

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr BELKAÏD - TLEMCCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

TITRE

**Mathématiques Générales : Cours
et Exercices Corrigés**

Adressé aux étudiants niveau : Licence (L 1)

Domaine : Génie Mécanique.

Etabli Par :

Dr. HADJOU BELAID ASMA

Année : 2023/2024

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées

Faculté des Sciences - Tidjani HADDAM

Tél.: 043 21 63 70 / Tél&Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71

Site Web: www.fs.univ-tlemcen.dz

Email: vdrpg.facscience@gmail.com

HADJOU BELAID ASMA

Préface

Préface

Ce polycopié est un recueil de cours et exercices corrigés en mathématiques générales. Il s'adresse aux étudiants de la première année Licence en Génie Mécanique. Il peut également servir aux étudiants du première année MI.

Une partie considérable du cours a été consacrée pour les exemples et les figures d'illustration afin de bien éclaircir les notions traitées. Ainsi, une série d'exercices a été proposée à la fin de chaque chapitre avec leurs corrigés bien détaillés. Ceci permet aux étudiants à bien assimiler les leçons vu en cours avec différentes mécanismes de raisonnement. Cependant, il est indispensable que l'apprenant résout activement par lui-même les exercices, sans regarder les solutions. Enfin, ce manuscrit n'est en aucun cas un ouvrage complet en mathématiques. Ce qui rend préférable de consulter les références citées dans la bibliographie si jamais l'étudiant se trouve encore en difficulté à résoudre ses exercices.

Le manuscrit se compose de cinq chapitres. Le premier consiste principalement à introduire les notions de la logique mathématique et les différentes méthodes de raisonnement. Dans le second chapitre nous abordons la théorie des ensembles avec les règles de calculs. En suite, nous traitons les relations binaires, puis les applications en détaillant la notion de bijection. Le troisième chapitre est consacré aux suites numériques, tout en étudiant la convergence, les limites ainsi que les différents types de suites numériques. Dans le quatrième chapitre nous introduisons fonctions en étudiant les limites, la continuité, la dérivabilité ainsi que le lien entre ces notions. Nous

rappelons ensuite les fonctions logarithme et exponentielle. Le dernier chapitre est consacré pour traiter différents types de formules de Taylor puis les développement limités.

Enfin, je remercie mes collègues d'avoir consacré leurs temps pour lire le manuscrit et contribuer par leurs remarques pertinentes. Comme chaque travail académique, cet ouvrage pourrait contenir des fautes. Nous invitons donc nos aimables lecteurs, étudiants ou enseignants, à nous envoyer leurs remarques et critiques afin de pouvoir enrichir ce document ; e-mail : asma.hadjou-belaid@hotmail.com .

Table des matières

Préface	iii
Table des figures	4
Liste des tableaux	5
1 Introduction à la logique mathématique	7
1.1 Pourquoi la logique mathématiques ?	7
1.2 Notions de logique mathématique	7
1.2.1 Les connecteurs logiques	8
1.2.2 Table de vérité	11
1.2.3 Les quantificateurs logiques	11
1.3 Méthodes de raisonnement	13
1.3.1 Raisonnement direct	13
1.3.2 Cas par Cas	14
1.3.3 Raisonnement par récurrence	14
1.3.4 Raisonnement par l'absurde	15
1.3.5 Raisonnement par contraposé	16
1.3.6 Raisonnement par contre exemple	16
1.4 Série d'exercices	18
1.5 Solutions des exercices	21
2 Ensembles, Relations et Applications	28
2.1 Notions sur la théorie des ensembles	28
2.1.1 Opérations sur les ensembles	29
2.1.2 Recouvrements et Partitions	33
2.1.3 Règles du calcul	34
2.1.4 Produit cartésien d'ensembles	35
2.2 Relations binaires dans un ensemble	36
2.2.1 Propriétés des relations binaires	36
2.2.2 Relation d'équivalence	37
2.2.3 Relation d'ordre	39
2.3 Applications	41
2.3.1 Image directe, Image réciproque	43
2.3.2 Injection, Surjection et Bijection	44
2.4 Série d'exercices	49

2.5	Solutions des exercices	52
3	Suites numériques	58
3.1	Quelques définitions	58
3.2	Limite et convergence d'une suite	59
3.3	Limites par comparaison et par encadrement	62
3.4	Exemples de suites	64
3.4.1	Suite arithmétique	64
3.4.2	Suite géométrique	64
3.4.3	Suites adjacentes	65
3.4.4	Suites de Cauchy	66
3.4.5	Suites extraites	66
3.4.6	Suites récurrente	67
3.5	Quelques limites usuelles	67
3.6	Série d'exercices	69
3.7	Solutions des exercices	72
4	Fonction d'une variable réelle	79
4.1	Généralités et rappels	79
4.1.1	Domaine de définition	79
4.1.2	Représentation graphique	80
4.1.3	Fonctions périodiques, paires et impaires	81
4.1.4	Sens de variation d'une fonction	81
4.2	Limites, Continuité	82
4.2.1	Définitions (limites)	82
4.2.2	Calcul des limites	82
4.2.3	Définitions (continuité)	85
4.2.4	Quelques théorèmes importants	86
4.2.5	Prolongement par continuité	87
4.3	Dérivabilité	88
4.3.1	Définitions	88
4.3.2	Interprétation graphique	89
4.3.3	Théorèmes importants	90
4.3.4	Dérivées des fonctions usuelles	93
4.3.5	Dérivées successives	93
4.3.6	Opérations sur les dérivées	94
4.4	Fonctions logarithmique et exponentielle	94
4.4.1	Fonction logarithmes	94
4.4.2	Fonction exponentielle	96
4.5	Série d'exercices	100
4.6	Solutions des exercices	102
5	Formules de Taylor et Développements Limités	111
5.1	Formules de Taylor	111
5.1.1	Formule de Taylor-Young	112
5.1.2	Formule de Taylor avec Reste de Lagrange	112
5.1.3	Formule de Taylor avec Reste Intégral	112
5.2	Développements limités	113
5.2.1	Développement limité d'ordre 1	113

5.2.2	Généralisation	114
5.2.3	DL des fonctions en un point quelconque x_0	115
5.2.4	DL des fonctions usuelles au point 0 :	116
5.2.5	Opérations sur les DL	117
5.3	Série d'exercices	122
5.4	Solutions des exercices	124
	Bibliographie	134

Table des figures

2.1	Illustration de l'union de deux ensembles A et B .	30
2.2	Illustration de l'intersection de deux ensembles A et B .	30
2.3	Illustration du complémentaire d'un ensemble \mathcal{C}_E^A .	31
2.4	Illustration de la différence de deux ensembles $A \setminus B$.	31
2.5	Illustration de la différence symétrique de deux ensembles $A \Delta B$.	32
2.6	Illustration d'un recouvrement d'un ensemble.	33
2.7	Illustration d'une partition d'un ensemble.	33
2.8	Représentation graphique d'une application.	41
2.9	Image directe et image réciproque d'un ensemble.	43
2.10	Application injective, non surjective.	44
2.11	Application non injective, surjective.	45
2.12	Application bijective.	45
2.13	Application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.	50
2.14	Application $g : \mathbb{R} \rightarrow [A, B]$.	50
4.1	Première et deuxième bissectrices dans un plan.	80
4.2	Dérivabilité à gauche et à droite de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x $ en point 0.	89
4.3	Représentation graphique de la tangente T	89
4.4	Illustration du théorème du Rolle	90
4.5	Illustration du théorème des accroissement finis.	91
4.6	Graphe d'une fonction et sa dérivée avec les extremums locaux.	92
4.7	Sens de variation d'une fonction.	92
4.8	Fonctions exponentielle et logarithme népérien.	97
5.1	DL de la fonction $\sin(x)$ au voisinage de 0 avec différents ordres.	115

Liste des tableaux

1.1	Construction de la table de vérité	11
4.1	Règles d'addition des limites	83
4.2	Règles de multiplication des limites	83
4.3	Règles d'inversion des limites	84
4.4	Table des dérivées des fonctions usuelles.	93
5.1	Table des développements limités des fonctions usuelles	116

Introduction à la logique mathématique

1.1 Pourquoi la logique mathématiques ?

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Dans la vie, nos expressions sont parfois ambiguës et qui changent du sens d'une situation à l'autre. Par exemple : que peut-on répondre à la question « As-tu 30 euro en poche ? » si l'on dispose 50 euro ? De plus quelques notions deviennent difficiles à expliquer avec des mots : Prenons l'exemple de la continuité d'une fonction « On trace le graphe sans lever le crayon ». Est-elle une définition satisfaisante ? Voici la définition mathématique de la continuité d'une fonction

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

en un point $x_0 \in I$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Le but de ce chapitre est de rendre cette ligne plus claire, c'est la logique. Enfin, les mathématiques servent à distinguer le vrai du faux d'une manière plus exacte. Par exemple « Une augmentation de 20% puis de 30% est plus intéressante que 50% ? Pour donner une réponse exacte il faut suivre une démarche logique. On parle donc de raisonnement logique.

1.2 Notions de logique mathématique

Définition 1.2.1 *Une proposition ou assertion est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vraie ou faux, mais jamais les deux en même temps.*

Exemple 1.2.1 :

- " 3 est un diviseur de 27 " est une proposition vraie.
- " $-1 \in \mathbb{N}$ " est une proposition fausse.

Notation On note 'V', 'F' ou bien '1', '0' pour désigner une proposition 'Vraie' ou 'Fausse', respectivement.

Remarque 1.2.1 Une proposition peut être simple (qui contient un seul énoncé) ou composée qui est construite à partir de plusieurs propositions simples.

Exemple 1.2.2 :

- " $2 + 2 = 4$ et 16 est le carré de 4"
- " Le chauffage est éteint ou il fait froid "

Négation : La négation d'une proposition P est une proposition opposée à celle de P . On dira ' $\text{non}P$ ' ou bien ' \overline{P} ' et on note \overline{P} . Si La proposition P est vraie alors sa négation \overline{P} est fausse et vice-versa.

Exemple 1.2.3 :

- $P = "2 + 3x^2 \geq 2"$; P est une proposition vraie. Sa négation $\overline{P} = "2 + 3x^2 < 2"$ est donc une proposition fausse.

1.2.1 Les connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions simples. On peut alors construire une proposition composée de P, Q en les reliant par des connecteurs logique.

1. **Conjonction :** Deux propositions reliées par le mot "ET" forment une proposition composée appelée la conjonction des deux propositions. On dira P et Q et on écrira $P \wedge Q$. Une conjonction de P et Q n'est vraie que si P et Q sont vraies toutes les deux.

Exemple 1.2.4 :

- Soient les propositions $P = "\sqrt[3]{27} = 3"$ et " $Q = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} = +\infty$ ".
 $P \wedge Q$ est une proposition vraie car P et Q sont toutes les deux vraies.
- $P = "-2 + 6 = 3"$ et $Q = "(-5)^2 = 25"$.
 $P \wedge Q$ est une proposition fausse car P est fausse.

2. **Disjonction** : Deux propositions reliées par le mot 'OU' est une disjonction. On dira P ou Q et on note $P \vee Q$. Une disjonction est vraie si au moins une des propositions est vraie (une ou les deux).

Exemple 1.2.5 : Prenons les mêmes exemples précédents

- Soient les propositions $P = \sqrt[3]{27} = 3$ et $Q = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} = +\infty$.
 $P \vee Q$ est une proposition vraie car P et Q sont toutes les deux vraies.
- $P = -2 + 6 = 3$ et $Q = (-5)^2 = 25$.
 $P \vee Q$ est une proposition vraie car Q est vraie.

Remarque 1.2.2 Les notations \wedge et \vee ressemblent à celles de l'intersection \cap et l'union, \cup en théorie des ensembles. En effet

- $x \in A \cap B$ signifie que $x \in A$ **ET** $x \in B$.
- $x \in A \cup B$ signifie que $x \in A$ **OU** $x \in B$.

3. **Implication** : Une implication logique est une proposition de type

" Si P est vraie **alors** Q est vraie" (conditionnelle).

On note $P \Rightarrow Q$ est on lit P implique Q .

L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement si la proposition P est vraie et la proposition Q est fausse. Dans tous les autres cas ; l'implication est vraie.

Remarque 1.2.3 :

- La proposition d'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\bar{P} \vee Q$.
- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une condition suffisante pour avoir Q , ou que Q est une condition nécessaire pour avoir P .

Exemple 1.2.6 :

" $(2x - 9 = 0) \Rightarrow (x = \frac{9}{2})$ " est une proposition vraie.

4. **Équivalence** : Deux propositions sont dites équivalentes si

$$P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P.$$

On écrit $P \Leftrightarrow Q$ et on dit P est équivalente à Q ou bien P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.

Vocabulaire : La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit " P si et seulement si Q ".

Une équivalence est vraie si P est vraie lorsque Q est vraie, et si P est fausse lorsque Q est fausse.

Remarque 1.2.4 Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q . Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Exemple 1.2.7 :

" $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ " est une proposition vraie.

Méthode : Démonstration d'une équivalence :

Pour démontrer une équivalence on procède par la **double implication**, c'est-à-dire on démontre que $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$.

Prenons un exemple simple, montrons que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x^2 + y^2 = 0] \Leftrightarrow [x = y = 0].$$

Raisonnons par double implication :

(\Rightarrow) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $x^2 + y^2 = 0$, et montrons que $x = y = 0$.

Comme $x^2 + y^2 = 0$, il vient que $x^2 = -y^2$. Or $x^2 \geq 0$ et $-y^2 \leq 0$. Ainsi, $x^2 = -y^2 = 0$, d'où $x = y = 0$.

(\Leftarrow) Supposons que $x = y = 0$, et montrons que $x^2 + y^2 = 0$. Puisque $x = y = 0$ alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.

Conclusion : on a montré les deux implications, d'où l'équivalence.

Propriétés :

- $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
- $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$, (Lois De Morgan).
- $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
- $[P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R] \Rightarrow [P \Rightarrow R]$
- $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.
- $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

1.2.2 Table de vérité

Toutes les définitions précédentes peuvent être résumées dans une table suivante appelée 'table de vérité' noté TV.

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

TABLE 1.1 – Construction de la table de vérité

Remarque 1.2.5 : *Principe de déduction*

D'après cette table de vérité, si la proposition P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. De plus, en sachant que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante :

$$P \text{ est vraie et } P \Rightarrow Q \Rightarrow \dots \Rightarrow S \Rightarrow T.$$

Alors on a démontré que T est vraie.

1.2.3 Les quantificateurs logiques

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x , où x est un élément d'un ensemble E .

- a) **Quantificateur universel** : Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie « pour tous » les éléments x de E . On note \forall et on écrit :

$$\forall x \in E, P(x).$$

On note quantificateur universel par le symbole \forall qui se lit « **Quelque soit** ».

Exemple 1.2.8 :

- « $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 \geq 1$ » est une assertion vraie et qui signifie pour tout entier naturel n on a $n + 1 \geq 1$.
- « $\forall x \in]-1, 1[, x^2 < -1$ », est une assertion fausse, car le carré d'un nombre ne peut pas être négatif.

- b) **Quantificateur existentiel** : Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément de E . On note \exists et on écrit :

$$\exists x \in E, P(x)$$

Cette assertion est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « **Il existe au moins** ».

Exemple 1.2.9 :

- « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 < 0$ » est fausse et signifie qu'il existe au moins un réel x tel que son carré est négatif.
- « $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - n = 0$ » est vraie. En effet, il suffit de trouver au moins une valeur qui vérifie cette propriété par exemple $n = 1$.
- « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$ » est fausse car aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.

Remarque 1.2.6 Un autre quantificateur existentiel noté $\exists!$ et qui signifie « **il existe un unique** » i.e. une seule et unique valeur.

- c) **Négations des quantificateurs** :

- La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » c'est « $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ ».

Exemple 1.2.10 La négation de la proposition suivante

$$\forall x \in]-\infty, -1], \text{ tel que } x^2 \geq 1$$

est donnée par

$$\exists x \in]-\infty, -1], \text{ tel que } x^2 < 1$$

- Inversement, la négation de la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » c'est « $\forall x \in E, \overline{P(x)}$ ».

Exemple 1.2.11 Soit la proposition suivante

$$\exists \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin(\theta) = \cos(\theta),$$

sa négation est de la forme

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(\theta) \neq \cos(\theta)$$

Remarque 1.2.7 *L'ordre des quantificateurs est important dans les propositions.*

Par exemple :

$$P1 : \forall x \in [0, 1[, \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ tel que } x^n < \varepsilon.$$

$$P2 : \exists n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall x \in [0, 1[, x^n < \varepsilon.$$

Les deux assertions $P1$ et $P2$ sont différentes. En effet $P1$ signifie que pour tout réel x , on peut trouver un entier n et un epsilon tel que $x^n < \varepsilon$ ce qui est vrai. Donc les valeurs de n et ε dépendent de la valeur de x .

Par contre $P2$ signifie que pour un entier bien fixé n et un ε , toutes les valeurs de x vérifient $x^n < \varepsilon$ ce qui est faux.

Par exemple pour $n = 10$ et $\varepsilon = 0.005$, pour $x = 0.2$, $x^n = 0.0000001 < \varepsilon$ mais pour $x = 0.5$, $x^n = 0.006 > \varepsilon$.

Négation d'une assertion à plusieurs quantificateurs :

$$P1 : \forall x \in [0, 1[, \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ tel que } x^n < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \overline{P1} : \exists x \in [0, 1[, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0 \quad x^n \geq \varepsilon.$$

1.3 Méthodes de raisonnement

1.3.1 Raisonnement direct

C'est le raisonnement auquel on est le plus habitué. Si on veut démontrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.3.1 :

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Preuve : Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Notons qu'un rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. On pose alors $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{Z}^*$. La somme donne

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{p'q'}$$

Or $pq' + qp'$ est un élément de \mathbb{Z} ; et p', q' est un élément de \mathbb{Z}^* . Donc $a + b$ s'écrit sous la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$

1.3.2 Cas par Cas

La méthode de cas par cas ou de disjonction permet de vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les $x \in E$ en deux parties : on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E , puis pour les x n'appartenant pas à A .

Exemple 1.3.2 :

Montrer que

$$x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1.$$

Preuve : Soit x un réel. Distinguons deux cas : Soit $x \geq 1$, alors $|x - 1| = x - 1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x - 1|$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x - 1| &= x^2 - x + 1 - x + 1 \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x - 1)^2 + 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$ donc pour $x \geq 1$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Soit $x \leq 1$, alors $|x - 1| = -(x - 1)$. On obtient donc

$$x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 - x + 1 + x - 1 = x^2 \geq 0.$$

Et donc pour $x \leq 1$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

On conclue que $|x - 1| \leq x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Raisonnement par récurrence

On utilise la démonstration par récurrence lorsqu'on veut prouver qu'une propriété de type " $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ " est vraie. Pour montrer ce genre de propriété il suffit de :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie i.e. pour $n = n_0$ la propriété est vraie.
- Supposer que $P(n)$ est vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $P(n + 1)$ est vraie.

Exemple 1.3.3 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \sum_0^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Montrons que $P(0)$ est vraie. On a pour $n = 0$;

$$\sum_0^0 k = \frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ vraie jusqu'à l'ordre n i.e. $\sum_0^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire montrons que

$$\sum_0^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_0^{n+1} k &= \sum_0^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

On conclut donc que $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3.4 Raisonnement par l'absurde

Cette méthode consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction. De plus

$$(P \Rightarrow Q \text{ est équivalente à } \overline{P} \vee Q)$$

Exemple 1.3.4 :

Soient $a, b \geq 0$, montrer par l'absurde que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$. Supposons que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$, on a alors

$$\begin{aligned} a(1+a) &= b(1+b) \Rightarrow a + a^2 = b + b^2 \\ &\Rightarrow a^2 - b^2 = -(a-b) \\ &\Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b) \\ &\Rightarrow (a+b) = -1. \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction car $a, b \geq 0$ donc $a+b \geq 0$. On conclut que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

1.3.5 Raisonnement par contraposé

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$ on démontre sa contraposé $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Exemple 1.3.5 :

Montrons par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.

Preuve : Montrons la contraposée de cette propriété :

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair.}$$

On a

$$\begin{aligned} n \text{ est impair} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n = 2k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k) + 1 = 2p + 1, \text{ avec } p = 2k^2 + 2k. \\ &\Rightarrow n^2 \text{ est impair.} \end{aligned}$$

1.3.6 Raisonnement par contre exemple

Pour montrer que $\forall x \in E, P(x)$ est fausse il suffit de trouver un contre exemple i.e. de montrer que $\exists x \in E, \overline{P(x)}$.

Exemple 1.3.6 : Soit la proposition suivante :

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0.$$

Pour montrer que la proposition P est fausse, il suffit de trouver un contre exemple.

Pour $x = 1, x^2 - 1 = 0$, donc $\exists x \in \mathbb{R}$, tel que $\overline{P(x)}$ est vraie. Donc P est fausse .

Exemples supplémentaires avec indications :

— Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } a \leq (a + b)/2 \leq b \text{ et } a \leq \sqrt{ab} \leq b. \text{ (Raisonnement direct)}$$

— Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n(n + 1)$ est divisible par 2. (Cas par cas, distinguer les n paires des n impaires).

— Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. (Contraposée ou absurde, utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier. (Absurde).

— Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$? (Contre-exemple).

— Montrer que pour tout $n \geq 1, 1 + 2 + \dots + n = (n(n + 1))/2$. (Récurrence).

— Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \text{ (Récurrence).}$$

1.4 Série d'exercices

Exercice 1.1 :

Écrire avec les quantificateurs des propositions suivantes :

- a. f est la fonction nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- b. Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .
- c. f est la fonction identité de \mathbb{R} .
- d. Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
- e. La fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est croissante.
- f. L'équation $\sin(x) = x$ a une et une seule solution dans \mathbb{R} .
- g. Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui (propriété archimédienne).

Exercice 1.2 :

Traduire en langage courant l'assertion exprimée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall x' \in \mathbb{N}, \quad x \neq 0 \text{ et } x' \neq 0 \\ \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{N}), (\exists p \in \mathbb{N} \text{ et } \exists p' \in \mathbb{N}) \quad \text{tel que} \quad (y = qx, y = q'x' \text{ et } y \neq 0).$$

Exercice 1.3 :

Montrer par un contre exemple que :

- La fonction sinus n'est pas nulle.
- La fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 1.4 :

1. Traduire mathématiquement la proposition :

« si a et b sont deux entiers naturels, il existe un multiple de a qui est supérieure à b ».

2. Donner la négation de la proposition $-2 \leq x \leq 2$.
3. Donner la négation de la proposition : « $\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{N}, x + y > 0$ ».
4. Traduire en français l'énoncé « $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, xy \geq 0$ ».
5. Soient P et Q deux propositions telles que P est vraie est Q est fausse. La proposition « $P \vee (Q \Rightarrow \overline{P})$ » est-elle vraie ?
6. En utilisant la table de vérité, démontrer que l'assertion suivante est vraie :

$$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}.$$

Exercice 1.5 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

$$P_n := 3 \text{ divise } 4^n - 1 \text{ et } Q_n := 3 \text{ divise } 4^n + 1$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow Q_n ?$$

Exercice 1.6 :

Soient n un entier naturel et x, y deux nombres réels. Écrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer :

1. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n impair.
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$.
3. $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$.
4. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 1.7 :

Montrer que pour tout entier naturel n on a

$$P(n) := \sum_0^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 1.8 :

Démontrer par l'absurde que :

« Si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier ».

Exercice 1.9 :

1. Déterminer la négation de la proposition suivante :

$$\langle \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } -\varepsilon \leq x^n \leq \varepsilon. \rangle$$

2. Quelle est la contraposée de la proposition suivante :

« Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair » ?

3. Démontrer par la table de vérité que l'assertion suivante est vraie :

$$\overline{(P \vee Q)} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

4. Traduire mathématiquement, en utilisant les quantificateurs logiques, la proposition suivante :

« Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

Démontrer par récurrence cette proposition.

Exercice 1.10 :

Répondre aux questions suivantes et justifier vos réponses :

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 1.11 :

Les quatre assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

1. $\exists x \in \mathbb{R}$, tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $x+y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, tel que $x+y > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$, tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $y^2 > x$.
4. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, tel que $|x| < \alpha \Rightarrow x^2 < \varepsilon$.

Exercice 1.12 :

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égale à \sqrt{n} .
2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

Exercice 1.13 :

Montrer que $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Exercice 1.14 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2 , soit 4 divise $n^2 - 1$.

Exercice 1.15 :

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n.$$

1.5 Solutions des exercices

Solution d'exercices 1.1 :

Utilisons les quantificateurs logiques pour écrire les propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$
- $\exists x \in \mathbb{R} / D(x) = 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x.$
- $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = x.$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
- $\exists! x \in \mathbb{R} / \sin x = x.$
- $\forall x \in \mathbb{Q}, (x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / n > x).$

Solution d'exercice 1.2 :

C'est la définition du multiple commun : deux entiers strictement positifs possèdent un multiple commun non nul.

Solution d'exercice 1.3 :

- Trouvons au moins un x tel que $\sin x \neq 0$. Prenons $x = \frac{\pi}{2}$ donc $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$. D'où la fonction n'est pas nulle.
- Prenons le point 0, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 donc n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

Solution d'exercice 1.4 :

- $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} / ka \geq b.$
- $x < -2$ ou $x > 2.$
- $\exists x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{N} / x + y \leq 0.$
- Pour tout nombres réels positifs ou nuls x et y , le produit de x et y est positif ou nul
- Vraie

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$Q \Rightarrow \bar{P} (i.e. \bar{Q} \vee \bar{P})$	$P \vee (Q \Rightarrow \bar{P})$
V	F	F	V	V	V

6. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}.$

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$\overline{(P \wedge Q)}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$	$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Solution d'exercice 1.5 :

1. Si P_n est vraie alors $4^n - 1$ est multiple de 3 *i.e.* $4^n - 1 = 3k$, $k \in \mathbb{R}$.
Montrons que P_{n+1} est vraie. On a

$$4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3 = 4(3k) + 3 = 3(4k + 1) = 3k', \quad k' \in \mathbb{R}$$

Donc $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3. Alors P_{n+1} est vraie.

De même on démontre que si Q_n est vraie alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$ est un multiple de 3 donc Q_{n+1} est vraie.

2. Procédons par récurrence. Vérifions la propriété pour $n = 0$, on a $(4^0 - 1) = 0$ donc P_0 est vraie. Supposons que P_n est vraie, et d'après la question 1, si P_n est vraie alors P_{n+1} vraie.

On conclue que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. C'est faux. Raisonnons par l'absurde.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, si Q_{n_0} est vraie alors on a $(4^{n_0} + 1) + (4^{n_0} - 1) = 4^{n_0}$ est un multiple de 3, car P_{n_0} et Q_{n_0} sont vraies.

Or le seul nombre premier qui divise 4^{n_0} est 2, donc c'est absurde et Q_{n_0} est fausse.

Solution d'exercice 1.6 :

- $n \neq 2$ et n pair $\Rightarrow n$ non premier. Preuve : si n est pair et $n \neq 2$, alors 2 divise n et donc n n'est pas premier.
- $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$. Preuve : triviale.
- $a^2 \geq a \Rightarrow a \leq 0$ ou $a \geq 1$. Preuve : $a^2 \geq a \Rightarrow a(a - 1) \geq 0$, donc on a soit $(a - 1 \geq 0 \text{ et } a \geq 0)$ ou $(a - 1 \leq 0 \text{ et } a \leq 0)$, ce qui implique que $a \geq 1$ ou $a \leq 0$.
- $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1) \Rightarrow x = y$. Preuve : si $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$ alors en développant on obtient $y - x = x - y$; d'où $2x = 2y$, $x = y$.

Solution d'exercice 1.7 :

Soit la propriété

$$P(n) := \sum_0^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

- Montrons que la proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$, on remplace n par 0 dans les deux cotés :

$$\sum_0^0 2^k = 2^0 = 1 \text{ et } 2^{0+1} - 1 = 1.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Supposons que $P(n)$ est vraie à l'ordre n i.e. $\sum_0^n 2^k = 2^{n+1} - 1$.
- Montrons que $P(n+1)$ est vraie i.e. $\sum_0^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_0^{n+1} 2^k &= \sum_0^n 2^k + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(1 + 1) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Alors la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solution d'exercice 1.8 :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que n est le carré d'un nombre entier non nul et $2n$ est aussi le carré d'un nombre entier (P et non Q).

On peut écrire donc

$$n = (k_1)^2, \quad \text{et} \quad 2n = (k_2)^2, \quad \text{avec} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$2n = 2(k_1)^2 = (k_2)^2 \Rightarrow 2 = \frac{(k_2)^2}{(k_1)^2} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Contradiction! Car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel mais $\frac{k_2}{k_1}$ est un nombre rationnel. Donc on vient de démontrer que si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

Solution d'exercice 1.9 :

1. La négation est donnée par

$$\ll \exists x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad x^n < -\varepsilon \text{ ou } x^n > \varepsilon. \gg$$

2. La contraposée est donnée par :

« Si l'entier n est impair, alors l'entier $(n^2 - 1)$ est divisible par 8 »

3. Démontrons que l'assertion suivante est vraie :

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$\overline{(P \vee Q)}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$	$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

4. Traduction mathématique, en utilisant les quantificateurs logiques :

$$\ll \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (x + 1)^n \geq 1 + nx \gg.$$

Démontrons par récurrence cette proposition.

- Pour $n = 0$, $(x + 1)^0 = 1 \geq 1 + 0x$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n , i.e. $(x + 1)^n \geq 1 + nx$.
- Montrons que la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$ i.e.

$$(x + 1)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

On a supposé que $(x + 1)^n \geq 1 + nx$.

Alors $(x + 1)(x + 1)^n \geq (x + 1)(1 + nx)$.

Donc $(x + 1)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$.

On obtient

$$(x + 1)^{n+1} \geq 1 + (1 + n)x + nx^2 \geq 1 + (1 + n)x + nx^2, \text{ car } nx^2 \geq 0.$$

Par conséquent $(x + 1)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$. Donc la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

On conclut que la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solution d'exercice 1.10 :

1. Oui, si n, m pairs $\Rightarrow nm$ pair. Preuve : $\exists i/n = 2i$, donc $nm = 2(im)$ est donc pair.
2. Oui, si n, m impairs $\Rightarrow nm$ impair. Preuve : $\exists i, j/n = 2i + 1$ et $m = 2j + 1$, donc

$$nm = (2i + 1)(2j + 1) = 2(2ij + i + j) + 1,$$

est donc nm est impair.

3. Si n pair et m impair $\Rightarrow nm$ pair. Preuve (cf 1).
4. Oui, n pair $\Rightarrow n^2$ pair. Preuve :
 (\Rightarrow) Si n pair alors $n * n$ pair (cf1).
 (\Leftarrow) démontrons la contraposée, si n impair alors n^2 est impair (cf 2), d'où l'équivalence.

Solution d'exercice 1.11 :

1. Faux. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, il suffit de prendre $y = -x$. Sa négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad / \quad x + y \leq 0.$$

2. Vrai. Prenons par exemple $y = -x + 1$. Sa négation :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad / \quad \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0.$$

3. Vrai. Soit $x = -1, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$. Sa négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad / \quad y^2 \leq x.$$

4. Vrai. Soit $\alpha = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Sa négation :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad / \quad \forall \alpha > 0, |x| < \alpha \text{ et } x^2 \geq \varepsilon.$$

Solution d'exercice 1.12 :

1) Soit n non premier. Supposons que n n'a pas de diviseur premier $p \leq \sqrt{n}$.

n non premier implique que $\exists a, b \geq 2 \quad / \quad n = ab$.

Tout nombre $x \geq 2$ a un diviseur premier $\leq x$.

Si $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$, cela donne une contradiction.

Donc $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, ce qui implique $n > n$, absurde !

D'où le résultat.

2) $\sqrt{89} \approx 9.4$, et 89 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7, donc 89 est premier.

$\sqrt{167} \approx 12.9$, et 167 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7 ou 11 donc 167 est premier.

$\sqrt{191} \approx 13.8$, et 191 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11 ou 13, donc 191 est premier.

Solution d'exercice 1.13 :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux.

Alors $89q^2 = p^2$ est premier (cf 1.12) donc 89 divise p : il existe k tel que $p = 89k$, donc $q^2 = 89k^2$ et 89 divise q .

C'est une contradiction donc $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Solution d'exercice 1.14 :

Si n est pair c'est-à-dire $n = 2k$ alors $n^2 = 4k^2$, d'où 4 divise n^2 . De même, si n est impair, on écrit $n = 2k + 1$ alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$. On obtient donc $n^2 - 1 = 4(k^2 + k) = 4k'$. On conclue donc que 4 divise $n^2 - 1$.

Solution d'exercice 1.15 :

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n$.

- Vérifions pour $n = 4, 4^2 = 16 = 2^4$.
- On suppose que $n^2 \leq 2^n$ avec $n \geq 4$.
- Montrons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n + 1$.

Pour tout $n > 2$ et en multipliant par n on a $2n < n^2$, ce qui est équivalent à $2n + 1 \leq n^2$.

Or

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1) \leq n^2 + n^2 = 2n^2 \leq 2 * 2^n = 2^{n+1}.$$

D'où $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, n^2 \leq 2^n.$$

Ensembles, Relations et Applications

La théorie des ensembles a pour intérêt initialement pour répondre à des questions posées par la notion d'infini. Pour donner une idée, imaginons qu'on dispose des deux listes de nombres suivantes :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	...

Les deux listes doivent avoir le même 'nombre' d'éléments. Mais par ailleurs la seconde liste n'est autre que la première à laquelle on a ôté un élément sur deux. Elle doit donc en avoir deux fois moins que la première. Ce paradoxe apparent est une propriété spécifique des ensembles infinis. Ce chapitre se limitera à une présentation très intuitive des différentes notions de théorie des ensembles.

2.1 Notions sur la théorie des ensembles

Définition 2.1.1 *Un ensemble est une collection d'objets de la même nature qui sont appelés les éléments.*

Exemple 2.1.1 :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Définition 2.1.2 :

- Si a est un élément de l'ensemble E alors on dit que a appartient à E et on écrit $a \in E$.
- Si b n'est un élément de l'ensemble E alors on dit que b n'appartient pas à E et on écrit $b \notin E$.

- L'ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note \emptyset .

Exemple d'ensembles vides :

$$F = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sqrt{x^2 + 1} < 1\} \Rightarrow F = \emptyset,$$

car $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Opérations sur les ensembles

a) Inclusion : Soient A et B deux ensembles dans E . Si tous les éléments d'un ensemble A sont aussi les éléments de l'ensemble B alors on dit que A est inclus dans B ou bien A est un sous-ensemble de B . On note $A \subseteq B$.

On peut traduire cette définition mathématiquement

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Exemple 2.1.2 :

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. On remarque que tous les éléments de l'ensemble B appartiennent également à l'ensemble A , donc $B \subseteq A$.
- $E = \mathbb{R}^-$ et $F = \{x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tp } x = y^2\}$ (ensemble des carrés). Remarquons que les éléments de E sont tous négatifs et les éléments de F sont des carrés donc positifs. Donc $E \not\subseteq F$ et $F \not\subseteq E$.

Remarque 2.1.1 :

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B.$$

b) Égalité : On a une égalité entre deux ensembles A et B si les deux ensembles ont exactement les mêmes éléments. L'égalité est vérifiée si on a une **double inclusion**, i.e.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

c) Union : Soient A et B deux ensembles dans E . L'union de A et B , noté $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à un des deux ensembles (A ou B) i.e.

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

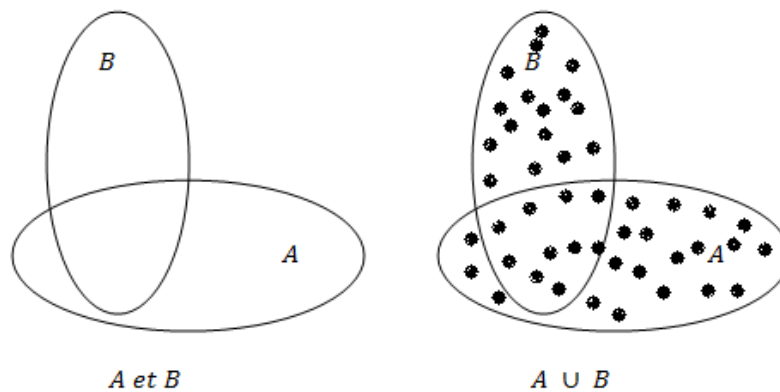


FIGURE 2.1 – Illustration de l'union de deux ensembles A et B .

Exemple 2.1.3 :

$$A = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{11}\}, \quad B = \{-5, -3, -1, 1\},$$

$$\text{donc } A \cup B = \{-5, -3, -1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{11}\}.$$

d) Intersection : Soient A et B deux ensembles dans E . L'intersection de A et B , noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B (A et B) i.e.

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

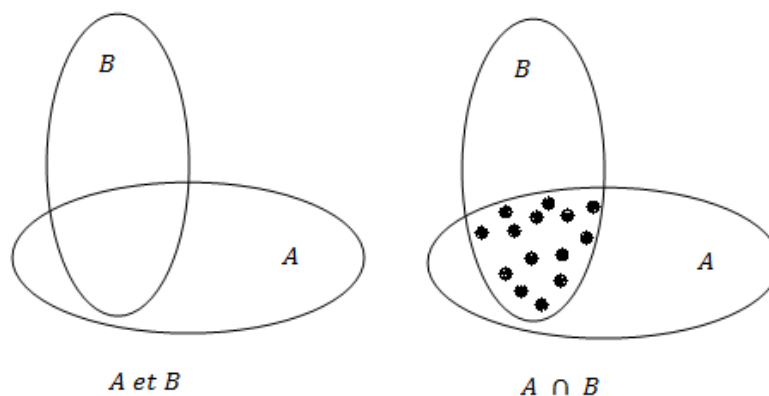


FIGURE 2.2 – Illustration de l'intersection de deux ensembles A et B .

Exemple 2.1.4 :

Soient A et B deux ensembles tels que

- $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{11}\}, B = \{-5, -3, -1, 1\}$ alors il n'y a aucun élément qui appartient en même temps à A et à B donc

$$A \cap B = \emptyset.$$

Dans ce cas , A et B sont dits disjoints.

- $A = \{\sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, 5, \sqrt{11}, 11\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ alors

$$A \cap B = \{2, 5\}.$$

e) **Complémentaire** : Soit A un sous-ensemble de E (ie $A \subseteq E$). Le complémentaire de A c'est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

On note \bar{A} ou \mathcal{C}_E^A ou bien A^c .

$$\mathcal{C}_E^A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

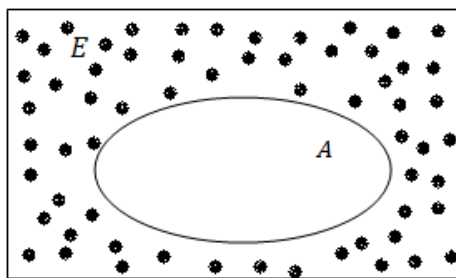


FIGURE 2.3 – Illustration du complémentaire d'un ensemble \mathcal{C}_E^A .

Exemple 2.1.5 :

Soient $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{0, 2, 4\}$ alors $\mathcal{C}_E^A = \{1, 3, 5\}$.

f) **Différence d'ensembles** : Soient A et B deux ensembles dans E . On utilise la notation $A \setminus B$ pour désigner la différence de A et B et c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B . On lit A moins B ou bien A différence B .

$$A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

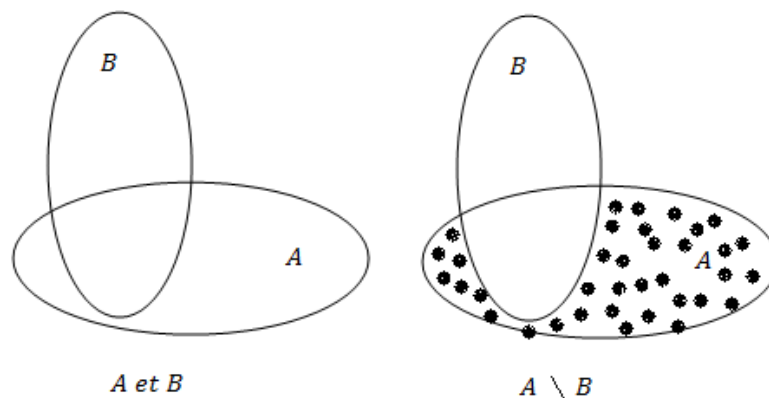


FIGURE 2.4 – Illustration de la différence de deux ensembles $A \setminus B$.

Exemple 2.1.6 :

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $B = \{b, c, d\}$, alors $A \setminus B = \{a, e, f\}$.

g) Différence symétrique : La différence symétrique de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant soit à A soit à B mais pas aux deux ensembles à la fois. On note $A \Delta B$ et on lit A delta B .

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

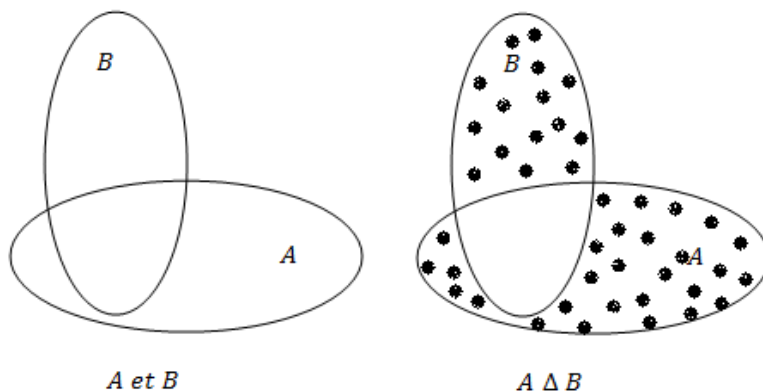


FIGURE 2.5 – Illustration de la différence symétrique de deux ensembles $A \Delta B$.

Exemple 2.1.7 :

Soient $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $B = \{b, c, d, o, p, q\}$, alors

$$A \Delta B = \{a, e, f, o, p, q\}.$$

h) Ensemble des parties de E : On note $\mathcal{P}(E)$, c'est l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles possibles de E .

$$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E).$$

Notons que l'ensemble vide est une partie (vide) de E et à ce titre constitue un des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

$\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ (ici \emptyset est un élément).

$\emptyset \subset E$ (ici \emptyset est un ensemble).

De façon générale, le nombre de parties d'un ensemble E constitué de n éléments est égale à 2^n i.e.

$$\text{card}(E) = n \Leftrightarrow \text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Exemple 2.1.8 :

Un ensemble est constitué de 3 éléments $E = \{x, y, z\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E)$ est constitué de $2^3 = 8$ éléments suivants :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

2.1.2 Recouvrements et Partitions

Définition 2.1.3 Soit A un ensemble et soit E un ensemble de parties de A . On dit que E est un recouvrement de A ou encore que les éléments de E recouvrent A lorsque $A = \bigcup_{X \in \mathcal{P}(E)} X$.

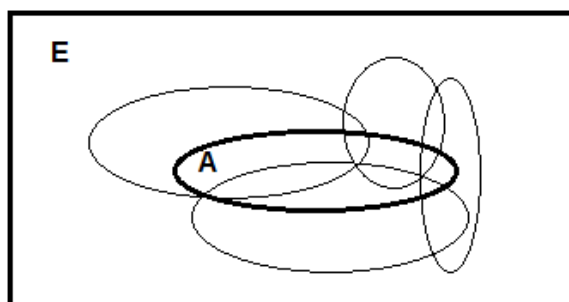


FIGURE 2.6 – Illustration d'un recouvrement d'un ensemble.

Exemple 2.1.9 :

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$ est un recouvrement de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 2.1.4 Une partition d'un ensemble E est un ensemble X dont les éléments sont non vides, recouvrent E et sont deux à deux disjoints. Autrement dit, un ensemble de parties A_1, A_2, \dots, A_n d'un ensemble E constitue une partition de E si :

- $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n$,
- $\forall 1 \leq i \leq n, \quad A_i \neq \emptyset$,
- $\forall 1 \leq i, j \leq n$ tel que $i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.

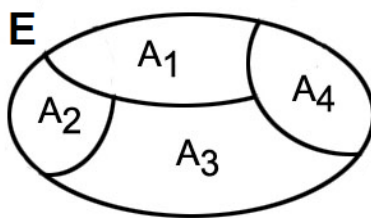


FIGURE 2.7 – Illustration d'une partition d'un ensemble.

Par exemple, si on note $2\mathbb{N}$ (resp. $2\mathbb{N} + 1$) l'ensemble des entiers naturels pairs (resp. impairs). Alors l'ensemble $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1\}$ est une partition de l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Remarque 2.1.2 Toute partition d'un ensemble E est donc un recouvrement de E , mais la réciproque est fausse.

2.1.3 Règles du calcul

Proposition : Soient A, B, C et D des sous-ensembles de E .

- $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$. (Commutativité)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (Associativité)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (Associativité)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (Distributivité)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Distributivité)
- $\complement_E(\complement_E(A)) = A$.
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E(A)) \cup (\complement_E(B))$. (Loi De Morgan n°1)
- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E(A)) \cap (\complement_E(B))$. (Loi De Morgan n°2)
- $A \subset C$ et $B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$.
- $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$ et $(A \cup C) \subset (B \cup C)$.
- $A \subset B$ et $C \subset D \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$ et $(A \cap C) \subset (B \cap D)$.

Idée de preuve :

Par exemple, démontrons que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Procédons par raisonnement de double inclusion.

Comme $B \subset (B \cup C)$, on a

$$(A \cap B) \subset A \cap (B \cup C).$$

On montre de même que $(A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

On obtient donc

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

D'autre part, soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A$ et $x \in (B \cup C)$.

Il y a deux cas à envisager :

- 1^{er} cas, $x \in A$ et $x \in B$, et donc $x \in A \cap B$.
- 2^{me} cas, $x \in A$ et $x \in C$, et donc $x \in A \cap C$.

Dans les deux cas, on a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, d'où

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

On a démontré donc la double inclusion. D'où l'égalité.

2.1.4 Produit cartésien d'ensembles

Il s'agit maintenant d'introduire la notion du couple (x,y) . Il faut donc distinguer le couple (x, y) , où l'ordre est important, de la paire $\{x, y\} = \{y, x\}$, sans ordre. En partant des couples, on peut définir sur n la notion de n -uplet (x_1, \dots, x_n) .

Définition 2.1.5 *Le produit cartésien d'un ensemble A par un ensemble B est l'ensemble noté $A \times B$ de tous les couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$.*

$$A \times B = \{(x, y) \mid \text{tel que } x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

On adoptera la convention $A \times B = \emptyset$ lorsque l'un des deux ensembles A ou B est vide. Si A contient m éléments et B contient n éléments alors $A \times B$ contient $m \times n$ éléments.

Exemple 2.1.10 :

- Soient $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Alors le produit cartésien est donné par

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 1), (c, 2)\}.$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid \text{tel que } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}.$
- $[0, 1] \times [0, 10] = \{(x, y) \mid \text{tel que } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 10]\}$

Définition 2.1.6 *La définition précédente se généralise à n ensembles. Soient les n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n . Le produit cartésien noté*

$$\prod_{k=1}^n E_k,$$

est par définition l'ensemble des n -uplet noté

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ tels que } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad x_k \in E_k.$$

Propriétés :

- $A \times B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset.$
- $A \times B \neq B \times A$ sauf des cas particuliers.
- $A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset \text{ ou } A = B.$
- $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$

Quelques ensembles de nombres :

\mathbb{R} : Ensemble de nombres réels.

\mathbb{R}^+ : Ensemble de nombres réels positifs.

\mathbb{R}^- : Ensemble de nombres réels négatifs.

\mathbb{N} : Ensemble de nombres entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$

\mathbb{Z} : Ensemble des entiers relatifs $\{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

\mathbb{Q} : Ensemble de nombres rationnels $\{\frac{m}{n} \text{ tel que } (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$.

De plus on a la propriété suivante

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.2 Relations binaires dans un ensemble

On rencontre souvent en mathématiques des propositions du type « les objets x et y ont la même propriété φ en commun », ou bien du type comparatif « $x \leq y$, $A \subset B$, ... ». Une relation binaire généralise cette situation à un ensemble E quelconque.

Définition 2.2.1 On appelle une relation binaire, notée \mathfrak{R} , dans un ensemble E tout lien qui relie x et y deux éléments de E . On écrit $x\mathfrak{R}y$ et l'on dit que x et y sont en relation.

Exemple 2.2.1 :

— Une relation définie sur \mathbb{R}^2 par

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+,$$

c'est simplement la relation $x \leq y$.

— Soit E un ensemble. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est définie par

$$A\mathfrak{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

— Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow |x| - |y| = x - y.$$

2.2.1 Propriétés des relations binaires

Les relations binaires sont classées en fonction de leurs propriétés.

— Une relation \mathfrak{R} sur E est dite **réflexive**, si

$$\forall x \in E, \quad x\mathfrak{R}x.$$

— Une relation est dite **symétrique**, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x.$$

— Une relation est dite **antisymétrique**, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x \Rightarrow x = y.$$

— Une relation est dite **transitive**, si

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

Exemple 2.2.2 :

- Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{Z} par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \text{ divise } (x - y).$$

La relation \mathcal{R} est réflexive. En effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$ et 3 divise 0.

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}x$.

- Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{N} par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y.$$

Montrer que \mathcal{R} est antisymétrique. On a

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x \text{ divise } y \Rightarrow y = k_1x, \quad k_1 \in \mathbb{N}^*.$$

D'autre part

$$y\mathcal{R}x \Rightarrow y \text{ divise } x \Rightarrow x = k_2y, \quad k_2 \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $x = k_2y = k_1k_2x$.

Il résulte alors que $k_1k_2 = 1$ i.e. $k_1 = k_2 = 1$.

D'où $x = y$ et donc la relation \mathcal{R} est antisymétrique.

- Soit la relation définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(x, x')\mathcal{R}(y, y') \Leftrightarrow x + x' = y + y'.$$

Montrer que \mathcal{R} est transitive.

Soient $(x, x'), (y, y')$ et (z, z') dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$$(x, x')\mathcal{R}(y, y') \quad \text{et} \quad (y, y')\mathcal{R}(z, z')$$

On a alors par définition de la relation

$$x + x' = y + y' \quad \text{et} \quad y + y' = z + z'.$$

On obtient donc $x + x' = z + z'$ i.e. $(x, x')\mathcal{R}(z, z')$.

2.2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2.2 On dit que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E si elle vérifie les trois propriétés ; **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Exemple 2.2.3 : Voici quelques illustrations

La relation d'égalité $=$ sur E est une relation d'équivalence.

La relation \leq sur \mathbb{R} n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique.

La relation définie sur \mathbb{R} par " $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ " est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .

Définition 2.2.3 On appelle classe d'équivalence d'un élément a de E , l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation \mathfrak{R} avec a . On note $Cl(a)$.

$$Cl(a) = \{y \in E \text{ tel que } y\mathfrak{R}a\}.$$

Exemple 2.2.4 : Soit la relation définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1.$$

La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$ est

$$Cl(a) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x\mathfrak{R}a\}$$

On a donc

$$\begin{aligned} x\mathfrak{R}a &\Leftrightarrow x^2 - 1 = a^2 - 1 \\ &\Rightarrow x^2 = a^2 \\ &\Rightarrow x^2 - a^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x - a)(x + a) = 0. \end{aligned}$$

D'où $x = a$ ou $x = -a$

Ainsi la classe d'équivalence de a est

$$Cl(a) = \{\{a, -a\}, \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

Définition 2.2.4 On appelle ensemble quotient de E par la relation d'équivalence \mathfrak{R} , et on note E/\mathfrak{R} , l'ensemble des classes d'équivalences de E modulo \mathfrak{R} .

Remarque 2.2.1 :

Une relation d'équivalence permet de regrouper les éléments d'un ensemble E partageant une même propriété pour former un nouvel ensemble appelé ensemble quotient de E par \mathfrak{R} .

2.2.3 Relation d'ordre

Définition 2.2.5 Une relation \mathfrak{R} est dite relation d'ordre si elle vérifie les propriétés suivantes : **antisymétrique, transitive et réflexive.**

Exemple 2.2.5 :

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$. On note par $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E . On définit la relation \mathfrak{R} par

$$\forall A \text{ et } B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathfrak{R} B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre.

- \mathfrak{R} est réflexive car $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subseteq A$ donc $A \mathfrak{R} A$.

- \mathfrak{R} est antisymétrique. En effet soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \mathfrak{R} B$ et $B \mathfrak{R} A$.
Donc $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, d'où $A = B$.

- \mathfrak{R} est transitive. En effet, soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \mathfrak{R} B$ et $B \mathfrak{R} C$.
i.e. $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$. Donc $A \mathfrak{R} C$.

On conclue donc que \mathfrak{R} est une **relation d'ordre**.

Définition 2.2.6 Soit E un ensemble et \mathfrak{R} est une relation d'ordre dans E .

On dit que \mathfrak{R} est une relation d'ordre totale sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour \mathfrak{R} i.e.

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x \mathfrak{R} y \text{ ou } y \mathfrak{R} x.$$

Dans le cas contraire on dit que la relation est d'ordre partiel,

$$\exists x \in E, \exists y \in E \text{ tel que } x \overline{\mathfrak{R}} y \text{ et } y \overline{\mathfrak{R}} x,$$

où $x \overline{\mathfrak{R}} y$ signifie que x n'est pas en relation avec y .

Exemple 2.2.6 :

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E , et on définit la relation \mathfrak{R} par

$$\forall A \text{ et } B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathfrak{R} B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

\mathfrak{R} est une relation d'ordre partiel.

En effet, si $E = \{a, b, c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Or si on prend $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ on a $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

Donc $\exists A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \overline{\mathfrak{R}} B$ et $B \overline{\mathfrak{R}} A$.

Définition 2.2.7 : (Majorant, Minorant)

Soit E un ensemble et \mathfrak{R} une relation d'ordre.

On dit que M est un majorant de E si $\forall s \in E, \quad s \mathfrak{R} M$.

On dit que m est un minorant de E si $\forall x \in E, \quad m \mathfrak{R} x$.

Remarque 2.2.2 :

Attention! on n'a pas toujours existence ni unicité! Le majorant (ou minorant) n'est pas unique, comme il peut exister plusieurs valeurs.

Une partie A est dite majorée (respectivement minorée) si elle admet un majorant (respectivement minorant). Elle est dite bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 2.2.8 : (Borne supérieure, Borne inférieure)

Soit E un ensemble et \mathfrak{R} une relation d'ordre, alors la borne supérieure de E est le plus petit des majorants noté $\sup(E)$.

La borne inférieure est le plus grand des minorants et noté $\inf(E)$.

Définition 2.2.9 (Maximum, Minimum)

Si la borne supérieure d'un ensemble E appartient à E , alors l'élément maximal (maximum) existe est égale à cette borne supérieure, noté $\max(E)$. Sinon le maximum n'existe pas.

La définition est analogue pour le minimum (le plus petit élément) et on note $\min(E)$.

Exemple 2.2.7 :

Dans l'intervalle $I = [3, 7[$ munie de la relation d'ordre \mathfrak{R} définie par

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \leq y.$$

- Les valeurs $7, 8, \dots$ sont des majorants de I et $\dots, -2, 1, 2$ sont des minorants.
- La borne supérieure et la borne inférieure sont données par $\sup(I) = 7$ et $\inf(I) = 3$.
- Déterminons $\max(I)$ et $\min(I)$,

$\sup(I) = 7 \notin I$ donc $\max(I)$ n'existe pas.

$\inf(I) = 3 \in I$ donc $\min(I)$ existe et $\min(I) = 3$.

2.3 Applications

Définition 2.3.1 :

- Une fonction f de E vers F est la relation telle que à tout élément $x \in E$ on lui associe au plus une **image** $y \in F$ (**une seule ou pas d'image**).
- Une **application** f est une relation d'un ensemble E vers un ensemble F telle que tout élément $x \in E$ a **une unique image** $y \in F$. On note

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x).$$

- L'ensemble E est appelé **ensemble de départ**. L'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivé**.
- Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est appelée l'**image** de x par f .
- Pour tout $y \in F$, en cas d'existence, tout x dans E tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédente** de y par f .

Remarque 2.3.1 :

- On peut représenter une application $f : E \rightarrow F$ en utilisant des **diagrammes de Venn fléchés**, où chaque flèche joint un élément x de E à son image $f(x)$ dans F .

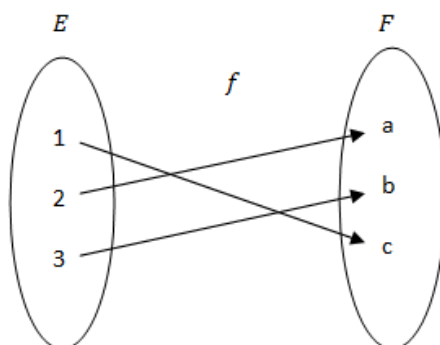


FIGURE 2.8 – Représentation graphique d'une application.

- Toute application est une fonction (la réciproque est fausse). Toute fonction est une application sur son domaine de définition.

Exemple 2.3.1 :

Soient f et g telles que

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{x-1},$$

et

$$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{x-1}.$$

Alors g est une application mais f n'est pas une application mais plutôt une fonction, car il existe un élément $x = 1$ qui n'admet pas d'image par f .

Définition 2.3.2 :

- Deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow F$ sont dites **égales** si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note $f \equiv g$.
- Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications. On définit **l'application composée** de f et g , notée $g \circ f$, par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 2.3.2 :

Soient

$$f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[,$$
$$x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2 + 1.$$

Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1/x) = (1/x)^2 + 1 = 1/x^2 + 1$.

Proposition :

Soient E, F, G et H des ensembles, et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications. On a

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Attention !

En général $g \circ f \neq f \circ g$.

2.3.1 Image directe, Image réciproque

Définition 2.3.3 Soit $A \subset E$ et $f : E \rightarrow F$. L'image directe de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x), \quad x \in A\}.$$

Exemple 2.3.3 :

Soit $A = \{-1, 1, 2, -3\}$ et l'application f telle que

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

Donc l'image directe de A par f est $f(A) = \{1, 2, 3\}$.

Définition 2.3.4 Soit $B \subset F$ et $f : E \rightarrow F$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, \quad f(x) \in B\}.$$

Autrement dit, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B . La figure suivante montre que $f(A)$ n'est pas vide dès que $A \neq \emptyset$, alors que l'on peut avoir $f^{-1}(B) = \emptyset$ pour $B \neq \emptyset$.

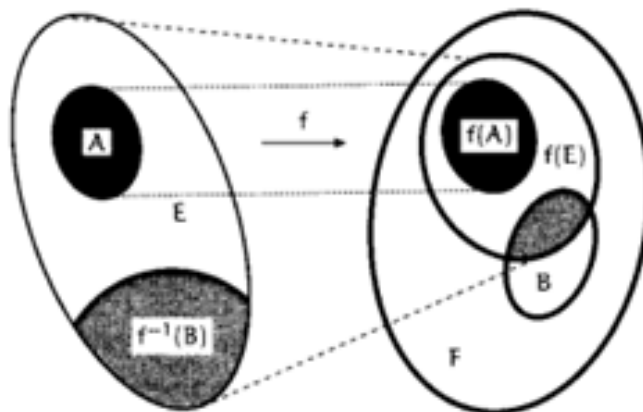


FIGURE 2.9 – Image directe et image réciproque d'un ensemble.

Proposition :

Soit $f : E \rightarrow F$.

— Pour toutes parties A et B de F , on a

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B).$$

— Pour toutes parties A et B de E on a

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Attention !

On n'a pas nécessairement égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. En effet, soit l'exemple suivant, $E = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ et $f : E \rightarrow E$ définie par $f(0) = f(1) = 0$. Donc $f(A \cap B) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) = \{0\}$.

2.3.2 Injection, Surjection et Bijection

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition 2.3.5 On définit les notions suivantes :

- f est dite injective si pour tout $a, b \in E$ tels que

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Autrement dit si deux éléments de E ont toujours deux images distinctes par f .

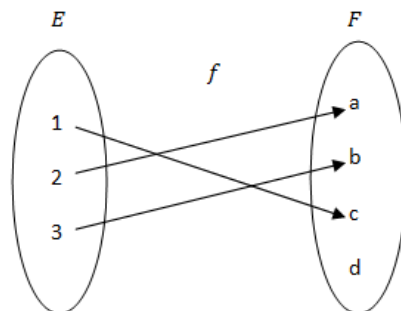


FIGURE 2.10 – Application injective, non surjective.

- f est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, i.e.

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x).$$

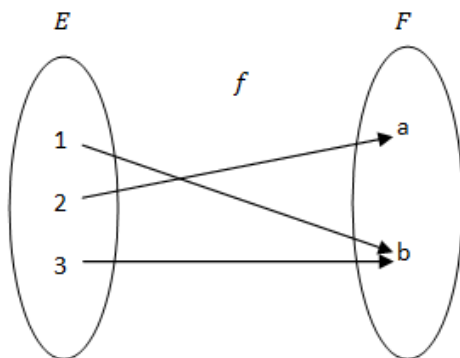


FIGURE 2.11 – Application non injective, surjective.

- f est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective i.e.

$$\forall y \in F, \quad \exists ! x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x).$$

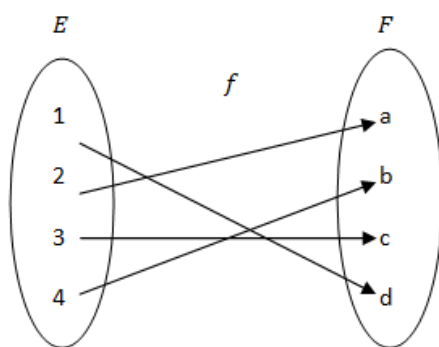


FIGURE 2.12 – Application bijective.

Remarque 2.3.2 Toute application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} strictement monotone est injective. La réciproque est fausse

Exemple 2.3.4 :

1. Soit l'application f telle que

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 3x + 1. \end{aligned}$$

f est surjective car $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $y = 3x + 1$.

f est injective car $\forall x, x' \in \mathbb{R},$ si $f(x) = f(x')$ alors $3x + 1 = 3x' + 1$ d'où $x = x'$.

2. Soit l'application g telle que

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = |x|. \end{aligned}$$

2.3. APPLICATIONS

L'application g n'est pas surjective car $\exists y \in \mathbb{R}$ (y négatif) tel que $y \neq g(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$
 g n'est pas injective car si $|x| = |x'|$, on n'a pas forcément $x = x'$ par exemple $|2| = |-2|$
or $2 \neq -2$.

Proposition

Soient $g : F \rightarrow G$, $f : G \rightarrow H$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $f \circ g$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $f \circ g$ est bijective.

Exemple 2.3.5

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto f(x) = |x|$$

L'application f est une bijection. Si on change l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée, l'application ne devient plus une bijection.

Définition 2.3.6 Soit f une application bijective de E vers F . On définit la **réciproque** de f (notée f^{-1}) l'application de F vers E qui pour chaque $y \in F$ elle associe un élément unique $x \in E$.

Exemple 2.3.6

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 3x + 1.$$

L'application f est bijective donc f^{-1} existe.

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}.$$

Donc

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}.$$

Remarque 2.3.3 :

Si f est une application bijective alors on a

$$f \circ f^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E.$$

Proposition :

Soient $f : F \rightarrow G$ et $g : G \rightarrow H$, deux bijections. Alors $g \circ f : F \rightarrow H$ est une bijection et sa réciproque est l'application $f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.4 Série d'exercices

Exercice 2.1 :

Soient A et B deux sous-ensembles de E . Montrer que

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

Exercice 2.2 :

Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E vérifiant

$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = B \cap A \text{ et } C \cup A = C \cap B.$$

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 2.3 :

Soit E un ensemble, A, B deux parties de E . Discuter et résoudre l'équation

$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) = \emptyset.$$

Exercice 2.4 :

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ muni de la relation binaire définie par :

$$\forall x, y \in E, \quad x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{y^2 + 1}{y^2}.$$

1. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .
2. Montrer que la relation \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
3. Donner la classe d'équivalence de 1.

Exercice 2.5 :

On définit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble d'application de E dans F et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des applications inversibles de E dans E . On considère sur $\mathcal{F}(E, E)$ la relation \mathcal{R} binaire définie par

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{S}(E) \text{ (inversible) telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g.$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathcal{F}(E, E)$.

Exercice 2.6 :

2.4. SÉRIE D'EXERCICES

Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1) Montrer que f n'est ni injective ni surjective.

Considérons à présent l'application $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$.

2) Montrer que l'application g est une bijection. Donner son application réciproque g^{-1} .

Exercice 2.7 :

Déterminer graphiquement si les applications f et g suivantes sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

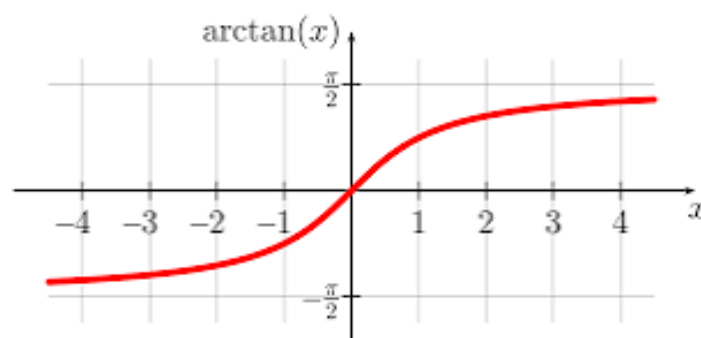


FIGURE 2.13 – Application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

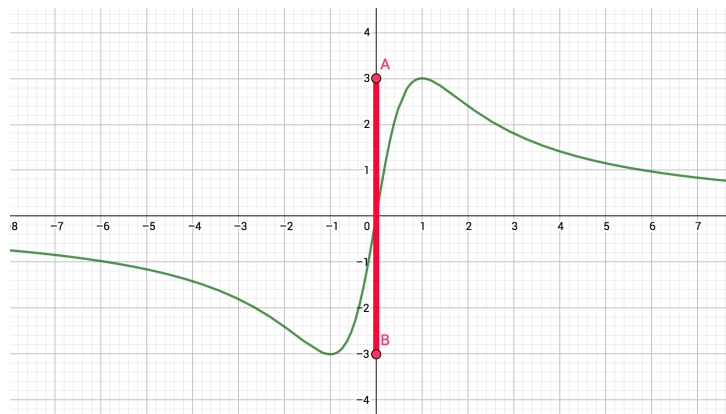


FIGURE 2.14 – Application $g : \mathbb{R} \rightarrow [A, B]$.

Exercice 2.8 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soit $A \subset E$.

- 1) Prouver que $A \subset f^{-1}\{f(A)\}$.
- 2) Prouver que f est injective si et seulement si

Pour toute partie A de E , $A = f^{-1}\{f(A)\}$.

Exercice 2.9 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soit $B \subset F$.

1) Prouver que $f\{f^{-1}(B)\} \subset B$.

2) Prouver que f est surjective si et seulement si

Pour toute partie B de F on a $f\{f^{-1}(B)\} = B$.

2.5 Solutions des exercices

Solution d'exercice 2.1 :

On a $A\Delta(B\Delta C) = (A^c \cap (B\Delta C)) \cup (A \cap (B\Delta C)^c)$.

Or

$$\begin{aligned}A^c \cap (B\Delta C) &= A^c \cap [(B^c \cap C) \cup (B \cap C^c)] \\ &= (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}(B\Delta C)^c &= [(B^c \cap C) \cup (B \cap C^c)]^c \\ &= (B^c \cap C)^c \cap (B \cap C^c)^c \\ &= (B \cup C^c) \cap (B^c \cup C) \\ &= [(B \cup C^c) \cap B^c] \cup [(B \cup C^c) \cap C] \\ &= (B^c \cap C^c) \cup (B \cap C).\end{aligned}$$

Ainsi, $A \cap (B\Delta C)^c = (A \cap C^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C)$.

Donc $A\Delta(B\Delta C) = (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C)$.

On obtient une expression qui n'est pas variante en permutant les ensembles A, B et C .

On a en particulier

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

Solution d'exercice 2.2 :

On a A, B et C trois sous-ensembles de l'ensemble E avec

$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = B \cap A \text{ et } C \cup A = C \cap B.$$

Prouvons que $A = B$ par double inclusion. On a

$$B \subset A \cup B = A \cap C \subset A, \text{ donc } B \subset A.$$

De même

$$A \subset A \cup C = C \cap B \subset B, \text{ donc } A \subset B.$$

On conclue alors que $A = B$.

De la même manière on démontre que $B = C$, en effet

$$B \subset B \cup A = A \cap C \subset C \text{ et } C \subset C \cup B = B \cap A \subset B,$$

d'où

$$B \subset C \text{ et } C \subset B \text{ donc } B = C.$$

Conclusion, on a égalité des trois ensembles $A = B = C$.

Solution d'exercice 2.3 :

Soit E un ensemble, A, B deux parties de E . On a l'équation suivante

$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) = \emptyset.$$

Cette équation est équivalent à

$$(A \cap X) = \emptyset \quad \text{et} \quad (B \cap X^c) = \emptyset.$$

Ceci implique que

$$X \subset A^c \quad \text{et} \quad B \subset X, \quad \text{i.e. } B \subset X \subset A^c.$$

On distingue donc deux cas

- Si $B \cap A \neq \emptyset$, alors B n'est pas contenu dans A^c . L'équation n'a donc aucune solution.
- Si $B \cap A = \emptyset$, alors $B \subset A^c$. Les solutions de l'équation sont donc les parties de A^c contenant B .

Solution d'exercice 2.4 :

1) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$.

2) Montrons que \mathfrak{R} est réflexive symétrique et transitive :

- On a

$$\forall x \in E, \quad \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

donc $x\mathfrak{R}x$, d'où la relation \mathfrak{R} est réflexive.

- Soit $x, y \in E$ tels que $x\mathfrak{R}y$ i.e.

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{y^2 + 1}{y^2}.$$

On peut inverser les termes de l'égalité

$$\frac{y^2 + 1}{y^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Donc $y\mathfrak{R}x$.

Alors la relation \mathfrak{R} est symétrique.

- Soit x, y et $z \in E$ tels que $x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z$.

Ceci dit que

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{y^2 + 1}{y^2} \quad \text{et} \quad \frac{y^2 + 1}{y^2} = \frac{z^2 + 1}{z^2}.$$

D'où

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{z^2 + 1}{z^2},$$

donc $x\mathfrak{R}z$.

Alors la relation \mathfrak{R} est transitive.

On conclue donc que \mathfrak{R} est bien une relation d'équivalence.

3) La classe d'équivalence de $1 \in E$ est donnée par :

$$Cl(1) = \{x \in E \text{ tel que } x\mathfrak{R}1\}.$$

Or $x\mathfrak{R}1$ i.e

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{1^2 + 1}{1^2} = 1 + 1 = 2.$$

Donc

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1.$$

On obtient 1 et -1 comme solutions de cette équation. Or $-1 \notin E$.

D'où $Cl(1) = \{1\}$.

Solution d'exercice 2.5 : On a la relation définie sur $\mathcal{F}(E, E)$ par

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{S}(E) \text{ (inversible) telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g.$$

1) Montrons que \mathcal{R} est une relation d'équivalence i.e. réflexive, symétrique et transitive :

On a

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, E), \quad Id_E \circ f = f \circ Id_E$$

Donc $\exists \varphi = Id_E \in \mathcal{S}(E)$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ f$.

Donc $f\mathcal{R}f$, et donc \mathcal{R} est une relation réflexive.

2) Si $f\mathcal{R}g$ alors il existe $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$.

En composant par φ^{-1} des deux membres à droite et à gauche, on obtient

$$g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f, \text{ donc } g\mathcal{R}f.$$

Donc cette relation est symétrique.

D'autre part, si $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$ alors il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(E)$ telles que

$$f \circ \varphi = \varphi \circ g \text{ et } g \circ \psi = \psi \circ h.$$

En composant par Ψ on obtient

$$f \circ \varphi \circ \Psi = \varphi \circ g \circ \Psi = \varphi \circ \Psi \circ h.$$

Donc il existe $\theta = \varphi \circ \Psi \in \mathcal{S}(E)$, telle que $f \circ \theta = \theta \circ h$, donc $f\mathcal{R}h$. D'où la relation est transitive.

On conclue donc que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. 2) Décrivons la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f_1 \in \mathcal{F}(E, E)$. On a

$$Cl(f_1) = \{g \in \mathcal{F}(E, E) \mid g\mathcal{R}f_1, \text{ i.e. } \exists \varphi \in S(E), g \circ \varphi = \varphi \circ f_1\}.$$

Ainsi

$$Cl(f_1) = \{g \in \mathcal{F}(E, E) \mid \exists \varphi \in S(E), g = \varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}\}.$$

Finalement

$$Cl(f_1) = \{\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1} \mid \varphi \in S(E)\}.$$

Solution d'exercice 2.6 :

1. Montrons que f n'est ni injective ni surjective.

- f est dite injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Or

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2^2 - x_2x_1^2 = 0.$$

D'où $x_1(1 - x_1x_2) = x_2(1 - x_2x_1)$.

Donc on n'a pas forcément $x_1 = x_2$ dans le cas où $x_2 = 1/x_1$.

Par exemple pour $x_1 = 2$ et $x_2 = 1/2$ on a $f(2) = f(1/2) = 4/5$ bien que $2 \neq 1/2$.

On conclue donc que f n'est pas injective sur \mathbb{R} .

- f est dite surjective si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

$$y = f(x) = 2x/(1+x^2) \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

Cette équation admet des solutions réelles ssi

$$\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0 \text{ i.e. } -1 \leq y \leq 1.$$

Dans ce cas l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

Or on remarque bien que pour $y < -1$ ou $y > 1$ les deux valeurs x_1 et x_2 n'existent pas.

Par exemple pour $y = 2$ l'équation n'a pas de solution donc 2 n'a pas d'antécédents.

On conclue que f n'est pas surjective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

2. Considérons à présent l'application $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrons que l'application g est une bijection.

On procède de la même façon que la question précédente mais cette fois-ci l'application g est définie de $[-1, 1]$ vers $[-1, 1]$.

Soient $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ tels que

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \Rightarrow x_1(1-x_1x_2) = x_2(1-x_2x_1).$$

On peut maintenant diviser par $(1-x_1x_2)$ car pour $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ on a $1-x_1x_2 \neq 0$. D'où

$$x_1(1-x_1x_2) = x_2(1-x_2x_1) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Donc on vient de montrer que

$$x_1, x_2 \in [-1, 1], g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

On conclue alors que l'application g est injective.

Montrons que g est surjective ; d'une façon analogue que la question précédente

$$y = g(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y},$$

car $y \in [-1, 1]$ donc $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$.

Or $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1, 1]$, donc la seule solution possible est $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.

D'où

$$\forall y \in [-1, 1], \exists x \in [-1, 1] \text{ tel que } y = g(x).$$

Par conséquent l'application g est surjective.

Conclusion : l'application g est injective et surjective donc elle est une bijection de $[-1, 1]$ vers $[-1, 1]$.

D'ailleurs on peut l'en déduire vu que l'équation $y = g(x)$ admet une unique solution $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc la réciproque est

$$g^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Solution d'exercice 2.7 :

- L'application f est injective car, d'après le graphe, pour tout deux éléments $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, x_1, x_2 ont toujours deux images distinctes par f .

Par contre f n'est pas surjective car $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donc pour tout $y > \pi/2$ ou $y < -\pi/2$ il n'existe pas d'antécédent x tel que $y = f(x)$. D'où f n'est pas bijective.

- L'application g n'est pas injective. En effet, il existe deux antécédents $x_1 \neq x_2$ tels que $g(x_1) = g(x_2) = 2$ par exemple.

L'application g est surjective, en effet sur l'intervalle $[A, B]$, quelque soit l'image y , il existe au moins une antécédente x telle que $y = g(x)$.

Solution d'exercice 2.8 :

1) Soit $x \in A$. On a alors $f(x) \in f(A)$, et donc $x \in f^{-1}\{f(A)\}$. D'où $A \subset f^{-1}\{f(A)\}$

2) Raisonons en deux temps :

- supposons que f est injective.

Soit $x \in f^{-1}\{f(A)\}$. On a $f(x) \in f(A)$. Ainsi, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. D'où par injectivité de f on a $x' = x$ donc $x \in A$.

Donc $f^{-1}\{f(A)\} \subset A$, et d'après la question 1 on conclue que $A = f^{-1}\{f(A)\}$.

- Supposons que $\forall A \subset E, A = f^{-1}\{f(A)\}$.

Soient $x, x' \in A$ tels que $f(x) = f(x')$, on a alors

$$\{x\} = f^{-1}\{f(\{x\})\} = f^{-1}\{f(\{x'\})\} = \{x'\}.$$

On conclue donc que l'application f est injective.

Solution d'exercice 2.9 :

1) Soit $y \in f\{f^{-1}(B)\}$. Il existe un élément x de $f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$, et ainsi $y \in B$.

2) Raisonons en deux temps :

- Supposons f surjective. Soit $y \in B$. Puisque f surjective, il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Ainsi $x \in f^{-1}(B)$ et $y \in f\{f^{-1}(B)\}$.

- Supposons que $\forall B \subset F, B = f\{f^{-1}(B)\}$.

En particulier, $F = f\{f^{-1}(F)\}$, ce qui prouve que f est surjective.

Suites numériques

3.1 Quelques définitions

Définition 3.1.1 On appelle une suite à termes réels, ou suite réelle, une famille de nombres réels indexés par \mathbb{N} , c'est-à-dire une application u de \mathbb{N} dans \mathbb{R} telle que :

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n. \end{aligned}$$

La suite u est alors notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 3.1.2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Nous dirons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- Croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{(n+1)} \geq u_n$.
- Décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{(n+1)} \leq u_n$.
- Constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{(n+1)} = u_n$.
- Stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq p, \quad u_{(n+1)} = u_n.$$

Exemple 3.1.1 :

- La suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est strictement décroissante.
- La suite définie par $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition 3.1.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- Monotone si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ou si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- Minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n$.

3.2. LIMITE ET CONVERGENCE D'UNE SUITE

— Bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Exemple 3.1.2 :

- La suite définie par $u_n = a^n$, $a > 0$, est monotone.
- La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est majorée par 1 et minorée par 0.
- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2 - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est minorée par 1 et non majorée.

Remarque 3.1.1 On dit qu'une suite est strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone si l'inégalité correspondante est stricte.

3.2 Limite et convergence d'une suite

Définition 3.2.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers un réel l ou a pour limite l si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers plus l'infinie ($+\infty$) si

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } (n > N \Rightarrow u_n > M).$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty.$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } (n > N \Rightarrow u_n < -M).$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 3.2.1 :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite décroissante, et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Proposition (Unicité)

3.2. LIMITE ET CONVERGENCE D'UNE SUITE

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, cette dernière est unique.

Proposition (Opérations sur les limites)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

— Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'.$$

— Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = l \cdot l'.$$

— Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{l'}{l}.$$

Remarque 3.2.1 :

• On admet les conventions suivantes

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{0} = \infty.$$

• On appelle **formes indéterminées** les limites de types :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad +\infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \dots$$

Dans ces cas on ne peut rien conclure concernant la limite.

Exemple 3.2.2 :

La suite $u_n = (1 - \frac{1}{n}) \ln(\frac{1}{n})$ tend vers $-\infty$. En effet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\frac{1}{n}) = -\infty.$$

Définition 3.2.2 :

— Une suite u_n est dite **convergente** si il existe un réel l tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

— Une suite qui tend vers $\pm\infty$ ou qui n'admet pas de limite est dite suite **divergente**

.

Exemple 3.2.3 :

— Montrons la convergence de la suite suivante.

$$u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2.$$

En développant on obtient

$$u_n = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}.$$

D'où la limite est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 2.$$

— Soit α un réel strictement supérieur à 1. u_n une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n-1} = \alpha u_n + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Alors la suite u_n est divergente vers $+\infty$.

En effet, soit l un unique réel vérifiant l'équation $l = \alpha l + b$.

On a alors

$$l = \alpha l + b = \alpha(\alpha l + b) + b = \dots = \alpha^n l + b(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}).$$

De même on a

$$u_n = \alpha^n u_0 + b(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}).$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - l = \alpha^n (u_0 - l),$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = +\infty.$$

On conclue donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, et donc la suite u_n est divergente.

Théorème 3.2.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** et **majorée** alors la suite est convergente.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée** alors la suite est convergente.

Exemple 3.2.4 :

La suite $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ est croissante. Par récurrence on peut démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = 1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \leq 1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^{p-1}} = 1 + 1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^p}.$$

Or on a

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p = 1$$

D'où

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq 3.$$

La suite u_n est croissante et majorée par 3, donc elle converge. De plus sa limite est inférieure ou égale à 3.

Proposition

Toute suite convergente est bornée .

Théorème 3.2.2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** et **non majorée**, alors la suite est divergente vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** et **non minorée** alors la suite est divergente vers $-\infty$.

Exemple 3.2.5 :

- La suite $u_n = n$ tend vers $+\infty$ (prendre $n_0 = E(A) + 1$).
- Si $a > 1$, la suite $u_n = a^n$ tend vers $+\infty$.

Remarque 3.2.2 :

- Lorsque l'on a majoré une suite croissante, on a non seulement montré sa convergence, mais aussi trouvé un majorant de sa limite, puisque celle-ci est le plus petit des majorants.

3.3 Limites par comparaison et par encadrement

Théorème 3.3.1 (Théorème de comparaison)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- Si $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$$

- Si $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = -\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$$

Théorème 3.3.2 (Théorème d'encadrement ou **des gendarmes**)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que

- $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que tout $n \geq N$ on a $u_n \leq v_n \leq w_n$, et
- Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l .

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers la même limite l .

Remarque 3.3.1 On peut retenir de ces deux théorèmes que pour obtenir une limite finie, deux gendarmes sont nécessaires, mais pour obtenir une limite infinie, un seul gendarme est suffisant. Notons aussi qu'on a la version analogue pour obtenir une limite $-\infty$).

Exemple 3.3.1 :

1) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On sait que $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, alors

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

On conclue donc, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0.$$

2) Soit pour tout entier n , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}.$$

Montrons que pour tout entier n , $u_n \geq \frac{n-1}{3}$, puis étudions la limite de cette suite.

On a pour tout entier n ,

$$(-1)^n + n \geq -1 + n, \text{ et } (-1)^n + 2 \leq 1 + 2 = 3,$$

d'où $\frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$.

Ainsi, en multipliant ces deux inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2} \geq \frac{n-1}{3}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

3.4 Exemples de suites

3.4.1 Suite arithmétique

Définition 3.4.1 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

On appelle r **raison** et u_0 le **terme initial** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = nr + u_0$.
- Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$.
- Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **constante**.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}. \\ &= (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}. \end{aligned}$$

3.4.2 Suite géométrique

Définition 3.4.2 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *géométrique* s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} = qu_n,$$

où q est appelé **raison** et u_0 le **terme initial** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0 .

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- Si $q = 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **constante**.
- Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.
- Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$.
- Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.
- Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.
- Si $-1 < q < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite géométrique n'a pas de limite, elle n'est ni croissante ni décroissante .

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

3.4.3 Suites adjacentes

Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Elles sont dites adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Exemple 3.4.1 :

Montrons que les suites définies sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

sont adjacentes .

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$.
- D'autre part, on a

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n!} \right) = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}.$$

3.4. EXEMPLES DE SUITES

Or on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$; donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0.$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• De plus, on a $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Donc $v_n \geq u_n$ et $v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infinie.

On conclut donc que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Proposition :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors ces deux suites convergent et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n).$$

3.4.4 Suites de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy ou elle vérifie le critère de Cauchy si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 (p \geq N, \text{ et } q \geq N) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Théorème 3.4.1 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Proposition :

Toute suite de Cauchy est bornée.

3.4.5 Suites extraites

Définition 3.4.3 *Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite extraite, ou sous-suite, d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application $\phi(t)$, strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\phi(n)}.$$

Remarque 3.4.1 *Si ϕ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , on a par une récurrence immédiate :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geq n.$$

Exemple 3.4.2 *Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Proposition :

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et si u_n tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers l .

3.4.6 Suites récurrente

Définition 3.4.4 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente s'il existe une fonction f définie sur un intervalle \mathbb{I} de \mathbb{R} telle que pour tout n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple 3.4.3 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$$

Cette suite est dite récurrente car elle s'écrit sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la fonction f est définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$.

3.5 Quelques limites usuelles

- Soient $P(n) = p_0 + p_1n + \dots + p_a n^a$ et $Q(n) = q_0 + q_1n + \dots + q_b n^b$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b \\ \infty & \text{si } a > b. \end{cases}$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 0 \\ 1 & \text{si } q = 0 \\ +\infty & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \ln(a), \quad a > 0.$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 1.$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right) = 0.$$

3.6 Série d'exercices

Exercice 3.1 :

Étudier la limite des suites suivantes :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + n^2 + 1 & \quad 2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 1} & \quad 3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n) + 2}{n + 3} \\
 4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n^3 + 1} & \quad 5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Exercice 3.2 :

1) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2) On pose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3.3 :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son terme initial $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 2$.
- 2) Montrer que u_n est une suite monotone.
- 3) Supposons que la limite l existe. Déterminer cette limite.
- 4) Étudier sa convergence.

Exercice 3.4 :

Soit un entier $q \geq 2$. Posons $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $u_{n+q} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 2) Calculer u_{nq} et u_{nq+1} .
- 3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 3.5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- 2) En supposant que la limite l de u_n existe, calculer cette limite.
- 3) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.

Exercice 3.6 :

3.6. SÉRIE D'EXERCICES

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par un réel u_0 vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation suivante

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right); \quad a > 0.$$

1) Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2) Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \sqrt{a} .

Exercice 3.7 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) La suite u_n est-elle monotone ?

3) Étudier la convergence de u_n .

Exercice 3.8 :

Calculer si elles existent les limites des suites suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ | 2) u_n est croissante et $u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ |
| 3) $u_n \geq \ln(n)$ | 4) $u_n = \sqrt[n]{n}$ |
| 5) $u_n = \ln(n) + \sin(n)$ | 6) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ |
| 7) $u_n = \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$. | |

Exercice 3.9 :

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 > 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Sans étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que la suite diverge.

3) Montrer que u_n est croissante et tend vers $+\infty$.

Exercice 3.10 :

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1) Montrer que ces deux suites sont bien définies et que $\forall n \in \mathbb{N} a_n > b_n$.

2) Montrer que les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite

3.6. SÉRIE D'EXERCICES

(appelée moyenne géométrique-harmonique de a_0 et b_0).

3.7 Solutions des exercices

Solution d'exercice 3.1 :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + n^2 + 1 = +\infty$, car $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + 1)(n - 1)}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n) + 2}{n + 3} = 0^+$, car $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n + 3} \leq \frac{\sin(n) + 2}{n + 3} \leq \frac{3}{n + 3}$.
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$.
- 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 = e^2$, avec $m = \frac{n}{2}$.

Solution d'exercice 3.2 :

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $p = E(\sqrt{n}) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$p \leq \sqrt{n} < p + 1.$$

On a donc

$$p^2 \leq n < (p + 1)^2.$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{(p + 1)^2} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{p^2}.$$

On multipliant par $p = E(\sqrt{n}) > 0$, pour tout $n \geq 1$.

$$\frac{p}{(p + 1)^2} < \frac{p}{n} \leq \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n}) + 1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{E(\sqrt{n})}.$$

Or quand $n \rightarrow +\infty$ on a $E(\sqrt{n}) \rightarrow +\infty$.

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n} = 0,$$

car les expressions de gauche et droite tendent vers 0.

- 2) Avec les mêmes notations on multiplie les inégalités suivantes

$$\frac{1}{(p + 1)^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p^2}$$

par $p^2 = (E(\sqrt{n}))^2 \geq 0$, on obtient

$$\frac{p^2}{(p + 1)^2} < \frac{p^2}{n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{E(\sqrt{n})^2}{(E(\sqrt{n}) + 1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})^2}{n} \leq 1.$$

3.7. SOLUTIONS DES EXERCICES

De même lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a $E(\sqrt{n}) \rightarrow +\infty$, il s'en suit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n} = 1,$$

puisque les termes de droites et de gauche tendent vers 1.

Solution d'exercice 3.3 :

1) Par récurrence, on a $-1 < u_0 = 1 < 2$.

Supposons que $-1 < u_n < 2$, alors $\sqrt{2 + u_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$, donc $u_{n+1} < 2$.

Ainsi

$$\sqrt{2 + u_n} > \sqrt{2 - 1} = 1 > -1$$

D'où $-1 < u_{n+1} < 2$.

On conclut que $-1 < u_n < 2$, $\forall n \geq 0$.

2) Vérifions que la suite est monotone :

On a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = -\frac{u_n^2 - u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} > 0.$$

En effet $u_n > -1$ donc $u_n + 1 > 0$, et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$, d'où $-(u_n - 2)(u_n + 1) > 0$.

Donc la suite u_n est strictement croissante donc monotone.

3) Déterminons la limite :

Supposons que $l \in \mathbb{R}$ est la limite de u_n .

Par définition, en passant à la limite on a $l = \sqrt{2 + l}$. D'où $l = -1$ ou $l = 2$.

4) La suite vérifie $-1 < u_n < 2$, et les seules limites possibles sont les valeurs -1 et 2 .

Puisque la suite est croissante monotone et $u_0 = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Solution d'exercice 3.4 :

1) On a, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n.$$

2) Calculons u_{nq} et u_{nq+1} .

$$u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0.$$

D'autre part

$$u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1.$$

3) On en déduit que la suite u_n n'a pas de limite. Raisonnons par l'absurde, supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l . Alors la sous-suite $(u_{nq})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite l . Or comme $u_{nq} = u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $l = 1$.

D'autre part, la sous suite $(u_{nq+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l , mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$.
Donc $l = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$.

Nous obtenons donc une contradiction, car pour tout $q \geq 2$, on a $\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \neq 1$.

On a donc deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Solution d'exercice 3.5 :

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Raisonnons par récurrence :

Pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n i.e.

$$u_n > 0 \Rightarrow 1 + u_n^2 > 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + u_n^2} > 0 \Rightarrow \frac{u_n}{1 + u_n^2} > 0.$$

Alors on obtient $u_{n+1} > 0$.

D'où la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

On conclue que $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$l = \frac{l}{1 + l^2} \Rightarrow l + l^3 = l \Rightarrow l = 0.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2} - u_n = -\left(\frac{u_n^3}{1 + u_n^2}\right) < 0,$$

d'où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc monotone.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant monotone et minorée par 0, donc la suite est convergente. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = 0$.

Solution d'exercice 3.6 :

1) On a

$$\begin{aligned}
 u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)^2 - a \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n^2 + a}{u_n} \right)^2 - a \\
 &= \frac{1}{4u_n^2} (u_n^4 + 2au_n^2 + a^2) - a \\
 &= \frac{1}{4u_n^2} [(u_n^4 + 2au_n^2 + a^2) - 4au_n^2] \\
 &= \frac{1}{4u_n^2} [u_n^4 - 2au_n^2 + a^2] \\
 &= \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.
 \end{aligned}$$

2) On remarque que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \geq 0$. De plus on a

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \geq 0, \text{ donc } u_{n+1}^2 \geq a.$$

Or u_{n+1} étant positive, alors $u_{n+1} \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 0$.

On conclue donc que $u_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, montrons que $u_{n+1} \leq u_n$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{u_n^2} \right).$$

Or $u_n \geq \sqrt{a}$ donc $\frac{a}{u_n^2} \leq 1$. D'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}(1 + 1) \leq 1$$

On a donc $u_{n+1} \leq u_n$ ce qui implique que la suite est décroissante.

3) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par \sqrt{a} , donc elle converge vers une limite $l > 0$.

D'autre part, on a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

A la limite on obtient la relation

$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right) \Leftrightarrow l^2 = a \Leftrightarrow l = \mp \sqrt{a}.$$

La seule solution positive est \sqrt{a} . On conclue que la suite converge vers \sqrt{a} .

Solution d'exercice 3.7 :

3.7. SOLUTIONS DES EXERCICES

Par récurrence, pour $n = 0$, $u_0 = 2 > 1$. Si $u_n > 1$, alors

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1, \left(\text{car } u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 1 \Rightarrow \frac{-1}{u_n} > -1 \right).$$

Donc $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, En effet $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée (vérifiant $u_n > 1$).

La suite converge vers une limite $l \geq 1$. En passant à la limite dans la définition on obtient :

$$l = 2 - \frac{1}{l}, \quad \Rightarrow l = 1.$$

Solution d'exercice 3.8 :

1. Par le théorème d'encadrement ; la suite u_n converge vers 0.

En effet les deux suites $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ convergent vers 0.

2. La suite u_n étant monotone croissante et majorée donc sa limite existe.

En effet $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, donc u_n tend vers une limite l telle que $l \leq 1$.

3. On a $u_n > \ln(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ et on sait que la suite $\ln(n)$ diverge vers $+\infty$. D'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} = e^0 = 1$$

5. $u_n = \ln(n) + \sin(n)$. La suite u_n diverge, en effet $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc

$$\ln(n) - 1 \leq u_n \leq \ln(n) + 1.$$

Or $\ln(n) \pm 1 \rightarrow +\infty$, et d'après le théorème d'encadrement on a $u_n \rightarrow +\infty$.

6. $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. La limite de cette suite n'existe.

En effet, il suffit de trouver deux sous suites qui n'ont pas la même limite, par exemple, soient

$$u_{3n} = \sin(n\pi) = 0 \quad \text{et} \quad u_{6n+1} = \sin\left(\frac{6n\pi + \pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.7. SOLUTIONS DES EXERCICES

7. $u_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}$. La suite tend vers 0, car

$$\frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n \sin n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1},$$

avec $\pm \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Solution d'exercice 3.9 :

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 > 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrons par récurrence que $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, par définition $u_0 > 2$.

Supposons qu'on a bien $u_n > 2$, et montrons que $u_{n+1} > 2$.

On a $u_{n+1} = u_n^2 + 1 > 2^2 + 1 = 5$. D'où $u_{n+1} > 2$.

On conclut que $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Montrons la divergence de u_n sans étudier sa monotonie.

Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \quad l \in \mathbb{R}$.

En passant à la limite dans la définition on a $l = l^2 + 1$.

Cette équation qui n'admet pas de solution réelle. Alors la suite est divergente.

3. La suite u_n est croissante. En effet, on a $u_n > 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 > u_n^2 - 2u_n + 1 > (u_n - 1)^2 > 0.$$

Donc la suite est monotone croissante.

Ainsi la suite est monotone croissante et divergente, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Solution d'exercice 3.10 :

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Montrons par récurrence que ces deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies et que $\forall n \in \mathbb{N} a_n > b_n$.

Pour $n = 0$, on a par définition $a_0 > b_0 > 0$.

Supposons que $a_n > b_n > 0$, alors

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} > 0,$$

d'où $a_{n+1} > b_{n+1}$.

On conclut donc que $a_n > b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Montrons que les deux suites sont adjacentes.

• La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En effet,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0$$

• La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En effet,

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n} (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) > 0.$$

• a_n étant décroissante et minorée par b_0 , donc elle converge.

• b_n étant croissante et majorée par a_0 , donc converge.

Donc la suite $a_n - b_n$ a pour limite 0. Alors les deux suites sont adjacentes.

• De plus supposons que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Alors $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$, donc $\alpha = \beta$.

Chapitre 4

Fonction d'une variable réelle

4.1 Généralités et rappels

Définition 4.1.1 On appelle fonction d'un ensemble A vers un ensemble B , toute correspondance associant à tout élément x de A au plus un élément y de B . On dit que y est l'image de x par f et x et l'antécédente de y .

Remarque 4.1.1 Dans ce chapitre on s'intéresse aux fonctions à une variable réelle telles que les ensembles A et B sont des parties de \mathbb{R} .

4.1.1 Domaine de définition

On appelle domaine de définition d'une fonction f , l'ensemble noté D_f de tous les réels ayant une image par f .

Exemple 4.1.1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. On a

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Exemples de domaines de définitions :

Soit $Q(x)$ une fonction quelconque et $P(x)$ un polynôme en x , i.e.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

- Si $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(x) \neq 0\}.$$

- Si $f(x) = \sqrt{P(x)}$ alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(x) \geq 0\}.$$

- Si $f(x) = \frac{\sqrt{Q(x)}}{P(x)}$ alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(x) \neq 0 \text{ et } Q(x) \geq 0\}.$$

- Si $f(x) = \frac{\sqrt{Q(x)}}{\sqrt{P(x)}}$ alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(x) > 0 \text{ et } Q(x) \geq 0\}.$$

4.1.2 Représentation graphique

Définition 4.1.2 On appelle *graphe de f* , le sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont les couples $(x, f(x))$. On le note G_f . Un point qui appartient au graphe G_f est noté $M(x, y)$.

Droites remarquables dans le plan :

- Axe des abscisses, c'est l'ensemble des points tels que $y = 0$.
- Axe des ordonnées, c'est l'ensemble des points tels que $x = 0$.
- La première bissectrice, c'est la droite dont l'équation $y = x$ (voir la figure).
- La deuxième bissectrice, c'est la droite dont l'équation $y = -x$.

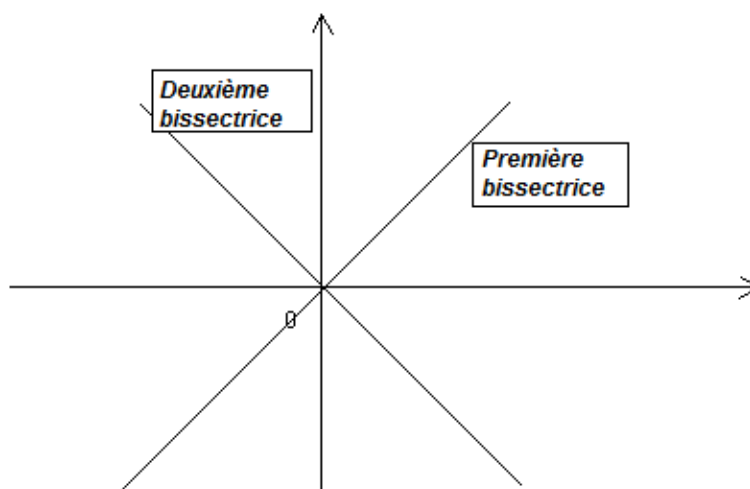


FIGURE 4.1 – Première et deuxième bissectrices dans un plan.

Points d'intersection de deux graphes :

Un point $M(x, y)$ est un point d'intersection entre les courbes de deux fonctions f_1 et f_2 notées G_{f_1} et G_{f_2} i.e. $M(x, y) \in G_{f_1} \cap G_{f_2}$.

Déterminer les points d'intersection $M(x, y)$ revient à résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

Exemple 4.1.2 :

Soit $f_1(x) = x^2 + x - 2$ et $f_2(x) = x - 1$. On a donc $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$.

Déterminons les points d'intersections de G_{f_1} et G_{f_2} :

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x^2 + x - 2 = x - 1.$$

Ce qui nous donne les solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.

Pour $x_1 = -1$, $f_1(-1) = f_2(-1) = -2$.

Pour $x_2 = 1$, $f_1(1) = f_2(1) = 0$.

D'où les points d'intersection sont $M_1(-1, -2)$ et $M_2(1, 0)$.

4.1.3 Fonctions périodiques, paires et impaires

— Une fonction est dite **périodique** s'il existe un réel non nul $w \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall x \in D_f, \quad (x + w) \in D_f, \quad f(x + w) = f(x).$$

Le réel w est appelé période de f .

— Une fonction est dite **paire** si pour tout réel x de D on a $(-x)$ est aussi un élément de D tel que :

$$f(-x) = f(x).$$

Si f est paire alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

— Une fonction est dite **impaire** si pour tout réel x de D on a $(-x)$ est aussi un élément de D tel que :

$$f(-x) = -f(x).$$

Si f est impaire alors son graphe est symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$.

4.1.4 Sens de variation d'une fonction

(a) Une fonction f est dite croissante (resp. strictement croissante) sur un intervalle D si

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

- (b) Une fonction f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle D si

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

4.2 Limites, Continuité

4.2.1 Définitions (limites)

Définition 4.2.1 Soit x_0 un point de \mathbb{R} et f une fonction.

- On dit que f admet le nombre l comme limite au point x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } |x - x_0| < \delta \text{ alors } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

- On dit que f admet une limite à gauche de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad \text{où } x < x_0.$$

On note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$$

- On dit que f admet une limite à droite de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ où } x > x_0.$$

On note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l.$$

Théorème 4.2.1 Si la limite de f au point x_0 existe alors cette limite est unique.

4.2.2 Calcul des limites

- (a) **Règles d'addition des limites :**

Le tableau suivant donne la limite de $(f(x) + g(x))$ quand $x \rightarrow x_0$.

	$\lim_{x \rightarrow x_0} g$		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$?
$-\infty$	$-\infty$?	$-\infty$

TABLE 4.1 – Règles d'addition des limites

Les cases avec points d'interrogations correspondent à des « **formes indéterminées** », des limites qu'on ne peut pas conclure directement.

(b) **Règles de multiplication des limites :**

Le tableau suivant donne $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x))$.

	$\lim_{x \rightarrow x_0} g$				
$\lim_{x \rightarrow x_0} f$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	$-\infty$	$+\infty$

TABLE 4.2 – Règles de multiplication des limites

(c) **Règles d'inversion des limites :**

Remarque 4.2.1 *Il est clair qu'à partir des deux derniers tableaux, on peut déduire un tableau de division de limites.*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f$	$l \neq 0$	0	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$?	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

TABLE 4.3 – Règles d'inversion des limites

Les formes indéterminées classiques sont du type :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{\infty}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Il y a aussi l'indétermination du type " $\frac{l}{0}$ ", cette limite est l'infinie, mais quand le signe du dénominateur n'est pas connu alors on ne peut pas conclure.

(d) **Racine des limites :**

Si $l \geq 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}.$$

(e) **Limite de fraction de polynômes :**

Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes en x , alors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{limite du rapport des monômes de plus haut degré.}$$

Par exemple soient

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 3x - 1 \text{ et } Q(x) = 2x^6 + x^2 + 2x + 4,$$

quand $x \rightarrow +\infty$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^4 + 2x^3 + 3x - 1}{2x^6 + x^2 + 2x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4}{2x^6} = \frac{5}{2}$$

Théorème 4.2.2 (des gendarme) :

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 . On suppose que pour tout x dans ce voisinage, on a

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

On suppose que les limites de $f(x)$ et $h(x)$ quand x tend vers x_0 existent telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

Alors on peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$

Proposition :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 qui vérifient

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

On conclue donc que la limite de f existe telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

4.2.3 Définitions (continuité)

Continuité en un point :

Soit f une fonction définie sur l'ensemble D , et x_0 un point dans un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I \subset D$.

— On dit que f est continue au point x_0 si on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ [|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon]$$

Cette définition peut être donnée plus simplement par :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

De même on a :

— f est continue à gauche du point x_0 si et seulement si on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0).$$

— f est continue à droite du point x_0 si et seulement si on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Propriétés :

Si f et g deux fonctions continues en x_0 alors :

- $f + g$ est continue en x_0 .
- $f \times g$ est continue en x_0 .
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf est une fonction continue en x_0 .
- Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
- Si de plus f est continue en $g(x_0)$, alors la fonction composée $f \circ g$ est continue en x_0 .

Continuité sur un ensemble :

Soit f une fonction définie sur D . Soit A un ensemble de D . La fonction f est dite continue sur l'ensemble A si et seulement si elle est continue en tout point de A .

Exemple 4.2.1 :

- $f(x) = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme en x . Alors la fonction f est continue sur tout \mathbb{R} .
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes en x . Alors la fonction f est continue sur l'intervalle $S = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } Q(x) \neq 0\}$.

4.2.4 Quelques théorèmes importants

Théorème 4.2.3 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

- Il existe au moins $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$ un maximum absolu.
- Il existe au moins $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = m$ un minimum absolu.

Théorème 4.2.4 (des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ telle que :

- f est continue sur $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Alors il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Si de plus la fonction f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors le nombre c est unique.

Théorème 4.2.5 (Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a, b]$.

Théorème 4.2.6 Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I alors f induit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et sa réciproque est continue de J dans I .

Exemple 4.2.2 :

1) Soit n un entier naturel non nul, et soit l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^n.\end{aligned}$$

Cette application est continue, strictement croissante prend la valeur 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

4.2. LIMITES, CONTINUITÉ

C'est donc une bijection de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ dont la réciproque est continue.

Cette réciproque est la fonction racine $n^{\text{ème}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x}.\end{aligned}$$

2) De même, la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle induit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La réciproque est la fonction arcsinus, est donc continue sur $[-1, 1]$.

Théorème 4.2.7 Soit f une fonction croissante définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Alors on a :

- Si f est majorée, elle admet pour limite en b le réel $\sup_I(f)$.
- Si f n'est pas majorée, on $\lim_b f = +\infty$.
- Si f est minorée, elle admet pour limite en a le réel $\inf_I(f)$.
- Si f n'est pas minorée alors $\lim_a f = -\infty$.

4.2.5 Prolongement par continuité

Soit f une fonction non définie en point x_0 , continue sur $I = [a, x_0[\cup]x_0, b]$ et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

Alors la fonction g définie sur $D_f \cup \{x_0\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ l & \text{si } x = x_0; \end{cases}$$

est :

- 1) définie sur tout l'intervalle $[a, b]$
- 2) continue sur tout l'intervalle $[a, b]$.

On dit alors que la fonction g est le **prolongement par continuité** de la fonction f en x_0 .

Exemple 4.2.3 :

1. On peut prolonger la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* en point 0 par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

4.3. DÉRIVABILITÉ

2. La fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = e^{(-\frac{1}{x})}$ peut se prolonger par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 0$. Ce serait inexacte sur \mathbb{R}^* .

4.3 Dérivabilité

4.3.1 Définitions

Définition 4.3.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ et x_0 un point de $]a, b[$. On dit que f est dérivable au point x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et elle est finie.

On appelle cette limite, si elle existe, la dérivée de f au point x_0 et on note $f'(x_0)$.

Exemple 4.3.1 :

Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x^2 + |x|$ en point 0. Remarquons que $f(0) = 0$.

Pour étudier la dérivabilité de f au point 0 on doit étudier la limite du taux d'accroissement $T_{f,0}$ en point 0,

$$T_{f,0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + |x| - 0}{x} = \frac{x^2 + |x|}{x}.$$

On sépare ici l'étude en deux cas pour pouvoir « ôter la valeur absolue » :

- Si $x > 0$, on a $|x| = x$ donc

$$T_{f,0} = \frac{x^2 + x}{x} = \frac{x + 1}{1} = x + 1 \text{ où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + 1 = 1.$$

Donc.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

La fonction f est donc dérivable à droite de 0 avec $f'_d(0) = 1$.

- Si $x < 0$, on a $|x| = -x$ donc

$$T_{f,0} = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x - 1}{1} = x - 1 \text{ où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x - 1 = -1.$$

4.3. DÉRIVABILITÉ

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

La fonction f est donc dérivable à gauche de 0 avec $f'_g(0) = -1$.

Mais on a bien $1 \neq -1$, donc $f'_d(0) \neq f'_g(0)$. On conclue donc que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Voici la représentation graphique de cette fonction.

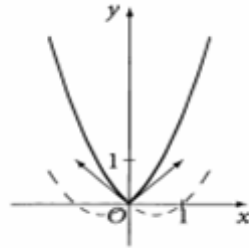


FIGURE 4.2 – Dérivabilité à gauche et à droite de la fonction $f : x \mapsto x^2 + |x|$ en point 0.

Elle coïncide avec la parabole $y = x^2 + x$ pour $x \geq 0$ et avec la parabole $y = x^2 - x$ si $x \leq 0$. Sur cet exemple les deux demi-tangentes (symbolisées par des flèches) qui ne sont pas bout à bout.

4.3.2 Interprétation graphique

Si f est une fonction dérivable au point x_0 alors le graphe de cette fonction admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente (voir la figure ci-dessous). L'équation de cette tangente est donnée par :

$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

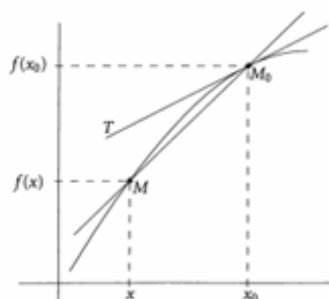


FIGURE 4.3 – Représentation graphique de la tangente T

Remarque 4.3.1 :

4.3. DÉRIVABILITÉ

- La tangente au point M_0 est horizontale si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
- Lorsque f , continue en x_0 , n'est pas dérivable en x_0 mais que le taux d'accroissement tend vers $+\infty$, les cordes possèdent une position limite verticale que l'on appelle encore tangente à la courbe en M_0 .
- Lorsque f n'est pas dérivable en x_0 mais qu'elle possède des dérivées à droite et à gauche différentes, M_0 est un point anguleux de la courbe, i.e. point avec deux demi-tangente de pentes différentes.

Dérivabilité sur un ensemble :

On dit que f est dérivable sur un ensemble $A \in \mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point x_0 de A .

4.3.3 Théorèmes importants

Théorème 4.3.1 Si la fonction f est dérivable alors f est continue.

Remarque 4.3.2 Une fonction peut être continue sans être dérivable, comme le prouve l'exemple de la fonction $f : x \mapsto |x|$ qui est continue en point 0 et non dérivable en ce point car elle y possède des dérivées à droite et à gauche qui sont différentes.

Théorème 4.3.2 (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ telle que :

- f est continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b) = 0$.

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

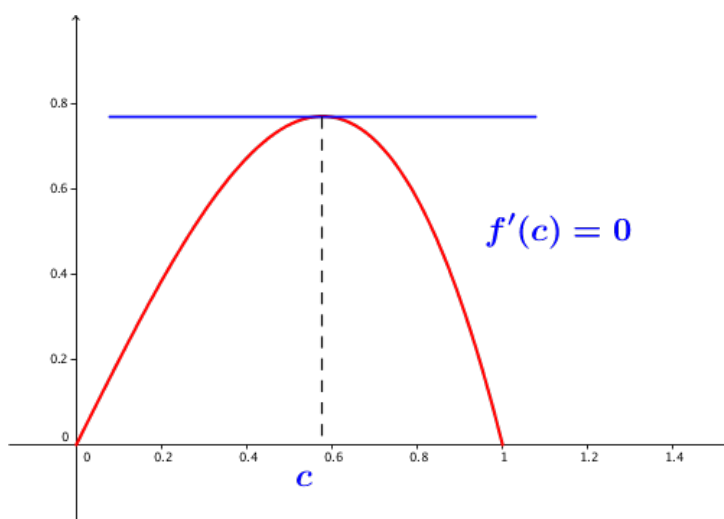


FIGURE 4.4 – Illustration du théorème du Rolle

Théorème 4.3.3 (*Théorème des accroissements finis*)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ telle que :

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

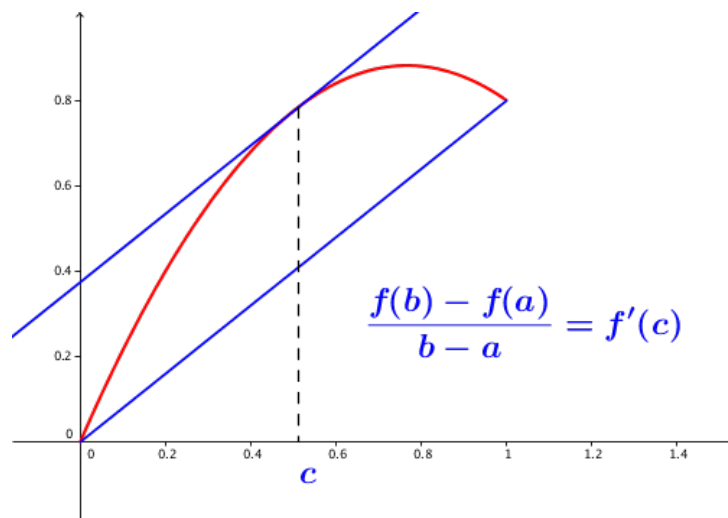


FIGURE 4.5 – Illustration du théorème des accroissements finis.

Application des dérivée au sens des variations de fonctions

- Si la fonction f admet un extremum local en un point x_0 alors $f'(x_0) = 0$ (voir la figure ci-dessous).

Remarque 4.3.3 *Un extremum local (ou relatif) en x_0 c'est un maximum ou minimum de f sur un intervalle ouvert $J \subset D_f$ et contenant x_0 .*

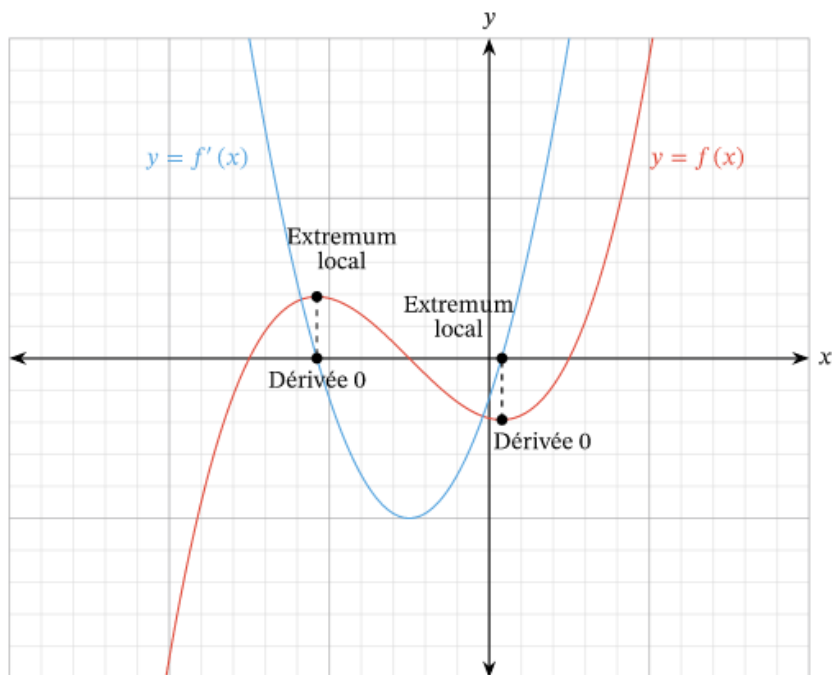


FIGURE 4.6 – Graphe d'une fonction et sa dérivée avec les extremums locaux.

- Une fonction f est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $]a, b[$ si et seulement si la fonction dérivée f' est positive ou nulle (resp. négative ou nulle) sur $]a, b[$ (voir la figure ci-dessous).

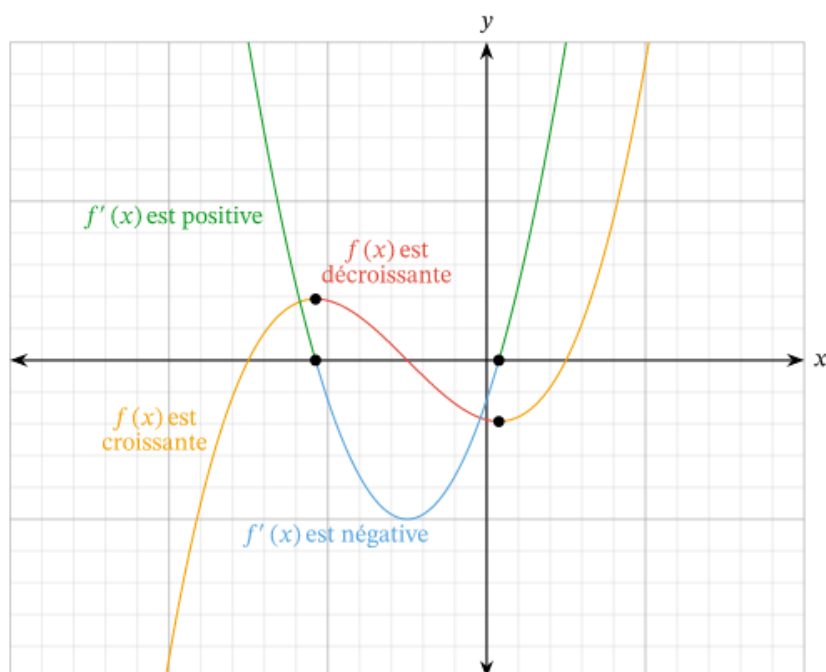


FIGURE 4.7 – Sens de variation d'une fonction.

- La fonction f est constante si la dérivée est identiquement nulle sur cette intervalle.

4.3.4 Dérivées des fonctions usuelles

Voir ci-dessous le tableau récapitulatif des dérivées.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Conditions
k (constante)	0	
ax	a	$a \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
x^n	nx^{n-1}	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	

TABLE 4.4 – Table des dérivées des fonctions usuelles.

4.3.5 Dérivées successives

Si une fonction f est dérivable, sa dérivée est notée f' , rien n'empêche que cette fonction dérivée soit aussi dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$.

Cette dernière peut aussi être dérivable, on obtient la dérivée troisième notée $f^{(3)}$.

Par récurrence immédiate, la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est notée $f^{(n)}$ telle que

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Notons que la dérivée d'ordre 0, $f^{(0)}$, est tout simplement la fonction f .

Proposition (Formule de Leibnitz)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables. Alors la fonction fg est aussi n fois dérivable et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Remarque 4.3.4 *Attention! Ne pas confondre avec la formule de Newton dans le cas de $f^{(0)}$ ou $g^{(0)}$ il s'agit de la fonction f ou g et pas 1.*

4.3.6 Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Opération	Fonction f	Dérivée f'
Addition	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication	$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
Produit	uv	$u'v + uv'$
inverse	$\frac{1}{u}, u \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}, v \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Racine carrée	\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Puissance	$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
Composée	$u \circ v$	$v'(u' \circ v)$

4.4 Fonctions logarithmique et exponentielle

4.4.1 Fonction logarithmes

- (a) **Logarithme népérienne** : On appelle logarithme népérienne, la fonction qui à tout $x > 0$ associe le nombre

$$y = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

On note

$$y = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x.$$

(L'expression népérienne vient de Neper, un mathématicien écossais) .

Conséquence :

- Si $x > 1$ alors $\ln(x) > 0$.
- Si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) < 0$.
- Si $x = 1$ alors $\ln(x) = 0$.

Propriétés :

La fonction \ln est une fonction qui est :

- Définie sur $D =]0, +\infty[$,
- Continue est dérivable sur D ,
- Strictement croissante sur D ,
- $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De plus on a les propriétés suivantes

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a), \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a), \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Quelques limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty. & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) &= -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0. & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) &= 0^+. \end{aligned}$$

Fonctions de types $f(x) = \ln(U(x))$

Le domaine de définition est donné par

$$D = \{x \in \mathbb{R} / U(x) > 0\}.$$

Par exemple, $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, donc $U(x) = x^2 - 1$.

D'où le domaine de définition

$$D = \{x / x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

La dérivé de $f(x)$ est donnée par :

$$(\ln(U(x)))' = \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

Le signe de la fonction $\ln(U(x))$

$$* \ln(U(x)) = 0 \Leftrightarrow U(x) = 1.$$

$$* \ln(U(x)) > 0 \Leftrightarrow U(x) > 1.$$

$$* \ln(U(x)) < 0 \Leftrightarrow U(x) < 1.$$

(b) **Logarithme décimale :**

On appelle logarithme décimale la fonction logarithmique de **base 10** définie par

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Propriété fondamentale :

$$\log_{10}(10) = 1 \qquad \log_{10}(10^n) = n$$

(c) **Fonctions logarithmiques de base quelconque :**

Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, on définit la fonction f notée \log_a qui à tout $x > 0$ associe le nombre

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

4.4.2 Fonction exponentielle

Définition 4.4.1 *On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithmique népérienne. On note*

$$f(x) = e^x.$$

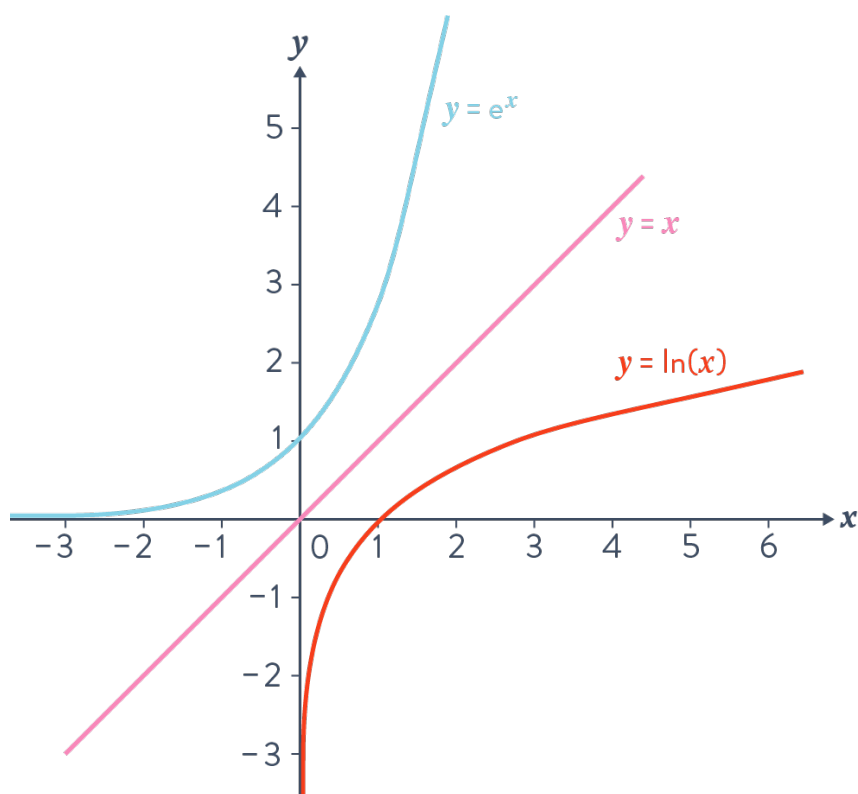


FIGURE 4.8 – Fonctions exponentielle et logarithme népérien.

Remarque 4.4.1 Cette fonction existe car la fonction logarithmique népérienne est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc c'est une **bijection**, sa réciproque existe.

Propriétés :

- Le domaine de définition de l'exponentielle est tout \mathbb{R} .
- La fonction exponentielle est continue et dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$f'(x) = e^x.$$

- $e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b$
- $e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

Quelques limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} &= +\infty \end{aligned}$$

Fonctions de types $f(x) = e^{U(x)}$:

- Le domaine de définition de f est celui de la fonction U .
- La dérivée : $f'(x) = U'(x)e^{U(x)}$.
- On a $e^{U(x)} > 0 \quad \forall x \in D_U$.

4.5 Série d'exercices

Exercice 4.1 :

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \quad 2) f(x) = \sqrt{(x+1)(x^2+x+1)} \quad 3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}}.$$

Exercice 4.2 :

Déterminer les points d'intersections de G_1 et G_2 , les graphes des fonctions f_1 et f_2 définies (respectivement) par :

$$\begin{aligned} a) f_1(x) &= x + 1 & f_2(x) &= x^3 + x^2 + x + 1. \\ b) f_1(x) &= \frac{x^2+x}{1+x^2} & f_2(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Exercice 4.3 :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = -x^2 + 1.$$

Déterminer les points d'intersections du graphe de f avec :

- a) La première bissectrice.
- b) La deuxième bissectrice
- c) L'axe des abscisses
- d) L'axe des ordonnées
- e) La droite dont l'équation $x = 2$
- f) La droite d'équation $y = -3$.

Exercice 4.4 :

Étudier la parité des fonctions suivantes et préciser les symétries quand elles ont lieu :

$$f_1(x) = x^2 + |x| \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad f_3(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}.$$

Exercice 4.5 :

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x & & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x-x-2}}{\sqrt{x-1}} & & d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} \\ e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) & & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

Exercice 4.6 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) Quel est le domaine de définition de f ?
- 2) Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Exercice 4.7 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x|}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

- 1) Étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = -1$.
- 2) Que peut-on dire sur la continuité de f au point x_0 ?

Exercice 4.8 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que la fonction f est continue sur son domaine de définition, et que f est strictement décroissante.
3. En déduire que la réciproque f^{-1} existe. Donner l'expression de f^{-1} .
4. Étudier la dérivabilité au point 1.
5. Déterminer les points d'intersection du graphe de f avec le graphe de la fonction

$$g(x) = \sqrt{9x-1}.$$

Exercice 4.9 :

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- 2) Donner l'équation de la tangente d'une fonction dérivable f .

Exercice 4.10 :

Déterminer les limites suivantes si elles existent, (le cas échéant, désigner la limite à droite et la limite à gauche) :

- a. Limite $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5}$ quand $x \rightarrow 1$, puis quand $x \rightarrow +\infty$.
- b. Limite $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2-6x+5}$ quand $x \rightarrow 1$.
- c. Limite $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ quand $x \rightarrow 0$.

4.6 Solutions des exercices

Solution d'exercice 4.1 :

Déterminons le domaine de définitions :

1. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$, son domaine de définition est donné par

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^3 - 1 \geq 0\}.$$

Or

$$x^3 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.$$

Donc $D_f = [1, +\infty[$.

2. $f(x) = \sqrt{(x+1)(x^2+x+1)}$. De même son domaine de définition est

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x+1)(x^2+x+1) \geq 0\}.$$

On étudie le signe de $(x+1)$ et (x^2+x+1) .

x	-1
$(x+1)$	- 0 +
x^2+x+1	+ +

On obtient donc $D_f = [-1, +\infty[$.

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| - 1 \geq 0 \text{ et } |x| - 1 \neq 0\}.$$

Or

$$|x| - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1 \quad \Rightarrow \quad x < -1 \text{ ou } x > 1.$$

D'où le domaine de définition

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Solution d'exercice 4.2 :

Déterminons les points d'intersection de G_1 et G_2 les graphes de f_1 et f_2 :

a)

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x + 1 = x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 0.$$

Pour $x_1 = -1$ on a $y_1 = x_1 + 1 = 0$, de même $x_2 = 0$ on a $y_1 = x_2 + 1 = 1$

Donc on a deux points d'intersections $A(-1, 0)$ et $B(0, 1)$.

b)

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{1 + x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

D'où $G_1 \cap G_2 = \{(1, 1)\}$.**Solution d'exercice 4.3 :**

Soit la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 1$. Déterminons les points d'intersections du graphe de f avec

a) La première bissectrice $g(x) = x$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Donc les points d'intersections sont

$$A\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } B\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

b) La deuxième bissectrice $g(x) = -x$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 1 = -x \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De même les points d'intersections sont

$$A\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } B\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

c) L'axe des abscisses (\vec{ox}), $g(x) = 0$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 1.$$

On obtient donc les points

$$A(-1, 0) \text{ et } B(1, 0).$$

d) L'axe des ordonnées (\vec{oy}), $x = 0$. On fixe x à 0 on obtient $f(0) = 1$, donc le point d'intersection est $A(0, 1)$.e) La droite dont l'équation $x = 2$. On remplace x par 2, on obtient le point d'intersection $A(2, f(2)) = A(2, -3)$.f) La droite dont l'équation $y = -3$. En résolvant l'équation $-x^2 + 1 = -3$ on obtient

$$x_1 = -2 \text{ et } x_2 = 2,$$

d'où $A(-2, -3)$ et $B(2, -3)$.

Solution d'exercice 4.4 :

Étudions la parité des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = x^2 + |x|$. On a $D_f = \mathbb{R}$; donc $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$.
On a $f_1(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f_1(x)$, donc f est paire et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (\vec{oy}).
- $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. De même $\forall x \in D_f = \mathbb{R}, (-x) \in D_f$.
On calcule donc $f_2(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f_2(x)$. Alors, cette fonction est paire et symétrique par rapport à l'axe (\vec{oy}).
- $f_3(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$. On a $\forall x \in D_f = \mathbb{R}, (-x) \in D_f$.
On a donc

$$f_3(-x) = \frac{(-x)^3 - x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 - x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = -f_3(x).$$

Alors la fonction f_3 est impaire donc symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$.

Solution d'exercice 4.5 :

Calcul des limites

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Posons $y = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x} - x - 2}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{3y - y^2 - 2}{y - 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{-(y-1)(y-2)}{y-1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} -(y-2) = 1.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} &= \cos'(a) \\ &= -\sin(a).\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^0} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Solution d'exercice 4.6 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Le domaine de définition de $D_f = \mathbb{R}$.

2. Étudions la continuité de f sur son domaine de définition.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, qui est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pour $x = 0$, calculons les valeurs de limite à droite et à gauche de 0.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0).$$

Donc la fonction f est continue à droite de 0.

De même

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x)}{-x} = -1 \neq f(0).$$

D'où la fonction n'est pas continue à gauche de 0.

On conclut donc que cette fonction n'est pas continue au point 0.

Solution d'exercice 4.7 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x|}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1. Dérivabilité de f au point $x_0 = -1$. On a besoin d'étudier le signe de $x^2 + x$.

On a $x^2 + x = x(x+1)$, donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
x		-	-	0	+	
$x+1$		-	0	+	+	
$x(x+1)$		+	0	-	0	+

On calcule donc la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{\frac{|x^2+x|}{x+1} - 1}{x+1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{\frac{x^2+x}{x+1} - 1}{x+1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + x - x - 1}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = -\infty. \end{aligned}$$

De même on calcule la limite à droite du point -1

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{\frac{|x^2+x|}{x+1} - 1}{x+1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{\frac{-(x^2+x)}{x+1} - 1}{x+1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{-(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} -\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

La fonction f est donc dérivable à droite de -1 mais pas à gauche de -1 . On conclut que f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$.

2. Continuité de f au point $x_0 = -1$

D'après la question précédente, f est dérivable à droite de -1 donc elle est également continue à droite de -1 .

Étudions la continuité à gauche de -1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{x^2 + x}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} x = -1 \neq f(-1).$$

Donc f n'est pas continue à gauche du point -1 .

Solution d'exercice 4.8 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

1. Le domaine de définition de f est

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1-x}{x} \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}.$$

D'après le tableau des signes des deux fonctions $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto x$, le signe du fraction $(1-x)/x$ est

négatif sur l'intervalle $] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

positif sur l'intervalle $]0, 1]$.

D'où le domaine de définition de f est donné par $D_f =]0, 1]$.

2. Montrons que la fonction f est continue sur son domaine de définition, et que f est

strictement décroissante.

On a la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{x}$ est continue sur $D_f =]0, 1]$, car c'est le **quotient** de deux fonctions continues.

Alors $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ est continue puisque c'est la **racine** d'une fonction continue.

Montrons à présent que f est strictement décroissante.

Soient $x_1, x_2 \in D_f$ tels que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \text{ et } -x_1 > -x_2 \right).$$

D'où

$$\frac{1-x_1}{x_1} > \frac{1-x_2}{x_2} \text{ i.e. } f(x_1) > f(x_2).$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur D_f .

3. On en déduit que la réciproque f^{-1} existe.

La fonction f étant continue et strictement monotone sur D_f , donc c'est une **bijection** de $]0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$. Ceci implique que la réciproque f^{-1} existe.

L'expression de f^{-1} , on pose

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{1-x}{x} \\ \Rightarrow xy^2 + x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow x(y^2 + 1) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

D'où $x = \frac{1}{y^2+1}$. On conclut l'expression de la réciproque :

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

4. Étudier la dérivabilité au point 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = -\infty.$$

Donc la limite de $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'existe pas. On conclue que la fonction n'est pas dérivable au point 1.

5. Déterminer les points d'intersection du graphe de f avec celui de la fonction $g(x) = \sqrt{9x - 1}$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{9x-1} \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 9x-1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}.$$

Or $-\frac{1}{3} \notin D_f$, donc la seule solution est $x = \frac{1}{3}$.

D'où le point d'intersection est $A(\frac{1}{3}, \sqrt{2})$.

Solution d'exercice 4.9 :

1. Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

avec $f(x) = \sin(x)$. Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \cos(0) = 1.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. L'équation de la tangente d'une fonction dérivable f est la suivante :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Solution d'exercice 4.10 :

- a. Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5}$; on a $f(1)$ n'existe pas. On peut factoriser $x - 1$ au dénominateur, on obtient

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5} = \frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{x-1} \frac{2x^2+x-1}{(x-5)}.$$

D'une part on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x-1}{(x-5)} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}.$$

D'autre part

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Donc en appliquant les règles d'opérations sur les limites on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} \frac{2x^2 + x - 1}{(x-5)} = (+\infty) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty.$$

De même

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} \frac{2x^2 + x - 1}{(x-5)} = (-\infty) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty.$$

Étudions maintenant la limite quand $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

1. Ici on prend $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 6x + 5}$. On remarque que $f(1)$ n'existe pas, de plus la valeur 1 annule le numérateur, ce qui implique qu'on a une **forme indéterminée** 0/0.

On peut donc factoriser $(x-1)$ au numérateur et au dénominateur.

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{(2x+1)}{(x-5)}.$$

Avec cette nouvelle forme il est évident que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)}{(x-5)} = \frac{(2+1)}{(1-5)} = -\frac{3}{4}.$$

2. Prenons la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$. On remarque que le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0.

Pour les expressions avec **racine**, il est souvent possible de lever une indétermination avec la technique de la "quantité conjuguée".

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}. \end{aligned}$$

Sous cette forme il est évident que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Formules de Taylor et Développements Limités

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'un problème important en analyse est le calcul des limites quand il s'agit d'une forme indéterminée. Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Un autre problème est celui de l'approximation d'une fonction compliquée. Par exemple

$$f(x) = (x - 1) \exp\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right).$$

Pour mieux l'étudier on aimerait bien la remplacer par une fonction plus simple, par exemple une fonction **polynômiale**.

La formule de Taylor est une réponse simple à ces deux problèmes. Les formules de Taylor utilisent les **dérivées successives** d'une fonction pour construire des polynômes de meilleure approximation au voisinage d'un point.

5.1 Formules de Taylor

Rappelons la définition de la dérivée $f'(a)$ qui peut être écrite sous la forme :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x - a) \text{ avec } R(x - a) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow a.$$

Le terme $f(a) + f'(a)(x - a)$ s'appelle **l'approximation d'ordre 1** de la fonction f au point a et c'est un polynôme de degré 1 en x . La formule de Taylor généralise cette formule et donne l'approximation d'ordre n de f au point a . On voudrait donc écrire :

$$f(x) = \text{Polynôme de degré } n \text{ en } x + \text{ Reste }.$$

5.1. FORMULES DE TAYLOR

Nous allons voir trois formules de Taylor qui ont toutes la même partie polynomiale mais donnent plus ou moins d'informations sur le **reste**. Ces trois formules sont ordonnées du moins précise (mais plus pratique) vers la plus précise qui donne une expression exacte du reste.

5.1.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.1.1 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n(I)$ (i.e. n fois dérivable sur I et toutes ses dérivées sont continues sur I), et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur I telles que

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 5.1.1 :

Appliquons la formule de Taylor à la fonction $f(x) = e^x$.

Les dérivées sont toutes égales à e^x . Au point $a = 0$, on a

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1.$$

D'où

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

5.1.2 Formule de Taylor avec Reste de Lagrange

Théorème 5.1.2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n(I)$ avec $f^{(n)}$ dérivable, et soit $x, a \in I$. Alors il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{(n+1)}.$$

5.1.3 Formule de Taylor avec Reste Intégral

Théorème 5.1.3 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{n+1}(I)$ et soit $x, a \in I$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!}(x-t)^n dt.$$

Remarque 5.1.1 :

En écrivant $x = a + h$, la formule de Taylor devient

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R(h)$$

Définition 5.1.1 Soit f une fonction définie dans un voisinage de o . Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notions suivantes :

$$f(x) = o(x^m) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}, \left| \frac{f(x)}{x^m} \right| < \varepsilon;$$

$$f(x) = O(x^m) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}, \left| \frac{f(x)}{x^m} \right| < a;$$

De plus on a

$$f(x) \sim x^m \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x^m} = 1.$$

Lorsque $f = o(x^m)$ on dit que f est négligeable devant x^m , tandis que lorsque $f = O(x^m)$, on dit que f est dominée par x^m . Lorsque $f \sim x^m$ on dit que f est équivalente à x^m .

5.2 Développement limités

5.2.1 Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction définie en x_0 et au voisinage de x_0 . On suppose qu'il existe deux réels a et b , tels que dans un voisinage de x_0 on a

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Cette hypothèse n'est pas contraignante. En effet, quelques soient a et b , pour obtenir cette égalité, il suffit de poser pour $x \neq x_0$; $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-a}{x-x_0} - b$, avec en plus $\varepsilon(x_0) = 0$.

Réciproquement, en partant de cette égalité, on doit avoir nécessairement que

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - a}{x - x_0} - b.$$

On suppose de plus qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

C'est en fait la seule hypothèse que l'on fait, mais qui concerne non seulement la fonction ε mais aussi forcément les réels a et b .

Dans ce cas on dit que cette fonction admet un **développement limité** à l'ordre 1 au voisinage de x_0 . On note en abrégé $DL_1(x_0)$ qui est sous forme d'un polynôme de degré 1 : $a + b(x - x_0)$ (**partie régulière**), tandis que $(x - x_0)\varepsilon(x)$ est le **reste**.

5.2.2 Généralisation

Soient $x_0 \in I, n \in \mathbb{N}$, on dit que la fonction f admet un développement limité (DL) au point x_0 et à l'ordre n , s'il existe des réels c_0, c_1, \dots, c_n , et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

On note donc $DL_n(x_0)$.

Remarque 5.2.1 *La formule de Taylor-Young permet d'obtenir directement des développements limités en posant*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Proposition : (Unicité du DL)

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 alors il est unique.

Corollaire : (Parité)

Si f est une fonction paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en x_0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Exemple 5.2.1 :

La fonction $f(x) = \cos(x)$ est paire donc son DL_6 au point 0 est de la forme :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6 \varepsilon(x^6).$$

Proposition : (Troncature)

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On suppose que f admet un $DL_n(0)$. Alors pour tout $n' < n$, f admet aussi un $DL_{n'}(0)$ et on obtient la partie régulière du $DL_{n'}(0)$ en **tronquant** celle de $DL_n(0)$, c'est à dire en ne gardant que les termes de degré $\leq n'$.

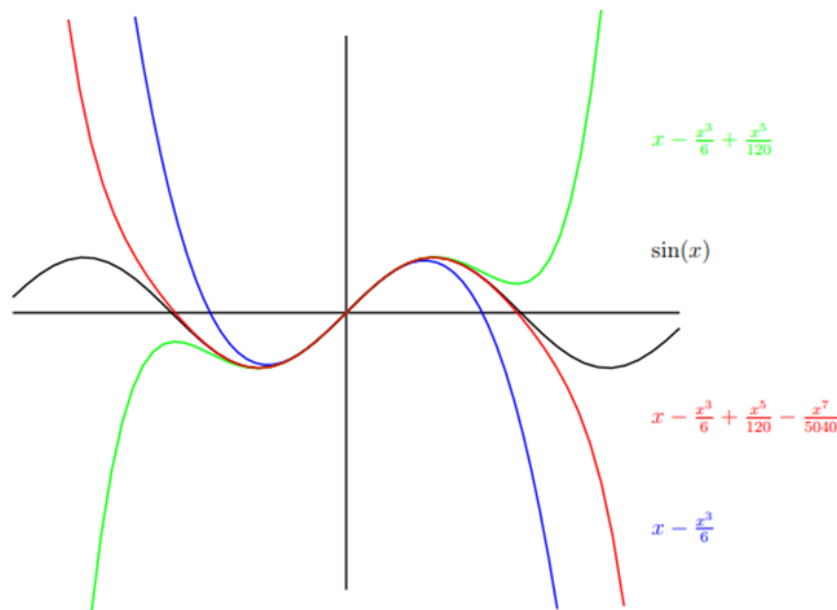


FIGURE 5.1 – DL de la fonction $\sin(x)$ au voisinage de 0 avec différents ordres.

5.2.3 DL des fonctions en un point quelconque x_0

On dit que la fonction f admet un *DL* au voisinage d'un point x_0 si la fonction $x \rightarrow f(x + x_0)$ admet un *DL* au voisinage de 0. On ramène donc le problème en 0 en faisant un changement de variables $t = x - x_0$.

Exemple 5.2.2 :

Calculer le *DL* de la fonction f à l'ordre 3 au voisinage de 1 avec $f(x) = \ln(x)$.

On pose $t = x - 1$, donc $x = t + 1$.

On a bien $\lim_{x \rightarrow 1} t = 0$.

$$f(x) = \ln(x) = \ln(t + 1)$$

Or le *DL* de $\ln(t + 1)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 est donné par :

$$\ln(t + 1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + t^5; \varepsilon(t^5)$$

Donc

$$f(x) = \ln(x) = \ln(t + 1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + t^5 \varepsilon_1(t^5)$$

D'où le *DL* suivant

$$f(x) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \frac{(x - 1)^5}{5} + (x - 1)^5 \varepsilon_2(x - 1)^5.$$

5.2.4 DL des fonctions usuelles au point 0 :

Les développements limités des fonctions usuelles au point 0 proviennent de la formule de Taylor-Young (Voir le tableau des DL suivants).

Fonction	Développement limité au voisinage de 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
$\cosh x$	$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\tanh x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \alpha \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+\eta x}$	$1 - \eta x + \eta^2 x^2 - \dots + (-1)^n \eta^n x^n + o(x^n), \eta = \pm 1$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1})$
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2 \times 3}x^3 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 5}x^5 + \dots + \frac{1 \times 3 \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2p \times (2p+1)}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$

TABLE 5.1 – Table des développements limités des fonctions usuelles

5.2.5 Opérations sur les DL

Supposons que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n telles que :

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) = C(x) + x^n\varepsilon_1(x).$$

$$g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) = D(x) + x^n\varepsilon_2(x).$$

- **Somme et Produit des DL :**

La fonction $f + g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par :

$$(f + g)(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \cdots + (c_n + d_n)x^n + x^n\varepsilon(x).$$

La fonction $f \times g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par :

$$(f \times g)(x) = T_n(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où $T_n(x)$ est le polynôme

$$(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n).$$

tronqué à l'ordre n (en éliminant les monômes de degré $> n$).

Exemple 5.2.3 :

Calculer le DL de la fonction $\cos(x)\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au point 0.

On sait que

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x).$$

Donc on calcul le DL du produit de la façon suivante

$$\begin{aligned} \cos(x)\sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\right), \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^2\right) + x^2\varepsilon_3(x), \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2\varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

- **Composition des DL :**

Si $g(0) = 0$ (i.e. $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n . La partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Exemple 5.2.4 :

Calculer le DL du $h(x) = \sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 3.

5.2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

On pose $(f \circ g)(x) = \sin(\ln(1+x))$, on a bien $g(0) = \ln(1+0) = 0$.

On a au voisinage de 0

$$f(u) = \sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\varepsilon_1(u) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x).$$

On a besoin donc des termes suivants

$$u = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad u^3 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\right)^3 = x^3 + x^3\varepsilon_3(x).$$

D'où

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(u), \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\varepsilon_1(u), \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_4(x). \end{aligned}$$

- **Quotient de développements limités :**

Si on connaît un développement limité de f et de g , on peut obtenir un développement limité du quotient $\frac{f}{g}$ en faisant une **division** selon les **puissances croissantes**. Pour que $\frac{f}{g}$ soit définie au voisinage de 0, il faut que $g(0) \neq 0$.

Exemple 5.2.5 :

Déterminer le développement limité à l'ordre 6 de $\tan(x)$ (au voisinage de 0).

On a les DL suivants

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon_2(x).$$

(nous verrons que le terme en x^6 ne sert à rien.)

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5} \\ \hline - \left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 \right) & \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\ \hline - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 \right) & \frac{1}{120} - \frac{1}{24} = \frac{1-5}{120} = -\frac{4}{120} = -\frac{1}{30} \\ \hline \frac{2}{15}x^5 & -\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{-1+5}{30} = +\frac{4}{30} = +\frac{2}{15} \end{array}$$

On peut conclure donc que

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

• **Intégration d'un développement limité :**

Soit I un intervalle contenant 0, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant en 0 un développement limité à l'ordre n qui vaut $\sum_{k=0}^n a_k x^k$. Si F est une primitive de f , alors elle admet un développement limité en 0 à l'ordre $n + 1$ qui est de la forme

$$F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Exemple 5.2.6 :

Soit la fonction f telle que son développement limité d'ordre n au voisinage de 0 est donné par

$$f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

Alors le développement limité d'ordre $n + 1$ au voisinage de 0 de sa primitive F est donné par

$$F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Examinons maintenant un exemple :

Cherchons un développement limité à l'ordre 5 de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x}.$$

Nous allons considérer $f(x)$ comme le produit de deux fonctions $g(x) = x^2 \sin(x)$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$, et nous allons développer chacun des termes à l'ordre 5.

- Le premier terme $g(x)$ est lui même un produit de deux fonctions : x^2 dont le développement limité est donc x^2 . Nous connaissons aussi le DL de la fonction $\sin(x)$ à l'ordre 5 qui est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Le produit nous donne

$$x^2 \sin(x) = x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^5),$$

puisque on ne tient compte dans le produit que les termes de degré ≤ 5 .

Notons donc qu'il aurait été suffisant de développer $\sin(x)$ seulement à l'ordre 3. Il est souvent possible d'utiliser ce genre de raccourci, mais il est plus sûr d'appliquer strictement les règles de calculs au prix de quelques lourdeurs.

- Passons maintenant à $\frac{1}{1+x}$. On sait que

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5).$$

En utilisant la règle de produit, on obtient donc

$$f(x) = g(x) \times h(x) = \left(x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^5) \right) \times (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)).$$

Il vient donc

$$f(x) = x^3 - x^4 + \frac{5x^5}{6} + o(x^5).$$

Notons que, là encore, il aurait été possible de ne développer $\frac{1}{1+x}$ qu'à l'ordre 2, puisque x^3 est en facteur dans le premier terme g .

5.3 Série d'exercices

Exercice 5.1 :

Appliquer la formule de Taylor pour donner un développement limité à l'ordre 5 au voisinage du point 1 pour la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1.$$

Exercice 5.2 :

Calculer le développement limité de la fonction f pour chacun des cas suivants :

- $f(x) = \ln(1+x) - \sin(x)$ quand x tend vers 0 à l'ordre 2.
- $f(x) = \sqrt{x+2}$ quand x tend vers 0 à l'ordre 3.
- $f(x) = x^2 \ln(x)$ quand x tend vers 1 à l'ordre 5.
- $f(x) = \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ quand x tend vers 0 à l'ordre 4.

Exercice 5.3 :

Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}, a, b \in \mathbb{R}^*$$
$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.4 :

Appliquer la formule de Taylor pour donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage du point 1 pour la fonction suivante :

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2 + x + 3.$$

Exercice 5.5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}$.

- Quelle est la dérivée n^{me} de la fonction f ?
- Écrire la formule de Taylor-Young pour cette fonction, à l'ordre n au voisinage d'un point x_0 .
- Donner le $DL_n(0)$ de f .

Exercice 5.6 :

Déterminer les développements limités des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = e^{-3x}$ (à l'ordre 4 au voisinage de 0).
2. $g(x) = \sin(2x)$ (à l'ordre 5 au voisinage de 0).
3. $h(x) = \ln(1 - x^3)$ (à l'ordre 6 au voisinage de 0).
4. $i(x) = \sqrt{1 - x}$ (à l'ordre 3 au voisinage de 0).

Exercice 5.7 :

1. Écrire le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 6 en 0.
3. En déduire le développement limité de $x \mapsto \arcsin(x)$ à l'ordre 7 en 0.
4. Écrire le développement limité de $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 7 en 0.
5. On rappelle que la fonction tangente est impaire. Soit

$$\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + o(x^7),$$

son développement limité à l'ordre 7 en 0.

Calculer en fonction de a, b, c et d le développement limité de $x \mapsto \tan(\arcsin(x))$ à l'ordre 7 en 0.

6. En utilisant la formule $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, déduire des questions précédentes les valeurs de a, b, c, d .
7. Écrire le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 6 en 0.
8. En déduire le développement limité de $x \mapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.
9. En utilisant les résultats des questions 6 et 8, vérifier que $\tan(\arctan(x)) = x + o(x^7)$.

Exercice 5.8 :

1. Écrire le développement limité de $x \mapsto e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Écrire le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2}} \right) = -4.$$

5.4 Solutions des exercices

Solution d'exercice 5.1 :

Développement limité à l'ordre 5 au voisinage du point 1 pour la fonction :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1.$$

On a

$$f'(x) = 1 + 8x + 3x^2, \quad f''(x) = 8 + 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad \text{et} \quad f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = 0.$$

On a $f(1) = 5$, $f'(1) = 12$, $f''(1) = 14$ et $f^{(3)}(1) = 6$. On conclut le développement suivant

$$f(x) = 5 + 12(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + 0 + 0 + o((x-1)^5).$$

D'où l'expression suivante

$$f(x) = 5 + 12(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3 + o((x-1)^5).$$

Solution d'exercice 5.2 :

— Développement limité de $f(x) = \ln(1+x) - \sin(x)$ quand x tend vers 0 à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) - \sin(x) = \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] - [x + o(x^2)] \\ &= \frac{-x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

— $f(x) = \sqrt{x+2}$ quand x tend vers 0 à l'ordre 3. Posons $X = \frac{x}{2}$, $X \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ on a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+2} = \sqrt{2\left(\frac{x}{2} + 1\right)} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1+X} = \sqrt{2}(1+X)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2}X + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}X^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-3+1)}{3!}X^3 + o(X^3) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-3+1)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^3\right) \right] \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

— $f(x) = x^2 \ln(x)$ quand x tend vers 1 à l'ordre 5. Posons $t = (x-1) \rightarrow 0$ quand

$x \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \ln(x) = (t+1)^2 \ln(t+1) \\ &= (1+2t+t^2) \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5) \right] \\ &= t + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{7t^4}{12} + \frac{t^5}{30} + o(t^5) \\ &= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{7}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{30}(x-1)^5 + o((x-1)^5). \end{aligned}$$

— $f(x) = \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ quand x tend vers 0 à l'ordre 4.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \\ &= \frac{1}{x^4} \left[\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \left(1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^4\right) + o(x^4) \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} + o(1). \end{aligned}$$

Solution d'exercice 5.3 :

Trouvons les limites suivantes en utilisant les développements limités :

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = ?$$

Posons $t = \frac{1}{x}$, alors $t \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow +\infty$. il vient que

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) &= e^t - \cos t = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) \\ &= t + t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} &= 1 - \sqrt{1 - t^2} = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) \\ &= \frac{t^2}{2} + o(t^2). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - \cos t}{1 - \sqrt{1 - t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + t^2 + o(t^2)}{\frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + t + o(t)}{\frac{t}{2} + o(t)} = +\infty. \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} =? \quad a, b \in \mathbb{R}^*.$$

On a

$$\cos(ax) = 1 - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \ln(\cos(ax)) = \ln\left(1 - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2)\right) = \ln(1 + u),$$

avec $u = -\frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Or le DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 nous donne

$$\begin{aligned} \ln(1 + u) &= u + o(u) \\ \Rightarrow \ln(\cos(ax)) &= -\frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \ln(\cos(bx)) = -\frac{b^2 x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{b^2 x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + o(1) = \left(\frac{a}{b}\right)^2. \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) = ?$$

Soit $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. On obtient donc

$$e^{\frac{1}{x}} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{x+1}} &= e^{\frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e^{t(\frac{1}{1+t})} \\
 &= e^{t(1-t+o(t))} = e^{t-t^2+o(t^2)} \\
 &= 1 + (t-t^2) + \frac{1}{2}(t-t^2)^2 + o(t^2) \\
 &= 1 + t - t^2 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \\
 &= 1 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).
 \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} e^t - e^{t(\frac{1}{1+t})} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 + o(t^2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
 \end{aligned}$$

En multipliant par x^2 on a finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 1$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x = ? a, b, c \in \mathbb{R}$$

Soit $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x &= \left(\frac{1}{3}(a^t + b^t + c^t) \right)^{\frac{1}{t}} \\
 &= e^{\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{3}(a^t + b^t + c^t)\right)}
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 a^t &= e^{t \ln(a)} = 1 + (\ln a)t + o(t) \\
 b^t &= e^{t \ln(b)} = 1 + (\ln b)t + o(t) \\
 c^t &= e^{t \ln(c)} = 1 + (\ln c)t + o(t)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(a^t + b^t + c^t) &= 1 + \left(\frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}\right)t + o(t) \\ &= 1 + t(\ln(\sqrt[3]{abc})) + o(t).\end{aligned}$$

Posons $u = t(\ln(\sqrt[3]{abc})) + o(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. On peut écrire donc

$$\ln\left(\frac{1}{3}(a^t + b^t + c^t)\right) = \ln(1 + u) = u + o(u) = t \ln(\sqrt[3]{abc}) + o(t).$$

Alors

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{3}(a^t + b^t + c^t)\right) = \ln \sqrt[3]{abc}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{3}(a^t + b^t + c^t)\right)} \\ &= e^{\ln \sqrt[3]{abc}} \\ &= \sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

Solution d'exercice 5.4 :

La formule de Taylor de la fonction $f(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2 + x + 3$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Calcul des dérivés :

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^4 - x^3 + 9x^2 + x + 3, & \implies & f(1) = 14, \\ f'(x) &= 8x^3 - 3x^2 + 18x + 1 & \implies & f'(1) = 24, \\ f''(x) &= 24x^2 - 6x + 18 & \implies & f''(1) = 36, \\ f^{(3)}(x) &= 48x - 6 & \implies & f^{(3)}(1) = 42, \text{ et} \\ f^{(4)}(x) &= 48 & \implies & f^{(4)}(1) = 48.\end{aligned}$$

On remplace dans la formule :

$$f(x) = 14 + 24(x-1) + \frac{36}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{48}{24}(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

D'où son développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 1 et

$$f(x) = 14 + 24(x-1) + 18(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + 2(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

Solution d'exercice 5.5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}$.

— On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x} \dots$

Il est clair (par récurrence immédiate) que $f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} = 2^k f(x)$.

Donc $f^{(k)}(0) = 2^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

— Écrivons la formule de Taylor-Young pour cette fonction à l'ordre n au voisinage d'un point x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + o((x-x_0)^n). \\ &= e^{2x_0} + 2e^{2x_0}(x-x_0) + \frac{4e^{2x_0}}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{8e^{2x_0}}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{2^n e^{2x_0}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

— Donnons le $DL_n(0)$. On remplace x_0 par 0 on obtient :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + x^n o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(2x)^k}{k!} + o(x^n).$$

Solution d'exercice 5.6 :

1. Déterminons le $DL_4(0)$ de la fonction $f(x)$ par deux méthodes, formule de Taylor-Young ou bien par le DL de l'exponentielle :

Il est clair que $f^{(k)}(x) = (-3)^k e^{-3x}$, donc $f^{(k)}(0) = (-3)^k$, d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 3x + \frac{(-3)^2}{2}x^2 + \frac{(-3)^3}{6}x^3 + \frac{(-3)^4}{24}x^4 + x^4 o(x^4). \\ &= 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{-9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4 o(x^4). \end{aligned}$$

Ou (deuxième méthode)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (-3x) + \frac{1}{2}(-3x)^2 + \frac{1}{6}(-3x)^3 + \frac{1}{24}(-3x)^4 + (-3x)^4 o((-3x)^4). \\ &= 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{-9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4 o(x^4). \end{aligned}$$

2. $g(x) = \sin(2x)$, là aussi on peut appliquer les deux méthodes.

Par Taylor-Young, on a $\sin'(x) = \cos(x)$, $\sin''(x) = -\sin(x)$, $\sin^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $\sin^{(4)}(x) = \sin(x) \dots$

Donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cos(2x), & g''(x) &= -4 \sin(2x), & g^{(3)}(x) &= -8 \cos(2x), \\ g^{(4)}(x) &= 16 \sin(2x) \text{ et} & g^{(5)}(x) &= 32 \cos(2x). \end{aligned}$$

Donc

$$g'(0) = 2, g''(0) = 0, g^{(3)}(0) = -8, g^{(4)}(0) = 0 \text{ et } g^{(5)}(0) = 32.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2x - \frac{8}{6}x^3 + \frac{32}{120}x^5 + o(x^5), \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Ou autre méthode :

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o((2x)^5), \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

3. $h(x) = \ln(1 - x^3)$. Déterminons le $DL_6(0)$:

Dans cet exemple, il est préférable de composer les développements limités pour éviter d'obtenir des calculs épouvantables en utilisant la formule de Taylor-Young.

Posons $-x^3 = u$, on obtient

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(1 - x^3) = \ln(1 + u) \\ &= u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= (-x^3) - \frac{(-x^3)^2}{2} + o((-x^3)^2) \\ &= -x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6). \end{aligned}$$

4. $i(x) = \sqrt{1 - x}$. Déterminons le $DL_3(0)$:

Posons $u = -x$, la fonction devient donc $\sqrt{1 + u}$. Or on a vu en cours que

$$\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3).$$

Donc

$$i(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Solution d'exercice 5.7 :

1. On connaît le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre n en 0.

$$(1+x)^\alpha = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $n = 3$, la formule donne :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

2. En **composant** par $x \mapsto -x^2$ dans le développement précédent on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6).$$

3. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, nulle en 0. Il suffit de prendre **la primitive** du développement précédent, avec un terme constant nul.

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7).$$

4. En **multipliant** par x le développement obtenu dans la question 2 on a :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{16}x^7 + o(x^7).$$

5. Il s'agit de **composer** le développement de **tangente** (donnée en fonction de a, b, c, d), avec celui de la question 3. On ne prend pas en compte les termes de degré ≥ 7 .

$$\begin{aligned} \tan(\arcsin(x)) &= a \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} \right) + b \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} \right)^3 \\ &\quad + c \left(x + \frac{x^3}{6} \right)^5 + d(x)^7 + o(x^7). \\ &= ax + \left(\frac{a}{6} + b \right) x^3 + \left(\frac{3a}{40} + \frac{b}{2} + c \right) x^5 \\ &\quad + \left(\frac{5a}{112} + \frac{37b}{120} + \frac{5c}{6} + d \right) x^7 + o(x^7). \end{aligned}$$

6. Par **unicité** du développement limité, les coefficients des polynômes de Taylor

écrits aux questions 4 et 5 doivent être les mêmes. Il vient que

$$\begin{cases} a & = 1 \\ \frac{a}{6} + b & = \frac{1}{2} \\ \frac{3a}{40} + \frac{b}{2} + c & = \frac{3}{8} \\ \frac{5a}{112} + \frac{37b}{120} + \frac{5c}{6} + d & = \frac{5}{16}. \end{cases}$$

On en tire successivement :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ c = \frac{3}{8} - \frac{3}{40} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15} \\ d = \frac{5}{16} - \frac{5}{112} - \frac{37}{360} - \frac{1}{9} = \frac{17}{315}. \end{cases}$$

7. On utilise le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)}$ à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

que l'on compose avec $x \mapsto -x^2$, pour avoir :

$$\frac{1}{(1+x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6).$$

8. La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est la **primitive** de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)}$, nulle en 0. Il suffit de prendre la primitive du développement précédent avec un terme constant nul :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7).$$

9. Par **composition** :

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 \\ &\quad - \frac{2}{15} \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^7), \\ &= x + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) x^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\right) x^5 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{17}{315}\right) x^7 + o(x^7), \\ &= x + o(x^7). \end{aligned}$$

Solution d'exercice 5.8 :

1. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^x$ est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Par **composition** on en déduit :

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2), \text{ et } e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2).$$

D'autre part le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sin(x)$ est donné par :

$$\sin(x) = x + o(x^2).$$

Par **combinaison linéaire** on a

$$e^{3x} - e^{2x} - \sin(x) = \frac{5x^2}{2} + o(x^2).$$

2. Par application de la formule donnant le développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha = 1/2$, on obtient

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Par composition, on en déduit

$$\sqrt{1+3x} = 1 + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{8} + o(x^2) \text{ et } \sqrt{1+2x} = 1 + \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} + o(x^2).$$

Par combinaison linéaire on obtient

$$\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2} = -\frac{5x^2}{8} + o(x^2).$$

3. Le **quotient** des deux développements limités des questions précédentes donne

$$\frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2}} = \frac{\frac{5x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{5x^2}{8} + o(x^2)} = -4 + o(1).$$

On conclut donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2}} = -4.$$

Bibliographie

- [1] Deschamps Claude et André Warusfel. *Mathématiques TOUT-EN-UN, 1re année, Cours et exercices corrigés*. DUNOD, deuxième édition, Paris 2003.
- [2] Marco Jean-Pierre et Lazzareni Laurent . *Mathématiques L1, Cours complets avec 1000 tests et exercices corrigés*. Pearson Education France, Paris, 2007.
- [3] Leroyer Yves et Tesson Patrice . *Mathématiques Pour L'ingénieur, Rappels de cours, Méthodes, Exercices et problèmes avec corrigés détaillés*. DUNOD, Paris, 2009.
- [4] Aebischer Bruno . *Introduction à l'analyse, Licence 1 Mathématiques, Cours et exercices corrigés*. Vuibert, Paris 2011.
- [5] Bouasse Henri . *Cours de Mathématiques Générales*. Vuibert, Paris 2011.



FACULTÉ DES SCIENCES

Faculty of Sciences

كلية العلوم



Faculté des Sciences – Tidjani HADDAM

Tél.: 043 21 63 70 / Tél & Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71

Site Web: www.fs.univ-tlemcen.dz

Email: vdrpg.facscience@gmail.com