République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Blkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et applications

Présenté par

Boukada Bachir

Équations elliptiques quasi-linéaires avec exposants critiques de Hardy-Sobolev

---

Soutenu le : **29 / 09 / 2022** devant le jury composé de

Mme. Nasri Yasmina	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr.A.Benseddik	Maitre de conférences	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr.A.R.Leggat	Maitre de conférences	Université de Tlemcen	Examinateur
Mme. Benallal Hafida	Maitre de conférences	Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2021 - 2022

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :
A mes chères parents, votre soutien et tout l'amour que vous m'avez donné, merci de m'avoir poussé à rêver et à atteindre mes rêves, j'espère que votre bénédiction m'accompagnera toujours.
A ma famille et à mes proches.
A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

Boukada Bachir

Remerciements

Je remercie **Dieu** tout puissant de la patience et de la volonté qu'il m'a donné pour réaliser ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier Mme. **Benallal Hafida**, Maître de conférences à l'université de Tlemcen, pour la confiance qu'elle m'a accordé en acceptant de diriger ce mémoire et sa patience de le suivre jusqu'à son achèvement.

Je remercie Mme.**Y.Nasri**, professeur à l'université de Tlemcen, de bien vouloir accepter de présider le jury d'examen de mon travail.

Je remercie aussi, Mr.**A.Benseddik** et Mr.**A.R.Leggat** Maîtres de conférences à l'université de Tlemcen d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes remerciements vont aussi à mes proches et aux membres de ma famille, dont les encouragements et le soutien ont été indispensables à l'aboutissement de mes études.

Je terminerai en remercient tous mes enseignants du département de mathématiques.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire de Master a pour but, d'étudier une équation elliptique quasi-linéaire avec exposant critique de Hardy-Sobolev.

Soit le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu \frac{|u|^{p^*(s)-2}}{|x|^s} u = f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

On montre que si f satisfait certaines conditions alors le problème (1) admet au moins une solution positive.

Dans le cas $s = 0$ et $\mu = 1$, l'équation (1) se réduit à un problème quasi-linéaire elliptique [7]

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu |u|^{p^*-2} u = f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Les travaux sur le problème (2) avec $p = 2$, ont été étudiés par Brézis et Nirenberg (voir [1], [8] et [10]).

Ghoussoub et Yuan avaient étudié dans [5] le problème (1) avec $f(x,u) = \lambda |u|^{r-2} u$, où $p < r < p^*$. Les auteurs ont obtenu une solution positive dans le cas où $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $N > [p(p-1)r + p^2]/[p + (p-1)(r-p)]$ (en particulier si $N \geq p^2$).

Ils ont montré aussi que (1) admet une solution qui change de signe, Si $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $N > [p(p-1)r + p]/[1 + (p-1)(r-p)]$ (en particulier si $N \geq p^3 - p^2 + p$) .

Dans ce travail, nous nous intéressons, à un résultat plus général dû à Guanwi Chen. En utilisant la méthode variationnelle, on obtient des résultats généralisent ceux obtenus dans [5].

Ce manuscrit est composé de deux chapitres, Dans le premier chapitre nous rappelons la définitions des espaces de Sobolev, on se base dans cette partie principalement sur le livre de H-Brézis, puis nous citons quelques outils de base essentiels .

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème traité par C.Guanwei dans [7].

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats utilisés dans ce mémoire. Les références de base de ce chapitre sont [2], [9].

1.1 Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev , en analyse fonctionnelle, sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles.
Un espace de Sobolev, noté $W^{k,p}$, est constitué des fonctions de L^p dont les dérivées partielles jusqu'à un certain ordre $k \in \mathbb{N}$, au sens des distributions (dérivées faibles), s'identifient à des fonctions de L^p.
On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on désigne par $C_0^\infty(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ définies sur Ω et à support compact inclus dans Ω.

Définition 1.1. *Soit $1 \neq p < \infty$. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \middle| \begin{array}{l} \exists\ v_1, ..., v_N \in L^p(\Omega) \ \textit{tels que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_\Omega v_i \phi, \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

Pour $p = 2$, on pose $H^1 := W^{1,2}$.

Proposition 1.2. *H^1 muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.3. *On dit qu'un espace de Banach E est réflexif si $J(E) = E''$, avec E'' est le bidual de E et J est l'injection canonique de E dans E''. Lorsque E est réflexif on identifie E et E''.*

Théorème 1.4. *$W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach séparable et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Définition 1.5. *Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}$ désigne la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour tout réel p vérifiant $1 < p < \infty$.

Remarque 1. *On a $W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.*

Théorème 1.6. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Théorème 1.7. *(**Inégalité de Poincaré**)*
Soit p un réel avec $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\exists\ C > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

1.1.1 Théorèmes d'injection de Sobolev

Énonçons les théorèmes d'injection continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.8. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :*

1. *X est un sous espace de Y.*
2. *$\exists\ C > 0$ tel que pour tout $u \in X$: $\|u\|_Y \leq C \|u\|_X$.*

Définition 1.9. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si :*

1. *X s'injecte de façon continue dans Y.*
2. *Toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.*

Théorème 1.10. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, soit $1 \leq p \leq \infty$, on a*

1. *Si $\quad 1 \leq p < N \quad$ alors, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où $\quad \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.*
2. *Si $\quad p = N \quad$ alors, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si $\ p > N \quad$ alors, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Théorème 1.11. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. On a*

1. *Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in \left[1, \dfrac{pN}{N-p}\right[$.*
2. *Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$*
3. *Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$*

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ pour tout p.

Théorème 1.12. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; avec $N \geq 2$ et $1 < p < N$. Alors*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right[$$

Le nombre $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ est appelé *exposant critique de Sobolev.*

Théorème 1.13. *(Inégalité de Sobolev)*
Soit $1 \leq p < N$ alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \text{ où } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

Lemme 1.14. *(Inégalité de Hardy)[6]*
Supposons que $1 < p < N$, si $u \in W^{1;p}(\mathbb{R}^N)$, Alors

(1) $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

(2) (L'inégalité de Hardy) :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx$$

Lemme 1.15. *(Inégalité de Hardy-Sobolev)*
On suppose que $1 < p < N$ et $p \leq q \leq p^*(s) := p\frac{N-s}{N-p}$, Alors :

il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\frac{|u|^q}{|x|^s}\right)^p dx \leq C \int_\Omega \left(|\nabla u|^p\right)^q dx$$

Cette inégalité reste valable pour un domaine borné.

Démonstration.

1. Pour $s = 0$ ou $s = p$, c'est l'inégalité de Sobolev (resp. l'inégalité de Hardy).
2. Puisque $p^* \geq p$, alors $0 \leq s \leq p$. On peut considérer, donc, le cas où $0 < s < p$. En utilisant les inégalités de Hardy, Sobolev et Hölder, on aura

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^s}{|x|^s} . |u|^{p^*(s)-s} dx$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{|u|^p}{|x|^p}\Big)^{\frac{s}{p}} dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|u|^{(p^*(s)-s)\frac{p}{p-s}}\Big)^{\frac{p-s}{p}} dx \Big)$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{|u|^p}{|x|^p}\Big)^{\frac{s}{p}} dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|u|^{p^*}\Big)^{\frac{p-s}{p}} dx \Big)$$

$$\leq C_1 \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^p\Big)^{\frac{s}{p}} dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^p\Big)^{\frac{p-s}{p} . \frac{p^*}{p}} dx \Big)$$

$$= C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^p\Big)^{\frac{N-s}{N-p}} dx$$

$\square$

Lemme 1.16. *(Brézis-Lieb)*
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si $(f_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $f_n \to f$ p.p dans Ω, alors

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\|f_n\|_{L^p}^p - \|f_n - f\|\,|_{L^p}^p \Big) = \|f\|_{L^p}^p$$

Comme application directe du Lemme de Bézis-Lieb, on déduit que si $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ est une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ p.p, et $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ Alors $(f_n \to f)$ *fortement dans* $L^p(\Omega)$.

1.2 Théorie des points critiques

1.2.1 Définition des points critiques

Définition 1.17. *Soient X un espace de Banach, $E \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$.*
E' désigne le dual topologique de E, $J'(u) : E \to E'$.
On dit que $u \in E$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$; Sinon u est un point régulier de J.
On dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $u \in E$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$; sinon c est une valeur régulière de J.

1.2.2 Théorème du col

Le théorème du Col est un théorème d'existence des calculs variationnels (minimisation d'une fonctionnelle). Ce théorème établit l'existence d'un point de col (point selle) pour une fonctionnelle qui vérifie certaines conditions.
Soient X un espace de Banach et J une fonctionnelle de classe C^1 sur X.

Définition 1.18. ***(Suite de Palais-Smale)***
Une suite $(U_n)_n \subset X$ telle que :

$$\begin{cases} J(U_n) \to c \ \text{dans } \mathbb{R} \\ J'(U_n) \to 0 \ \text{dans } X' \end{cases}$$

est appelée une suite de Palais-Smale au niveau c.

Définition 1.19. ***(Condition de Palais-Smale)***
Soient X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite $(U_n)_n$ de X telle que :

$$\begin{cases} J(U_n) \to c \ \text{dans } \mathbb{R} \\ J'(U_n) \to 0 \ \text{dans } X' \end{cases}$$

contient une sous-suite $(U_{n_k})_k$ convergente.

Remarque 2. *La condition de Palais-Smale est une hypothèse de compacité qui permet de démonter l'existence des points critiques. Elle garantit, en particulier, que les ensembles des points critiques de niveau c, notés K_c, sont des ensembles compactes.*

Définition 1.20. *Soit X un ensemble, la fonction $J : X \to \mathbb{R}$ est dite bornée inférieurement dans X, s'il existe une constante réelle m telle que :*

$$\forall x \in X \ ; \ J(x) \geq m$$

Définition 1.21. *Soit X un espace topologique. On dit qu'une fonction $J : X \to \mathbb{R}$ est semi continue inférieurement (s.c.i) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$\{x \in X : J(x) \leq \lambda\}$$

est fermé.

Théorème 1.22. ***(Principe d'Ekeland)***
Soient (X, d) un espace métrique complet et J une fonction s.c.i de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inférieurement, et on pose $c := \inf_{u \in X} J(u)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe u_ϵ telle que

$$\begin{cases} c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon \\ \forall u \in X, J(u) - J(u_\epsilon) + \epsilon d(u, u_\epsilon) > 0 \end{cases}$$

Théorème 1.23. ***(Théorème du col)***
Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ telle que

(i) Il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$;

(ii) Il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$. Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq a$.

De façon plus précise, si on pose

$$A = \{h : [0,1] \to X \text{ continue, } h(0) = 0 \text{ et } h(1) = u_0\}$$

et

$$c := \inf_{h \in A} \max_{t \in [0,1]} J(h(t))$$

alors c est une valeur critique de J et $c \geq a$.

1.2.3 Quelques critères de convergence

Théorème 1.24. ***(convergence dominée de Lebesgue)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f .
On suppose qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pp sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0, \\ \int_\Omega f(x)dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)dx \end{cases}$$

Théorème 1.25. ***(théorème de Vitali)***
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. Alors :

$$\left(f_n \to f \text{ dans } L^1(\Omega)\right) \Leftrightarrow ((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite équi-intégrable})$$

Remarque 3. *Une suite $(f_n)_n$ est dite équi-intégrable si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \subset \Omega$ de mesure finie et telle que :*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} f_n(x)dx \leq \varepsilon$.*
2. *$(\forall E \subset \Omega$ tel que $mes(E) < \delta) \Rightarrow (\int_E f_n(x)dx \leq \varepsilon)$*

Chapitre 2

Équations elliptiques quasi-linéaires avec exposants critiques de Hardy-Sobolev

Ce chapitre a pour but de montrer l'existence des solutions du problème (1).
La référence de base pour ce chapitre est l'article de C.Guanwei [7].

2.1 Introduction

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu \frac{|u|^{p^*(s)-2}}{|x|^s} u = f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ désigne l'opérateur différentiel p-Laplacien, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ de frontière régulière $\partial\Omega$ avec $0 \in \Omega$ et μ un paramètre positif.

On suppose que $0 \leqslant s \leqslant p < n$, $p^*(s) = p(N-s)/(N-p)$ désigne l'exposant critique de Hardy-Sobolev.

En particulier pour $s = 0$: $p^* = p^*(0) = Np/(N-p)$ est l'exposant critique de Sobolev.

On définit la norme

$$\|u\| := \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

Par l'inégalité de Poincaré, cette dernière est équivalente à la norme standard de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On définit la meilleure constante de Hardy-Sobolev par :

$$A_s(\Omega) := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^p}{(\int_\Omega (|u|^{p^*(s)}/|x|^s) dx)^{p/p^*(s)}} \tag{2.3}$$

Dans le cas où $s = 0$ et $\mu = 1$ alors (2.1) se réduit à un problème elliptique quasi-linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - |u|^{p^*-2} u = f(x,u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega g \end{cases} \tag{2.4}$$

Pour $f(x,u) := h(x)u^q$ Gonçalves et Alves [4] ont montré que le problème (2.4) admet des solutions positives lorsque $2 \leq p < N$, $0 < q < p-1$ où $p-1 < q < p^* - 1$. Dans ce qui suit, nous supposons toujours que f vérifie : $f(x,0) = 0$, et on pose

$$F(x,t) := \int_0^t f(x,s)ds, \quad x \in \Omega.$$

Avant d'énoncer nos principaux résultats, nous avons besoin des hypothèses suivantes :
(A_1)

$$f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \quad \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^+} (f(x,t)/t^{p-1}) = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{t \to +\infty} (f(x,t)/t^{p^*-1}) = 0 \end{cases} \quad \text{uniformément en } x \in \bar{\Omega}$$

(A_2) Il existe une constante $\rho > p$ telle que

$$0 < \rho F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Nos principaux résultats sont les suivants :

Théorème 2.1.
Supposons que

1. $N \geq 3$,
2. $0 < \mu < \infty$,
3. $0 \leq s < p$ *et* $1 < p < N$,

Si (A_1) *et* (A_2) *sont satisfaites et*

$$\rho > \max\left\{p, p^*\left(1 - \frac{1}{p}\right), p^* - \frac{p}{p-1}\right\} \tag{2.6}$$

Alors (2.1) admet au moins une solution positive.

Remarque 4. *Si* $\rho > p$ *et* $p^2 \leq N$, *alors (2.6) est vraie.*

Nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.
Supposons que $0 < \mu < \infty$, $0 \leq s < p$, $p^2 \leq N$, *et* $1 < p < N$. *de plus, si* (A_1), (A_2) *sont vérifiées, alors (2.1) a au moins une solution positive*

Remarque 5.
Le théorème (2.1) *généralise le théorème* $(I.3)$ *dans [5] dont les auteurs ont étudié le cas* $f(x,u) = \lambda\,|u|^{r-2}\,u$, $p < r < p^*$.
Il existe des fonctions f *vérifiant les hypothèses du théorème* (2.1) *mais pas celles dans [5]. Soit*

$$f(x,t) = g(x)|t|^{k-2}t + a|t|^{l-2},\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$$

où $g(x) > 0$, $g \in L^\infty(\Omega)$, $a > 0$ *et* $p < k < l < p^*$.
Dans ce cas, f *vérifie les conditions du Théorème* (2.1) *mais elle ne satisfait pas les hypothèses du théorème* $(I.3)$ *dans [5].*

2.2 Résultats auxiliaires

Dans ce qui suit, on note $\|.\|_p$; la norme de $L^p(\Omega)$).
On remarque que dans le théorème (2.1), les valeurs de $f(x,t)$ pour $t < 0$ ne sont pas retenues. A cet effet on définit

$$f(x,t) \equiv 0 \quad \text{pour } x \in \Omega,\ \ t \leq 0$$

Nous considérons tout d'abord l'existence des solutions non triviales du problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu\frac{(u^+)^{p^*(s)-1}}{|x|^s} + f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ \qquad u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

La fonctionnelle d'énergie correspondante à (2.7) est donnée par :

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{p^*(s)}\int_\Omega \frac{(u^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega F(x,u)dx, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.8}$$

Par les inégalités de Hardy-Sobolev (voir [5]) et (A_1), I est bien définie.
Maintenant, il est bien connu qu'il existe une correspondance injective entre les solutions faibles de (2.7) et les points critiques de I sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Plus précisément, on dit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible de (2.7), si pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ On a :

$$\left\langle I'(u), v\right\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,(\nabla u, \nabla v)dx - \mu\int_\Omega \frac{(u^+)^{p^*(s)-1}}{|x|^s}vdx - \int_\Omega f(x,u)vdx = 0 \tag{2.9}$$

2.2.1 Lemmes fondamentaux

Pour démontrer le théorème (2.1) on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.3. *Pour tout $a > 0$, $0 \leq b \leq 1$, et $\lambda \geq 1$, on a*

$$(a+b)^{\lambda} \leq a^{\lambda} + \lambda(a+1)^{\lambda-1}b \tag{2.10}$$

Démonstration.
Soit

$$h(x) = (a+x)^{\lambda} - a^{\lambda} - \lambda(a+1)^{\lambda-1}x, \quad \lambda \geq 1$$

La dérivée de h est donnée par :

$$h'(x) = \lambda\left((a+x)^{\lambda-1} - (a+1)^{\lambda-1}\right)$$

il est clair que $h'(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Ce-ci implique que h est décroissante sur $[0,1]$, c'est-à-dire $\forall\ 0 \leq b \leq 1$ on a : $h(b) \leq h(0) = 0$.
Il en déduit

$$(a+b)^{\lambda} \leq a^{\lambda} + \lambda(a+1)^{\lambda-1}b$$

□

Lemme 2.4. *([5]) Supposons que $1 < p < n$, $0 \leq s < p$ et $q = p^*(s)$, alors on a :*

1. *$A_s(\Omega)$ ne dépend pas du domaine Ω, on le note donc par A_s.*
2. *A_s est atteint, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, par les fonctions*

$$y_{\varepsilon}(x) = \left(\varepsilon(N-s)\Big(\frac{N-p}{p-1}\Big)^{p-1}\right)^{(N-p)/p(p-s)}\left(\varepsilon + |x|^{(p-s)/(p-1)}\right)^{(p-N)/(p-s)} \tag{2.11}$$

pour certain $\varepsilon > 0$. De plus, les fonctions $y_{\varepsilon}(x)$ sont les seules solutions radiales positives de

$$-\Delta_p u = \frac{u^{p^*(s)-1}}{|x|^s}$$

dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y_{\varepsilon}|^q}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{p}{q}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla y_{\varepsilon}|^p\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y_{\varepsilon}|^q}{|x|^s}dx \\ &= A_s^{(N-s)/(p-s)} \end{aligned}$$

Lemme 2.5. *([5])*
Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et soit $(q_n)_n$ une suite telle que :
$p < q_n \leq p^*(s), q_n \to p^*(s)$ quand $n \to \infty$. Alors il existe une sous suite (notée aussi $(u_n)_n$) telle que :

1. *$u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*
2. *$u_n \to u$ dans $L^r(\Omega)$ si $1 < r < p^* = \dfrac{np}{n-p}$.*
3. *$\dfrac{u_n}{x} \rightharpoonup \dfrac{u}{x}$ dans $L^p(\Omega)$.*

4. pour tout $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{q_n-2}}{|x|^s} u_n f dx \to \int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*-2}}{|x|^s} u f dx$$

5. Si $p \geq 2$, alors :

$$\int_\Omega |u_n|^{q_n} dx \leq \int_\Omega |u_n|^{q_n} dx + \int_\Omega |u_n - u|^{q_n} dx + o(1)$$

6. $\int_\Omega \frac{|u_n - u|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx = \int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx - \int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx + o(1)$

Lemme 2.6. *Supposons que les hypothèses (A_1), (A_2) sont satisfaites. S'il existe une constante c telle que*

$$0 < c < \Big(\frac{(p-s)}{p(N-s)} \Big) A_s^{(N-s)/(p-s)} \mu^{(p-N)/(p-s)}$$

Alors I satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$.

Démonstration.
Soit $(u_n)_n$ une suite dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfait $(PS)_c$, i.e pour $c \in \mathbb{R}$ on a ;

$$\begin{cases} I(u_n) & \to & c \ \text{ dans } \mathbb{R} \\ I'(u_n) & \to & 0 \ \text{ dans } W^{-1,p'}(\Omega) \ \ (p' \text{ le conjugué de } p) \end{cases} \tag{2.12}$$

Où $W^{-1,p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $W^{1,p}(\Omega)$. On calcule $I(u_n) - \frac{1}{\theta} < I'(u_n), u_n >$;

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\theta} < I'(u_n), u_n >&= \frac{1}{p}||u_n||^p - \frac{\mu}{p^*(s)} \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s} dx \\ & - \int_\Omega F(x, u_n(x)) dx - \frac{1}{\theta}||u_n||^p \\ & + \frac{1}{\theta}\mu \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s} dx + \frac{1}{\theta} \int_\Omega f(x, u_n).u_n dx \\ &= \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\Big)||u_n||^p + \mu\Big(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*(s)}\Big) \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s} dx \\ & - \int_\Omega F(x, u_n(x)) dx + \frac{1}{\theta} \int_\Omega f(x, u_n).u_n dx \end{aligned}$$

Où $\theta = min(\rho, p^*(s))$, ce qui donne

$$\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*} \geqslant 0$$

et par l'hypothèse (A_1) on obtient :

$$\begin{aligned} -\Big(\int_\Omega \Big(F(x, u_n(x)) - \frac{1}{\theta} f(x, u_n).u_n \Big) dx \Big) & \geqslant -\Big(\int_\Omega \Big(F(x, u_n(x)) - \frac{1}{\rho} f(x, u_n).u_n \Big) dx \Big) \\ & \geqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$I(u_n) - \frac{1}{\theta} < I'(u_n), u_n >\geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^p \tag{2.13}$$

D'autre par ; pour n assez grand, (2.12) donne ;

$$\left\{\begin{array}{rcl} |I(u_n)| & \leqslant & c+1 \\ | < I'(u_n), u_n > | & \leqslant & ||I'(u_n)||_{W^{-1,p'}(\Omega)}||u_n|| = o(1)||u_n||. \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Par la suite, en utilisant (2.13) et (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^p &\leqslant |I(u_n) - \frac{1}{\theta} < I'(u_n), u_n > | \\ &\leqslant |I(u_n)| + |\frac{1}{\theta} < I'(u_n), u_n > | \\ &\leqslant c + 1 + \frac{1}{\theta}o(1)||u_n|| \leqslant c + 1 + o(1)||u_n|| \end{aligned}$$

Alors (u_n) est une suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est réflexif, donc il existe une sous suite de (u_n) (notée aussi (u_n)) telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.15}$$

Par injection compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^\gamma(\Omega)$ pour $1 < \gamma < p^*$ on obtient ;

$$u_n \to u \text{ dans } L^\gamma(\Omega) \text{ quand } n \to +\infty \tag{2.16}$$

Par le théorème de convergence dominée inverse ;

$$u_n \to u \text{ p.p dans } \Omega \text{ quand } n \to +\infty \tag{2.17}$$

Par l'injection continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ on obtient :

$$||u_n||_{p^*}^{p^*} < C_1 < +\infty \tag{2.18}$$

Maintenant par le **lemme 2.5** on a :

$$\frac{u_n}{x} \rightharpoonup \frac{u}{x} \ \ dans \ \ L^p(\Omega) \tag{2.19}$$

De plus, pour $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)-2}u_n}{|x|^s}vdx \to \int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)-2}u}{|x|^s}vdx \tag{2.20}$$

En effet : (2.17) donne ;

$$\frac{|u_n|^{p^*(s)-2}u_n}{|x|^s}v \to \frac{|u|^{p^*(s)-2}u}{|x|^s}v \text{ p.p dans } \Omega$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour l'exposant $\frac{p^*(s)}{p^*(s)-1}$ et son conjugué $p^*(s)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)-2}|u_n|}{|x|^s}|v|dx &= \int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)-1}}{|x|^s}|v|dx \\
&= \int_\Omega \Big(\frac{|u_n|^{p^*(s)}}{|x|^s}\Big)^{\frac{p^*(s)-1}{p^*(s)}} \Big(\frac{|v|^{p^*(s)}}{|x|^s}\Big)^{\frac{1}{p^*(s)}} dx \\
&\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{p^*(s)-1}{p^*(s)}} \Big(\int_\Omega \frac{|v|^{p^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{\frac{1}{p^*(s)}}
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev, il existe $C > 0$ tel que

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)-2}|u_n|}{|x|^s}|v|dx \leqslant C\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx\Big)^{\frac{N-s}{N-p}.\frac{p^*(s)-1}{p^*(s)}} .\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\Big)^{\frac{N-s}{N-p}.\frac{1}{p^*(s)}}$$

Or $\|\nabla u_n\|_\infty$ est fini donc $\|\nabla u_n\|_{L^p}$ est aussi fini alors on peut la majorer

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)-2}|u_n|}{|x|^s}|v|dx \leqslant \alpha$$

Puisque $(\nabla u_n)_n$ est une suite bornée.
Il en résulte, en vertu du théorème de la convergence dominée que

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*(s)-2}u_n}{|x|^s}vdx \to \int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)-2}u}{|x|^s}vdx \tag{2.21}$$

Maintenant, en utilisant la condition (A_1) on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a(\varepsilon) > 0$ tel que : pour tout $(x,t) \in \bar{\Omega} \times (0, +\infty)$;

$$|f(x,t).t| \leqslant a(\varepsilon) + \frac{1}{2C_1}\varepsilon|t|^{p^*} \tag{2.22}$$

Soit $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2a(\varepsilon)} > 0$. Pour un sous ensemble E de Ω tel que $mes(E) < \delta$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big|\int_E f(x,u_n)u_n dx\Big| &\leqslant \int_E a(\varepsilon)dx + \frac{1}{2C_1}\varepsilon\int_E |u_n|^{p^*}dx \\
&< a(\varepsilon).\frac{\varepsilon}{2a(\varepsilon)} + \frac{1}{2C_1}\varepsilon C_1 \\
&= \varepsilon \to 0 \ \ quand \ \ mes(E) \to 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Vitali, on conclut que :

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(x,u)udx \ \ quand \ \ n \to +\infty \tag{2.23}$$

En utilisant l'hypothèse (A_2) on obtient aussi :

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx \to \int_\Omega F(x,u)dx \ \ quand \ \ n \to +\infty \tag{2.24}$$

Or par (2.12) on a :

$$< I'(u_n), u_n >= ||u_n||^p - \mu \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega f(x,u_n).u_n dx = o(1) \tag{2.25}$$

Pour $v_n = u_n - u$ et en appliquant le lemme de Brézis-Lieb, on obtient :

$$||v_n||^p + ||u||^p - \mu \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \mu \int_\Omega \frac{(u^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega f(x,u).udx = o(1) \tag{2.26}$$

Il en résulte de l'équations (2.21) que ;

$$\lim_{n\to+\infty} < I'(u_n), u >= ||u||^p - \mu \int_\Omega \frac{(u^+)^{p^*(s)}}{|x|^s} - \int_\Omega f(x,u).udx = 0 \tag{2.27}$$

Comme $I(u_n) \to c$ quand $n \to +\infty$ et en utilisant le lemme de Brézis-Lieb, on obtient :

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{p}||v_n||^p + \frac{1}{p}||u||^p - \frac{\mu}{p^*(s)} \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \frac{\mu}{p^*(s)} \int_\Omega \frac{(u^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx \\ &- \int_\Omega F(x,u)dx + o(1) \\ &= I(u) + \frac{1}{p}||v_n||^p - \frac{\mu}{p^*(s)} \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx + o(1) \\ &= c + o(1) \end{aligned}$$

alors :

$$I(u) + \frac{1}{p}||v_n||^p - \frac{\mu}{p^*(s)} \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx = c + o(1) \tag{2.28}$$

D'autre part, les équations (2.26) et (2.27) donnent,

$$||v_n||^p - \mu \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx = o(1) \tag{2.29}$$

Alors ;

$$||v_n||^p \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Ou bien, il existe une sous suite de $(v_n)_n$ (notée aussi (v_n)) tel que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} ||v_n||^p = k \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mu \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx = k \\ k > 0 \end{cases}$$

Comme :

$$A_s = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus 0} \frac{||u||^p}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{p/p^*(s)}}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$||v_n||^p \geq A_s\Big(\int_\Omega \frac{|v_n^+|^{p^*(s)}}{|x|^s}dx\Big)^{p/p^*(s)} \tag{2.30}$$

Ce-ci implique :

$$\begin{aligned} k &\geq A_s\Big(\frac{k}{\mu}\Big)^{p/p^*(s)} \\ &\geq A_s k^{(N-p)/(N-s)}.\mu^{-(N-p)/(N-s)} \\ &\geq A_s^{(N-s)/(p-s)}\mu^{(p-N)/(p-s)} \end{aligned}$$

En passant à la limite dans(2.28), on aura

$$I(u) + \frac{k}{p} - \frac{k}{p^*(s)} = c$$

C-à-d

$$I(u) + \frac{p-s}{p(N-s)}k = c$$

Comme

$$c < \frac{(p-s)}{p(N-s)}A_s^{(N-s)/(p-s)}\mu^{(p-N)/(p-s)}$$

Alors,

$$I(u) < \frac{p-s}{p(N-s)}(A_s\mu - k)$$

Ce-ci implique que

$$I(u) < 0$$

D'autre part, le fait que 0 est un minimum local de I, alors

$$I(u) \geq 0$$

On aura, donc, une contradiction. Par la suite ;

$$||v_n||^p \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \tag{2.31}$$

Ce qui implique que $(u_n)_n$ est une suite convergente dans $W^{1,p}(\Omega)$.
Par conséquent, la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale . □

2.2.2 Quelques estimations sur les fonctions extrémales de Hardy-Sobolev

Supposons, sans perte de généralité, que $0 \in \Omega$, et soit U_ε une fonction dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ définie par

$$U_\varepsilon(x) = \left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-s}{p-1}}\right)^{\frac{p-n}{p-s}}$$

telle que la meilleure constante de Hardy-Sobolev est atteint en U_ε.
Soit $0 \leq \phi(x) \leq 1$ une fonction dans C_0^∞ définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2R \end{cases}$$

où $B_{2R}(0) \subset \Omega$.
Posons $u_\varepsilon(x) = \phi(x)U_\varepsilon(x)$. Quand $\varepsilon \to 0$, le comportement de u_ε sera le même que celui de U_ε mais on aura besoin des estimations précises de ces termes.
Supposons que $0 \leq s < p$ et $p \geq 2$. On définit

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\left(\int_\Omega \frac{|u_\epsilon|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^{\frac{1}{p^*(s)}}}$$

de telle sorte que

$$\int_\Omega \frac{|v_\epsilon|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx = 1$$

Alors, en utilisant les arguments du lemme (11.1) dans ([5]), on obtient les estimations suivantes :

1. $$A_s + C_2\varepsilon^{(N-p)/(p-s)} \leqslant \|v_\varepsilon\|^p \leqslant A_s + C_3\varepsilon^{(N-p)/(p-s)} \tag{2.32}$$

2. Si $r < p^*\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, alors

$$C_4\varepsilon^{\frac{(N-p)r}{p(p-s)}} \leqslant \int_\Omega |v_\varepsilon|^r dx \leqslant C_5\varepsilon^{\frac{(N-p)r}{p(p-s)}}$$

3. Si $r = p^*\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, alors

$$C_4\varepsilon^{\frac{(N-p)r}{p(p-s)}}|\ln(\varepsilon)| \leqslant \int_\Omega |v_\varepsilon|^r dx \leqslant C_5\varepsilon^{\frac{(N-p)r}{p(p-s)}}|\ln(\varepsilon)|$$

4. Si $p^*\left(1 - \frac{1}{p}\right) < r < p^*$, alors

$$C_4\varepsilon^{((p-1)/(p-s))(N-r(\frac{N-p}{p}))} \leqslant \int_\Omega |v_\varepsilon|^r dx \leqslant C_5\varepsilon^{((p-1)/(p-s))(N-r(\frac{N-p}{p}))} \tag{2.33}$$

De plus, en utilisant l'injection de Sobolev et l'estimation (2.32), on déduit :

$$\int_\Omega |v_\varepsilon|^{p^*} dx \leqslant C_6 A_s^{\frac{N}{N-p}} \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0^+ \tag{2.34}$$

Lemme 2.7. *Supposons que* $0 \leq 0 < p$*. Sous les hypothèses* (A_1) *et* (A_2)*, et pour*

$$\rho > \max\left\{p, p^*\left(1 - \frac{1}{p}\right), p^* - \frac{p}{p-1}\right\}$$

Alors, il existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ *tel que*

$$\sup_{t\geq 0} I(tu_0) < \frac{p-s}{p(N-s)} A_s^{(N-s)/(p-s)} \mu^{(p-N)/(p-s)} \tag{2.35}$$

Démonstration.
On considère les fonctions :

$$g(t) = I(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \mu\frac{t^{p^*(s)}}{p^*(s)} - \int_\Omega F(x, tv_\varepsilon)dx \tag{2.36}$$

$$\bar{g}(t) = \frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \mu\frac{t^{p^*(s)}}{p^*(s)} \tag{2.37}$$

Puisque :

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty, \quad g(0) = 0$$

et pour t suffisamment petit, $g(t) > 0$, alors il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sup_{t\geq 0} g(t) = g(t_\varepsilon)$$

On aura , par la suite ;

$$\begin{aligned} g'(t_\varepsilon) &= 0 \\ &= t_\varepsilon^{p-1}\Big(\|v_\varepsilon\|^p - \mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} - \frac{1}{t_\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon dx\Big) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\|v_\varepsilon\|^p = \mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} + \frac{1}{t_\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \tag{2.38}$$

Or $f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon \geq 0$, donc :

$$\|v_\varepsilon\|^p \geq \mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} \tag{2.39}$$

Ce qui implique :

$$t_\varepsilon \leqslant \left(\frac{\|v_\varepsilon\|^p}{\mu}\right)^{\frac{1}{p^*(s)-p}} := t_\varepsilon^0 \tag{2.40}$$

En utilisant l'hypothèse (A_1) on obtient ; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $d(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|f(x,t)| \leqslant \varepsilon t^{p^*-1} + d(\varepsilon)t^{p-1} \tag{2.41}$$

Par (2.38) et (2.41), on trouve :

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|^p &\leqslant \mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} + \frac{1}{t_\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega \Big(\varepsilon |t_\varepsilon|^{p^*-1}|v_\varepsilon|^{p^*-1} + d(\varepsilon)|t_\varepsilon|^{p-1}|v_\varepsilon|^{p-1}\Big)|v_\varepsilon| dx \\
&= \mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} + \varepsilon \int_\Omega \Big(|t_\varepsilon|^{p^*-p}|v_\varepsilon|^{p^*}\Big)dx + d(\varepsilon)\int_\Omega |v_\varepsilon|^p dx
\end{aligned} \tag{2.42}$$

De (2.39) et (2.42) il résulte que ;

$$\mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} \leqslant ||v_\varepsilon||^p \leqslant \mu t_\varepsilon^{p^*(s)-p} + \varepsilon \int_\Omega |t_\varepsilon|^{p^*-p}|u_\varepsilon|^{p^*}dx + d(\varepsilon)\int_\Omega |v_\varepsilon|^p dx$$

En utilisant les estimations (2.32)-(2.34) et pour ε suffisamment petit,
on conclut :

$$t_\varepsilon^{p^*(s)-p} \geq \frac{A_s}{2} \tag{2.43}$$

Par l'estimation (2.32) on a :

$$\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}} \leqslant \Big(A_s + C_3\varepsilon^{(N-p)(p-s)}\Big)^{\frac{N-s}{p-s}}$$

on applique **lemme (2.3)** pour $a = A_s$, $b = C_3\varepsilon^{(N-p)(p-s)}$ et $\lambda = \frac{N-s}{p-s}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}} &\leqslant A_s^{\frac{N-s}{p-s}} + \frac{N-s}{p-s}(A_s+1)^{\frac{N-s}{p-s}-1}C_3\varepsilon^{(N-p)(p-s)} \\
&\leqslant A_s^{\frac{N-s}{p-s}} + C_7\varepsilon^{(N-p)(p-s)}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

où $C_7 = \frac{N-s}{p-s}(A_s+1)^{\frac{N-s}{p-s}-1}C_3$, or $s < p$ donc $\varepsilon^{(N-p)(p-s)} < \varepsilon^{(N-s)(p-s)}$
Ce qui implique :

$$\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}} \leqslant A_s^{\frac{N-s}{p-s}} + C_7\varepsilon^{(N-s)(p-s)} \tag{2.45}$$

D'un autre côté la fonction $\bar{g}(t)$ atteint son maximum pour $t = t_\varepsilon^0$ et on peut vérifier qu' elle est croissante sur l'intervalle $[0, t_\varepsilon^0]$.

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(t_\varepsilon^0) &= \bar{g}\Big(\Big(\frac{\|v_\varepsilon\|^p}{\mu}\Big)^{\frac{1}{p^*(s)-p}}\Big)\\
&= \frac{\Big(\Big(\frac{\|v_\varepsilon\|^p}{\mu}\Big)^{\frac{p}{p^*(s)-p}}\Big)}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \mu\frac{N-p}{p(N-s)}\Big(\frac{\|v_\varepsilon\|^p}{\mu}\Big)^{\frac{p^*(s)}{p^*(s)-p}}\\
&= \frac{\Big(\Big(\frac{\|v_\varepsilon\|^p}{\mu}\Big)^{\frac{N-p}{p-s}}\Big)}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \mu\frac{N-p}{p(N-s)}\Big(\frac{\|v_\varepsilon\|^p}{\mu}\Big)^{\frac{N-s}{p-s}}\\
&= \frac{\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}}}{p}\mu^{\frac{p-N}{p-s}} - \frac{N-p}{p(N-s)}\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}}\mu^{\frac{p-N}{p-s}}\\
&= \frac{p-s}{p(N-s)}\mu^{\frac{p-N}{p-s}}\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}}
\end{aligned}
$$

L'hypothèse (A_2) implique qu'il existe $C_8 > 0$ tel que :

$$F(x,t) \geq C_8|t|^\rho$$

donc :

$$
\begin{aligned}
g(t_\varepsilon) &= \bar{g}(t_\varepsilon) - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)dx\\
&\leqslant \bar{g}(t_\varepsilon^0) - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)dx\\
&\leqslant \frac{p-s}{p(N-s)}\mu^{\frac{p-N}{p-s}}\|v_\varepsilon\|^{p\frac{N-s}{p-s}} - C_8|t_\varepsilon|^\rho\int_\Omega |v_\varepsilon|^\rho dx
\end{aligned}
$$

Et par (2.43) et (2.45) on obtient :

$$g(t_\varepsilon) \leqslant \frac{p-s}{p(N-s)}A_s^{\frac{N-s}{p-s}}\mu^{\frac{p-N}{p-s}} + C_9\mu^{\frac{p-N}{p-s}}\varepsilon^{(N-s)(p-s)} - C_8\Big(\frac{A_s}{2}\Big)^{\frac{\rho}{p^*(s)-p}}\int_\Omega |v_\varepsilon|^\rho dx \tag{2.46}$$

Où $C_9 = \dfrac{p-s}{p(N-s)}C_7$.

Puisque $s < p$ donc

$$(N-s)(p-s) > (N-p)(p-s)$$

de plus ε est au voisinage de 0, Alors :

$$\varepsilon^{(N-s)(p-s)} < \varepsilon^{(N-p)(p-s)}$$

(2.46) devient ;

$$g(t_\varepsilon) \leqslant \frac{p-s}{p(N-s)}A_s^{\frac{N-s}{p-s}}\mu^{\frac{p-N}{p-s}} + C_9\mu^{\frac{p-N}{p-s}}\varepsilon^{(N-p)(p-s)} - C_8\Big(\frac{A_s}{2}\Big)^{\frac{\rho}{p^*(s)-p}}\int_\Omega |v_\varepsilon|^\rho dx \tag{2.47}$$

Par la formule (2.6) et en appliquant l'estimation (2.33) pour $r = \rho$, on obtient :

$$\int_\Omega |v_\varepsilon|^\rho dx \geq C_4 \varepsilon^{((p-1)/(p-s))(N-\rho(\frac{N-p}{p}))} \tag{2.48}$$

D'après (2.6), on a

$$\rho > p^* - \frac{p}{p-1}$$

Ce qui implique ;

$$\frac{N-p}{p-s} > \frac{p-1}{p-s}\Big(N - \frac{\rho(N-p)}{p}\Big)$$

Comme ε est au voisinage 0, alors ;

$$\int_\Omega |v_\varepsilon|^\rho dx \geq C_4 \varepsilon^{\frac{N-p}{p-s}} \tag{2.49}$$

Par suite :

$$g(t_\varepsilon) \leqslant \frac{p-s}{p(N-s)} A_s^{\frac{N-s}{p-s}} \mu^{\frac{p-N}{p-s}} + \Big[C_9 \mu^{\frac{p-N}{p-s}} - C_8 C_4 \Big(\frac{A_s}{2}\Big)^{\frac{\rho}{p^*(s)-p}}\Big] \varepsilon^{(N-p)(p-s)}$$

Finalement, en choisissant ε suffisamment petit, on obtient :

$$\sup_{t\geq 0} I(tv_\varepsilon) = g(t_\varepsilon) < \frac{p-s}{p(N-s)} A_s^{\frac{N-s}{p-s}} \mu^{\frac{p-N}{p-s}}$$

En prenant $u_0 = v_\varepsilon$, on aura le résultat souhaité. $\square$

2.3 Preuve du théorème

Soit $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après les inégalités de Sobolev et de Hardy-Sobolev, on peut montrer que : $\forall u \in X$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p \leq C \|u\|^p, \qquad & \textstyle\int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx \leq C \|u\|^{p^*(s)}, \\ \|u\|_{p^*}^{p^*} \leq C \|u\|^{p^*}, & \end{aligned} \tag{2.50}$$

Il découle de (A_1) que

$$\begin{array}{llll} \exists \delta_1 > 0, & \forall t > \delta_1, \text{ on a :} & |f(t)| < t^{p^*-1}, & \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists 0 < \delta_2 < \delta_1, & \text{tel que } |f(t)| < \varepsilon t^{p-1} & \text{pour } t \in]0, \delta_2[, \\ \exists M > 0 & \text{tel que } |f(t)| \leq M & \forall t \in [\delta_2, \delta_1] & \end{array} \tag{2.51}$$

uniformément en $x \in \bar{\Omega}$. En déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &\leq t^{p^*-1} + \varepsilon t^{p-1} + M \\ &\leq \varepsilon t^{p-1} + (1 + M\delta_2^{1-p^*}) t^{p^*-1} \end{aligned} \tag{2.52}$$

ce qui donne

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{p} \varepsilon |t|^p + C_{10} |t|^{p^*} \tag{2.53}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \bar{\Omega}$.

Par (2.50) et (2.53) on a

$$\begin{aligned} I(u) \quad &= \tfrac{1}{p}\|u\|^p - \tfrac{\mu}{p^*(s)}\int_\Omega \tfrac{(u^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|^p - \tfrac{C\mu}{p^*(s)}\|u^+\|^{p^*(s)} - \tfrac{C}{p}\varepsilon\|u\|^p - \tilde{C}\|u\|^{p^*} \end{aligned} \tag{2.54}$$

pour ε assez petit.
Il existe, donc, $\beta > 0$ tel que

$$I(u) \geq \beta, \quad \forall u \in \partial\beta_r = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\| = r\right\} \tag{2.55}$$

pour $r > 0$ assez petit.
D'après le lemme 2.7, il existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $u_0 \neq 0$ tel que

$$\sup_{t\geq 0} I(tu_0) < \frac{p-s}{p(N-s)} A_s^{(N-s)/(p-s)} \mu^{(p-N)/(p-s)} \tag{2.56}$$

Puisque $F(x,t)$ est non négative, alors

$$\begin{aligned} I(tu_0) \quad &= \tfrac{1}{p}t^p\|u_0\|^p - \tfrac{\mu}{p^*(s)}t^{p^*(s)}\int_\Omega \tfrac{(u_0^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega F(x,tu_0)dx \\ &\leq \tfrac{1}{p}t^p\|u_0\|^p - \tfrac{\mu}{p^*(s)}t^{p^*(s)}\int_\Omega \tfrac{(u_0^+)^{p^*(s)}}{|x|^s}dx \end{aligned} \tag{2.57}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} I(tu_0) \to -\infty$$

on peut, donc choisir $t_0 > 0$ tel que

$$\|t_0u_0\| > r, \qquad I(t_0u_0) \leq 0 \tag{2.58}$$

A l'aide du théorème de col, il existe une suite $(u_n)_n \subset X$ satisfaisant

$$I(u_n) \to c \geq \beta, \qquad I'(u_n) \to 0 \tag{2.59}$$

Où

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(h(t)),$$

$$\Gamma = \{h \in C([0,1],X) \ \ |h(0) = 0, h(1) = t_0u_0\} \tag{2.60}$$

De plus

$$\begin{aligned} 0 < \beta \leq c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) &\leq \max_{t\in[0,1]} I(tt_0u_0)) \\ &\leq \sup_{t\geq 0} I(tu_0) \\ &< \tfrac{p-s}{p(N-s)} A_s^{(N-s)/(p-s)} \mu^{(p-N)/(p-s)} \end{aligned} \tag{2.61}$$

Par le lemme (2.6), nous pouvons supposer que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Comme I' est continue, u est, donc, une solution faible de problème (2.7). Alors

$$\left\langle I'(u), u^- \right\rangle = 0$$

où $u^- = min\{u, 0\}$. c'est-à- dire : $u \geq 0$.
Par conséquent, u est une solution non-négative de (2.1).
Par suite , u est une solution positive du problème (2.1).

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à l'existence et la multiplicité des solutions positives d'une classe d'équations elliptiques quasi-linéaires avec un exposant critique de Hardy-Sobolev .
Nous avons montré ce résultat en appliquant une méthode variationnelle représentée, précisément, par le théorème de col, Ainsi des techniques introduites dans [5].

Bibliographie

[1] A.Ambrosetti,H.Brézis, and G.Cerami. *Combined effects of concave and convex nonlinrearities in some elliptic problems* ". Journal of functional analysis ,vol.122,no.2,pp.519-543,1994.

[2] H.Brezis. "*Analyse fonctionnelle théorie et applications*". Masson ,Paris,1992.

[3] H.Brezis,F.Lieb.*A relation between ointwise convergence of function et convergence of functionals*". Proceeding of the American Society,vol.88,no.3,pp.486–490,1982.

[4] J.V.Gonçalves, C.O.Alves. "*Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*involving critical Sobolev exponents* ". Nonlinear Analysis : Theory. Methods and Applications,vol.32,no.1,pp.53–70,1998.

[5] N.Ghoussoub, C.Yuan. "*Multiple solutions for quasilinear PDEs involing the critical Sobolev and Hardy exponents*". Transactions of the American Mathematical Society,vol.352,no12,pp.5703–5743,2000.

[6] J. P. Garcia Azorero and I. Peral Alonso. " *Hardy Inequalities and Some Critical Elliptic and Parabolic Problems*". Journal of Differential Equations 144 (1998) 441-476.

[7] C.Guanwei. "*Quasilinear elliptic equations with Hardy-Sobolev critical exponents : existence and multiplicity of nontrivial solutions*".Journal of Applied Mathematics,vol.2014,Hindawi,2014.

[8] E.Jannelli. "*The role played by space dimension in elliptic critical problems*". Jornal of differential equations ,vol.156,no.2,pp.407-426,1999.

[9] O. Kavian. "*Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*". Volume 13. Springer, 1993.

[10] L.Nireberg and H.Brézis. "*Positive solutions of nonlinear elliptic equations involing critical sobolev exponents*". Communications on pure and applied mathematics ,vol.36,no.4,pp.437-477,1983.

[11] I. Peral." *Multiplicity of solutions for the p-laplacian*". International Center for Theoretical Physics Lecture Notes, Trieste, 1997.

[12] M.Struwe. "*Variational Methods :Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems,vol.34 of Results in Mathmatics and Related Areas(3)*". Springer,Berlin,Germany,2nd edition,1996

[13] J.L.Vazquez. "*A strong maximum principle for some quasiliear equtions*".Applied Mathematics and Optimization ,vol.12,no.3,pp.191–202,1984.

الملخص

في هذه الأطروحة نناقش وجود حلول موجبة للمعادلات الإهليلجية شبه الخطية مع الأسس الحرجة لهاردي- سوبولاف باستعمال طريقة متغيرة. نتعامل مع المشكلة التالية

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu \dfrac{|u|^{p^*(s)-2}}{|x|^s} u = f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence des solutions positives pour certaines équations elliptiques quasi-linéaires avec exposants critiques de Hardy-Sobolev en appliquant une méthode variationnelle, il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu \dfrac{|u|^{p^*(s)-2}}{|x|^s} u = f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Abstract

The object of this thesis is to study the existence of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations with Hardy-Sobolev critical exponents by using variational method; it is about the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu \dfrac{|u|^{p^*(s)-2}}{|x|^s} u = f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$