Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد

Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : Équations aux dérivées partielles et applications.

Thème

Sur quelques problèmes elliptiques de type Kirchhoff

Soutenu le 25 septembre 2018 par

M. Abdellah Taibi

Devant le Jury composé de :

M. Mohamed Derhab	Pr.	Université de Tlemcen	Président
M. Mekki Houbad	M.C.B	Université de Tlemcen	Examinateur
M. Bachir Messirdi	M.C.B	Université de Tlemcen	Examinateur
M. Ahmed Bensedik	M.C.B	Université de Tlemcen	Encadrant

Année universitaire : 2017 – 2018

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Tout d'abord, le louange à Allah pour tous ses bienfaits innombrables.

En premier lieu je voudrais adresser toute ma gratitude au directeur de ce mémoire, M. Ahmed Bensedik pour sa patience, sa disponibilité et pour le soutien d'accompagnement qu'il m'a accordé. Je suis très reconnaissant de l'aide et de l'orientation qu'il m'a apportées et de ces cours donnés en graduation.

Je tiens à remercier, également, Mr. Mohamed Derhab pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à M. Mekki Houbad et M. Bachir Messirdi pour l'honneur d'avoir accepté d'examiner ce travail et surtout pour ces cours donnés en graduation.

Enfin un grand merci aux deux personnes les plus chères pour moi, ma mère et mon père, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et financier, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais faire et par conséquent ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Dans les dernières années, beaucoup d'attention a été accordée aux problèmes non locaux puisqu'ils apparaissent dans des phénomènes physiques comme la théorie de l'élasticité non linéaire, la biologie, la diffusion de la chaleur,... . Parmi ce genre de problèmes, on trouve les problèmes de type Kirchhoff [1], qui se connaissent par la présence du terme : $M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u$.

Le but de ce mémoire, basé essentiellement sur les articles [1], [5] et [10], est l'étude mathématique de quelques équations aux dérivées partielles elliptiques de type Kirchhoff. Ce mémoire comporte trois chapitres :

Chapitre 1 :
Rappel de quelques notions sur les espaces de Sobolev et les méthodes de résolution, ainsi que des théorèmes et propositions utiles pour la suite.

Chapitre 2 :
Étude de l'existence, l'unicité ou la positivité de solution pour trois problèmes de type Kirchhoff.

Chapitre 3 :
Étude de l'existence d'une solution positive pour un problème de type Kirchhoff avec un terme singulier.

1. Gustav Robert Kirchhoff (né le 12 mars 1824 à Königsberg, en Prusse Orientale et décédé à Berlin le 17 octobre 1887) est l'un des plus grands physiciens du XIX^e siècle, avec des contributions essentielles à l'électrodynamique, la physique du rayonnement et la théorie mathématique de l'élasticité.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Sobolev

Définition 1.1
Soit $\Omega \subset R^N$ *un ouvert,* $m \in N^*, p \in R$ *avec* $1 \leq p \leq \infty, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ *avec* α_i *entier positif et* $i = 1, 2, ..., N$*, on pose* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ *et*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}} \phi$$

L'espace de Sobolev[1] $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ telque :} \\ \\ \qquad\qquad \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Définition 1.2
L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ *est l'adhérence de* $C_0^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$ *i.e :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\|_{W^{m,p}}}.$$

Remarque 1.1
On note souvent : $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ *et* $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

1. Sergueï Lvovitch Sobolev (6 octobre 1908 - 3 janvier 1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique.

Théorème 1.1 *(**Rellich-Kondrachov**[2])[2]*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. Alors on a les injections compactes suivantes :
si $p < N$; $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ où $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
si $p = N$; $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.
si $p > N$; $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Théorème 1.2 *[2]*
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de :

- *Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*
- *séparable pour $1 \leq p < +\infty$.*
- *réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Proposition 1.1 *(**Inégalité de Poincaré**[3])[2]*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, alors il existe $C(\Omega) > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2} \ , \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Une conséquence très importante de cette inégalité est que ;
$\|u\| = \|\nabla u\|_{L^2}$ est une norme pour $H_0^1(\Omega)$.

1.2 Formules de Green :

Théorème 1.3
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. Alors si $u, \phi \in H^1(\Omega)$ on a la formule de Green[4] suivante :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u\phi\eta_i \, ds \quad \forall \, i = 1, ..., N$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)^T$ est la normale extérieure à Ω.
Cette formule est la généralisation de l'intégration par parties dans $\mathbb{R}^N$.

---

2. Franz Rellich (September 14, 1906 – September 25, 1955) était un mathématicien Allemand-Australien. Il a beaucoup contribué en physique mathématique, en particulier en mécanique quantique et théorie des équations aux dérivées partielles.

3. Jules Henri Poincaré est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français, né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris.

4. George Green (juillet 1793 - 31 mai 1841) est un physicien britannique. Il est l'auteur d'un essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme paru en 1828. Cet essai introduit plusieurs concepts importants, parmi lesquels un théorème similaire au théorème de Green, une idée des fonctions potentielles telles qu'elles sont maintenant utilisées en physique et l'idée de ce qui est maintenant appelé les fonctions de Green.

Corollaire 1.1
Soit $u \in H^2(\Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$ alors

$$-\int_\Omega \Delta u \, \phi \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi \, ds$$

avec $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \langle \nabla u, \eta \rangle$.

1.3 Notion de solutions :

La résolution des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles mène à plusieurs types de solutions, on cite par exemple : solutions classiques dites parfois fortes, solutions faibles, solutions entropiques ... .
On s'intéresse ici aux solutions faibles qui vérifient l'équation au sens des distributions.

Exemple 1.1
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) \qquad \text{dans } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $\phi \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on aura :

$$-\int_\Omega \Delta u \, \phi \, dx = \int_\Omega g(x,u)\phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

en utilisant la formule de Green on trouve :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega g(x,u)\phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

cette écriture s'appelle ***la formulation variationnelle*** *du problème, et sa solution est la solution faible du problème (1.1).*
Dans ce qui suit on appelle tout simplement "solution" au lieu de "solution faible".

Après avoir défini la notion de solutions, citons quelques méthodes de résolution utilisées dans ce travail.

1.4 Méthode variationnelle

Soit E un espace de Banach, $V \subset E$ un ouvert et $J : E \longrightarrow R$ une fonctionnelle de classe C^1.

Définition 1.3 *[7]*

- *On dit que $u \in V$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
  Si u n'est pas un point critique, il est dit un point régulier de J.
- *Si $u \in V$ est un point critique de J alors le réel c vérifiant $J(u) = c$ est dit valeur critique de J sinon c est une valeur régulière.*
- *Une suite $(u_n) \subset E$ est une suite de Palais-Smale[5] pour J si :*

$$|J(u_n)| \leq c \quad et \quad \|J'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0$$

- *On dit que la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale, si de toute suite de Palais-Smale on peut extraire une sous-suite convergente.*

Expliquons la méthode variationnelle par l'exemple suivant :

Exemple 1.2
Considérons le problème (1.1).
Une solution de ce problème est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega g(x,u)\phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

posons

$$J'(u)(\phi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_\Omega g(x,u)\phi \, dx$$

donc

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega G(x,u) \, dx$$

avec $G(x,u) = \int_0^u g(x,t)\, dt$.
*J est dite **la fonctionnelle d'énergie**.*

5. Richard Sheldon Palais (né le 22 Mai 1931) est un mathématicien spécialisé en géométrie. Stephen Smale (né le 15 juillet 1930 à Flint, Michigan) est un mathématicien américain, lauréat de la médaille Fields en 1966, récompensé pour ses remarquables travaux en topologie différentielle.

La méthode variationnelle consiste alors à chercher un point critique de la fonctionnelle d'énergie, qui sera une solution de la formulation variationnelle grâce à la proposition suivante :

Proposition 1.2 *[3]*
Si $J : E \longrightarrow R$ admet un minimum relatif au point $u \in V$, et si J est différentiable au point u, alors u est un point critique de J.

Preuve 1.1
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on observe que s'il y a un minimum, la dérivée à droite $J'_d(u) \geq 0$, et la dérivée à gauche $J'_g(u) \leq 0$. Comme par hypothèse J admet une dérivée au point u, on a $J'(u) = J'_d(u) = J'_g(u)$, d'où $J'(u) = 0$.

Dans le cas d'un ouvert $V \subset E$, on choisit arbitrairement un élément $h \in E$; considérons la fonction $f(t) = J(u + th)$ de la variable réelle t, définie pour $|t| < \epsilon$ assez petit. Alors f admet un minimum relatif pour $t = 0$, donc $f'(0) = 0$; or $f'(t) = J'(u + th)h$, donc $J'(u)h = 0$. Ceci est vrai pour tout vecteur $h \in E$, on conclut que l'application linéaire $J'(u) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est nulle.

Théorème 1.4 ***(Théorème du col)****[7]*
Supposons que la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale, et que :

- $J(0) = 0$,
- *il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$,*
- *il existe $u_0 \in E$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.*

Alors J admet une valeur critique c telle que $c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\mathcal{B} = \{\varphi \in C([0,1], X);\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\}$$

et

$$c = \inf_{\varphi \in \mathcal{B}} \max_{t \in (0,1)} J(\varphi(t)).$$

Alors c est une valeur critique de J.

Théorème 1.5 ***(Multiplicateurs de Lagrange[6])*** *[7]*
Soient $J_1, J_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctionnelles de classe $C^1(E)$ et D l'ensemble des contraintes donné par $D = \{u \in E : J_2(u) = 0\}$.
On suppose que $J'_2(u) \neq 0$. Alors s'il existe $u_0 \in D$ tel que $J_1(u_0) = \min_{u \in D} J_1(u)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J'_1(u_0) = \lambda J'_2(u_0)$.

6. Joseph-Louis Lagrange, né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français.

1.5 Méthode de Galarkin

Soit V un espace de dimension infinie sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles, et soit $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ une suite croissante de sous-espaces V_i de dimension i. L'idée de la méthode de Galarkin [7] est de résoudre le problème d'abord dans V_i, qui est de dimension fini, et après on passe à la limite en faisant tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour obtenir une solution du problème de départ.
La proposition suivante est utile dans cette méthode :

Théorème 1.6 ***(Point fixe de Brouwer*** [8]*)*
Toute application continue d'un compact de $\mathbb{R}^N$ dans lui même admet un point fixe.

Proposition 1.3 *[8]*
Soit $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application continue telle que $\langle F(v), v\rangle \geq 0$ pour $|v| = r$, où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$ et $|.|$ est sa norme correspondante. Alors il existe $v_0 \in \overline{B}_r(0)$ tel que $F(v_0) = 0$.

Preuve 1.2
Supposons que $F(v) \neq 0$ dans $\overline{B}_r(0)$, et considérons l'application continue :

$$g : \begin{array}{ccc} \overline{B}_r(0) & \longrightarrow & \overline{B}_r(0) \\ v & \longmapsto & -F(v)\dfrac{r}{|F(v)|} \end{array}.$$

D'après le théorème précédent, il existe $v \in \overline{B}_r(0)$ tel que $v = -F(v)\dfrac{r}{|F(v)|}$, d'où $|v| = r$.
Prenons maintenant le produit scalaire :

$$\langle v, v\rangle = -\frac{r}{|F(v)|}\langle F(v), v\rangle \Longrightarrow \langle F(v), v\rangle = -r|F(v)| < 0$$

or $\langle F(v), v\rangle \geq 0$, contradiction, ainsi il existe $v_0 \in \overline{B}_r(0)$ tel que $F(v_0) = 0$.

7. Boris Grigorievitch Galerkin, né le 4 mars 1871 à Polotsk (Empire russe, aujourd'hui en Biélorussie) et mort le 12 juillet 1945 à Leningrad, est un mathématicien et un ingénieur russe puis soviétique, réputé pour ses contributions à l'étude des treillis de poutres et des plaques élastiques. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques, qui est l'une des bases de la méthode des éléments finis.
8. Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) est un mathématicien néerlandais.

1.6 Principes de maximum

Théorème 1.7
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de classe C^1 et $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u & \geq 0 \qquad dans \;\; \Omega \\ \quad u & \geq 0 \qquad sur \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$, et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) > 0$ alors $u > 0$ dans Ω.

Corollaire 1.2 ***(Principe de comparaison)***
Soient $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 & \geq -\Delta u_2 \qquad dans \;\; \Omega \\ \quad u_1 & \geq u_2 \qquad sur \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u_1 \geq u_2$ dans $\overline{\Omega}$, et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u_1(x_0) > u_2(x_0)$ alors $u_1 > u_2$ dans Ω.

1.7 Valeurs propres et fonctions propres du laplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u & = \lambda u \qquad dans \;\; \Omega \\ \quad u & = 0 \qquad sur \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 1.8 *[6]*

- *Les valeurs propres de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ sont réelles.*
- *Ces valeurs propres constitue une suite croissante,*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...,$$

et

$$\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

- *Il existe une base orthonormale $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$, avec $\psi_k \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre associée à λ_k i.e*

$$-\Delta \psi_k = \lambda \psi_k \qquad dans \;\; \Omega.$$

Remarque 1.2
Par la théorie de régularité, $\psi_k \in C^\infty(\Omega)$ *(et* $\psi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *si* Ω *est de classe* C^1*), pour* $k = 1, 2, \ldots$ *.*

Proposition 1.4 ***(Inégalité de Hardy[9]-Sobolev)***
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$*, alors* $\frac{u}{\psi_1^\lambda} \in L^q(\Omega)$*, où* $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda)}{N}$*,* $0 \le \lambda \le 1$*, et il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\|\frac{u}{\psi_1^\lambda}\|_{L^q} \le C\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \textit{pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

9. Godfrey Harold Hardy (7 février 1877 – 1 décembre 1947) est un mathématicien britannique de premier plan, lauréat de la Médaille Sylvester en 1940 et de la médaille Copley en 1947, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en analyse.

Chapitre 2

Existence et unicité de solutions pour quelques problèmes de type Kirchhoff

Ce chapitre est consacré à l'étude de trois problèmes. L'existence et l'unicité de solutions pour les deux premiers sont liées à celles d'une équation algébrique, déterminée à partir de problèmes intermédiaires. Par contre, l'existence de solutions pour le troisième problème, qui est sous-critique, repose sur le théorème du col concernant la méthode variationnelle.

2.1 Premier problème

Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = f, \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de classe C^1, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$M(t) \geq m_0 > 0 \quad \textit{pour tout } t \geq 0 \tag{2.2}$$

et $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

Théorème 2.1
Supposons que f est une fonction non nulle de $L^2(\Omega)$; alors le problème (2.1) admet autant de solutions que l'équation :

$$M(t)t^{1/2} = \|w\| \tag{2.3}$$

où $t > 0$ est l'inconnue et w est l'unique solution de :

$$-\Delta w = f \quad \textit{dans } H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

En particulier, si M est continue et positive et la fonction

$$t \longmapsto M(t)t^{1/2} \quad \textit{est strictement croissante pour } t > 0, \tag{2.5}$$

alors le problème (2.1) admet une solution unique.

Remarque 2.1
*Le problème (2.4) admet une solution unique grâce au théorème de **Lax-Milgram**[1].*

Preuve 2.1
Soit u une solution de (2.1) ; alors $w = M(\|u\|^2)u$ résout (2.4) et $\|w\|= M(\|u\|^2)\|u\|$. Cela montre que $t = \|u\|^2$ est une solution (2.3) .
Réciproquement ; soit t une solution de (2.3), et posons $u = t^{1/2}\dfrac{w}{\|w\|}$ alors $\|u\|^2= t$ et d'après (2.3) :

$$M(t)t^{1/2} = M(\|u\|^2)\|u\|= \|w\|,$$

donc

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = -\frac{\|w\|}{\|u\|}\Delta(\|u\|\frac{w}{\|w\|}) = -\Delta w = f,$$

alors u est une solution de (2.1).
Maintenant si M est continue et positive, et la condition (2.5) est vérifiée, on aura :

$$\lim_{t\to 0} M(t)t^{1/2} - \|w\|= -\|w\| \ , \ \lim_{t\to +\infty} M(t)t^{1/2} - \|w\|= +\infty$$

et comme la fonction $t \longmapsto M(t)t^{1/2} - \|w\|$ est strictement croissante, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires (2.4) admet une solution unique, en conséquence (2.1) admet une solution unique.

1. Peter Lax, né le 1er mai 1926 à Budapest, est un mathématicien hongrois de nationalité américaine. Le prix Abel 2005 lui a été décerné.
Arthur Norton Milgram (3 juin 1912, Philadelphie – 30 janvier 1961 (à 48 ans)) est un mathématicien américain

Corollaire 2.1
Supposons que M est continue dans $[t_0, +\infty[$,où

$$t_0 = \begin{cases} 0 & si\ M\ est\ positive\ dans\ ]0, +\infty[. \\ sup\{t > 0 | M(t) = 0\} & sinon. \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors si $M(t) \geq m_0 > 0$ pour t assez grand, le problème (2.1) admet au moins une solution pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

Preuve 2.2
Posons $h(t) = M(t)t^{1/2} - \|w\|$
on a :

- $\lim\limits_{t \to t_0^+} M(t)t^{1/2} = 0$ *car :*
  si $M > 0$ dans $]0, +\infty[$ alors $t_0 = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to t_0^+} = M(t_0)0 = 0$,
  sinon $\lim\limits_{t \to t_0^+} M(t)t^{1/2} = 0t_0^{1/2} = 0$.
- $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t)t^{1/2} \geq m_0 \lim\limits_{t \to +\infty} t^{1/2} = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = -\|w\| < 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$, et comme h est continue sur $[t_0, +\infty[$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, (2.3) admet au moins une solution. En conséquence le problème (2.1) admet au moins une solution pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

Corollaire 2.2
Supposons qu'il existe $\theta > t_0$ (t_0 défini par (2.6)) tel que :

$$\lim_{t \to \theta^-} M(t) = +\infty. \tag{2.7}$$

Alors si $M \in (C[t_0, \theta[)$, le problème (2.1) admet au moins une solution pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

Preuve 2.3
Similaire à la précédente ; il suffit de remarquer que $\lim\limits_{t \to \theta^-} M(t)t^{1/2} = +\infty$.

2.2 Deuxième problème

Considérons le problème suivant :

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = u^p \quad dans\ \Omega, u = 0 \quad sur\ \partial\Omega \tag{2.8}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de classe C^1, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Théorème 2.2
Supposons que $p \in]0,1[\cup]1, \frac{N+2}{N-2}[$ si $N \geq 3$, et $1 < p < \infty$ si $N = 1, 2$. Alors le problème (2.8) admet au moins autant de solutions positives que l'équation :

$$M(t)t^{(1-p)/2} = \|w\|^{1-p} \tag{2.9}$$

où $t > 0$ est l'inconnue et w est une solution positive de :

$$-\Delta w = w^p \quad dans\ \Omega, w = 0 \quad sur\ \partial\Omega. \tag{2.10}$$

Lemme 2.1
Le problème (2.10) admet une solution positive.

Preuve 2.4 *Le problème (2.10) s'écrit généralement*

$$-\Delta w = |w|^{p-1}w \quad dans\ \Omega, w = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \tag{2.11}$$

et si w est positive on écrit

$$-\Delta w = w^p \quad dans\ \Omega, w = 0 \quad sur\ \partial\Omega.$$

Une solution du problème (2.11) est une fonction $w \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi \, dx = \int_\Omega |w|^{p-1} w\phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.12}$$

On pose

$$J'(w)(\phi) = \int_\Omega \nabla w \nabla \phi \, dx - \int_\Omega |w|^{p-1} w\phi \, dx.$$

Une solution du problème (2.12) est alors un point critique de la fonctionnelle d'énergie J définie par :

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |w|^{p+1} \, dx.$$

Soit $w_0 \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ *et* $t>0$ *alors* $tw_0 \in H_0^1(\Omega)$ *et on a*

$$\begin{aligned} J(tw_0) &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla w_0|^2\,dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |w_0|^{p+1}\,dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|w_0\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\|w_0\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq \frac{t^2}{2}\|w_0\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}C(\Omega)\|w_0\|^{p+1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty, \end{aligned}$$

car $p+1>2$, *donc la fonctionnelle d'énergie ne peut pas être minorée dans l'espace* $H_0^1(\Omega)$. *Essayons d'appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange.*
Posons,

$$J_1(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \qquad et \qquad J_2(w) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |w|^{p+1}\,dx.$$

Prenons pour ensemble des contraintes $D = \{w \in H_0^1(\Omega) : J_2(w) = 1\}$.
Comme $J_1(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 > 0 \quad \forall w \in D$ *alors* $\beta = \inf\limits_{w\in D} J_1(w)$ *existe.*
Soit $(w_n) \subset D$ *une suite minimisante de* J_1 *sur D, i.e* $J_1(w_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$,
ce qui implique que (w_n) *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$ *; alors il existe une sous-suite encore notée* (w_n) *vérifiant :*

- $w_n \rightharpoonup \overline{w}$ *dans* $H_0^1(\Omega)$,
- $w_n \longrightarrow \overline{w}$ *dans* $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$,
- $w_n \longrightarrow \overline{w}$ *p.p dans* Ω.

$\overline{w} \in D$. *En effet, car* $(w_n) \subset D \implies J_2(w_n) = 1 = \frac{1}{p+1}\|w_n\|_{p+1}^{p+1}$, *et par passage à la limite on trouve* $\frac{1}{p+1}\|\overline{w}\|_{p+1}^{p+1} = 1$ *i.e.* $J_2(\overline{w}) = 1$.
Il est évident que $J_1(\overline{w}) \geq \beta$. *Reste à montrer* $J_1(\overline{w}) \leq \beta$. *On a*

$$\begin{aligned} J_1(\overline{w}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{w}|^2\,dx \\ &\leq \varliminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^2\,dx \\ &= \varliminf_{n\to+\infty} J_1(w_n) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} J_1(w_n) = \beta. \end{aligned}$$

Donc $J_1(\overline{w}) = \beta = \min\limits_{w\in D} J_1(w)$.
D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange ; il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$J_1'(\overline{w}) = \lambda J_2'(\overline{w}).$$

Posons maintenant $w = c\overline{w}$ *avec* $c \in \mathbb{R}^*$*, et déterminons* c *pour que* w *soit une solution de (2.12). On a*

$$-\Delta w = |w|^{p-1}w \Longleftrightarrow -c\Delta\overline{w} = |c|^{p-1}c|\overline{w}|^{p-1}\overline{w},$$

or $-c\Delta\overline{w} = c\lambda|\overline{w}|^{p-1}\overline{w}$*, d'où* $c\lambda|\overline{w}|^{p-1}\overline{w} = |c|^{p-1}c|\overline{w}|^{p-1}\overline{w}$ *et par suite* $\lambda = |c|^{p-1}$*.*
Montrons que $c \neq 0$*. On a*

$$\int_\Omega \nabla\overline{w}\nabla\phi \, dx = \lambda \int_\Omega |\overline{w}|^{p-1}\overline{w}\phi \, dx \qquad \forall\phi \in H_0^1,$$

pour $\phi = \overline{w}$ *on trouve*

$$\int_\Omega |\nabla\overline{w}|^2 \, dx = \lambda \int_\Omega |\overline{w}|^{p+1} \, dx = \lambda(p+1)$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla\overline{w}|^2}{p+1} > 0 \Longrightarrow c \neq 0.$$

Donc le problème (2.8) admet une solution.
Remarquons que la preuve reste vraie si on prend $|\overline{w}|$ *au lieu de* $\overline{w}$*.*
Conclusion : le problème (2.8) admet une solution positive.

Passons à présent à la preuve du Théorème (2.2).

Preuve 2.5
Soit t *une solution de (2.9) et posons* $\gamma = t^{1/2}\|w\|^{-1}$*, on voit que* γw *satisfait :*

$$M(\|\gamma w\|^2) = M(t) = \gamma^{p-1}.$$

En prenant $u = \gamma w > 0$ *on vérifie aisément que :*

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = -M(\|\gamma w\|^2)\gamma\Delta w = u^p.$$

Donc u *est une solution de (2.8).*

Corollaire 2.3
On suppose que les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites avec M *continue dans* $[0, +\infty[$ *; alors si :*

$$p < 1 \; et \; \lim_{t\to\theta^-} M(t)t^{(1-p)/2} = +\infty \tag{2.13}$$

ou

$$p > 1, \; M(0) > 0 \; et \; \lim_{t\to+\infty} M(t)t^{(1-p)/2} = 0 \tag{2.14}$$

le problème (2.8) admet au moins une solution positive.

Preuve 2.6
Supposons que $p < 1$*, et soit* t_0 *défini par (2.6) ; alors ;*
$\lim_{t \to t_0} M(t)t^{(1-p)/2} = M(t_0)t_0^{(1-p)/2}$

$$= \begin{cases} M(0).0 & \textit{si } M \textit{ est strictemen positive dans }]0,+\infty[, \\ 0.t_0^{(1-p)/2} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Donc $\lim_{t \to t_0} M(t)t^{(1-p)/2} = 0$*. De plus on a* $\lim_{t \to +\infty} M(t)t^{(1-p)/2} = +\infty$*.*
Supposons maintenant que $p > 1$ *et* $M(0) > 0$ *; alors ;*

$$\lim_{t \to 0^+} M(t)t^{(1-p)/2} = M(0)(0^+)^{(1-p)/2} = +\infty$$

et on a $\lim_{t \to +\infty} M(t)t^{(1-p)/2} = 0$*.*
Dans les deux cas la fonction $t \longmapsto M(t)t^{(1-p)/2} - \|w\|^{1-p}$ *vérifie les conditions du théorème des valeurs intermédiaires, donc le problème (2.8) admet au moins une solution positive.*

2.3 Troisième problème

On s'intéresse maintenant au problème suivant :

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) \quad dans\ \Omega, u = 0 \quad sur\ \partial\Omega \tag{2.15}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de classe C^1, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.
On suppose que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition suivante :

$$|f(x,s)| \leq C(1+|s|^p) \quad \forall x \in \Omega\ \forall s \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

où $C > 0, 1 < p < (N+2)/(N-2)$ *si* $N \geq 3$ *et* $1 < p < +\infty$ *si* $N \leq 2$.
Les solutions de ce problème sont exactement les points critiques de la fonctionnelle $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx$$

avec $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ et $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$.
Notons que I est de classe C^1.

Lemme 2.2
Supposons que les conditions (2.2) et (2.16) sont vérifiées. Alors toute suite bornée de Palais-Smale de I admet une sous-suite convergente.

Preuve 2.7
Soit (u_n) *une suite bornée de Palais-Smale de I. Alors il existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que,*

$$u_n \rightharpoonup u \quad dans\ H_0^1(\Omega).$$

On a

$$\begin{aligned} |\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\ dx| &\leq \int_\Omega |f(x,u_n)||(u_n-u)|\ dx \\ &\leq C\int_\Omega (1+|u_n|^p)|u_n-u|\ dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on écrit

$$\int_\Omega |u_n|^p|u_n-u|\ dx \leq (\int_\Omega |u_n|^{p+1}\ dx)^{\frac{p}{p+1}}(\int_\Omega |u_n-u|^{p+1}\ dx)^{\frac{1}{p+1}},$$

ainsi

$$|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\ dx| \leq C(\|u_n-u\|_{L^1}+\|u_n\|^p_{L^{p+1}}\|u_n-u\|_{L^{p+1}}).$$

D'après le théorème de Rellich-Kondrachov, les injections $H_0^1(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ *sont compactes* ($car\ 2 < p+1 < 2^*$), *on en déduit que*

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\, dx \longrightarrow 0.$$

D'autre part

$$I'(u_n)(u_n - u) = M(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx - \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\, dx \longrightarrow 0$$

D'où, puisque $M(\|u_n\|^2) \geq m_0 > 0$ *alors*

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx = \|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle \longrightarrow 0,$$

donc

$$\|u_n\|^2 \longrightarrow \|u\|^2.$$

On conclut que

$$u_n \longrightarrow u \quad dans\ H_0^1(\Omega).$$

Théorème 2.3
Supposons que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *est localement lipschitzienne et satisfait (2.16). Supposons aussi que*

$$f(x,t) = o(t) \quad (quand\ t \longrightarrow 0), \tag{2.17}$$

et qu'il existe $\mu > 2$ *et* $R > 0$ *tels que,*

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad pour\ tout\ |t| > R. \tag{2.18}$$

Alors si M *satisfait (2.2) et*

$$\widehat{M}(t) \geq M(t)t, \quad pour\ tout\ t \geq 0, \tag{2.19}$$

le problème (2.15) admet une solution positive.

Remarque 2.2
La fonction M *est décroissante. En effet, si* M *est strictement croissante alors*

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds < \int_0^t M(t) ds = M(t)t \quad pour\ tout\ t > 0$$

ce qui contredit (2.19).

Preuve 2.8
La fonctionnelle I *admet un point critique si elle vérifie les conditions du théorème du col.*

1. $I(0) = 0$, évident.
2. Il existe $\rho, r > 0$, tels que $I(u) \geq \rho$ si $\|u\| = r$.
D'après les conditions (2.19) et (2.2) on a

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}M(\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \end{aligned}$$

Majoration de $F(x,u)$.
La condition (2.17) implique que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |t| \leq \eta \implies |f(x,t)| \leq \epsilon |t|.$$

Ainsi pour $|u| \leq \eta$, on a

$$|F(x,u)| = |\int_0^u f(x,t)\ dt| \leq \epsilon \int_0^u |t|\ dt \leq \frac{\epsilon}{2}|u|^2,$$

et par la condition (2.16),

$$\exists C_\eta = C(\eta) > 0, |u| \geq \eta \implies |F(x,u)| \leq C_\eta |u|^{p+1}.$$

En combinant ces deux majorations, on a

$$\forall x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R} \quad |F(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + C_\eta |u|^{p+1}.$$

Donc

$$I(u) \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \int_\Omega (\frac{\epsilon}{2}|u|^2 + C_\eta |u|^{p+1})dx.$$

Par les inégalités de Hölder et Poincaré on obtient

$$I(u) \geq (\frac{1}{2}m_0 - \epsilon C_2)\|u\|^2 - C_1\|u\|^{p+1}.$$

En étudiant le signe de l'expression $(\frac{1}{2}m_0 - \epsilon C_2)t^2 - C_1 t^{p+1}$ pour $t \geq 0$, on en déduit que $I(u) \geq \rho > 0$ pour $0 < \|u\| = r < (\frac{\frac{1}{2}m_0 - \epsilon C_2}{C_1})^{\frac{1}{p-1}}$.
3. Montrons qu'il existe $e \in H_0^1(\Omega)$, tel que $\|e\| > r$ et $I(e) \leq 0$.
Soit ϕ_1 la fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de l'opérateur $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ avec $\|\phi_1\| = 1$.

$$I(t\phi_1) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\phi_1\|^2) - \int_\Omega F(x, t\phi_1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \int_\Omega F(x, t\phi_1)dx.$$

D'après le théorème des accroissement finis, il existe $\theta \in]0, t^2[$ *tel que :*

$$\widehat{M}(t^2) = t^2 M(\theta),$$

et de la condition (2.18) on a :

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t \quad \textit{pour tout } t > R+1,$$

donc :

$$\int_{R+1}^{u} \frac{\mu}{t}dt \leq \int_{R+1}^{u} \frac{f(x,t)}{F(x,t)}dt \implies F(x,u) \geq (R+1)^{-\mu}F(x,R+1)u^\mu \quad \forall u > R+1.$$

On en déduit que

$$I(t\phi_1) \leq \frac{1}{2}M(0)t^2 - t^\mu(R+1)^{-\mu}\int_\Omega F(x,R+1)\phi_1^\mu dx,$$

en faisant tendre t *vers* $+\infty$*, alors* $I(t\phi_1) \longrightarrow -\infty$ *car* $\mu > 2$*, il existe donc* $t_0 > 0$ *tel que* $I(t_0\phi_1) < 0$*.*
Pour $e = t_0\phi_1$ *et* $t_0 > r$ *on a*

$$\|e\| = \|t_0\phi_1\| = t_0 > r \textit{ et } I(e) < 0.$$

4. Vérifions la condition de Palais-Smale.
Soit (u_n) *une suite de Palais-Smale, alors il existe* $C', C'' > 0$ *telles que*

$$I(u_n) \leq C' \quad \textit{et} \quad -I'(u_n)u_n \leq C''\|u_n\|,$$

donc pour $C = \max\{C', \frac{C''}{\mu}\}$*, on a*

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \leq C(1 + \|u_n\|). \qquad (*)$$

D'autre part

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \int_\Omega (\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n))\, dx,$$

en utilisant les conditions (2.2) et (2.19) on arrive à

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu})m_0\|u_n\|^2 + \int_\Omega (\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n))\, dx.$$

Posons $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *avec* $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |x| \leq R\}$ *et* $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |x| > R\}$. *Puisque* $0 \leq \frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)$ *dans* Ω_2, *alors*

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu})\|u_n\|^2 + \int_{\Omega_1} (\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n))\, dx,$$

et comme f *et* F *sont continues dans* Ω_1, *alors*

$$\int_{\Omega_1} (\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)) \geq -A|\Omega|,$$

ce qui implique que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu})\|u_n\|^2 - A|\Omega|. \qquad (**)$$

$(*)$ *et* $(**)$ *impliquent que*

$$0 \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}) m_0 \|u_n\|^2 + C\|u_n\| - A|\Omega|.$$

Supposons que $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$ *alors*

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}) m_0 \|u_n\|^2 - C_5\|u_n\| - A|\Omega| \longrightarrow +\infty \quad \text{car } \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} > 0,$$

contradiction.
On conclut que la suite (u_n) *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$ *et d'après le lemme (2.2) la suite* (u_n) *admet une sous-suite notée encore* (u_n) *convergente vers* $u \in H_0^1(\Omega)$ *et on a*

- $\|u_n\|^2 \longrightarrow \|u\|^2$.
- $f(x, u_n) \longrightarrow f(x, u)$ *p.p car* f *est continue.*

Puisque $\|I'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0$ *(avec* $H^{-1}(\Omega)$ *est le dual de* $H_0^1(\Omega)$*) alors*

$$M(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi\, dx - \int_\Omega f(x, u_n)\phi\, dx \longrightarrow 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

En passant à la limite on obtient

$$M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi\, dx = \int_\Omega f(x, u)\phi\, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ainsi u *est une solution du problème (2.15).*
Comme la démonstration de l'existence de la solution reste valable pour $u^+ = \max\{u, 0\}$, *on conclut que le problème admet une solution positive.*

Chapitre 3

Résultat d'existence de solutions pour un problème elliptique de type Kirchhoff avec terme singulier

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'existence de solutions positives du problème suivant :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= \frac{h(x)}{u^\gamma} + k(x)u^\alpha \quad\quad dans \;\; \Omega \\ u &> 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; dans \;\; \Omega \\ u &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; sur \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset R^N, N \geq 2$, est un domaine borné de classe C^1, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$.
Ce problème est le cas stationnaire de l'équation hyperbolique de type Kirchhoff

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u)$$

qui est motivée par la description mathématique des vibrations d'une corde élastique attachée aux extrémités. Pour plus d'informations on peut consulter [4], [8] et [9].

Rappelons qu'une solution de (3.1) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ strictement positive telle que :

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega \left(\frac{h(x)}{u^\gamma} + k(x)u^\alpha\right)\phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Donnons à présent le résultat d'existence de solutions pour le problème (3.1).

Théorème 3.1
Soient $h, k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et strictement positives, α et γ deux réels de l'intervalle $]0,1[$ et $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\exists m_0 > 0, \quad \theta_1 > 0 \; tels; \quad M(t) \geq m_0 \quad \forall t \geq \theta_1, \tag{3.2}$$

et

$$\theta_2 := sup\{t > 0; M(t) \leq 0\} > 0. \tag{3.3}$$

Alors le problème (3.1) admet une solution positive.

Remarque 3.1
La condition (3.2) implique que θ_2 est fini.

Pour démontrer ce théorème, on commence par approximer de problème (3.1) par la famille des problèmes suivants :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= \frac{h(x)}{(\epsilon+u)^\gamma} + k(x)u^\alpha \quad dans \;\; \Omega \\ u &> 0 \qquad\qquad\qquad dans \;\; \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad sur \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

où ϵ est un paramètre positif destiné à tendre vers 0.

Lemme 3.1
Pour tout $\epsilon > 0$ le problème (3.4) possède une solution u_ϵ.

Preuve 3.1
La preuve est basée sur la méthode de Galerkin. Considérons d'abord le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -M^+(\|u\|^2)\Delta u &= \frac{h(x)}{(\epsilon+|u|)^\gamma} + k(x)\,|u|^\alpha \quad dans \;\; \Omega \\ u &> 0 \qquad\qquad\qquad dans \;\; \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad sur \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $M^+ : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$M^+(t) = \begin{cases} 0 & si \; 0 \leq t \leq \theta_2. \\ M(t) & si \; t > \theta_2. \end{cases}$$

Soit $B = \{\psi_1, \psi_2, ...\}$ une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$, et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé soit $V_n = eng\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ l'espace vectoriel engendré par $\psi_1, ..., \psi_n$.
V_n est isométrique à $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $u = \sum_{i=1}^n v_i \psi_i \in V_n$ posons $L(u) = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, alors L est un isomorphisme, de plus $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = |v|_n^2$ où $|v|_n$ désigne la norme euclidienne de v dans $\mathbb{R}^n$.

Pour utiliser la proposition (1.3), définissons l'application $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *par :*

$$F(v) = (F_1(v), ..., F_n(v))^T$$

où

$$F_i(v) = M^+(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u.\nabla\psi_i\, dx - \int_\Omega \frac{h(x)\psi_i}{(\epsilon+|u|)^\gamma}\, dx - \int_\Omega k(x)|u|^\alpha\psi_i\, dx \quad , i = 1, ..., n.$$

et $u = \sum_{i=1}^n v_i\psi_i$*. Avec ces notations on a,*

$$\langle F(v), v\rangle = M^+(\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^\gamma}\, dx - \int_\Omega k(x)|u|^\alpha u\, dx.$$

Par utilisation de l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on trouve ;

$$\int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^\gamma}\, dx \leq \|h\|_\infty \int_\Omega \frac{|u|}{\epsilon^\gamma}\, dx \leq C_\epsilon\|u\|,$$

et

$$\int_\Omega k(x)|u|^\alpha u\, dx \leq \|k\|_\infty \int_\Omega |u|^{\alpha+1}\, dx \leq C\|u\|^{\alpha+1},$$

où les constantes C *et* C_ϵ *sont indépendantes de* n*.*
De ce qui précède on écrit

$$\langle F(v), v\rangle \geq M^+(\|u\|^2)\|u\|^2 - C_\epsilon\|u\| - C\|u\|^{\alpha+1}.$$

Prenons $\|u\|^2 \geq \theta_1$*, donc* $M^+(\|u\|^2) = M(\|u\|^2) > m_0$ *et par suite*

$$\langle F(v), v\rangle \geq m_0\|u\|^2 - C_\epsilon\|u\| - C\|u\|^{\alpha+1}.$$

Maintenant pour $\|u\| = |v|_n = r$ *assez grand, on aura* $\langle F(v), v\rangle > 0$*, car* $\alpha + 1 < 2$*. En conséquence il existe, d'après la proposition (1.3), un élément* v *tel que* $F(v) = 0$*, et puisque* V_n *s'identifie à* $\mathbb{R}^n$*, il existe* $u_n \in V_n$ *tel* $\|u_n\| = |v|_n \leq r$ *et* $F(u_n) = 0$*, d'où*

$$M^+(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_i\, dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi_i}{(\epsilon+|u_n|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u_n|^\alpha\psi_i\, dx \quad , i = 1, ..., n;$$

ce qui implique

$$M^+(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi\, dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon+|u_n|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u_n|^\alpha\psi\, dx \quad \forall\psi \in V_n.$$

Fixons maintenant $m \leq n$, $V_m \subset V_n$, donc

$$M^+(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi \, dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u_n|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u_n|^\alpha \psi \, dx \quad \forall \psi \in V_m. \tag{3.6}$$

Puisque $(\|u_n\|)$ est bonée dans $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite encore notée (u_n) telle que :

- $\|u_n\|^2 \longrightarrow t_0$.
- $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.
- $u_n \longrightarrow u$ *dans* $L^2(\Omega)$.
- $u_n \longrightarrow u$ *p.p dans* Ω.

Par conséquent

$$M^+(\|u_n\|^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M^+(t_0),$$

car M^+ est continue et

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi \, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \nabla u \nabla \psi \, dx \quad \forall \psi \in V_m,$$

en outre

$$\left| \frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u_n|)^\gamma} \right| \leq \frac{C}{\epsilon^\gamma}|\psi| \in L^1(\Omega),$$

$$\frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u_n|)^\gamma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u|)^\gamma} \quad p.p \text{ dans } \Omega,$$

d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue[1], on aura

$$\int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u_n|)^\gamma}\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u|)^\gamma}\, dx \quad \forall \psi \in V_m.$$

De plus on a,

$$\int_\Omega k(x)|u_n|^\alpha \psi \, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega k(x)|u|^\alpha \psi \, dx \quad \forall \psi \in V_m$$

Passons à la limite dans (3.6)

$$M^+(t_0)\int_\Omega \nabla u \nabla \psi \, dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon + |u|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha \psi \, dx \quad \forall \psi \in V_m,$$

1. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), plus connu sous le nom de Henri Lebesgue, est l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du vingtième siècle. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'université de Nancy en 1902.

et puisque m est arbitraire dans $\mathbb{N}$, alors

$$M^+(t_0)\int_\Omega \nabla u \nabla \psi \, dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon+|u|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha \psi \, dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

De l'équation précédente on remarque que $M^+(t_0) > 0$,et donc $M^+(t_0) = M(t_0)$, ce qui implique que

$$M(t_0)\|u\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha u \, dx. \tag{3.7}$$

Prenons maintenant $\psi = u_n$ dans l'équation (3.6)

$$M^+(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\epsilon+|u_n|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u_n|^\alpha u_n \, dx.$$

Passons à la limite

$$M(t_0)t_0 = \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^\gamma}\, dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha u \, dx. \tag{3.8}$$

Les deux équations (3.7) et (3.8) donnent

$$M(t_0)t_0 = M(t_0)\|u\|^2 \Longrightarrow t_0 = \|u\|^2.$$

Conclusion u est solution du problème (3.4).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mettons $\epsilon = \frac{1}{n}$ et posons $u_{\frac{1}{n}} = u_n$.

Lemme 3.2
Il existe $\delta > 0$ tel que $M(\|u_n\|^2) \geq \delta > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve 3.2
On démontre par l'absurde. Supposons que $\underline{\lim}_{n\to+\infty} M(\|u_n\|^2) = 0$.
Si c'est le cas, on en déduit que la suite $(\|u_n\|^2)$ est bornée. Donc il existe une sous-suite (u_n) vérifiant

$$\|u_n\|^2 \longrightarrow \theta_0 \quad et \quad u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Et puisque la fonction M est continue alors

$$0 = \underline{\lim}_{n\to+\infty} M(\|u_n\|^2) = \lim_{n\to+\infty} M(\|u_n\|^2) = M(\theta_0).$$

Or

$$-M(\|u_n\|^2)\Delta u_n = \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} + k(x)u_n^\alpha.$$

Multiplions cette équation par φ où φ est une fonction positive de $H_0^1(\Omega)$, et intégrons sur Ω nous obtenons

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi dx = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)u_n^\alpha\varphi dx,$$

et donc

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi dx > \int_\Omega k(x)u_n^\alpha\varphi dx.$$

En passant à la limite dans les deux membres, nous aboutissons à

$$0 \geq \int_\Omega k(x)u^\alpha\varphi dx.$$

C'est une contradiction, et le lemme est démontré.

Lemme 3.3
La suite $(\|u_n\|)$ est bornée.

Preuve 3.3
Par multiplication par u_n et intégration sur Ω on a

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}\,dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}\,dx.$$

Par l'inégalité de Hölder on écrit

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+|u_n|)^\gamma}\,dx \leq \|h\|_\infty \int_\Omega u_n^{1-\gamma} \leq \|h\|_\infty |\Omega|^\gamma (\int_\Omega u_n)^{1-\gamma}\,dx \leq C_1\|u_n\|^{1-\gamma},$$

car $u_n^{1-\gamma} \in L^{\frac{1}{1-\gamma}}(\Omega)$ et

$$\int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}\,dx \leq \|k\|_\infty \int_\Omega u_n^{\alpha+1}\,dx \leq C_2\|u_n\|^{\alpha+1},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de n.
Donc

$$\delta\|u_n\|^2 \leq M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \leq C_1\|u_n\|^{1-\gamma} + C_2\|u_n\|^{\alpha+1},$$

et par suite

$$\delta \leq C_1\|u_n\|^{-1-\gamma} + C_2\|u_n\|^{\alpha-1}$$

maintenant si $(\|u_n\|)$ n'est pas bornée nous aurons $\delta \leq 0$ (car $-1-\gamma, \alpha-1 < 0$), ce qui est faux, donc $(\|u_n\|)$ est bornée. Par conséquent

$$0 < \delta \leq M(\|u_n\|^2) < M_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lemme 3.4
La suite (u_n) obtenue dans le lemme (3.1) converge vers une solution du problème (3.1).

Preuve 3.4
Comme on a vu dans le lemme précédent, la suite (u_n) est bornée ; et donc il existe une sous-suite convenable de (u_n) vérifiant :

- $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.
- $u_n \longrightarrow u$ *dans* $L^q(\Omega),\ 1 \leq q < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$.
- $u_n \longrightarrow u$ *p.p dans* Ω.

Prenons maintenant $\psi_1 > 0$ une fonction propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associée à la première valeur propre λ_1, de sorte que,

$$g_0\mu > \lambda_1 M_\infty \psi_1(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

où $g_0 = \min\{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} h(x), \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} k(x)\} > 0$, $\mu = \min\{\frac{1}{(1+t)^\gamma} + t^\alpha; t \geq 0\} > 0$ et M_∞ introduit dans le lemme précédent.
On a

$$\left\{\begin{array}{rll} -M(\|u_n\|^2)\Delta u_n & = \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} + k(x)u_n^\alpha & \text{dans } \Omega \\ & \geq \frac{h(x)}{(1+u_n)^\gamma} + k(x)u_n^\alpha & \\ & \geq g_0\mu & \\ & > \lambda_1 M_\infty \psi_1 & \text{dans } \Omega \\ u_n & = \psi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

et nous obtenons, puisque ψ_1 est une fonction propre associée à λ_1 pour le laplacien,

$$\left\{\begin{array}{rll} -\Delta(M(\|u_n\|^2 u_n)) & > -\Delta(M_\infty\psi_1) & \text{dans } \Omega \\ M(\|u_n\|^2 u_n) & = M_\infty\psi_1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Appliquons maintenant le théorème de maximum, alors

$$M(\|u_n\|^2)u_n > M_\infty\psi_1 \quad \text{dans } \Omega,$$

donc

$$u_n > \frac{M_\infty}{M(\|u_n\|^2)}\psi_1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Prenons u_n comme fonction test, nous écrivons

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}\,dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}\,dx.$$

Estimons les intégrales du deuxième membre,

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}\,dx \leq \|h\|_\infty \int_\Omega \frac{|u_n|}{u_n^\gamma}\,dx \leq \frac{\|h\|_\infty}{C}\int_\Omega \frac{|u_n|}{\psi_1^\gamma}\,dx \leq C^{'}\|u_n\|,$$

où la dernière inégalité est obtenue par l'inégalité de Hardy-Sobolev.
D'autre part

$$\int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}\,dx \leq \|k\|_\infty \int_\Omega u_n^{\alpha+1}\,dx \leq C\|u_n\|^{\alpha+1}.$$

Ce qui implique, de l'équation et des deux estimations, que

$$\delta\|u_n\|^2 \leq C\|u_n\|^{\alpha+1} + C^{'}\|u_n\|.$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{u^\gamma}.$$

Par conséquent

$$M(t_0)\int_\Omega \nabla u\nabla\psi\,dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{u^\gamma}\,dx + \int_\Omega k(x)u^\alpha\psi\,dx \quad \forall\psi\in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Rappelons que u_n est solution du problème (3.1) où l'on a posé $\epsilon = 1/n$, donc

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}$$

Utilisons encore une fois le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, d'où

$$M(t_0)t_0 = \int_\Omega h(x)u^{1-\gamma} + \int_\Omega k(x)u^{\alpha+1} \tag{3.10}$$

Prenons maintenant $\psi = u$ dans (3.9), et comparons avec (3.10), il résulte que $M(t_0)t_0 = M(t_0)\|u\|^2$, d'où $\|u\|^2 = t_0$ car $M(t_0)\neq 0$. Par suite

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\psi = \int_\Omega \frac{h(x)}{u^\gamma}\psi + \int_\Omega k(x)u^\alpha\psi$$

et u est bien une solution du problème initial.

Bibliographie

[1] C. O. Alves, A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasi- linear elliptic equation of Kirchhoff type, Computers and mathematics with applications, 49 (2005) 85-93.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle et applications, Dunod, Paris(1999).

[3] H. Cartan, Calcul différentiel, Masson, Paris(1967).

[4] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Birkhauser Advanced Texts, (2000).

[5] Francisco Julio S.A. Corrêa, On an elliptic equation involving a Kirchhoff term and singular perturbation, Bull. Belg. Math. Soc. 14 (2007), 15-24.

[6] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduates studies in math- ematics, Vol. 19, Americain Mathematical Society, (1998).

[7] O. Kavian, Introduction à la Théorie des Points critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques, Springer-Verlag, (1993).

[8] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris (1969).

[9] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, Instituto de Matemátca, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ,(1978).

[10] T.F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Analysis 63 (2005) e1967-1977.