République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : EDP et Applications

Problèmes Elliptiques avec Exposant Critique de Sobolev

Présenté Par : Yles Mohammed Chiheb-Eddine

Mémoire soutenu 02/11/2020 devant le jury composé de :

Mme.**Y. Nasri**	Professeur UABB Tlemcen	Présidente
M.**O.Boukarabila**	MCB UABB Tlemcen	Examinateur
M.**A.Rimouche**	MCB UABB Tlemcen	Encadrant

Année universitaire 2019-2020

Dédicaces

Avec l'expression de ma reconnaissance.Je dédie ce modeste travail à ceux qui,quels que soient les termes utilisés,je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère :

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir,A celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoirs,A la source d'amour incessible,A la femme des sentiments fragiles qui ma bénie par ces prière :ma très **chère maman**

A l'homme,mon précieux offre du dieu,qui doit ma vie,ma réussite et tout mon respect :mon **cher père**

A mes chers frère et sœur qui n'ont pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir. Que Dieu les protège et leurs offre beaucoup de réussite et du bonheur.

A mes grands-mères, mes oncles et mes tantes. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A la mémoire de mes grands pères.Ce travail est le fuit de vos sacrifices que vous m'avez consentis pour ma formation

A mon encadreur Monsieur ***Ali Rimouche***, dont le mérite, les sacrifices et les qualités humaines.Que ce travail soit un témoignage de ma gratitude et mon profond respect

A toute ma famille,mes amis,et collègues pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Merci d'être toujours là pour moi.

Yles Mohammed Chiheb Eddine

Remerciements

En préambule à ce mémoire.Je remercie avant tout Dieu qui m'a aidé et donné la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à monsieur ***Ali Rimouche*** pour avoir accepté de m'encadrer dans cette étude. Je le remercie pour son implication, son soutien,ses encouragements,ses orientations et ses conseilles. tout au long de ce travail.

Je souhaite également remercier tout les professeurs qui m'ont beaucoup appris, pour leurs précieux conseils et aimables encouragements durant toute ma trajectoire d'étude en particuliers messieurs-dames : S.M.Bouguima,Y.Nasri,A. Bensedik,Y.O.Boukarabila, M.Houbad,B.Mssirdi,F.Abi ayad,N.Merzagui,Laabbas,A.Lansari,Bensalah, F.Boukhari, R.Bentifour et W.Benyelles

Je tiens à remercier avec plus grande gratitude Madame ***Y. Nasri*** professeur à l'université de Tlemcen pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de ce mémoire.

Je tiens à remercier l'examinateur Monsieur ***O.Boukarabila*** d'avoir accepté de faire part du jury de ce mémoire.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches en particuliers mes parents,mes frères,ma grande famille et mes amis, qui m'ont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Dédicaces **1**

Remerciements **2**

1 Préliminaires **8**
1.1 Introduction 8
1.2 Les espaces fonctionnels et distributions 8
1.2.1 Distribution 8
1.2.2 Espaces de Sobolev 9
1.3 Approche variationnelle 12
1.3.1 Problèmes elliptiques semi linéaires 12
1.3.2 Solution faible pour le problème de Dirichlet 13
1.3.3 Fonction de Green 13
1.3.4 Quelques théorèmes de point fixe 17
1.3.5 Problème de minimisation 18
1.3.6 Méthodes de Minimax 20

2 Existence de solutions pour un problème elliptique semi linéaire en dimension supérieure où égale à 4 **23**
2.1 Introduction 23
2.2 Cas sous critique 24
2.2.1 Problème 1 24
2.2.2 Problème 2 27
2.3 Cas critique 29

3 Existence de solutions pour un problème elliptique semi linéaire en dimension 3 **36**
3.1 Introduction 36
3.2 Existence de solution pour dans une boule 38
3.2.1 Démonstration de la condition nécessaire 39
3.2.2 Démonstration de la condition suffisante 43
3.3 Existence de solution dans un domaine borné 45

Bibliographie **59**

Introduction

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir non seulement cette fonction mais aussi ses dérivées partielles.
L'ordre maximal de dérivation intervenant dans l'équation est appelé ordre de 1'EDP. Il existe des centaines d'EDP dont l'étude nécessite des théories différentes, souvent spécifiques.
On tente néanmoins de classifier les EDP en catégories, selon les outils généraux qui permettent de les analyser, ou encore selon leurs propriétés qualitatives et les problèmes qu'elles modélisent.

En effet, les EDP sont les objets mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes naturels par exemple le transport,la vibrations,l'équilibre...
Les EDP que nous rencontrerons seront toujours placées au préalable dans un contexte : physique, mécanique, chimie, biologie, économie, sociologie.

Plusieurs méthodes analytiques et d'autres numériques ont été proposées pour l'étude de l'existence et les propriétés qualitatives des solutions des EDP :
- les méthodes topologiques (degré topologique, point fixe, transversalité topologique),
- Les méthodes numériques
- Les méthodes variationnelles
- La méthode des sous et sur solutions
- Les arguments de compacité

Les méthodes variationnelles ont une longue histoire qui remonte à Pierre Fermat (1657) et Christian Huygens (1690) pour l'Étude de la propagation de la lumière (principe de Fermat et principe de Huygens-Fresnel). Néanmoins, le calcul des variations est né publiquement en 1696, avec le problème de la courbe brachistochrone, posé par Jean Bernoulli (à la suite de Galilée dans son dialogue sur les deux grands systèmes du monde paru en 1632), et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Johann Bernoulli .
Le développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle (avec l'Étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue et beaucoup d'autres techniques) a permis de développer la théorie du calcul variationnel depuis les travaux d'Elsgolc dans les années 60, il existe un calcul des variations pour les systèmes à retard, et par ailleurs une théorie du contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations différentielles à retard.
Les solutions faibles des Équations à retard sont les points critiques de fonctionnelles d'Euler-Lagrange associées.
Les espaces où ces fonctionnelles sont étudiées dépendent des conditions aux bords associées aux Équations différentielles.

Dans de nombreux cas, la résolution des équations se ramène à la recherche de géodésiques dans un espace approprié (en général l'espace des états du système physique étudié), sachant que ces géodésiques sont les extrémales d'une certaine intégrale représentant la longueur de l'arc joignant les points fixes dans cet espace abstrait

Le mot géodésie vient du mot grec geodaisia qui veut dire partage de la Terre. Ce sens remonte à l'antiquité, en ancienne Egypte en particulier, et s'applique aux travaux d'arpentage correspondant à la délimitation de parcelles cadastrales
La géodésie s'intéresse à la forme et aux dimensions de la Terre, à l'étude du champ de pesanteur terrestre et aux déformations de la croûte terrestre (tectonique des plaques, géodynamique).

L'objectif de la géodésie est l'étude géométrique de la terre qui établit des systèmes de références dans lesquels on positionne des points matérialisés de la surface en attribuant des coordonnées et éventuellement des vitesses.

Les utilisateurs ont accès au référentiel en rattachant leurs travaux aux points géodésiques qui sont à présent diffusés sous forme télématique et pour lesquels on obtient les renseignements pour les situer géographiquement et les retrouver sur le terrain, ainsi que les coordonnées dans les systèmes légaux

Un autre objectif de la géodésie est de fournir des techniques ou systèmes de positionnement comme par exemple la mise en place de satellites de telle sorte qu'un utilisateur puisse se positionner à tout instant et quelque soit le lieu.[22]

Mon mémoire est consacrée à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires elliptiques dans le cas d'un exposant critique,pour cela nous allons montrer l'existence de solutions faibles dans des espaces dits de Sobolev,en particulier,le célèbre problème introduit par Brézis et Nirenberg
Le point de départ de ce problème est celui de Yamabe en géométrie différentielle. Le problème est de trouver une solution sur une variété riemannienne de dimension N.
En outre Brézis et Nirenberg ont considéré le même type de problème pour un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$.

Le problème est donné sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

où p est l'exposant critique de Sobolev et λ est un paramètre réel. Par ailleurs, la présence de l'exposant critique de Sobolev nous donne que la fonctionnelle d'énergie accorder au problème ne satisfait pas la condition de Palais-Smale globale car l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte.

Par conséquent, les techniques variationnelles standards ne sont pas applicables.
En se basant sur les travaux de Aubin, Brezis et Nirenberg ont montré que la condition de Palais-Smale peut être satisfaite pour un certain niveau d'énergie en faisant intervenir la meilleure constante de Sobolev d'où la notion de Palais-Smale.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :
Le chapitre 1 est consacré aux préliminaires.Dans un premier temps nous commençons par introduire quelques espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler ainsi que les EDP de type elliptique semi linéaire de plus leurs théorèmes, propriétés, et leurs inégalités utilisés.
Chapitre 2 traite la résolution du problème de Brézis et Nirenberg en utilisant le théorème du col dans le cas sous critique et multiplicateurs de Lagrange dans le cas critique.
Nous allons montrer que pour l'exposant critique inférieure à 2*-1 le problème possède une solution sans perdre compacité,par contre pour l'exposant critique égal à 2*-1 notre problème ne dispose pas de solution avec perd de compacité.
Pour le dernier chapitre on va chercher les solutions faibles du problème posé précédemment en dimension 3 celui qui pose problème.

Notations

- $\mathcal{D}(\Omega)$: L'ensemble de fonctions indéfiniment dérivable sur Ω et à support compact.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: Dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$
- $L^{\infty}(\Omega)$: L'ensemble de fonctions bornées p.p sur Ω
- $L^{p}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ mesurable sur Ω et tel que $\|f\|_{L^{p}(\Omega)} < \infty\Big\}$
- $\hookrightarrow$: Injection continue.
- L'injection $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^{q}(I)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$.
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) := \Big\{u \in \mathcal{C}^{0}(\Omega)/u : \Omega \to \mathbb{R}^{N}, |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, x, y \in \Omega\}$
- $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions k-fois continument différentiables et leures dérivées partielles sont continues hölderienne d'exposant α
- $C^{0,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{u \in C(\Omega) : \sup\limits_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\right\}$, *où* $0 < \alpha < 1$.
- $\langle , \rangle_{(E,E')}$: Produit dans la dualité V, V'
- V' : Dual topologique de V
- p.p : Presque partout.
- $x = (x_1, \ldots, x_N)$: Élément de $\mathbb{R}^{N}$
- $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$: Module de x
- $\|\cdot\|_{p+1}$ pour $p+1 \in [1, \infty[$ désigne la norme usuelle sur l'espace de Lebesgue $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$
- Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^{N}$
- $\partial\Omega$: Le bord de Ω
- $\mathcal{C}^{0}(\Omega)$: L'ensemble de fonctions continues sur Ω
- s.c.i : Semi continuité inférieure pour la topologie forte.
- f.s.c.i : Semi continuité inférieure pour la topologie faible.
- Une fonction f est dite grand O d'une fonction g au voisinage de 0 i.e $f = O_{\epsilon}(g)$ ssi $\frac{f}{g}$ est bornée.
- Une fonction f est dite petit o d'une fonction g au voisinage de 0 i.e $f = o_{\epsilon}(g)$ ssi $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} = 0$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite petit o d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de 0 i.e $u_n = o_n(v_n)$ ssi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- p' : le conjugué harmonique de p tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ pour $1 < p < \infty$
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$: Gradient de u.
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$: Laplacien de u
- $D_i u = \partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$: La dérivée partielle de u par rapport à x_i
- $D_{ij} u = \partial_{ij} u = u_{x_{ij}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$: La dérivée seconde de u par rapport à $x_i x_j$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va énoncer quelques définitions ainsi que les théorèmes nécessaires utilisés pour résoudre le problème de Brezis Nirenberg [6]

1.2 Les espaces fonctionnels et distributions

1.2.1 Distribution

Définition 1 *On dit que u est une distribution sur Ω si u est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$, au sens où pour tout K compact, il existe k_K et une constante C_K telle que pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ avec $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$, on a*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C_K \max_{|\alpha| \leqslant k_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$$

On note $D'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω

Fonction de Dirac

Définition 2 *le fonction de Dirac est définie par*

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

1. $\int_\Omega \delta(x) \mathrm{dx} = 1 \quad \text{si } 0 \in \Omega$
2. Il existe aucune fonction avec ces propriétés. Cependant, la fonction de Dirac est bien défini comme distribution, dans ce cas elle associe à chaque fonction d'essai φ sa valeur à l'origine. Supposant que $0 \in \Omega$,
3. la fonction de Dirac est défini comme distribution δ qui satisfait

$$\int_\Omega \delta(x)\varphi(x) \mathrm{dx} = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

4. La fonctionnelel linéaire δ défini sur $D(\Omega)$ par $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

Distribution de Dirac

Définition 3 *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : C_0^\infty(\Omega) \to C$ définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

est une distribution sur Ω, d'ordre 0

1.2.2 Espaces de Sobolev

Espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$

Définition 4 *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$\left\{ u \in L^p(\Omega) / \ \exists g_1, ..., g_N \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \phi \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \ \forall i = 1, .., N \right\}.$$

On pose $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.
Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 1.2.1 *[5] $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach séparable et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Définition 5 *On définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*
On pose $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 1.2.1 *On a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Théorème 1.2.2 *[5] Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Espace $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Définition 6 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. Lespace de Sobolev $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega); \mathbf{D}^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m\}$$

Proposition 1 *[5]*
L'espace $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & si \ 1 \leqslant p < +\infty \\ \max_{\{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & si \ p = +\infty \end{cases}$$

L'espace $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. De plus, si $1 < p < +\infty$, alors l'espace $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$

Définition 7 *Soit $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$*

Définition 8 *si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on n'a pas en général la densité* de *$D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On pose donc $H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ au sens de la norme H^1*

Lemme 1.2.1 *[5]*

$$H^1\left(]0,1[\right) \text{ s'injecte dans } C^0([0,1])$$

Théorème 1.2.3 ***(Immersion de Sobolev)*** *[31]*

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.

i) Si $p < N$, alors

$$\begin{cases} \text{pour tout } q \in [1, p^*), \text{l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^q(\Omega) \text{ est compacte.} \\ \text{l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^{p^*}(\Omega) \text{ est continue où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}. \end{cases}$$

ii) Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

iii) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$, alors l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ est compacte,

Définition 9 *Pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $p \geq 1$, soit*

$$||u||^p_{W_0^{1,p}} := \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p},$$

par le théorème d'immersion de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, il existe une constante optimale S_p qui ne dépend que de N et p telle que

$$S_p ||u||^p_{L^{p^*}} \leq ||u||^p_{W_0^{1,p}}, \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

avec

$$S_p := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{||u||^p_{W_0^{1,p}}}{||u||^p_{L^{p^*}}}.$$

Proposition 2 *[31] Soit $S := S_2$ la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. Alors l'infimum S n'est jamais atteint quand Ω est un domaine borné.*

Définition 10 *On dit que Ω est étoilé par rapport à un point a si pour tout $x \in \Omega$, $\{(1-t)\,a + tx : t \in [0,1]\} \subset \Omega$.*

Lemme 1.2.2 ***(Inégalité de Hardy)****[28] Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + N > 0$ et supposons que $0 \in \Omega$, alors pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega |x|^t |u|^2 dx \leq \left(\frac{2}{N+t}\right)^2 \int_\Omega |x.\nabla u|^2 |x|^t dx.$$

La constante $\left(\frac{2}{N+t}\right)^2$ est optimale et n'est jamais atteinte.

Pour $t = -2$ on obtient

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \left(\frac{2}{N-2}\right)^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Théorème 1.2.4 ***(Inégalité de Harnack)****[25]*

Soit $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ *une fonction positive telle que* $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$, *pour tout* $|x| < R$, *avec* $-1 < a < 1$ *et* $R > 0$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *qui ne dépend que de* n *telle que*

$$\sup_{x \in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf_{x \in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x)$$

Théorème 1.2.5 ***(Inégalité de Hölder)****[5]*

Étant donné un exposant p quelconque satisfaisant :

$$1 < p < \infty$$

pour toute paire de fonctions appartenant à des espaces conjugués :

$$f \in L^P\left(\mathbb{R}^d\right) \quad \text{et} \quad g \in L^{P'}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

le produit $f\ g$ *appartient à* $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ *et l'on a l'inégalité :*

$$\|fg\|_{L^1\left(\mathbb{R}^d\right)} \leqslant \|f\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} \cdot \|g\|_{L^{P'}\left(\mathbb{R}^d\right)}$$

à savoir on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

En particulier, pour $\mathrm{p} = \mathrm{p}' = 2$, *on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\|f\bar{g}\|_{L^1\left(\mathbb{R}^d\right)} \leqslant \|f\|_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \cdot |\ \|g\|_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}$$

que l'on a déjà démontrée par d'autres voies. De plus, pour $\mathrm{p} = \infty, \mathrm{d}$ *'où* $\mathrm{p}' = 1$, *nous affirmons que l'inégalité est encore valable :*

$$\|fg\|_{L^1\left(\mathbb{R}^d\right)} \leqslant \|f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)} \cdot \|g\|_{L^1\left(\mathbb{R}^d\right)}$$

ce qui est essentiellement évident, puisqu'il suffit de majorer dans l'intégrale la fonction f *par son supremum essentiel :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(x)|dx &\leqslant \ \textit{supess}\ |f| \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dx \\ &= \|f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)} \cdot \|\ g|_{L^1\left(\mathbb{R}^d\right)} \end{aligned}$$

Théorème 1.2.6 ***(Inégalité de Poincaré)****[17]* *Soit* Ω *un ouvert borné. Il existe une constante* C *telle que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lemme 1.2.3 *[5] Soit* $u_n \in H_0^1(\Omega)$. *Si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$, *alors*

$$\int_\Omega |\nabla (u_n - u)|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2 + o(1)$$

Lemme 1.2.4 ***(Brézis-Lieb)****[7]* *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* $(u_n)_n \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. *Si* $(u_n)_n$ *est bornée dans* $L^p(\Omega)$ *et* $u_n \to u$ *p.p dans* Ω, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_{L^p}^p - \|u_n - u\|_{L^p}^p) = ||u||_{L^p}^p.$$

Théorème 1.2.7 ***(Eberlein - Shmulyan)***[5]
Un espace de Banach B est réflexif si et seulement si toute suite bornée (u_n) de B contient une sous-suite $(u_n)_k$ convergeant faiblement dans B

Théorème 1.2.8 ***Valeurs propres du laplacien*** [5]
Soit le problème aux valeurs propres :

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & dans\ \Omega \\ \quad u = & 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Les valeurs propres du laplacien sur Ω (c'est à dire les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels le problème $(*)$ possède une solution non triviale dans $H_0^1(\Omega)$) forment un suite croissante $\lambda_k > 0$ qui tend vers l'infini. Les vecteurs propres correspondants sont des fonctions continues et forment une suite orthonormée complète dans $L^2(\Omega)$. De plus, la première valeur propre λ_1 est simple et le premier vecteur propre ϕ_1 peut être pris > 0 dans Ω, tandis que tous les autres changent de signe.

Variétés riemanniennes

Définition 11 *soit l'application $x \to g_x$ de classe C^∞ (au sens où la matrice de g, dans un repère local donné par une carte, a des coefficients de classe C^∞).*
On appelle une métrique riemannienne sur une variété M est la donnée en chaque point $x \in M$, d'un produit scalaire g_x sur l'espace tangent T_xM

Exemple 1.2.1 *le cas où g est induite sur la sous-varieté M par la structure euclidienne naturelle de l'espace $\mathbb{R}^N$: le produit scalaire g_x n'est autre que la restriction à T_xM du produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$*

Définition 12 *Dans le cadre des variétés riemanniennes, c'est à dire des variétés munies d'une métrique riemannienne, les applications naturelles sont les isométries, c'est à dire les difféomorphismes $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ qui préservent les produits scalaires, i.e. $T_x\varphi : (T_xM, g_x) \to \left(T_{\varphi(x)}N, h_{\varphi(x)}\right)$ est une isométrie. Quand on se limite à des ouverts, on parle d'isométrie locale.*

Théorème 1.2.9 ***(Théorème de la Sphère)*** [10] *si M est une variété riemannienne fermé. S'il y a un $p \in M$ de sorte que distance n'a qu'un seul point critique(autre que p), donc M est homéomorphe à S^n.*

1.3 Approche variationnelle

L'approche variationnelle a pour but de résoudre des équations aux dérivées partielles tout en remplaçant l'équation par une formulation équivalente appeler variationnelle, pour l'obtenir il faut multiplier l'équation par une fonction v et on l'intègre par parties.Pour cela nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet $\frac{\partial w}{\partial z_i}$

1.3.1 Problèmes elliptiques semi linéaires

Définition 13 *On appelle EDP elliptiques semi-linéaires toute EDP elliptique non linéaires dont la partie principale est linéaire par rapport à u. Par exemple l'EDP sous forme divergence suivante :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f(x, u) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Le terme principal de cette équation $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x)$ *est effectivement linéaire par rapport à u*

Définition 14 *L'équations de type elliptique qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Le prototype d'équation elliptique est l'équation de Laplace*

$$-\Delta u = f$$

d'inconnue $u(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et de donnée* f

1.3.2 Solution faible pour le problème de Dirichlet

On s'intéresse à l'équation de Laplace suivante :

$$(E)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Définition 15 *Une fonction u est dite solution faible de (E) si* $u \in H_0^1(\Omega)$ *et si* $-\Delta u = f$ *au sens de distribution.c'est à dire si* $u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$-\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega f v dx$$

Remarque 1.3.1 *Une formulation variationnelle de (E) consiste à trouver*
-une forme bilinéaire continue a(.,.) sur $H_0^1 \times H_0^1$.
-une forme linéaire continue $\ell(.)$ *sur* H_0^1.
ensuite rechercher une solution faible du problème sous la forme :

$$\begin{cases} u \in H_0^1 \\ \forall v \in H_0^1 \text{ on a } a(u,v) = \ell(v) \end{cases}$$

1.3.3 Fonction de Green

Théorème 1.3.1 ***(Formule de Green)****[13]*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *régulier de classe* C^1 *; Soit* w *une fonction de* $C^1(\bar{\Omega})$ *à support borné dans le fermé* $\bar{\Omega}$*, alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(w)(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)\cdot n(x)ds$$

où ds désigne la mesure surfacique sur $\partial\Omega$ *(mesure de lebesque en dimension* $n-1$*, et le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $\operatorname{div}(w) := \partial_{x_1}w_1 + \ldots + \partial_{x_n}w_n$ *est la divergence de* $w := (w_1, \ldots, w_n)$*)*

Corollaire 1.3.1 ***(Formule d'intégration par parties)****[13]*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *régulier de classe* C^1*; Soient* $u \in C^1(\bar{\Omega})$ *et* $v \in C^1(\bar{\Omega})$ *à support borné dans* $\bar{\Omega}$*, alors, on a :*

$$\int_\Omega \nabla v.u \; dx = -\int_\Omega v \operatorname{div}(u)dx + \int_{\partial\Omega} v \; u\cdot n \; ds$$

Corollaire 1.3.2 *[13] Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}$ est le vecteur gradient de u, et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u\cdot n$

— **Quelques fonctions de Green dans des espaces libres**
La fonction de Green d'espace libre pour l'équation de Laplace au sens des distributions

$$\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) \text{ dans } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et satisfait la condition de rayonnement de Sommerfeld

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{\partial G}{\partial|y|}(x,y) - ikG(x,y)\right) = 0$$

donc la fonction de Green est donnée par

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{|y-x|}{2} & \text{pour } N=1 \\ \frac{1}{2\pi}\ln|y-x| & \text{pour } N=2 \\ -\frac{1}{4\pi|y-x|} & \text{pour } N=3 \\ -\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(N-2)|y-x|^{N-2}} & \text{pour } N\geq 4 \end{cases}$$

où Γ est la fonction gamma définie par

$$\Gamma(e) = \int_0^\infty t^{e-1}e^{-t}dt \quad (\Re ez > 0)$$

— **Représentation de la fonction de Green**
Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, et $x\in\Omega$ on désigne par φ^x la fonction correctrice c-à-d, la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi^x = \varphi(y-x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est donnée par G la fonction de Green de Ω où $G(x,y) = \varphi(y-x) - \varphi^x(y)$ pour $(x,y)\in\Omega\times\Omega, x\neq y$. On a

$$G(x,y) = G(y,x)$$

Proposition 3 *[20] Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ est solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{dans } \Omega \\ u = g & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f\in L^2(\Omega)$ et $g\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\subset L^2(\partial\Omega)$ sont des fonctions données. Alors

$$u(x) = \int_\Omega f(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G(x,\sigma)}{\partial\eta}d\sigma$$

— **Représentation des solutions**
Soit $x \in \Omega$. On définit une certaine fonction $G(x, \cdot)$ sur Ω de la forme

$$G(x,y) = \psi(x-y) + w(y), y \in \Omega, y \neq x$$

où w est une fonction harmonique sur Ω. L'objectif est de faire de G une "solution fondamentale du laplacien dans Ω''. Pour ε suffisamment petit, appliquons la formule de Green à $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash B(x,\varepsilon)$: si u est une solution du problème de Dirichlet, alors

$$\int_{\Omega_e} \{u(y)\Delta_y G(x,y) - G(x,y)\Delta u(y)\}\, d\mu^{(n)}(y) = \int_{\partial\Omega} \{u(y)\partial\vartheta_y G(x,y) - G(x,y)\partial\vartheta_y u(y)\}\, dS(y) + \int_{S(x,\varepsilon)} \{u(y)\partial\vartheta_y G(x,y) - G(x,y)\partial\vartheta_y u(y)\}\, dS(y)$$

Travaillons un peu plus sur le deuxième terme :

$$\int_{S(x,\varepsilon)} \{u(y)\partial\vartheta_y G(x,y) - G(x,y)\partial\vartheta_y u(y)\}\, dS(y)$$

donc, on trouve la solution fondamentale du laplacien.

$$\int_{S(x,\varepsilon)} u(y)\partial\vartheta_y G(x,y) dS(y) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} u(x)$$

et

$$\int_{S(x,\varepsilon)} G(x,y)\partial\vartheta_y u(y) dS(y) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Par ailleurs, la singularité de G en x est intégrable et $\Delta_y G(x,y) = 0$. On obtient donc la représentation suivante :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_\Omega G(x,y)(-\Delta u(y)) d\mu^{(n)}(y) - \int_{\partial\Omega} \{u(y)\partial\vartheta_y G(x,y) - G(x,y)\partial\vartheta_y u(y)\}\, dS(y)$$

Si u est une solution du problème de Dirichlet, alors la seule donnée qui reste inconnue est la quantité $\partial\nu_y u$ sur $\partial\Omega$, mais ce terme dépend de Δu et de $u_{|a\Omega}$. Pour lever cette difficulté, on va s'arranger pour trouver w harmonique dans Ω telle que $G(x,y) = 0, y \in \partial\Omega$. En d'autres termes, on veut résoudre le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega \\ w(y) = -\psi(x-y) \,\text{sur}\, \partial\Omega \end{cases} \quad '(7)$$

En supposant que l'on ait réussi à trouver un tel w, les conditions voulues sont satisfaites. La fonction G qui en résulte est appelée fonction de Green pour $-\Delta$ dans Ω. On a alors la représentation suivante :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) d\mu^{(n)}(y) + \int_{\partial\Omega} K(x,y) g(y) dS(y) \qquad '(8)$$

La fonction $K(x,y) := -\partial\vartheta_y G(x,y)$ est appelée noyau de Poisson sur Ω

— **Propriétés de la fonction de Green**

Propriété 1 *[20] si Ω est connexe*

i) Pour tout $x \neq y \in \Omega, G(x,y) > 0$: En effet, $\Delta_y G(x,y) = 0$ sur $\Omega_\varepsilon, G(x,y) = 0$ sur $\partial\Omega$ et $G(x,y) \geq 0$ sur $S(x,\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit, puisque $G(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $y \to x$ et que w est de classe $\mathcal{C}^\infty$

ii) $K(x,y) > 0$ *pour tout* $y \in \partial\Omega$ *: Cela demande un raffinement du principe du maximum.*

iii) $G(x,y) = G(y,x)$ *pour tout* $x \neq y$ *: En effet, si l'on applique la formule de Green à* $\Omega'_\varepsilon := \Omega \backslash (B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon))$ *aux fonctions v(z)=G(x, z) et* $w(z) := G(y,z)$, *on obtient :*

$$0 = \int_{S(x,\varepsilon)} (v\partial_\vartheta w - w\partial_\vartheta v)\, dS + \int_{S(y,\varepsilon)} (v\partial_\vartheta w - w\partial_\vartheta v)\, dS$$

Le premier terme tend vers $-w(x)$*, le second vers* $v(y)$*, toujours par la même méthode de calcul. On trouver ainsi* $G(x,y) = v(y) = w(x) = G(y,x)$

— **Fonction de Green dans la boule**

On connait très peu de fonctions de Green de manière explicite ; néanmoins, dans le cas de la boule et du demi-espace, on a accès aux formules. Dans le cas de la boule, on travaille par la méthode des images électriques. Soit $\Omega := B(0,R)$ la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$. On associe à $x \in \bar{\Omega}\backslash\{0\}$ le vecteur $\tilde{x}$ défini par

$$\tilde{x} := \frac{R^2}{|x|^2} x$$

Lemme 1.3.1 *Soit* $\psi(x,y) := \frac{|x|\cdot|\tilde{x}-y|}{R}$ *pour* $x, y \in \bar{\Omega}, |x|\cdot|y| \neq 0$*. Alors*

$$\psi(x,y) = \psi(y,x)$$

et

$$\psi(x,y) \geq |x-y|$$

avec égalité si et seulement si $|x| = R$ *ou* $|y| = R$

Preuve 1 *On calcule :*

$$\begin{aligned} \psi(x,y)^2 &= \frac{|x|^2}{R^2}|\tilde{x}-y|^2 \\ &= \frac{|x|^2}{R^2}\left(|\tilde{x}|^2 + |y|^2 - 2\langle \tilde{x}, y\rangle\right) \\ &= R^2 + \frac{|x|^2\cdot|y|^2}{R^2} - 2\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

On déduit que

$$\psi(x,y)^2 - |x-y|^2 = \frac{1}{R^2}\left(R^2 - |x|^2\right)\left(R^2 - |y|^2\right)$$

d'où les résultats annoncés.

Définition 16 *Soit* $G(x,y) := \Phi(x-y) - \Phi\left(\frac{|x|}{R}(\tilde{x}-y)\right), y \neq x, |x|, |y| \in [0;R], x \neq y$*. Alors G est la fonction de Green de la boule. Le fait que G soit bien la fonction de Green est laissé à titre d'exercice. On a par ailleurs une expression du noyau de Poisson dans la boule :*

$$K(x,y) = \frac{|R|^2 - |x|^2}{R|S(0,1)|} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}$$

Corollaire 1.3.3 *[23]*
Si u est harmonique dans $B(0,R)$, alors

$$\forall r \in]0;R\left[, \forall x \in B(0,r), u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{r|S(0,1)|}\int_{S(0,r)} \frac{1}{|x-y|^n}u(y)dS(y)\right.$$

C'est un analogue de la formule de Cauchy en analyse complexe. Les dernières propriétés miraculeuses que nous aborderons dans cette sections sont les fameuses inégalités de Harnack, qui rigidifient encore les fonctions harmoniques ; le contenu de ce théorème est que si u est une fonction harmonique positive sur $B(0,R)$, si $r<R$, alors la quantité $\frac{\max(u)}{\min(u)}$ est bornée par une constante qui dépend uniquement de r et de R :

Corollaire 1.3.4 *[23]*
. Si $u \geq 0$ est harmonique dans $B(0,R)$ alors

$$\forall x \in B(0,R), \quad R^{n-1}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

Fonctions coercives

Définition 17 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non borné et $f:\Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est coercive sur Ω si on a*

$$\lim_{x\in\Omega, \|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(ceci peut aussi s'écrire : $f\left(x^k\right) \to +\infty \quad$ pour toute suite $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ telle que $\left\|x^k\right\| \to +\infty$

Remarque 1.3.2 *Supposons qu'on a $\Omega_0 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec Ω_0 non borné et $f:\Omega \to \mathbb{R}$.Sif est coercive sur Ω alors f est coercive sur Ω_0, la réciproque n'étant pas vraie en général.*

Proposition 4 *[25] Soit $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ un ouvert et $U \subset \Omega$ un ensemble convexe et non borné. Soit $f:\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur Ω et fortement convexe sur U. Alors f est coercive sur U*

1.3.4 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 18 *Le théorème de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie.*
Soit $\bar{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$ muni de la norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial\bar{B}^m$ la sphère qui en est la frontière.

Théorème 1.3.2 ***(Point fixe de Brouwer)****[2] Le théorème de point fixe de Brouwer affirme que : Toute application continue de $\bar{B}^m$ dans $\bar{B}^m$ admet au moins un point fixe*

Remarque 1.3.3 *Le théorème de Brouwer est un résultat non trivial, sauf dans le cas $m=1$ où il se montre très simplement par un argument de connexité. Il en existe plusieurs démonstrations dans le cas général, faisant toutes appel à des notions plus ou moins élémentaires. Nous allons en donner une preuve aussi élémentaire que possible (notion subjective, malgré tout, ce qui est élémentaire pour l'un ne l'est pas forcément pour l'autre).*

Commençons par le théorème de non-rétraction de la boule sur la sphère une rétraction d'un espace topologique sur un sous-ensemble de cet espace est une application continue de cet espace à valeurs dans le sous-ensemble et égale à l'identité sur le sous-ensemble - dans le cas d'une application de classe C^1. On verra un peu plus loin qu'il est équivalent au théorème de Brouwer.

Théorème 1.3.3 *[2] Soit K un compact homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$. Toute application continue de K dans K admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.3.4 *[2] Soit C un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^m$. Toute application continue de C dans C admet au moins un point fixe.*

Définition 19 ***(Fonction de Carathéodory)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une fonction f de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie :*
1. L'application : $t \to f(x,t)$ est continue p.p. $x \in \Omega$
2. L'application : $t \to f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.3.4 *Nous rappelons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction L^p Carathéodory si*
a) .$f(x,u)$ est dans $L^p(\Omega)$ pour chaque $u \in \mathbb{R}$
b). $f(x,u)$ est continue presque par tous $x \in \Omega$
c). Pour chaque $\rho > 0$ il existe une fonction $l_\rho \in L^p(\Omega)$ telle que $x \in \Omega$ p.p

$$\sup_{|u|\leq\rho} |f(x,u)| \leq l_\rho(x)$$

Lemme 1.3.2 *[2]*

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $w : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Alors la fonction $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable.

Théorème 1.3.5 ***(Brézis-Kato)****[9] Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que*

$$|g(x,s)| \leq K|s|^p + c(x)$$

où $p = \frac{N+2}{N-2}, K$ est une constante et $c(x)$ est une fonction dans $L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)\cap\ L^2(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution positive du problème $(\mathcal{T})$

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $u \in L^q(\Omega)$ pour un $q > \frac{2N}{N-2}$

Théorème 1.3.6 ***(Gidas Nirenberg,)*** *[24] Soit Ω la boule unité dans $\mathbb{R}^N$. Supposons que $f \in C^1$ et $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfont*

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(u) & \text{dans } \Omega \\ \quad u > & 0 & \text{dans } \Omega \\ \quad u = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors u est une fonction radiale et $u'(r)$ est négative.

1.3.5 Problème de minimisation

Dans plusieurs situations,on peut associee la resolution d'une EDP elliptique à la recherche d'un equilibre en terme d'energie. Par exemple, lorsque l'EDP regit un problème d'elasticite, on peut trouver la solution qui minimise les efforts subits par une membrane élastique.

Définition 20 ***(dérivée au sens de Fréchet)*** *Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach E est Fréchet différentiable en un point $u \in E$, s'il existe une application linéaire bornée $J'(u) \in E'$ appelée la différentielle de J en u, telle que*

$$\frac{|J(u+v) - J(u) - \langle J'(u), v\rangle|}{\|v\|_E} \to 0 \quad \text{quand } \|v\|_E \to 0$$

où bien , pour tout v_1 prés de u, on a

$$J(v_1) - J(u) = \langle J'(u), v_1 - u\rangle + O(v_1 - u)$$

J est dite de classe C^1, si l'application $u \mapsto J'(u)$ est continue.

Définition 21 ***(dérivée au sens de Gâteaux)***

On dit que la fonction f est Gâteau-differentiable en x_0 si toutes les dérivées directionnelles de f en x_0 existent, et si l'application $v \longmapsto \delta f(x_0, v)$ est linéaire et continue.

Toute fonction différentiable au sens de Fréchet est différentiable au sens de Gâteau, avec $\delta f(x_0, v) = df(x_0) \cdot v$.
L'exemple montre que la différentiabilité au sens de Gâteau n'implique pas la différentiabilité au sens de Fréchet, même en dimension finie. Elle n'implique même pas la continuité de f.

Pour mieux détailler la différence entre différentiabilité au sens de Gâteau et de Fréchet, on peut considérer la fonction

$$\Delta_v(t) = \frac{f(x+tv) - f(x) - tL(v)}{t\|v\|}$$

L'application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est la différentielle au sens de Gâteau de f en x si et seulement si chacune des fonctions Δ_v tend vers 0 en 0. L'application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est la differentielle au sens de Frechet de f en x si et seulement les fonctions $\Delta_v, v \in S_E$ tendent uniformément vers 0 en 0 (où S_E est la sphère unité de E).

Propriété 2 *[4]*

La courbe $\gamma(t) : \mathbb{R} \longrightarrow F$ est dérivable en to si et seulement si elle est Frechet differentiable en t_0, ce qui est aussi équivalent à la differentiabilité au sens de Gâteau en t_0. On a alors la relation $d\gamma(t_0) \cdot s = s\gamma'(t_0)$ Toute application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est differentiable au sens de Fréchet en chaque point, avec $dL(x_0) = L$

Théorème 1.3.7 *[44]*

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 3$. Supposons qu'il existe une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable en $x \in \Omega$, continument différentiable en $u \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^N$, avec $F_u := \frac{\partial F}{\partial u}$ et $F_p := \frac{\partial F}{\partial p}$ et les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $|F(x,u,p)| \leq C\left(1 + |u|^{s_1} + |p|^2\right)$, *où* $s_1 \leq \frac{2N}{N-2}$
2. $|F_u(x,u,p)| \leq C\left(1 + |u|^{s2} + |p|^{t_2}\right)$, *où* $s_2 \leq \frac{N+2}{N-2}$ *et* $t_2 \leq \frac{N+2}{N}$
3. $|F_p(x,u,p)| \leq C\left(1 + |u|^{s3} + |p|\right)$, *où* $s_3 \leq \frac{N}{N-2}$

Alors, la fonctionnelle J définie par :

$$J(u) := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))dx$$

est de classe C^1 et $J'(u)$ est donnée par :

$$\langle J'(u), v\rangle := \int_\Omega \left(F_u(x,u,\nabla u)v + F_p(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v\right)dx$$

On se propose de minimiser la fonctionnelle J associee au problème (P) cité ci dessous
.

$$(E')\begin{cases} -\Delta u = f(u) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

on cherche une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, étant donnés Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

f une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, telle que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Alors on a $|F(t)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|t|$. et on associe à ce problème la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx \tag{1.1}$$

1.3.6 Méthodes de Minimax

Condition de Palais-Smale

Définition 22 *Soient E un espace de Banach, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, $J'(u) : E \longrightarrow E'$ (E' est le dual topologique de E), les dérivées au sens de Fréchet.*
On dit que $u \in X$ est un point critique de I si $I'(u) = 0$, sinon u est un point régulier.
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de I s'il existe un point critique u de I tel que $I(u) = c$, sinon c est dite valeur régulière.

Définition 23 *Soient X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) $(\mathrm{P.S})_\mathrm{c}$, si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que*

$$\begin{cases} J(u_n) \to c & \text{dans } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 & \text{dans } X', \end{cases}$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 24 *Soit X un ensemble, la fonction $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée inférieurement dans X, s'il existe une constante réelle m telle que : $\forall x \in X,\ J(x) \geq m$*

Définition 25 *Soit V un espace de Banach et $J \in C^1(X)$*
− On dit que $u \in V$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$; sinon il est régulier.
− On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J, s'il existe un point critique de J avec $J(u) = c$
− On dit que la suite $(u_n)_n \subset V$ est de Palais-Smale de niveau $c, (P - S)$ si

$$J(u_n) \to c$$

et $\quad J'(u_n) \to 0$ dans V', le dual de V
− Condition de Palais-Smale $(P - S)$ toute suite de Palais-Smale a une sous-suite convergente.

Principe variationnelle d'Ekeland

Définition 26 *Soit X un espace topologique. On dit qu'une fonction $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi continue inférieurement (en abrégé s.c.i) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $|J \leq \lambda| := \{x \in X : J(x) \leq \lambda\}$ est fermé.*

On peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.3.3 *[21] Soient (X, d) un espace métrique complet et J une fonction s.c.i de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inférieurement et on pose $c = \inf_{x \in X} J(x)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe u_ε tel que*

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \forall x \in X,\ x \neq u_\varepsilon,\ J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Corollaire 1.3.5 *[21] Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction J est bornée inférieurement, alors il existe une suite $\{u_n\} \subset X$ telle que :*

1. *$J(u_n) = c + O(1)$.*
2. *$J'(u_n) \to 0$ dans H^{-1}.*

Si de plus $\{u_n\}$ vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c. Alors J atteint son minimum c.

Principe du maximum

L'une des proprietes de la solution des EDP de type elliptique est le principe du maximum.Ce principe assure que la solution d'une équation sur un domaine atteint son maximum sur sa frontière

Théorème 1.3.8 ***(Principe du maximum fort)****[32]*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, un vecteur $b \in \mathcal{C}^0\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ de composantes $b_i, i = 1, \ldots, n$ et une fonction $c \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$, et un opérateur $\mathcal{L} = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$ Toute fonction $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui satisfait

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est positive ou nulle dans $\bar{\Omega}$.

Théorème 1.3.9 ***(Principe du maximum faible)****[32] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$*
et telle qu 'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et une fonction $c \in L^\infty(\Omega)$ telle que $c \geq 0$ p.p. Toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui satisfait

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu \geq 0 \\ u_- \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est positive où nulle p.p dans Ω

Théoreme du col

Théorème 1.3.10 *[32] Soit V un espace de Banach et $J : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant la condition de Palais-Smale et telle que*

1. *$J(0) = 0$*
2. *$\exists R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\|_V = R$ alors $J(u) \geq a$*

3. $\exists v \in V, \|v\|_V > R$, *tel que* $J(v) < a$

Alors J *admet une valeur critique* $c \geq a$ *d'où l'existence de solution non triviale.*

Remarque 1.3.5 1. *On comprend mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du col quand on interprète géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions 1 à 3 dans le cas où* $V = \mathbb{R}^2$ *et* $J(u)$ *représente l'altitude dans* $\mathbb{R}^3$ *d'un point* u.

2. *Les conditions 1 et 2 signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins* a

3. *La condition 3 signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point* v *situé moins haut que les dites montagnes*

4. *par conséquent,on peut joindre continûment 0 à* v *en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous déclare qu'il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*

5. *le théorème du col est vrai même si* J *ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand* $V = \mathbb{R}$ *(par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand* $V = \mathbb{R}^2$*, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte*

Théorème 1.3.11 *[11]*

Supposons V *un espace de Banach réflexif avec la norme* $\|\|$*,et soit* $M \subset V$ *un sous ensemble faiblement fermé de* V *Supposons* $J : M \to \mathbb{R} \cup \infty$ *est coercive et faiblement semi continue sur* M *par rapport à* V*, i.e, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) $J(u) \to \infty$ *quand* $\|u\| \to \infty, u \in M$

(2) Pour tout $u \in M$*, toute suite* (u_n) *dans* M *telle que* $u_n \to u$ *faiblement dans* V*, on a*

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$$

Alors u *est borné inférieurement sur* M *et atteint son minimum dans* M

Multiplicateurs de Lagrange

Définition 27 *Soient* X *un espace de Banach,* $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ *et un ensemble de contraintes de la forme*

$$S := \{v \in X : F(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $v \in S$*, on a* $F'(v) \neq 0$.

Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$*, on dit que* $c \in \mathbb{R}$ *est une valeur critique de* J *sur* S *s'il existe* $v \in S$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $J(v) = c$ *et* $J'(v) = \lambda F'(v)$.

Le point v *est un point critique de* J *sur* S *et le réel* λ *est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique* c.

Lorsque X *est un espace fonctionnel et l'équation* $J'(u) = \lambda F'(u)$ *correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que* $J'(u) = \lambda F'(u)$ *est l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par le point critique* u *sur la contrainte* S

Chapitre 2

Existence de solutions pour un problème elliptique semi linéaire en dimension supérieure où égale à 4

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de quelques méthodes variationnelles utilisées en analyse non-linéaire et leurs applications pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques .

On considère le problème de Brézis-Nirenberg [6] suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\lambda)$$

Où $p = \frac{N+2}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et λ est un paramètre réel.
Les conditions aux limites de ce problème $u = 0$ sur $\partial\Omega$ s'appelle les condition de Dirichlet (homogène).
La présence de l'exposant critique de Sobolev implique que la fonctionnelle d'énergie associée au problème ne satisfait pas la condition de Palais-Smale globale car l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte. Par conséquent, les techniques variationnelles standards ne sont pas applicables. En se basant sur les travaux de Aubin, ils ont montré que la condition de Palais-Smale peut être satisfaite pour un certain niveau d'énergie en faisant intervenir la meilleure constante de Sobolev d'où la notion de Palais-Smale locale.
On va s'intéresser aux solutions faibles non triviales. $u \in H_0^1(\Omega)$ afin de résoudre ce problème on va utiliser le theorème du col dans le cas sous critique et un processus de minimisation et le theorème des multiplicateurs de Lagrange dans le cas critique

Remarque 2.1.1 *:*

1. *Une fonction u est dite solution faible de $(\mathcal{P}_\lambda)$ dans $H_0^1(\Omega)$ si les deux propriétés sont vérifiés*
   (a) $u \in H_0^1(\Omega)$.
   (b) $-\Delta u = u^p + \lambda u$ *est au sens des distributions.*
2. *Toute solution classique est une solution faible.*

2.2 Cas sous critique

Maintenant on va appliquer le théorème du col afin de résoudre le problème de Brézis-Nirenberg pour $\lambda = \mathbf{0}$ *et* $\lambda \neq \mathbf{0}$
Pour bien cerner les difficultés que represente le manque de compacité dans le cas d'un exposant critique,commençons par étudier le problème sous critique. On prend $N \geq 3, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est un domaine borné de classe* C^2 *et* p *est un exposant sous-critique,ie :* $0 < p < 2^* - 1$

2.2.1 Problème 1

Pour $\lambda = 0$
le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ *devient :*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

on considère la fonctionnelle d'énergie suivante

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

Le comportement de J *est différent selon la valeur de* p.

1 *Pour le premier point du théorème du col il suffit de monter que* $J(0) = 0$, *pour cela on prend* $u = 0$ *dans la fonctionnelle d'énergie.*
Et pour le ***2*** *et le* ***3*** *du théorème on applique les 2 lemmes suivants :*

Lemme 2.2.1 *Supposons que* $0 < p < 2^* - 1$, *alors pour tout* $\lambda \in (0, \lambda_1)$, *la fonctionnelle* J *vérifie les conditions géométriques suivantes :*
i) il existe $a > 0$ *et* $R > 0$ *tels que* $J(u) \geq a$ *pour* $\|u\| = R$
ii) il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $\|v\| > R$ *et* $J(v) < a$

preuve
i) *Soit* $u \in H_0^1(\Omega)/\{0\}$, *par l'inégalité de Sobolev on a*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}$$

pour certaine $C > 0$.
Donc pour $p > 0$ *on obtient*

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C}{p+1}\|u\|^{p+1}$$

Maintenant, nous considérons la fonction

$$g(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{C}{p+1}\rho^{p+1}$$

Il est facile de monter que

$$\max g(\rho) = g(R) = C\frac{p-1}{2(p+1)} \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p+1}{p-1}} > 0$$

avec

$$R=\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Donc, pour $\|u\|=R$, *on obtient*

$$J(u)\geq a$$

avec

$$a=C\frac{p-1}{2(p+1)}\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{p+1}{p-1}}$$

ii) *Soit* $u\in H_0^1(\Omega)/\{0\}$, *pour* $\alpha\in\mathbb{R}$ *on a*

$$\mathrm{J}(\alpha u)=\frac{\alpha^2}{2}\|u\|^2-\frac{\alpha^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

Quand $\alpha\to+\infty$, *on a* $J(\alpha u)\longrightarrow-\infty$. *Donc il existe* $\alpha_0>\frac{R}{\|u\|}$ *tel que* $J(\alpha_0 u)<0$ *En prenant* $v=\alpha_0 u$, *le point ii) est établi.*
Maintenant, on va montrer que J *sataisfait la condition de Palais Smale.*

Lemme 2.2.2 *Soit* $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ *une suite de Palais Smale de niveau c, alors*

$$u_n\rightharpoonup u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

pour certaine $u_1\in H_0^1(\Omega)$ *avec* $J'(u_1)=0$

preuve

Soit $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ *une suite de Palais Smale de niveau c, donc*

$$c+O_\epsilon(1)=J(u_n) \text{ et } O_\epsilon(1)=\langle J'(u_n),u_n\rangle$$

Alors

$$\begin{aligned}c+O_\epsilon(1)&=J(u_n)-\frac{1}{p+1}\langle J'(u_n),u_n\rangle\\&\geq\frac{p-1}{2(p+1)}\|u_n\|^2\end{aligned}$$

D'où (u_n *) est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$, *ce qui permet d'en déduire que :*

$$\begin{gathered}u_n\rightharpoonup u_1 \,\mathrm{dans}\, H_0^1(\Omega)\\u_n\to u_1 \text{ p.p dans } \Omega\\u_n\to u_1 \text{ dans } L^p(\Omega)\end{gathered}$$

On obtient alors

$$\langle J'(u_n),u\rangle=0 \text{ pour tout } u\in H_0^1(\Omega)$$

Par conséquent on a

$$\langle J'(u_1),u\rangle=0 \text{ pour tout } u\in H_0^1(\Omega)$$

c'est à dire $J'(u_1)=0$
Finalement ; on va montrer que (u_n) *converge fortement dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers* u_1 *qui est non nulle.*

Lemme 2.2.3 *Soit* (u_n) *une suite de Palais Smale de niveau* $c\in\mathbb{R}$ *telle que* $u_n\rightharpoonup u_1$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Alors* (u_n) *converge fortement dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers la fonction non nulle* u_1

preuve *On a*

$$c + O_\epsilon(1) = J\left(u_n\right)$$

et

$$O_\epsilon(1) = \left\langle J'\left(u_n\right), u_n\right\rangle$$

Par Lemme 2.2.2 on a

$$\begin{gathered} u_n \rightharpoonup u_1 \ \text{dans}\ H_0^1(\Omega) \\ u_n \to u_1 \ p.p\ \text{dans}\ \Omega \\ u_n \to u_1 \ \text{dans}\ L^p(\Omega) \end{gathered}$$

Posons

$$w_n = u_n - u_1$$

Alors

$$\begin{gathered} w_n \rightharpoonup 0 \ \text{dans}\ H_0^1(\Omega) \\ w_n \to 0 \ p.p\ \text{dans}\ \Omega \\ w_n \to 0 \ \text{dans}\ L^p(\Omega) \end{gathered}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_n^2 dx &= \int_\Omega \left(u_n - u_1\right)^2 dx \\ &= \int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega u_1^2 dx - 2\int_\Omega u_n \cdot u_1 dx \\ &= \int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega u_1^2 dx + O_\epsilon(1) \end{aligned}$$

Ensuite, par le lemme de Brezis-Lieb on a

$$\int_\Omega \left|u_n\right|^p dx = \int_\Omega \left|w_n\right|^p dx + \int_\Omega \left|u_1\right|^p dx + O_\epsilon(1)$$

D'autre part, comme $u_n \rightharpoonup u_1$ *dans* $H_0^1(\Omega)$, *alors*

$$\begin{aligned} \left\|w_n\right\|^2 &= \int_\Omega \left|\nabla w_n\right|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left|\nabla\left(u_n - u_1\right)\right|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u_1\right|^2 dx + 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_1 dx \\ &= \left\|u_n\right\|^2 + \left\|u_1\right\|^2 + O_\epsilon(1) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} O_\epsilon(1) &= \left\langle J'\left(u_n\right), u_n\right\rangle \\ &= \left\langle J'\left(u_1\right), u_1\right\rangle + \left\|w_n\right\|^2 + \int_\Omega w_n^2 dx + \int_\Omega \left|w_n\right|^p dx \end{aligned}$$

On a par Lemme 2.2.2 $\left\langle J'\left(u_1\right), u_1\right\rangle = 0$, *et comme* $0 < p < 2^* - 1$ *alors*

$$\int_\Omega w_n^2 dx \to 0$$

et

$$\int_\Omega \left|w_n\right|^p dx \to 0$$

Par conséquent

$$\left\|w_n\right\|^2 = O_\epsilon(1)$$

ce qui donne

$$u_n \to u_1 \ \text{dans}\ H_0^1(\Omega)$$

Conclusion *Par les lemmes 2.2.2 et 2.2.3 J satisfait les hypothèses du théorème du col et les solutions de $(\mathcal{P})$ sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie donc*

On obtient un point critique u_1 dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$J'(u_1) = 0$$
$$J(u_1) = c$$

avec

$$\Gamma := \left\{\phi \in \mathrm{C}\left([0,1], \mathrm{H}_0^1\right), \phi(0) = 0, \phi(1) = v\right\}$$

Et on définit la valeur min-max

$$c := \inf_{\phi\in\Gamma} \max_{\alpha\in[0,1]} J(\phi(\alpha)) \geq a > 0$$

Remarque 2.2.1 *Pour Montrer que*

$$c > \max\{\mathrm{J}(0), \mathrm{J}(v)\} \tag{2.1}$$

En utilisant

$$\mathrm{J}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mathrm{C}}{p+1}\|u\|_{p+1}$$

pour $\|u\|$ suffisamment petit on a $\mathrm{J}(u) \geqslant \frac{1}{4}\|u\|^2$.
En particulier, il existe un $\omega > 0$ tel que $\omega < \|v\|$ et $\mathrm{J}(u) \geqslant \frac{1}{4}\omega^2$ si $\|u\| = \omega$. Comme chaque chemin de Γ doit traverser la sphère $\|\cdot\| = \omega$, cela prouve (2.1)

Comme J et J' sont continues, alors u_1 est un point critique de J au niveau du col c. Puisque $c > 0 = J(0)$,et u_1 est non trivial.

2.2.2 Problème 2

Pour $\lambda \neq 0$
Soit le problème de Brézis Nirenberg suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \textit{dans } \Omega \\ u > 0 & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

En multipliant -$\Delta u = u^p + \lambda u$ par φ et en intégrant par partie on trouve sa solution faible qui s'écrit sous la forme

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega u^p \varphi + \int_\Omega \lambda \; u \quad \varphi \; dx, \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

Ensuite on applique le théorème du col pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ pour $0 < p < 2^* - 1$

On considère dans cet exemple la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2$$

Ainsi que sa différentielle qui devient :

$$J'(v_0)\,w = 2\int_\Omega \nabla v_0\cdot\nabla w - \frac{4}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} - 2\lambda\int_\Omega v_0 w$$

Et d'une manière similaire on vérifie les conditions précédentes

On suppose à présent qu'on a une solution μ du problème ($\mathcal{P}_\lambda$). Soit $\Phi_1 > 0$ la fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 (voir théorème des valeurs propres du laplacien

On a $\lambda_1\Phi_1 = -\Delta\Phi_1$ *c'est à dire*

$$\lambda_1\int_\Omega \Phi_1 v = \int_\Omega \nabla\Phi_1\cdot\nabla v \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

En choisissant $v = u$ la solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$

$$\begin{aligned}\lambda_1\int_\Omega \Phi_1 u &= \int_\Omega \Phi_1 u^p + \lambda\int_\Omega \Phi_1 u\\ &> \lambda\int_\Omega \Phi_1 u \qquad \textit{car } u>0 \qquad \textit{et } \Phi_1>0\end{aligned}$$

Et donc $\lambda < \lambda_1$ et pour $p > 0$ on aura

$$\begin{aligned}J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{C}{p+1}\|u\|^{p+1}\\ &\geq \frac{\lambda_1-\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{C}{p+1}\|u\|^{p+1}\end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 *:*

1. *pour la caractérisation de λ_1 on a*

$$\int_\Omega u^2dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2dx$$

2. *Pour $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ une suite de Palais Smale au niveau c, on aura*

$$c + O_n(1) = J(u_n) \;\; \textit{et } O_n(1) = \langle J'(u_n), u_n\rangle$$

Alors

$$\begin{aligned}c + O_n(1) &= J(u_n) - \frac{1}{p+1}\langle J'(u_n), u_n\rangle\\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_n\|^2 - \lambda\frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega u_n^2dx\\ &\geq \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{p-1}{2(p+1)}\|u_n\|^2\\ &\geq \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)\|u_n\|^2\end{aligned}$$

2.3 Cas critique

Pour $p = 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$. *on perd la compacité donc on n'a pas la suite de Palais Smale pour cela On définit* Ω*, un domaine de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* C^2*. On distingue deux cas :* $N = 3$ *et* $N \geq 4$ *qui sont différents et ne mènent pas aux mêmes résultats*
Pour cela on va utiliser la définition du multiplicateus de lagrange pour résoudre notre problème

soit le problème de Brezis Nirenberg suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

Théorème 2.3.1 *Quand* $N \geq 4$ *et que* Ω *est borné on a ,*
si $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$ *, le problème (* $\mathcal{P}_\lambda$ *) possède une solution* $u \in H_0^1(\Omega)$

Preuve 2 *Soit* Ω *un domaine de classe* C^2*. La preuve de l'existence de solutions au problème* ($\mathcal{P}_\lambda$) *s'articule en deux étapes que nous formulerons sous forme de lemmes :*

Proposition 5 *[31] sous les hypothèses et notations du multiplicateurs de lagrange , on suppose que* $u_0 \in S$ *est tel que* $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$*. Alors il existe* $\lambda \in S$ *tel que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$$

Lemme 2.3.1 *On a*

$$S_\lambda < S \quad \forall \lambda > 0$$

Remarque 2.3.1 *Pour* Ω *un domaine quelconque de* $\mathbb{R}^N$*, on pose*

$$S_\lambda = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}$$
$$\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$$

Ainsi,

$$S_0 = S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}$$
$$\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$$

correspond à la meilleure constante pour l'immersion de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$

Remarque 2.3.2 *La situation est fort différente lorsque* Ω *n'est pas étoilé. Par exemple, lorsque* Ω *est un anneau,*

Preuve 3 *lemme 2.3.1 Supposons sans perte de généralité que* $0 \in \Omega$*. Soit* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *une fonction positive telle que* $\phi(x) \equiv 1$ *dans un voisinage de 0. Nous allons estimer le quotient*

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}$$

avec

$$u(x) = u_\epsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

où $\epsilon > 0$ tend vers 0, pour obtenir

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = \begin{cases} S + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) - \lambda\frac{T_3}{T_2}\epsilon & \text{si } N \geq 5 \\ S + O_\epsilon(\epsilon) - \lambda\frac{\omega}{2T_2}\epsilon|\ln(\epsilon)| & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

où ω, T_2 et T_3 sont des constantes positives indépendantes de ϵ
1. On calcule

$$\nabla u_\epsilon(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}| - \frac{(N-2)\phi(x)x}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 = \int_\Omega \frac{|\nabla\phi(x)|^2 \mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} + (N-2)^2\int_\Omega \frac{(\phi(x))^2|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N}$$

$$-2(N-2)\int_\Omega \frac{|\nabla\phi(x)|\phi(x)|x|\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-1}}$$

Près de $0, \phi \equiv 1$ et donc $\nabla\phi \equiv 0$. On aura alors

$$\begin{gathered}\lim_{\epsilon\to0}\int_\Omega \frac{|\nabla\phi(x)|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} \leq D \\ \lim_{\epsilon\to0}\int_\Omega \frac{|\nabla\phi(x)|\phi(x)|x|\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-1}} \leq D'\end{gathered} \tag{2.2}$$

pour des constantes positives D et D' indépendantes de ϵ. On obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 =& (N-2)^2\int_\Omega \frac{(\phi(x))^2|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1) \\ =& (N-2)^2\int_\Omega \frac{|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} \\ &+ (N-2)^2\int_\Omega \frac{\left((\phi(x))^2-1\right)|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1) \\ &\textit{avec} \int_\Omega \frac{\left((\phi(x))^2-1\right)|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1) = O_\epsilon(1)\,\mathrm{car}\,\phi^2-1 \equiv 0 \textit{ près de } 0 \\ =& (N-2)^2\int_\Omega \frac{|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1) \\ =& (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N}\end{aligned}$$

$$-(N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \frac{|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1) \quad \textit{avec} \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \frac{|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} = O_\epsilon(1)\,\mathrm{car}\,0 \notin \mathbb{R}^N\backslash\Omega$$

$$= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1)$$

$$= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon|y|^2\epsilon^{\frac{N}{2}}\mathrm{d}y}{\epsilon^N(1+|y|^2)^N} + O_\epsilon(1) \qquad \textit{en posant } y = \frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$= \frac{T_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(1)(2.3)$$

où $T_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2\mathrm{d}y}{(1+|y|^2)^N} = \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$

2. On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\epsilon|^{p+1} &= \int_\Omega \frac{(\phi(x))^{p+1}\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} \quad \text{car } \frac{(N-2)}{2}(p+1)=N\\
&= \underbrace{\int_\Omega \frac{((\phi(x))^{p+1}-1)}{(\epsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x}_{O_\epsilon(1)\,\text{car}\,\phi^{p+1}-1\equiv 0 \textit{ près de } 0} + \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N}\\
&= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1) \textit{ avec} \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} = O_\varepsilon(1)
\end{aligned}$$

car $0 \notin \mathbb{R}^N\backslash\Omega$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon^{\frac{N}{2}}\mathrm{d}y}{\epsilon^N(1+|y|^2)^N} + O_\epsilon(1) \textit{ en posant } y=\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}
\end{aligned}$$

on obtient

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^{p+1} = \frac{T_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\epsilon(1) \tag{2.4}$$

où

$$T_2' = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|^2)^N} = \|U\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}$$

on a aussi

$$\left(\int_\Omega |u_\epsilon|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}} = \frac{T_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(\epsilon) \tag{2.5}$$

en posant $T_2 = (T_2')^{\frac{2}{p+1}}$ *et en calculant (par la formule des accroissements finis)*

$$\left(\frac{T_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\epsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}} = \left(\frac{T_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}}\right)^{\frac{2}{p+1}} + O_\epsilon(1)\,(b_\epsilon)^{\frac{2}{p+1}-1}$$

où

$$\begin{aligned}
|b_\epsilon|^{\frac{2}{p+1}-1} &\le \left(\frac{T_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\epsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}-1}\\
&\le \left(O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-N}{2}}\right)\right)^{\frac{2}{p+1}-1}\\
&= O_\epsilon(\epsilon)
\end{aligned}$$

Donc on a bien (2.5)
3. On a

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^2 = \int_\Omega \frac{((\phi(x))^2-1)\,\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} + \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}$$
$$\textit{avec} \int_\Omega \frac{((\phi(x))^2-1)\,\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} = O_\epsilon(1)\,\text{car}\,\phi^2-1\equiv 0 \textit{ près de } 0$$

$$= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} + O_\epsilon(1) \tag{2.6}$$

On doit ici traiter différemment les cas $N = 4$ *et* $N \geq 5$. *En effet, on remarque que l'intégrale* $\int_\Omega \frac{r^{N-1}}{r^{2(N-2)}}$ *existe ssi* $2(N-2) - (N-1) > 1$ *c'est à dire ssi* $N > 4$.
Quand $N \geq 5$, *(2.6) devient*

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} + O_\epsilon(1)$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} = O_\epsilon(1) \text{ car } 0 \notin \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

En posant $y = \frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\epsilon|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon^{\frac{N}{2}} \mathrm{d}y}{\epsilon^{N-2} (1 + |y|^2)^{N-2}} + O_\epsilon(1) \\ &= \frac{T_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\epsilon(1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$T_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}y}{(1 + |y|^2)^{N-2}}$$

Quand $N = 4$, (2.6) *se réécrit*

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^2 = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^2} + O_\epsilon(1)$$

Puisque $0 \in \Omega$ *et que* Ω *est un ouvert borné, il existe deux constantes* $0 < R_1 < R_2$ *telles que* $B(0, R_1) \subset \Omega \subset B(0, R_2)$. *Il vient que*

$$\int_{B(0,R_1)} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^2} \leq \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^2} \leq \int_{B(0,R_2)} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon + |x|^2)^2} &= \omega \int_0^R \frac{r^3 \mathrm{d}r}{(\epsilon + r^2)^2} \\ &= \omega \left(\frac{1}{4} \int_0^R \frac{4r^3 + 4r\epsilon}{r^4 + 2r^2\epsilon + \epsilon^2} \mathrm{d}r - \int_0^R \frac{r\epsilon}{(\epsilon + r^2)^2} \mathrm{d}r \right) \\ &= \omega \left(\frac{1}{4} \left[\ln\left(r^4 + 2r^2\epsilon + \epsilon^2\right) \right]_0^R + \left[\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\epsilon + r^2} \right]_0^R \right) \\ &= \omega \left(\frac{1}{4} \ln\left(R^4 + 2R^2\epsilon + \epsilon^2\right)_{O_\epsilon(1)} - \frac{1}{4} \ln\left(\epsilon^2\right) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\epsilon + R^2}}_{O_\epsilon(1)} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{O_\epsilon(1)} \right) \\ &= \frac{\omega}{2} |\ln(\epsilon)| + O_\epsilon(1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

où ω est l'aire de la sphère S^3.
Et par conséquent

$$\int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\epsilon+|x|^2)^2} = \frac{\omega}{2}|\ln(\epsilon)| + O_\epsilon(1)$$

Pour cela , nous avons montré qu'il existe des constantes T_1, T_2, T_3 et ω(qui ne dépendent que de$N$) telles que

$$\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{T_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(1)$$

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = \frac{T_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(\epsilon)$$

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} \frac{T_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\epsilon(1) & si\ N \geq 5 \\ \\ \frac{\omega}{2}|\ln(\epsilon)| + O_\epsilon(1) & si\ N = 4 \end{cases}$$

Maintenant on peut écrire

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = \frac{\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u_\epsilon\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{T_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(1) - \lambda\left(\frac{T_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\epsilon(1)\right)}{\frac{T_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(\epsilon)} & si\ N \geq 5 \\ \\ \frac{\frac{T_1}{\epsilon} + O_\epsilon(1) - \lambda\left(\frac{\omega}{2}|\ln(\epsilon)| + O_\epsilon(1)\right)}{\frac{T_2}{\epsilon} + O_\epsilon(\epsilon)} & si\ N = 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{T_1 - \lambda T_3 \epsilon + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)}{T_2 + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{N}{2}}\right)} & si\ N \geq 5 \\ \\ \frac{T_1 - \lambda\frac{\omega}{2}|\ln(\epsilon)|\epsilon + O_\epsilon(\epsilon)}{T_2 + O_\epsilon(\epsilon^2)} & si\ N = 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) - \lambda\frac{T_3}{T_2}\epsilon & si\ N \geq 5 \\ \\ S + O_\epsilon(\epsilon) - \lambda\frac{\omega}{2T_2}\epsilon|\ln(\epsilon)| & si\ N = 4 \end{cases}$$

puisque $\frac{T_1}{T_2} = S$ et en utilisant $\frac{1}{T_2+x} = \frac{1}{T_2} + x(\ldots)$ Il est bien clair que $Q_\lambda(u_\epsilon) < S$ si ϵ est suffisamment petit, ce qui montre bien que $S_\lambda < S$.
Maintenant on va montrer que L'infimum de S_λ est atteint en suivant le lemme suivant

Lemme 2.3.2 *Si $S_\lambda < S$ et $\lambda < \lambda_1(\Omega)$, l'infimum S_λ est atteint.*

Preuve 4 *Soit $u_j \in H^1_0(\Omega)$ une suite minimisante pour S_λ, c'est à dire*

$$\|u_j\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1 \tag{2.9}$$

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_{L^2(\Omega)} = S_\lambda \tag{2.10}$$

On remarque grâce au théorème de Poincaré que la suite u_j *est bornée* dans $H_0^1(\Omega)$. *Par conséquent, en vertu du théorème (Eberlein - Shmulyan) il existe une sous suite (renommée* u_j *) et un* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que*

$$u_j \rightharpoonup u \quad dans\ H_0^1(\Omega) \tag{2.11}$$

$$u_j \to u \quad dans\ L^2(\Omega) \tag{2.12}$$

$$u_j \to u \text{ presque partout dans } \Omega \tag{2.13}$$

On pose $v_j = u_j - u$, *de telle sorte que*

$$v_j \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

$$v_j \to 0 \text{ presque partout dans } \Omega$$

L'équation (2.9) *et la définition de l'infimum* S *implique*

$$S \leq \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.14}$$

On fait une soustraction de (2.10) *à la limite de* (2.14) *:*

$$S - S_\lambda \leq \lambda \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

par(2.12). *Par hypothèse,* $S - S_\lambda > 0$, *et nous pouvons donc conclure que* $u \neq 0$ *Ensuite, d'une part on a* $v_j \rightharpoonup 0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$, *donc par le lemme 1.2.3*

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

On pose l'équation ci dessus dans (2.10) *:*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = S_\lambda \tag{2.15}$$

D'autre part, v_j *est borné dans* $L^{p+1}(\Omega)$ (car u_j *l'est) et* $v_j \to 0$ *presque partout dans* Ω*; on peut donc appliquer le lemme de Brézis-Lieb*

$$\lim_{j\to\infty} \|u + v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} = \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}$$

Or $u + v_j = u_j$ *et* $\|u_j\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$, *donc*

$$1 = \underbrace{\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}}_{\in[0,1]} + \underbrace{\lim_{j\to\infty} \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}}_{\in[0,1]}$$

D'où, puisque $2 < p + 1$

$$\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$$

Et

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$$

Ainsi

$$1 \leq \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$$

On utilise alors l'inégalité de Sobolev $\|v_j\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \frac{1}{S} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$ *et on obtient*

$$1 \leq \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \frac{1}{S} \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.16}$$

On veut montrer que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq S_\lambda \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \tag{2.17}$$

ce qui conclura la preuve du lemme puisque $u \neq 0$ *Pour cela, on distingue deux cas : soit* $S_\lambda > 0$. *On déduit alors de (2.16)*$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \frac{S_\lambda}{S} \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$ *Or* $S_\lambda < S$, *donc*

$$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$$

En combinant ceci avec (2.15), *on a*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq S_\lambda \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$$

qui donne bien (2.17) *soit* $S_\lambda \leq 0$. *On a alors*

$$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$$

puisque $\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \leq 1$ *par* (2.16). *On injecte ceci dans* (2.15)

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq S_\lambda \|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$$

Et on obtient (2.17)
Donc on a trouvé un $u \in H^1_0(\Omega)$ *qui atteint l'infimum de* S_λ.*Pour cela on peut supposer un* $u \geq 0$ *au risque de remplacer* u *par* $|u|$.
en appliquant le théorème des multiplicateurs de Lagrange il trouve qu'il existe un $\beta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$-\Delta u - \lambda u = \beta u^p$$

En fait on a $\beta = S_\lambda > 0$ *puisque* $\lambda < \lambda_1(\Omega)$. *alors on a une solution de* $-\Delta u = \lambda u + u^p$. *Celle-ci est* $C^\infty(\Omega)$ *par le théorème de Brézis Kato et en particulier* $C^2(\Omega)$. *Le principe du maximum fort garantit alors que* $u > 0$ *sur* Ω

Chapitre 3

Existence de solutions pour un problème elliptique semi linéaire en dimension 3

3.1 Introduction

La situation est plus délicate en dimension 3 et elle est restée ouverte depuis de nombreuses années.Alors Brezis et Nirenberg ont consacré leurs études pour résoudre le probleme elliptique posé précédemment en cette dimension

On fixe Ω un domaine lisse et borné de $\mathbb{R}^3$,on prend λ négatif, et on considère l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^5 & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$

On suppose également que l'opérateur $-\Delta + \lambda$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, l'espace des fonctions de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dont le gradient est également dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, dont la trace sur le bord est nulle et coercif.
Cette hypothèse est nécessaire à l'existence de solutions au problème $(\mathcal{E}_\lambda)$. Une technique naturelle pour trouver des solutions de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est de chercher des solutions minimisantes, c'est-à-dire des solutions du problème de minimisation suivant

$$S_\lambda = \inf_{u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^{2N/(N-2)} \mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N}}$$

En effet, si S_λ est atteint par u_λ, alors, quitte à changer u_λ en $|u_\lambda|$ et après une normalisation adéquate, u_λ est une solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$. Il est désormais bien connu qu'on a toujours

$$S_\lambda \leqslant S_n^{-1}$$

Où S_n est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2N/(N-2)} \mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N} \leqslant S_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

La valeur exacte de S_n *est également bien connue. et qui vaut*

$$S_n = \frac{4}{n(n-2)}\omega_n^{-2/n}$$

où $\omega_n = \frac{4}{3}\pi.r^3$ désigne le volume de la sphère unité
La question de trouver des solutions minimisantes à $(\mathcal{E}_\lambda)$ a été géré par Brezis et Nirenberg

Ils montrent notamment que la situation est plutôt de dimensions différentes $N \geq 4$ et en dimension 3.
En dimensions $N \geq 4$, Brezis et Nirenberg ont prouvé que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) il existe $x \in \Omega$ tel que $\lambda(x) < 0$
(2) $S_\lambda < S_n^{-1}$
(3) il existe une solution minimisante au problème $(\mathcal{E}_\lambda)$.

Remarque 3.1.1 *1. L'équivalence des propositions (1) et (2) est une conséquence de l'inégalité euclidienne optimale sur la espace entier et calcul des fonctions test*

2. Le fait que la deuxième proposition implique la troisième peut désormais considérée comme une conséquence du principe concentration-compacité des Lions

3. L'inverse est dû au fait que toutes les fonctions extrêmes pour l'inégalité euclidienne de Sobolev optimale dans tout l'espace sont connus et ne sont pas pris en charge de manière compacte.

4. Il est bon de mentionner que Brézis et Nirenberg ont aussi prouvé dans leurs papier qu'étant donné un domaine borné quelconque $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, il existe un réel $\lambda_*(\Omega) \in (0, \lambda_1(\Omega))$ tel que le problème $(\mathcal{E}_\lambda)$ possède une solution si et seulement si $\lambda \in (\lambda_*(\Omega), \lambda_1(\Omega))$. On retrouve évidemment $\lambda_*(\Omega) = \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega)$ dans le cas où Ω est une boule

Définition 28 ***Modelisation asymptotique****[38]*
on parle de modelisation asymptoti- que ; ce qui veut dire que l'on recherchera les équations modeles qui permettent de calculer les divers termes $\mathcal{U}_k$ de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \alpha\mathcal{U}_1 + O(\alpha^2)$ Ensuite, il faudra construire la solution approchée $(\mathcal{U}_0 + \alpha\mathcal{U}_1 + \cdots)$ qui, à un certain ordre en α, sera uniformément proche de la solution exacte $\mathcal{U}$.

Définition 29 ***Invariance d'échelle dans la théorie classique des champs****[30]*
La théorie classique des champs est décrite de manière générique par un champ, ou un ensemble de champs, φ, qui dépendent des coordonnées, x. Les configurations de champ valides sont ensuite déterminées en résolvant des équations différentielles pour φ, et ces équations sont appelées équations de champ.
Pour qu'une théorie soit invariante à l'échelle, ses équations de champ doivent être invariantes sous une remise à l'échelle des coordonnées, combinée à une remise à l'échelle spécifiée des champs, $x \to \lambda x$ et $\varphi \to \lambda^{-\Delta}\varphi$
Le paramètre Δ est appelé dimension d'échelle du champ et sa valeur dépend de la théorie considérée.

Définition 30 *L'invariance d'échelle sera généralement maintenue à condition qu'aucune échelle de longueur fixe n'apparaisse dans la théorie. À l'inverse, la présence d'une échelle de longueur fixe indique qu'une théorie n'est pas invariante à l'échelle. Une conséquence de l'invariance d'échelle donne une solution d'une équation de champ invariant*

d'échelle, nous pouvons trouver automatiquement d'autres solutions en remettant à l'échelle les coordonnées et les champs de manière appropriée. En termes techniques, étant donné une solution, $\varphi(x)$, on a toujours d'autres solutions de la forme
$\lambda^{\Delta}\varphi(\lambda x)$

Définition 31 ***Invariance d'échelle des configurations de champ***
Pour qu'une configuration de champ particulière, $\varphi(x)$, soit invariante à l'échelle, nous avons besoin que

$$\varphi(x) = \lambda^{-\Delta}\varphi(\lambda x)$$

où Δ est, à nouveau, la dimension de mise à I' échelle du champ. Nous notons que cette condition est assez restrictive. En général, même les solutions d'équations de champ invariantes d'échelle ne seront pas invariantes d'échelle, et dans de tels cas, on dit que la symétrie est spontanément brisée.

Théorème 3.1.1 *[25] Soit l'opérateur L satisfait les conditions*

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \qquad (8.5)$$

et

$$\sum \left|a^{ij}(x)\right|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2}\sum\left(\left|b^i(x)\right|^2 + \left|c^i(x)\right|^2\right) + \lambda^{-1}|d(x)| \leqslant v^2 \qquad (8.6)$$

On suppose que $f^i \in L^q(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n, g \in L^{q/2}(\Omega)$ pour certain $q > n$.
puis si $u \in W^{1.2}(\Omega)$ satisfait l'équation $Lu = g + D_i f^i$ dans Ω
Nous avons pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega \quad \|u\|_{C^\alpha(\bar{Q}')} \leqslant C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + k\right)$ où $C = C\left(n, \Lambda/\lambda, v, q, d'\right), d' =$ $\operatorname{dist}\left(\Omega', \partial\Omega\right), \alpha = \alpha\left(n, \Lambda/\lambda, vd'\right) > 0$ et $k = \lambda^{-1}\left(\|f\|_q + \|g\|_{q/2}\right)$

Théorème 3.1.2 *[25] soit l'opérateur L qui satisfait les conditions (8.5), (8.6), soit $f' \in L^q(\Omega)$ $i = 1, \ldots, n, g \in L^{q/2}(\Omega)$ pour $q > n$, et on suppose que Ω satisfait la condition de cône extérieur uniforme sur une partie limite T. puis si $u \in W^{1.2}(\Omega)$ satisfait l'équation $Lu = g + D_i f^i$ dans Ω et il existe une constante $K, \alpha_0 > 0$ telle que*

$$\operatorname{osc}_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} u \leqslant KR^{\alpha_0} \quad \forall x_0 \in T, R > 0$$

il s'ensuit que $u \in C^x(\Omega \cup T)$ pour $x > 0$ et, pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega \cup T$
$\|u\|_{C^\alpha(\Omega')} \leqslant C(\sup|u|+K+k)\ \Omega$ *ou* $\alpha = \alpha\left(n, \Lambda/\lambda, vd', V, q, \alpha_0\right), C = C\left(n, A/\lambda, v, V, q, \alpha_0, d'\right)$

$$d' = \operatorname{dist}\left(\Omega', \hat{c}\Omega - T\right) \text{ and } k = \lambda^{-1}\left(\|\mathbf{f}\|_q + \|g\|_{q/2}\right)$$

si $\Omega' = \Omega, d'$ doit être remplacé par Ω

3.2 Existence de solution pour dans une boule

Pour Ω une boule et λ une constante le résultat d'existence de solution minimisante pour le problème est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Quand $N = 3$, on se restreint au cas où Ω est une boule. Dans ce cas, le problème $(\mathcal{E}_\lambda)$ possède une solution si et seulement si $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1(\Omega)}{4}, \lambda_1(\Omega)\right)$*

Preuve 5 *Les arguments sont sensiblement les mêmes que ceux de la preuve du théorème 2.3.1. Pour simplifier, on pose ici*

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad |x| < 1\right\}$$

3.2.1 Démonstration de la condition nécessaire

la démonstration de la condition nécessaire comme dans le cas des grandes dimensions, nous allons estimer le quotient

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^6(\Omega)}}$$

avec

$$u_\epsilon(x) = u_\epsilon(r) = \frac{\phi(r)}{(\epsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

où $\epsilon > 0, r = |x|$ *et* $\phi \in C_c^\infty([0,1])$ *est une fonction positive telle que*

$$\phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \phi(1) = 0 \tag{3.1}$$

Nous allons ainsi obtenir

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = S + \left(\frac{1}{4}\pi^2 - \lambda\right) K\epsilon^{\frac{1}{2}} + O_\epsilon(\epsilon) \qquad (3.42) \tag{3.2}$$

1. *On a*

$$\begin{aligned} u'_\epsilon(r) &= \tfrac{\phi'(r)}{(\epsilon+r^2)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{r\phi(r)}{(\epsilon+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &= \omega \textstyle\int_0^1 \left| \tfrac{\phi'(r)}{(\epsilon+r^2)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{r\phi(r)}{(\epsilon+r^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^2 r^2 \mathrm{d}r \\ &= \omega \textstyle\int_0^1 \left(\tfrac{(\phi'(r))^2}{(\epsilon+r^2)} + \tfrac{r^2(\phi(r))^2}{(\epsilon+r^2)^3} - \tfrac{2r\phi(r)\phi'(r)}{(\epsilon+r^2)^2} \right) r^2 \mathrm{d}r \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on voit

$$-2\int_0^1 \frac{r^3\phi(r)\phi'(r)}{(\epsilon+r^2)^2}\mathrm{d}r = \int_0^1 (\phi(r))^2 \left(\frac{3r^2}{(\epsilon+r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\epsilon+r^2)^3}\right)\mathrm{d}r$$

$$-\underbrace{\left[\frac{(\phi(r))^2 r^3}{(\epsilon+r^2)^2}\right]_0^1}_{=0 \,\mathrm{car}\, \phi(1)=0}$$

Donc

$$\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \omega\int_0^1 \frac{(\phi'(r))^2 r^2}{(\epsilon+r^2)}\mathrm{d}r + \omega\int_0^1 (\phi(r))^2 \left(\frac{3r^2}{(\epsilon+r^2)^2} - \frac{3r^4}{(\epsilon+r^2)^3}\right)\mathrm{d}r$$

$$= \omega\int_0^1 \frac{(\phi'(r))^2 r^2}{(\epsilon+r^2)}\mathrm{d}r + 3\omega\epsilon\int_0^1 \frac{(\phi(r))^2 r^2}{(\epsilon+r^2)^3}\mathrm{d}r \tag{3.3}$$

Premièrement

$$\int_0^1 \frac{(\phi'(r))^2 r^2}{(\epsilon+r^2)}\mathrm{d}r + \int_0^1 (\phi'(r))^2\mathrm{d}r - \int_0^1 (\phi'(r))^2\mathrm{d}r = \int_0^1 (\phi'(r))^2\mathrm{d}r + \int_0^1 (\phi'(r))^2\left(\frac{r^2}{(\epsilon+r^2)} - 1\right)\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 (\phi'(r))^2\mathrm{d}r - \epsilon\int_0^1 \frac{(\phi'(r))^2}{(\epsilon+r^2)}\mathrm{d}r \tag{3.4}$$

Appliquons à ϕ' la formule des accroissements finis :

$$\exists z \in (0,r) \quad \textit{tel que} \quad \phi'(r)-\phi'(0)=\phi''(z)r$$

donc puisque $\phi \in C_c^\infty$, il existe un $A>0$ tel que

$$\phi'(r) \le Ar$$

D'où le second terme de (3.4) :

$$\epsilon \int_0^1 \frac{\left(\phi'(r)\right)^2}{(\epsilon+r^2)}\mathrm{d}r \le A\epsilon \underbrace{\int_0^1 \frac{r^2}{(\epsilon+r^2)}}_{O_\epsilon(1)}\mathrm{d}r = O_\epsilon(\epsilon)$$

Par conséquent, (3.4) devient

$$\int_0^1 \frac{\left(\phi'(r)\right)^2 r^2}{(\epsilon+r^2)}\mathrm{d}r = \int_0^1 \left(\phi'(r)\right)^2 \mathrm{d}r + O_\epsilon(\epsilon) \tag{3.5}$$

Deuxièmement

$$\int_0^1 \frac{(\phi(r))^2 r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r + \int_0^1 \frac{\left((\phi(r))^2-1\right)r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r \tag{3.6}$$

En utilisant la formule de Taylor pour ϕ^2 $\exists z \in (0,r)$ tel que
$(\phi(r))^2 = (\phi(0))^2 + r2\phi(0)\phi'(0) + r^2\left(\left(\phi'(z)\right)^2 + \phi(z)\phi''(z)\right)$
C'est à dire qu'il existe une constante $B>0$ telle que

$$(\phi(r))^2 - 1 \le Br^2$$

Puisque $\phi(0)=1$ et $\phi'(0)=0$. On observe alors que le deuxième terme de (3.6) est

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\left((\phi(r))^2-1\right)r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r &\le B\int_0^1 \frac{r^4}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r \\
&= B\epsilon^{\frac{-1}{2}} \int_0^{\epsilon^{\frac{-1}{2}}} \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}\mathrm{d}s \quad \textit{en posant } s=\frac{r}{\sqrt{\epsilon}} \\
&= B\epsilon^{\frac{-1}{2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}}_{O_\epsilon(1)}\mathrm{d}s - B\epsilon^{\frac{-1}{2}} \int_{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}^\infty \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}\mathrm{d}s \\
&\le O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right) - B\epsilon^{\frac{-1}{2}} \int_{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}^\infty \frac{s^4}{s^6}\mathrm{d}s \\
&= O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right) + B\,\underbrace{\epsilon^{\frac{-1}{2}}\left[\frac{1}{s}\right]_{\epsilon^{-1}}^{\infty}} \\
&= O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Et (3.6) se réécrit

$$\int_0^1 \frac{(\phi(r))^2 r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right) \tag{3.8}$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{r^2}{\left(\epsilon+r^2\right)^3}\mathrm{d}r = \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_0^{\epsilon^{\frac{-1}{2}}} \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\mathrm{d}s \quad \textit{en posant } s=\frac{r}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$= \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s - \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s \tag{3.9}$$

Or

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s &\leq \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}^\infty \frac{s^2}{s^6} \mathrm{d}s \\ &= \frac{\epsilon^{\frac{-3}{2}}}{3} \left[\frac{1}{s^3}\right]_{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}^\infty \\ &= O_\epsilon(1) \end{aligned}$$

(3.9) *devient*

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^3} \mathrm{d}r = \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s + O_\epsilon(1) \tag{3.10}$$

En rassemblant (3.3), (3.5), (3.8), (3.9) *et* (3.10) *on obtient*

$$\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{T_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega \int_0^1 (\phi'(r))^2 \, \mathrm{d}r + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.11}$$

Où

$$T_1 = 3\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s$$

Notons que $T_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 \mathrm{d}x$ *avec* $U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}$

En utilisant la décomposition en éléments simples on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s - \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s - \underbrace{\left[\frac{s}{4(1+s^2)^2}\right]_0^\infty}_{=0} - \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{4}(\underbrace{\left[\frac{S}{2(1+s^2)}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} \mathrm{d}s) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} [\arctan(s)]_0^\infty = \frac{\pi}{16} \tag{3.12}$$

D'autre part en utilisant la décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{s^4}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} \mathrm{d}s - 2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s \\ + \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{16} \tag{3.13}$$

2. Calculons

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|^6_{L^6(\Omega)} &= \omega \int_0^1 \frac{(\phi(r))^6 r^2}{(\epsilon+r^2)^3} \mathrm{d}r \\ &= \omega \int_0^1 \frac{((\phi(r))^6 - 1) r^2}{(\epsilon+r^2)^3} \mathrm{d}r + \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^3} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

On applique à nouveau la formule de Taylor, à ϕ^6 cette fois : il existe une constante $D > 0$ telle que

$$(\phi(r))^6 - 1 \leq D\ r^2$$

Et ainsi

$$\int_0^1 \frac{((\phi(r))^6 - 1)\, r^2}{(\epsilon + r^2)^3} \mathrm{d}r \leq D \int_0^1 \frac{r^4}{(\epsilon + r^2)^3} \mathrm{d}r = O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right)$$

par le même calcul qu'en (3.7).
par (3.10) *Le second terme nous donne*

$$\omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\epsilon + r^2)^3} \mathrm{d}r = \epsilon^{\frac{-3}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} \mathrm{d}s + O_\epsilon(1)$$

Ainsi

$$\|u_\epsilon\|^6_{L^6(\Omega)} = \epsilon^{\frac{-3}{2}} \omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right)$$

et, en posant

$$T_2 = \left(\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}$$

on obtient

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^6(\Omega)} = \frac{T_2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.14}$$

En effet, en utilisant la formule des accroissements finis on obtient :

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^6(\Omega)} = \frac{T_2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right)(b_\epsilon)^{\frac{-2}{3}}$$

où

$$\begin{aligned} |b_\epsilon|^{\frac{-2}{3}} &\leq \left(\epsilon^{\frac{-3}{2}} T_2^3 + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right)\right)^{\frac{-2}{3}} \\ &\leq \left(O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-3}{2}}\right)\right)^{\frac{-2}{3}} = O_\epsilon(\epsilon) \end{aligned}$$

On a donc bien (3.14) *Notons aussi que*

$$T_2 = \|U\|^2_{L^6(\Omega)}$$

en utilisant les calculs faits précédemment en (3.12) *et* (3.13)
3. *On a*

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &= \omega \int_0^1 \frac{(\phi(r))^2 r^2}{\epsilon + r^2} \mathrm{d}r \\ &= \omega \int_0^1 (\phi(r))^2 \mathrm{d}r - \omega \int_0^1 \frac{(\phi(r))^2 \epsilon}{\epsilon + r^2} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Puisque ϕ est bornée (continue sur le compact [0,1]), le deuxième terme est le suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(\phi(r))^2 \epsilon}{\epsilon + r^2} \mathrm{d}r &\leq D \int_0^1 \frac{\epsilon}{\epsilon + r^2} \mathrm{d}r \\ &= D \int_0^{\epsilon^{\frac{-1}{2}}} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\epsilon\,(1 + t^2)} \mathrm{d}t \\ &= D\epsilon^{\frac{1}{2}} [\arctan t]_0^{\epsilon^{\frac{-1}{2}}} \\ &= D\epsilon^{\frac{1}{2}} \arctan\left(\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right) = O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \omega \int_0^1 (\phi(r))^2 \mathrm{d}r + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.15}$$

En rassemblant (3.11), (3.14) *et* (3.15), *on obtient*

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\epsilon) &= \frac{\frac{T_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega \int_0^1 (\phi'(r))^2 \mathrm{d}r + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right) - \lambda\omega \int_0^1 (\phi(r))^2 \mathrm{d}r + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{T_2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)} \\
&= \frac{T_1 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\omega \int_0^1 (\phi'(r))^2 \mathrm{d}r - \lambda\epsilon^{\frac{1}{2}}\omega \int_0^1 (\phi(r))^2 \mathrm{d}r + O_\epsilon(\epsilon)}{T_2 + O_\epsilon(\epsilon)} \\
&= S + \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\omega}{T_2} \left[\int_0^1 (\phi'(r))^2 \mathrm{d}r - \lambda \int_0^1 (\phi(r))^2 \mathrm{d}r\right] + O_\epsilon(\epsilon) \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

en utilisant $\frac{T_1}{T_2} = S$ *et* $\frac{1}{T_2+x} = \frac{1}{T_2} + x(\dots)$
On choisit $\phi(r) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi r\right)$, *on calcule*

$$\int_0^1 (\phi'(r))^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 (\phi(r))^2 \mathrm{d}r \tag{3.17}$$

ce qu'on injecte dans (3.16)

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = S + \left(\frac{1}{4}\pi^2 - \lambda\right) K\epsilon^{\frac{1}{2}} + O_\epsilon(\epsilon) \tag{3.18}$$

On peut calculer qu'en dimension 3, *la première valeur propre de* $-\Delta$ *sur* $\Omega = B(0,1)$ *est* $\lambda_1(\Omega) = \pi^2$ (*de fonction propre correspondante* $\Phi_1(x) = \frac{\sin(\pi|x|)}{|x|}$). *Notre résultat suit alors directement si* ϵ *est assez petit.*

En utilisant le lemme 2.3.2 *on obtient l'existence d'une solution.*

3.2.2 Démonstration de la condition suffisante

Démonstration de la condition suffisante. On veut donc prouver que si $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega)$, *le problème* $(\mathcal{P})$ *n'a pas de solution. Par l'absurde, supposons qu'il en existe une :* u. *Par le thèorème de* ***(Gidas Nirenberg)*** *, on sait que* u *est une fonction radiale, c'est à dire* $u(x) = u(r)$, *où* $r = |x|$. *Le problème* $\mathcal{P}$ *se réécrit alors*

$$-u'' - \frac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u \quad \textit{sur} \quad [0,1] \quad \textit{et} \quad u'(0) = u(1) = 0 \tag{3.19}$$

Soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ *telle que* $\psi(0) = 0$
1. *Multiplions* (3.19) *par* $r^2\psi u^2$ *et intégrons :*

$$\underbrace{\int_0^1 \left(-u'' - \frac{2}{r}u'\right)\left(r^2\psi u^2\right) \mathrm{d}r}_{I_1} = \underbrace{\int_0^1 \left(u^5 + \lambda u\right)\left(r^2\psi u^2\right) \mathrm{d}r}_{I_2} \tag{3.20}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_0^1 (u')^2\, 2r\psi \mathrm{d}r - \int_0^1 u'u''r^2\psi \mathrm{d}r \\
&= -\int_0^1 (u')^2\, 2r\psi \mathrm{d}r - \left[\frac{(u')^2}{2}r^2\psi\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(u')^2}{2}\left(2r\psi + r^2\psi'\right)
\end{aligned}$$

par parties

$$= \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right) \mathrm{d}r - \frac{1}{2}\left(u'(1)\right)^2 \psi(1) \tag{3.21}$$

et

$$I_2 = \int_0^1 u^5 r^2 \psi u' \mathrm{d}r + \lambda \int_0^1 r^2 \psi u u' \mathrm{d}r$$

par parties on obtient

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\left[\frac{u^6}{6} r^2 \psi\right]_0^1}_{=0 \ car\ u(1)=0} - \textstyle\int_0^1 \frac{u^6}{6} \left(2r\psi + r^2\psi'\right) \mathrm{d}r \\ &+\lambda \underbrace{\left[r^2 \psi \frac{u^2}{2}\right]_0^1}_{=0 \quad car\ u(1)=0} - \lambda \textstyle\int_0^1 \frac{u^2}{2} \left(2r\psi + r^2\psi'\right) \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$= - \int_0^1 \frac{u^6}{6} \left(2r\psi + r^2\psi'\right) \mathrm{d}r - \lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2} \left(2r\psi + r^2\psi'\right) \mathrm{d}r. \tag{3.22}$$

On rassemble (3.21) *et* (3.21) (3.22) *dans* (3.20)

$$\textstyle\int_0^1 (u')^2 \left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right) \mathrm{d}r - \frac{1}{2} \left(u'(1)\right)^2 \psi(1)$$

$$= - \int_0^1 \frac{u^6}{6} \left(2r\psi + r^2\psi'\right) \mathrm{d}r - \lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2} \left(2r\psi + r^2\psi'\right) \mathrm{d}r \tag{3.23}$$

2. Multiplions (3.19) par $\left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right) u$ *et intégrons :*

$$\underbrace{\int_0^1 \left(-u'' - \frac{2}{r} u'\right) \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right) u \mathrm{d}r}_{I_3} = \underbrace{\int_0^1 \left(u^5 + \lambda u\right) \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right) u \mathrm{d}r}_{I_4} \tag{3.24}$$

On voit

$$I_3 = \int_0^1 \left(-u'' u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right) - 2u'u \left(\frac{1}{2} r\psi' - \psi\right)\right) \mathrm{d}r$$

par parties on trouve

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 2u'u \left(\frac{1}{2} r\psi' - \psi\right) \mathrm{d}r \\ &+ \int_0^1 u' \left(r\psi' u + \frac{1}{2} r^2 \psi'' u - \psi u - r\psi' u + \frac{1}{2} r^2 \psi' u' - r\psi u'\right) \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$\underbrace{- \left[u'u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right)\right]_0^1}_{=0 \quad \mathrm{car}\, u(1)=0}$$

$$= \textstyle\int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r + \int_0^1 u'u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' + \psi - r\psi\right) \mathrm{d}r$$

$$\begin{aligned} &= \textstyle\int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r - \int_0^1 \frac{u^2}{2} \left(r\psi'' + \frac{1}{2} r^2 \psi''' + \psi' - r\psi'' - \psi'\right) \\ &+ \underbrace{\left[\frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' + \psi - r\psi\right)\right]_0^1}_{=0 \ car\ u(1)=0=\psi(0)} \ \textit{par parties} \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi''' \mathrm{d}r \tag{3.25}$$

et

$$I_4 = \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r \tag{3.26}$$

On injecte (3.25) et (3.26) dans (3.24) pour obtenir

$$\int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi''' \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r \tag{3.27}$$

Soustrayons à présent (3.27) à (3.23) il vient

$$\int_0^1 u^2 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) r^2 \mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_0^1 u^6 \left(r\psi - r^2\psi'\right) \mathrm{d}r + \frac{1}{2}\left(u'(1)\right)^2 \psi(1) \tag{3.28}$$

On sait déjà qu'il n'y a pas de solutions pour $\lambda \leq 0$
on peut donc supposer que $0 < \lambda < \frac{1}{4}\pi^2$ *Dans (3.28)*
on choisit finalement $\psi(r) = \sin(\sqrt{4\lambda} r)$, *de telle sorte que*

$$\psi(1) \geq 0, \quad \lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi''' = 0$$

et

$$r\psi - r^2\psi' = r\sin(\sqrt{4\lambda}r) - r^2\sqrt{4\lambda}\cos(\sqrt{4\lambda}r) > 0 \quad \mathrm{sur}[0,1]$$

car

$$\sin\theta - \theta\cos\theta > 0 \quad \theta \in [0,\pi]$$

ce qui aboutit à une contradiction.
Il en résulte qu'il n'y a pas de solutions si $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda(\Omega)$

3.3 Existence de solution dans un domaine borné

soit $G_\lambda : \Omega \times \Omega \backslash \{(x,x), x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$ la fonction de Green de $-\Delta + \lambda$ sur Ω aux sens des distributions avec la condition aux limites de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta_y \, G_\lambda(x,y) + \lambda G_\lambda(x,y) = \delta_x & \text{dans } \Omega, \\ G_\lambda(x,y) = 0 & \text{si } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec $G_\lambda(x,y)$ est une fonction symétrique en x et y et positif
Pour tout $x \in \Omega$. On peut décomposer G_λ en deux partie :
Une partie singulière et une partie réguliére,

C'est à dire

$$G_\lambda(x,y) = \frac{1}{\omega_2|x-y|} + g_\lambda(x,y)$$

avec $g_\lambda(x,y) = -\frac{1}{\omega_2|x-y|}$ sur la frontière de Ω et $g_\lambda \in \mathrm{C}^0(\Omega \times \Omega)$ qui est vérifié On a le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta g_\lambda(x,y) + \lambda G_\lambda(x,y) = 0 \text{ dans } \Omega \\ g_\lambda(x,y) = -\dfrac{1}{\omega_2|x-y|} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Lemme 3.3.1 *[41] il existe un $x \in \Omega$ tel que $g_\lambda(x,x) > 0$ alors $S_\lambda < S_3^{-1}$* $\qquad (i)$

Preuve 6 *L'idée général de la preuve est de prendre le quotient suivant :*

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}$$

avec $\lambda = \frac{n-2}{4(n-1)} R$
Et à l'aide des calculs des fonctions tests

— *On va montrer que $Q_\lambda < S_3^{-1}$ pour aboutir à $S_\lambda < S_3^{-1}$*

Pour Ω quelconque et λ une fonction le résultat d'existence de solution minimisante pour le problème est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit Ω un domaine lisse de $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $-\Delta + \lambda$ soit un opérateur coercif. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $x \in \Omega$ tel que $g_\lambda(x,x) > 0$*
2. *$S_\lambda < S_3^{-1}$*
3. *il existe une solution minimisante au problème $(\mathcal{E}_\lambda)$.*
   Où S_λ est atteint par une fonction positive lisse u_λ

Preuve 7 *Pour la première implication c'est à dire il existe $x \in \Omega$ tel que $g_\lambda(x,x) > 0 \Rightarrow S_\lambda < S_3^{-1}$ est montré par le lemme 3.3.1*

Maintenant on va montrer la deuxième implication

Preuve 8 *Dans ce qui précédent on a montré que $2 \Rightarrow 3$ ie : $S_\lambda < S_3^{-1} \Rightarrow$ il existe une solution minimisante au problème $(\mathcal{E}_\lambda)$.*
où S_λ est atteint par une fonction positive lisse u_λ dans le cas où Ω est une boule et λ constante.
Pour Ω quelconque et λ une fonction on a la proposition suivante :

Proposition 6 *pour tout λ,$\tilde{\lambda} \in C^\infty(\Omega)$, nous avons*

$$\tilde{\lambda} > \lambda, \tilde{\lambda} \neq \lambda \Rightarrow g_\lambda(x,x) > g_{\tilde{\lambda}}(x,x), \quad \text{pour toute } x \in \Omega \qquad (ii)$$

Cela découle de la formule de Green : en effet, pour tout $x \in \Omega$

$$g_\lambda(x,x) - g_{\tilde{\lambda}}(x,x) = \int_\Omega (\tilde{\lambda} - \lambda)(y) G_\lambda(x,y) G_{\tilde{\lambda}}(x,y) \mathrm{d}y > 0$$

on définie $B(\lambda) \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ll} S_{\lambda+B} < S_3^{-1}, & \text{pour } B < B(\lambda) \\ S_{\lambda+B} \geqslant S_3^{-1}, & \text{pour } B \geqslant B(\lambda) \end{array}$$

$B(\lambda)$est bien définie

Exemple 3.3.1 *on prend* $B > -\min(\lambda)$*on aura* $S_{\lambda+B} \geqslant S_3^{-1}$

Exemple 3.3.2 *pour* B *assez petit* B *inférieure à la première valeur propre de* $-\Delta + \lambda$ *sur* Ω *et* $S_{\lambda+B} < S_3^{-1}$.

Maintenant le théorème se réduit à la preuve suivante :
(1) il existe $x_0 \in \Omega$ *tel que* $g_{\lambda+B(\lambda)}(x_0, x_0) = 0$
(2) comme $S_{\lambda+B(\lambda)}$ *n'est pas atteint.* $S_{\lambda+B}$*n'est pas atteint aussi pour* $B > B(\lambda)$, *par suite ,nous aurions*

$$\begin{aligned} S_{\lambda+B(\lambda)} &\leqslant \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u_{\lambda+B}|^2 + (\lambda + B(\lambda)) u_{\lambda+B}^2 \right) \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u_{\lambda+B}|^6 \, \mathrm{d}x \right)^{1/3}} \\ &\leqslant S_{\lambda+B} + \frac{\int_\Omega (B(\lambda) - B) u_{\lambda+B}^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u_{\lambda+B}|^6 \, \mathrm{d}x \right)^{1/3}} \\ &< S_n^{-1} \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec la définition de $B(\lambda)$.*Donc on a bien montré que* $2 \Rightarrow 3$ *c'est à dire*

$S_\lambda < S_3^{-1} \Rightarrow$ *il existe une solution minimisante au problème* ($\mathcal{E}_\lambda$).
où S_λ *est atteint par une fonction positive lisse* u_λ

Dans cette partie on va montré que $3 \Rightarrow 2$ *c'est a dire : s'il existe une solution minimisante au problème* ($\mathcal{E}_\lambda$).
où S_λ *est atteint par une fonction positive lisse* $u_\lambda$$\Rightarrow$ $S_\lambda < S_3^{-1}$

Preuve 9 *Nous allons prouver que* S_λ *n'est pas atteint .*
Supposons par absurde qu'il existe $u_\lambda \in C^\infty(\Omega), u_\lambda > 0$ *dans* Ω, *qui réalise* S_λ.
Soit u_λ *vérifie :*

$$(\mathbb{L}) \quad \begin{cases} -\Delta u_\lambda + \lambda u_\lambda = S_3^{-1} u_\lambda^5 & \text{dans } \Omega \\ \\ u_\lambda = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.29}$$

et

$$\int_\Omega u_\lambda^6 \mathrm{d}x = 1 \tag{3.30}$$

si $S_\lambda = S_3^{-1}$ *on a Pour toute* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$\left(\int_\Omega u_\lambda^6 (1+\varepsilon\varphi)^6 \mathrm{d}x \right)^{1/3} \leqslant S_3 \left[\int_\Omega |\nabla (u_\lambda(1+\varepsilon\varphi))|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \lambda u_\lambda^2 (1+\varepsilon\varphi)^2 \mathrm{d}x \right] \tag{3.31}$$

de (3.30) *on obtient que*

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega u_\lambda^6 (1+\varepsilon\varphi)^6 \mathrm{d}x \right)^{1/3} =& 1 + 2\varepsilon \int_\Omega u_\lambda^6 \varphi \mathrm{d}x + 5\varepsilon^2 \int u_\lambda^6 \varphi^2 \mathrm{d}x \\ &- 4\varepsilon^2 \left(\int_\Omega u_\lambda^6 \varphi \mathrm{d}x \right)^2 + \mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned}$$

En revanche, en utilisant (3.29) et (3.30)

$$S_3 \left[\int_\Omega |\nabla (u_\lambda(1+\varepsilon\varphi))|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \lambda u_\lambda^2(1+\varepsilon\varphi)^2\mathrm{d}x\right]$$

$$= S_3 \left[\int_\Omega u_\lambda (\Delta u_\lambda + \lambda u_\lambda)(1+\varepsilon\varphi)^2\mathrm{d}x + \varepsilon^2 \int_\Omega u_\lambda^2|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\right]$$

$$= \int_\Omega u_\lambda^6(1+\varepsilon\varphi)^2\mathrm{d}x + S_3\varepsilon^2 \int_\Omega u_\lambda^2|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x$$

$$= 1 + 2\varepsilon \int_\Omega u_\lambda^6\varphi\mathrm{d}x + \varepsilon^2 \int_\Omega \varphi^2 u_\lambda^6\mathrm{d}x + S_3\varepsilon^2 \int_\Omega u_\lambda^2|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x$$

Revenant à (3.31) avec ces deux dernières relations et quand ε tend vers 0, on obtient que

$$4\int_\Omega \varphi^2 u_\lambda^6\mathrm{d}x \leqslant S_3 \int_\Omega u_\lambda^2|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x + 4\left(\int_\Omega u_\lambda^6\varphi\mathrm{d}x\right)^2, \quad \textit{pour toute } \varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right) \tag{3.32}$$

Nous prétendons maintenant qu'il existe $(y,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ tel que :

$$F(y,t) := \int_\Omega u_\lambda^6 \tfrac{2t(x-y)}{1+t^2|x-y|^2}\mathrm{d}x = 0, \qquad \textit{pour toute } i = 1,2,3,$$

$$G(y,t) := \int_\Omega u_\lambda^6 \tfrac{1-t^2|x-y|^2}{1+t^2|x-y|^2}\mathrm{d}x = 0$$

Ce résultat est l'équivalent d'un résultat sur la sphère standard prouvé par Chang et Yang , la preuve de ce théorème peut se présenter comme suit :
soit

$$H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 \textit{ définie par :}$$

$$H(y,s) = \left(F\left(y, \tfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right) + y, G\left(y, \tfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right) + s\right)$$

On prouve, grâce à une modélisation asymptotique de F et G que
$|H(y,s)|^2 \leqslant |y|^2 + s^2$ dès que $|y|^2 + s^2$ est assez grand.
Cela prouve notamment qu'il existe $R > 0$ tel que $H(B(0,R)) \subset B(0,R)$. H est une fonction continue,

on peut appliquer le théorème du point fixe de Brouwer : H a au moins un point fixe dans $B(0,R)$. Mais un point fixe de H est juste un zéro des deux fonction F et G. Cela prouve la fonction H.

Nous appliquons maintenant (3.32) à chacun $\varphi_i, i = 1,2,3,4$ où

$$\varphi_i(x) := \tfrac{2t\left(x^i-y^i\right)}{1+t^2|x-y|^2}, \qquad \textit{pour tout } i = 1,2,3$$

$$\varphi_4(x) := \tfrac{1-t^2|x-y|^2}{1+t^2|x-y|^2}$$

Quand $F = 0$ et $G = 0$ pour un bon choix de variable (y,t),on obtient alors :

$$4\sum_{i=1}^4 \int_\Omega u_\lambda^6\varphi_i^2\mathrm{d}x \leqslant S_3 \sum_{i=1}^4 \int_\Omega |\nabla\varphi_i|^2 u_\lambda^2\mathrm{d}x$$

mais

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i^2 = 1$$

Et

$$\sum_{i=1}^{4} |\nabla \varphi_i|^2 = \frac{12t^2}{\left(1+t^2|x-y|^2\right)^2}$$

Nous avons donc

$$4\int_\Omega u_\lambda^6 \mathrm{d}x \leqslant 12 S_3 \int_\Omega \frac{t^2}{\left(1+t^2|x-y|^2\right)^2} u_\lambda^2 \mathrm{d}x$$

Par les inégalités de Hölder et l'équation (3.30), on obtient

$$1 \leqslant 3S_3 \left(\int_\Omega \frac{t^3}{\left(1+t^2|x-y|^2\right)^3} \mathrm{d}x\right)^{2/3}$$

pour

$$1 = 3S_3 \left(\int_\Omega \frac{t^3}{\left(1+t^2|x-y|^2\right)^3} \mathrm{d}x\right)^{2/3}$$

On multiplie l'égalité précédente par $3S_3^{-1}$ on trouve

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{t^3}{\left(1+t^2|x-y|^2\right)^3} \mathrm{d}x\right)^{2/3} = (3S_3)^{-1}$$

Quand $N=3$,nous obtenons la contradiction que S_λ ne peut pas être atteint . donc on a bien $3 \Rightarrow 2$ c'est a dire : s'il existe une solution minimisante au problème ($\mathcal{E}_\lambda$).
ou S_λ est atteint par une fonction positive lisse $u_\lambda \Rightarrow$ $S_\lambda < S_3^{-1}$

Pour conclure il nous reste la dernière implication qui est celle de $2 \Rightarrow 1$ ie :$S_\lambda < S_3^{-1} \Rightarrow$ il existe $x \in \Omega$ tel que $g_\lambda(x,x) > 0$

Preuve 10 *La preuve de cette implication se fait en 4 étapes nécessaires sont les suivantes :*

Étape 1

Par la définition de $B(\lambda)$, pour toute $\varepsilon > 0$,
nous avons ça

$$S_{\lambda-\varepsilon} < S_3^{-1} \tag{3.33}$$

Tout d'abord nous commençons par $\exists x_0 \in \Omega$ tel que $g_\lambda(x_0, x_0) = 0$

Nous avons choisi $B(\lambda) = 0$ pour toute la preuve du théorème. Cette inégalité est désormais standard, d'où l'existence d'une solution minimisante pour $S_{\lambda-\varepsilon}$.
Nous avons donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction positive lisse u_ε dans Ω qui vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + (\lambda+\varepsilon)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^5 & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^6 \mathrm{d}x = 1 \end{cases} \tag{3.34}$$

où $\lambda_\varepsilon = S_{\lambda-\varepsilon}$
L'objectif est maintenant d'étudier (u_ε) quand ε tend vers 0.

Tout d'abord, (u_ε) *est borné par* $H_0^1(\Omega)$ *donc* u_ε *converge faiblement vers certains* u_0 *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Nous pouvons également supposer que* $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \lambda_0$, *avec* $\lambda_0 \leqslant S_3^{-1}$ *par* (3.33)
En passant à la limite dans (3.34) *on trouve que* u_0 *vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \lambda u_0 = \lambda_0 u_0^5 \ \textit{dans}\ \Omega \\ u_0 = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, par les propriétés de convergence faibles on a,

$$\int_\Omega u_0^6 \mathrm{d}x \leqslant 1$$

Donc $S_\lambda = S_3^{-1}$, *nous avons*

$$\left(\int_\Omega u_0^6 \mathrm{d}x\right)^{1/3} \leqslant S_3\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \lambda\ u_0^2\ \mathrm{d}x\right) = \lambda_0 S_3 \int_\Omega u_0^6\ \mathrm{d}x$$

D'où nous avons utilisé l'équation vérifiée par u_0. *Si* $u_0 \neq 0$, *on obtient* $\lambda_0 = S_3^{-1}$ *et que* $\displaystyle\int_\Omega u_0^6 \mathrm{d}x = 1$ *ce qui signifie exactement que* S_λ *est atteint par* u_0. *Puisque nous avons prouvé dans ce qui précédent que* S_λ *n'a pas été atteint,*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \qquad \textit{dans}\ H_0^1(\Omega)$$

Par immersion de Sobolev on déduit que $H_0^1(\Omega)$ *s'injecte dans* $L^2(\Omega)$,*nous avons :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{3.35}$$

On garde x_ε *un point de* Ω *où* u_ε *atteint son maximum et nous définissons*

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \mu_\varepsilon^{-1/2} = \sup_\Omega u_\varepsilon \tag{3.36}$$

donc

$$\int_\Omega u_\varepsilon^6 \mathrm{d}x = 1 \leqslant \frac{\int_\Omega u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x}{\mu_\varepsilon^2}$$

Par (3.35) on a $\mu_\varepsilon \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.
La combinaison des résultats standard de la théorie elliptique on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon(\mu_\varepsilon x + x_\varepsilon) = \left(1 + \frac{\omega_3^{-2/3}}{4}|x|^2\right)^{-1/2} \qquad \textit{dans}\ C^0_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3\right) \cap L^6_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3\right) \tag{3.37}$$

En particulier , nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d(x_\varepsilon, \partial\Omega)}{\mu_\varepsilon} = +\infty \tag{3.38}$$

et

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^6 \mathrm{d}x = 1 \tag{3.39}$$

Par des techniques de bootstrap et quand u_ε *vérifie* (3.34)
on obtient aussi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = 0 \qquad \textit{dans}\ C^0_{1\mathrm{oc}}\left(\bar{\Omega}\backslash\{x_0\}\right) \tag{3.40}$$

Où $x_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon$,

Étape 2(par les estimations ponctuelles faibles)

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$|x - x_\varepsilon|^{1/2} u_\varepsilon(x) \leqslant C, \qquad \text{pour tout } x \in \Omega \tag{3.41}$$

On Note, pour $x \in \Omega$

$$w_\varepsilon(x) = |x - x_\varepsilon|^{1/2} u_\varepsilon(x)$$

Et on garde y_ε un point de Ω ou $w_\varepsilon$atteint son maximum.
Nous supposons par absurde que

$$w_\varepsilon(y_\varepsilon) = \sup_\Omega w_\varepsilon \to +\infty \qquad \text{comme } \varepsilon \to 0 \tag{3.42}$$

par (3.37) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\mu_\varepsilon} = +\infty \tag{3.43}$$

et , par (3.42)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2}} = +\infty \tag{3.44}$$

donc Ω est borné, nous avons aussi $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(y_\varepsilon) = +\infty$ et grâce à (3.40) on a $\lim_{\varepsilon\to 0} |x_\varepsilon - y_\varepsilon| = 0$.
considérons maintenant, pour $x \in \tilde{\Omega}_\varepsilon = \left\{\frac{y - y_\varepsilon}{u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2}}, y \in \Omega\right\}$

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon\left(u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2} x + y_\varepsilon\right) \tag{3.45}$$

On obtient comme équation

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u}_\varepsilon - \left(\lambda\left(u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2} x - y_\varepsilon\right) + \varepsilon\right) u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-4} \tilde{u}_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^5 & \text{dans } \tilde{\Omega}_\varepsilon \\ \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_\varepsilon \end{cases} \tag{3.46}$$

Pour tout $x \in B(0,1) \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon$, nous avons

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon\left(u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2} x + y_\varepsilon\right)$$

$$\leqslant \frac{w_\varepsilon\left(u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2} x + y_\varepsilon\right)}{w_\varepsilon(y_\varepsilon)} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^{1/2}}{\left|u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2} x + y_\varepsilon - x_\varepsilon\right|^{1/2}}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon(x)^2 \leqslant \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\left|u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2} x + y_\varepsilon - x_\varepsilon\right|}$$

par la définition de y_ε. et , par (3.44) nous obtenons que , pour ε assez petit,

$$\tilde{u}_\varepsilon(x)^2 \leqslant 2, \qquad \text{pour tout } x \in B(0,1) \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon$$

on fixe maintenant $\eta \in C_c^\infty(B(0,1))$ et $k \geqslant 1$.
par une intégration par parties, en utilisant Eq. (3.46) et le fait que $\tilde{u}_\varepsilon$ est borné dans $B(0,1) \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon$, qui nous mène à ce qui suit :

$$\int_{B(0,1)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon} \left|\nabla\left(\eta\tilde{u}_\varepsilon^{k/2}\right)\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\left(\|\nabla\eta\|_\infty^2 + \|\Delta\eta\|_\infty + k\right) \int_{B(0,1)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon^k \mathrm{d}x$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\left(\int_{B(0,1)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon}\left(\eta\tilde{u}_\varepsilon^{k/2}\right)^6\mathrm{d}x\right)^{1/3}\leqslant C\left(\|\nabla\eta\|_\infty^2+\|\Delta\eta\|_\infty+k\right)\int_{B(0,1)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^k\mathrm{d}x$$

où C est une constante indépendante de ε, k et η. pour tout i, on fixe $k_i=6\times 3^i$ et on prend η_i tel que $\eta_i=1$ sur $B\left(0,\frac{1}{2}+2^{-i}\right), \eta_i=0$ sur $B\left(0,\frac{1}{2}+2^{-i-1}\right)$
$\|\nabla\eta_i\|_\infty^2+\|\Delta\eta_i\|_\infty\leqslant C4^{-i-1}$.
En appliquant l'inégalité ci-dessus on obtient

$$\sup_{B\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon\leqslant C\left(\int_{B(0,1)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^6\mathrm{d}x\right)^{1/6}$$

où $C>0$ est indépendant de ε. quand $\tilde{u}_\varepsilon(0)=1$, nous avons obtenu l'existence de certain $C>0$ indépendant de ε tel que

$$\int_{B(0,1)\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^6\mathrm{d}x\geqslant C$$

Ensuite, nous écrivons pour ϵ assez petit

$$1=\int_\Omega u_\varepsilon^6\mathrm{d}x\geqslant\int_{\Omega\cap B\left(y_\varepsilon,u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-2}\right)}u_\varepsilon^6\mathrm{d}x+\int_{B(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)}u_\varepsilon^6\mathrm{d}x$$

quand $B\left(y_\varepsilon,u_\varepsilon\left(y_\varepsilon\right)^{-2}\right)\cap B\left(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon\right)=\emptyset$ pour ε assez petit : c'est le résultat que nous avons obtenu de (3.43) et (3.44). En passant à $\lim_{R\to+\infty}$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}$.
Et on obtient avec (3.39) et l'estimation ci-dessus, une contradiction.
donc

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\Omega\backslash B(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)}|x_\varepsilon-x|^{1/2}u_\varepsilon(x)=0 \tag{3.47}$$

Étape 3 (exclure l'accumulation de limites)

Dans cette étape, nous prouvons que le point x_0 ne peut pas être à la limite de Ω Supposons par absurde que

$$\nu_\varepsilon:=d\left(x_\varepsilon,\partial\Omega\right)\to 0\quad\text{quand } \varepsilon\to 0 \tag{3.48}$$

on prend $x\in\Omega_\varepsilon=\left\{\frac{y-x_\varepsilon}{\nu_\varepsilon},y\in\Omega_\varepsilon\right\}$

$$v_\varepsilon(x)=\nu_\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon\left(\nu_\varepsilon x+x_\varepsilon\right)$$

de sorte que v_ε vérifie ce qui suit :

$$\begin{cases}-\Delta v_\varepsilon+\left(b_\varepsilon-\varepsilon\right)\nu_\varepsilon^2v_\varepsilon=\lambda_\varepsilon v_\varepsilon^5 & \text{dans } \Omega_\varepsilon\\ v_\varepsilon=0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon\end{cases} \tag{3.49}$$

Où nous avons mis $\lambda_\varepsilon(x)=\lambda\left(\nu_\varepsilon x+x_\varepsilon\right)$. de plus

$$\int_{\Omega_\varepsilon}v_\varepsilon^6\mathrm{d}x=1 \tag{3.50}$$

On vérifie également que (3.37), (3.39) (3.41), et(3.47) sont invariants d'échelle et continuent donc on remplace $v_\varepsilon,\mu_\varepsilon/\nu_\varepsilon,\Omega_\varepsilon$ et 0 au lieu de $u_\varepsilon,\mu_\varepsilon,\Omega$ et x_ε quand $\varepsilon\to 0$). quand Ω est lisse et avec (3.48) nous avons cela,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega_\varepsilon=\Omega_0=\mathbb{R}^2\times\ ]-\infty,1[$$

pour toute $R > 0$, *on a*

$$\eta_\varepsilon(R) = \sup_{x \in \overline{\Omega_\varepsilon} \cap \overline{B(0,R)} \backslash B(0,R/2)} v_\varepsilon \tag{3.51}$$

Nous fixons l'opérateur L_ε *avec*

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + (b_\varepsilon - \varepsilon)\, \nu_\varepsilon^2 u - \lambda_\varepsilon v_\varepsilon^4 u$$

et nous calculons $L_\varepsilon\left(|x|^{\nu-1}\right)$ *pour certain* $0 < \nu < 1$ *on* $B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon \backslash B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)$ *ou* R *est fixe et* $\tilde{R}$ *sera fixé plus tard. Des calculs simples conduisent à*

$$L_\varepsilon\left(|x|^{\nu-1}\right) = |x|^{\nu-3}\left(\nu(1-\nu) + (b_\varepsilon - \varepsilon)\, \nu_\varepsilon^2 |x|^2 - \lambda_\varepsilon |x|^2 v_\varepsilon^4\right)$$

Grâce à (3.47) *nous pouvons choisir* $\tilde{R}$ *de telle sorte que* ε *est assez petit ,*

$$\lambda_\varepsilon |x|^2 v_\varepsilon^4 \leqslant \frac{1}{2}\nu(1-\nu) \qquad \text{on } B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon \backslash B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)$$

avec (3.37) *on peut trouver* $C(R,\nu)$ *tel que pour toute* $\varepsilon > 0$ *et n'importe quel* x *à la limite de* $B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon \backslash B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)$

$$v_\varepsilon(x) \leqslant C(R,\nu)\left(\left(\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)^{1/2-\nu} + \eta_\varepsilon(R)\right)|x|^{\nu-1}$$

pour $G_\varepsilon(x)$ *devient le côté droit de l'équation ci-dessus, nous avons obtenir*

$$L_\varepsilon\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right) \geqslant 0 \qquad \text{dans } B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon \backslash B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)$$

$$G_\varepsilon - v_\varepsilon \geqslant 0 \qquad \text{sur } \partial\left(B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon \backslash B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)\right)$$

puisque $L_\varepsilon v_\varepsilon = 0$. *alors on a*

$$L_\varepsilon\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^- \times \left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^- \leqslant 0$$

ou $\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^-$ *indique la partie négative de* $\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)$. *par une intégration par parties, nous obtenons*

$$\int \left|\nabla\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^{-1}\right|^2 \mathrm{d}x + \nu_\varepsilon^2 \int \left(b_\varepsilon - \varepsilon\right)\left[\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^-\right]^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \lambda_\varepsilon \int v_\varepsilon^4 \left[\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^-\right]^2 \mathrm{d}x$$

$$< \lambda_\varepsilon \left(\int \left[\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^-\right]^6 \mathrm{d}x\right)^{1/3}$$

nous avons utilisé (3.50) *et les intégrales toujours dans* $B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon \backslash B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)$ *Cela nous emmène à la définition de* λ_ε *alors si* $\left(G_\varepsilon - v_\varepsilon\right)^- = 0$. *Nous avons donc*

$$v_\varepsilon(x) \leqslant C(R,\nu)\left(\left(\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)^{1/2-\nu} + \eta_\varepsilon(R)\right)|x|^{\nu-1} \tag{3.52}$$

pour toute $x \in B(0,R) \cap \Omega_\varepsilon$.
En effet, par (3.37) *cette inégalité tient évidemment* $B\left(0, \tilde{R}\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)$. *Prouvons maintenant que*

$$\eta_\varepsilon(R) \ll \left(\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)^{1/2-\nu} \tag{3.53}$$

Supposons par absurde qu'il existe C>0 tel que

$$\eta_\varepsilon(R) \geqslant C\left(\frac{\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon}\right)^{1/2-\nu} \tag{3.54}$$

afin que nous puissions réécrire (3.52) *comme*

$$v_\varepsilon(x) \leqslant C(r,\nu)\eta_\varepsilon(R)|x|^{\nu-1} \tag{3.55}$$

Ensuite, pour tout sous-ensemble compact K *de* $\overline{B(0,R)} \cap \overline{\Omega_\varepsilon} \backslash \{0\}$, *il existe* $C(K)$ *tel que*

$$\left(\frac{v_\varepsilon(x)}{\eta_\varepsilon(R)}\right) \leqslant C(K), \qquad \textit{pour tout } x \in K$$

grâce à l'inégalité de Harnack nous obtenons l'existence de certain $D(K) > 0$ *(pour tout sous-ensemble compact* K *of* $\Omega_\varepsilon \backslash \{0\}$ *) tel que*

$$\left(\frac{v_\varepsilon(x)}{\eta_\varepsilon(1/2)}\right) \leqslant D(K), \qquad \textit{pour tout } x \in K$$

Par la théorie elliptique standard,du théoreme 3.1.1 et 3.1.2
on obtient $(v_\varepsilon/\eta_\varepsilon(1/2))$ *est limité par* $C^{0,\eta}_{\text{loc}}(\overline{\Omega_\varepsilon}\backslash\{0\})$. *Ainsi, selon le théorème d'Ascoli, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{v_\varepsilon}{\eta_\varepsilon(1/2)}\right) = G_0 \qquad \textit{dans } C^0_{\text{loc}}(\overline{\Omega_0}\backslash\{0\}) \tag{3.56}$$

ou nous avons étendu v_ε *par 0 à l'extérieur de* Ω_ε. *de plus,* $G_0 \neq 0$ *et* G_0 *vérifie :*

$$\begin{cases} -\Delta G_0 = 0 & \textit{in } \Omega_0\backslash\{0\} \\ G_0 = 0 & \textit{on } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

puisque $G_0 \neq 0$, *par le principe du maximum,* G_0 *doit être singulier. De plus, en* (3.55) *la seule singularité possible est* 0. *donc*

$$G_0(x) = \frac{-\lambda}{|x|} + b(x)$$

pour une constante positive λ *et une fonction harmonique* b *dans* Ω_0 *avec* $b = \lambda/|x|$ *on* $\partial\Omega_0$. *en Intégrant* (3.49) *sur* $B(0,\delta)$ *pour* $\delta > 0$ *assez petit, on obtient*

$$-\int_{\partial B(0,\delta)} \partial_v v_\varepsilon \mathrm{d}\sigma + v_\varepsilon^2 \int_{B(0,\delta)} (b_\varepsilon - \varepsilon)\, v_\varepsilon \mathrm{d}x = \lambda_\varepsilon \int_{B(0,\delta)} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}x$$

ou v *désigne la normale extérieure à* $B(0,\delta)$. *par* (3.55) *et* (3.56) *en utilisant le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, on aura*

$$\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \lambda_\varepsilon \int_{B(0,\delta)} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}x \to -\int_{\partial B(0,\delta)} \partial_v G_0 \mathrm{d}\sigma$$

pour δ *assez petit ,* $-\int_{\partial B(0,\delta)} \partial_v G_0 \mathrm{d}\sigma$ *est positive . donc*

$$\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant C\int_{B(0,\delta)} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}x \leqslant C\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2} + C \quad \int_{B(0,\delta)\backslash B\left(0,R\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}x$$

pour tout $R>0$à condition que ε est assez petit : nous avons utilisé (3.37).
Ensuite, par (3.55) on a

$$\int_{B(0,\delta)\backslash B\left(0,R\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}x \leqslant C\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\int_{B(0,\delta)\backslash B\left(0,R\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)}|x|^{v-1}v_\varepsilon^4\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_{\Omega_\varepsilon\backslash B\left(0,R\frac{\mu_{\varepsilon\varepsilon}}{v_\varepsilon}\right)} v_\varepsilon^6\mathrm{d}x\right)^{2/3}\left(\int_{B(0,\delta)}|x|^{3v-3}\mathrm{d}x\right)^{1/3}$$

$$\leqslant C\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_{\Omega_\varepsilon\backslash B\left(0,R\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)} v_\varepsilon^6\mathrm{d}x\right)^{2/3}$$

Revenant à l'estimation précédente $\eta_\varepsilon(1/2)$ et on choisit R assez grand de sorte que $\int_{\Omega_\varepsilon\backslash B\left(0,R\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)} v_\varepsilon^6\mathrm{d}x$ est petit (cela est possible en 3.39,d'ou l'existence de $C>0$ tel que

$$\eta_\varepsilon(R)\leqslant C\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2}$$

ce qui contredit (3.54) since *$\mu_\varepsilon/v_\varepsilon$ tend vers 0 comme ε tend vers 0. donc nous avons prouvé (3.53) Nous voulons maintenant prouver que (3.52) est toujours valable pour $v=0$. , avec le même argument que ci-dessus, nous aurons*

$$C^{-1}\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2}\leqslant C\eta_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)$$

pour certain $C>1$ indépendant de ε. soit (z_ε) une suite de points de $\overline{B(0,R)}\cap\overline{\Omega_\varepsilon}$ L'objectif est maintenant de prouver qu'il existe $C(R)>0$ tel que

$$|z_\varepsilon|\,v_\varepsilon\left(z_\varepsilon\right)\left(\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2}+\eta_\varepsilon(R)\right)^{-1}\leqslant C(R) \tag{3.57}$$

Nous distinguons trois cas.
cas 1 *:$|z_\varepsilon|\,v_\varepsilon/\mu_\varepsilon\to\delta$ comme $\varepsilon\to0$. par (3.37) nous avons clairement (3.57) dans ce cas.*
cas 2: *$|z_\varepsilon|\to R'$ as $\varepsilon\to0$ avec $R/2<R'\leqslant R$. Par la définition de $\eta_\varepsilon(R)$,nous avons*

$$|z_\varepsilon|\,v_\varepsilon\left(z_\varepsilon\right)\eta_\varepsilon(R)^{-1}\leqslant R$$

de sorte que (3.57) est valable dans ce cas.

cas 3 : *$|z_\varepsilon|\to R'$ quand $\varepsilon\to0$ avec $R'\leqslant R/2$ et $|z_\varepsilon|\,v_\varepsilon/\mu_\varepsilon\to+\infty$ quand $\varepsilon\to0$. soit H_ε la fonction de Green de $-\Delta-\varepsilon_0$ avec condition aux limites de Dirichlet sur $\Omega_\varepsilon\cap B(0,R)$ pour certain $\varepsilon_0>0$ assez petit .à l'aide de La formule de Green, nous pouvons écrire*

$$v_\varepsilon\left(z_\varepsilon\right)=\int_{\Omega_\varepsilon\cap B(0,R)}H_\varepsilon\left(z_\varepsilon,y\right)\left(\Delta v_\varepsilon(y)-\varepsilon_0 v_\varepsilon(y)\right)\mathrm{d}y-\int_{\Omega_\varepsilon\cap\partial B(0,R)}\partial_v H_\varepsilon\left(z_\varepsilon,y\right)v_\varepsilon(y)\mathrm{d}\sigma_y$$

ou v désigne la normale extérieure de $\partial B(0,R)$. Par la théorie elliptique standard, puisque $\Omega_\varepsilon\to\Omega_0$ comme $\varepsilon\to0$ et puisque $|z_\varepsilon|\leqslant 2R/3$, alors on obtient que

$$-\int_{\Omega_\varepsilon\cap\partial B(0,R)}\partial_v H_\varepsilon\left(z_\varepsilon,y\right)v_\varepsilon(y)\mathrm{d}\sigma_y\leqslant C(R)\eta_\varepsilon(R)$$

Par contre, en utilisant (3.49) on peut écrire que

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\Omega_\varepsilon\cap B(0,R)}H_\varepsilon\left(z_\varepsilon,y\right)\left(\Delta v_\varepsilon(y)-\varepsilon_0 v_\varepsilon(y)\right)\mathrm{d}y\\ &=\textstyle\int_{\Omega_\varepsilon\cap B(0,R)}H_\varepsilon\left(z_\varepsilon,y\right)\left[\lambda_\varepsilon v_\varepsilon^5-\left(b_\varepsilon v_\varepsilon^2-\varepsilon v_\varepsilon^2+\varepsilon_0\right)v_\varepsilon\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

par le principe du maximum , $H_\varepsilon(z_\varepsilon, y) \leqslant 1/(\omega_2 |z_\varepsilon - y|)$, on a , pour ε assez petit ,

$$v_\varepsilon(z_\varepsilon) \leqslant C \quad \int_{\Omega_\varepsilon \cap B(0,R)} |z_\varepsilon - y|^{-1} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}y + C(R)\eta_\varepsilon(R)$$

Mais, par (3.52) *et* (3.53),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon \cap B(0,R)} |z_\varepsilon - y|^{-1} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}y &\leqslant \int_{B(z_\varepsilon, |z_\varepsilon|/2)} |z_\varepsilon - y|^{-1} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}y + 2|z_\varepsilon|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon \cap B(0,R)} v_\varepsilon^5 \mathrm{d}y \\ &\leqslant C(R,v)^5 \left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{5/2-5v} |z_\varepsilon|^{5v-3} + C|z_\varepsilon|^{-1} \left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

où nous avons également utilisé (3.37 *Cela mène à*

$$|z_\varepsilon| v_\varepsilon(z_\varepsilon) \left(\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2} + \eta_\varepsilon(R)\right)^{-1} \leqslant C(R) + C\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{2-5v} |z_\varepsilon|^{5v-2}$$

puisque $|z_\varepsilon| v_\varepsilon/\mu_\varepsilon \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$, on prend $v < 2/5$, nous avons obtenu (3.57) *dans ce troisième cas*
donc, (3.57) *est prouvé. ce qui est équivalent à*

$$v_\varepsilon(x) \leqslant C(R) \left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{1/2} |x|^{-1} \tag{3.58}$$

Pour tout $x \in \Omega_\varepsilon \cap B(0,R) \backslash \{0\}$. Par les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 de nous obtenons alors que

$$\left(\frac{\mu_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{-1/2} v_\varepsilon \to H_0 \quad \text{dans } C^0_{\text{loc}}(\overline{\Omega_0} \backslash \{0\}) \tag{3.59}$$

ou H_0 est une fonction harmonique non nulle dans $\Omega_0 \backslash \{0\}$ qui disparaît à la frontière de Ω_0. Cela impose que H_0 est singulier à l'origine. alors

$$H_0 = \frac{\lambda}{|x|} + b(x)$$

soit λ est une constante positive et b est une fonction harmonique sur Ω_0 qui satisfait $b = -\lambda/|x|$ on $\partial\Omega_0$. par le principe du maximum , b est partout négatif et, en particulier

$$b(0) < 0 \tag{3.60}$$

Nous appliquons maintenant l'identité de Pohozãev à v_ε on $B(0, 1/2)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}&v_\varepsilon^2 \textstyle\int_{B(0,1/2)} (b_\varepsilon - \varepsilon) v_\varepsilon^2 \mathrm{d}x + \frac{3}{2} v_\varepsilon^2 \int_{B(0,1/2)} \left(x^k \partial_k b_\varepsilon\right) v_\varepsilon^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} v_\varepsilon^2 \int_{\partial B(0,1/2)} (b_\varepsilon - \varepsilon) v_\varepsilon^2 \mathrm{d}\sigma - \frac{\lambda_\varepsilon}{12} \int_{\partial B(0,1/2)} v_\varepsilon^6 \mathrm{d}\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial B(0,1/2)} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_\varepsilon|^2 - (\partial_v v_\varepsilon)^2\right) \mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial B(0,1/2)} v_\varepsilon \partial_v v_\varepsilon \mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

Multipliant les deux côtés par $(\mu_\varepsilon/v_\varepsilon)^{-1}$ et passant à la limite $\varepsilon \to 0$ en utilisant (3.58) *et* (3.59) *on a*

$$\int_{\partial B(0,1/2)} \left(\frac{1}{2} |\nabla H_0|^2 - (\partial_v H_0)^2\right) \mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B(0,1/2)} H_0 \partial_v H_0 \mathrm{d}\sigma = 0$$

puisque -$\Delta b = 0$, il vient que le côté gauche de cette relation est $-\lambda\, \omega_2\, b(0)$ donc $b(0) = 0$: d ou la contradiction avec (3.60). *donc $x_0 \notin \partial\Omega$*

Étape 4

On prend maintenant $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'opérateur$-\Delta + (\lambda - \varepsilon_0)$ est coercive sur Ω et on note $G_{\lambda-\varepsilon_0}$sa fonction de Green avec la condition de Dirichlet sur Ω on prend aussi l'opérateur L_ε définie par $L_\varepsilon u = -\Delta u + \lambda u - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^4 u$.
nous calculons $L_\varepsilon G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v}$ dans $\Omega \backslash \{x_\varepsilon\}$ pour certains $0 < v < 1$.
On obtient

$$\frac{L_\varepsilon G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v}}{G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v}} = \varepsilon_0 - \varepsilon - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^4 + v(1-v)\frac{|\nabla G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)|^2}{G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^2}$$

Puisque $x_0 \notin \partial\Omega$, il est facile de voir qu'il existe $C > 0, \rho > 0$ tel que

$$|x - x_\varepsilon| \leqslant \rho \Rightarrow \frac{|\nabla G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)|^2}{G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^2} \geqslant C|x - x_\varepsilon|^{-2}$$

Ensuite nous avons

$$\frac{L_\varepsilon G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v}}{G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v}} \geqslant \begin{cases} Cv(1-v)|x_\varepsilon - x|^{-2} - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^4 & \text{dans } B(x_\varepsilon, \rho) \\ (\varepsilon_0 - \varepsilon) - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^4 & \text{dans } \Omega \backslash B(x_\varepsilon, \rho) \end{cases}$$

En utilisant (3.40) et (3.47) nous obtenons l'existence de certain $R(v) > 0$ tel que pour ε assez petit , $L_\varepsilon G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v} > 0$ sur $\Omega \backslash B(x_\varepsilon, R(v)\mu_\varepsilon)$.

Par les propriétés de la fonction Green , puisque $x_0 \notin \partial\Omega$, il existe $C > 1$ tel que $C^{-1} \leqslant |x_\varepsilon - x| \times G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x) \leqslant C$, pour tout $x \in \Omega$.
ainsi , par (3.37) on déduit qu'il existe $C(v) > 0$ tel que $u_\varepsilon(x) \leqslant C(v)\mu_\varepsilon^{1/2-v} G_{\lambda-\varepsilon_0}(x_\varepsilon, x)^{1-v}$, pour tout $x \in \partial B(0, R(v)\mu_\varepsilon)$.
On déduit des trois dernières relations, comme on a fait précédemment que :

$$u_\varepsilon(x) \leqslant C(v)\mu_\varepsilon^{1/2-v}|x_\varepsilon - x|^{v-1}, \quad \text{for any } x \in \Omega \backslash \{x_\varepsilon\}$$

Maintenant, par la formule de Green , pour toute (z_ε) point de Ω, on peut l'écrire

$$u_\varepsilon(z_\varepsilon) = \int_\Omega G_{\lambda-\varepsilon_0}(z_\varepsilon, y)\left[-\Delta u_\varepsilon(y) - (\lambda(y) - \varepsilon_0)u_\varepsilon(y)\right]\mathrm{d}y$$

On calculs d'une manière similaires comme ce qui précède on obtient l'estimation fondamentale suivante :

$$|x - x_\varepsilon|\mu_\varepsilon^{-1/2}u_\varepsilon(x) \leqslant C \tag{3.61}$$

On déduit alors par la théorie elliptique standard que

$$\mu_\varepsilon^{-1/2}u_\varepsilon \to \lambda G_\lambda(x_0, .) \qquad \text{dans } C^2_{\text{loc}}(\Omega \backslash \{x_0\}) \tag{3.62}$$

où λ est un nombre réel positif.
En Appliquant l'identité de Pohozãev à u_ε dans $B(x_\varepsilon, \delta)$ $\delta > 0$ petit, on obtient

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{B(x_\varepsilon,\delta)}\left[(\lambda - \varepsilon) + \frac{3}{2}(x - x_\varepsilon)^k \partial_k a\right]u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2}\int_{\partial B(x_\varepsilon,\delta)}(\lambda - \varepsilon)u_\varepsilon^2 \mathrm{d}\sigma - \frac{\lambda_\varepsilon}{6}\delta\int_{\partial B(x_\varepsilon,\delta)} u_\varepsilon^6 \mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \delta\int_{\partial B(x_\varepsilon,\delta)}\left(\frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2 - (\partial_v u_\varepsilon)^2\right)\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2}\int_{\partial B(x_\varepsilon,\delta)} u_\varepsilon \partial_v u_\varepsilon \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

Multipliant les deux côtés par μ_ε^{-1} et passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et en utilisant (3.61) *et (3.62) on obtient pour tout $\delta > 0$*

$$\int_{B(x_0,\delta)} \left(\lambda + \frac{3}{2}(x-x_0)^k \partial_k \lambda\right) G_\lambda(x_0,x)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \tfrac{\delta}{2} \int_{\partial B(x_0,\delta)} a G_a(x_0,x)^2 \, \mathrm{d}\sigma - \tfrac{1}{2} \int_{\partial B(x_0,\delta)} G_\lambda(x_0,x) \, \partial_v G_a(x_0,x) \, \mathrm{d}\sigma$$

$$+\delta \int_{\partial B(x_0,\delta)} \left(\tfrac{1}{2} \left|\nabla G_\lambda(x_0,x)\right|^2 - \left(\partial_v G_\lambda(x_0,x)\right)^2\right) \mathrm{d}\sigma$$

on fait tendre δ vers 0 des deux côtés de cette relation, on obtient finalement que $g_\lambda(x_0,x_0) = 0$ donc on a $2 \Rightarrow 1$ c'est à dire que $S_\lambda < S_3^{-1} \Rightarrow$ il existe $x \in \Omega$ tel que $g_\lambda(x,x) > 0$

d'ou la preuve du théorème donc on a bien les équivalences entre les 3 propriétés du théorème

Bibliographie

[1] Aubin, T. Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Amp'ere equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 252. Springer-Verlag, New York, 1982. xii+204 pp.

[2] J.F. Babadjian :Equations aux derivees partielles,Université Paris-Sud,61-71

[3] Marcel Berger, A Panoramic View of Riemannian Geometry, p. 552-568

[4] P.Bernard :Topologie Et Calcul Differentiel,December 16, 2013

[5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle - theorie et applications. Masson, 1983.

[6] H. Brézis, L. Nirenberg ; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[7] H. Brézis, E. Lieb ; A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. A.M.S 88 (1983), 486-490.

[8] H. Brézis et J. M. Coron, Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture, C.P.A.M., vol. 37, 1984, p. 149-187.

[9] H. Brézis, L.A. Peletier, Asymptotics for elliptic equations involving critical Sobolev exponents, in : L.Modica, F. Colombini, A. Marino, S. Spagnolo (Eds.), Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Birkhaüser, Basel, 1989.

[10] S. Brendle et R.Schoen, Curvature, Sphere Theorems, and the Ricci Flow , Bull. Amer. Math. Soc., vol. 48, no 1, 2011,

[11] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe, Bifurcation and multiplicity re- sults for non linear elliptic problems involving critical Sobolev exponents, Anal. de lI. H. P. 5 (1985), 341-350.

[12] M. Chipot, Elliptic equations : An introductory course, Birkhäuser Advanced texts, 1979.

[13] B.C.Deny. Théorie du potentiel, tome 10, no 1 (1965-1966), exp. no 1, p. 1-30

[14] G. Devillanova and S. Solimini. Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth. Adv. Diff. Eq., (7), 2002.

[15] O. Druet, The best constants problem in Sobolev inequalities, Math. Annalen 314 (1999) 327–346.

[16] O. Druet, Optimal Sobolev inequalities and extremal functions, The three-dimensional case, Indiana University Mathematics Journal

[17] O.Druet, : Elliptic equations with critical Sobolev exponents in dimension 3. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 19, 125–142 (2002)

[18] O.Druet, : Compactness for Yamabe metrics in low dimensions. Int. Math. Res. Notices 2004, no. 23, 1143–1191

[19] O. Druet, E. Hebey, F.Robert, Blow-up theory in Riemannian Geometry, Princeton University Press 2004.

[20] D. G. Duffy, Green's Functions with Applications, CRC Press, 2001 (ISBN 1-58488-110-0), aperçu sur Google Livres — Ouvrage de mathématiques.

[21] D. G. de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Springer-Verlag, 1989.*

[22] H. Duquenne.*Généralités sur la Géodésie ,1ère édition 1998*

[23] F.Gary, *Green's Functions, Cambridge University Press, 1982 (ISBN 0-521-28288-8)*

[24] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg. *Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm. Math. Phys., (68), 1979.*

[25] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin, 1983.*

[26] G.Giraud, *Sur le problème de Dirichlet generalise. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. , 46, (1929), 131-245.*

[27] Z.C. Han, *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. I.H.P., Analyse non-linéaire 8 (2) (1991) 159– 174.*

[28] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya ; *Inequalities, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1934.*

[29] E. Hebey. *Introduction 'a l'analyse non lineaire sur les varietes. Diderot, 1997.*

[30] J.Justin, *Théorie quantique des champs et phénomènes critiques . Presse d'université d'Oxford. Discussion approfondie de l'invariance d'échelle dans les théories quantiques et statistiques des champs, applications aux phénomènes critiques et à l'expansion epsilon et sujets connexes.*

[31] O. Kavian. *Introduction à la theorie des points critiques et applications aux probl'emes elliptiques. Mathematiques et applications (Springer- Verlag), 1989.*

[32] H.Le Dret. *Notes de cours M2—Equations aux derivees par- tielles elliptiques, Universite Pierre et Marie Curie, Paris.*

[33] D. G, Lions, P.-L, Nussbaum, R. D. *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63.*

[34] A. Nirenberg,S. Lagmon, Douglis,. *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Comm. Pure Appl. Math., 12, (1959), 623-727.*

[35] S.I. Pohozaev. *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u+\lambda f(u) = 0$. *Soviet Math. Doklady, (6), 1965 .*

[36] P.Rabinowitz , *On a class of non-linear Schrödinger equations. Z. Angew. Math. Phys. 43 :270-291, (1992).*

[37] P.A.Raviart,J.M. thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris (1983).*

[38] F, Robert.*Asymptotic behaviour of a nonlinear elliptic equation with critical Sobolev exponent. The radial case, Advances in Differential Equations, 6, (2001), 821-846.*

[39] F, Robert.*Blow-up theory for elliptic PDE's in Riemannian geometry, avec Olivier Druet et Emmanuel Hebey. Mathematical Notes, Princeton University Press, Volume 45. Annoncé dans Electronic Research Announcements of the AMS, 9, (2003), 19-25.*

[40] F, Robert.*Mountain-Pass critical points for Paneitz-Branson operators, avec P.Esposito, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 15, (2002), 493-517.*

[41] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Differential Geom. 20 (1984) 479–495.*

[42] R. Schoen, D. Zhang, Prescribed scalar curvature on the n-sphere, Calc. Var. PDE 4 (1996) 1–25.

[43] M. Struwe, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, Math. Z. 187 (1984) 511–517

[44] M. Struwe ; Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag 2008.

[45] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality, Annali di Mat. 110 (1976), 353-372.

[46] H. Yamabe. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J., (12), 1960.