République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Équations aux dérivées partielles

présenté par

DJEDID Kaouther

Soutenu le : 27-11-2022

Sur une équation elliptique semi-linéaire avec potentiel singulier

Soutenue devant le jury composé de :

M.N. Merzagui	Professeur,Université de Tlemcen	Président
M.K.Tahri	MCA, Ecole Supérieur de Management.Tlemcen	Examinateur
M.A.Bensedik	MCB, Université de Tlemcen	Examinateur
M.A. Attar	MCA, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2021-2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mon cher père,

le premier héros à mes yeux, son soutien a toujours été constant, il m'a incitée à avoir confiance en moi et il m'a toujours encouragée tout au long de mes études. Merci Abi.

A ma chère mère,

mon guide, ma source de force et la personne qui a fait de la nuit un jour pour moi. Je salue son courage et son sacrifice. Merci Oumi.

A la mémoire de ma chère tante " Aicha ",

Elle a toujours été dans mon esprit et dans mon cœur. Que Dieu la garde dans son vaste paradis.

A ma chère sœur " Imane Assia ",

ma moitié la plus proche du monde, ma principale source de vie et d'amour ainsi qu' à son adorable fils " Adem Mouad ", que Dieu le protège.

A mes chers frères " Abd Alrrahim " et " Ibrahim ",

la source de mon espoir et de ma motivation. Je leurs souhaitent une longue vie, ainsi que beaucoup de joie et de bonheur.

À toutes mes amies et à tous ceux qui occupent une place dans mon cœur.

Je dédie ce travail à tous les membres de ma famille et mes proches et à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

DJEDID Kaouther.

"La patience, c'est accepter calmement que les choses arrivent dans un ordre parfois différent de celui qu'on espérait".
-David G.Allen-

Remerciements

Tout d'abord, " **El Hamdoulillah** ", c'est grâce à **ALLAH** tout-Puissant qui m'a donnée la santé et la volonté de réaliser mon mémoire après des années d'études que je n'oublierai jamais.

Ce travail n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide de monsieur " **M. ATTAR Ahmed** " M.C.A à l'université de Tlemcen, je tiens à lui adresser mes sincères remerciements puisqu'il a accepté de m'encadrer et pour son encadrement de qualité, ses encouragements, sa patience sans limite et sa gentillesse durant toute la période de la préparation de ce mémoire. C'est un grand plaisir pour moi de travailler avec lui.

Je remercie également, **"Mme Merzagui Naima"** professeur à l'Université de Tlemcen pour avoir aimablement accepté de présider le jury de ce mémoire, et pour son soutien et aussi ses conseils tout au long de notre master.

Mes remerciements vont également à **"M. Bensedik Ahmed"**, M.C.B. de l'Université de Tlemcen d'avoir accepté de participer à mon jury de mémoire et bien plus encore, pour son soutien moral et sa grande disponibilité. Il a été présent à chaque instant, et à tous les moments de démotivation.

Je voudrais également remercie **"M. Tahri Kamel"** M.C.A à ESM de Tlemcen d'avoir accepté de participer à mon jury de mémoire.

Je remercie en particulier **"M. Allam abdalaziz"**, chef du département de mathématiques et tous les enseignants, de leur générosité et de leur grande patience durant tout notre cursus universitaire, sans oublier également tout autre membre du département de mathématiques.

Un grand merci à mes proches, en particulier ma mère et mon père, pour leur amour, leur patience infinie et surtout leur soutien moral lors des moments difficiles, en une seule phrase je vous dis : "vous êtes ma force et ma raison de vivre".

Merci à toutes les personnes qui ont rendu ce travail possible et même si elles ne figurent pas dans cette courte liste, elles sont présentes dans mes pensées.

DJEDID Kaouther.

Table des matières

Notation

Symbole	**Signification**
$x=(x_1,x_2,...,x_N)$	Élément de $\mathbb{R}^N$
$r=\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_N^2}$	Module de x
$\|\Omega\|$	Mesure de Ω
$D_iu=\partial_iu=\frac{\partial u}{\partial x_i}=u_{x_i}$	Dérivée partielle de u par rapport a x_i
$Du=\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
p'	Exposant conjugué de p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$C^\infty(\Omega)$	Fonctions infiniment dérivables dans Ω
$C_0^\infty(\Omega)=D(\Omega)$	Fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω
$D^+(\Omega)$	Fonctions de $D(\Omega)$ non négatives
$D'(\Omega)$	Espace dual de $C_0^\infty(\Omega)$, c.à.d espace des distributions
$M(\Omega)$	Ensemble des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.
$L^p_\gamma(\Omega,\|x\|^{-p\gamma}\,dx)$	$\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ u\ mesurable,\int_\Omega\|u\|^p\|x\|^{-p\gamma}\,dx<\infty\right\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ u\ mesurable, et\ \exists\ c>0,\ \|u(x)\|\leqslant c\ p.p\ dans\ \Omega\}$
$L^{p'}(\Omega,\|x\|^{-p'\gamma}\,dx)$	Espace dual de $L^p(\Omega\|x\|^{-p\gamma}\,dx)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\hookrightarrow$	Injection continue
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte

Introduction

De nos jours, les équations aux dérivées partielles (en abrégé EDP) jouent un rôle extrêmement important dans la compréhension d'énormément de phénomènes issus du monde réel (phénomènes physiques, chimiques, biologiques ou économiques). En effet grâce à la modélisation mathématique de ces phénomènes à travers des EDP que l'on a pu comprendre le rôle des différents paramètres, surtout obtenir des prévisions parfois prodigieusement précises sur le comportement du modèle étudié.

Une des choses à prendre en compte dans la résolution mathématique des EDP est qu'il ne s'agit pas d'obtenir leurs solutions de manière explicite ! En revanche, ce que les mathématiques permettent de faire, c'est de dire si une ou plusieurs solutions existent, et d'écrire parfois très finement certaines propriétés des solutions.
Les équations aux dérivées partielles se divisent en trois types : les équations paraboliques, les équations hyperboliques et les équations elliptiques. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons principalement à une classe du troisième type d'équations.
Les équations de ce type interviennent très souvent dans la modélisation de phénomènes stationnaire (c'est à dire n'évoluant pas dans le temps). Par exemple :

- en électrostatique : calcul de potentiel électrique.
- en mécanique des fluides : calcul d'écoulement "potentiels"
- en mécanique quantique : l'existence des solutions stationnaires de l'équation de Schrodinger dont c'est le sujet de ce mémoire.

Dans notre travail, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et de la non-existence d'une solution positive d'un problème elliptique semi-linéaire à potentiel carré inversé et à poids en se basant sur l'analyse du travail de [8](pour le cas $\gamma = 0$).
Notre mémoire est composé de trois chapitres, le premier chapitre constitue une partie préliminaire où nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle telles que : Les espaces de Sobolev, les injections continues et compactes, puis nous présentons quelques inégalités importantes, notamment l'inégalité de Hardy, ainsi que quelques théorèmes et définitions qui nous seront utiles par la suite.
Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour un problème ayant une structure variationnelle de type Schrodinger en présence d'un potentiel singulier,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\ \left(|x|^{-2\gamma}\nabla u \right) & = & \lambda \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + u_+^p & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u & \geqslant & 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

Où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < 2_\gamma^* - 1$, $\gamma < \frac{N-2}{2}$ et $0 < \lambda < \Lambda_{N,\gamma}$ avec $\Lambda_{N,\gamma} = \left(\dfrac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ est la constante de Hardy qui est optimale, puis on étudiera le cas limite $\lambda = \Lambda_{N,\gamma}$.
La principale idée de la présente étude est d'utiliser le théorème de Passe-Montagne, l'inégalité de Hardy et l'inégalité améliorée de Hardy.

Le troisième chapitre, est réservé à l'étude de l'existence de solutions radiales dans le cas où $2_\gamma^* - 1 < p < p^+$ dans un domaine bien particulier qui est la boule, en effet quand $p > p^+$ on démontre la non-existence de solution non triviale.

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

Ce premier chapitre a pour objet la présentation des notions et des résultats utilisés dans les chapitres suivants (théorèmes d'injection et les inégalités de Sobolev, ainsi que leurs propriétés les plus importantes). On note que les références de bases pour ce chapitre sont les livres [5], [14] et [17].

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1 *(Espace réflexif)*

Soit E un espace de Banach, $E^*; E^{**}$, le dual et le bi-dual de E respectivement. On définit l'application

$$J : E \to E^{**} \ par \ \langle J(x), y^* \rangle_{E^{**},E^*} = \langle y^*, x \rangle_{E^*,E}$$

E est dit réflexif si et seulement si l'application J est bijective. Dans ce cas on fera l'identification $E = E^{**}$.

1.1.1 Espace de Lebesgue L^p

Définition 1.2 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $p \geqslant 1$, et soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, $\gamma < \frac{N-2}{2}$. On définit*

$$L^p_\gamma(\Omega) \equiv L^p(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx) = \left\{ v : \mathit{\Omega} \to \mathbb{R};\ u \quad measurable\ et \quad \int_\Omega |v(x)|^p |x|^{-p\gamma}\, dx < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{L^p_\gamma(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p |x|^{-p\gamma}\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{ v : \mathit{\Omega} \to \mathbb{R};\ v\ mesurable, et\ \exists\ c > 0 \ \ telle\ que \ \ |v(x)| \leqslant c,\ p.p\ dans\ \Omega \}.$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0 \ \textit{telle que} \ \ |v(x)| \leqslant c \ \textit{p.p dans} \ \Omega\}$$

Proposition 1.1 *(Inégalité de Hölder)*
Soit $1 \leqslant p < +\infty$, on note p' l'exposant conjugué de p i.e :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Si $v \in L^p_\gamma(\Omega)$ et $w \in L^{p'}_\gamma(\Omega)$ alors $vw \in L^1_\gamma(\Omega)$, et

$$\int_\Omega |vw|\, dx \ \leqslant \ \|v\|_{L^p_\gamma(\Omega)} \|w\|_{L^{p'}_\gamma(\Omega)}.$$

Comme conséquence de l'inégalité de Hölder dans un domaine borné, on a :

Proposition 1.2 *Soit $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$:*

$$L^q_\gamma(\Omega) \hookrightarrow L^p_\gamma(\Omega).$$

En particulier :

$$L^p_\gamma(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}_\gamma(\Omega), \ \forall p \in]1, \infty]$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Théorème 1.1 *(Inégalité d'interpolation)*
Soit $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, si $f \in L^p_\gamma(\Omega) \cap L^q_\gamma(\Omega)$ alors $f \in L^r_\gamma(\Omega)$ avec $r \in [p, q]$, et

$$\|f\|_{L^r_\gamma(\Omega)} \ \leqslant \ \|f\|^\alpha_{L^p_\gamma(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q_\gamma(\Omega)} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \ \ \textit{pour tout} \ \alpha \in [0, 1].$$

Théorème 1.2 *L'espace $L^p_\gamma(\Omega)$ est :*
- *Un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*
- *Un espace séparable pour tout $1 \leqslant p < +\infty$.*
- *Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Preuve. voir [5] ∎

1.1.2 Quelques résultats d'intégration

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$)

Définition 1.3 *(Fonctions équi-integrable)*
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de L^1 est équi-integrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|E| < \delta$ entraîne pour tout n,

$$\int_E |f_n(x)| dx \ \leqslant \ \varepsilon.$$

Lemme 1.1 *(lemme de Vitali)*
Soit X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$. Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui converge presque partout vers f, et qui est équi-intégrable. Alors $f \in L^1(X)$ et $\{f_n\}_n$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

Lemme 1.2 *(Lemme de Fatou)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geqslant 0$ *p.p sur* Ω.
2. $\sup\limits_n f_n < \infty$.

Pour p.p $x \in \Omega$, on pose $f(x) = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f(x) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x).$$

Théorème 1.3 *(Théorème de convergence monotone)*
Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions positives de $L^1(\Omega)$ telle que $\sup\limits_n \int_\Omega f_n < \infty$. Alors $(f_n)_n$ converge p.p dans Ω vers f. De plus $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Théorème 1.4 *(Théorème de convergence dominée)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

- $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p sur* Ω.
- $\exists g \in L^1(\Omega)$ *telle que :* $\forall n \geqslant 1, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ *p.p dans* Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Lemme 1.3 *(Brézis-Lieb) [17]*
Soit $1 \leqslant p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p_\gamma(\Omega)$ bornée telle que $f_n \to f$ p.p dans Ω, alors $f \in L^p_\gamma(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\|f_n\|^p_{L^p_\gamma(\Omega)} - \|f_n - f\|^p_{L^p_\gamma(\Omega)} \right) = \|f\|^p_{L^p_\gamma(\Omega)}.$$

Comme application directe du Lemme de Bézis-Lieb, on déduit que si $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ est une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ p.p, et $\|f_n\|_{L^p_\gamma(\Omega)} \to \|f\|_{L^p_\gamma(\Omega)}$. Alors $f_n \to f$ fortement dans $L^p_\gamma(\Omega)$.

1.2 Espaces de Sobolev pondérés $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \geqslant 1$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p_\gamma(\Omega); \exists g_1, ..., g_n \in L^p_\gamma(\Omega) | \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, |x|^{-\gamma} dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, |x|^{-\gamma} dx,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall\, i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

On note $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$

L'espace $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)} = \|u\|_{L^p_\gamma(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p_\gamma(\Omega)}$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)} = \left(\|u\|^p_{L^p_\gamma(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^p_{L^p_\gamma(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

- L'espace $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, réflexif si $1 < p < +\infty$, séparable si $1 \leqslant p < +\infty$.
- Pour $p = 2$, on pose $H^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx) = W^{1,2}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$.
- L'espace $H^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)} = (u, v)_{L^2_\gamma(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2_\gamma(\Omega)}.$$

  La norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)} = \left(\|u\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

  est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$.
- L'espace $H^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$ est un espace de Hilbert séparable.
- Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$.
- Pour $p = 2$, on note $H_0^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx) = W_0^{1,2}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$.

- L'espace $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-p\gamma}\, dx)$ est un espace de Banach séparable pour $1 \leqslant p < +\infty$, il est réflexif si $1 \leqslant p < +\infty$.
- $H_0^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx)$.

Théorème 1.5 *(Rellich-Kondrachov)[5] Soit Ω un ouvert borné de classe C^1.*
On a

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \textit{pour tout } q \in [1, p^*) \quad \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} & p < N \\ L^q(\Omega) & \textit{pour tout} \quad q \in [1, \infty) & p = N \\ C(\overline{\Omega}) & & p > N \end{cases}$$

avec injections compactes.

Remarque 1.1 *Les injections précéedentes ne sont vraies pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ que si Ω est borné.*

1.2.1 Quelques inégalités

Proposition 1.3 *(Inégalité de Poincaré)*
Soit Ω un domaine borné dans une direction, $1 \leqslant p < +\infty$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} , \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.6 *(Inégalité de Sobolev)*
Soit $1 \leqslant p < N$, il existe une constante c qui dépend uniquement de N et p telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Pour tout $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $p^* := \frac{Np}{N-p}$.
Comme conséquence, l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, p^*]$.

Théorème 1.7 *(voir [3]) (Inégalité de Hardy-Sobolev)*
Soit $1 < p < N$, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-p\gamma}\ dx)$ alors,

- $\dfrac{u}{|x|} \in L_\gamma^p(\mathbb{R}^N)$
- *L'inégalité de Hardy*

$$\Lambda_{N,\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p |x|^{-p\gamma} dx,$$

où $\Lambda_N = (\frac{N-p(\gamma+1)}{p})^p$, est la constante optimale, qui n'est pas atteinte, et qui ne dépend pas du domaine.

On présente une version améliorée de cette inégalité pour $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$ et $1 < p < N$, où N désigne la dimension de $\mathbb{R}^N$, l'espace euclidien. On considère l'espace de Sobolev pondéré H, que l'on définit comme la complétude de $C^\infty(\Omega)$, par rapport à la norme

$$\|\phi\|_H = \left(\int_\Omega \left(\frac{|\phi|^2}{|x|^2} + |\nabla\phi|^2 \right) |x|^{-2\gamma} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on note par H la complétude de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme $\|.\|_H$.
On remarque qu'avec l'inégalité de Poincaré, l'espace H peut être défini comme la complétude de C_0^∞ en respectant la norme L^p du gradient avec un poids.
L'inégalité de Sobolev améliorée qui sera l'outil principal est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.8 *Soit γ et N tels que $N > 2$ et $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$. Alors pour tout $1 < q < 2$, il existe une constante positive $C = C(N, q, \gamma, \Omega)$ telle que pour tout $\phi \in H$ on a*

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx - \left(\frac{N - 2(\gamma+1)}{2} \right)^2 \int_\Omega \frac{\phi^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx \geqslant C \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^q |x|^{-r\gamma} dx \right)^{\frac{2}{q}}$$

avec $1 < q < 2$, $1 \leqslant r < \infty$ si $\gamma \leqslant 0$, $1 \leqslant r < 2 + \rho(N, q, \gamma)$ si $\gamma > 0$, où $\rho(N, q, \gamma)$ est une certaine constante positive.

Preuve. Voir [1] ■

Théorème 1.9 *(Inégalité de Picone)*
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un domaine.
Si $u \in W_0^{1,2}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx), u \geqslant 0, -div\ (\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ ) \geqslant 0, v|_{\partial\Omega} = 0, v \geqslant 0$ alors :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma}\, dx \geqslant \int_\Omega (\frac{u^2}{v})(-div\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \right))\, dx$$

Preuve. Voir [3] ■

1.3 Points critiques

L'essentiel de ce qui suit est tiré de la référence [17].

1.3.1 Suite de Palais-Smale

Définition 1.4 *(Suite de Palais-Smale) Une suite* $(u_n)_n \subset X$ *telle que :*

$$J(u_n) \to c \quad dans \quad \mathbb{R} \quad et \quad J'(u_n) \to 0 \quad dans \quad X', \textit{le dual de } X$$

est appelée une suite de Palais-Smale au niveau c, en abrégé $(PS)_c$.

Définition 1.5 *(Condition de Palais-Smale) Soient X un espace de Banach, et* $J : X \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle de classe* C^1. *Si* $c \in \mathbb{R}$, *on dit que J vérifie les conditions de Palais-Smale au niveau c si toute suite* $(u_n)_n \subset X$ *telle que :*

$$J(u_n) \to c \quad dans \quad \mathbb{R} \quad et \quad J'(u_n) \to 0 \quad dans \quad X',$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ *convergente.*

1.3.2 Théorème du Col

Pour la fonctionnelle J qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminés par un argument de type min-max, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne, [en Anglais : mountain pass theorem].

Théorème 1.10 *(Théorème d'Ambrosetti-Rabionowitz) [20] Soient X un espace de Banach, et* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *vérifiant les conditions de Palais-Smale.*
On suppose que $J(0) = 0$ *et que :*

- $\exists R > 0 \quad et \quad \alpha > 0 \quad tels\ que \quad \|u\| = R \quad alors \quad J(u) \geqslant \alpha$
- $\exists u_0 \in X, \|u_0\| > R \quad et \quad J(u) < \alpha.$

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geqslant \alpha$. *De façon plus précise, si on pose*

$$P := \{\phi \in C([0,1], X); \quad \phi(0) = 0 \quad et \quad \phi(1) = u_0\}$$

alors

$$c := \inf_{p \in P} \max_{t \in [0,1]} J(p(t))$$

est une valeur critique de J , et $c \geqslant \alpha$.

1.4 Principe du maximum

Proposition 1.4 *Soit l'équation $-\Delta u = g$. Si*

$$u \geqslant 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ et } \quad g \geqslant 0 \quad \text{sur } \Omega$$

alors

$$u \geqslant 0 \quad \text{sur } \Omega \, .$$

1.4.1 Inégalité de Harnack

Soient B_{2r} une boule ouverte dans $\mathbb{R}^N$ et u une fonction harmonique non négative dans cette boule, alors il existe une constante $C(N)$ telle que

$$\sup_{B_r(0)} u \leqslant C(N) \inf_{B_r(0)} u.$$

De plus il y a une inégalité plus faible que l'inégalité précédente qui s'énonce comme suit :
Soit u telle que

$$\operatorname{div} \left(|x|^{-2\gamma} \nabla u \right) \geqslant 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \quad u|_{\partial\Omega} \geqslant 0,$$

alors

$$\sup_B u \geqslant C(N) \left(\int_{B_1} u^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{avec } \; q < \frac{N}{N-1}.$$

Et si

$$\operatorname{div} \left(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n \right) \leqslant 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \quad u|_{\partial\Omega} \leqslant 0,$$

alors

$$\inf_B u \geqslant C(N) \left(\int_{B_1} u^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{avec } \; q < \frac{N}{N-1}$$

avec $B \subset \overline{B_1} \subset \Omega$.

Chapitre 2

Existence de solutions pour un problème variationnel particulier

2.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de traiter le problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \right) &= \lambda \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + u_+^p & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u &\geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier dans $\mathbb{R}^N$ et $0 \in \Omega$, $1 < p < 2_\gamma^* - 1$, $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$ et $0 < \lambda \leqslant \Lambda_{N,\gamma}$ avec $\Lambda_{N,\gamma} = \left(\dfrac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ la constante de Hardy.

2.2 Cas 1 : $0 < \lambda < \Lambda_{N,\gamma}$ et $1 < p < 2_\gamma^* - 1$

On note que le problème (2.1) admet une structure variationnelle dans ce cas et la fonctionnelle d'énergie associée est :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma}\, dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_+)^{p+1}\, dx. \tag{2.2}$$

Définition 2.1 *On dit que $u \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx\right)$ est une solution faible de l'équation (2.1) si*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v |x|^{-2\gamma}\, dx - \lambda \int_\Omega \frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} v\, dx - \int_\Omega (u_+)^p v\, dx = 0.$$

pour tout $v \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx\right)$.

Remarque 2.1

$$H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2\gamma}\, dx\right) \hookrightarrow L_\gamma^q(\Omega) \text{ avec injection continue pour tout } \quad q \leqslant 2_\gamma^*$$

$$H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx\right) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q_\gamma(\Omega) \quad \text{avec injection compacte pour tout} \quad q<2^*_\gamma.$$

Notons que

$$2^*_\gamma=\begin{cases}\dfrac{2N}{N-2} & si\ \gamma\geqslant 0.\\[2ex] \dfrac{2(N-2\gamma)}{N-2(\gamma+1)} & si\ \gamma<0\end{cases}$$

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, et $1<p<2^*_\gamma-1$, et $0<\lambda\leqslant\Lambda_{N,\gamma}$, alors le problème (2.1) possède une solution positive $u\in H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)$.*

Preuve. Notons que le problème admet une structure variationnelle et la fonctionnelle d'energie définie en (2.2) est convexe. Vérifions les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne (voir Théorème 1.10) :

i) $J(0)=0$

ii) $\exists\ R>0, a>0$ tels que $\|u\|=R$ alors $J(u)\geqslant a$

iii) $\exists\ u_0\in H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma})$, $\|u_0\|>R$ et $J(u_0)<a$.

- Vérification des conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne :

i) est évident.

ii) On a

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2|x|^{-2\gamma}\,dx-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\,dx-\frac{1}{p+1}\int_\Omega(u_+)^{p+1}\,dx.$$

Or par les inégalités de Hölder et Sobolev on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega(u_+)^{p+1}|x|^{-(p+1)\gamma}|x|^{(p+1)\gamma}\,dx &\leqslant\left(\int_\Omega u^{2^*_\gamma}|x|^{-2^*_\gamma\gamma}\,dx\right)^{\frac{p+1}{2^*_\gamma}}\left(\int_\Omega|x|^{(p+1)\frac{2^*_\gamma}{2^*_\gamma-p-1}}\,dx\right)^{1-\frac{p+1}{2^*_\gamma}}\\ &\leqslant SC^{1-\frac{p+1}{2^*_\gamma}}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2|x|^{-2\gamma}\,dx\right)^{\frac{p+1}{2}}\\ &\leqslant C_1\|\nabla u\|^{p+1}_{L^2_\gamma(\Omega)}SC_1\\ &\leqslant C_1S\|u\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)}\end{aligned}$$

$$\int_\Omega(u_+)^{p+1}\,dx\leqslant C'\|u\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)}. \tag{2.3}$$

En utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev Théorème 1.7 et l'inégalité (2.3), en remplaçant $\|u\|_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma})}$ par R dans la fonctionnelle d'énergie on trouve

$$\begin{aligned}J(u)&\geqslant\frac{1}{2}R^2-\frac{\lambda}{2\Lambda_{N,\gamma}}R^2-C'R^{p+1}\\ &\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\right)R^2-C'R^{p+1}\\ &\geqslant R^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\right)-C'R^{p-1}\right].\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\right)-C'R^{p-1}$ sera positif si $R \leqslant \left(\frac{1}{2C'}\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} = \alpha$.
Ce qui implique que

$$a = R^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\right)-C'R^{p-1}\right] \quad \text{avec} \quad R \in \left]\,0,\alpha\,\right[.$$

Donc

$$J(u) \geqslant a \qquad \text{pour} \qquad u \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2\gamma}\,dx\right).$$

iii) Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$ et $\|v\|_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} = 1$

$$J(tv) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla tv|^2\,|x|^{-2\gamma}\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{(tv)^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\,dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (v_+)^{p+1}\,dx.$$

Par l'inégalité de Hardy on a

$$\begin{aligned} J(tv) &\leqslant \frac{t^2}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} - \frac{\lambda t^2}{2\Lambda_{N,\gamma}}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (v_+)^{p+1}\,dx \\ &\leqslant \left[\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\right)\right)\|v\|^2_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)}\right]t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (v_+)^{p+1}\,dx. \end{aligned}$$

Or, il existe $\mu > 0$ tel que $\int_\Omega (v_+)^{p+1}\,dx \geqslant \mu$, et comme $\|v\|_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} = 1$ alors

$$J(tv) \leqslant C_1 t^2 - \overline{\mu}\; t^{p+1} \qquad \text{avec} \quad \overline{\mu} = \frac{\mu}{p+1}.$$

De plus $J(tv) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ avec $p > 1$
et il existe t_0 assez grand tel que $u_0 = t_0 v$ ce qui implique que

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} > R \quad \text{et} \quad J(u_0) < a$$

Ce qui entraine que les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne sont satisfaites.
Reste à montrer que la fonctionnelle d'énergie vérifie les conditions de Palais-Smale.
- Les conditions de Palais-Smale :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)$ et $c \in \mathbb{R}$, J vérifie les conditions de Palais-Smale au niveau c si J vérifie

$$J(u_n) \to c \text{ dans } H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx) \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } (H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx))' = H^{-1}(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)$$

-On démontre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)$:
Puisque

$$J(u_n) = c + o(1) \text{ et } \langle J'(u_n), u_n\rangle = o(1).$$

Donc

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,|x|^{-2\gamma}\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n^+)^{p+1}\,dx = c + o(1). \\ \langle J'(u_n), u_n\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,|x|^{-2\gamma}\,dx - \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\,dx - \int_\Omega (u_n^+)^{p+1}\,dx = o(1). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{p+1}\langle J'(u_n), u_n\rangle &= c + o(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|\nabla u_n\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\,dx. \end{aligned}$$

Avec les inégalités de Hardy et Sobolev

$$\begin{aligned} c + o(1) &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} \\ &\geqslant C\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} \end{aligned}$$

puisque $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p+1} > 0$ alors $\|u_n\|_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} < C$.
Comme $H^1_0(\Omega, |x|^{-2\gamma}\,dx)$ est un espace réflexif donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1_0(\Omega, |x|^{-2\gamma}\,dx))$, plus précisement

$$\begin{array}{lcll} u_n & \rightharpoonup & u & \text{dans } H^1_0(\Omega, |x|^{-2\gamma}\,dx) \\ u_n & \to & u & \text{dans } L^q_\gamma(\Omega) \text{ avec } q < 2^*_\gamma \\ u_n & \to & u & \text{presque partout dans } \Omega. \end{array}$$

- Montrons la convergence forte de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H^1_0(\Omega, |x|^{-2\gamma}\,dx)$:
On a

$$-\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u_n\ \right) - \lambda\frac{u_n}{|x|^{2(1+\gamma)}} - (u_n^+)^p = 0$$

et

$$-\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \right) - \lambda\frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} - (u_+)^p = 0,$$

alors

$$-\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla(u_n - u)\ \right) - \lambda\frac{(u_n - u)}{|x|^{2(1+\gamma)}} - ((u_n^+)^p - (u_+)^p) = 0. \tag{2.4}$$

En utilisant $(u_n - u)$ comme fonction test dans (2.4) alors,

$$\langle J'(u_n) - J'(u), u_n - u\rangle = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \langle J'(u_n) - J'(u), u_n - u\rangle = &\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2\ |x|^{-2\gamma}\ dx - \int_\Omega \frac{(u_n - u)^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\ dx \\ &- \int_\Omega \left((u_n^+)^p - (u_+)^p\right)(u_n - u)\ dx = 0. \end{aligned}$$

Et par les inégalités de Hölder et Sobolev on trouve que

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \|u_n - u\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}}\|u_n - u\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)} - \int_\Omega \left((u_n^+)^p - (u_+)^p\right)(u_n - u)\ dx \\ &\geqslant (1 - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}})\|u_n - u\|^2_{H^1_0(\Omega,|x|^{-2\gamma}\ dx)} - \int_\Omega \left((u_n^+)^p - (u_+)^p\right)(u_n - u)\ dx. \end{aligned}$$

Donc

$$(1-\frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}})\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\ dx)}-\int_\Omega \left((u_n^+)^p-(u_+)^p\right)(u_n-u)\ dx \leqslant 0.$$

Notons que $\lambda < \Lambda_{N,\gamma}$, et d'après le Théorème 1.5 (Rellich-Kondrachov),

$$u_n \to u \qquad \text{dans}\ \ L^q\left(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx\right)\ \ \text{avec}\ \ q<2_\gamma^*.$$

Pour $p+1<2_\gamma^*$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_n^p-u^p)(u_n-u)\ dx &= \int_\Omega (u_n^+)^{p+1}dx-\int_\Omega (u_+)^{p+1}\,dx-\int_\Omega (u_n^+)^p\,dx+\int_\Omega (u_+)^{p+1}\,dx\\ &= o(1).\end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)}\leqslant o(1).$$

Donc

$$u_n\to u \qquad \text{dans}\ \ H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx).$$

Donc J satisfait la condition de Palais-Smale et les conditions géométriques de Passe-Montagne. Considérons l'ensemble

$$B:=\left\{\phi\in C([0,1],\ H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx));\ \phi(0)=0\quad \text{et}\quad \phi(1)=u_0\right\},$$

avec $u_0=t_0v$ et

$$c:=\inf_{\phi\in B}\max_{t\in[0,1]}J(\phi(t)),$$

et le théorème de Passe-Montagne assure qu'il existe une solution $u\in H_0^1(\Omega,|x|^{-2\gamma}\,dx)$ avec $J(u)=c\geqslant a$ (c est une valeur critique et alors u est un point critique pour la fonctionnelle d'énergie et les points critiques sont des solutions de notre problème d'où l'existence de la solution de (2.1))

- La positivité de la solution :

On a

$$-\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \right)-\frac{\lambda}{|x|^{2(1+\gamma)}}\ u=u_+^p.$$

Sachant que $u=u_+-u_-$, avec $u_+=\max\{u,0\}$.

On trouve que

$$-\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla\left(u_+-u_-\right)\ \right)-\lambda\frac{(u_+-u_-)}{|x|^{2(1+\gamma)}}=u_+^p,$$

Multiplions par u_- et intégrons, on obtient

$$-\int_\Omega \text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla\left(u_+-u_-\right)\ \right)u_-\ dx-\lambda\int_\Omega\frac{(u_+-u_-)\,u_-}{|x|^{2(1+\gamma)}}\ dx=\int_\Omega u_+^p u_-\ dx.$$

Ce qui entraîne que

$$\int_\Omega \nabla (u_+ - u_-) \ \nabla u_- \ |x|^{-2\gamma} \ dx - \lambda \int_\Omega \left(\frac{u_+}{|x|^{2(1+\gamma)}} - \frac{u_-}{|x|^{2(1+\gamma)}} \right) u_- \ dx = \int_\Omega u_+^p u_- dx,$$

Comme $u_+.u_- = 0$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 \ |x|^{-2\gamma} \ dx + \lambda \int_\Omega \frac{u_-^2}{|x|^{2(1+\gamma)}} \ dx = 0.$$

Ce qui implique que

$$u_- = 0 \ \text{ p.p} \quad \text{ donc } \quad u = u_+ \geqslant 0,$$

et on a donc prouvé que la solution u est positive. ■

2.3 Cas 2 : $\lambda = \Lambda_{N,\gamma}$ et $1 < p < 2_\gamma^* - 1$

Ce cas est un peu plus délicat. On aura besoin de l'inégalité de Hardy améliorée.

On considère l'espace de Hilbert noté H muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \ \nabla v \ |x|^{-2\gamma} \ dx - \Lambda_{N,\gamma} \int_\Omega \frac{uv}{|x|^{2(1+\gamma)}} \ dx,$$

H étant la complétude de $C_c^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_H^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \ |x|^{-2\gamma} \ dx - \lambda \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2(1+\gamma)}} dx. \tag{2.5}$$

On rapelle l'inégalité de Hardy améliorée suivante (Théorème 1.8)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \ |x|^{-2\gamma} \ dx - \Lambda_{N,\gamma} \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2(1+\gamma)}} \ dx \geqslant C \|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-2\gamma})}.$$

La fonctionnelle d'énergie de notre problème est donnée par :

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ |x|^{-2\gamma} \ dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2(1+\gamma)}} \ dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1} \ dx. \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1} \ dx. \end{aligned}$$

On procède de la même façon que dans le cas précédent. On commence par vérifier les conditions géométriques du col :

Théorème 2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < 2_\gamma^* - 1$ et $\lambda = \Lambda_{N,\gamma}$, alors le problème (2.1) possède une solution positive $u \in H$.*

Preuve.

- Vérification des conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne :

$i) J(0) = 0$.

$ii)$ il exixte $R > 0$ et $a > 0$ tel $\|u\|_H = R$ alors $J(u) \geqslant a$:

Puisque

$$L^p(\Omega, |x|^{-p\gamma}\ dx) \subset L^q(\Omega, |x|^{-q\gamma}\ dx) \qquad \forall\ \ q < p,$$

alors

$$W_0^{1,2}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\ dx) \subset W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-q\gamma}\ dx) \qquad \forall\ \ q < 2.$$

D'après l'inégalité de Hardy-Sobolev améliorée Théorème 1.8 on a

$$H \subset W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\ dx) \qquad \forall\ \ q < 2,$$

d'où

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-2\gamma}\ dx)} \leqslant C_1 \|u\|_H. \tag{2.6}$$

Et alors

$$H \subset W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\ dx) \subset L^{\alpha}(\Omega, |x|^{-\alpha\gamma}\ dx) \qquad \forall \alpha < q^*$$

avec injection compacte. Et puisque $q < 2$, donc $q^* < 2^*_\gamma$ et de $\alpha < q^*$, on en déduit que $\alpha < 2^*_\gamma$.

Comme $p + 1 < 2^*_\gamma$, d'où on a l'injection compacte

$$H \subset L^{p+1}(\Omega, |x|^{-(p+1)\gamma}\ dx),$$

alors

$$\int_\Omega |u|^{p+1} dx \leqslant C_2 \|u\|_H^{p+1}. \tag{2.7}$$

De (2.6) et (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{C_2}{p+1}\|u\|_H^{p+1} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{C_2}{p+1}\|u\|_H^{p-1}\right)\|u\|_H^2, \end{aligned}$$

En remplaçant $\|u\|_H$ par R dans l'inégalité précédente, on trouve

$$J(u) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{C_2}{p+1}R^{p-1}\right)R^2,$$

or $\dfrac{1}{2} - \dfrac{C_2}{p+1}R^{p-1}$ sera positive si $R \leqslant \left(\dfrac{p+1}{2C_2}\right)^{\dfrac{1}{p-1}} = \alpha$.

Ce qui implique que

$$a = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{C_2}{p+1}R^{p-1}\right)R^2\right] \qquad \text{avec} \quad R \in\ ]\,0, \alpha\,[\quad \text{et} \quad R = \|u\|_H.$$

Donc
$$J(u) > a.$$
$iii)$ Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$ et $\|v\|_H = 1$
$$J(tv) = \frac{1}{2}\|tv\|_H^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (tv_+)^{p+1}\,dx$$
alors
$$J(tv) = \frac{1}{2}t^2\|v\|_H^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega v_+^{p+1}dx$$
or, il existe $\mu > 0$ tel que $\displaystyle\int_\Omega v_+^{p+1}\,dx \geqslant \mu$, et comme $\|v\|_H = 1$ alors
$$J(tv) \leqslant \frac{1}{2}t^2 - \overline{\mu}t^{p+1} \qquad \text{avec} \quad \overline{\mu} = \frac{\mu}{p+1}$$
de plus $J(tv) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ avec $p > 1$
et $\exists t_0$ assez grand tel que $u_0 = t_0 v$ ce qui implique que
$$\|u_0\|_H > R \quad \text{et} \quad J(u_0) < a.$$
Les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne sont satisfaites.
Reste à monter que la fonctionnelle d'énergie vérifie les conditions de Palais-Smale,
- Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans H :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans H et $c \in \mathbb{R}$, J vérifie les conditions de Palais-Smale au niveau c si elle vérifie
$$J(u_n) \to c \;\text{ dans }\; H \text{ et } \; J'(u_n) \to 0 \;\text{ dans }\; H^{'}$$
cette suite converge fortement vers $u \in H$.
Puisque
$$J(u_n) \to c \;\text{ dans }\; H \;\text{ et }\; J'(u_n) \to 0 \;\text{ dans }\; H^{'},$$
alors,
$$J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_H^2 - \int_\Omega (u_n^+)^{p+1}dx \to c \quad \text{quand } \; n \to +\infty,$$
et
$$\langle J'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|_H^2 - \int_\Omega (u_n^+)^{p+1}dx \to 0 \quad \text{quand } \; n \to +\infty.$$
Ce qui implique que
$$J(u_n) - \frac{1}{p+1}\langle J'(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|_H^2 \to c \quad \text{quand } \; n \to +\infty,$$
et comme $\langle J'(u_n), u_n\rangle \to 0 \quad$ quand $\; n \to +\infty$ alors
$$J(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|_H^2 \to c \quad \text{quand } \; n \to +\infty.$$

D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H.

- Montrons que J vérifie les conditions de Palais-Smale si $p < 2^*_\gamma - 1$:

H est un espace réftexif et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans H.

Alors, il existe $u \in H$ et une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notée aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers u dans H.

De l'injection compacte $H \subset L^{p+1}\left(\Omega, |x|^{-(p+1)\gamma}\, dx\right)$, on a $u_n \to u$ dans $L^{p+1}_\gamma(\Omega)$.

On montre que la limite faible vérifie l'équation.

On a

$$\int_\Omega \left(-\mathrm{div}(\ |x|^{-2\gamma}\ \nabla u_n) - \Lambda_{N,\gamma}\frac{u_n}{|x|^{2(1+\gamma)}}\right)\phi\, dx = \int_\Omega \left(u_n^+\right)^p \phi\ \ dx,$$

qui équivaut à

$$\langle Lu_n, \phi\rangle - \int_\Omega \left(u_n^+\right)^p \phi\ \ dx = 0 \qquad \forall \phi \in H.$$

Comme $u_n \rightharpoonup u$ dans H alors

$$\langle u_n, L\phi\rangle \to \langle u, L\phi\rangle = \langle Lu, \phi\rangle \qquad\qquad \text{quand}\ \ n \to \infty,$$

car L est auto adjoint, reste à vérifier que $u_n \rightharpoonup u$ dans H alors

$$\int_\Omega \left(u_n^+\right)^p \phi\ \ dx \to \int_\Omega (u_+)^p \phi\ \ dx. \tag{2.8}$$

Soit $\phi \in L^\alpha(\Omega, |x|^{-\alpha\gamma}\, dx)$ pour un certain $\alpha < 2^*_\gamma$ et

$$u_n^p \to u^p\ \ \text{dans}\ \ \left((L^\alpha(\Omega, |x|^{-\alpha\gamma}\, dx)\right)' = L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}\gamma}\, dx),$$

donc

$$u_n \to u\ \ \text{dans}\ \ (L^b(\Omega, |x|^{-b\gamma}\, dx) \qquad \forall b < 2^*_\gamma\ \ \text{avec}\ \ b = p\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Alors il suffit de vérifier que $b = p\dfrac{\alpha}{\alpha-1} < 2^*_\gamma$,

$$b = p\frac{\alpha}{\alpha-1} < 2^*_\gamma \implies \alpha\left(2^*_\gamma - p\right) - 2^*_\gamma > 0,$$

alors

$$\alpha > \frac{2^*_\gamma}{2^*_\gamma - p},$$

et comme $\alpha < 2^*_\gamma$, donc

$$\frac{2^*_\gamma}{2^*_\gamma - p} < \alpha < 2^*_\gamma,$$

ce qui implique que

$$\frac{2^*_\gamma}{2^*_\gamma - p} < 2^*_\gamma,$$

d'où $2^*_\gamma - p > 1 \implies p < 2^*_\gamma - 1$, et alors (2.8) est vérifiée.
- Montrons la convergence forte de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H :
Par la condition de compacité on a

$$J'(u_n) = -\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u_n\ \right) - \Lambda_{N,\gamma}\frac{u_n}{|x|^{2(1+\gamma)}} - \left(u_n^+\right)^p \to 0 \quad \text{quand}\ \ n\to\infty,$$

$$J'(u) = -\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \right) - \Lambda_{N,\gamma}\frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} - u_+^p = 0.$$

Alors $J'(u_n) - J'(u) = o(1)$, donc

$$-\text{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\left(u_n - u\right)\right) - \Lambda_{N,\gamma}\frac{u_n - u}{|x|^{2(1+\gamma)}} = (u_n^+)^p - u_+^p + o(1) = 0.$$

En multipliant par $(u_n - u)$ et en intégrant on obtient

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2|x|^{-2\gamma}\ dx - \Lambda_{N,\gamma}\int_\Omega \frac{(u_n-u)^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}dx = \int_\Omega \left((u_n^+)^p - u_+^p\right)(u_n - u)\ dx + o(1) \to 0$$

quand $\ n\to\infty$, d'où

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'(u_n) - J'(u), u_n - u\rangle = \langle J'(u_n), u_n - u\rangle - \langle J'(u), u_n - u\rangle \\ &= \langle J'(u_n), u_n - u\rangle\ , \end{aligned}$$

car $\langle J'(u), u_n - u\rangle = 0$.
Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_H^2 &= \int_\Omega \left((u_n^+)^{p+1} - u_+^p\right)(u_n - u) + o(1) \\ &= \int_\Omega (u_n^+)^{p+1}\ dx + \int_\Omega u_+^{p+1}\ dx - \int_\Omega (u_n^+)^p u\ dx - \int_\Omega u_+^p u\ dx + o(1) \end{aligned}$$

tend vers 0 quand $n\to\infty$.
Et comme

$$\int_\Omega (u_n^+)^p\phi\ dx \to \int_\Omega u_+^p\phi\ dx \qquad \forall\phi\in L^\alpha(\Omega, |x|^{-\alpha\gamma}\ dx),\ \ \alpha < 2^*_\gamma$$

alors $u_n \to u$ dans H.
De plus de l'injection compacte

$$H \subset W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-2\gamma}\ dx) \qquad \text{pour}\ \ q < 2,$$

alors

$$\|u_n - u\|^2_{W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-2\gamma}\ dx)} \leqslant \|u_n - u\|_H^2 \to 0, \qquad \text{quand n} \to\infty$$

Donc J satisfait les conditions de Palais-Smale et les conditions géométriques de Passe-Montagne. Soit

$$c := \inf_{\nu\in B}\max_{t\in[0,1]} J(\nu(t))$$

alors le théorème de Passe-Montagne assure qu'il existe une solution $u \in H$ avec $J(u) = c \geqslant a$ (c est une valeur critique et alors u est un point critique pour la fonctionnelle d'énergie et les points critiques sont des solutions de notre problème d'où l'on a assuré l'existence de la solution de notre problème).

- Montrons que la solution u est positive :

L'utilisation du Principe du Maximum, notre problème est

$$-\mathrm{div}\ \left(|x|^{-2\gamma}\ \nabla u\right) - \Lambda_{N,\gamma}\frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} = u_+^p.$$

En multipliant par u_- puis en intégrant, on trouve :

$$-\int_\Omega \mathrm{div}\ \left(\nabla u\ |x|^{-2\gamma}\right) u_-\ dx - \Lambda_{N,\gamma}\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} u_-\ dx = \int_\Omega u_+^p u_- dx,$$

ce qui entraine que

$$\int_\Omega \nabla u\ \nabla u_-\ |x|^{-2\gamma}\ dx - \Lambda_{N,\gamma}\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} u_-\ dx = \int_\Omega u_+^p u_- dx.$$

Alors

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2\ |x|^{-2\gamma}\ dx - \Lambda_{N,\gamma}\int_\Omega \frac{u_-^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\ dx = 0,$$

due à l'orthogonalité entre u_- et u_+.

Donc

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2\ |x|^{-2\gamma}\ dx - \Lambda_{N,\gamma}\int_\Omega \frac{u_-^2}{|x|^{2(1+\gamma)}} dx = 0,$$

ce qui implique que

$$\|u_-\|_H^2 = 0.$$

Alors $u_- = 0$, par conséquent $u = u_+ \geqslant 0$.

De plus on a

$$-\mathrm{div}\ \left(|x|^{-2\gamma}\ \nabla u\right) = \Lambda_{N,\gamma}\frac{u}{|x|^{2(1+\gamma)}} + u_+^p \geqslant 0$$

et par l'inégalité de Harnack on trouve que

$$\inf_B u \geqslant C\left(\int_{B_1} u^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall q < \frac{N}{N-1} \qquad \text{avec}\ \ B \subset B_1 \subset \Omega.$$

D'après l'inégalité de Harnack $u \equiv 0$ sur tout Ω, ce qui est une contradiction avec les conditions d'existence d'un point critique.

Alors la solution u est positive $u > 0$, donc notre problème non linéaire admet un point critique strictement positif. ■

Chapitre 3

Solution radiale d'une équation semi-linéaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre , on va étudier l'existence et la non-existence de solution $u \geqslant 0$ de l'équation :

$$-\operatorname{div}\ \left(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \right) - \frac{\lambda}{|x|^{2(1+\gamma)}}\ u = u^p \tag{3.1}$$

dans la boule $B(0,r)$ de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, et $p > 1$, $0 < \lambda \leqslant \Lambda_{N,\gamma}$.

3.2 Formulation radiale de Δu

Soient $x = (x_1, ..., x_N)$; $|x| = r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$
Posons $u(x) = u(r)$, notons que

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\ u'(r) \ \text{ où }\ \frac{\partial r}{x_i} = \frac{x_i}{r},\ \ ainsi\ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\ u'(r)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) u'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} u''(r).$$

Ce qui entraine que

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^3}x_i^2\right)u'(r)+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{r^2}x_i^2u''(r) \tag{3.3}$$

$$= \frac{u'(r)}{r}\sum_{i=1}^{N}1-\frac{u'(r)}{r^3}\sum_{i=1}^{N}x_i^2+\frac{u''(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 \tag{3.4}$$

$$= \frac{N}{r}u'(r)-\frac{1}{r}u'(r)+u''(r) \tag{3.5}$$

$$= \frac{N-1}{r}u'(r)+u''(r) \tag{3.6}$$

3.3 Existence d'une solution radiale

Le coefficient λ satisfait l'inégalité $0<\lambda\leqslant\Lambda_{N,\gamma}$ avec $\Lambda_{N,\gamma}=\left(\frac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ la meilleure constante de Hardy qui n'est pas atteinte. On définit l'équation :

$$-\Delta u-\lambda\frac{u}{|x|^2}=0$$

On pose $u(r)=c_1\ r^{-\beta}$ avec $c_1>0$ et $\beta>0$ à préciser, on a

$$u^{'}(x)=-\beta\ c_1\ r^{-\beta-1}\ \text{et}\ u^{''}(x)=\beta\ (\beta+1)\ c_1\ r^{-\beta-1}. \tag{3.7}$$

On combine avec (3.3) on trouve :

$$\left[-\beta^2+(N-2)\,\beta-\lambda\right]c_1\ r^{-\beta-2}=0$$

et comme $c_1\ r^{-\beta-2}\neq 0$, alors, on obtient

$$\mathcal{P}(\beta)=-\beta^2+(N-2)\,\beta-\lambda=0. \tag{3.8}$$

Pour la résolution de (3.8), on calcule le discriminant que l'on note D

$$D=(N-2)^2-4\lambda \tag{3.9}$$

alors si $D>0\Longrightarrow\lambda<\left(\frac{N-2}{2}\right)^2=\Lambda_N$, et les racines sont :

$$\beta_1=\frac{N-2}{2}-\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2-\lambda},\ \beta_2=\frac{N-2}{2}+\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2-\lambda}.$$

Alors $\mathcal{P}$ sera positif si $\beta\in[\beta_1,\beta_2]$.
De même pour l'équation

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla u)-\frac{\lambda}{|x|^{2(\gamma+1)}}=0\qquad\text{dans}\ \ B_r \tag{3.10}$$

Comme

$$\Delta u = u^{''}(r) + \frac{N-1}{r}\, u^{'}(r) \tag{3.11}$$

avec $|x| = r$ et $u(|x|) = u(r)$. Et

$$- div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) = r^{-2\gamma}u^{''}(r) + (N-(2\gamma+1))u'(r)r^{-2\gamma-1} \tag{3.12}$$

On remplace ce que précède dans (3.1), on trouve :

$$r^{-2\gamma}u^{''}(r) + (N-(2\gamma+1))r^{-2\gamma-1}u'(r) - \lambda\, u(r)r^{2(\gamma+1)} = 0. \tag{3.13}$$

On pose $u(r) = c_1\, r^{-\beta}$ avec $c_1 > 0$ et $\beta > 0$ à préciser, on combine avec (3.13) on trouve :

$$\left[-\beta^2 + (N-2(1+\gamma))\,\beta - \lambda\right] c_1\, r^{-\beta-2(\gamma+1)} = 0$$

et comme $c_1\, r^{-\beta-2(\gamma+1)} \neq 0$, alors, on obtient

$$-\beta^2 + (N-2(\gamma+1))\,\beta - \lambda = 0. \tag{3.14}$$

Pour la résolution de (3.14), on calcule le distriminant que l'on note D_1 alors si $D_1 > 0 \Longrightarrow \lambda < \left(\frac{N-2(1+\gamma)}{2}\right)^2 = \Lambda_{N,\gamma}$, et les racines sont :

$$\beta_1 = \frac{N-2(\gamma+1)}{2} - \sqrt{\left(\frac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2 - \lambda},\ \beta_2 = \frac{N-2(\gamma+1)}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2 - \lambda}.$$

Alors $\mathcal{P}$ sera positive entre β_1 et β_2.
On note par $\alpha_- = \beta_1$ et $\alpha_+ = \beta_2$.
Donc les solutions sont $u(x) = c_1|x|^{\alpha_-}$ ou $u(x) = c_1|x|^{\alpha_+}$, avec

$$\alpha_- = \frac{N-2(\gamma+1)}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,\gamma}-\lambda}, \qquad \alpha_+ = \frac{N-2(\gamma+1)}{2} + \sqrt{\Lambda_{N,\gamma}-\lambda} \tag{3.15}$$

L'existence d'une solution radiale de (3.1) *avec existence d'un* p^+.
Posons $p^- = 1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_+}$, observons que

$$1 < p^- < \frac{N+2(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)} < p^+$$

pour tout $0 < \lambda < \Lambda_{N,\gamma}$ et

$$\lim_{\lambda\to 0} p^- = \lim_{\lambda\to 0}\left[1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_+}\right] = \lim_{\lambda\to 0}\left[1 + \frac{4(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)+2\sqrt{\Lambda_{N,\gamma}-\lambda}}\right] = \frac{N}{N-2(\gamma+1)}$$

$$\lim_{\lambda\to \Lambda_{N,\gamma}} p^- = \lim_{\lambda\to 0}\left[1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_+}\right] = \lim_{\lambda\to \Lambda_{N,\gamma}}\left[1 + \frac{4(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)+2\sqrt{\Lambda_{N,\gamma}-\lambda}}\right] = \frac{N+2(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} p^+ = \lim_{\lambda\to 0}\left[1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_-}\right] = \lim_{\lambda\to 0}\left[1 + \frac{4(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)-2\sqrt{\Lambda_{N,\gamma}-\lambda}}\right] = +\infty$$

$$\lim_{\lambda\to \Lambda_{N,\gamma}} p^+ = \lim_{\lambda\to \Lambda_{N,\gamma}}\left[1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_-}\right] = \lim_{\lambda\to \Lambda_{N,\gamma}}\left[1 + \frac{4(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)-2\sqrt{\Lambda_{N,\gamma}-\lambda}}\right] = \frac{N+2(\gamma+1)}{N-2(\gamma+1)}.$$

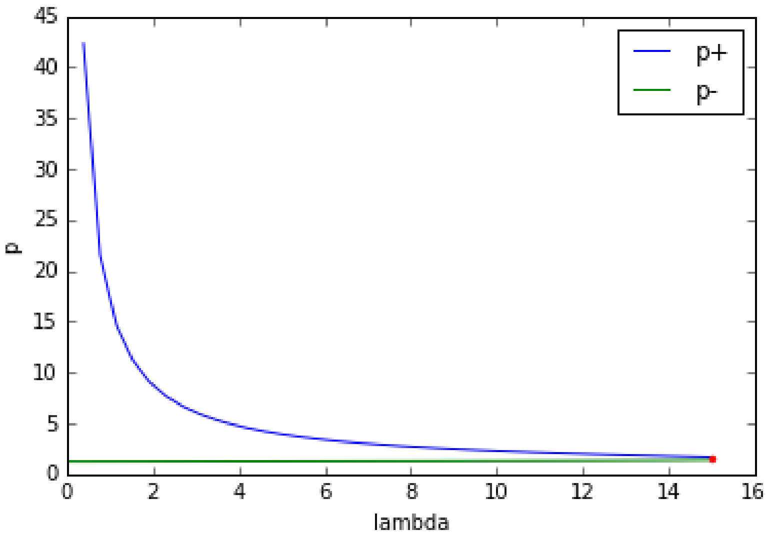

FIGURE 3.1 – p^+ et le p^- en fonction de λ

Remarque 3.1 *Dans le graphe, le point en rouge est le point de rencontre entre les courbes des fonctions* p^+ *et* p^- *avec les cordonnées* $(\Lambda_{N,\gamma}, 2^*_\gamma - 1)$.

Théorème 3.1 *Soit* $0 < \lambda \leqslant \Lambda_{N,\gamma}$. *Pour tout* $p \in (1, p^+)$, *il existe une solution non triviale* u *de l'équation* (3.1) *avec* u^p *et* $\dfrac{u}{r^{2(1+\gamma)}}$ *appartenant à* $L^1(B_r(0))$.

Supposons qu'il existe une solution radiale $u(|x|) = c_1|x|^{-\beta}$ et $\alpha_- < \beta < \alpha_+$
alors elle vérifie

$$\left(-\beta^2 + (N - 2(\gamma+1))\,\beta - \lambda\right) c_1\; r^{-\beta-2(\gamma+1)} = c_1^p\; r^{-\beta p}.$$

Donc nécessairement $\beta + 2 + 2\gamma = \beta p \Longrightarrow \beta = \dfrac{2(\gamma+1)}{p-1}$, et l'équation devient

$$\left(-\beta^2 + (N - 2(\gamma+1))\,\beta - \lambda\right) c_1 = c_1^p \Longrightarrow -\beta^2 + (N - 2(\gamma+1))\,\beta - \lambda = c_1^{p-1}$$

et comme $c_1 > 0$ alors $\mathcal{P}(\beta) = -\beta^2 + (N - 2(\gamma+1))\,\beta - \lambda > 0$ si et seulement si $\alpha_- < \beta < \alpha_+$.
Puisque $\mathcal{P}(\beta)$ est décroissante par rapport à β, en remplaçant β par $\dfrac{2(\gamma+1)}{p-1}$ donc la condition $\alpha_- < \beta < \alpha_+$ est équivalente à

$$p^- = 1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_+} < p < 1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_-} = p^+$$

donc si $p < 1 + \dfrac{2(\gamma+1)}{\alpha_-} = p^+$ il existe une solution radiale du problème (3.1) et c'est notre résultat principal.

Lemme 3.1 *Considérons l'équation*

$$-\Delta w - \lambda \frac{w}{|x|^2} = g \qquad \text{dans } \Omega. \tag{3.16}$$

avec $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $g \geqslant 0$ *et* $\lambda \leqslant \Lambda_N$. *Si* (3.16) *possède une sur-solution faible alors* $|x|^{-(\gamma+1)\alpha_-} g \in L^1_{loc}(\Omega)$, *où* α_- *est défini dans* (3.15)

Preuve. Voir [2] ■

Lemme 3.2 *Supposons que* $w \geqslant 0$ *dans* Ω, $w \neq 0$, $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ *et* $\frac{w}{|x|^2} \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Si* w *vérifie* $-\Delta w - \lambda \frac{w}{|x|^2} \geqslant 0$ *au sens des distributions, alors il existe une constante positive* C *et une boule* $B_r(0) \subset \Omega$ *suffisamment petite telle que*

$$w(x) \geqslant C|x|^{-\alpha_-} \ \text{p.p. dans } B_r(0).$$

Preuve. Voir [19] ■

3.4 Résultat de non-existence

Concernant la non-existence de solution on a le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit* $0 < \lambda \leqslant \Lambda_{N,\gamma}$. *Si* $p > p^+$ *alors le problème* (3.1) *ne possède pas de sur-solution faible.*

Preuve. On argumente par l'absurde. Supposons qu'il existe une sur-solution positive $\bar{u} \in L^1(\Omega)$ de (3.1). En particulier, ça sera une sur-solution également si on considère le problème dans une boule $B_r(0) \subset \Omega$. En effectuant le même raisonnement par itération, on peut construire une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}\ \left(|x|^{-2\gamma} \nabla u_k \right) & = & \lambda \dfrac{u_{k-1}}{|x|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{k}} + u_{k-1}^p & \text{dans } B_r(0), \\ u_k & > & 0 & \text{dans } B_r(0), \\ u_k & = & 0 & \text{sur } \partial B_r(0). \end{array} \right. \tag{3.17}$$

telle que $0 < u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \bar{u}, x \in B_r(0), k \in \mathbb{N}$. De plus $u_k \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Soit $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Ainsi, en testant $\dfrac{\varphi^2}{u_k}$ dans (3.17) et en appliquant l'inégalité de Picone :

$$\int_{B_r(0)} \frac{u_{k-1}^p}{u_k} \varphi^2 |x|^{-2\gamma}\, dx \leqslant \int_{B_r(0)} (-\text{div}\ \left(|x|^{-2\gamma} \nabla u_k \right)) \frac{\varphi^2}{u_k}\, dx \leqslant \int_{B_r(0)} |\nabla \varphi|^2 |x|^{-2\gamma}\, dx.$$

Par conséquent, en faisant tendre $k \to \infty$ et en utilisant l'estimation radiale du Lemme 3.2, nous obtenons

$$\|\varphi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,|x|^{-2\gamma})} \geqslant \int_{B_r(0)} u^{p-1} \varphi^2 |x|^{-2\gamma}\, dx \geqslant C \int_{B_r(0)} \frac{\varphi^2}{|x|^{(p-1)\alpha_- + 2\gamma}} \geqslant \frac{C}{r^{(p-1)\alpha_- - 2}} \int_{B_r(0)} \frac{\varphi^2}{|x|^{2(1+\gamma)}}\, dx.$$

Puisque $(p-1)\alpha_- > 2 + 2\gamma$ car $p > 1 + \frac{2(\gamma+1)}{\alpha_-} = p^+$. En choisissant r suffisamment petit, nous obtenons une contradiction avec l'inégalité de Hardy. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité l'existence et la non-existence de solution non triviale d'un problème de Schrodinger avec présence d'un potentiel :

$$-\text{div}\ \big(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \big) - \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = u_+^p \qquad \text{dans} \qquad \Omega.$$

Où Ω peut être un domaine borné ou un domaine bien particulier comme la boule. On a étudié l'existence et la non-existence de solution suivant la valeur de λ où $\lambda \leqslant \Lambda_{N,\gamma} = \left(\dfrac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ est la meilleure constante de l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, E.Colorado, I.Peral, Some improved Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain, 23, 327-345 (2005).

[2] B. Abdellaoui, I.Peral, A note on a critical problem with natural growth in the gradient, J. Eur. Math. Soc. 8, 157–170.

[3] B. Abdellaoui, I. Peral, On quasilinear elliptic equations related to some Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. Comm. Pure Appl. Anal. 2, 539-566 (2003).

[4] H. Brezis, Is there failure of the Inverse Function Theorem ?, Proccedings of the Workshop at the Morning Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing, june 1999.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle et application*, Ed, Masson, (1983).

[6] H. Brezis and X. Cabré, Some simple nonlinear PDE's without solutions, Bull UMI, 1 (1998), 223-262.

[7] H. Brézis, X.Carbé, Y.Martel and A.Ramiandrisoa, Blow-up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, Adv.Diff., 1 (1996), 73-90.

[8] H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei, On a semilinear elliptic equation with inverse square potential, 2008. hal-0028856 7.

[9] H. Brezis and P.L. Lions, A note on isolated singularities for linear elliptic equations, Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981, 263-266.

[10] H. Brezis and J.L. Vazquez, Blow-up solution of some nonlinear elliptic problems, Rev Mat. Univ. Complut. Madrid, 10 (1997), 443-469.

[11] J. Dávila and L. Dupaigne, Comparison principles for PDE's with a singular potential, Proc. Roy.Soc. Edinburgh, 133A (2003), 61-83.

[12] L. Dupaigne, A nonlinear elliptic PDE with the inverse-square potential, J. D'Analyse Mathématique, 86 (2002), 359-398.

[13] L. Dupaigne and G.Nedev, Semilinear elliptic PDE's with singular potential, Adv.Differential Equations, 7 (2002), 973-1002.

[14] D .Gilbarg,N . S .Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* .Springer 1998.

[15] L.L. Helms, Introduction to potential theory, New York, Wiley and Sons, 1969.

[16] T. Kato, Schrödinger operators with singular potentials, Israel J.Math., 13 (1972), 135-148.

[17] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag 1993.

[18] S.I. Pohozaev and A. Teei, Nonexistance of local solutions to semilinear partial differential inequalities, Nota Scientifica 01/28, Dip. Mat. Universitá "La Sapienza", Roma (2001).

[19] A.R. Primo, Influencia del Potencial de Hardy en Ecuaciones Elipticas y Parabolicas, thesis. Universidad Autonoma de Madrid,(2008).

[20] M. Struwe, variational Methods. Applications to nonlinear PDE and Hamiltonain Systems, Edition : Springer ,(2000).

[21] S.Terracini, On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent, Adv. Differential Equations, 1 (1996), 241-264.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons traité l'existence et la non-existence de solution non triviale d'un problème de Schrödinguer avec présence d'un potentiel :

$$-\text{div}\ \Big(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \Big) - \lambda\frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = u_+^p \qquad \text{dans} \qquad \Omega.$$

Où Ω peut être un domaine borné ou un domaine bien particulier comme la boule.
On a étudié l'existence et la non-existence de solution suivant la valeur de λ où $\lambda \leq \Lambda_{N,\gamma} = \left(\frac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ est la meilleure constante de l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Mots Clés : Inégalité de Hardy-Sobolev, Solution Radiale, Equation de Schrödinguer.

Abstract

In this work, we treated the existence and non-existence of a non-trivial solution of a Schrodinger problem involving a potential term :

$$-\text{div}\ \Big(\ |x|^{-2\gamma}\nabla u\ \Big) - \lambda\frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = u_+^p \qquad \text{in} \qquad \Omega.$$

where Ω can be a bounded domain or a particular domain like a ball.
We studied the existence and the non-existence of solution according to the value of λ, where $0 < \lambda \leq \Lambda_{N,\gamma}$; with $\Lambda_{N,\gamma} = \left(\frac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ is the best constant of the Hardy-Sobolev inequality.

Keywords : Schrödinger equation, Hardy-Sobolev's inequality, Radial solution.

ملخص

في هذه الاطروحة قمنا بالبرهان على وجود وعدم وجود حل لمشكلة من نوع شرودينغر مع إحتمال.
حيث يمكن أن يكون المجال محدد أو معين كالكرة مثلا .
لقد قمنا بدراسة وجود الحل وعدم وجوده بالنسبة لقيمة المتغير الذي هو أصغر من القيمة الكبرى لمتباينة هاردي صوبولاف .
الكلمات المفتاحية : مشكلة من نوع شرودينغر، متباينة هاردي صوبولاف.