenons

$$\begin{aligned} c+o(1) &= I(u_n) - \frac{1}{2^*(s)}\langle I'(u_n), u_n\rangle \\ &\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\Big)\Big[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx\Big] \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\Big)\|u_n\|^2, \end{aligned}$$

comme $\lambda < 0$, alors $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c$. Ainsi (u_n) est une suite bornée. Par conséquent, il existe une sous-suite notée encore (u_n) telle que

$u_n \longrightarrow u$ faiblement dans $L^q(\Omega)$ pour $1 < q < 2^*$.

$u_n \longrightarrow u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$.

$u_n \longrightarrow u$ presque partout sur Ω.

Posons

$$\varphi_n = u_n - u$$

En utilisant le Lemme de Brézis-Lieb, nous obtenons les relations suivantes :

$$\|\nabla u_n\|^2_{H^1} = \|\nabla u\|^2_{H^1} + \|\nabla \varphi_n\|^2_{H^1} + o(1). \tag{3.5}$$

et

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx + \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx. \tag{3.6}$$

En utilisant (3.5) et (3.6), nous obtenons

$$I(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = c + o(1) \tag{3.7}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx = \lambda\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx + \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx + o(1).$$

Comme $\langle I'(u), u\rangle = 0$, alors

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx = \int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx + o(1).$$

On suppose qu'il existe une sous-suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = k,$$

où k est une constante positive.

D'après le lemme 3.2, nous avons

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_n|^2 dx \geqslant \Big(\mu_s(\Omega) - \varepsilon\Big)\Big(\int_\Omega \frac{|\varphi_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\Big)^{\frac{2}{2^*(s)}}.$$

Ainsi

$$k \geqslant \Big(\frac{\mu_s(\Omega)}{2^{\frac{2-s}{n-s}}} - \varepsilon\Big) k^{\frac{2}{2^*(s)}} \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \tag{3.8}$$

1. si $k = 0$, c'est trivial.

2. si $k > 0$, d'après (3.8), nous obtenons

$$k \geqslant \frac{1}{2}(\mu_s(\Omega))^{\frac{2-s}{n-s}}.$$

puisque ε est arbitraire, de (3.7) on obtient

$$\begin{aligned} I(u) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)})k &= c \\ I(u) + \frac{2-s}{2(n-s)}k &= c \\ I(u) + \frac{2-s}{4(n-s)}(\mu_s(\Omega))^{\frac{2-s}{n-s}} &\leqslant c. \end{aligned}$$

Comme $I(u) \geqslant 0$ on conclut que

$$c \geqslant \frac{2-s}{4(n-s)}(\mu_s(\Omega))^{\frac{n-s}{2-s}}$$

ce qui contredit l'hypothèse que $c < \dfrac{2-s}{4(n-s)}(\mu_s(\Omega))^{\frac{n-s}{2-s}}$, par conséquent, on a $u_n \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

3.3 Preuve du résultat principal

Comme $\partial\Omega$ est de classe C^2 et la courbure moyenne de $\partial\Omega$ en 0 est positive, le bord au voisinage de l'origine peut être représenté par (rotation des directions $x_1, ..., x_n$ si nécessaire) par :

$$x_n = h(x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^2 + o(|x'|^2),$$

où $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in D(0,\delta)$ pour $\delta > 0$, avec $D(0,\delta) = B(0,\delta) \cap \{x_n = 0\}$; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont les courbures principales de $\partial\Omega$ au point 0 et la courbure moyenne $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i > 0$.

Pour tout ε assez petit, posons

$$U_\varepsilon := \varepsilon^{\frac{n-2}{2(2-s)}}\left(\varepsilon + |x|^{2-s}\right)^{\frac{2-n}{2-s}}$$

On sait que $\mu_s := \mu_s(\mathbb{R}^n)$ est atteint par la famille de fonctions U_ε, ces dernières sont des solutions radiales positives de l'équation

$$-\Delta u = \frac{u^{2^*(s)-1}}{|x|^s} \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_\varepsilon|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{U_\varepsilon^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = \mu_s^{\frac{n-s}{2-s}}. \tag{3.9}$$

$\mu_s(\Omega)$ n'est atteint que si $\Omega = \mathbb{R}^n$. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à voir l'article de Ghoussoub-Yuan [8].

Considérons la fonction $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ tel que

$$\begin{cases} \eta & \equiv & 1 \text{ dans } B_\delta(0), \\ \eta & \equiv & 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \backslash B_{2\delta}(0). \end{cases}$$

Pour déterminer le niveau de compacité, on a besoin des estimations suivantes :

$$K_0^\varepsilon := \int_\Omega |\nabla(\eta U_\varepsilon)|^2 dx; \quad K_1^\varepsilon := \int_\Omega \frac{(\eta U_\varepsilon)^{2^*(s)}}{|x|^s} dx; \quad K_2^\varepsilon := \int_\Omega (\eta U_\varepsilon)^2 dx.$$

Commençons par le calcul de K_0^ε. En utilisant la règle de Leibnitz, on a

$$K_0^\varepsilon = \int_\Omega |\nabla \eta|^2 |U_\varepsilon|^2 dx + 2\int_\Omega \eta U_\varepsilon \nabla \eta . \nabla U_\varepsilon dx + \int_\Omega |\eta|^2 |\nabla U_\varepsilon|^2 dx.$$

Comme $supp(\nabla \eta) \subset B_{2\delta}(0) \backslash B_\delta(0)$, pour un ε assez petit, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \eta|^2 |U_\varepsilon|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla \eta|^2 \varepsilon^{\frac{n-2}{2(2-s)}}\left(\varepsilon + |x|^{2-s}\right)^{\frac{2-n}{2-s}} dx, \\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla \eta|^2 \varepsilon^{\frac{n-2}{2(2-s)}} (2\delta)^{2(2-n)} dx, \\ &\leqslant C_{1,\delta} \varepsilon^{\frac{n-2}{2(2-s)}}. \end{aligned}$$

De façon similaire, on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega \eta U_\varepsilon \nabla\eta.\nabla U_\varepsilon dx\Big| &= \Big|\int_\Omega \eta\varepsilon^{\frac{n-2}{2(2-s)}}(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2-n}{2-s}} \\ &\times\ \nabla\eta\Big((2-n)\varepsilon^{\frac{n-2}{2(2-s)}}(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2-n}{2-s}-1}|x|^{1-s}\frac{x}{|x|}\Big)dx\Big| \\ &\leqslant C_{2,\delta}\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}.\end{aligned}$$

Pour le calcul du dernier terme on procède de la même manière que le précédent chapitre. A cet effet, nous distinguons deux cas : le cas $n=3$ et le cas $n\geqslant 4$,

-Si $n=3$

$$\int_\Omega |\eta|^2|\nabla U_\varepsilon|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla U_\varepsilon|^2dx - \int_{D_{\delta(0)}}\int_0^{h(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' + o(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}).$$

Puisque $m|x'|^2\leqslant h(x')\leqslant M|x'|^2$ sur $D_\delta(0)$, $0<m\leqslant M<\infty$, on a

$$\begin{aligned}\int_{D_{\delta(0)}}\int_0^{h(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' &\geqslant C\int_{D_{\delta(0)}}\frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}m|x'|^{4-2s}}{(\varepsilon+|x'|^{(2-s)})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx' \\ &\geqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}|\ln\varepsilon|.\end{aligned}$$

-Si $n\geqslant 4$

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\eta|^2|\nabla U_\varepsilon|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla U_\varepsilon|^2dx - \int_{D_{\delta(0)}}\int_0^{h(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}) \\ &= \frac{1}{2}K_0 - \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{g(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' - \int_{D_{\delta(0)}}\int_0^{h(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}),\end{aligned}$$

où $K_0 := \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_\varepsilon|^2dx = (n-2)^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|y|^{(2-2s)}}{(1+|y|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dy.$
Remarquons que

$$\begin{aligned}A(\varepsilon) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{g(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' \\ &= (n-2)^2\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{g(x')}\frac{|x|^{2-2s}}{(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx_ndx' \\ &= (n-2)^2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{g(y')\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}}\frac{|y|^{2-2s}}{(1+|y|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dy_ndy'.\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{-1}{2-s}}A(\varepsilon) &= (n-2)^2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|x'|^{2-2s}g(x')}{(1+|x'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx' \\
&= \frac{(n-2)^2}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|x'|^{2-2s}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i|x_i|^2}{(1+|x'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx' \\
&= \frac{(n-2)^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|x'|^{2-2s}|x_i|^2}{(1+|x'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx' \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\Big)\frac{(n-2)^2}{2(n-1)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|x'|^{4-2s}}{(1+|x'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx'.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$A(\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}).$$

Comme la courbure moyenne $H(0):=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i>0$ il s'en suit que

$$A(\varepsilon)>0$$

De plus,

$$\begin{aligned}
A_1(\varepsilon) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{g(x')}^{h(x')}|\nabla U_\varepsilon|^2dx_ndx' \\
&= (n-2)^2\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{g(x')}^{h(x')}\frac{|x|^{2-2s}}{(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx_ndx' \\
&\leqslant C(\delta,n)(n-2)^2\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|h(x')-g(x')|}{(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dx'
\end{aligned}$$

or $h(x')=g(x')+o(|x'|)^2$, pour tout $\sigma>0$ il existe $C(\sigma)>0$ tel que

$$|h(x')-g(x')|\leqslant\sigma|x'|^2+C(\sigma)|x'|^{\frac{5}{2}},$$

on a alors,

$$\begin{aligned}
A_1(\varepsilon) &\leqslant C\varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}}\int_{D_{\delta(0)}}\frac{\sigma|x'|^2+C(\sigma)|x'|^{\frac{5}{2}}}{(\varepsilon+|x'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}-1}}dx', \\
&\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}(\delta+C(\sigma)\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}).
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$A_1(\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}).$$

Donc

$$K_0^\varepsilon=\begin{cases}\dfrac{1}{2}K_0-C\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}|\ln\varepsilon|+O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}) & \text{si}\quad n=3\\ \dfrac{1}{2}K_0-A(\varepsilon)+o(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}) & \text{si}\quad n\geqslant 4\end{cases}$$

Passons maintenant à l'estimation de K_1^ε On a

$$\begin{aligned}
K_1^\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx - \int_{D_\delta(0)} \int_0^{h(x')} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx_n dx' + O(\varepsilon^{\frac{n-s}{2-s}}) \\
&= \frac{1}{2}K_1 - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx_n dx' - \int_{D_\delta(0)} \int_0^{h(x')} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx_n dx' + O(\varepsilon^{\frac{n-s}{2-s}}).
\end{aligned}$$

où

$$K_1 := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon^{\frac{2^*(s)(n-2)}{2(n-s)}}}{|x|^s(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(n-2)}{2(n-s)}}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^s(1+|y|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} dy$$

Soit $B(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx_n dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{2-s}} g(y')} \frac{1}{|y|^s(1+|y|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} dy_n dy'.$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2-s}} B(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y')}{|y'|^s(1+|y'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} dy' \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i |y_i|^2}{|y'|^s(1+|y'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} dy' \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{2(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|y'|^2}{|y'|^s(1+|y'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} dy'.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})$$

Comme $H(0) > 0$ ceci implique que $B(\varepsilon) > 0$

De la même manière on a

$$\int_{D_\delta(0)} \int_{g(x')}^{h(x')} \frac{|U_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx_n dx' = O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}).$$

On obtient

$$K_1^\varepsilon = \frac{1}{2}K_1 - B(\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})$$

Pour K_2^ε nous distinguons aussi trois cas :

– Si $n = 3$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\eta U_\varepsilon)^2 dx &= \int_\Omega |\eta|^2 \varepsilon^{\frac{1}{2-s}} (\varepsilon + |x|^{2-s})^{-\frac{2}{2-s}} dx \\
&\leqslant \int_{B_{2\delta}(0)} \varepsilon^{\frac{1}{2-s}} (\varepsilon + |x|^{2-s})^{-\frac{2}{2-s}} dx \\
&\leqslant C_n \varepsilon^{\frac{2}{2-s}} \int_0^{2\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2-s}}} r^2 (1+r^{2-s})^{-\frac{2}{2-s}} dr \\
&= O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}).
\end{aligned}$$

– Si $n=4$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\eta U_\varepsilon)^2 dx &= \int_\Omega |\eta|^2 \varepsilon^{\frac{2}{2-s}} (\varepsilon+|x|^{2-s})^{-\frac{4}{2-s}} dx\\
&\leqslant \int_{B_{2\delta}(0)} \varepsilon^{\frac{2}{2-s}} (\varepsilon+|x|^{2-s})^{-\frac{4}{2-s}} dx\\
&\leqslant C_n \varepsilon^{\frac{2}{2-s}} \int_0^{2\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2-s}}} r^{n-1}(1+r^{2-s})^{-\frac{4}{2-s}} dr\\
&= O(|\varepsilon^{\frac{2}{2-s}} \ln \varepsilon|).
\end{aligned}$$

– Si $n \geqslant 5$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\eta U_\varepsilon)^2 dx &= \int_\Omega |\eta|^2 \varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}} (\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2(2-n)}{2-s}} dx\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{\frac{n-2}{2-s}} (\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{2(2-n)}{2-s}} dx\\
&= O(\varepsilon^{\frac{2}{2-s}}).
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$K_2^\varepsilon = \int_\Omega (\eta U_\varepsilon)^2 dx = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}) & \text{si} \quad n=3\\ O(\varepsilon^{\frac{2}{2-s}} \ln \varepsilon) & \text{si} \quad n=4\\ O(\varepsilon^{\frac{2}{2-s}}) & \text{si} \quad n \geqslant 5 \end{cases}$$

□

3.4 Démonstration du Théorème 3.1

Soit t_ε une constante positive telle que

$$I(t_{\varepsilon U_\varepsilon}) = \sup_{t>0} I(t\eta U_\varepsilon) = \sup_{t>0}\{\frac{1}{2}K_0^\varepsilon t^2 - \frac{1}{2^*(s)}K_1^\varepsilon t^{2^*(s)} - \frac{\lambda}{2}K_2^\varepsilon t^2\}.$$

-Si $n=3$,

Alors, $K_2^\varepsilon = o(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})$, par conséquent

$$\begin{aligned}
I(t_\varepsilon \eta U_\varepsilon) &\leqslant \sup_{t>0}\{\frac{1}{2}K_0^\varepsilon t^2 - \frac{1}{2^*(s)}K_1^\varepsilon t^{2^*(s)}\} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}),\\
&= \frac{2-s}{2(n-s)}\Big[\frac{k_0^\varepsilon}{(K_1^\varepsilon)^{\frac{n-2}{n-s}}}\Big]^{\frac{n-s}{2-s}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}).
\end{aligned}$$

Pour la suite de la démonstration on doit montrer que

$$\sup_{t>0} I(t\eta U_\varepsilon) < \frac{2-s}{4(n-s)} \mu_s^{\frac{n-s}{2-s}}.$$

Il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{k_0^\varepsilon}{(K_1^\varepsilon)^{\frac{n-2}{n-s}}} &< 2^{-\frac{2-s}{n-s}}\mu_s + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}), \\ &= \frac{1}{2}\frac{K_0}{(\frac{1}{2}K_1)^{\frac{n-2}{n-s}}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

En tenant compte de (3.9), de l'estimation de K_0^ε et K_1^ε et pour ε assez petit, (3.10) est équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}K_0 - C\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}\ln|\varepsilon| &< 2^{-\frac{2-s}{n-s}}\mu_s\Big[\frac{1}{2}K_1 - O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})\Big]^{\frac{n-2}{n-s}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}), \\ &= \frac{1}{2}\mu_s K_1^{\frac{n-2}{n-s}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}). \end{aligned}$$

où C est une constante positive.
Et

$$\frac{K_0}{K_1^{\frac{n-2}{n-s}}} = \mu_s.$$

-Si $n \geqslant 4$,
On sait que $K_2^\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})$, par conséquent

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon \eta U_\varepsilon) &\leqslant \sup_{t>0}\{\frac{1}{2}K_0^\varepsilon t^2 - \frac{1}{2^*(s)}K_1^\varepsilon t^{2^*(s)}\} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}), \\ &= \frac{2-s}{2(n-s)}\Big[\frac{k_0^\varepsilon}{(K_1^\varepsilon)^{\frac{n-2}{n-s}}}\Big]^{\frac{n-s}{2-s}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}). \end{aligned}$$

Alors, pour montrer que $c < \dfrac{2-s}{4(n-s)}(\mu_s(\Omega))^{\frac{n-s}{2-s}}$, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{K_0^\varepsilon}{(K_1^\varepsilon)^{\frac{n-2}{n-s}}} &< 2^{-\frac{2-s}{n-s}}\mu_s + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{K_0}{(\frac{1}{2}K_1)^{\frac{n-2}{n-s}}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

En tenant compte de (3.9), K_0^ε et K_1^ε ; (3.11) est équivalente à

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2}K_0 - A(\varepsilon))(\tfrac{1}{2}K_1)^{\frac{n-2}{n-s}} &< \tfrac{1}{2}K_0\Big(\tfrac{1}{2}K_1 - B(\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{s}{2-s}})\Big)^{\frac{n-2}{n-s}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}}), \\ &= \tfrac{1}{2}K_0\Big[(\tfrac{1}{2}K_1)^{\frac{n-2}{n-s}} - \tfrac{n-2}{n-s}(\tfrac{1}{2}K_1)^{\frac{n-2}{n-s}}B(\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})\Big]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Par ailleurs, pour vérifier (3.12), on doit montrer que,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{B(\varepsilon)}{A(\varepsilon)} < \frac{n-s}{n-2}\frac{K_1}{K_0}. \tag{3.13}$$

Pour cela, on utilise la règle de l'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{B(\varepsilon)}{A(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{B'(\varepsilon)}{A'(\varepsilon)} \\
&= \frac{1}{(n-2)^2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{g(y')}{|y'|^s(1+|y'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dy' \times \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|y'|^{2-2s}g(y')}{(1+|y'|^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dy'\Big)^{-1} \\
&= \frac{1}{(n-2)^2}\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-s}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr \times \Big(\int_0^{+\infty}\frac{r^{n+2-2s}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties pour $2 \leqslant \beta \leqslant 2(n-s)-1$, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-2}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}-1}}dr = \frac{2n-2-s}{\beta-1}\int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-2}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr$$

Et comme,

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-s}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr = \int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-2}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}-1}}dr - \int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-2}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr,$$

on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-2}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}-1}}dr = \frac{\beta-1}{2n-\beta-1-s}\int_0^{+\infty}\frac{r^{\beta-2}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}-1}}dr \tag{3.14}$$

Alors, en posant $\beta = n+2-s$ dans (3.14), on arrive à la limite suivante

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{B(\varepsilon)}{A(\varepsilon)} = \frac{n-3}{(n+1-s)(n-2)^2}.$$

Et si on pose $\beta = n+1-s$ dans (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{n-s}{n-2}\frac{K_1}{K_0} &= \frac{n-s}{(n-2)^3}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1-s}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr\Big) \times \Big(\int_0^{+\infty}\frac{r^{n+1-2s}}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}dr\Big)^{-1} \\
&= \frac{1}{(n-2)^2}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la relation (3.13). Ainsi u est un point critique de $I(u)$.

Il nous reste à montrer la positivité des solutions.

On remarque que

$$\langle I'(u), u\rangle = \int_\Omega |\nabla u^-|^2 + \lambda|u^-|^2 dx = 0.$$

avec $u^- = \min(u,0)$.

Comme $\lambda > 0$, alors $u \geqslant 0$. D'après le principe du maximum $u > 0$.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variation methods in critical point theory and applications*, J-Funct. Aval 14 (1973), 349-381.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Dunod, 1999.

[3] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. A.M.S 88 (1983), 486-490.

[4] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involvingcritical Sobolev exponent*, Comm. Pure Appl. Math.36 (1983), 437-477.

[5] L.Caffarelli, R.Kohn, L.Nirenberg, *First order interpolation inequality with weights*, Compositio Math.53 (1984)259-275.

[6] I.Ekeland, *On the variational principle*, J.Math.Anal.Appl. (1974), 324-353.

[7] N. Ghoussoub, X. S. Kang, *Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities*, AIHP- Analyse non linéaire 21 (2004), 767-793.

[8] N. Ghoussoub, C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDES involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 5703-5743.

[9] G.H Hardy, J.E Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge University Press,(1952).

[10] M. Hashizume, *Asymptotic behavior of the least-energy solutions of a semilinear elliptic equation with the Hardy-Sobolev critical exponent*, J. Differential Equations, 262(3) (2017), 3107–3131.

[11] C-H.Hsia,C-S.Lin,H.Wadade, *Revisiting an idea of Brézis and Nirenberg*, Journal of Functional Analysis 259 (2010) 1816-1849.

[12] D. Kang, S. Peng, *Solutions for semilinear elliptic problems with critical Sobolev-Hardy exponents and Hardy potential*, Appl.Math.18 (2005), 1094-1100.

[13] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag,(1993).

[14] M. Struwe, *Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer(2008).

[15] X. J. Wang, *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, J. Differential Equations, 93 (1991), 671-684.